§ 1 Выпуклые оболочки. Лемма и теорема Каратеодори

X — линейное нормированное пространство.

Определение 1.1 . *Множество $A \subset X$ выпукло $\Leftrightarrow$ для любых точек x_1 и x_1 из A отрезок $[x_1,x_2] \overset{def}{=} \{(1-t)x_1+tx_2 \mid t\in[0,1]\}$ принадлежит A.*

Упражнение 1.1 $^{(\flat)}$ *Пересечение выпуклых — выпукло.*

Упражнение 1.2 $^{(\flat)}$ *Замыкание $\overline{A}$ выпуклого A — выпукло. Внутренность $\mathrm{int}A = A\setminus\partial A$ выпуклого множества A тоже выпукла. Выпукло ли A, если выпукло $\overline{A}$? (Рассмотреть множество рациональных точек на $[0,1]$.)*

Предложение 1.1 *Выпуклая комбинация $\{x=\sum\limits_1^n t_kx_k \mid t_k\ge 0\,, \sum\limits_1^n t_k=1\}$ точек $x_1,\dots,x_n$ выпуклого множества A принадлежит A.*

♡ Утверждение верно при $t_n=1$. Если $t_n<1$, то справедливость утверждения при $k=n-1$ влечет $x^*=\sum\limits_1^{n-1} t_k^*x_k\in A$, где $t_k^*=t_k/(1-t_n)$ $\Rightarrow$ $(1-t_n)x^*+t_nx_n\in A$. □

Определение 1.2 *Аффинная оболочка $\mathbf{aff}(B)$, соответственно, выпуклая оболочка $\mathbf{co}(B)$ множества $B\subset X$ есть множество всех аффинных, соответственно, выпуклых комбинаций его точек. Таким образом,* $\mathbf{aff}(B) \overset{def}{=} \{x=\sum\limits_1^n t_kx_k \mid x_k\in B\,,\ t_k\in\mathbb{R}\,, \sum\limits_1^n t_k=1\,,\ n\in\mathbb{N}\}$,

$$\mathbf{co}(B) \overset{def}{=} \{x=\sum_1^n t_kx_k \mid x_k\in B\,,\ t_k\ge 0\,, \sum_1^n t_k=1\,,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Размерностью множества $\mathbf{co}(B)$ называется размерность пространства $\mathbf{aff}$(B).

Упражнение 1.3 $^{(\flat)}$ *Найти выпуклую оболочку прямой и точки вне нее. Верно ли, что выпуклая оболочка замкнутых множеств замкнута?*

Предложение 1.2 $\mathbf{co}(B)$ *есть наименьшее выпуклое множество, содержащее B.*

Действительно, $\mathbf{co}(B)$ выпукло, т.к. для $x=\sum\limits_1^m t_kx_k\in\mathbf{co}(B)$ и $y=\sum\limits_1^n s_ky_k\in\mathbf{co}(B)$ сумма $(1-t)x+ty=\sum\limits_1^m(1-t)t_kx_k+\sum\limits_1^n st_ky_k\in\mathbf{co}(B)$, как выпуклая оболочка точек $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$ (ввиду того, что $\sum\limits_1^m(1-t)t_k+\sum\limits_1^n ts_k=(1-t)+t=1$). Поэтому пересечение всех выпуклых, содержащих B (среди которых пространство X), не только содержит $\mathbf{co}(B)$ (в силу упр.3), но и содержится в B.

Следствие 1.1 *B выпукло тогда и только тогда, когда $B=\mathbf{co}(B)$.*

Лемма 1.1 *(Каратеодори). Если $\dim\mathbf{aff}(B)=d<\infty$, то любой элемент $x\in\mathbf{co}(B)$ может быть представлен в виде выпуклой оболочки не более, чем $d+1$ элементов из B.*

♡ Достаточно показать, что $x=\sum\limits_1^n t_kx_k\in\mathbf{co}(B)$, где $n\ge d+2$, $t_k\ge 0\,,\sum\limits_1^n t_k=1$, можно представить в виде $\sum\limits_1^n s_kx_k\in\mathbf{co}(B)$, где $s_k\ge 0\,,\sum\limits_1^n s_k=1$ и одно из чисел s_k равно нулю. Так как $n-1\ge d+1$ векторов $x_2-x_1,\dots,x_n-x_1$ принадлежат d-мерному пространству, значит $\exists$ $(a_2,\dots,a_n)\ne 0$, что $0=\sum\limits_2^n a_k(x_k-x_1)=\underbrace{\Big(-\sum\limits_2^n a_k\Big)}_{b_1}x_1+\sum\limits_2^n\underbrace{(a_k)}_{b_k}x_k=\sum\limits_1^n b_kx_k$. При этом, $\sum\limits_1^n b_k=0$ (т.к. $b_1=-\sum\limits_2^n b_k$) и $(b_1,\dots,b_n)\ne 0$. Значит есть $b_j<0$. Выберем то j_0 , для которого $h=-t_{j_0}/b_{j_0}<0$ принимает наименьшее значение. Тогда $x=\sum\limits_1^n t_kx_k=\sum\limits_1^n t_kx_k+h\sum\limits_1^n b_kx_k=\sum\limits_1^n\underbrace{\Big(t_k+hb_k\Big)}_{s_k\ge 0}x_k$. При этом $s_{j_0}=0$. □

Упражнение 1.4 *Показать, что выпуклая оболочка компакта может не быть компактом.* (*Рассмотреть вершины "гильбертового кирпича"* $\{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2 \mid 0 \le x_k \le 1/k\}$.)

Теорема 1.1 *(Каратеодори). Выпуклая оболочка конечномерного компакта — компакт.*

♡ Проверим, что из $\{z_k\}_{k\ge1} \subset \mathbf{co}(B)$ можно выбрать сходящуюся в $\mathbf{co}(B)$ подпоследовательность. Так как $\dim \mathbf{co}(B) = d < \infty$, то (по лемме) $z_k = \sum_1^{d+1} t_{k_i} z_{k_i}$, где $z_{k_i} \in B$. Из последовательности $\{z_{k_1}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_{k_1^j}\}$, сходящуюся к x_1 (ибо B — компакт), из $\{z_{k_2^j}\}$ (где $\{k_2^j\} = \{k_1^j\} \bigcap \{k_2\}$) — сходящуюся к x_2 и т.д. При этом, $t_{k_i^j} \to t_j \in [0,1]$. Значит $1 = \sum t_{k_i^j} \to \sum t_j = 1$ и $z_k = \sum\limits_1^{d+1} t_{k_i^j} z_{k_i^j} \to x = \sum t_j x_j \in \mathbf{co}(B)$. $\square$

§ 2 Теоремы отделимости

Определение 2.1 *Скажем, что множества A и B отделимы в нормированном пространстве X, если существует ненулевой функционал $x^* \in X^* = L(X, \mathbb{R})$, для которого*

$$\alpha \le \beta\,, \qquad \text{где} \qquad \alpha = \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle\,, \quad \beta = \inf_{b\in B}\langle x^*, b\rangle\,. \tag{2.1}$$

Если $\alpha < \beta$, то говорят, что множества A и B строго отделимы. При этом аффинная гиперплоскость $H(x^*, \gamma) = \{x \in X \mid \langle x^*, x\rangle = \gamma\}$ называется разделяющей множества A и B, если $\gamma \in [\alpha, \beta]$, а плоскости $H(x^*, \alpha)$ и $H(x^*, \beta)$ называются опорными, соответственно, к множествам A и B. Точки $a_0 \in \partial A$ и $b_0 \in \partial B$, для которых $\alpha = \langle x^*, a_0\rangle$, соответственно, $\beta = \langle x^*, b_0\rangle$, называются опорными для гиперплоскости $H(x^*, \alpha)$, соответственно, для гиперплоскости $H(x^*, \beta)$.

Упражнение 2.1 $^{(\flat)}$ *1). Проверить, что опорная гиперплоскость множества пересекается в опорной точке лишь с границей этого множества (т.е., как бы, опирается на него в этой точке).*
2). Пусть $X = \mathbb{R}$, $A = \{\,|x+2| \le 1\}$, $B = \{\,|x-3| < 1\}$. Построить графики двух отображений $x_+^* : x \mapsto \langle x^*, x\rangle$ и $x_-^* : x \mapsto \langle x^*, x\rangle$, подчиненных условию $\sup\limits_{a\in A}\langle x_+^*, a\rangle = \sup\limits_{b\in B}\langle x_-^*, b\rangle = \alpha$, где α — заданное число, например, $\alpha = -1$. Найти $\inf\limits_{a\in A}\langle x_+^*, a\rangle$, $\inf\limits_{b\in B}\langle x_+^*, b\rangle$ и сравнить с выбранным числом α. Взяв аффинную гиперплоскость $H \subset X$ (в данном случае, точку), разделяющую A и B, найти для $x_\pm^*$ то число $\gamma_\pm$, при котором аффинная гиперплоскость $H(x_\pm^*, \gamma_\pm)$ совпадает с H.

Определение 2.2 *Пусть A и B — подмножества линейного пространства X. Их геометрической суммой, говорят также суммой Минковского (соответственно, разностью), называется множество $A + B = \{x = a + b \mid a \in A\,, b \in B\}$ (соответственно, $A - B = \{x = a - b \mid a \in A\,, b \in B\}$).*

Упражнение 2.2 $^{(\flat)}$ *Найти $A \pm B \overset{def}{=} \{x = a \pm b \mid a \in A\,, b \in B\}$, если*
1) $A = \{(x,y) \in R^2 \mid y = ax,\ |x| < 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 \mid y = b\,x,\ |x| \le 1\}$;
2) $A = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le a^2 < x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \le b^2 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

Замечание 2.1 *Поскольку*

$$\sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle \le \inf_{b\in B}\langle x^*, b\rangle \;\Leftrightarrow\; \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle - \inf_{b\in B}\langle x^*, b\rangle \le 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle + \sup_{b\in B}\langle x^*, -b\rangle \le 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_{\substack{a\,\in\,A\\ b\,\in\,B}}\langle x^*, a-b\rangle \le 0\,,$$

то множества A и B отделимы "$\le$" (строго отделимы "$<$") тогда и только тогда, когда точка $\{0\} \in X$ отделима (строго отделима) от множества $C = A - B \overset{def}{=} \{x = a - b \mid a \in A\,, b \in B\}$.

Упражнение 2.3 $^{(\flat)}$ *Показать, что $A \pm B$ открыто, если хотя бы одно из множеств A или B открыто. Верно ли, что $A \pm B$ замкнуто, если хотя бы одно из множеств A или B замкнуто? А если оба компакты? Что есть $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,,\ y \ge 1/x\} + \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0\,,\ y = 0\}$?*

Упражнение 2.4 $^{(\flat)}$ *Показать, что множества $A \pm B$ выпуклы, если A и B выпуклы.*

Ниже будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 2.1 *(Первая теорема отделимости). Пусть A и B — непустые непересекающиеся выпуклые множества в нормированном пространстве X. Они отделимы, если $\dim X < \infty$. Если же $\dim X = \infty$, то отделимость A и B можно гарантировать, если пересечение внутренности одного из множеств с другим не пусто (например, если $\mathrm{int}B \bigcap A \neq \emptyset$).*

Теорема 2.2 *(Вторая теорема отделимости). В нормированном пространстве X два непустые непересекающиеся выпуклые замкнутые множества A и B строго отделимы, если хотя бы одно из этих множеств — компакт.*

Следствие 2.1 *Любая точка в нормированном пространстве X, не принадлежащая выпуклому замкнутому множеству $A \subset X$, строго отделима от A.*

Упражнение 2.5 *(а) Доказать, что $\mathbf{co}(B)$ имеет непустую внутренность в $\mathbf{aff}(B)$ в том случае, когда $0 < \dim \mathbf{aff}(B) < \infty$.*
(б)$^{(\sharp)}$ Привести пример множества $B \subset l_2$, у которого $\mathbf{co}(B)$ не лежит ни в каком замкнутом подпространстве $H \subsetneq l_2$, но имеет пустую внутренность в l_2.

Указание. (а) Если $0 < \dim \mathbf{aff}(B) = d < \infty$, то множество $\{x = \sum\limits_1^{d+1} t_k x_k \mid t_k > 0, \sum\limits_1^{d+1} t_k = 1\}$ не пусто, открыто в $\mathbf{aff}(B)$ и лежит в $\mathbf{co}(B)$. (б) “гильбертов кирпич” $\{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2 \mid 0 \le x_k \le 1/k\}$.

