

PLS  
Acta 6.1

Pres.

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

---

A C T A

ANNVS VI  
VOLVMEN VI



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

—  
MDCCCCXXXII

# INDEX

1. *Resoconto della solenne Tornata inaugurale del VI Anno accademico all'Augusta presenza di S. S. Pio XII e della prima Tornata ordinaria (30 novembre 1941)* . . . . . I-XXXXII  
*Resoconto della seconda Tornata ordinaria del VI anno accademico (20 febbraio 1942)* . . . . . XXXXV-LVIII  
*Resoconto della terza Tornata ordinaria del VI anno accademico (6 giugno 1942)* . . . . . LIX-LXXXVIII
2. G. C. PERRI, *Osservazioni sulla ossificazione eterotopica del renc* . . . . . 1-8
3. E. FOÀ, *Sull'equazione del moto smorzato con parametri variabili e su un caso di instabilità* . . . . . 9-16
4. A. BLANCHI, *Un'osservazione sul calcolo delle catene infinite di trasduttori elettrici* . . . . . 17-24
5. C. PATERNA, *Formule risolutive per i problemi generali sulle reti di conduttori elettrici* . . . . . 25-34
6. U. PIERANTONI, *Osservazioni su di un nuovo Pseudamphistomum umano dell'Etiopia (cum 1 tab.)* . . . . . 35-40
7. G. COLONNETTI, *Su di un caso caratteristico di rinforzo di una volta sottile (cum 7 fig. et 1 tab.)* . . . . . 41-50
8. G. COLONNETTI, *La statica delle cupole cerchiate (cum 1 fig. et 2 tab.)* . . . . . 51-56
9. C. SOMIGLIANA, *Vito Volterra. Discorso commemorativo, pronunciato nella Prima Tornata Ordinaria del Sesto Anno Accademico, il 30 novembre 1941 (cum 2 tab.)* . . . . . 57-86
10. A. GIACOMINI, *Liquido nel quale la velocità degli ultrasuoni è indipendente dalla temperatura (cum 3 fig.)* . . . . . 87-94
11. F. SILVESTRI, *Nuove osservazioni sulla Mengenilla parvula Silv. (Insecta strepsiptera)* . . . . . 95-98
12. L. SABBIA, *Sulla innervazione del palato della rana (Rana esculenta)* . . . . . 99-102
13. L. LABOCETTA, *Riduzione a forma simmetrica delle espressioni per le grandezze caratteristiche dei campi gravitazionali ed elettrici* . . . . . 103-110
14. G. VACCA, *Primo racconto della presentazione di un canocchiale olandese al principe Maurizio di Nassau nel settembre 1608 e le prime osservazioni celesti* . . . . . 111-114
15. F. PELLEGRINO, *Una condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di potenze abbia sulla circonferenza di convergenza un solo polo multiplo* . . . . . 115-124
16. G. PALUMBI, *Contributo allo studio della innervazione delle anastomosi artero-venose ed al problema della esistenza di un parasimpatico spinale (cum 1 tab.)* . . . . . 125-138



17. G. APRILE, <i>Funzioni generatrici generalizzate, e loro applicazione ai metodi grafico-numeriche di valutazione nel calcolo operatorio funzionale</i> (cum 3 fig.) . . . . .	139-146
18. E. MARTINELLI, <i>Sulla imagine proiettiva delle serie e dei sistemi d'equivalenza sopra una varietà</i> . . . . .	147-152
19. P. TROFILATO, <i>La determinazione sperimentale del momento d'inerzia e l'influenza dell'elasticità</i> . . . . .	153-170
20. G. APRILE, <i>Il teorema di Bézout-Severi ed i sistemi algebrici <math>\infty^s</math> di <math>S_n</math> dell'<math>S_r</math></i> . . . . .	171-180
21. G. COLONNETTI, <i>Sul problema della flessione composta in regime elasto-plastico</i> (cum 4 fig.) . . . . .	181-192
22. A. GEMELLI, <i>Adriano Carlo Maria Noyons (1878-1941). Commemorazione letta nella Tornata Accademica del 6 giugno 1942</i> (cum 1 tab.) . . . . .	193-208
23. G. COLONNETTI, <i>Serbatoi sferici a sospensione funicolare</i> (cum 5 tab.) . . . . .	209-216
24. G. COLONNETTI, <i>Deformazioni plastiche e deformazioni viscose</i> (cum 3 fig.) . . . . .	217-224
25. O. BARBIER, <i>Attuazione di un metodo per rivelare immagini ultracustiche</i> (cum 2 fig.) . . . . .	225-228
26. A. UGGÈ, <i>Di alcune proprietà dei momenti della curva di probabilità e degli indici di normalità</i> . . . . .	229-236
27. M. TOGNETTI, <i>Sul gruppo delle cuspidi delle curve cuspidate di una rete</i> . . . . .	237-240
28. C. CATTANEO, <i>Attrazione newtoniana ritardata</i> . . . . .	241-248
29. G. ZAPPA, <i>Gruppi quasi-abeliani</i> . . . . .	249-268
30. P. W. SCHMIDT S. V. A., <i>Die älteste Opferstelle des altpaläolithischen Menschen in den Schweizer Alpen</i> . . . . .	269-272
31. G. COLONNETTI, <i>Il problema dei margini di sicurezza nelle strutture iperstatiche in stato di coazione</i> (cum 9 fig.) . . . . .	273-294
32. G. ZAPPA, <i>Sui gruppi quasi-abeliani con elementi aperiodici</i> . . . . .	295-302
33. F. SILVESTRI, <i>Tisanuri Lepismatidi (insecta) della Cina continentale</i> (cum 12 fig.) . . . . .	303-322
34. P. MARTINOTTI, <i>Interpolazione e medie</i> . . . . .	323-334
35. R. LEVI-MONTALCINI, <i>Origine ed evoluzione del nucleo accessorio del nervo abducente nell'embrione di pollo</i> (cum 2 tab.) . . . . .	335-346
36. G. COLONNETTI, <i>Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema dei margini di sicurezza)</i> (cum 4 fig. o 1 tab.) . . . . .	347-358
37. E. FELDHEIM, <i>Sul prodotto dei polinomi di Laguerre</i> . . . . .	359-370
38. G. APRILE, <i>Su alcune formule di valutazione nel calcolo operatorio funzionale</i> . . . . .	371-374
39. X. COLOMBO, <i>Sulle funzioni delle matrici</i> . . . . .	375-386
40. G. ARMELLINI, <i>Sopra una classe di equazioni differenziali della meccanica celeste di cui l'integrale generale tende a zero (Nota Prima)</i> . . . . .	387-398
41. P. TROFILATO, <i>Sulla velocità di lavorazione nell'estrazione di sostanze mediante solvente</i> . . . . .	399-414

RESOCONTO  
DELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE  
DEL VI ANNO ACCADEMICO  
ALL'AUGUSTA PRESENZA DI S. S. PIO XII

*(30 novembre 1941)*

Domenica, 30 novembre 1941, all'Augusta presenza del Santo Padre, si è tenuta la solenne Tornata Inaugurale del sesto Anno Accademico della Pontificia Accademia delle Scienze.

In precedenza gli Accademici Pontifici, a norma dello Statuto, avevano ascoltato la Santa Messa, che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Luigi Maglione, Segretario di Stato di Sua Santità ed Accademico Pontificio Onorario, aveva celebrato nella Cappella Paolina, alle ore 8,30, per ottenere la benedizione di Dio sui lavori dell'Accademia, per ringraziarlo, per invocare la protezione divina sulla Chiesa e sul Sommo Pontefice e per suffragare gli Accademici defunti.

La solenne Tornata Inaugurale si è svolta alla Casina di Pio IV, nei Giardini Vaticani, nella nuova aula delle sedute.

Alla solenne Tornata hanno assistito le loro Eminenze Reverendissime i Signori Cardinali: Luigi Maglione e Giuseppe Pizzardo, Accademici Pontifici Onorari; Federico Tedeschini, Carlo Salotti, Alessandro Verde, Francesco Marmaggi, Eugenio Tisserant, Ermenegildo Pellegrinetti, Camillo Caccia-Dominioni, Nicola Canali, Vincenzo La Puma e Federico Cattani.

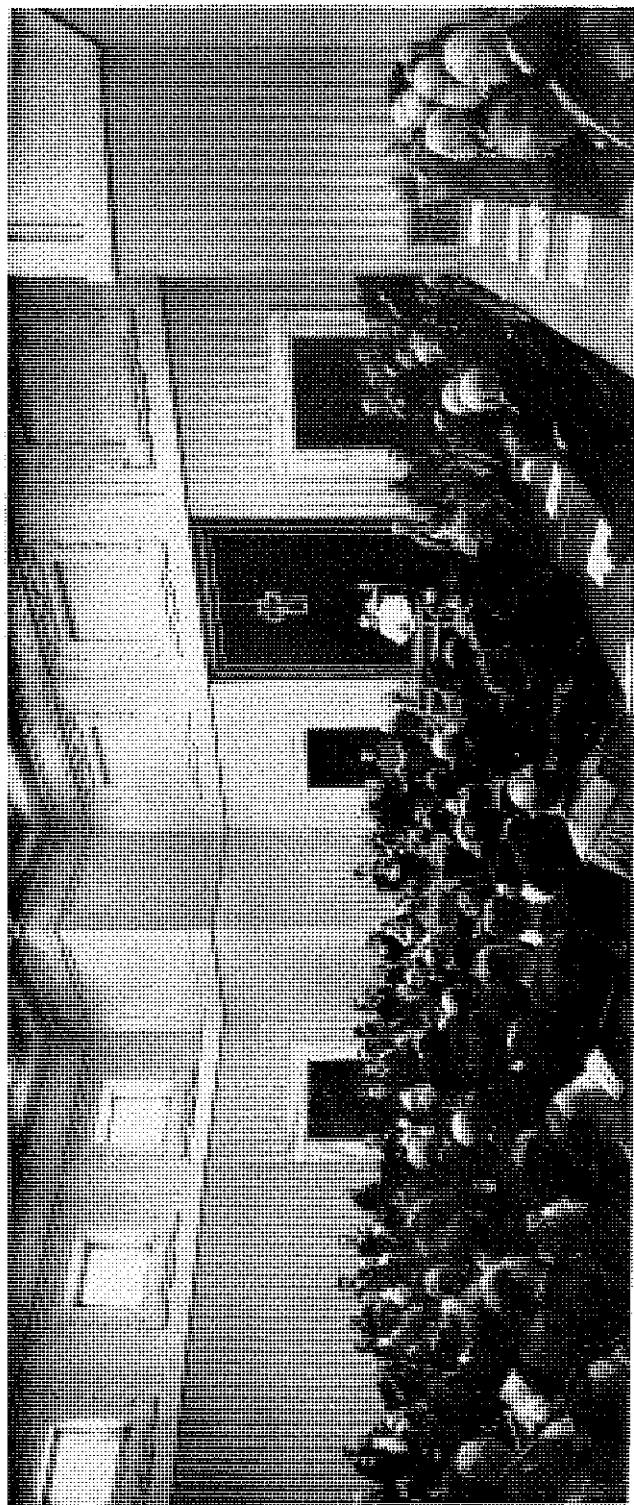
Erano presenti altresì S. Emza il Principe Don Ludovico Chigi Albani della Rovere, Gran Maestro del Sovrano Militare Ordine di Malta, Accademico Pontificio Onorario; gli Eccomi Parenti di Sua Santità; le LL. EE. Reverendissime i Monsignori Domenico Tardini, Segretario della Sacra Congregazione degli Affari

Ecclesiastici Straordinari e Giovanni Battista Montini, Sostituto della Segreteria di Stato di Sua Santità; Ecceffi Assessori e Segretari delle Sacre Congregazioni romane; una larga rappresentanza dell'Eccellentissimo Corpo Diplomatico accreditato presso la Santa Sede, accolto dal Comm. Belardo, della Segreteria di Stato di Sua Santità, fra cui gli Ambasciatori: di Spagna, Brasile, Polonia, Belgio, Italia, Portogallo, Francia, Perù ed Argentina; i Ministri di Inghilterra, Repubblica di San Marino, Ordine di Malta e Romania; gli Incaricati d'Affari degli Stati Uniti d'America, di Bolivia, Irlanda, Haïti, Costarica, Nicaragua ed Equatore; il Segretario della Ambasciata di Germania; i Consiglieri Ecclesiastici delle Legazioni di Ungheria e Slovacchia; e molti altri Consiglieri, Segretari e Consiglieri Ecclesiastici; numerosi Prelati; Generali di Ordini Religiosi; il Gr. Uff. Prof. Pietro De Sanctis, Accademico Pontificio Onorario; i Comandanti della Guardia Nobile di Sua Santità, della Guardia Svizzera, della Guardia Palatina d'Onore e della Gendarmeria Pontificia; il Delegato Speciale della Pontificia Commissione Cardinalizia e Direttore Generale dei servizi tecnici ed economici Ing. Cav. di Gran Croce Enrico Galeazzi, in rappresentanza del Governatorato; rappresentanze degli Atenei e Accademie Ecclesiastiche di Roma; ed altre molte personalità ecclesiastiche e laiche della Città del Vaticano.

Era rappresentata la Reale Accademia d'Italia, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, la R. Università ed altri Enti culturali e scientifici di Roma, oltre a numeroso personalità italiane ed estere.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, oltre al Presidente S. E. il Rev.mo P. Agostino Gemelli O. F. M., le LL. EE. gli Accademici: Amaldi, Armellini, Ursprung, Colonnetti, Crocco, Dal Piaz, Dainelli, Ghigi, Giordani, Giorgi, Gola, Lepri, Levi-Civita, Lombardi, Somigliana, Panetti, Severi, Pensa, Pistolesi, Rondoni, Silvestri, Toniolo, Vallauri, Vercelli; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: Dom Albareda O. S. B., P. Gatterer S. J., Mons. A. Mercati, P. Schmidt O. V. D., P. Stein S. J., ed il Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salviucci.

Preceduto dalla Sua Nobile Corte, l'Augusto Pontefice, che era accompagnato dal Cameriere Segreto Partecipante di servizio Ill.mo e Rev.mo Monsignor Callori di Vignale, è giunto alla Sede dell'Accademia alle ore 10 precise, ed è sceso al Suo ingresso privato, ricevuto dell'Em.mo Signor Cardinale Nicola Canali, Presidente della Pontificia Commissione per lo Stato della Città del Vaticano, da S. E. Rev.ma Mons. Arborio Mella di Sant'Elia, Maestro di Camera di Sua Santità, e dal Presidente dell'Accademia S. E. il Rev.mo Padre Agostino Gemelli O. F. M.