Упражнение 2.6 $^{(\sharp)}$ *В нормированном пространстве $X = l_2$ два аффинных множества $A = \{0\}$, $B = \{b = (b_1, \dots, b_n, \dots) \in l_2 \mid \sum b_k = 1\}$ очевидно не пересекаются. Проверить, что они выпуклы. Доказать, что они неотделимы. Почему в этом случае не применимы теоремы об отделимости?*

Указание. Для $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, \dots) \in X^*$ имеем: $x^*\Big|_A = 0$, а $\inf\limits_{b \in B} \langle x^*, b\rangle = -\infty$ и $\sup\limits_{b \in B} \langle x^*, b\rangle = +\infty$, если $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, \dots) \neq 0$. Действительно, если $x_{j_0}^* \neq 0$, то $\lim\limits_{N \to \infty} \langle x^*, b^N\rangle = +\infty$ для $b^N = (b_1^N, \dots, b_n^N, \dots)$ с $b_k^N = 0$ при $k \in \{1, \dots, k_N\} \setminus \{k = j_0\}$, где k_N определяется условием: $|x_n^*| \le \frac{1}{N}$ $\forall\, n > k_N$ (что влечет $\sqrt{\sum\limits_{n > k_N} (x_n^*)^2} \le \mathrm{const}$), $b_{j_0}^N = N/x_{j_0}^*$ и $\sum\limits_{n > k_N} b_n^N = 1 - N/x_{j_0}^*$ (что дает $\sum b_k = 1$).

Упражнение 2.7 $^{(\flat)}$ *Дать пример двух выпуклых множеств в $\mathbb{R}^2$, которые нельзя строго отделить.*

Доказательство теоремы 2.1 в случае, когда $X = \mathbb{R}^d$. Пусть $\overline{C}$ — замыкание множества $C = A - B$, а $q \in \overline{C}$ — точка, ближайшая к $\{0\} \in \mathbb{R}^d$ (т.е. в точке q достигается минимум расстояния между $\{0\} \in \mathbb{R}^d$ и компактом $\overline{C} \bigcap \{\|x\| \le R\}$, где $R \gg 1$.) В случае $q = (q_1, \dots, q_d) \neq \{0\}$, положим $\langle x^*, x\rangle = \sum q_k x_k$ для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Плоскость $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x^*, x\rangle = 0\}$ ортогональна вектору $\overrightarrow{q}$ с координатами $(q_1, \dots, q_d)$ и определяет полупространство $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x^*, x\rangle > 0\}$, содержащее множество C. Поэтому $\langle x^*, c\rangle > 0\ \forall c \in C$. В той ситуации, когда расстояние от $\{0\} \in \mathbb{R}^d$ до C равно нулю (т.е. $\{0\} \in \partial C$), существует сходящаяся к $\{0\}$ последовательность точек $q^j = (q_1^j, \dots, q_d^j)$, лежащих в $\mathbb{R}^d \setminus \overline{H}_+$. Они определяют последовательность функционалов $x_j^* : x \mapsto \langle x_j^*, x\rangle = -\sum_k q_k^j x_k$, для которых $\langle x_j^*, c\rangle > 0\ \forall c \in C$. Положим $y_j^* = x_j^*/\|x_j^*\|$. Функционалы y_j^* имеют единичную норму. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^d$ последовательность $\{y_j^*\}$ содержит подпоследовательность $\{y_{j_k}^*\}$, сходящуюся к ненулевому функционалу $y^* \in X^*$ (очевидно с единичной нормой). При этом, $\lim\limits_{j_k \to \infty} \langle y_{j_k}^*, c\rangle = \langle y^*, c\rangle \ge 0\ \forall c \in C$. $\square$

Доказательство теоремы 2.1 в случае $\dim X = \infty$ использует известную из курса функционального анализа теорему Хана–Банаха[1] и следующее

[1] Пусть в нормированном пространстве X задан *выпуклый функционал* $p : X \to \mathbb{R}$ /это значит, что $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для любых $x \in X$, $y \in X$ и $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall\, \alpha > 0$ /. Тогда заданный на подпространстве $X_0 \subset X$ линейный непрерывный функционал $l_0 \in L(X_0, \mathbb{R})$, подчиненный условию $\langle l_0, x\rangle \le p(x)$ для $x \in X_0$, допускает продолжение до функционала $l \in L(X, \mathbb{R})$, такого, что $\langle l, x\rangle \le p(x)$ для $x \in X$.

Определение 2.3 *Пусть* $U \subset X$, $\alpha > 0$, $\alpha U = \{\alpha x\,,\ x \in U\}$. *Отображение* $p_U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *заданное формулой*

$$p_{U}(x) = \begin{cases} 0\,, & \textit{если}\ \ x \in \alpha U\ \forall\, \alpha > 0\,, \\ +\infty\,, & \textit{если}\ \ x \notin \alpha U\ \forall\, \alpha > 0\,, \\ \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha U\} & \textit{в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

называется функционалом Минковского множества U.

Замечание 2.2 *Исходя из определения функционала Минковского, величину* $p_{U}(x)$ *можно вычислить следующим образом. Задав точку* x *, надо выбрать то минимальное* α, *при котором замыкание множества* αU *будет содержать точку* x. *А можно поступить иначе, выпустив из начала координат луч, проходящий через точку* x *, и затем сдвигать точку* x *вдоль этого луча до пересечения с границей множества* U. *Точкой пересечения будет* $(p_{U}(x))^{-1}x$.

В частности, для выпуклого множества U *, содержащего непустую окрестность начала координат,* $p_{U}(x) \geq 1$ *, если* $x \notin U$, *а если* $x \in U$, *то* $p_{U}(x) \leq 1$.

Упражнение 2.8 $^{(\flat)}$ *Вычислить* $p_{U}(x)$, *если*

(а) $U = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|^p \leq 1\}$, *где* $p \geq 1$; *(б)* $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;
(в) $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > x_1^2 - 1\}$; *(г)* $U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > x_1^2 + 1\}$.

Предложение 2.1 *Пусть* U *— выпуклое множество в нормированном пространстве* X, *для которого* $\{0\} \in \operatorname{int} U$ *. Тогда функционал Минковского* p_{U} *является* полунормой[2], *т.е.*

$$p_{U}(x+y) \leq p_{U}(x) + p_{U}(y) \quad \textit{для любых} \quad x \in X\,,\ y \in X\,,$$

$$p_{U}(\lambda x) = \lambda p_{U}(x) \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0 \qquad \textit{и} \qquad p_{U}(0) = 0\,.$$

Если к тому же множество U *ограничено и центрально-симметрично (т.е.* $x \in X \ \Leftrightarrow\ -x \in X$*), то функционал Минкоского является нормой.*

Упражнение 2.9 $^{(\sharp)}$ *Доказать предложение 2.1.*

Решение. Так как $\{0\} \in \operatorname{int} U$, то $p_{U}(0) = 0$ и $\{\|x\| < \varepsilon\} \subset U$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. А поскольку $\|\alpha^{-1}x\| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \alpha > \|x\|/\varepsilon$ для любого $x \in X$, то $p_{U}(x) < \infty$ для любого $x \in X$. Далее, если $\lambda > 0$ и $y = \lambda x$, то полагая $\alpha = \lambda\beta$, имеем:

$$p_{U}(\lambda) = \sup\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}\lambda x \in U\} = \sup\{\lambda\beta > 0 \mid \beta^{-1}x \in U\} = \lambda \sup\{\beta > 0 \mid \beta^{-1}x \in U\} = \lambda p_{U}(x).$$

Пусть теперь $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, а $\varepsilon > 0$. Выберем α_k ($k = 1, 2$) так, чтобы $p_{U}(x_k) < \alpha_k < p_{U}(x_k) + \varepsilon$. Левое неравенство означает, что $x_k/\alpha_k \in U$. Так как U выпукло, то $tx_1/\alpha_1 + (1-t)x_2/\alpha_2 \in U$ при $t = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$. Это значит, что $(x_1 + x_2)/(\alpha_1 + \alpha_2) \in U$, т.е. $p_{U}(x_1 + x_2) < \alpha_1 + \alpha_2$. Отсюда, учитывая неравенство $\alpha_k < p_{U}(x_k) + \varepsilon$, получаем $p_{U}(x_1 + x_2) \leq p_{U}(x_1) + p_{U}(x_2)$ (в силу возможности выбрать $\varepsilon > 0$ как угодно малым). В том случае, когда U ограничено, $p_{U}(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. (иначе $\lim\limits_{\alpha \to +0} \|x/\alpha\| = \infty$.) Наконец, если множество U центрально-симметрично, то $p_{U}(\lambda x) \overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda p_{U}(x) = \lambda p_{U}(-x) = p_{U}(-\lambda x) \overset{-\lambda \geq 0}{=} |\lambda| p_{U}(x)$. $\square$

Переходя к доказательству теоремы 2.1 в случае $\dim X = \infty$, заметим сначала, что множество B можно считать открытым. Действительно, предположение $\inf\limits_{b \in B} \langle x^*, b\rangle < \inf\limits_{b_0 \in \operatorname{int} B} \langle x^*, b_0\rangle = r$ влечет существование такого $b \in B$, что $\langle x^*, b\rangle = \widehat{r} = (1-\delta)r < r$. При этом, $(1-t)b + tb_0 \in B_0$ при малых $t > 0$ что приводит к требуемому противоречию

$$r \leq \inf_{b_0 \in \operatorname{int} B} \langle x^*, (1-t)b + tb_0\rangle = (1-t)\langle x^*, b\rangle + t \inf_{b_0 \in \operatorname{int} B} \langle x^*, b_0\rangle = \Big[(1-t)(1-\delta) + t\Big] r = [1 - \delta(1-t)]r < r.$$

[2] Для полунормы в отличие от нормы ее равенство нулю на каком-то элементе не означает, что этот элемент является нулевым. Отметим, что топология, например, в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (на котором определяются обобщенные функции с компактным носителем) задается счетным набором полунорм $p_N(\varphi) = \sum\limits_{|\alpha| \leq N} \inf\limits_{\|x\| \leq N} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ и потому метризуема с метрикой $\rho(\varphi, \psi) = d(\varphi - \psi)$, где $d(\varphi) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \min(p_N(\varphi), 1)$.

Положим теперь $U = A - B - c$, где c некоторая точка из $(A - B)$. Легко проверяется (см. упражнения 2.3 и 2.3), что множество $A - B$, а потому множество $U = A - B - c$ выпукло и открыто ($A - B$ есть объединение по $a \in A$ открытых множеств $a - B$.) Далее, $\{0\} \in U$ (т.к. $c \in A - B$). Следовательно, на X определена полунорма (функционал Минковского) $p_U : x \mapsto p_U(x)$. Кроме того, $-c \notin U$ (ибо иначе $A \bigcap B = \emptyset$). Значит включение $-c \in sU$ возможно лишь при $s \geq 1$, т.е. $p_U(-c) \geq 1$. Определим на прямой $l_0 = \{x = tc\,, t \in \mathbb{R}\}$ линейный функционал f_0 формулой: $\langle f_0, tc\rangle = -t$. Проверим, что $\langle f_0, x\rangle \leq p_U(x)$ для любых $x = tc \in l_0$. При $t > 0$ имеем: $p_U(tc) \geq 0 \geq -t = \langle f_0, tc\rangle$, а при $t < 0$:

$$p_U(tc) = p_U(-t(-c)) = -tp_U(-c) \geq -t = \langle f_0, tc\rangle\,.$$

Согласно теореме Хана-Банаха существует продолжение $f \in X^*$ функционала f_0, для которого $\langle f, x\rangle \leq p_U(x) \quad \forall\, x \in X$. В частности, $\langle f, a - b - c\rangle \leq p_U(a - b - c)$ для любых $a \in A$, $b \in B$. А поскольку $a - b - c \in U$ и потому $p_U(a - b - c) \leq 1$, то $\langle f, a\rangle - \langle f, b\rangle - \langle f, c\rangle \leq 1$. $\Rightarrow$ $\langle f, a\rangle \leq \langle f, b\rangle$, т.к. $\langle f, c\rangle = -1$. Тем самым, $\sup\limits_{a\in A}\langle f, a\rangle \leq \inf\limits_{b\in B}\langle f, b\rangle$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2 Пусть A — компакт, а $V = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ единичный шар. Проверим, что множества $A + rV$ и B не пересекаются при достаточно малом $r > 0$. В противном случае найдутся последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{b_k\} \subset B$, для которых $\|a_k - b_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Так как A — компакт, можно считать, что $a_k \to a \in A$. Но тогда и $b_k \to a$. В силу замкнутости B, $a \in B$. Таким образом, $A \bigcap B \neq \emptyset$. Итак, открытое выпуклое множество $A + rV$ не пересекается с B. По теореме 2.1 найдется ненулевой функционал x^*, такой, что $\sup\limits_{a\in A, x\in V}\langle x^*, a + rx\rangle \leq \inf\limits_{b\in B}\langle x^*, b\rangle$. Но

$$\sup_{a\in A, x\in V}\langle x^*, a + rx\rangle = \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle + \sup_{x\in V}\langle x^*, rx\rangle = \sup_{a\in A}\langle x^*, a\rangle + r\|x^*\|\,.$$

Следовательно, $\sup\limits_{a\in A}\langle x^*, a\rangle + r\|x^*\| \leq \inf\limits_{b\in B}\langle x^*, b\rangle$ и потому $\sup\limits_{a\in A}\langle x^*, a\rangle < \inf\limits_{b\in B}\langle x^*, b\rangle$. $\square$

Упражнение 2.10 $^{(\sharp)}$ *Пусть* $l^\infty(\mathbb{Z})$ *— пространство всех ограниченных функций из* $\mathbb{Z}$ *в* $\mathbb{R}$, *а* φ *— левый сдвиг на* $l^\infty(\mathbb{Z})$, *т.е.* $(\varphi f)(x) = f(x + 1)$ *для* $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$. *Доказать, что существует такой линейный функционал* $\Psi : l^\infty(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, *что (i)* $\Psi(\mathrm{const}) = \mathrm{const}$ *(ii)* $\Psi(\varphi f) = \Psi(f)$.

Указание. Пусть $a = (\ldots, a_{-m}\ldots, a_0, \ldots, a_n, \ldots) \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $a_j = 1\ \forall\ j$, а $B = \{b = f - \varphi f\,, f \in l^\infty(\mathbb{Z})\}$. Имеем: $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n \geq 0$, т.к. иначе $f_{n+1} - f_n \geq c > 0$, что противоречит ограниченности элементов пространства $l^\infty(\mathbb{Z})$. (На самом деле, $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n = 0$, поскольку $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n \leq 0$ по аналогичным причинам). Так как $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n = 1$, то $a \notin B$. По теореме Хана–Банаха существует линейный непрерывный функционал Ψ, равный нулю на линейном подпространство $B \subset l^\infty(\mathbb{Z})$ и единице в точке a.
Примечание. Группа на которой существует функционал Ψ, инвариантный относительно сдвигов, называется аменабельной (т.е. поддающейся, доступной, податливой). Интерес к таким группам все более и более возрастает: см. видео-доклад Ростислава Григорчука (профессора Техаского университета *A&M*) на http://www.lektorium.tv/lecture/?id=13136 .

§ 3 Теорема Крейна–Мильмана

Определение 3.1 *Точка выпуклого множества называется крайней, если она не является серединой никакого отрезка, лежащего в данном множестве.*

Множество крайних точек выпуклого множества A будем обозначать через $\mathbf{extr}(A)$. Крайние точки многогранника — это его вершины. Все граничные точки евклидова шара — крайние. Бесконечный цилиндр не имеет крайних точек.

Предложение 3.1 *Все крайние точки множества лежат на его границе.*

♡ Пусть $x_0 \in \mathrm{int}A$. Тогда $U_\varepsilon = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset A$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Поэтому $x_1 = x + y \in A$ и $x_2 = x - y \in A$, где $0 < \|y\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_1 \neq x_2$. $\square$

Предложение 3.2 *Множество крайних точек замкнутого единичного шара* $\overline{B}_H = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$ *гильбертова пространства — это единичная сфера. Замкнутый единичный шар* $\overline{B}_{c_0}$ *пространства*

$$c_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid \lim_{k\to\infty} x_k = 0\,,\ \|x\| = \sup_k |x_k| < \infty\}$$

не имеет ни одной крайней точки.

♡ Согласно предложению 3.1, $\mathbf{extr}(\overline{B}_H) \subset S_H = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$. Докажем обратное включение. Пусть $x, x_1, x_2 \in S_H$, $\frac{x_1+x_2}{2} = x$. Это означает, что $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $\|x_1 + x_2\| = 2$. Но тогда, по равенству параллелограмма, $\|x_1 - x_2\|^2 + \|x_1 + x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 = 4 - 2 - 2 = 0$, т.е. $x_1 = x_2$.

Если $(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \overline{B}_{c_0}$, то $|x_j| \leq 1\ \ \forall j$ и существует такое k, что $|x_k| < 1/2$. Тогда, взяв $a_1 = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + 1/2, x_{k+1}, \ldots)$ и $a_2 = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k - 1/2, x_{k+1}, \ldots)$, получим: $x = \frac{a_1+a_2}{2}$, где a_1 и $a_2 \neq a_1$ принадлежат $\overline{B}_{c_0}$. □

Упражнение 3.1 $^{(\flat)}$ *Показать, что замкнутый единичный шар в пространстве* $C[0,1]$ *имеет ровно две крайние точки (какие?), а в пространстве* $L_1(0,1)$ *— ни одной.*

Упражнение 3.2 $^{(\sharp)}$ *При* $1 < p < \infty$ *каждый элемент единичной сферы пространства* $L_p(0,1)$ *— это крайняя точка замкнутого единичного шара.*

Определение 3.2 *Пусть* A *выпуклое подмножество в* X. *Множество* $B \subset A$ *называется крайним подмножеством множества* A, *если оно не пусто, выпукло и содержит любые те точки* $x_1 \in A$ *и* $x_2 \in A$, *для которых* $(x_1+x_2)/2 \in B$, *т.е. для этого не пустого выпуклого множества* B *справедлива импликация:* $x_1, x_2 \in A,\ (x_1 + x_2)/2 \in B\ \Rightarrow x_1, x_2 \in B$.

Очевидно, подмножество, состоящее из одной точки x, будет крайним в том и только том случае, если x — крайняя точка. Если A — треугольник на плоскости, то крайним подмножеством A является как вершина, так и сторона данного треугольника.

Лемма 3.1 *Пусть* X, Y *— линейные пространства,* $T : X \to Y$ *линейный оператор,* $A \subset X$ *— выпуклое подмножество. Тогда для любого крайнего подмножества* B *множества* $T(A)$ *множество* $T^{-1}(B) \bigcap A$ *(полный прообраз в* A *множества* B *) будет крайним подмножеством исходного множества* A.

♡ Импликация $T(x_1), T(x_2) \in T(A),\ T(\frac{x_1+x_2}{2}) \in B\ \Rightarrow T(x_1), T(x_2) \in B$ очевидна эквивалентна такой: $x_1, x_2 \in A,\ (x_1 + x_2)/2 \in T^{-1}B\ \Rightarrow x_1, x_2 \in T^{-1}B$. □

Следствие 3.1 *Если* $T : X \to Y$ *линейный оператор, то полный прообраз в* A *крайней точки множества* $T(A)$ *есть крайнее подмножество множества* A.

Лемма 3.2 *Пусть* A *— выпуклое множество,* B *— крайнее подмножество в* A, *а* C *— крайнее подмножество в* B. *Тогда* C *– крайнее подмножество множества* A.

♡ По условию $\underline{x_1, x_2 \in A}$, $(x_1+x_2)/2 \in B\ \Rightarrow \underline{x_1, x_2 \in B}$. Если при этом $\underline{(x_1 + x_2)/2 \in C}$, то по условию $\underline{x_1, x_2 \in C}$. □

Следствие 3.2 *крайняя точка крайнего подмножества — это крайняя точка исходного множества.*

Лемма 3.3 *Пусть* A *— выпуклый компакт в* X, $f \in L(X, \mathbb{R})$ *и* $b = \max_{x\in A} f(x)$. *Тогда множество* $M(f, A) = \{x \in A \mid f(x) = b\ \}$ *— крайнее в* A *подмножество.*

♡ Множество $f(A)$ — это замкнутый отрезок соединяющий минимальное и максимальное на A значения функционала f. Поэтому b — это крайняя точка множества $f(A)$. Согласно следствию 3.1, множество $M(f, A) = f^{-1}(b) \bigcap A$ — крайнее подмножество в A. □

Определение 3.3 *Семейство* $\mathfrak{M}$ *называется центрированным, если пересечение любого конечного множества его элементов не пусто.*

Лемма 3.4 *Пусть A — выпуклый компакт в X, а $\mathfrak{M}$ — некоторое центрированное семейство замкнутых крайних подмножеств D множества A. Тогда $D_1 = \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}} B$ — тоже замкнутое крайнее подмножество множества A.*

$\heartsuit$ Замкнутые подмножества D компактного A компактны. По условию, любое их конечное пересечение не пусто. Из компактности следует, что D_1 не пусто. Выпуклость и замкнутость наследуются пересечением множеств. Поэтому D_1 выпукло и замкнуто. Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\frac{x_1+x_2}{2} \in D_1$. Тогда $\frac{x_1+x_2}{2} \in B$ для любого $B \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $x_1, x_2 \in B$ для всех $B \in \mathfrak{M}$. Значит $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}} B = D_1$ $\square$.

Замечание 3.1 *Согласно лемме, если $\mathfrak{M}_1$ — некоторое центрированное семейство замкнутых крайних подмножеств $D_1 = \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}} B$ множества A, то $D_2 = \bigcap\limits_{B\in\mathfrak{M}_1} B$ — тоже замкнутое крайнее подмножество множества A. Имеем: система множеств $D_0 = D \supset D_1 \supset D_2 \ldots$ упорядочена по включению и каждое из них не пусто. По лемме Цорна, существует минимальный по включению элемент этой системы, т.е. минимальное по включению замкнутое крайнее подмножество D_∞.*

Лемма 3.5 *Пусть A — выпуклый компакт в X, состоящий более чем из одной точки. Тогда A содержит замкнутое крайнее подмножество B, не совпадающее с самим множеством A.*

$\heartsuit$ Пусть $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 \neq x_2$. По теореме Хана–Банаха, существует $f \in L(X,\mathbb{R})$, такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Поскольку f не тождественная константа на A, то в качестве требуемого B можно взять множество $M(f,A)$ из леммы 3.3.

Теорема 3.1 *(Первая теорема Крейна–Мильмана) Любой выпуклый компакт A в нормированном пространстве имеет крайнюю точку.*

$\heartsuit$ Согласно замечанию 3.1, существует минимальное по включению замкнутое крайнее подмножество D_∞ компакта A. В силу леммы 3.5, D_∞ состоит ровно из одной точки. Эта точка и будет требуемой крайней точкой компакта A. $\square$

Следующий результат имеет многочисленные применения в задачах линейной оптимизации и, в частности, в задачах математической экономики.

Теорема 3.2 *Пусть K выпуклый компакт в X, а $f \in L(X,\mathbb{R})$ и $b = \max\limits_{x\in K} f(x)$. Тогда существует точка $\widehat{x} \in \mathbf{extr}(K)$, в которой $f(\widehat{x}) = b$. Другими словами, при поиске максимума линейного функционала на выпуклом компакте достаточно рассматривать значения в крайних точках компакта.*

$\heartsuit$ Согласно лемме 3.3, $M(f,K) = \{x \in K \| f(x) = b\}$ — это крайнее подмножество компакта K, к тому же ввиду непрерывности функционала f — замкнутое. Поскольку $M(f,K)$ — выпуклый компакт, у него есть крайняя точка x_0, причем $f(x_0) = b$. Остаётся воспользоваться следствием 3.2: крайняя точка крайнего подмножества — это крайняя точка исходного множества. $\square$

Особенно эффективным использование теоремы 3.2 становится в случае, когда K — конечномерный многогранник. В этом случае $\mathbf{extr}(K)$ — конечное множество, и задача вычисления максимума линейного функционала сводится к <u>конечному</u>! (пусть даже и большому) перебору.

Лемма 3.6 *Пусть A, B — выпуклые замкнутые подмножества в нормированном пространстве X. Тогда $A = B \Leftrightarrow \sup\limits_{a\in A} f(a) = \sup\limits_{b\in B} f(b)$ для любого функционала $f \in L(X,\mathbb{R})$.*

$\heartsuit$ Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем импликацию $\Leftarrow$. Ввиду равноправия множеств A и B достаточно доказать включение $A \subseteq B$. Пусть данное включение не выполнено. Тогда существует точка $x_0 \in A \setminus B$. Так как B замкнуто, точку x_0 можно окружить открытой окрестностью U, не пересекающейся с B. Согласно следствию 2.1 (второй теоремы отделимости), существуют функционал $f \in L(X,\mathbb{R})$, для которого $\sup\limits_{a\in A} f(a) \geq f(x_0) \geq \inf\limits_{a\in A} f(a) > \sup\limits_{b\in B} f(b)$. $\square$

Теорема 3.3 *(Вторая теорема Крейна–Мильмана) Выпуклый компакт K в нормированном пространстве является замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек, т.е. $K = \overline{\mathbf{co}(\mathbf{extr}(K))}$.*

$\heartsuit$ Пусть $K_1 = \overline{\mathbf{co}(\mathbf{extr}(K))}$. Поскольку $K \supseteq K_1$, то $\sup\limits_{x\in K_1} f(x) \leq \sup\limits_{x\in K} f(x)$ для любого функционала $f \in L(X,\mathbb{R})$. Но, согласно теореме 3.2, существует точка $x_f \in \mathbf{extr}(K)$, для которой имеем следующее: $\sup\limits_{x\in K} f(x) = \max\limits_{x\in K} f(x) = f(x_f) \leq \sup\limits_{x\in K_1} f(x)$. Значит $\sup\limits_{x\in K_1} f(x) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$ $\forall f \overset{\text{лемма 3.6}}{\Longrightarrow} K = K_1$. $\square$

§ 4 Выпуклые функции

Через $\mathbf{dom} f = \{x \in X \mid |f(x)| < \infty\}$ будем обозначать *область определения* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. *Надграфиком* (epigraph) функции f называется множество

$$\mathbf{epi} f = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \bigm| x \in \mathbf{dom} f\,,\ a \geq f(x)\ \}\,.$$