Subito entrato nell'aula il Santo Padre, gradito l'omaggio degli Eminentissimi Cardinali intervenuti e dei componenti il distinto consesso, si è assiso alla presidenza della eletta assemblea, avendo ai lati S. E. Rev.ma Mons. Arborio Mella di Sant'Elia, Maestro di Camera; S. E. Rev.ma Mons. Migone, Arcivescovo tit. di Nicomedia, Suo Elemosiniere Segreto; S. E. Mons. Camillo De Romanis, Vescovo tit. di Porfirio, Suo Sacrista e Vicario Generale per la Città del Vaticano; i Camerieri Segreti Partecipanti Illmi e Revmi Monsignori, Callori di Vignale, Venini, Toraldo e Nasalli Rocca di Corneliano, e l'Esente di servizio della Guardia Nobile Conte Ambrosi Tomasi.

### L'AUGUSTA PAROLA DEL SANTO PADRE

L'Augusto Pontefice, ricevuto il devoto omaggio di tutti gli intervenuti, ha subito proceduto all'inaugurazione del sesto Anno Accademico tenendo all'illustre uditorio il seguente discorso:

*Richiamo di gioia all'animo Nostro è il ritorno in quest'aula della Pontificia Accademia delle Scienze, fra questa corona di Signori Cardinali, di illustri Diplomatici, di nobili personaggi e insigni maestri del sapere, in mezzo a voi, Accademici Pontifici, valorosi scrutatori della natura, delle sue multiformi manifestazioni e della sua storia, chiamati a costituire quest'alto Istituto scientifico dal sapiente Nostro Predecessore, Pio XI, sagace ammiratore del progresso delle scienze fisiche e degli abissi ch'esse indagano, ancor più profondi degl'immani dirupi da lui contemplati sui vertici delle Alpi. Ma Ci sentiremmo minori della stima e dell'apprezzamento ch'egli fece dei vostri meriti scientifici e, a un tempo, dell'opera sua, divenuta per arcano consiglio divino retaggio Nostro, se non tributassimo onore e gratitudine a lui, rendendo e accrescendo l'onore a voi, decoro di tante Nazioni, come fu Nostra intenzione nell'accordarvi il titolo di « Eccellenza »; titolo che altro non è se non un riconoscimento di quella vera eccellenza scientifica, che possedete e vi esalta in faccia al mondo. L'onore e il saluto, che porgiamo a voi, e in primo luogo al vostro benemerito e instancabile Presidente, vola dall'animo Nostro oltre la soglia di questo convegno anche agli altri Accademici, ai quali le dure vicende dell'ora presente non hanno consentito di qui venire dai loro Paesi. In seno a tanto dotta e gradita adunanza, la letizia che proviamo è quasi una dolce stilla di conforto alle amarezze, che Ci cagiona il fiero conflitto di Nazioni,*

tutte a Noi care; e di tale conforto siamo pure debitori a Dio, al quale innalziamo ogni giorno le Nostre più fiduciose speranze affinchè provvido e benigno, illuminando, sanando e perdonando, tutto diriga e muova verso quella meta, dove trionfi più la sua misericordia che la sua giustizia.

A Lui si eleva il pensiero Nostro e il Nostro cuore anche in quest'aula delle Scienze; perchè quel Dio, che regge l'universo, il corso dei tempi e le vicende liete e tristi dei popoli, è anche il Signore, Dio onnisciente: Deus scientiarum, Dominus (1 Reg. 2, 3). La sua sapienza infinita lo fa Maestro del cielo e della terra, degli angeli e degli uomini: in Lui, creatore dell'universo, sono nascosti tutti i tesori della sapienza e della scienza (cfr. Coloss. 2, 3). In Lui l'ineffabile scienza di sè stesso e dell'infinita imitabilità della sua vita e bellezza; in Lui la scienza del nascere e del rinascere, della grazia e della salute; in Lui gli archetipi delle mirabili danze dei pianeti volteggianti intorno al sole, dei soli nelle costellazioni, delle costellazioni nel labirinto del firmamento fino agli ultimi lidi del pelago dell'universo. Egli mosse dal centro dell'inaccessibile luce del suo trono eterno a creare il cielo e la terra, e accanto a Lui era, quale architetto, la sua Sapienza che si deliziava ricreandosi in ogni momento alla presenza sua (Prov. 8, 30); parlò al nulla dalla soglia della sua eternità con la potenza della sua voce; e il nulla fu sopraffatto e vinto dalla comparsa del cielo e della terra al tuono di quel grido onnipotente. Ex nihilo nihil fit, è vero, dalla mano dell'uomo e di ogni creatura, ma non dalla voce di Dio: Ipse dixit, et facta sunt (Psal. 32, 9). E come furono fatti il cielo e la terra, e la terra era informe e vuota, e lo Spirito di Dio si muoveva sopra le acque (Gen. 1, 1-2); così fu formato l'uomo dal fango della terra e Dio gli ispirò in faccia lo spirito della vita e l'uomo divenne persona vivente (Gen. 2, 7). Ecco il macrocosmo, qual è l'universo dei mondi, di fronte al microcosmo, ch'è l'uomo (S. Th. 1, p. q. 91, art. 1 in corp.); l'uomo piccolo, minuscolo mondo dello spirito, che circonda e copre, come luminoso arco, l'empireo, l'empireo immenso per mole materiale, minore dell'uomo per inattività di spirito.

Quel giorno, in cui Dio plasmò l'uomo e gli coronò la fronte del diadema della sua immagine e somiglianza, costituendolo re di tutti gli animali viventi del mare, del cielo e della terra (Gen. 1, 26), quel giorno il Signore, Dio onnisciente, si fece maestro di lui. Gl'insegnò l'agricoltura, a coltivare e custodire il delizioso giardino nel quale lo aveva posto (Gen. 2, 15); condusse a lui tutti gli animali del campo e tutti gli uccelli del-

*l'aria, perchè vedesse come chiamarli; ed egli diede a ciascuno il suo vero e conveniente nome (Gen. 2, 19-20); ma, pur in mezzo a quella moltitudine di esseri a lui sottoposti, si sentiva tristemente solo e cercava invano una fronte che somigliasse a lui e avesse un raggio di quella immagine divina, onde splende l'occhio di ogni figlio di Adamo. Dall'uomo soltanto poteva venire un altro uomo che lo chiamasse padre e progenitore; e l'aiuto dato da Dio al primo uomo viene pure da lui ed è carne della sua carne, formata in compagna, che ha nome dall'uomo, perchè da lui è stata tratta (Gen. 2, 23). In cima alla scala dei viventi l'uomo, dotato di un'anima spirituale, fu da Dio collocato principe e sovrano del regno animale. Le molteplici ricerche sia della paleontologia che della biologia e della morfologia su altri problemi riguardanti le origini dell'uomo non hanno finora apportato nulla di positivamente chiaro e certo. Non rimane quindi che lasciare all'avvenire la risposta al quesito, se un giorno la scienza, illuminata e guidata dalla rivelazione, potrà dare sicuri e definitivi risultati sopra un argomento così importante.*

*Non vi meravigliate se innanzi a voi, che avete con tanto acume studiato, indagato, anatomizzato, raffrontato i cervelli degli uomini e degli animali irragionevoli, Noi esaltiamo l'uomo, il quale leva la fronte irradiata da quell'intelligenza, che è retaggio esclusivo della specie umana. La vera scienza non abbassa nè umilia l'uomo nella sua origine, ma lo innalza ed esalta, perchè vede, riscontra e ammira in ogni membro della grande famiglia umana l'orma più o meno vasta stampata in lui dalla immagine e similitudine divina.*

*L'uomo è grande. Il progresso, che fa e promuove nelle scienze fisiche, naturali, matematiche, industriali, avido di sempre migliori e più ampi e sicuri avanzamenti, che altro è mai se non effetto del dominio, che esercita ancora — quantunque limitato e di faticosa conquista — sopra la natura inferiore? E quando mai, come al presente, l'ingegno umano cercò, studiò, scrutò, penetrò la natura per conoscerne le forze e le forme, per dominarle, spiegarle nei suoi strumenti e servirsene a suo genio?*

*L'uomo è grande, e fu più grande nella sua origine. Se egli cadde dalla sua prima grandezza, ribellandosi al Creatore, e andò esule e rammingo fuori del giardino delle delizie, bagnando col sudore della sua fronte il pane che fra triboli e spine gli dava la terra (Gen. 3, 18-19); se il cielo e il sole, se il freddo e il caldo, se i rifugi e le selve, se tanti altri usi e travagli, disagi di luoghi e condizioni di vita ne umiliarono il volto*

e la figura; se quell'avanzo che gli resta dell'impero ricevuto sugli animali altro non è che un labile ricordo della sua potenza e un lieve frammento del suo trono; anche nella rovina sorge grande, per quell'immagine e somiglianza divina che porta nello spirito, e per la quale Dio tanto si compiacque della creatura umana, ultimo lavoro della sua mano creatrice, che non la disamò nè abbandonò caduta, e per risollevarla. Egli stesso « si fece simile all'uomo, e per condizione riconosciuto quale uomo, compaziante alle nostre infermità, similmente tentato in tutto, tolto il peccato » (Phil. 2, 7; Hebr. 4, 15).

Due doni, che lo elevano ben alto fra il mondo degli spiriti celesti e il mondo dei corpi, fanno grande l'uomo, anche dopo la caduta: l'intelletto, il cui occhio spazia per l'universo creato, che varca i cieli, bramoso di contemplare Dio; e la volontà, dotata di libero arbitrio, serva e signora dell'intelletto, che ci fa in diverso grado padroni del nostro pensiero e dell'opera nostra innanzi a noi stessi, innanzi ad altri e innanzi a Dio. Non sono forse queste le due grandi ali che vi innalzano al firmamento, o scrutatori della volta dei cieli, e attraverso le tenebre della notte vi destano dal sonno a contare i soli e le stelle, a misurare i loro moti, a interrogare i loro colori, a scoprire le loro fughe, i loro incontri e i loro urti? Veramente vi elevate giganti: con l'ampia vista dei vostri telescopi numerate gli astri e ne scindete gli spettri, inseguite i vortici e i bagliori delle nebulose e date loro un nome; ma dovete inchinarvi alla scienza di Dio, il quale meglio di voi fissa il numero delle stelle e tutte le chiama per nome, numerat multitudinem stellarum, et omnibus eis nomina vocat (Psal. 146, 4). I cieli di cristallo sono scomparsi. I geni di Kepler e di Newton ritrovarono nei cieli la meccanica terrestre; voi nelle fiamme e nella luce di quei mondi roteanti scopriste i congeneri elementi del nostro globo; e legando in connubio il cielo e la terra, estendeste l'impero della fisica, già ricco nelle sue vie sperimentali, teoriche, applicate e matematiche di tante altre scienze, quante l'ingegno, l'investigazione, l'industria e l'unione degli ardimenti umani hanno moltiplicate e promosse fino alle vittorie della fisica atomica e nucleare.

Nelle profondità del firmamento voi scrutate nelle « notti astronomiche » quelle « Supergalassie » ovvero « Gruppi od Ammassi Nebulari », le quali — come ha notato uno di voi, illustri Accademici, — « costituiscono il fenomeno più meraviglioso che ci rivelino le osservazioni e la cui immensa grandiosità supera realmente ogni intelletto ed ogni imma-



ginazione » (ARMELLINI, Trattato di astronomia siderale, Bologna, 1936, vol. III, pag. 318): *colossali famiglie, formate, ciascuna di esse, da migliaia di « Galassie », ognuna delle quali alla sua volta è un immenso sistema astrale che ha un diametro di molte migliaia di anni di luce e racchiude in sé molti milioni di soli. E in questo campo voi molto attendete dalla inaugurazione, che sperate non lontana, del grande riflettore di cinque metri di diametro, sul monte Palomar in California, con cui la sfera di esplorazione dell'universo potrà forse dilatarsi fino a mille milioni di anni luce!*

Ma da questo infinitamente grande voi scendete ad esplorare l'infinitamente piccolo. Chi avrebbe potuto immaginare, circa cento anni or sono, quali enigmi si trovano racchiusi in quella particella minutissima che è un atomo chimico, nello spazio di un decimo milionesimo di millimetro! Allora si considerava l'atomo come un piccolissimo globulo omogeneo. La nuovissima fisica vede in esso un microcosmo nel vero senso della parola, in cui si nascondono così profondi misteri, che, nonostante i più fini esperimenti e l'uso dei più moderni strumenti matematici, la ricerca è oggi ancora soltanto all'inizio delle sue conquiste nella conoscenza della struttura dell'atomo e delle leggi elementari che ne regolano le energie e i moti. Così al presente apparisce più che mai manifesto il continuo mutarsi e trasformarsi di tutte le cose materiali, fino all'atomo chimico ritenuto per lungo tempo immutabile e imperituro. Uno solo è l'immutabile e l'eterno: Dio. Ipsi (caeli) peribunt, tu autem permanes; et omnes sicut vestimentum veterascent. Et sicut opertorium mutabis eos, et mutabuntur; tu autem idem ipse es, et anni tui non deficient (Ps. 101, 27-28). *I cieli van deperendo e Tu rimani; essi tutti si logorano come un panno; Tu li muti come un vestito ed essi cambiano; ma Tu rimani lo stesso e i tuoi anni non avranno fine ».*

In tal guisa voi negli immensi campi dell'esperienza andate in cerca delle leggi della materia e dei fenomeni, che fanno l'unità, la varietà e la bellezza dell'universo.

È forse muto davanti a voi l'universo? Non ha nulla da dirvi per appagare la tendenza profonda del vostro intelletto per una sintesi grandiosa delle scienze? Per una sintesi che risponda all'ordine del creato? Nell'universo il più degno di considerazione è la disposizione dell'ordine, che tutto insieme lo distingue e l'unisce, lo intreccia e concatena nelle varie parti e nelle diverse nature, che si odiano e si amano, si respingono

e si abbracciano, si sfuggono e si cercano, si combinano e si disgregano, scompaiono l'una nell'altra e ricompaiono, congiurano per rapire al cielo il baleno, la folgore, lo schianto, le nubi, di cui ai nostri giorni così terribilmente vediamo turbati la terra, il cielo e i mari. A meraviglia voi conoscete come ciascuna di queste nature ed elementi operi secondo il diverso istinto della propria inclinazione e dipenda da un principio senza saperlo e cospiri a un fine senza volerlo, negli apparecchi della chimica inorganica e organica, ancilla dell'industria e della medicina; per tal maniera che il mondo dei corpi, senz'anima che lo informi e avvivi, e senza intendimento che lo governi e guidi, pure si muove per ragione, come se intendesse. Che è mai questo se non il più evidente dimostrare che fa il mondo di avere dentro di sé la mano di quel maestro, invisibile in se stesso, ma palese nell'opera, ch'è il Dio onnisciente, ordinatore dell'universo con arte somma? (cfr. BARTOLI, Delle grandezze di Cristo, c. 2) Voi cercate le leggi che reggono la sintesi della natura e del creato; e di queste leggi cercate il perchè, stupiti e muti innanzi ai moti della natura, la quale nelle vostre mani e nelle vostre catene si muove e si agita, talora minacciosa, con forza indomita che non viene da voi.

L'ingegno, la volontà e l'azione dell'uomo con le sue macchine e coi suoi arnesi non può turbare l'ordine della natura; può rivelarlo, come voi, medici e chirurghi, col coltello anatomico rivelate il cuore e il cervello, i muscoli e le vene, i più intimi segreti a scoprire nel corpo umano le vie della vita e della morte, ad aiutare la vita e respingere la morte. Solleviamo, illustri Accademici, il pensiero al Maestro delle scienze, Maestro non di una sapienza appresa da altri, ma propria di Lui, creatore della stessa materia che presenta alla contemplazione e allo studio dell'ingegno umano. Vi è forse contrasto fra l'investigazione della natura fisica e l'intelletto umano? fra le scienze e la filosofia? Certo vi è lotta fra le scienze, che nell'ordine della natura non vedono la mano di Dio, e quella filosofia che nelle leggi della natura riconosce l'ordinazione della ragione divina, la quale cura e governa l'universo. Vuol essere forse la filosofia un sogno ideale che confonde Dio e la natura, che vagheggia visioni e illusioni di idoli della fantasia? Non è invece la filosofia il tenere saldo il piede nella realtà delle cose che vediamo e tocchiamo, e il cercare le più profonde e alte cause della natura e dell'universo? Non comincia dal senso ogni nostra cognizione? Donde vengono le leggi? Osservate la vita sociale. Tutti i domestici di uno stesso padre di famiglia non hanno forse un



ordine fra loro, sottoposti come sono a lui? e il padre di famiglia e tutti gli altri cittadini non conservano un ordine scambievolmente rispetto al capo della città, il quale a sua volta ha insieme con tutti gli altri un certo ordine riguardo al Re o Capo dello Stato? L'universo, — già sentenziò, dopo Omero (Iliad. II, 204), il gran filosofo di Stagira — non vuol essere governato malamente: non è buono il comando di molti: unico sia il comandante: οὐκ ἀγαθὸν πολυκοιρανίῃ· εἰς κοίρανος ἔστω, εἰς βασιλεύς. (Aristotel. Metaphysicorum, l. XI, cap. X in fin.).

Dio è il comandante unico e il legislatore dell'universo. Egli è un sole, che nell'infinita magnificenza della sua luce diffonde e moltiplica i suoi raggi, similitudini di sè, in tutti i campi della creazione; ma nessuna immagine vale ad uguagliarlo. Così anche l'uomo, quando non trova un vocabolo che da solo esprima sufficientemente il concetto della sua mente, moltiplica in vari modi le parole. Ecco nella molteplicità delle creature la diversità delle loro nature e il vestigio divino diverso, secondo che più o meno si avvicinano a Dio nella somiglianza dell'essere, che posseggono. Voi che studiate intimamente la natura delle cose, non avete forse trovato che la loro diversità si compie a gradi? Dagli strati geologici, dai minerali, dai corpi inanimati voi salite alle piante, dalle piante agli animali irragionevoli, dagli animali irragionevoli all'uomo. Non esige forse la diversità delle cose che non tutte siano uguali, ma che vi risplenda un ordine per gradi? In quest'ordine e in questi gradi noi vediamo accampate nature e forme diverse per perfezione e vigore, per azione e fine, per reazione e composizione, per sostanza e qualità, donde scaturiscono proprietà, operazioni e agenti diversi con reciproche impressioni e differenti effetti, che hanno la loro ragione nella diversità impressa dal Creatore nelle nature delle cose, determinate e volte a un fine e a un'azione particolare (cfr. Contra Gent., l. III, cap. 97). In questa necessità naturale inerente alle cose, la quale altro non è se non una impressione prodotta da Dio che tutto dirige al fine, come un arciere indirizza il dardo al segno inteso, sta la legge della natura dei corpi, legge immedesimata nella loro stessa natura (S.Th., 1 p. q. 103, a. 1 ad 3). Come l'uomo imprime col suo comando in un altro uomo a sè soggetto un interno principio di operare, non altrimenti Dio imprime a tutta la natura i principii delle proprie azioni (S.Th., 1a, 2ae, q. 93, a. 5); e per tal modo il sommo Fattore dell'universo, Dio e Maestro delle scienze, all'università delle cose praeceptum posuit et non praeteribit (Ps. 148, 6). Onde, — magistralmente insegna il gran Dottore d'Aquino —, quando si domandi

il perchè di un effetto naturale, possiamo renderne ragione con qualche causa prossima, quale è la naturale proprietà delle cose, purchè tutto riportiamo alla volontà di Dio, come a causa prima, sapiente istitutrice di tutta la natura. Così se uno, a chi gli chiede perchè il fuoco riscalda, risponde perchè Dio lo vuole, risponderebbe giustamente, se intendesse ridurre la questione alla causa prima; malamente invece se intende escludere tutte le altre cause (Contra Gent., l. III, c. 97 in fin.).

Anche in noi, creature come siamo di Dio, la causa prima impresse una legge, ch'è un sublime istinto, tutto particolare all'uomo, verso la conoscenza immediata del Creatore; desiderio, « che è moto spirituale, e mai non posa — fin che la cosa amata il fa gioire » (Purg. XVIII, 32-33). Se la nostra carne viene dalla polvere e tornerà in polvere, immortale è il nostro spirito che viene da Dio e a Dio anela di salire per la scala della scienza di questo mondo, la quale non arriva ad appagare pienamente l'immensa ansia del vero che ci agita. Scuola di Dio, maestro di ogni scienza, è il mondo; la cui figura se passa, restiamo soli in faccia al Maestro. Chiniamoci innanzi alla sua sapienza, inarrivabile nei suoi enigmi e nel consiglio d'aver dato per stanza all'umanità questo globo, così pieno di meraviglie e avvolto da milioni di meraviglie ancora più fulgide e smisurate; meraviglie, che contemplate dal Creatore il giorno che le ebbe compiute, vide che tutte erano assai buone (Gen. 1, 31). Voi stessi non ne dubitate; voi che nella misura ne intendete la quantità, il modo e il grado di perfezione, nel numero la diversità di bellezza dei vari gradi, nel peso le diverse inclinazioni ai propri fini e operazioni; voi che amate e magistralmente promovete la scienza. Anche la vostra scienza non è forse un fulgido riflesso della scienza divina, nascosta, parlante e occhieggiante dal senso delle cose? Eppure nelle mani degli uomini la scienza può tramutarsi in un ferro a doppio taglio, che sana e che uccide. Date uno sguardo ai campi e ai mari insanguinati, e poi dite s'era per questo che il benigno Dio onnisciente fece l'uomo simile a sè, lo redense dalla sua colpa e lo rinnovellò con celesti favori, e se gli largì così alto intelletto e caldo cuore per ravvisare nel fratello un nemico. Nella scuola di Dio siamo tutti fratelli; fratelli nella contemplazione, nello studio e nell'uso della natura; fratelli nella vita e nella morte; deh che, davanti alla culla di un Dio infante, che silente ama, guarda e giudica l'umanità che si dilania, tutti gli uomini tornino fratelli anche nell'amore e nella concordia, nella vittoria del bene sopra il male, nella giustizia e nella pace!

## LA RELAZIONE DEL PRESIDENTE

Quindi il Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze S. E. il R. mo P. Agostino GEMELLI O. F. M., ottenuto l'Augusto assenso del Santo Padre, ha letto la seguente relazione del quinto anno di vita dell'Accademia.

*Beatissimo Padre,*

per l'angelica bontà dell'anima Vostro - ossia del magnifico frutto sia dei doni di grazia e di natura con i quali Dio ha colmato Vostra Santità, che della sempre faticosa ed ardua conquista della perfezione che è l'oggetto del Vostro assiduo studio - angelica bontà per la quale tutto il mondo Vi ammira, Vi ascolta, Vi segue mentre ringrazia Iddio di averVi data la missione di maestro infallibile di verità quale successore di Pietro, Vi siete degnato di inaugurare questo sesto anno della Vostra Accademia, ancora una volta, con la Vostra Augusta Parola. Vi abbiamo ascoltato con amore di figli ed abbiamo scritto a caratteri indelebili nel nostro cuore e nella nostra mente gli insegnamenti che ci avete impartiti. Per dirVi grazie in modo adeguato all'attesa Vostra paterna, ritengo di poterVi assicurare che gli Accademici Pontifici daranno nel nuovo anno, che oggi si inizia con tanta solennità, la loro assidua opera affinché questa Vostra Pontificia Accademia, - ad onta delle condizioni dell'ora attuale, particolarmente difficili per i severi studi che richiedono serenità d'animo e tranquillità di vita - fiorisca e serva, secondo il suo Statuto, al progresso delle scienze, il che è anche un modo per procurare quella gloria di Dio e della Chiesa, al quale alto e dolcissimo compito Voi ci avete stimolati, mostrandocene i benefici frutti.

A nome degli Accademici debbo ringraziare Vostra Santità per molti altri motivi che sono altrettante testimonianze dell'interesse che il Pontefice ha per la Sua Accademia. Ricordo innanzitutto che Vostra Santità ha testè dato un assetto stabile alle basi economiche dell'Ac-

cademia, il che ci permette di affrontare con animo sereno i compiti a noi affidati; avete anche disposto che gli Accademici vengano nominati a mezzo di « Breve Apostolico »; ed avete conferito agli Accademici il titolo di « Eccellenza ».

Che Iddio ci conceda di mostrarci degni di tanta paterna sollecitudine.

Consentitemi ora, Padre Santo, di darVi brevemente notizia della nostra vita accademica.

Immanzitutto ricordo che sono entrati a far parte dell'Accademia due insigni studiosi:

La Svizzera viene ad avere con Alfredo Ursprung un suo rappresentante che occupa il seggio 4°, già occupato dal compianto geologo francese Carlo Barrois. L'Ursprung onora la Università del Cantone di Friburgo, della quale è Professore dal 1909. È noto quale grandioso sviluppo edilizio ha avuto testè la fiorente Università svizzera, specie per opera del Consigliere Nazionale Piller e del vescovo di Ginevra e Friburgo, Monsignor Besson. L'Università di Friburgo richiama da ogni parte del mondo giovani per quel carattere che il suo indimenticabile fondatore, il Pyton, le ha impresso, ossia di essere fedele baluardo delle tradizioni cattoliche nel Cantone di Friburgo e di dare ospitalità generosa a studiosi di tutto il mondo. L'attuale sviluppo ebbe inizio nel 1937 con la erezione del nuovo Istituto di botanica creato dall'Ursprung e ricco di laboratori e di serre.

L'Ursprung, benchè più volte chiamato ad altre celebri Università, volle rimanere fedele alla sua Università e all'Istituto da lui creato. Non ho competenza per illustrare degnamente i meriti scientifici del nuovo Accademico pontificio, dimostrati anche dal fatto dell'appartenenza sua alle più celebri società scientifiche internazionali; basti dica che la sua produzione si caratterizza per l'applicazione dei metodi della fisiologia allo studio dei vegetali, e specie della fotosintesi.

Un altro seggio, il 68°, occupato sino a qualche mese fa dall'insigne matematico Vito Volterra, del quale dirò tra poco, è ora occupato da uno studioso del Brasile che viene così a rendere più estesa

la corona di Stati rappresentati nell'Accademia; parlo dell'accademico Antonio Cardoso Fontes, Direttore della sanità pubblica del Brasile, Direttore dell'Istituto sieroterapico federale, Ispettore dei servizi di profilassi della febbre gialla, Capo dei servizi di profilassi della peste e della malaria. Il nostro nuovo collega è noto per aver determinata la funzione delle granulazioni del bacillo della tubercolosi. Le sue ricerche sui corpuscoli di Ernst, sul loro sviluppo e sulla loro riproduzione, lo hanno condotto ad ammettere che essi sono unità riproduttrici ed elementi viventi infettivi. Inoltre il Cardoso si è schierato tra i sostenitori della filtrabilità dell'agente causale della tubercolosi, specie con l'affermazione dell'esistenza di un ciclo di sviluppo dei batteri, dell'evoluzione loro da una fase ultravisibile o ultramicroscopica, a una microscopicamente visibile.

È giusto ricordare tra le molte cariche onorifiche, che dimostrano la stima nella quale è tenuto il Cardoso Fontes nel suo paese, che egli è Presidente della Società Brasiliana di medicina e chirurgia.

Dobbiamo ora ricordare i meriti e le virtù degli Accademici che ci hanno lasciato per una migliore vita e per l'anima dei quali abbiamo testè pregato assistendo alla S. Messa celebrata dall'Emo Cardinale Segretario di Stato, Luigi Maglione, al quale debbo porgere vive grazie per avere inaugurata l'attività della nostra Accademia con il Santo Sacrificio.

Debbo in primo luogo ricordare la morte, avvenuta già da qualche tempo, ossia il 24 marzo 1940, di Edoardo Branly, e della quale non ho potuto ancora dare notizia pubblica perchè lo scorso anno non venne tenuta la Tornata inaugurale.

Il venerando professore Branly, nato nel 1844, fu, come Professore di fisica, di grande decoro dell'Istituto cattolico di Parigi, al quale rimase fedele sino alla morte, tanto che l'attuale Rettore Magnifico dell'Istituto, l'Eminentissimo e venerando Cardinale Baudrillard ha, proprio di questi giorni, stabilito che il Laboratorio, ove il Branly fece le sue scoperte, sia conservato intatto, ad un tempo museo e testimonianza del valore dell'insigne fisico.

A tutti è noto che gli studiosi francesi e anche di altri paesi contendono al nostro Marconi il merito di avere scoperto la trasmissione



di segnali elettrici senza fili per attribuirlo al Branly. Non sarò certo io, ignorante di questo mirabile campo di studi e di applicazioni, a dire in proposito una parola. Mi si permetta però ricordare che quando il *Figaro* pubblicò un articolo non simpatizzante intorno al Branly, narrando che, per mancanza di fondi, egli non poteva rifornire il suo laboratorio, il Branly ebbe la sorpresa di ricevere la visita di Marconi che, accompagnato dall'amministratore delegato della Compagnia inglese Marconi, veniva a fargli una nobile proposta. L'amministratore Isaac disse che, volendo portare un aiuto efficace alle ricerche del Branly, aveva pensato, insieme con Marconi, di proporgli il posto di consigliere tecnico della Società francese marittima e coloniale di telegrafia senza fili, costituita in maggioranza da capitali francesi e collegata alla Compagnia inglese. In compenso di tale concorso, la Compagnia offriva al Branly una somma cospicua destinata ad accrescere la dotazione del suo laboratorio e uno stipendio annuale. L'Isaac aggiunse che il Marconi conosceva già il Branly, ma desiderava che l'offerta gli giungesse per mezzo del *Figaro*, quasi a riparazione. Lo scienziato francese rimase commosso e turbato dalla proposta, e la declinò energicamente. « Sono un uomo di laboratorio, disse, non ho mai fatto altro che ricerche di laboratorio. Non m'intendo affatto di lavori pratici e non ho mai maneggiato nemmeno un apparecchio di telegrafia. Sono ora troppo vecchio per fare diversamente da quanto ho fatto finora. D'altra parte la mia esistenza è oggi organizzata modestamente. Mi accontento di quanto possiedo ». Lo stesso Marconi e l'Isaac vollero tornare alla carica, ma non riuscirono a smuovere il vecchio scienziato, il quale disse a Marconi: « I vostri ingegneri ne sanno più di me e, per essere il loro consigliere, dovrei prima andare a scuola da loro ». Marconi si separò dal Branly con un sentimento di maggiore ammirazione per la sua modestia; più tardi, allorchè il Branly si congratulava con lui per le sue esperienze di telegrafia senza fili attraverso la Manica, gli rispondeva che questo bel risultato era dovuto certamente, in parte, agli importanti lavori del Branly.