Пример 4.1 *Пусть* $X = \mathbb{R}$, $f(x) \overset{def}{=} \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \{xy - |y|\}$. *Имеем:* $f(x) = \begin{cases} \ \ 0\,, & \text{если} \quad |x| \leq 1\,, \\ +\infty\,, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$ *Отметим два момента: 1)* $\mathbf{dom} f = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$; *2) надграфик* $\mathbf{epi} f$ *не есть замкнутое множество.*

Определение 4.1 *Функция* f *называется выпуклой, если* $\mathbf{epi} f$ *— выпуклое множество.*

Замечание 4.1 *Функция* f *из примера 4.1 выпукла.*

Предложение 4.1 *Функция* f *выпукла, если и только если область ее определения выпукла и*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \qquad \text{для любых} \quad x_1,\ x_2 \in \mathbf{dom} f \quad \text{и любого} \quad t \in [0, 1]\,. \tag{4.1}$$

♡ Пусть область $\mathbf{dom} f$ выпукла, выполнено (4.1) и точки (x_1, a_1), (x_2, a_2) принадлежат надграфику f. Тогда для любого $t \in [0, 1]$

$$ta_1 + (1-t)a_2 \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \overset{(4.1)}{\geq} f(tx_1 + (1-t)x_2)\,.$$

Значит, $t(x_1, a_1) + (1-t)(x_2, a_2) \in \mathbf{epi} f$, т.е. надграфик выпуклый. Обратно, если надграфик выпуклый, а $(x_1, f(x_1)) \in \mathbf{epi} f$ и $(x_2, f(x_2)) \in \mathbf{epi} f$, то $t\big(x_1, f(x_1)\big) + (1-t)\big(x_2, f(x_2)\big) \in \mathbf{epi} f$. Следовательно, $tx_1 + (1-t)x_2 \in \mathbf{dom} f$, т.е. $\mathbf{dom} f$ выпукло и справедливо условие (4.1). □

Упражнение 4.1 $^\flat$ *Проверить, что для* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *лебегово множество* $\mathcal{L}_\alpha(f) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\ \}$ *функции* f *выпукло или пусто, если функция* f *выпукла.*

Предложение 4.2 *Если функция* f *выпукла, то для любых* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{dom} f$ *и любых неотрицательных* $t_1, \ldots t_n$, *таких, что* $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k = 1$, *справедливо так называемое неравенство Йенсена*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)\,. \tag{4.2}$$

♡ Достаточно применить предложение 1.1 к выпуклому множеству $\mathbf{epi} f$. □

Следствие 4.1 *Пусть* x *есть выпуклая комбинация точек* $x_1, \ldots, x_n$. *Тогда* $f(x) \leq \max\limits_{1 \leq k \leq n} f(x_k)$.

$$♡ f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \overset{(4.2)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \leq \max_{1 \leq k \leq n} f(x_k)\,. \quad □$$

Лемма 4.1 *Пусть* f *— выпуклая функция,* $x = z + h$ *и* $y = z + th \in \mathbf{dom} f$, *а* $t = \frac{\beta}{1+\beta}$, *где* $\beta \geq 0$. *Тогда*

$$f(z + th) - f(z) \leq t\Big(f(z+h) - f(z)\Big)\,, \tag{4.3}$$

что эквивалентно

$$f(y + \beta(y - x)) \geq f(y) + \beta\big(f(y) - f(x)\big)\,. \tag{4.4}$$

♡ Поскольку $z + th = (1-t)z + t(z+h)$, то $f(z+th) \leq (1-t)f(z) + tf(z+h)$. Тем самым, получаем неравенство (4.3). Перепишем его, учитывая, что $z + th = y$, $z + h = x$, а $t = \frac{\beta}{1+\beta}$. Получим

$$(1+\beta)f(y) \leq (1+\beta)f(z) + \beta\Big(f(x) - f(z)\Big) = f(z) + \beta f(x)\,,$$

т.е. $f(z) \geq f(y) + \beta\Big(f(y) - f(x)\Big)$. Отсюда следует (4.5), поскольку $y - x = (t-1) = -\frac{1}{1+\beta}h$ и потому $z = y - \frac{\beta}{1+\beta}h = y + \beta(y - x)$. □

Предложение 4.3 *Локальный минимум z выпуклой функции f является ее глобальным (абсолютным) минимумом.*

♡ Если z есть локальный минимум функции f, то $f(z+th)-f(z)\ge 0$ для достаточно малого $t>0$. Значит неотрицательна правая часть неравенства (4.3). Тем самым, $f(z+h)-f(z)\ge 0$ для любого $x=z+h\in \mathbf{dom} f$. $\square$

Непосредственно из предложения 4.3 вытекает

Следствие 4.2 *Любое необходимое условие локального минимума выпуклой функции является достаточным условием ее глобального минимума.*

Что же касается максимума выпуклой функции, то справедливо

Предложение 4.4 *Пусть достигается максимум выпуклой функции $f:\mathbf{dom} f\to\overline{R}$, а множества $A=\mathbf{dom} f\subset\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{extr} A$ — компактны. Тогда $\max\limits_{x\in A} f(x)=\max\limits_{x\in\mathbf{extr} A} f(x)$.*

♡ Согласно теореме 1.1 (Каратеодори), выпуклая оболочка множества $\mathbf{extr} A$ компактна, а по теореме 3.2 (Крейна–Мильмана) замыкание этой оболочки (т.е. она сама, в силу компактности $\mathbf{co}(\mathbf{extr} A)$) совпадает с A. Учитывая это и вспоминая лемму 1.1 (Каратеодори), получаем: любая точка $x\in A$ есть выпуклая комбинация не более $d+1$ точек множества $\mathbf{extr} A)$, т.е. $x=\sum\limits_{k=1}^{d+1} t_k x_k$. Остается сослаться на следствие 4.1 неравенства Йенсена . $\square$

Определение 4.2 *Функция f называется локально-липшицевой в точке x_0, если существуют такие константа $K>0$ и шар B с центром в точке x_0, что при любом $x_0+h\in B$ справедливо неравенство $|f(x_0+h)-f(x_0)|\le K\|h\|$.*

Теорема 4.1 *Выпуклая функция $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ локально-липшицева в каждой точке $x_0\in\mathbf{dom} f$.*

♡ Отметим сначала, что f ограничена сверху в окрестности точки x_0. Действительно, пусть $\delta>0$ таково, что $x_k=x_0\pm\delta e_k\in\mathbf{dom} f$, $k=1,\dots,d$, где e_k — координатный вектор в $\mathbb{R}^d$. Согласно следствию 4.1, справедливо неравенство $M\overset{def}{=}\max\limits_A f(x)\le\max\limits_{1\le k\le d} f(x_k)$, где $A=\{\sum\limits_{1\le k\le d}|x-x_0|\le\delta\}$ — выпуклая оболочка точек x_k, содержащая шар $B(x_0,\varepsilon)$ радиуса $\varepsilon=\varepsilon(\delta,n)>0$ с центром в x_0.

Возьмем теперь $y\in B(x_0,\varepsilon)$, $y\ne x_0$. Положим $t=\|y-x_0\|/\varepsilon$. Имеем $t\in(0,1]$. При этом точка $z=x_0+\frac{1}{t}(y-x_0)$ принадлежит $B(x_0,\varepsilon)$, ибо $\|z-x_0\|=\|y-x_0\|/t=\varepsilon$. А поскольку $y=tz+(1-t)x_0$, то выпуклость f влечет

$$f(y)\le tf(z)+(1-t)f(x_0)\le f(x_0)+t(M-f(x_0))=f(x_0)+\frac{M-f(x_0)}{\varepsilon}\|y-x_0\|.$$

Далее, пусть $u=x_0+(x_0-y)/t$. Тогда $\|u-x_0\|=\varepsilon$ и $y=x_0+t(x_0-u)$. Поэтому, в силу второго неравенства в формуле (4.3), получаем

$$f(y)\ge f(x_0)+t\big(f(x_0)-f(u)\big)\ge f(x_0)-t\big(M-f(x_0)\big)=f(x_0)-\frac{M-f(x_0)}{\varepsilon}\|y-x_0\|\,.$$

Таким образом, $|f(y)-f(x_0)|\le\frac{M-f(x_0)}{\varepsilon}\|y-x_0\|$. $\square$

Упражнение 4.2 $^\flat$ *Верно ли, что любая выпуклая функция, конечная на всей прямой, непрерывна?*

Упражнение 4.3 *Показать что условие конечномерности* $\mathbf{dom} f$ *в теореме 4.1 существенно, иными словами, привести пример выпуклой функции f, заданной в бесконечномерном пространстве, которая разрывна внутри* $\mathbf{dom} f$.

Указание. Каков график функции $f_n:\mathbb{R}^2\ni(x_n,x_{n+1})\mapsto f_n(x_n,x_{n+1})=\sum\limits_{k=n}^{k=n+1} k\,x_k^2$? Как ведет себя $f_n(0,\varepsilon)$ при заданном сколь угодно малом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$?

Теорема 4.2 *Выпуклая функция* $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ *дифференцируема по любому направлению* $h \in \mathbb{R}^d$ *в любой внутренней точке* $x \in \mathbf{dom} f$, *т.е. существует предел* $f'(x,h) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\big[f(x+th) - f(x)\big]$.

♡ Пусть $x \in \operatorname{int}\mathbf{dom} f$, а вектор h столь мал, что $x \pm h \in \mathbf{dom} f$. Положим $\varphi(t) = \frac{1}{t}\big[f(x+th) - f(x)\big]$. Согласно (4.3), $\frac{1}{s}\Big[f\big(x + s(th)\big) - f(x)\Big] \le \big[f(x+th) - f(x)\big]$ для любого $s \in [0,1]$. Поэтому

$$\varphi(st) = \frac{1}{st}\Big[f\big(x + s(th)\big) - f(x)\Big] \le \frac{1}{t}\big[f(x+th) - f(x)\big] = \varphi(t)\,.$$

Значит, $\varphi(t)$ не возрастает при $t \downarrow 0$. Осталось установить, что $\varphi(t)$ ограничена снизу при малых $t > 0$. Это следует из неравенства (4.5), согласно которому $f\big(x + t(x-\xi)\big) \ge f(x) + t\big[f(x) - f(\xi)\big]$, что при $\xi = x - h$ принимает такой вид: $\big[f(x+th) - f(x)\big] \ge t\big[f(x) - f(x-h)\big]$, а после деления на t преобразуется в нужное нам неравенство $\varphi(t) \ge \big[f(x) - f(x-h)\big]$. □

Лемма 4.2 *Если* $x \in \operatorname{int}\mathbf{dom} f$, *то производная* $f'(x,h)$ *по направлению* $h \in \mathbb{R}^d$ *выпуклой функции* $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ *является положительно однородной функцией степени 1 и для любого* $y \in \operatorname{int}\mathbf{dom} f$ *справедливо неравенство*

$$f(y) \ge f(x) + f'(x, y-x)\,. \tag{4.5}$$

♡ Пусть $\tau > 0$, $s = \tau t$. Тогда

$$f'(x,\tau h) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\big[f(x+\tau th) - f(x)\big] = \tau\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\big[f(x+sh) - f(x)\big] = \tau f'(x,h)\,.$$

Далее, для любых $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d$ и $\beta > 0$ имеем:

$$f'\big(x, \beta h_1 + (1-\beta)h_2\big) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\Big[f\Big(x + t\big(\beta h_1 + (1-\beta)h_2\big)\Big) - f(x)\Big] \le$$

$$\le \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\Big(\beta\big[f(x+th_1) - f(x)\big] + (1-\beta)[f(x+th_2) - f(x)]\Big) = \beta f'(x,h_1) + (1-\beta)f'(x,h_2)\,.$$

Тем самым, производная $f'(x,\cdot) : h \mapsto f'(x,h)$ выпукла. Наконец, пусть $t \in [0,1]$, $\beta = \frac{(1-t)}{t}$, а $y_t = x + t(y-x)$. Тогда

$$f(y) = f(y_t + \beta(y_t - x)) \overset{(4.5)}{\ge} f(y_t) + \beta\big[f(y_t) - f(x)\big] \quad\Rightarrow\quad f(y) - f(y_t) \ge (1-t)\,\frac{f(y_t) - f(x)}{t}$$

и, переходя к пределу при $t \downarrow 0$, получаем (4.5). □

Упражнение 4.4 ♭ *Доказать, что если выпуклая функция* $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определена на всей прямой и ограничена, то она есть константа.*

Хотя выпуклая функция f с конечномерной областью определения $\mathbf{dom} f$ не только непрерывна, но даже дифференцируема по любому направлению в каждой внутренней точке $\mathbf{dom} f$, однако она может быть почти произвольной на границе области $\mathbf{dom} f$, как например, функция

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 < 1\,,\\ g(\varphi)\,, & \text{если } x_1 = \cos\varphi,\ x_2 = sin\varphi\,, \quad \text{а} \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\,, \end{cases}$$

где $g : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ — любая неотрицательная (даже неизмеримая) функция. В некоторых случаях такого рода неприятности можно исключить, ограничиваясь рассмотрением функций, у которых замкнут надграфик.

Определение 4.3 *Функция* f *называется замкнутой, если ее надграфик замкнут.*

Предложение 4.5 *Для функции* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *эквивалентны следующие три условия:*
1) замкнут надграфик f;
2) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ *замкнуто лебегово множество* $\mathcal{L}_\alpha(f) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \le \alpha\}$;
3) функция f *полунепрерывна снизу, т.е.*

$$f(\widehat{x}) \le \underline{\lim} f(x_n) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} f(x_k)\,, \tag{4.6}$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, *которая сходится к* $\widehat{x} \in X$.

$\heartsuit$ 3) $\Rightarrow$ 2). Если $x_n \in \mathcal{L}_\alpha(f)$ и x_n сходится к $\widehat{x}$, то $f(\widehat{x}) \leq \underline{\lim} f(x_n) \overset{(4.6)}{\leq} \alpha$, т.е. $\widehat{x} \in \mathcal{L}_\alpha(f)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(x_n, a_n) \in \mathbf{epi}\, f$, причем x_n сходится к $\widehat{x}$ и $a_n \to \widehat{a}$. Если предположить, что условие 1) не выполнено, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f(\widehat{x}) > \widehat{a} + \varepsilon \geq a_n \geq f(x_n)$. Имеем: $x_n \in \mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(f)$, а согласно условию 2), множество $\mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(f)$ замкнуто. Значит, $\widehat{x} \in \mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(f)$, т.е. $f(\widehat{x}) \leq \widehat{a} + \varepsilon$, что противоречит установленному выше неравенству $\widehat{a} + \varepsilon < f(\widehat{x})$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(x_n, f(x_n)) \to (\widehat{x}, b) \in \mathbf{epi}\, f$. Поскольку $(x_n, f(x_n)) \in \mathbf{epi}\, f$, а множество $\mathbf{epi}\, f$ замкнуто (согласно 3) $\Rightarrow$ 2)), то $f(\widehat{x}) \leq b = \lim f(x_n) = \underline{\lim} f(x_n)$. $\square$

Следствие 4.3 *Любая непрерывная функция замкнута.*

Лемма 4.3 *Если a — неотрицательное число, а функции f_1 и f_2 замкнуты и выпуклы, то замкнуты и выпуклы функции, заданные следующими формулами*
1) $f(x) = af_1(x), \quad \mathbf{dom} f = \mathbf{dom} f_1;$
2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \mathbf{dom} f = (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2);$
3) $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \mathbf{dom} f = (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2)$.

$\heartsuit$ 1). Очевидно.
2). Пусть функции f_1 и f_2 выпуклы и замкнуты, а число $a \geq 0$. Если $x_1, \ x_2 \in (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2)$, а $t \in [0,1]$, то $f_1\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) + f_2\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leq$

$$tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2) + tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2) = t\big(f_1(x_1) + f_2(x_1)\big) + (1-t)\big(f_1(x_1) + f_2(x_1)\big).$$

Пусть, далее, $(x_k, a_k) \in \mathbf{epi} f \quad a_k \geq f_1(x_k) + f_2(x_k)$, причем $(x_k, a_k) \to (\widehat{x}, \widehat{a})$. Так как функции f_j замкнуты, то (согласно предложению 4.5) имеем: $\underline{\lim} f_j(x_n) \geq f_j(\widehat{x})$. Поэтому

$$\widehat{a} = \lim a_k \geq \underline{\lim}\big(f_1(x_k) + f_2(x_k)\big) \geq f(\widehat{x}), \qquad \text{т.е.} \qquad \text{замкнут.}$$

3). Надо проверить что $\mathbf{epi} f$ — замкнутое и выпуклое множество, что следует из того, что

$$\mathbf{epi} f = \{(x,a) \mid a \geq f_1(x),\ a \geq f_2(x),\ x \in (\mathbf{dom} f_1) \cap (\mathbf{dom} f_2)\} = \mathbf{epi} f_1) \cap (\mathbf{epi} f_2. \qquad \square$$

Упражнение 4.5 *Показать, что функция $x \mapsto e^{f(x)}$ выпукла, если выпукла функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Предостережение. Суперпозиция двух выпуклых не всегда выпукла. Вот пример: $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x^2 - 1|$.

Теорема 4.3 *Поточечный супремум замкнутых (соответственно, выпуклых) функций замкнут (соответственно, выпуклый). А именно, если есть семейство замкнутых (соответственно, выпуклых) функций $g(\cdot, y) : x \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, зависящих от параметра $y \in Y$, где Y — некоторое множество, то функция*

$$f(x) = \sup_{y \in Y} g(x, y),$$

является замкнутой (соответственно, выпуклой). При этом, $\mathbf{dom} f = B$, где

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \bigcap_{y \in Y} \mathbf{dom}\, g(\cdot, y) \;\Big|\; \exists C : g(x, y) \leq C \ \forall\, y \in Y \right\}.$$

$\heartsuit$ Если $x \in B$, то $f(x) < \infty$. Значит, $x \in \mathbf{dom} f$. Если же $x \notin B$, то найдется последовательность $\{y_k\}$, такая, что $g(x, y_k) \to \infty$. Следовательно, $x \notin \mathbf{dom} f$. Итак, $\mathbf{dom} f = B$. Осталось заметить, что

$$\mathbf{epi} f = \bigcap_{y \in Y} \mathbf{epi}\, g(\cdot, y),$$

ибо $(x, a) \in \mathbf{epi} f$ т. и т.т., к. $a \geq g(x, y)$ для любого $y \in Y$ и $x \in \mathbf{dom}\, g(\cdot, y)$. $\square$

Упражнение 4.6 $^\flat$ *Пусть* $t = (t_1, \dots, t_d) \in Y \subset \mathbb{R}^d_+$, $f(x) = \sup\limits_{t \in Y} \sum\limits_{k=1}^{d} t_k f_k(x)$, *а* f_k *— выпуклые и замкнутые. Показать, что* f *тоже выпукла и замкнута.*
Указание. Применить лемму 4.3 и теорему 4.3 к функции $g(\cdot, y) : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{d} t_k f_k(x)$.

Определение 4.4 *Опорной функцией множества* $A \subset X$ *называется отображение*

$$s_A : X^* = L(X, \mathbb{R}) \ni x^* \mapsto s_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x^*, a \rangle . \tag{4.7}$$

Пример 4.2 *Пусть* $X = \mathbb{R}$, $A = [1, 2]$. *Имеем:* $\langle x^*, a \rangle = ax^*$, *где* $x^* \in \mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}$. *График функции*

$$s_A : R^* \ni x^* \mapsto s_A(x^*) = \begin{cases} 2\,x^* , & \text{если } x^* \geq 0 , \\ \;\; x^* , & \text{если } x^* \leq 0 . \end{cases}$$

График этой функции, как бы, "опирается" на все множество графиков линейных функционалов, коэффициентами которых являются элементы множества A. *Отметим, что в данном примере опорная функция при некоторых* x^* *принимает отрицательные значения. Причина в том, что односвязное множество* A *не содержит ноль. Но для* $A = [-3, -1] \cup [1, 2]$ *опорная функция неотрицательна, хотя* $A \not\ni 0$.

Упражнение 4.7 $^\flat$ *Проверить, что опорная функция замкнута, выпукла и является положительно однородной 1-го порядка, т.е.* $s_A(tx^*) = ts_A(tx^*)$ *для любого* $t \geq 0$.
Указание. Применить теорему 4.3 к функции $g(\cdot, a) : x^* \mapsto \langle x^*, a \rangle$.

§ 5 Поляры. Биполяры

Определение 5.1 *Полярой* A^0 *множества* $A \subset X$ *называется множество таких линейных непрерывных функционалов* $x^* \in X^*$, *для которых* $\langle x^*, a \rangle \leq 1$ *при любых* $a \in A$, *т.е.*

$$A^0 = \{x^* \in X^* \mid \sup_{a \in A} \langle x^*, a \rangle \leq 1 \ \}.$$

Пример 5.1 *Пусть* $B = \{\ x \in X \mid \|x\|_X < 1\ \}$, *а* $\overline{B^*} = \{\ y \in Y = X^* \mid \|y\|_Y \leq 1\ \}$. *Тогда* $B^0 = (\overline{B})^0 = \overline{B^*}$. *Действительно,*

$$y \in \overline{B^*} \;\Leftrightarrow\; \|y\|_Y \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \sup_{x \in B} |\langle y, x \rangle| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \{ \sup_{-x, x \in B} \langle y, x \rangle \leq 1 \} \stackrel{def}{=} B^0 \;\Leftrightarrow\; \{ \sup_{x \in \overline{B}} \langle y, x \rangle \leq 1 \} \stackrel{def}{=} \overline{B^0} .$$

Отсюда, в качестве следствия, получаем такой результат: если $X = \mathbb{R}^d$, $A = \{\sum_{k=1}^d |x_k|^p \leq 1\}$, *где* $p > 1$, *то* $A^0 = \{\sum_{k=1}^d |y_k|^q \leq 1\}$, *где* $1/p + 1/q = 1.$,

Теорема 5.1 *Поляра* A^0 *любого множества* $A \subset X$ *является замкнутым выпуклым множеством в* $Y = X^*$, *содержащим нуль.*

♡ Как пересечение аффинных полупространств $\{\ y \in Y \| \ \langle y, x \rangle \leq 1\ \}$, т.е. замкнутых, выпуклых множеств, поляра A^0 замкнута и выпукла. Очевидно, $\{0\} \in A^0$. □

Упражнение 5.1 $^\flat$ *Показать, что* $\|A^0\| < \infty \;\Leftrightarrow\; 0 \in \mathrm{int} A$.

Упражнение 5.2 $^\flat$ *Проверить, что*
а) $(tA)^0 = tA^0$ *для любых* $t > 0$ *и* $A \subset X$;
б) $A^0 \subset B^0 \subset X^*$, *если* $B \subset A \subset X$;
в) $A^0 = [\mathbf{co} A]^0 = [\overline{\mathbf{co}} A]^0$ *для любого* $A \subset X$;
г) $(A_1 \cup A_2)^0 = A_1^0 \cap A_2^0$ *для любых* A_1 *и* A_2 *из* X.

Упражнение 5.3 $^\flat$ *Найти поляру квадрата* $\{\ |x_1| \leq 1\,,\ |x_2 1| \leq 1\ \} \subset \mathbb{R}^2$ *и объединения его вершин.*

Пример 5.2 *Пусть* $A = [0,1]$ *. Тогда* $A^0 = \{ y \in \mathbb{R} \mid ay \le 1\,,\ \forall\, a \in A \}$, *т.е.* $A^0 = \{ y \le 1 \}$ *. Функция Минковского поляры* A^0 *есть* $p_{A^0}(y) = \{ \inf \alpha > 0 \mid y \in \alpha A^0 = (-\infty, \alpha] \} = \begin{cases} 0\,, & \text{если } y \le 0\,, \\ y\,, & \text{если } y \ge 0\,. \end{cases}$ *Она совпадает с опорной функцией множества* A *, ибо* $s_A(y) \stackrel{def}{=} \sup\limits_{a \in A = [0,1]} ay = \begin{cases} 0\,, & \text{если } y \le 0\,, \\ y\,, & \text{если } y \ge 0\,. \end{cases}$

Упражнение 5.4 $^\flat$ *Пусть* $A = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$. *Найти* A^0, $p_{A^0}(y)$ *и* $s_A(y)$ *в следующих случаях:* $0 < a_1 \le a_2$, $0 \le a_1 < a_2$, $a_1 < 0 < a_2$, $a_1 < a_2 \le 0$.

Упражнение 5.5 $^\flat$ *Найти* A^0, $p_{A^0}(y)$ *и* $s_A(y)$, *если* $A = (a,b] \cup [c,d]$, *где* $a < b \le 0$, $0 < c \le d$.

Упражнение 5.6 $^\sharp$ *Доказать, что если* $0 \in A$ *, то опорная функция множества* A *совпадает с функцией Минковского поляры этого множества.*

Решение. Так как $0 \in A$ *, то* $s_A(x^*) \stackrel{def}{=} \sup_{a \in A} \langle x^*, a \rangle \ge 0$ *для любого* x^* *. Разберем два случая:*

(i) Если $s_A(x^*) = 0$ *для некоторого* x^* *, то* $\langle x^*, a \rangle \le 0$ *для любого* $a \in A$ *. Следовательно,* $\langle \frac{1}{\alpha} x^*, a \rangle \le 0 \le 1$ *для* $\forall\ \alpha > 0 \ \Rightarrow\ x_0^* \in \alpha A^0$. *Значит,* $p_{A^0}(x^*) = \{\inf \alpha > 0 \mid x^* \in \alpha A^0\} = 0 = s_A(x^*)$.

(ii) Если $\sup\limits_{a \in A} \langle x^*, a \rangle > 0$, *то* $s_A(x^*) = \alpha s_A(\frac{x^*}{\alpha}) = \{\inf\ \alpha > 0 \mid \langle \frac{x^*}{\alpha}, y \rangle \Big|_{\forall\, y \in A} \le 1\,,\ x^* \in \alpha A^0) = p_{A^0}(x^*)$.