Infatti il Branly con le sue ricerche aveva dimostrato che, mentre si sa che i corpi conduttori lasciano passare l'elettricità e invece i corpi isolanti l'arrestano, vi hanno corpi a conduttibilità intermittente, ossia a volontà conduttori o isolanti. Quando si riuniscono due poli di una pila mediante della limatura metallica racchiusa in tubo di

vetro avente all'estremità due conduttori, la corrente della pila è arrestata dalla limatura, e un galvanometro, che fa parte del circuito, resta a zero; se una scintilla della bottiglia di Leyda scocca, il galvanometro è deviato; la limatura diventa conduttrice e tale resta; si batte sul tubo che contiene la limatura, il circuito si riapre, la conduttibilità della limatura sparisce; una nuova scintilla a distanza chiude il circuito; lo si rompe con un colpo sul tubo, e così di seguito. Questa memorabile esperienza compiuta dal Branly nel 1890 è il fondamento delle prime esperienze di telegrafia senza fili. Il Branly chiamò radioconduttori i corpi la conduttibilità dei quali si stabilisce sotto l'influenza di una scintilla elettrica; in seguito scoprì che altri corpi hanno la proprietà della limatura elettrica.

Ho accennato a questa scoperta per mostrare i grandi meriti del Branly nella telegrafia senza fili, la quale, dice il Branly, avrebbe potuto, teoricamente, nascere prima della telegrafia con filo per il fatto che essa aveva bisogno solo di un radioconduttore. Ma è inutile approfondire oltre un punto che sarà compito degli studiosi di storia della scienza ai quali è pure necessario che gli uomini di scienza diano materiale per la loro disciplina.

Quanto a noi è ovvio l'osservare che le due grandi menti del Marconi e del Branly oggi, illuminate da luce di gloria, possono, meglio di quanto possiamo fare noi, uomini della corta vista, constatare che i problemi della scienza giungono in certi momenti a tale maturità onde le menti geniali arrivano insieme a cogliere, per intuizione, quella verità che agli uomini che battono le vie della comune conoscenza intellettuale non è dato di cogliere.

La nostra Accademia, che vedeva nei suoi stalli insieme e il venerando Branly, e il nostro grande Marconi, oggi, onorando la memoria di quello dei due scomparso più di recente, nulla toglie alla gloria dell'altro, ma anzi l'accresce. Il genio di ambedue promosse in modo diverso il progresso della scienza; la nobiltà dell'anima loro è un titolo di onore per la nostra Accademia che li ebbe membri.

Mi riesce particolarmente doloroso ricordare che il 19 settembre scorso ritornava a Dio Filippo Bottazzi, al quale ero legato, per lunga e cara consuetudine di anni, da intima amicizia. Di lui conto dire ade-

guatamente in una Tornata ordinaria dell'Accademia; debbo questa testimonianza all'amico; mi pare necessario sin d'ora rendere testimonianza del suo valore nelle scienze biologiche per ricordare ai cultori di questa disciplina quale mirabile esempio egli ci ha lasciato, per incitarli, come egli soleva fare, a coltivare quella ricerca delle leggi dei viventi nella storia della quale ricorrono i più bei nomi di studiosi italiani.

Filippo Bottazzi raccolse osservazioni originali in quasi tutte le branche della fisiologia, ma il suo nome è, e resterà legato soprattutto alla scoperta dell'azione emocatatonistica della milza e della funzione contrattile del sarcoplasma, alla scoperta della legge della omeosmoticità e pecilosmoticità degli organismi animali, alle geniali ricerche sulle proprietà chimico-fisiche dei biocolloidi e alla struttura del protoplasma.

Come maestro, per quarant'anni il Bottazzi ha impartito un insegnamento denso di dottrina, che per la virtù chiarificatrice della sua mente, per la padronanza della parola e per l'immutato fervore che lo animava, affascinava ed entusiasmava la mente dei giovani uditori.

Soprattutto è da ricordarsi la bontà dell'anima del nostro Filippo Bottazzi, bontà rivelata nell'assistenza da lui prestata, con sacrifici che non faceva conoscere o pesare, ai discepoli più a lui vicini, da lui educati alla ricerca scientifica, nel suo laboratorio, molti dei quali occupano oggi cattedre universitarie e con i quali fu di una bontà e generosità senza pari, largendo a piene mani i tesori della sua cultura e della sua esperienza, mettendo a loro disposizione tutti i mezzi di ricerca e seguendoli nel loro lavoro e nella loro ascesa con occhio vigile e amoroso di padre.

Deve essere ricordato, come un merito che nell'attuale periodo di privazioni alimentari assume speciale significato, che il Bottazzi, mentre promuoveva nel suo Laboratorio ricerche sperimentali sulla nutrizione, iniziava un'attiva opera di propaganda con la pubblicazione di un manuale su *L'alimentazione dell'uomo*, con conferenze nelle varie città d'Italia e con articoli divulgativi su giornali professionali e politici. Più tardi otteneva la creazione, in seno al Consiglio Nazionale delle Ricerche, della Commissione per lo studio dei problemi dell'alimentazione, alla quale Egli stesso procurava larghi mezzi che gli consentivano di chiamare intorno a sé una schiera di giovani che, nel

suo Laboratorio e in altri laboratori universitari ed extrauniversitari, hanno compiuto e vanno tuttora compiendo ricerche chimiche e fisiologiche destinate, da una parte a far conoscere la composizione chimica e il contenuto vitaminico degli alimenti prodotti dalla nostra terra, dall'altra a far sì che il contributo italiano al progresso della scienza della nutrizione sia degno della nostra tradizione scientifica. A meglio raggiungere quest'ultimo fine, fondava nel 1934 i *Quaderni della nutrizione*, che nei sette volumi sino ad oggi pubblicati contengono tutto quanto in questi anni si è fatto in Italia, in massima parte per il suo impulso animatore, in questo campo della scienza.

Il Bottazzi, dotato di profonda cultura umanistica e conoscitore profondo della storia delle scienze, fu inoltre un felice rievocatore di glorie scientifiche italiane; ma soprattutto fu un innamorato di Leonardo. In una serie di pubblicazioni dense di dottrina, la prima delle quali risale al 1902, mentre l'ultima è pochi mesi dalla morte, ha illustrato in maniera magistrale l'opera di naturalista e particolarmente di fisiologo di Leonardo. La nostra Accademia pubblicherà tra breve l'ultimo scritto del Bottazzi dedicato a illustrare alcuni aspetti dell'opera di Leonardo; le ultime fatiche sue furono spese per correggere le bozze di questa sua memoria.

Ci ha pure lasciati l'accademico Emilio Bianchi, che fino a pochi mesi prima della sua morte fu membro attivo e benemerito del Consiglio della nostra Accademia e che fu uno dei più illustri ed autorevoli rappresentanti dell'astronomia italiana. Il Bianchi fu osservatore alla stazione astronomica internazionale di Carloforte, astronomo e poi direttore della Specola del Collegio Romano fino al 1922. In questo periodo pubblicò numerosi lavori nei campi dell'astronomia di posizione, classica e geodetica, lavori notevoli per la precisione e per il rigore della critica. Nominato nel 1922 direttore dell'Osservatorio di Brera di Milano, le sue cure furono principalmente rivolte all'erezione del nuovo Osservatorio di Merate e all'avviamento delle ricerche prevalentemente di astronomia fisica agli studi di statistica stellare raccogliendo una messe considerevole di risultati.

Il Bianchi lascia una vasta produzione. Dal soggiorno a Carloforte derivarono i suoi studi sul problema delle variazioni delle latitudini, mentre al Collegio Romano si dedicò ai lavori di osservazione di stelle, di pianetini, di comete e della Luna; ai calcoli delle orbite ed effemeridi di vari pianetini e comete; alla compilazione di cataloghi stellari ed infine ai lavori di astronomia geodetica, con determinazioni di latitudini e di differenze di longitudine, tra cui quelle di Tripoli effettuate nel 1906. Completano questa ricca e pregevole raccolta di opere alcuni studi fotometrici e di strumenti, nonché la pubblicazione dei suoi corsi di astronomia nautica e di due volumi sulla statica e sulla dinamica dei dirigibili, che ebbero anche traduzione in inglese.

Gli ultimi anni della sua vita furono particolarmente dedicati alla organizzazione dell'Osservatorio di Merate e al grande Osservatorio che verrà eretto nelle vicinanze di Roma. Queste sue qualità di organizzatore furono ben apprezzate da Pio XI di s. m., che del consiglio del Bianchi si avvalse per il trasporto della Specola a Castelgandolfo. Per il nostro Bianchi il Pontefice mecenate anche delle scienze aveva una particolare predilezione, della quale in varie occasioni gli diede pubblica testimonianza.

Particolarmente grave per la nostra Accademia è stata la morte dell'insigne fisiologo olandese Adriano Noyons, Professore ordinario della Università di Utrecht, dopo di essere stato per ben sedici anni professore di fisiologia alla Università di Lovanio. Era il Noyons un mirabile tecnico e il suo nome è legato principalmente ad alcune sue creazioni di tecnica fisiologica. Basterebbe, a conservarne la memoria, la tecnica della registrazione dell'afflusso di ossigeno ai tessuti, nel 1938 illustrata al Congresso internazionale di fisiologia di Zurigo, ove riscosse l'ammirazione dei convenuti per la dimostrazione dell'immenso bisogno di ossigeno del cervello e dell'uovo fecondato.

Fondatore della società olandese di fisiologia e di farmacologia, era il Noyons uno degli stranieri più assidui alle nostre Tornate; non è mai mancato alla nostra Tornata inaugurale; tutti lo ricordiamo per la bontà dell'animo, per il profondo sentimento religioso che lo spingeva a correre a Roma ogni volta che se ne presentasse l'occasione.

A rendere più sottile la schiera degli Accademici residenti debbo ricordare la morte di Vito Volterra, uno dei maggiori matematici del mondo.

Vito Volterra conquistò a ventitrè anni la cattedra di meccanica razionale. In un sessantennio di ininterrotta attività egli ha spaziato nei più svariati campi dell'analisi, della meccanica, della fisica matematica, conseguendo risultati di fondamentale importanza nei problemi della teoria delle equazioni differenziali, dell'idrodinamica, dell'ottica, della teoria della elasticità, ecc. Ma l'indirizzo di ricerche, al quale resterà legato indissolubilmente il suo nome, come di uno dei maggiori matematici dei tempi nostri, è quello seguito nei lavori sulla teoria dei *funzionali*, che hanno aperto all'indagine matematica nuovi e vasti orizzonti, ancora oggi solo in parte esplorati.

Del Volterra, nella Tornata ordinaria che si terrà dopo questa inaugurale, parlerà con l'alta competenza che lo rende tra i competenti assai autorevole, l'Accademico Pontificio Carlo Somigliana.

Si consenta a me, come biologo, ricordare i grandi meriti del Volterra nello studio delle fluttuazioni biologiche.

Si dice che il grande matematico Lagrange si lagnasse di non essere nato un secolo prima; egli aveva perduta l'occasione di scoprire la legge della gravitazione universale che fu la gloria di Newton. Vito Volterra non avrebbe potuto lagnarsi di essere venuto troppo tardi per scoprire, per via matematica, le leggi delle fluttuazioni biologiche nella vita delle specie animali. Egli fu il creatore geniale di questa nuova disciplina matematica che, dando ragione dell'avvicinarsi, del sorgere e dello spegnersi delle specie, permette di rendersi ragione delle vicende della loro vita. Vito Volterra fu condotto per caso a studiare questi problemi; un giorno il dottor Umberto Ancona gli commentava i risultati della ricerca statistica comparata del rendimento della pesca durante gli anni della grande guerra e durante i periodi antecedenti e immediatamente susseguenti. Tale rendimento presentava siffatte fluttuazioni da far supporre che il conflitto tra gli uomini esercitasse influenza anche sulla vita dei pesci. Vito Volterra si interessò al problema, ma lo considerò come problema matematico, ossia come un problema d'equilibrio tra le differenti specie animali

viventi in un determinato ambiente. Nell'antagonismo per la ricerca del nutrimento si può stabilire, tra le varie specie di pesci, un equilibrio, ma anche uno squilibrio, nel qual caso si ha la distruzione di alcune specie. Ora la rapidità di moltiplicazione di una specie dipende dalla frequenza con cui essa si incontra con altre consimili; vi ha una certa probabilità per una specie o di distruggere un'altra specie o di essere distrutta; tutto è questione di probabilità; fatto questo che costituisce la base perchè si stabiliscano delle equazioni differenziali con tutte le complicazioni delle loro integrazioni e dei problemi che esse sollevano. Se durante la guerra si stabilisce un equilibrio tra i pesci di un bacino, ciò può avvenire per l'intervento dell'uomo come causa distruggitrice che favorisce l'una specie in confronto di un'altra. Se le ricerche del Volterra nel campo della biologia matematica presentano un grande interesse, notevole dal punto di vista dei metodi di analisi adottati, esse hanno per noi biologi un interesse assai più grande, perchè suscitano una folla di nuovi problemi; ad esempio quelli demografici. Possiamo quindi concludere che il Volterra è stato il fondatore di una nuova scienza: la biologia matematica, alla quale oggi arride, specie negli Stati Uniti, il successo di nuove conquiste.

Ai 31 ottobre ci ha lasciato Camillo Guidi, nato in Roma il 24 luglio 1853, Professore di scienza delle costruzioni a Torino fino al 1928, ove svolse un'importante attività didattica per cinquant'anni.

Il Guidi può considerarsi il fondatore della scuola italiana della scienza delle costruzioni, particolarmente perchè, introducendo nuovi procedimenti di calcolo e rivelando l'importanza del metodo sperimentale, seppe armonicamente contemperare il rigore matematico di queste discipline con le cognizioni tecniche applicative non meno necessarie alla classe degli ingegneri, dando a questa scienza un indirizzo personale, che fu poi largamente seguito anche da altri ricercatori, e tra essi dall'altro nostro Accademico, il Colonnetti, che gli succedette sulla cattedra di Torino e che della figura di scienziato del Guidi traccerà un profilo in una prossima Tornata.

Noi tutti ricordiamo il Guidi sempre presente ad ogni nostra Tornata, sempre assiduo ai nostri lavori; e, mentre ne rievochiamo con commozione la veneranda figura di maestro, ricordiamo pure con quanta

benevolenza Vostra Santità, nell'indimenticabile udienza dello scorso giugno, si curvò sul venerando uomo che Vi presentava devoto e filiale omaggio.

Ad onta delle difficoltà del momento l'attività scientifica dell'Accademia è stata, anche nel decorso anno, rilevante; essa è dimostrata da diciannove *Notae* e da nove *Commentationes* che costituiscono nel loro insieme un grosso volume di 800 pagine, che io sono lieto ed onorato di presentare, a nome degli Accademici, a Vostra Santità, come devoto e filiale omaggio.

A questo punto il Santo Padre, che prestava la sua Sovrana attenzione alle parole del Presidente, Si è degnato accogliere i volumi presentati Gli dal Cancelliere dell'Accademia.

Il Presidente ha quindi proseguito:

Altri lavori sono in corso di stampa; presentati dagli Accademici durante le ferie estive, vedranno la luce prossimamente. Fra le pubblicazioni che vedranno presto la luce deve essere ricordata quella del Gesuita P. Ernesto Gherzi, direttore dell'Osservatorio meteorologico e sismologico di Zi-Ka-Wei presso Shanghai. Si tratta di una monumentale memoria sulla meteorologia della Cina. Se si riflette che Padre Gherzi è conosciuto in tutto l'Estremo Oriente per il servizio che da anni rende ai navigatori dell'aria e dell'acqua con la previsione del tempo, è facile riconoscere quale grande interesse presenta questa pubblicazione. Era giusto che l'Accademia, grazie al mecenatismo di Pio XII, curasse a servizio dell'umanità, l'opera di colui che in Oriente è chiamato dal popolo il « Padre dei tifoni ».

L'Accademia nostra, vincendo difficoltà non piccole, ha mantenuto vive e attive le relazioni tra gli Accademici. Sono state allacciate relazioni scientifiche nuove; altre antiche furono rinnovate. Ma i tempi ci hanno insegnato essere necessario mantenere vive tra gli Accademici anche le relazioni umane: furono compiute ricerche di dispersi; furono procurate trasmissioni di notizie di morti; fu compiuta opera per ricon-



giungere membri di famiglie di scienziati smembrate a causa della guerra; tutta questa somma di lavoro si aggiunge a quello, ben più vasto, compiuto dalla Santa Sede con i suoi uffici speciali istituiti per dare e ricevere notizie. La nostra opera, pur modesta, ha avuto il non piccolo merito di aver servito a beneficio di scienziati ai quali l'umanità deve essere grata per la loro opera ovvero a membri delle loro famiglie.

Ometto di elencare le varie celebrazioni alle quali l'Accademia è stata presente, rappresentata dall'uno o dall'altro dei suoi membri; ma non posso non ricordare che alla solenne traslazione della salma di Marconi nel mausoleo di Pontecchio, l'Accademia nostra era rappresentata dagli Accademici Vallauri e Somigliana, particolarmente designati, per la loro grande fama nel mondo accademico internazionale e per il loro alto valore negli studi, a rappresentare la nostra Accademia in una celebrazione che sembra sintetizzare l'omaggio di tutto il mondo civile a colui che ha dominato gli spazi guidando le onde elettromagnetiche per i cieli.

La Pontificia Accademia delle Scienze nella sua Tornata del 7 luglio 1938 aveva stabilito di attribuire il Premio intitolato al nome augusto di Pio XI ad un cultore di astronomia. Le attuali condizioni internazionali hanno reso difficile e laboriosa la consultazione con gli Accademici particolarmente indicati per pronunciare un giudizio tecnico. Si è alla fine arrivati ad una deliberazione ben ponderata ed io sono lieto di annunciare a Vostra Santità che l'Accademia, accogliendo nella sua ultima Tornata segreta, la proposta della Commissione costituita dagli Accademici Armellini, Bianchi, Gatterer, Guthnick, Stein, ha designato quale vincitore del Premio Pio XI, di L. 50.000, per l'astronomia, il Prof. Dott. Harlow Shapley, direttore dell'Osservatorio Harvard in Cambridge, Mss. U. S. A. « per il complesso dei lavori sulle stelle variabili, sulla struttura e le dimensioni della Via Lattea, sugli ammassi globulari, sulle nebulose extragalattiche, i quali rappresentano un contributo di basilare importanza alla conoscenza della struttura della Galassia e dell'Universo Sidereo ».

Mi onoro pertanto, a norma dell'art. 9 del Regolamento per l'aggiudicazione del Premio Pio XI, di umiliare al Trono Augusto di Vo-

stra Santità tale designazione dell'Accademia perchè la Vostra Santità. Si degni approvarla e sanzionarla con il Suo Sovrano assenso.

Avendo quindi il Santo Padre benevolmente annuito con augusto gesto di sovrano assentimento, il Presidente così proseguiva:

Il premio intitolato al nome augusto e caro di Pio XII, pure di L. 50.000, avrebbe dovuto essere conferito in questa Tornata. Come è noto, esso deve essere assegnato a uno studioso meritevole per aver apportato in questi ultimi anni un contributo insigne allo sviluppo delle discipline geologiche. È bene ricordare che furono scelte le discipline geologiche per fare atto di omaggio a Sua Santità Pio XII, che giustamente richiamava la nostra attenzione sull'importanza dello studio di questa disciplina per la conoscenza della cosmologia. Ma le difficoltà nelle comunicazioni hanno obbligato a ritardare sino ad oggi le deliberazioni delle autorità accademiche sulla persona alla quale deve essere assegnato questo premio; entro breve tempo sarà completato il giudizio; e sarà reso di pubblica ragione il nome dell'eminente studioso al quale la Commissione ha stabilito di assegnare il premio.

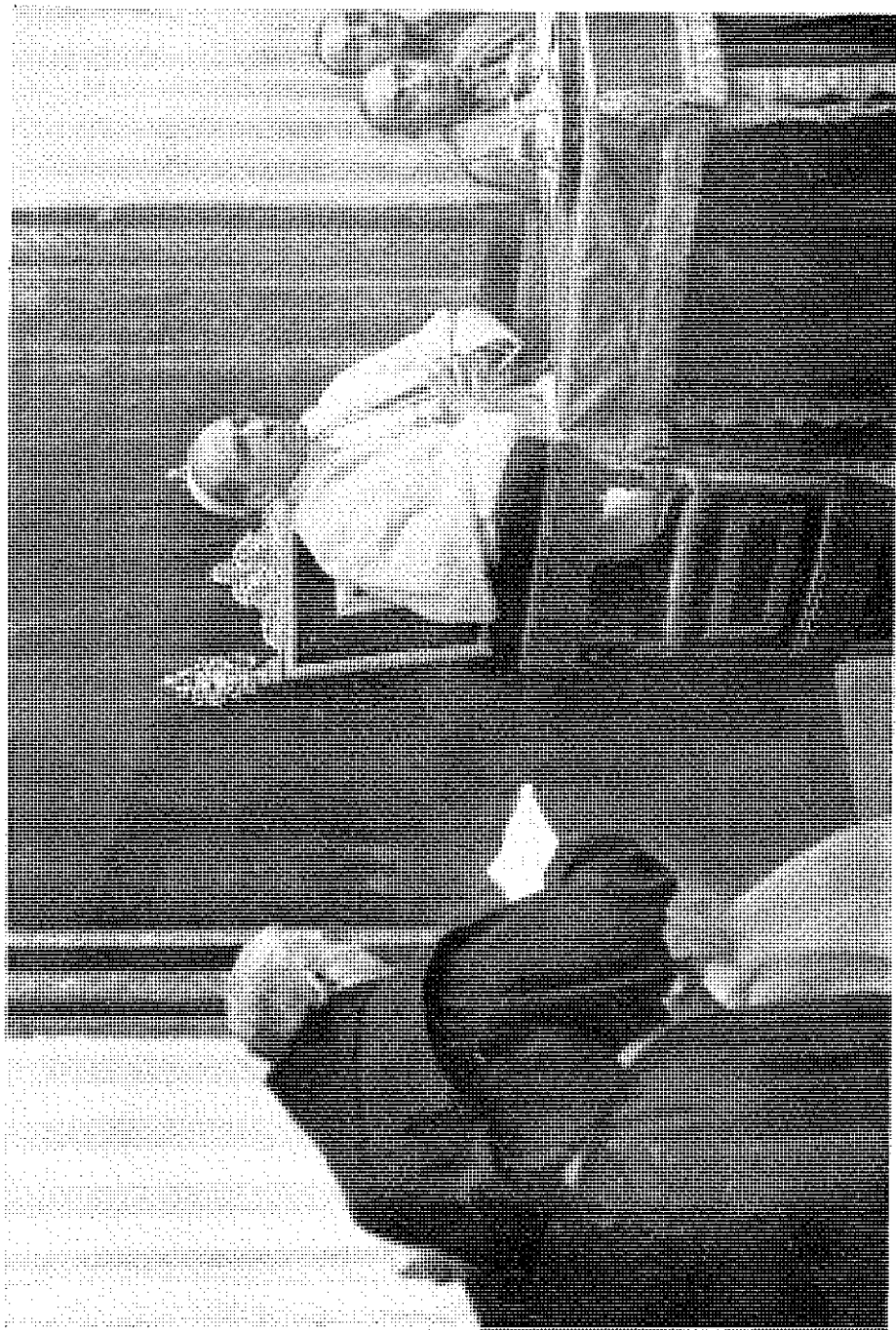
Cade quest'anno il centenario Galileano. La nostra Accademia ha particolare motivo per celebrare questa ricorrenza. Mi si permetta ricordare alcuni dati di fatto, per quanto i convenuti certo li ricordino.

È noto a quanti si occupano di studi, che agli albori del sec. XVII, come eco del vivo interesse ovunque destato per le scienze naturali, Federico Cesi, romano, insieme e con l'aiuto di altri, al pari di lui giovanissimi e animosi, G. Heck olandese, Franco Stelluti di Fabriano, Anastasio de Filiis di Terni, fondò, qui in Roma, l'Accademia dei Lincei, ponendola sotto la protezione di San Giovanni Evangelista, avendo per fine di promuovere l'indagine nelle scienze naturali. I Lincei dovevano, come scrisse il Cesi, ricercare le conoscenze delle cose e attraverso le cose create avvicinarsi al Creatore. Inoltre l'Accademia doveva stabilire legami fra tutti gli studiosi del tempo a qualsiasi Nazione appartenessero. Tutti sanno che questo fu il primo tentativo di organizzazione scientifica, iniziativa anteriore

quindi alle consimili ed altrettanto celebri Accademie di Parigi, di Londra, di Pietroburgo e di Berlino, e anteriore a quella del Cimento, e a quella dell'Istituto di Bologna. È noto anche che l'Accademia dei Lincei ebbe una vita tanto legata strettamente alla personalità scientifica e alla straordinaria attività del Cesi, che ne fu il primo « Principe », ossia il Presidente, che alla sua morte, in breve decadde dal primo splendore. L'Accademia tornò ad avere una vita nuovamente fiorente, soltanto molto più tardi per opera di Gregorio XVI, che nel 1813 la dichiarò Pontificia; e più avanti ancora per opera di Pio IX, che nel 1847 la restaurò e le diede il titolo di Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei ed un nuovo statuto più conforme alle esigenze dei tempi. Di questa antica Accademia la nostra Pontificia Accademia delle Scienze è la diretta erede e la legittima continuazione, come ha ricordato Pio XI di s. m. nel *Motu proprio* del 28 ottobre 1936, con cui restaurava l'Accademia nostra con il titolo attuale di Pontificia Accademia delle Scienze.

Ora nella storia della nostra Accademia vi è una data memorabile, il 25 agosto 1610; in tal giorno infatti il Cesi e i suoi compagni accolsero come socio Galileo Galilei, e ne aiutarono e ne difesero l'operosità scientifica. Contro le persecuzioni dei malevoli, che non si placarono mai verso le scoperte galileane, l'Accademia si fece banditrice di queste scoperte e stampò, sotto i suoi auspici ed a sue spese, le lettere intorno alle *Macchie solari* (1613), nelle quali è svolta la teoria copernicana dei moti della terra, e più tardi (1623) il *Saggiatore*.

Quei primi Accademici che ci precedettero non solo non pensarono mai che l'essere credenti e cattolici fosse di ostacolo alla scienza; non solo davano alla vita del « Linceo » la norma che era scritta nel Linceografo, e cioè che « Finis Academiae est rerum cognitionem et sapientiam non solum acquirere, recte pieque simul vivendo, sed et hominibus voce et scriptis, absque ullius noxa pandere », ma essi sapevano altresì che solo con il favore delle autorità religiose e dello stesso Pontefice l'abate Copernico aveva potuto dare alla luce la sua nuova concezione siderale; che, in quanto scienziato ed apportatore di nuove scoperte celesti, il Galilei non ebbe mai persecuzione dalla Chiesa, bensì larghezza di aiuti. Lo testimonia obiettivamente l'aiuto che a lui diede questa nostra Accademia, la quale però non fu sola nell'essere amica del Galilei, poichè il grande scienziato ebbe a fianco fisici e matematici di grande valore che allora insegnavano al Collegio Romano.



È giusto dunque che nella presente ricorrenza centenaria noi, eredi diretti e legittimi dei primi Lincei, celebriamo la memoria del Galilei. Una Commissione di Accademici, all'uopo nominata, dopo di aver preso in considerazione gli uomini particolarmente preparati a tracciare un'opera di ampio respiro intorno al Galilei, ha fatto cadere la propria scelta sopra un cultore di scienze storiche, caro a quanti queste discipline coltivano, per la signorilità con la quale suole presentare i risultati delle sue dotte ricerche: il Rev.mo Mons. Pio Paschini, Magnifico Rettore dell'Ateneo Lateranense, il quale non ci darà tanto e solo una vita, quanto piuttosto ci ripresenterà la figura del Galilei, inquadrandone l'opera nel quadro storico del sapere del suo tempo, e rimettendo quindi, mediante una documentata narrazione degli avvenimenti della vita ed una severa esposizione critica delle sue scoperte, la figura del grande astronomo nella sua vera luce. Questo contributo alle onoranze sarà come la continuazione di quell'atto di governo illuminato per il quale Leone XIII aprì gli Archivi Vaticani agli studiosi del processo del Galilei. Non sarà però il progettato volume opera di apologetica, perchè questo non è il compito di scienziati, ma di documentazione scientifica e storica. Bisogna aggiungere che potremo condurre in porto questa opera grazie alla perspicacia di Pio XI di s. m. che volle aggregare a noi, come Accademici soprannumerari, cultori di scienze storiche, gli insigni uomini che, lavorando in silenzio e con frutto nell'Archivio Vaticano e nella Biblioteca Vaticana, servono la storia, ossia la verità, ossia la Chiesa.

Noi confidiamo che le difficoltà del tempo nostro non ci costringano a condurre troppo in lungo questa opera, pur essendo essa di lunga lena; ci basta per ora averla annunciata dando assicurazione che ogni fatica non sarà risparmiata affinchè riesca degna dell'Accademia, ma soprattutto del mecenatismo di Pio XII che la pubblicazione di questa opera rende possibile.