Определение 5.2 *Пусть* A^0 *— поляра множества* $A \subset X$. *Его биполярой называется множество* $A^{00} = \{a \in X \mid \sup\limits_{x^* \in A^0 \subset X^*} \langle x^*, a \rangle \le 1\ \}$.

Упражнение 5.7 $^\flat$ *Пусть* $k \in [0, \infty)$. *Найти* A^0 *и* A^{00} *в следующих случаях:*
1) $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 \ge k|a_1|\ \}$
2) $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2 > k|a_1|\ \}$

Теорема 5.2 *(О биполяре). для любого* $A \subset X$ *имеем:*
1) $A \subset \overline{\mathbf{co} A} \subset A^{00}$;
2) $A^{00} = A$ *тогда и только тогда, когда* A *выпукло, замкнуто и содержит ноль.*

♡ 1). Очевидно, что множество A^{00} — выпукло и замкнуто. Поэтому оно содержит замыкание выпуклой оболочки любого своего подмножества, в частности, множества $A \subset A^{00}$.
2). Пусть A выпукло, замкнуто и содержит ноль. Если предположить, что $A \ne A^{00}$, то найдется такой элемент $\widehat{a} \in A^{00}$, который не принадлежит A. Согласно следствию 2.1 (второй теоремы отделимости), такой элемент строго отделим от A, т.е. существует функционал $x^* \in X^*$, для которого $\langle x^*, \widehat{a} \rangle > \sup\limits_{x \in A} \langle x^*, x \rangle$. Правая часть этого неравенства неотрицательна, т.к. $A \ni 0$. Поэтому левая — положительна. Значит, существует такое число $t > 0$, что $\langle x^*, \widehat{a} \rangle > 1/t \ge \sup\limits_{x \in A} \langle x^*, x \rangle$, что для $y^* = tx^*$ влечет: $\langle y^*, \widehat{a} \rangle > 1 \ge \sup\limits_{x \in A} \langle y^*, x \rangle$. Второе неравенство означает, что $y^* \in A^0$. Но тогда первое неравенство $\langle y^*, \widehat{a} \rangle > 1$ говорит о том, что $\widehat{a} \notin A^{00}$. А это противоречит предположению. □

§ 6 Субградиенты и субдифференциал

Определение 6.1 *Пусть* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *— выпуклая функция. Функционал* $g \in X^*$ *называется субградиентом функции* f *в точке* $x_0 \in \mathbf{dom}\, f$, *если* $f(x) \ge f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$ *для любого* $x \in \mathbf{dom}\, f$. *Множество всех субдифференциалов функции* f *в точке* x_0 *называется ее субдифференциалом в этой точке и обозначается* $\partial f(x_0)$.

Упражнение 6.1 $^\flat$ *Проверить, что множество* $\partial f(x_0)$ *замкнуто и выпукло в* X^*.

Лемма 6.1 *Пусть множество* $\partial f(x)$ *не пусто для любого* $x \in \mathbf{dom} f$. *Тогда* f *— выпуклая функция.*

♡ Если x, $y \in \mathbf{dom} f$, $t \in [0,1]$, а $y_t = x + t(y - x)$, то для $g \in \partial f(y_t)$ имеем:

$$f(y) \ge f(y_t) + \langle g, y - y_t \rangle = f(y_t) + (1 - t)\langle g, y - x \rangle\,,$$

$$f(x) \ge f(y_t) + \langle g, x - y_t \rangle = f(y_t) - t\langle g, y - x \rangle\,.$$

Сложив эти неравенства, предварительно умноженные, соответственно, на t и $1 - t$, получим

$$tf(y) + (1 - t)f(x) \ge f(y_t). \qquad \square$$

Теорема 6.1 *Если функция f выпукла и замкнута, а $x_0 \in \operatorname{int}\mathbf{dom}\, f$, то $\partial f(x_0)$ — непустое ограниченное множество.*

♡ Заметим, что точка $(x_0, f(x_0))$ принадлежит границе надграфика $\mathbf{epi}\, f$. Поэтому, согласно первой теореме отделимости 2.1, найдется функционал $(d, -\alpha) \in (X \times \mathbb{R})^*$, такой, что $\|d\|^2 + \alpha^2 = 1$ и

$$\langle d, x\rangle - \alpha\tau \le \langle d, x_0\rangle - \alpha f(x_0)\,, \qquad \text{при всех} \quad (x,\tau) \in \mathbf{epi}\, f\,. \tag{6.1}$$

В частности,

$$\langle d, x - x_0\rangle \le \alpha\big(f(x) - f(x_0)\big) \qquad \text{для любого} \quad x \in \mathbf{dom}\, f\,. \tag{6.2}$$

и $\langle d, x_0\rangle - \alpha\tau \le \langle d, x_0\rangle - \alpha f(x_0)$ при всех $\tau \ge f(x_0)$, что влечет $\alpha \ge 0$. Покажем, что $\alpha > 0$. Для этого вспомним, что (согласно теореме 4.1) выпуклая функция f локально ограничена сверху. Значит, найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что

$$f(x) - f(x_0) \le M\|x - x_0\|\,, \qquad \text{если} \quad \|x - x_0\| \le \varepsilon.$$

Отсюда и (6.2) получаем

$$\langle d, x - x_0\rangle \le \alpha M\|x - x_0\|\,, \quad \text{если} \quad \|x - x_0\| \le \varepsilon\,. \tag{6.3}$$

Условию $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ удовлетворяет, в частности, точка $x = x_0 + \varepsilon d$, в силу нормировки нормировки $\|d\|^2 + \alpha^2 = 1$. Поэтому из (6.3) вытекает: $\|d\| \le \alpha M$. Отсюда, согласно нормировке $\|d\|^2 + \alpha^2 = 1$, имеем: $1 - \alpha^2 \le (\alpha M)^2$, т.е. $\alpha \ge \frac{1}{\sqrt{1+M^2}} > 0$. Разделив теперь неравенство (6.2) на $\alpha > 0$ и полагая $g = d/\alpha$, получаем:

$$\langle g, x - x_0\rangle \le f(x) - f(x_0) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbf{dom}\, f. \tag{6.4}$$

Осталось проверить, что $\partial f(x_0)$ — ограниченное множество. Пусть $g \in \partial f(x_0)$ и $g \ne 0$. Возьмем $x = x_0 + \varepsilon\, g/\|g\|$. Имеем:

$$\|g\| = \langle g, g/\|g\|\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\langle g, x - x_0\rangle \overset{(6.4)}{\le} \frac{f(x) - f(x_0)}{\varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon}M\|x - x_0\| = M\,.$$

Следствие 6.1 *Если $\dim X < \infty$, то субдифференциал $\partial f(x_0)$ выпуклой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ есть выпуклый компакт для любой точки $x_0 \in \operatorname{int}\mathbf{dom}\, f$.*

Упражнение 6.2 $^\flat$ *Пусть $k \ge 0$, а $f : X \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} k\|x\|\,, & \text{если } x \ne 0\,, \\ 0\,, & \text{если } x = 0\,. \end{cases}$ Найти $\partial f(0)$.*

Упражнение 6.3 $^\flat$ *Где в доказательстве теоремы 6.1 было использовано условие $x_0 \in \operatorname{int}\mathbf{dom}\, f$? Рассмотрев случай, когда $f(x) = -\sqrt{x}$ при $x \ge 0$, показать, что это условие нельзя, вообще говоря, отбросить.*

Упражнение 6.4 $^\flat$ *Доказать, что в условиях теоремы 6.1 существует $\max\limits_{g \in \partial f(x_0)} \big\langle g, h\big\rangle$.*

Теорема 6.2 *Если $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая замкнутая функция, то для производной $f'(x_0, h)$ функции f в точке $x_0 \in \operatorname{int}\mathbf{dom} f$ по направлению $h \in \mathbb{R}^d$ справедливо равенство*

$$f'(x_0, h) = \max_{g \in \partial f(x_0)} \big\langle g, h\big\rangle\,.$$

♡ Заметим, что

$$f'(x_0, h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\Big[f(x_0 + th) - f(x_0)\Big] \ge \langle g, h\rangle\,, \tag{6.5}$$

где g — произвольный элемент из $\partial f(x_0)$. Рассмотрим функцию $\varphi : h \mapsto \varphi(h) = f'(x_0, h)$. Имеем: $\varphi(0) = 0$. Поэтому, согласно (6.5), $\varphi(h) \ge \varphi(0) + \langle g, h\rangle$. Тем самым, $\partial\varphi(0) \ni g$, т.е. $\partial f(x_0) \subset \partial\varphi(0)$. В силу леммы 6.1, функция φ — выпукла. Учитывая это и взяв $\psi \in \partial\varphi(0)$, применим к функции $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ лемму 4.2. Получим (вспоминая, что $\varphi(0) = 0$)

$$f(x_0 + h) \ge f(x_0) + f'(x_0, h) = f(x_0) + \varphi(h) \ge f(x_0) + \langle \psi, h\rangle.$$

Значит, $\psi \in \partial f(x_0)$, т.е. $\partial\varphi(0) \subset \partial f(x_0)$, что с учетом уже установленного вложения $\partial f(x_0) \subset \partial\varphi(0)$, дает

$$\partial\varphi(0) = \partial f(x_0)\,. \tag{6.6}$$

Применим теперь неравенство $\varphi(y) \overset{(4.5)}{\geq} \varphi(x)+\varphi'(x, y-x)$ к выпуклой функции $\varphi : h \mapsto \varphi(h) = f'(x_0, h)$, полагая $x = h$, $y = av$, где $a > 0$. Тогда для $\psi_h \in \partial\varphi(h)$ имеем:

$$af'(x_0, v) = f'(x_0, av) = \varphi(av) \geq \varphi(h) + \langle\psi_h, av - h\rangle = f'(x_0, h) + \langle\psi_h, av - h\rangle\,. \tag{6.7}$$

Переходя к пределу при $a \to \infty$, приходим к неравенству

$$\varphi(v) = f'(x_0, v) \geq \langle\psi_h, v\rangle = f'(x_0, 0) + \langle\psi_h, v\rangle = \varphi(0) + \langle\psi_h, v\rangle \tag{6.8}$$

из которого следует, что $\psi_h \in \partial\varphi(0) \overset{(6.6)}{=} \partial f'(x_0)$. Отсюда, вытекает, что $f'(x_0, h) \overset{(6.5)}{\geq} \langle\psi_h, h\rangle$. С другой стороны, переходя к пределу в (6.7) при $a \to 0$, имеем еще одно неравенство $f'(x_0, h) - \langle\psi_h, h\rangle \leq 0$, пересечение которых дает требуемый результат $f'(x_0, h) = \langle\psi_h, h\rangle$. $\square$

§ 7 Теоремы Рокафеллара–Моро и Дубовицкого–Милютина

§ 8 Теорема Каруша–Куна–Таккера

§ 9 Метод центрированных сечений и метод эллипсоидов

§ 10 Метод барьерных функций

§ 11 Типовая схема доказательства существования решения экстремальных задач для выпуклых полунепрерывных снизу функционалов. Коэрцитивность. Теорема Мазура

В прошлом семестре рассматривалась задача

$$F(z) \overset{def}{=} \int_0^1 u^2\,dt \to \inf \quad \text{при условии, что} \quad z = (x, u) \in K \subset Z \tag{11.1}$$

для функционала $F : z = (x, u) \mapsto F(z) \in \mathbb{R}$, заданного на пространстве $Z = C^2[0, 1] \times C[0, 1]$, и множества

$$K = \{(x, u) \in Z \mid \Phi(x, u) \overset{def}{=} A(x) - u = 0,\ A(x) \overset{def}{=} \ddot{x} + 2\dot{x} + x\ ,\ \ x(0) = x(1) = 0,\ \dot{x}(0) - 1 = 0\}. \tag{11.2}$$

Как отмечалось (впрочем, вскользь), задача (11.1)–(11.2) может быть рассмотрена и на соболевском[3] пространстве $Z = H^2(0, 1) \times H^0(0, 1)$. При этом, $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u \overset{def}{\Leftrightarrow} \int_0^1 \Big[\big(x\ddot{\varphi} - 2x\dot{\varphi} + x\varphi\big) - u\varphi\Big]\,dt = 0$ для любой $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$.

Заметим, что K — замкнутое выпуклое подмножество в Z (как в $C^2[0, 1] \times C[0, 1]$, так и в $H^2(0, 1) \times H^0(0, 1)$), а функционал $F : Z \to \mathbb{R}$ является *выпуклым.* Последнее означает, что

$$F\big(\sigma z_1 + (1 - \sigma)z_2\big) \leq \sigma F(z_1) + (1 - \sigma)F(z_2) \qquad \forall\,\sigma \in [0, 1] \quad \text{и} \quad \forall\,z_1, z_2 \in Z\,. \tag{11.3}$$

Очевидно выпуклость F равносильна выпуклости надграфика F, которым является множество

$$\mathrm{epi}\,(F) \overset{def}{=} \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x) \leq a\ \}. \tag{11.4}$$

Более того, рассматриваемый функционал F — *строго выпуклый*, т.е.

$$F\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) < \frac{F(z_1) + F(z_2)}{2} \qquad \forall z_1, z_2 \in Z\,. \tag{11.5}$$

Действительно, справедливо

[3]Напомним, что *пространство Соболева* $W^{l,p}(\Omega)$, где $1 \leq p < \infty$, является пополнением гладких функций по норме $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sum\limits_{k=0}^{l} \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |\nabla^k x(t)|^p\,dt} < \infty$. $W^{0,p} = L^p$, $W^{m,2} = H^m$.