Prima di chiudere, mi permetto porgere nelle mani auguste di Vostra Santità il voto della nostra Accademia che Vi chiede di dichiarare S. Alberto Magno, colui che nel Medio Evo fu ritenuto il dottore di ogni ora e di ogni scienza, patrono dei cultori delle scienze speri-

mentali, in quanto noi, cultori delle diverse scienze, in Alberto Magno consideriamo tutti un precursore ed anche un maestro.

Compiaciutosi il Santo Padre di accogliere la pergamena, contenente il «voto», presentataGli dal Cancelliere dell'Accademia, il Presidente ha così conchiuso:

Vogliate, Padre Santo, degnarVi di accogliere il voto nostro e metterlo insieme con quello di celebri ed antiche Università e Istituzioni scientifiche ed esaudire la nostra domanda, onde, ad aiutarci nella nostra non facile missione di servitori della verità, Alberto Magno ci implori dalla Sapienza infinita la grazia di non errare.

Chiudo chiedendo alla Santità Vostra di proclamare aperto nel Vostro nome augusto e caro il VI Anno della Vostra Pontificia Accademia delle Scienze.

Alla fine della relazione, il Santo Padre, compiaciutoSi esprimere al Presidente le Sue paterne congratulazioni e i sensi del Suo Sovrano gradimento per le attività accademiche, impartiva la Benedizione Apostolica.

Quindi si degnava ammettere al bacio della mano i singoli Accademici ed il Cancelliere dell'Accademia intrattenendosi amabilmente con ciascuno. Infine, ricevuto l'omaggio degli Eminentissimi Cardinali, degli Ecc.mi Accademici e delle altre personalità, ossequiato all'uscita, come già al Suo giungere, dall'Eminentissimo Signor Cardinale Canali, dell'Eccmo Monsignore Maestro di Camera e da S. E. il Presidente dell'Accademia, faceva ritorno al Palazzo Apostolico.

RESOCONTO  
DELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA  
DEL VI ANNO ACCADEMICO

(Domenica 30 Novembre 1941)

Presiede S. E. il Rev.<sup>mo</sup> P. AGOSTINO GEMELLI, O. F. M., Presidente.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, COLONNETTI, CROCCO, DAL PIAZ, DAINELLI, GEMELLI, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, PANETTI, PENSA, PISTOLESI, RONDONI, SEVERI, SOMIGLIANA, TONIOLO, URSPRUNG, VALLAURI, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, SCHMIDT, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata.  
2) Comunicazioni del Presidente. 3) Commemorazione dell'Accademico Volterra.  
4) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 5) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle ore 12.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI interpreta il sentimento degli Accademici tutti col proporre di inviare al S. Padre, in segno di filiale ringraziamento per l'Augusta Presenza e la preziosa parola con cui aveva voluto inaugurare il VI anno Accademico un telegramma di riconoscente devozione.

Il Corpo Accademico plaude alla proposta ed il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del testo del telegramma.

(Telegramma)

30 nov. 1941.

*Sua Santità Pio XII — Città del Vaticano — Accademici Pontifici iniziano Prima loro Tornata Sesto Anno Accademico rivolgendo con filiale pensiero sentimentale devota ammirazione et gratitudine per fervido Augusto insegnamento Santità Vostra auspicio et guida per attività scientifica Accademici tutti et implorano Apostolica Benedizione — Gemelli, Presidente.*

Il Corpo Accademico che ha ascoltato in piedi la lettura del telegramma approva per acclamazione il testo del dispaccio che viene immediatamente spedito.

Proseguendo nello svolgimento del secondo punto dell'ordine del giorno il Presidente GEMELLI comunica ufficialmente al Corpo Accademico che il Santo Padre, accogliendo la sua proposta, si è degnato completare il Consiglio Accademico nominandone Membro l'Accademico Lombardi in sostituzione del defunto Accademico Bottazzi.

Il Cancelliere dà lettura del Venerato dispaccio n. 48254 che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Luigi Maglione Segretario di Stato di Sua Santità ha spedito in data 24 novembre 1941 per comunicare la relativa Sovrana decisione del Santo Padre.

Alle felicitazioni che il Presidente GEMELLI, interpretando i sentimenti dei Colleghi tutti, presenta all'Accademico LOMBARDI per questo nuovo Sovrano riconoscimento dei suoi alti meriti si uniscono plaudento gli Accademici presenti.



Il Presidente GEMELLI si rivolge quindi al nuovo Accademico S. E. ALFREDO URSPRUNG, Ordinario di botanica nell'Università di Friburgo, presente per la prima volta ad una Tornata dell'Accademia, esprimendogli la soddisfazione degli Accademici di poterlo avere loro Collega.

Il Cancelliere rimette quindi a S. E. URSPRUNG le insegne di Accademico.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per la commemorazione del defunto Accademico VITO VOLTERRA.

L'Accademico CARLO SOMIGLIANA pronuncia un discorso commemorativo che nel suo testo integrale viene pubblicato nel presente volume degli « Acta ».

Vivi applausi accolgono la fine della commemorazione. Il Presidente GEMELLI dice: « Mi rendo interprete del pensiero di tutti ringraziando l'Accademico S. E. Somigliana per la calda, bella e appassionata commemorazione dell'Accademico Volterra. Lo ringrazio perchè ricordare chi ha tanto bene meritato della scienza e ha onorato la nostra Accademia è nostro dovere. Preghiamo Dio che compensi Volterra del bene fatto su questa terra ».

L'Accademico CROCCO ricorda che il defunto Accademico Volterra diede la sua opera all'Istituto sperimentale aeronautico da lui diretto e considera suo grande onore avere avuto un tale collaboratore.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico AMALDI presenta le seguenti Note:

F. FELDHEIM - *La transformation de Gauss à plusieurs variables: application aux polynomes d'Hermite et à la généralisation de la formule de Mehler.*

Il presente lavoro comincia con alcune considerazioni preliminari sulla teoria generale della trasformazione di Gauss a più variabili.

Per analogia con il caso ad una dimensione, è studiato particolareggiatamente il comportamento di questa trasformazione riguardo ai polinomi di Hermite a due variabili. I risultati sono applicati alla generalizzazione della formula di Mehler al caso di polinomi d'Hermite a più variabili.

S. FAEDO - *Sul metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione.*

Quando si applica il metodo variazionale di M. Picone all'interpretazione di problemi di propagazione, rimane all'arbitrio del calcolatore il fissare un sistema di funzioni completo. L'Autore dà in questa memoria le condizioni, cui deve soddisfare tale sistema perchè esistano le successive approssimazioni quando si voglia interpretare un qualsiasi sistema di equazioni lineari a derivate parziali.

L'Accademico ARMELLINI presenta la seguente Nota:

L. GIALANELLA - *Le variazioni del diametro solare nel sessantennio 1876-1937 secondo le osservazioni eseguite all'Osservatorio del Campidoglio, da L. Respighi, A. Di Legge, F. Giacomelli, G. Armellini, G. Armellini-Conti, L. Gialanella, P. Mignucci.*

All'Osservatorio romano del Campidoglio le misure del diametro solare con l'osservazione dei tempi di passaggio al meridiano furono iniziate nel 1873 per iniziativa del Respighi, allora Direttore di quella Specola, e continuate ininterrottamente fino al trasporto della Specola stessa nella nuova sede di Monte Mario (1937), conservando sempre inalterati lo strumento e il metodo di osservazione. Lo strumento è stato l'ottimo cerchio meridiano di Ertel (apertura m. 0,94, focale m. 1,432); il metodo quello per proiezione, secondo cui tre o più osservatori, determinavano *simultaneamente* gli istanti del passaggio dei due bordi del Sole, proiettato sopra uno schermo bianco, ai fili del micrometro.

Osservatori sono stati il Respighi stesso insieme con Di Legge, Giacomelli e Prosperi in una prima serie che va (sebbene non con tutti gli osservatori) dal 1876 al 1922; e poi Armellini, Armellini-Conti, Gialanella a Monte Mario, ma con metodo e strumento differenti, e cioè con uno strumento dei passaggi di Bamberg e osservazione visuale diretta.

In questa memoria l'Autore pubblica per la prima volta integralmente tutti i risultati del sessantennio di osservazioni del Campidoglio, dopo aver riveduto e unificato le relative riduzioni. Risultati preliminari erano stati già pubblicati precedentemente da Respighi, Di Legge, Prosperi e G. Armellini, al quale si debbono anche interessanti articoli riassuntivi. Le osservazioni dal 1912 al 1922 compreso, sono però pubblicate per la prima volta in questa memoria. La discussione verte su 30.679 passaggi del disco solare osservati e poichè ogni misura comprende 14 appulsi di andata e ritorno (primo e secondo bordo), si hanno in tutto 429.506 *appulsi osservati*.

Questa serie di osservazioni capitoline è particolarmente importante perchè comprende un notevole numero di anni (oltre 60), in cui le osservazioni sono

state fatte in tutti i giorni sereni sempre con il medesimo strumento, con lo stesso metodo, e, quel che più conta, *simultaneamente* da parecchi osservatori (almeno tre), che si trovavano nelle medesime condizioni estrinseche, e di cui sono stati dall'Autore determinati gli errori personali relativi (equazioni personali), riconducendoli ad un unico sistema fondamentale.

La discussione di tutte queste osservazioni, ridotte omogenee e paragonabili, ha permesso all'Autore innanzi tutto di determinare il nuovo *valore medio del semidiametro solare* in  $961''{,}35$  (lievemente diverso dal valore  $961''{,}50$  attualmente in uso per il calcolo delle effemeridi); e poi di mettere con sicurezza in evidenza delle *fluttuazioni ed oscillazioni del diametro solare* dell'ampiezza massima di circa  $3''$  e di periodo vario, di cui ha cercato pure di determinare le eventuali relazioni con l'attività del Sole quale risulta dalla frequenza delle macchie.

L'Accademico GEMELLI presenta da parte dell'Accademico BUYTENDIJK la seguente Nota:

F. J. J. BUYTENDIJK e A. MEESTERS. - *Duration and course of the auditory sensation.*

Rifacendosi agli esperimenti di Exner relativi alla cosiddetta soglia di fusione delle sensazioni auditive, l'Autore ha compiuto esperimenti per determinare il più breve intervallo che possa essere percepito dall'orecchio. Le esperienze dell'Autore confermano le osservazioni fatte in precedenza da Exner, e cioè che due « clics » nettamente trasmessi mediante un ricevitore telefonico da correnti di induzioni o da scariche di un condensatore, si percepiscono come un doppio battito quando giungono all'orecchio con un intervallo di due o tre sigma.

Quando però l'intervallo è maggiore, il secondo suono è percepito più distintamente del primo, pur restando uguale l'intensità.

L'Autore ritiene che sia ragionevole spiegare il fatto supponendo che il secondo suono si assumi ad un resto di percezione del primo, e che questo resto vada diminuendo con l'aumentare dell'intervallo di tempo.

L'Accademico COLONNETTI presenta le seguenti Note:

G. COLONNETTI, - *Su di un caso caratteristico di rinforzo di una volta sottile.*

È noto che le volte sottili resistono molto bene a condizioni di carico uniformi e simmetriche, ma sopportano male carichi concentrati e disimmetrici.

Questa Nota ha per scopo di mostrare su di un esempio concreto e con dati di fatto rilevati sperimentalmente, come sia possibile operare un efficace rinforzo di queste volte e renderle atte a resistere egualmente bene a condizioni di carico singolarmente sfavorevoli.

G. BONFIGLIOLI - *Sulle vibrazioni libere di un portale elastico.*

L'Autore, definito il sistema elastico di cui si propone lo studio e precisate le ipotesi sotto cui lo svolge (isotropia, elasticità lineare, ecc.) ne scrive le equazioni del moto libero (indefinite e ai limiti) e ne assegna gli integrali; allo scopo di pervenire alla posizione e alla risoluzione dell'equazione degli autovalori — ciò che costituisce la fase utile per le applicazioni. Spezzata questa equazione in due più semplici — il che è reso possibile dall'esistenza di autofunzioni simmetriche e antisimmetriche — le risolve graficamente in due casi particolari; i quali servono tra l'altro a mostrare la scarsa attendibilità di uno studio dinamico del portale condotto con l'ausilio delle formule approssimate di riduzione dei gradi di libertà. Rileva infine come nonostante la sua complicatezza, calcoli numerici per risolvere l'equazione degli autovalori e determinare le frequenze proprie del portale non siano affatto così macchinosi da annullare l'utilità pratica delle formule stabilite.

GIACCHERO e PIZZETTI - *Sulla possibilità di un razionale impiego delle leghe leggere nella nuova tecnica del cemento armato.*

Le possibilità di applicazione delle leghe leggere nelle costruzioni edili sono state fino ad ora prese in non grande considerazione, e questo principalmente per le controverse opinioni — il più delle volte non suffragate dall'esperienza — che avevano finito per porle su di un piano di incertezza poco favorevole ad iniziative industriali.

Gli Autori si sono proposti di appurare con metodi sperimentali se e fin dove tutte le principali obiezioni che venivano mosse alle leghe leggere ed in particolare a quelle di alluminio, avessero valore, e una volta valutata l'importanza di tali obiezioni, di studiare secondo le concezioni della nuova tecnica, le travi in cemento con armatura di alluminio.

Dallo studio degli Autori, resta dimostrato che la trave con armature di alluminio preventivamente tese, dà una possibilità di carichi di lavoro più che doppi rispetto ad una trave, ad essa paragonabile, in cemento armato ordinario. Viene pertanto chiaramente dimostrata la possibilità di un razionale impiego delle

armature di alluminio nelle costruzioni in cemento, possibilità che la teoria aveva indicato e che l'esperienza ha confermato in pieno.

Presenta quindi in omaggio il suo trattato di *Scienza delle Costruzioni* recentemente edito da Einaudi a Torino.

In questo volume importanti innovazioni sono state apportate nella esposizione della teoria classica dell'elasticità la quale viene tutta dedotta dai principi di minimo lavoro di deformazione che si sono dimostrati così fecondi nel campo delle applicazioni tecniche.

Vi si affronta poi — credo per la prima volta — il problema del passaggio della teoria dell'equilibrio elastico a quella dell'equilibrio elasto plastico, con continuità di metodo e di riferimenti onde mettere in evidenza le importanti alterazioni di regime che accompagnano ogni superamento dei limiti di elasticità dei materiali.

L'Accademico CROCCO presenta la seguente Nota:

G. A. CROCCO - *Equazione generale della gran volta.*

La Nota presenta una equazione differenziale adimensionale di quella manovra aerea che è stata già dall'Autore denominata *gran volta*; e che è l'analoga della *virata*, cioè del giro azimutale del velivolo in piano orizzontale: mentre la gran volta considera il giro zenitale in piano verticale.

L'equazione presentata connette l'incremento di velocità lungo la traiettoria coll'incremento di angolo girato; ed è ottenuta nella ipotesi fondamentale che la manovra abbia luogo a tutta potenza del motore. Seguendo l'analoga trattazione svolta dall'Autore per la virata nelle sue « Equazioni concettuali della meccanica del volo » essa introduce nei coefficienti, oltre a un fattore aerodinamico caratteristico del velivolo considerato, due altri fattori che ne definiscono la resistenza aerodinamica in volo curvo e la trazione massima dell'elica; e che sono già stati denominati *sopportazione* e *induttanza*, nel citato studio sulla virata.

Per il calcolo della equazione, che viene così a ridurre a tre soltanto i numerosi fattori da cui la manovra dipende, basta ancora precisare le *condizioni iniziali* e la *legge della manovra*.

L'Autore considera perciò due leggi fondamentali. La prima consiste nel mantenere costante la posizione dei comandi durante la manovra: il che sostanzialmente si traduce in una sopportazione proporzionale al quadrato della velocità. L'Autore propone per questa legge, già presa in considerazione da altri studiosi, la denominazione di manovra *isocomandata*.

La seconda legge considera invece un comando variabile tale da ottenere una sopportazione costante durante tutta la manovra: e questa legge viene detta manovra *isoportata*.

Suddivisa poi la gran volta in arco ascendente ed arco discendente, viene introdotta la denominazione di *chiave* per il punto più alto e *piede* per l'inizio dell'arco ascendente o la fine del discendente.

Viene allora dimostrato che la traiettoria è dissimetrica e che vi risulta in generale un punto di minima velocità, subito dopo sorpassata la chiave; e un punto di *massima velocità*, alquanto prima di raggiungere il piede dell'arco discendente.

Vengono poi indicati due casi ideali di integrabilità dell'equazione considerata, corrispondenti entrambi alla ipotesi che la resistenza aerodinamica sia equilibrata dall'elica durante tutta la manovra: cioè che sia nullo quel fattore che l'Autore ha denominato *impedenza aerodinamica*.

Questi due casi corrispondono alle due leggi della manovra innanzi definite. Il primo è stato trattato da Lanchester anteriormente al 1917 e recentemente ripreso dal Prof. Panetti in una elegante memoria; ove egli introduce la sopportazione denominandola *fattore di carico*.

Il secondo caso viene per la prima volta indicato dall'Autore e presenta caratteristiche interessanti nel confronto col primo.

Entrambi questi casi *ideali* danno luogo a una gran volta simmetrica; e differiscono quantitativamente e qualitativamente dal caso *reale*.

L'Autore presenta infine due esempi numerici di volta reale; ottenuti per integrazione *al passo*: e si ripromette di farli seguire da altri più numerosi.

Egli si augura che le denominazioni introdotte, anche se non venissero accettate, siano tuttavia discusse e decise dai colleghi; per modo che la trattazione dei problemi della meccanica del volo occorrenti nell'arte della guerra aerea, possa avere ormai nella nostra lingua una definita terminologia.

L'Accademico DAINELLI presenta la seguente Nota:

E. MARCHESINI - *Osservazioni quantitative sull'accrescimento relativo del plasmostraco di alcune nodosarinae.*

Lo studio dell'accrescimento di tre forme di Foraminiferi fossili (*Nodosaria monilis* O. Silv., *N. monilis* var. *laevigata* O. Silv., *N. intermittens* Römer), condotto statisticamente su un numero sufficiente di esemplari, porta alla constatazione che anche in questi Protozoi l'accrescimento avviene secondo la Nota legge del Teissier.

Questa constatazione apre importanti problemi sulle modalità di accrescimento dei Foraminiferi e dei Protozoi in genere, problemi che vengono impostati nel presente lavoro.

Di ognuna delle forme studiate si danno le principali costanti statistiche, le faune d'accompagnamento e l'età geologica degli strati cui appartengono.

L'Accademico GEMELLI presenta le seguenti Note:

PIZZUTI, TINNIVELLA e SIAO - *Ricerche sul processo psicofisiologico di orientamento locale nello spazio.*

I tre giovani studiosi sotto la direzione del P. GEMELLI hanno compiuto, nel Laboratorio di psicologia dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, ricerche per determinare quali sono i processi visivi mediante i quali si ha l'orientamento locale nello spazio, partendo da ricerche precedenti del GEMELLI dimostranti che i dati visivi sono gli elementi fondamentali e pressochè esclusivi di tale orientamento.

Anzichè far ruotare il soggetto in modo da farlo nelle diverse posizioni, gli Autori hanno fatto ruotare l'ambiente intorno al soggetto.

Risultato fondamentale si è che i dati visivi si organizzano mediante lo schema corporeo del corpo secondo quanto il GEMELLI aveva stabilito da un punto di vista generale.

RADUSCEV e SIAO - *Analisi dei movimenti della scrittura.*

Il bulgaro RADUSCEV e il cinese SIAO hanno nel Laboratorio di psicologia dell'Università Cattolica del Sacro Cuore diretto dal GEMELLI compiuto una analisi dei movimenti della scrittura dimostrando che l'organizzazione dei vari movimenti a dare l'unità motoria è guidata dai dati percettivi specialmente visivi.

L'Accademico GIORGI presenta la seguente Nota:

A. BLANCHI - *Una osservazione sul calcolo delle catene infinite dei trasduttori elettrici.*

Nelle formule delle catene infinite di trasduttori elettrici e di filtri d'onda si presenta una ambiguità di segno a cui per molto tempo non era stata data sufficiente considerazione e che non è ancora completamente risolta, esistendo qualche caso particolare ove detta ambiguità non è stata ancora chiarita.

Nella Nota vengono esposti gli studi condotti dall'Autore, che hanno portato a risolvere il problema nei casi più generali ed in un caso particolare che in un primo tempo si presentava irriducibile.

Si spiega perchè fra i vari procedimenti per mezzo dei quali si poteva risolvere il problema, quello scelto è il più semplice.

In ultimo con alcune considerazioni generali ed analitiche si espongono i motivi per i quali l'ambiguità di segno in questione fu per molto tempo trascurata.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta la seguente Nota:

E. FOÀ - *Sulla equazione del moto smorzato con parametri variabili e su un caso di instabilità.*

Esempi classici di equazioni lineari del secondo ordine sono quelli offerti nei casi più comuni dalle vibrazioni meccaniche, nonché dalle oscillazioni elettriche.

Basta in tali casi l'ispezione dei coefficienti costanti della equazione per desumere il comportamento oscillatorio ovvero aperiodico dell'integrale.

Circostanze un poco più complesse portano, con schematizzazioni analoghe, ad equazioni non lineari. Queste ammettono talvolta delle approssimazioni asintotiche in certo senso linearizzabili, ed è molto importante di poterle utilizzare per riconoscere il comportamento qualitativo (per i grandi valori del tempo) del fenomeno.

Dell'argomento si sono occupati dal punto di vista prevalentemente matematico i due Cartan (padre e figlio) e, con speciale riguardo alla radiotecnica, l'olandese Van der Pol.

Nella Nota presentata il Dott. FOÀ precisa alcune condizioni di attendibile linearizzabilità asintotica valendosi di una precedente ricerca del Prof. Graffi.

L'Accademico LOMBARDI presenta la seguente Nota:

A. GIACOMINI - *Liquido nel quale la velocità degli ultrasuoni è indipendente dalla temperatura.*

I fisici si sono spesso proposti di costituire sostanze o corpi, i quali godessero della proprietà che un loro determinato parametro caratteristico fosse sensibilmente indipendente dalla temperatura.



In questo ordine di idee si possono ricordare, ad esempio, le leghe al nichel-cromo, la cui resistività elettrica varia poco al mutare della temperatura; l'acciaio invar, che ha coefficiente di dilatazione termica assai piccolo; l'acciaio elinvar, avente modulo di elasticità quasi indipendente dalla temperatura.

Convieni anche citare le piastrine di quarzo usate come campioni di frequenza. Anche per queste si è studiato a lungo onde trovare un « taglio » che rendesse la frequenza di risonanza della piastrina sensibilmente indipendente dalla temperatura.

Non risulta che sino ad ora si fosse pensato di ricercare un liquido, nel quale la velocità di propagazione degli ultrasuoni fosse, entro conveniente intervallo, indipendente dalla temperatura.

Per conseguire tale scopo l'Autore ha preso le mosse osservando che, per tutti i liquidi sui quali è stato sperimentato, la velocità di propagazione delle onde elastiche è funzione decrescente della temperatura, eccezione fatta per il caso dell'acqua.

Egli ha allora pensato che una mescolanza dei due liquidi, dei quali uno fosse l'acqua, potesse presentare coefficiente di temperatura per la velocità degli ultrasuoni sensibilmente nullo. Il coefficiente di temperatura cui si allude è il valore  $k = \frac{dv}{dt}$ , ove si sono indicati con  $v$  la velocità degli ultrasuoni e con  $t$  la temperatura.

Le misure sono state iniziate usando mescolanze di etanolo in acqua, con varia percentuale dei componenti. Sin dalle prime determinazioni venne appurato che per tali mescolanze non è soddisfatta la regola di addittività. Infatti, operando a temperatura costante ed a concentrazione variabile, vi sono valori della percentuale dell'alcool per i quali la velocità nella miscela è superiore a quella relativa ai liquidi componenti puri. In altre parole, la curva rappresentativa della velocità in funzione della percentuale di un componente presenta un massimo. Questo fatto, che nel caso particolare della mescolanza etanolo-acqua non era stato constatato da altri, trova riscontro nei risultati ottenuti precedentemente su alcune poche altre miscele, per le quali appunto fu visto che la curva rappresentativa della velocità presenta un massimo od un minimo.

L'aver constatato che la regola di addittività non era soddisfatta fece in un primo tempo dubitare che la meta prefissata non potesse venir raggiunta. Tuttavia tracciate, sulla scorta dei dati sperimentali che si andavano accumulando, le curve rappresentative della velocità in funzione della temperatura, poté constatarsi che, al crescere della percentuale di alcool, il coefficiente di temperatura inizialmente positivo decresce e diviene negativo per forti percentuali di alcool. Appare altresì che, per concentrazioni dell'alcool basse, le curve non sono situate nella porzione del piano compresa tra quelle relative ai liquidi compo-

menti puri. Ciò conferma, in modo generale, l'osservazione prima fatta circa l'andamento anomalo delle caratteristiche velocità-concentrazione ricavate a temperatura costante.

Si osserva infine che, per concentrazioni comprese fra il 10 % e il 20 % di alcool, le curve  $v = f(\theta)$  sono sensibilmente delle rette, poco inclinate rispetto all'asse delle ascisse; resta quindi assicurata la possibilità di costituire miscele aventi coefficiente di temperatura nullo in ampio intervallo.

Avendo stabilito, mediante dette esperienze preliminari, che la percentuale di alcool necessaria per l'annullamento di tale coefficiente è prossima al 17 %, vennero eseguite quattro determinazioni di velocità in una miscela contenente il 17,35 % di alcool, ottenendo i seguenti valori:

$\alpha$	5°C	$v = 1610$	metri al secondo
»	15°C	$v = 1611$	»
»	25°C	$v = 1611$	»
»	35°C	$v = 1609$	»

Si deduce che la variazione di velocità, entro l'intervallo 5°C -- 35°C, non è superiore all'errore da cui sono affetti i valori sperimentali. Ammettendo, per prudenza, che l'errore assoluto sia in tutte le determinazioni di  $\pm 2$  m. sec<sup>-1</sup>, si calcola immediatamente un limite superiore per la variazione media di velocità, per grado centigrado, nell'intervallo 5°C -- 35°C. Questa risulta di quattro parti di centomila.

Premesso che i risultati così ottenuti forniscono fin da ora indicazioni utili per una migliore conoscenza della struttura molecolare dei liquidi, è lecito segnalare alcune possibili utilizzazioni della miscela a velocità, che logicamente potrebbe chiamarsi « takinvar ».

È senz'altro palese che essa potrà servire da liquido campione, ogni qual volta si possano compiere misure di velocità degli ultrasuoni adottando metodi di confronto.

Altra possibile applicazione, della quale non è dato in questo momento valutare l'importanza, è la seguente. Di quei ricevitori per televisione, che utilizzano una cella ultrasonora per modulare la luce, il punto luminoso che, per così dire, costruisce l'immagine, si muove con velocità proporzionale a quella degli ultrasuoni nella cella. Il riscaldamento del liquido contenuto in quest'ultima, provoca, a cagione delle variazioni di velocità degli ultrasuoni, una alterazione del sincronismo nel processo di costruzione dell'immagine. È presumibile che la miscela a velocità costante consenta di eliminare totalmente questo inconveniente.

L'Accademico GEMELLI presenta da parte dell'Accademico PIERANTONI la seguente Nota:

U. PIERANTONI - *Osservazioni su un nuovo pseudamphistomum umano dell'Etiopia.*

La Nota riferisce il rinvenimento di un piccolo trematode nella parete intestinale di un uomo, in Etiopia, regione del Gimma.

All'esame sommario è risultato trattarsi di una forma di Opistorchide appartenente al genere *Metorchis* o, come vuole il Lühe, al genere *Pseudamphistomum*.

Per la sua presenza in un uomo, e per il suo rinvenimento in Abissinia, mentre le specie note del genere sono state fin ora rinvenute solo in Europa ed Asia, l'Autore ne ha fatto oggetto di un più accurato esame, data anche la rarità di questo genere ed il fatto che sulla sua organizzazione e posizione sistematica oltre che sul suo ciclo biologico non si è ancora detta l'ultima e definitiva parola.

L'Accademico SEVERI presenta la seguente Nota:

F. SEVERI - *Ulteriori sviluppi della teoria della serie di equivalenza sulle superficie algebriche.*

L'Autore continua le proprie ricerche sulla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza da lui inaugurata nel 1932, la quale ha già dato numerosi e importanti frutti nella geometria algebrica, così da esser considerata, come scrisse l'anno scorso il Prof. Holge dell'Università di Cambridge « the most important contribution made in geometry in recent years ».

Alcuni dei risultati esposti in questa Memoria erano stati preannunciati, ma non sviluppati, in Note precedenti dall'Autore. I più notevoli sono:

La costruzione proiettiva di ogni serie di equivalenza effettiva per intersezione della superficie con varietà algebriche effettive; le proprietà topologiche e trascendenti caratteristiche delle serie di equivalenza e di pseudoequivalenza; la determinazione della dimensione di una serie di pseudoequivalenza completa, in relazione ai caratteri invarianti della serie e della superficie che la contiene.

L'Accademico PISTOLESI presenta la seguente Nota:

R. GIOVANNOZZI - *Trazione, torsione e flessione pura di solidi svergolati a sezione costante.*

Facendo uso di un metodo di successive approssimazioni indicato da O. Göhner e da lui applicato allo studio di solidi a sezione costante e ad asse

circolare ed elicoidale, l'Autore studia il problema della trazione, torsione e flessione pura di un solido svergolato ad asse rettilineo a sezione costante, generato cioè dal moto di una sua sezione retta che si sposta su di un asse rettilineo contenente il suo baricentro ruotando contemporaneamente di angoli proporzionali agli spostamenti assiali.