Предложение 11.1 *Пусть Z — нормированное пространство, $l : Z \ni z \mapsto l(z)$ — линейная форма, $a : X \times Z \ni (z_1, z_2) \mapsto a(z_1, z_2)$ — симметричная неотрицательна (т.е. $a(z,z) \geq 0$) или, соответственно, положительно определенная (т.е. $a(z,z) \geq C\|z\|^2$, $C > 0$) билинейная форма. Тогда $F : z \mapsto F(z) = a(z,z) + l(z)$ — выпуклый или, соответственно, строго выпуклый функционал.*

♡ Имеем

$$F\Big(\sigma z_1 + (1-\sigma)z_2\Big) = \Big[\sigma^2 a(z_1\,, z_1) + 2\sigma(1-\sigma)a(z_1\,, z_2) + (1-\sigma)^2 a(z_2\,, z_2)\Big] + \Big[\sigma l(z_1) + (1-\sigma)l(z_2)\Big]\,,$$

$$\Big[\sigma F(z_1) + (1-\sigma)F(z_2)\Big] = \Big[\sigma a(z_1\,, z_1) + (1-\sigma)a(z_2\,, z_2)\Big] + \Big[\sigma l(z_1) + (1-\sigma)l(z_2)\Big]\,.$$

Поэтому

$$F\Big(\sigma z_1 + (1-\sigma)z_2\Big) - \Big[\sigma F(z_1) + (1-\sigma)F(z_2)\Big] = \sigma(1-\sigma)B(z_1\,, z_2)\,,$$

где

$$B(z_1\,, z_2) = 2a(z_1\,, z_2) - \Big[a(z_1\,, z_1) + a(z_2\,, z_2)\Big] \left\{ \begin{array}{ll} \geq 0\,, & \text{если} \quad a(z,z) \geq 0\,, \\ > 0\,, & \text{если} \quad a(z_1 - z_2, z_1 - z_2) \geq C\|z_1 - z_2\|^2 > 0\,. \end{array} \right. \qquad \square$$

Заметим, далее, что если форма $a : z \mapsto a(z,z)$ положительно определена, то $a(z,z) + l(z) \to +\infty$ при $\|z\| \to \infty$. Поэтому в этом случае функционал $F : z \mapsto F(z) = a(z,z) + l(z)$ *коэрцитивен* в смысле следующего определения.

Определение 11.1 *Функционал $F : z \mapsto F(z) \in \mathbb{R}$ называется коэрцитивным, если так называемое множество Лебега*

$$\mathcal{L}_\alpha(F) \stackrel{def}{=} \{ z \in Z \mid F(z) \leq \alpha \} \tag{11.6}$$

ограничено (и не пусто) для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Термин *коэрцитивность* [лат. *coërcito*], как и слова корсар [ит. *corsaro*] (т.е. пират), корсет [фр. *corset*], означает "удержание", "захват", "охват" интересующего объекта. В нашем случае коэрцитивность свидетельствует о том, что решение задачи $F(z) \to \inf$ заведомо заключено в некотором шаре[4]. Действительно, *условие коэрцитивности* влечет такую импликацию:

$$\text{если последовательность } \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ такова, что } \lim_{k\to\infty} F(z_k) = \inf_{z\in K} F(z)\,, \quad \text{то} \quad \|z_k\| \leq \text{const} \quad \forall\, k\,. \tag{11.7}$$

Последовательность, фигурирующая в (11.7), называется *минимизирующей.*

Отметим еще, что (очевидно) непрерывный на $L^2(0,1)$ функционал $F : u \mapsto \int\limits_0^1 u^2\,dt$ не является непрерывным относительно слабой сходимости в $H^0(0,1) = L^2(0,1)$. Действительно, легко видеть, что последовательность $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к нулю в $L^2(0,1)$, но $\int\limits_0^1 \sin^2 nt\,dt \to 1/2$. Однако (как вскоре будет показано) функционал $u \mapsto \int\limits_0^1 u^2\,dt$ *полунепрерывен снизу* относительно слабой сходимости в $L^2(0,1)$. Дадим соответствующее

Определение 11.2 *Говорят, что функционал $F : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу относительно сильной или, соответственно, относительно слабой сходимости, если*

$$F(\widehat{x}) \leq \underline{\lim} F(x_n) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} F(x_k)\,, \tag{11.8}$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к $\widehat{x} \in X$ сильно, иначе говоря, по норме (т.е. $\|x_n - \widehat{x}\| \to 0$) или, соответственно, слабо (т.е. $f(x_n) \to f(\widehat{x})\ \forall f \in X^*$).

[4] Установление подобной априорной информации или, как говорят, априорной оценки, нацеленной (исключая конечномерные задачи и теории типа Лере–Шаудера) на использование компактности в более слабой топологии, зачастую составляет основную трудность в доказательствах теорем существования.

Предложение 11.2 *Эквивалентны следующие три условия:*
1) функционал $F : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу;
2) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ лебегово множество $\mathcal{L}_\alpha(F) \overset{def}{=} \{x \in X \mid F(x) \le \alpha\}$ замкнуто относительно соответствующей сходимости;
3) относительно соответствующей сходимости замкнут надграфик F.

$\heartsuit$ 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $x_n \in \mathcal{L}_\alpha(F)$ и x_n сходится к $\widehat{x}$ (относительно соответствующей сходимости). Тогда $F(\widehat{x}) \le \underline{\lim} F(x_n) \overset{(11.8)}{\le} \alpha$. Тем самым, $\widehat{x} \in \mathcal{L}_\alpha(F)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $(x_n, a_n) \in \mathbf{epi}\, F$, причем x_n сходится к $\widehat{x}$ (относительно соответствующей сходимости) и $a_n \to \widehat{a}$. Если предположить, что условие 3) не выполнено, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $F(\widehat{x}) > \widehat{a} + \varepsilon \ge a_n \ge F(x_n)$. Имеем: $x_n \in \mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(F)$, а согласно условию 2), множество $\mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(F)$ замкнуто относительно соответствующей сходимости. Значит, $\widehat{x} \in \mathcal{L}_{\widehat{a}+\varepsilon}(F)$, т.е. $F(\widehat{x}) \le \widehat{a} + \varepsilon$, что противоречит установленному выше неравенству $\widehat{a} + \varepsilon < F(\widehat{x})$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(x_n, F(x_n)) \to (\widehat{x}, b) \in \mathbf{epi}\, F$. Поскольку $(x_n, F(x_n)) \in \mathbf{epi}\, F$, а множество $\mathbf{epi}\, F$ замкнуто, согласно 3), то $F(\widehat{x}) \le b = \lim F(x_n) = \underline{\lim} F(x_n)$. $\square$

Возвращаясь к задаче (11.1)–(11.2), вспомним, что с помощью принципа Лагранжа выявлялась пара $(\widehat{x}, \widehat{u})$, удовлетворяющая необходимому условию существования. Далее проверялось, что она единственна и отдельно доказывалось, что она является решением задачи. А именно, устанавливалось с учетом полученных необходимых условий, что $F(x,u) - F(\widehat{x}, \widehat{u}) \ge 2\int\limits_0^1 \widehat{u}\,(\ddot{h} + 2\dot{h} + h)\, dt = 2\int\limits_0^1 (\ddot{\widehat{u}} - 2\dot{\widehat{u}} + \widehat{u})\, h\, dt = 0$, где $(x, u) = (\widehat{x} + h, \widehat{u} + v)$ — любая пара функций, принадлежащая множеству K. Тогда же отмечалось, что для распространения подобных результатов на случай, когда дифференциальная связь $\Phi(x, u)$, входящая в определение множества (11.2), задается уравнением в частных производных (скажем, эллиптическим), следует рассматривать такого рода задачи в пространствах Соболева, заменив пространство $C^2(\Omega) \times C(\Omega)$, например, на $H^2(\Omega) \times H^0(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Там же отмечалась причина этого, а именно: принцип Лагранжа для такого рода задач не верен в пространстве $C^2(\Omega) \times C(\Omega)$ при $n > 1$. Суть в том, что образ $C^2(\Omega)$ при отображении, подобном оператору A (скажем, оператором Δ), не замкнут в $C(\Omega)$, если $n > 1$. Есть и еще одна аргументация: пространства $C^k(\Omega)$ в отличие от пространств Соболева $W_p^l(\Omega)$, где $1 < p < \infty$, в частности, пространств $H^l = W_2^l$ не рефлексивны[5], но именно для рефлексивного пространства X справедлива

Теорема 11.1 *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, K — замкнутое выпуклое (непустое) подмножество в X, а функционал $F : X \to \mathbb{R}$ является выпуклым, коэрцитивным и непрерывным (или даже всего лишь полунепрерывным снизу). Тогда задача*

$$F(x) \to \inf, \ x \in K \tag{11.9}$$

имеет решение, причем единственное, если функционал F — строго выпуклый.

Приведенное чуть ниже доказательство теоремы 11.1 опирается на следующую теорему Мазура.

Теорема 11.2 *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, а последовательность $\{x_n\}$ его элементов слабо сходится к $\widehat{x} \in X$. Тогда существует такая последовательность элементов*

$$y_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} x_j, \qquad \alpha_{j,n} \ge 0\,, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} = 1$$

в виде выпуклых комбинаций исходной последовательности $\{x_n\}$, что $\|y_n - \widehat{x}\| \to 0$.

[5]Говорят, что банахово пространство X *рефлексивно*, если $(X^*)^* = X$, т.е. сопряженное к $X^* = L(X, \mathbb{R})$ совпадает с X. Согласно теореме Эберлейна–Шмульяна (см., например, К. Иосида *Функциональный анализ*) банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда из всякой его ограниченной последовательности $\{x_n\}$ ($\|x_n\| \le \mathrm{const}$) можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.е. существует такой элемент $\widehat{x} \in X$, что $f(x_{n_k}) \to f(\widehat{x})$ для любого $f \in X^*$. Если единичный шар $B_1 = \{\|x\| \le 1\}$ в X равномерно выпуклый (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что $\|x + y\| \le (1 - \delta)$ для любых $x, y \in B_1$, подчиненных условию $\|x - y\| \ge \varepsilon$), то X — рефлексивно (теорема Мильмана).

♡ Если предположить, что теорема не верна, то тогда $\widehat{x}$ не принадлежит $\overline{\mathbf{co}\{x_n\}}$, т.е. замыканию выпуклых оболочек множества $\{x_n\}$. В этом случае, согласно следствию 2.1 (второй теоремы отделимости), $\widehat{x}$ строго отделено от замкнутого выпуклого множества $\overline{\mathbf{co}\{x_n\}}$. Иными словами, существует функционал $x^* \in X^*$, для которого

$$\sup_{x \in \overline{\mathbf{co}\{x_n\}}} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \widehat{x} \rangle - \varepsilon \qquad \overset{y_n \in \overline{\mathbf{co}\{x_n\}}}{\Rightarrow} \qquad \lim_{n\to\infty} \langle x^*, y_n \rangle \not\to \langle x^*, \widehat{x} \rangle \,.$$

Но это противоречит условию теоремы, согласно которому $\langle x^*, x_j \rangle \to \langle x^*, \widehat{x} \rangle$, что влечет

$$\langle x^*, y_n \rangle = \langle x^*, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} x_j \rangle = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} \Big) \langle x^*, x_j \rangle = \langle x^*, x_j \rangle \to \langle x^*, \widehat{x} \rangle \,. \qquad \square$$

Следствие 11.1 *Если K выпукло и замкнуто в X, то K замкнуто относительно слабой сходимости (говорят, секвинциально слабо замкнуто).*

♡ Пусть $x_n \in X$, $x_n \rightharpoonup \widehat{x}$. По теореме Мазура, существует последовательность выпуклых комбинаций $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} x_j$ элементов $x_j \in K$, таких, что $\|y_n - \widehat{x}\| \to 0$. Имеем: $y_n \in K$ (в силу выпуклости K), а ввиду замкнутости K и того, что $\|y_n - \widehat{x}\| \to 0$, получаем: $y_n \in K$. $\square$

Следствие 11.2 *Пусть $F : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый полунепрерывный снизу (в частности, непрерывный) функционал на рефлексивном банаховом пространстве. Тогда F — полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в X.*

♡ Согласно предложению 11.2, $\mathbf{epi}\, F$ — замкнут в X (ибо функционал $F : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу). Выпуклость F влечет выпуклость $\mathbf{epi}\, F$. Поэтому (в силу следствия 11.1) $\mathbf{epi}\, F$ — замкнут относительно слабой сходимости. Отсюда, согласно предложению 11.2, F — полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в X. $\square$

Доказательство теоремы 11.1 Пусть $F(x_n) \to \inf\limits_{x \in K} F(x) = \widehat{F}$. В силу коэрцитивности, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. А поскольку X — рефлексивно, то из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\widehat{x} \in K$. Воспользовавшись тем, что (согласно следствию 11.2) функционал F полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости, получаем $F(\widehat{x}) \le \underline{\lim} F(x_{n_k})$. В итоге имеем:

$$\widehat{F} = \inf_{x \in K} F(x) \le F(\widehat{x}) \le \underline{\lim} F(x_{n_k}) \le \lim_{x_{n_k} \to \widehat{x}} F(x_{n_k}) = \widehat{F} \,.$$

Итак, $F(\widehat{x}) = \inf\limits_{x \in K} F(x)$, т.е. слабый предел $\widehat{x}$ последовательности x_{n_k} есть решением поставленной задачи. Это решение единственно, если функционал F строго выпуклый, т.к. предположив наличие двух различных решений $\widehat{x}_1$ и $\widehat{x}_2$, получим требуемое противоречие

$$F\left(\frac{\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2}{2} \right) \overset{(11.5)}{<} \frac{F(\widehat{x}_1) + F(\widehat{x}_2)}{2} = \inf_{x \in K} F(x) \,. \qquad \square$$

Теорема 11.1 дает достаточное условие существования решения задачи (11.9), т.е. задачи $F(x) \to \inf$, $x \in K$. А следующая теорема выявляет неравенство, которому удовлетворяет решение этой задачи.

Теорема 11.3 *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (11.9), *K — выпуклое множество банахова пространства X, а $F : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал, дифференцируемый по Гато*[6]. *Тогда $\widehat{x} \in K$ — является решением задачи* (11.9) *в том и только в том случае, если*

$$\langle A, x - \widehat{x} \rangle \ge 0 \qquad \forall\, x \in K \,, \tag{11.10}$$

где $A = F'_G(\widehat{x}) \in L(X, \mathbb{R})$ — производная по Гато в точке $\widehat{x}$ функционала F.

[6]Функционал $F : X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемым по Гато в точке $\widehat{x}$, если существует такой линейный непрерывный оператор $A : X \to X^*$, что для любого $h \in X$ справедливо равенство: $F(\widehat{x} + th) - F(\widehat{x}) - tAh = o(t)$ при $t \to 0$. Этот оператор A называется производной по Гато и обозначается обычно через $F'_G(\widehat{x})$ в отличие от обозначения $F'(\widehat{x})$, зарезервированого для производной по Фреше.

♡ Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи, а $x \in K$. Так как K выпуклое множество, то $\widehat{x}+t(x-\widehat{x}) \in K$ для любого $t \in (0,1)$. Поэтому $\frac{F(\widehat{x}+t(x-\widehat{x}))-F(\widehat{x})}{t} \geq 0$. Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем (11.10).

Обратно, пусть для $\widehat{x}$ выполнено неравенство (11.10). В силу выпуклости F, имеем

$$\frac{F(\widehat{x}+t(x-\widehat{x}))-F(\widehat{x})}{t} \leq F(x)-F(\widehat{x}).$$

При $t \to 0$ левая часть этого неравенства стремится к $\langle A, x-\widehat{x}\rangle$, где $A = F'_G(\widehat{x})$. Поэтому, учитывая неравенство (11.10), получаем, что $F(x)-F(\widehat{x}) \geq 0$ для любого $x \in K$. $\square$

Определение 11.3 *Неравенство* (11.10) *называется* вариационным неравенством (*на множестве* K) *для оператора* $A \in L(X,\mathbb{R})$ *, причем и в том случае, когда* (*как в* §12) *этот оператор не имеет прямого отношения к какой-либо задаче на экстремум (ассоциируемой с вариационными методами), что было в рассмотренной выше задаче* (11.9).

Упражнение 11.1 *Пусть даны замкнутое выпуклое множество* $K \subset X = \mathbb{R}^n$ *и выпуклый функционал* $F : K \to \mathbb{R}$, *производная по Гато которого* $A = F'_G : K \to X^* = \mathbb{R}^n$, *подчинена условию*

$$\frac{\langle A(x)-A(x_0)\,, x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|} \to \infty \qquad \text{при} \quad \|x\| \to \infty\,,\ x \in K \tag{11.11}$$

для некоторого $x_0 \in K$. *Тогда вариационное неравенство* (11.10) *имеет решение, т.е. существует* $\widehat{x} \in K$ *, удовлетворяющее* (11.10).

Указание. Условие (11.11) влечет (11.6). Это важно. В самом деле, если $X = K = \mathbb{R}$, а $A(x) = e^x$, то вариационное неравенство $e^x(y-x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in K$ не имеет решения.

§ 12 Вариационные неравенства для монотонных операторов

§ 13 Преобразование Лежандра–Юнга–Фенхеля. Теорема Фенхеля–Моро

§ 14 Двойственность в линейном программировании. Экономическая интерпретация

§ 15 Обобщенные вариационные неравенства и теорема Эрроу–Дебре

Модель Эрроу–Дебре [Arrow-Debreu model] — экономико-математическая модель (1954г.) общего равновесия рынка. Ее авторы американец К. Эрроу и француз Ж. Дебре — лауреаты нобелевской премии (соответственно, 1972 и 1983 года). Оба родились летом 1921 года. Дебре умер в 2004г.

Будем считать, что в экономике есть M видов товаров, занумерованных параметром $m = 1,\ldots,M$. Количество m-го вида (являющегося какой-то долей крупной единицы измерения) будем представлять некоторым неотрицательным числом $x^m \in \mathbb{R}_+$. Таким образом все товары на рынке задаются некоторым подмножеством конуса $\mathbb{R}^M_+ \ni x = (x^1,\ldots,x^M)$. Каждый участник рынка может быть одновременно покупателем, имеющим, к примеру, номер $n \in \{1,\ldots,N\}$, а также продавцом, скажем, с номером $k \in \{1,\ldots,K\}$. Производственные возможности k-го производителя описываются так называемым технологическим множеством $Y_k \subset \mathbb{R}^M_+$. Удобно считать, что Y_k содержит нулевой элемент (соответствующий бездействию). В дальнейшем будем предполагать, что Y_k — выпуклый компакт. Это предположение можно ослабить (достаточно предполагать, что выпукло и замкнуто совокупное технологическое множество $Y = \sum\limits_{k=1}^{K} Y_k$). Предполагается, что при заданном векторе цен $p = (p^1,\ldots,p^M) \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ на рассматриваемые товары, прибыль k-го производителя задается линейным функционалом $\langle p,\cdot\rangle : Y_k \ni y \mapsto \langle p,y\rangle$, т.е. она линейно зависит от того или иного вектора $y \in Y_k$ затрат-выпусков k-го производителя. Считается, что k-й производитель стремится получить максимальную прибыль

$$\pi_k(p) = \max_{y=(y^1,\ldots,y^M)\in Y_k} \langle p,y\rangle\,. \tag{15.1}$$

Согласно (15.1), индивидуальное *предложение* k-го производителя на рынке товаров определяется (вообще говоря) многозначным отображением

$$\Psi_k : p \mapsto \Psi_k(p) = Arg\max_{y\in Y_k}\langle p,y\rangle \overset{def}{=} \{y_k = (y^1_k,\ldots,y^M_k) \in Y_k \subset \mathbb{R}^M_+ \mid \langle p,y_k\rangle = \max_{y\in Y_k}\langle p,y\rangle\ \}\,.$$

Совокупное предложение формируется из предложения производителей и начальных запасов потребителей. Оно описывается (вообще говоря) многозначным отображением

$$\Psi : p \mapsto \Psi(p) = \sum_{k=1}^{K} \Psi_k(p) + \sum_{n=1}^{N} w_n \,, \qquad w_n \in \mathbb{R}^M_+ = \{ x = (x^1, \ldots, x^M) \in \mathbb{R}^M \mid x^m \geq 0 \, \} \,. \tag{15.2}$$

Здесь w_n — начальный набор товаров, который имеется у n-го потребителя. Предполагается также, что n-й потребитель получает долю $\alpha_{nk} \geq 0$ прибыли k-го производителя и $\sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_{nk} = 1 \quad \forall\, k$. Тогда *спрос* у n-го потребителя на рынке товаров описывается (вообще говоря) многозначным отображением

$$\Phi_n(p) = Arg \max \{ u_n(x) \mid x \in \mathbb{R}^m_+ \,, \ \langle p, x \rangle \leq \langle p, w_n \rangle + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(p) \ \} \,, \tag{15.3}$$

где $u_n : \mathbb{R}^M_+ \ni x \mapsto \mathbb{R}$ — функция предпочтений n-го потребителя. Она предполагается *непрерывной, монотонно неубывающей* (т.е. $u_n(x) \leq u_n(\widetilde{x})$ при $\widetilde{x} - x \in \mathbb{R}^m_+$), *не имеющей максимумов и вогнутой*[7]. Что же касается неравенства $\langle p, x \rangle \leq \langle p, w_n \rangle + \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(p)$, то оно выражает бюджетное ограничение полным доходом n-го потребителя, который складывается из суммы дивидендов $\sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(p)$, полученных от производителей, и стоимости $\langle p, w_n \rangle$ его первоначальной собственности w_n.

Совокупный спрос представлен величиной $\Phi(p) = \sum\limits_{n=1}^{N} \Phi_n(p)$. Отметим, что $\Phi(\lambda p) = \Phi(p) \ \ \forall \ \ \lambda > 0$.

Простоты ради, будем в дальнейшем считать, что $w_n = 0 \ \ \forall n$.

Определение 15.1 *Вектором равновесных цен называется такой вектор* $\widehat{p} \in \mathbb{R}^M_+ \setminus \{0\}$ *, при котором множество совокупного спроса имеет непустое пересечение с множеством совокупного предложения, т.е.*

$$\Phi(\widehat{p}) \bigcap \Psi(\widehat{p}) \neq \emptyset \,, \qquad \text{где} \quad \Psi(\widehat{p}) \overset{(15.2)}{=} \sum_{k=1}^{K} \Psi_k(\widehat{p}) \,.$$

Лемма 15.1 *Если* $\widehat{p}$ *— вектор равновесных цен, то существуют элементы* $\widehat{x}_n \in \Phi_n(\widehat{p})$ *,* $n = 1, \ldots, N$, *и* $\widehat{y}_k \in \Psi_k(\widehat{p})$ *,* $k = 1, \ldots, K$, *такие, что набор* $\{\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_N; \widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_K; \widehat{p}\}$ *является конкурентным равновесием в задаче Эрроу–Дебре, т.е. выполнено равенство между совокупным спросом и совокупным предложением:*

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \widehat{p} \,, \widehat{x}_n \rangle = \sum_{n=k}^{K} \langle \widehat{p} \,, \widehat{y}_k \rangle \,. \tag{15.4}$$

♡ По условию $\Phi(\widehat{p}) \bigcap \Psi(\widehat{p}) \neq \emptyset$, т.е. совокупный запрос не превышает совокупное предложение. Иными словами, существуют запросы $\widehat{x}_n \in \Phi_n(\widehat{p})$ ($1 \leq n \leq N$) и предложения $\widehat{y}_k \in \Psi_k(\widehat{p})$ ($1 \leq k \leq K$), такие, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{x}_n \leq \sum\limits_{k=1}^{K} \widehat{y}_k$. В силу неубывания функций полезности и отсутствия у этих функций максимума в $\mathbb{R}^m_+$, потребители полностью использует имеющийся у них бюджет, который (при сделанном предположении $w_n = 0 \ \ \forall n$) для n-й потребителя равен $\sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(\widehat{p})$. Тем самым,

$$\langle \widehat{p}, \widehat{x}_n \rangle = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(\widehat{p}) \,, \qquad \pi_k(\widehat{p}) \overset{(15.1)}{=} \max_{y \in Y_k} \langle \widehat{p}, y \rangle = \langle \widehat{p}, \widehat{y}_k \rangle \,.$$

Суммируя это равенство по n, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{N} \langle \widehat{p}, \widehat{x}_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \alpha_{nk} \pi_k(\widehat{p}) = \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_{nk} \right) \pi_k(\widehat{p}) = \sum_{k=1}^{K} \langle \widehat{p}, \widehat{y}_k \rangle \,.$$

[7]Экономическая сторона этой задачи связана с поиском максимума. Поэтому, типичные для задач на минимум объекты, как выпуклые функции, полунепрерывных снизу функции, здесь заменяются, соответственно, на вогнутые и на полунепрерывные сверху функции.

т.е. совокупный спрос равен совокупному предложению. $\square$

Таким образом, чтобы доказать, что справедлива

Теорема 15.1 *В модели Эрроу–Дебре существует конкурентное равновесие.*

остается установить, что при сделанных предположениях найдется вектор равновесных цен, т.е. такой $\widehat{p} \in \mathbb{R}^M_+ \setminus \{0\}$, что $\Phi(\widehat{p}) \bigcap \Psi(\widehat{p}) \neq \emptyset$.

Предварительно введем несколько определений и докажем ряд предложений.

Пусть Z — банахово пространство