Esaminando in generale i tre modi di sollecitazioni detti, si dimostra che i problemi della trazione e della flessione pura del solido svergolato possono ridursi rispettivamente al problema della torsione e della flessione e taglio del prisma avente uguale sezione retta. Si applicano in particolare questi risultati ai casi della sezione ellittica e rettangolare.

Lo studio, più complesso, della torsione del solido svergolato venne limitato, in prima approssimazione, al caso della sezione ellittica.

Nei tre modi di sollecitazione si stabiliscono anche vari risultati di carattere generale riguardante le deformazioni dell'asse del solido. Particolarmente semplice e interessante l'espressione della rotazione relativa delle sezioni dovuta ad uno sforzo di trazione e dell'allungamento unitario dell'asse del solido dovuto ad un momento torcente.

L'Accademico Soprannumerario GATTERER presenta la seguente Nota:

GATTERER, JUNKES, ROLLA, PICCARDI - *Sugli spettri d'arco delle miscele neodimio-samarium.*

Die Arbeit, eine Frucht der wissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft der beiden Institute, behandelt die für die Chemie der Seltenen Erden und selbst für die Atomchemie ausserordentlich interessante Frage, ob sich mit den feinsten analytischen Nachweismitteln, insbesondere mit Hilfe der Emissionsspektralanalyse, Spuren des noch unbekanntes Elementes zwischen Nd und Sm auffinden lassen. Bekanntlich waren vor etwa 15 Jahren einige Forscher, besonders in Amerika der Meinung, dieses Element, das die Atomnummer 61 trägt und dem man den Namen Illinium gab, entdeckt zu haben. Die beigebrachten wissenschaftlichen Belege waren aber so kärglich, dass immer wieder berechtigte Zweifel an der Realität dieser Entdeckung laut wurden. In den allerletzten Jahren ist man auch von atomtheoretischer Seite an diese Frage herangetreten. So ist nach einer ziemlich allgemein angenommenen Regel von J. Mattauoh kein Platz mehr für das Illinium als stabiles Zwischenglied zwischen Nd und Sm, da die Massenzahlen 143, 145, 147 und 149 bereits durch Isotope des Nd und Sm besetzt sind.

Bei diesem Stande der Dinge war es von grossem Interesse, eine sorgfältige und womöglich entscheidende Prüfung an einem Material vorzunehmen, das für

diesen Zweck wie kaum ein anderes geeignet ist. Es handelt sich um Mischungen von Bromaten des Nd und Sm mit Einschluss eventueller Zwischenglieder. Es ist das grosse Verdienst Professor ROLLAS und seines wissenschaftlichen Stabes, dieses einzigartige Untersuchungsmaterial durch jahrelange mühsame Arbeit aus einer Tonne Rohneodymium dargestellt zu haben. Diese Nd-Sm-Gemische wurden dann in tausendfach wiederholten fraktionierten Kristallisationen nach und nach auf Grund der etwas verschiedenen Löslichkeit in die darin enthaltenen Komponenten der Bromate zerlegt. Als Anfangs- und Endglieder erhielt man Neodymium bzw. Samarium, falls noch Verbindungen anderer Erden von mittlerer Löslichkeit vorhanden waren, mussten sie in den Mittelfractionen sich anreichern und dort nachzuweisen sein. Eine passend gewählte Stufenreihe dieser Fractionen wurde von Professor Piccardi in Genova und ebenso von uns in Castel Gandolfo mit Spektrographen hoher Dispersion aufgenommen und im Gebiet des Sichtbaren wie des Ultraviolett auf das Auftreten neuer Linien in den Spektren der Mittelfractionen untersucht. Das überraschende Resultat dieser Prüfung ist folgendes. In den Mittelfractionen erscheinen tatsächlich neue Linien, die in den Anfangs- und Endgliedern der Reihe fehlen, aber sie gehören sämtlich dem Gadolinium an. Auch die Abstufung der Intensität dieser Linien entspricht im grossen und ganzen dem Spektrum des reinen Gadoliniums; im einzelnen zutage tretende Unterschiede sind wohl auf Rechnung der sehr verschiedenen Anregungsbedingungen des Gd im Reinelement und in der Mischung zu setzen. Bisher wurde nicht eine einzige Linie gefunden, die mit einiger Wahrscheinlichkeit dem Element Nr. 61 zuordnen wäre. Da die Bromate des Elementes 61 ähnlich wie die des Gd in ihrer Löslichkeit zwischen Gd und Sm liegen, lässt sich folgender Schluss ziehen: Wäre das Element 61 in den Nd-Sm-Gemischen wenigstens in der sehr geringen Konzentration vorhanden wie die darin befindlichen Spuren von Gd, so hätte es sich wie dieses anreichern und durch die äusserst empfindlichen spektrochemischen Methoden nachweisen lassen.

L'Accademico Soprannumerario SCHMIDT presenta la seguente Nota:

W. SCHMIDT - *Die älteste Opferstätte des Paläolithikums in den Hochalpen der Schweiz.*

Seit einiger Jahrzehnten sind in der Prähistorie bekannt die Entdeckungen, die Dr. E. Bächler in mehreren Hölen der Schweizer Hochalpen — wie auch Dr. K. Hörmann in der Petershöhle bei Velden-Nürnberg — gemacht hatte von intentionellen, von den prähistorischen Menschen selbst gemachten Aufstellungen von Schädeln und Extremitätenknochen der Höhlenbären, die von beiden Forschern unabhängig von einander als Primitiv-Jagdopfer des Hirns und Marks an die Gottheit gedeutet wurden. Nenerdings ist nun diesen Funden sine andere

Deutung gegeben worden: es seien Dépôts von Hirn und Mark, die der prähistorische Mensch zur Fellbereitung verwendet habe. Diese Ansicht ist aber nicht haltbar. Wenn zur Interpretation der prähistorischen Funde die Ethnologie herangezogen wird, so bezeugt diese, dass die Verwendung von Hirn (und Mark) bei der Zubereitung der Tierfelle zu den jüngsten Methoden gehört, die unmöglich schon im Prämönsterien geübt worden sein kann, in welcher das Alpine Paläolithikum jener Höhlenfunde gehört. Der Schweiz verbleibt also der Ruhm, die älteste und die höchste religiöse Kultstätte zu besitzen.

Die Einzelheiten behandle ich in dem Vortrag «Die Zusammenarbeit von Prähistorie und Ethnologie zur Aufhellung ältester Menschheitsgeschichte», der im «Jahrbuch der naturforschenden Gesellschaft zu Bern 1941» erscheint.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Cancelliere dà notizia dei seguenti lavori originali presentati prima della presente Tornata:

S. BEER - *Ricerche sulla morfologia dei disegni nelle ali dei papilionidi*, presentato dall'Accademico SILVESTRI.

SCHING-SHEN CHERN - *Sur les invariants de contact en geometrie projective differentielle*, presentato dall'Accademico AMALDI.

M. ZEVI - *Sopra una proprietà di limite caratteristica delle funzioni olomorfe*, presentato dall'Accademico AMALDI.

M. PICONE - *Osservazioni alla Nota di Maria Zevi*, presentato dall'Accademico AMALDI.

G. S. COEN - *Appunti di malacologia mediterranea sulle specie del gruppo Acanthocardium*, presentato dall'Accademico GIORGI.

G. S. COEN - *Nuove varietà di Argobuccinum*, presentato dall'Accademico GIORGI.

S. CORONATO - *Criteri wronskiani di dipendenza lineare per funzioni di più variabili indipendenti*, presentato dall'Accademico AMALDI.

M. CIMINO - *Teoria approssimata del Pianeta 165 Loreley*, presentato dall'Accademico ARMELLINI.

F. BOTTAZZI - *La mente e l'opera di Leonardo da Vinci*.

La seduta viene tolta alle ore 13,30.

RESOCONTO  
DELLA SECONDA TORNATA ORDINARIA  
DEL VI ANNO ACCADEMICO

(Venerdì 20 febbraio 1942)

Presiede S. E. il Rev. mo P. AGOSTINO GEMELLI, O. F. M.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOLDRINI, CROCCO, DAINELLI, GIUGI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, LEPRI, LOMBARDI, PIERANTONI, PANETTI, SEVERI, PENSA, RONDONI, SILVESTRI, SOMIGLIANA, TONIOLO, VALLAURI, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della Prima Tornata del VI Anno Accademico. 2) Comunicazioni della Presidenza. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Nuovo Premio Pio XI. 5) Seggi vacanti 6) Varia.

La Tornata è aperta alle 16,15.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno:

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico che il Santo Padre, al Quale l'Accademia inviò nella decorsa Tornata un telegramma di augurio e di ringraziamento per essere stato ad inaugurare l'Anno Accademico, Si è benignato inviare espressioni di augusto gradimento, a mezzo del Suo Cardinale Segretario di Stato.

Il Cancelliere dà lettura del venerato dispaccio.

(Telegramma)

2 dic. 1941.

*S. E. Padre Gemelli, Presidente Pontificia Accademia delle Scienze — Città del Vaticano — Devoto messaggio Accademici Pontifici inizio Sesto Anno loro attività scientifica conferma alta coscienza superiori finalità Augusta fondazione ed è particolarmente gradito Santità Sua che auspicando nuovi fasti invia di cuore implorata Benedizione — Cardinale Maglione.*

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali

L'Accademico AMALDI presenta la seguente Nota postuma del defunto Accademico T. LEVI-CIVITA:

*T. LEVI-CIVITA - Invarianti ametrici ed equazioni di Maxwell per l'etere.*

Il van Dantzig, in alcune sue Memorie del 1934 e del 1936, ha fatto osservare che le due leggi integrali, racchiudenti le equazioni di Maxwell per l'etere, possono essere formulate senza ricorrere ad un elemento lineare ausiliario, purchè si faccia intervenire soltanto un bivettore. Se si tratta di corpi ponderabili, uno schema così ridotto non può più bastare, poichè la presenza di materia sembra esigere essenzialmente insieme con le componenti del bivettore, convenienti apprezzamenti metrici. È, dunque, opportuno evitare anzitutto ogni difficoltà accessoria, concentrando l'attenzione sul caso limite dell'etere, supposto sede di fenomeni elettromagnetici.

In questo caso i fatti sono sintetizzati in maniera feconda (con riferimento allo spazio ordinario e al tempo astronomico) dai due gruppi di equazioni di Maxwell-Hertz, che si possono trasportare alla relatività generale, in base alla con-



cezione metrica della varietà spazio-tempo. Il van Dantzig aspira più generalmente a prescindere, per quanto è possibile, dall'elemento lineare, trasformando convenientemente in quattro dimensioni i due gruppi classici di quattro equazioni ciascuno, che riassumono (per l'etere) le leggi dell'elettromagnetismo. Si sapeva già da tempo, dopo le ricerche del Poincaré e del Cartan (teoria delle forme a moltiplicazione esterna) che uno di questi gruppi (quello che esprime, si può dire, la derivata del flusso di forza magnetica e il suo carattere solenoidale) si trasporta in relatività generale, dipendendo dal fatto analitico ed ametrico che un certo covariante bilineare si annulla. Secondo il van Dantzig, si può dare forma egualmente ametrica anche al secondo gruppo, riferentesi al flusso di forza elettrica.

L'Autore dimostra, con un'analisi acuta e geniale, che ciò è vero soltanto in un senso ristretto, ma non considerando i due gruppi contemporaneamente e senza fare intervenire, com'è nella natura delle cose, un solo tensore elettromagnetico a sei elementi, senza elemento lineare, nè altre ausiliarie indipendenti. Se ci si pone da questo punto di vista in maniera conseguente, si riconosce senza difficoltà che non è possibile dar forma ametrica anche al secondo gruppo, corrispondente all'espressione del flusso di forza elettrica.

L'Accademico AMALDI presenta poi le seguenti Note:

G. ZAPPA - *Sui gruppi quasi-abeliani. I.*

L'algebrista americano O. Ore ha recentemente inquadrato la teoria dei gruppi astratti in quella più comprensiva delle strutture. Secondo questo nuovo indirizzo, i gruppi vengono concepiti, più che come insiemi dei loro elementi, come insiemi dei loro sottogruppi. Conseguentemente acquista interesse, in luogo dello studio degli gruppi abeliani, quello dei gruppi, che l'Autore chiama *quasi-abeliani*, cioè dei gruppi, in cui due sottogruppi quali si vogliano sono sempre permutabili. In questa prima Nota sull'argomento l'Autore determina tutti i tipi di gruppi quasi-abeliani generabili per mezzo di due soli elementi; e si riserva di studiare in una Nota successiva i gruppi quasi-abeliani generabili con un qualsiasi numero finito di elementi.

L. AMERIO - *Sul problema del Dirichlet in un campo ellittico.*

In una sua recente Nota il Prof. Fantappiè ha messo in relazione il problema del Cauchy con quello del Dirichlet per l'equazione del Laplace in due variabili e ha indicato come dalla formula risolutiva del problema del Cauchy valida nell'interno di una circonferenza si passi alla classica formula del Poisson per

la risoluzione del problema del Dirichlet nel cerchio. In questa Nota l'Autore dà una nuova dimostrazione del risultato del Fantappiè e fa vedere come il procedimento da lui ideato si possa, con opportuni accorgimenti, applicare alla risoluzione del problema del Dirichlet in un campo ellittico.

L'Accademico ARMELLINI presenta la seguente Nota:

P. TEOFILATO - *La determinazione sperimentale del momento d'inerzia nei corpi elastici.*

La conoscenza dell'ellissoide d'inerzia di un corpo costituisce un problema di speciale importanza per lo studio e la previsione di alcuni fenomeni, come ad esempio quello dell'avvitamento dei velivoli.

Vari metodi sperimentali sono stati all'uopo immaginati, ma non tutti rispondenti alle desiderate esigenze di precisione, sia perchè le misure si fanno nell'aria e l'influenza di questa non viene opportunamente computata, sia perchè, volendo evitare grandiose attrezzature, quali si richiedono per l'esame dei corpi del peso di varie tonnellate, si fa ricorso a modelli che non rispecchiano esattamente la stessa distribuzione delle masse al vero.

In questa Nota l'Autore, dopo un rapido accenno ai vari metodi ideati, tra i quali uno da lui stesso trovato, espone ancora un nuovo metodo che è stato escogitato al fine di semplificare le grandi attrezzature sopra indicate; infine studia l'effetto che l'elasticità del materiale reca sulla valutazione del momento d'inerzia, in quanto siffatta valutazione viene ottenuta supponendo perfettamente rigido un corpo il quale, invece, fisicamente si presenta più o meno in uno stato di coazione elastica, in virtù del proprio peso e delle reazioni di sostegno.

L'Accademico GATTERER presenta a nome dell'Accademico URSPRUNG la seguente di lui Nota fatta in collaborazione del Prof. G. BLUM:

URSPRUNG u. BLUM - *Die osmotischen Zustandsgrößen des Sempervivum-Blattes.*

Über die maximale Saugkräfte, welche die Rosettenblätter von Sempervivum tectorum entwickeln können, liegen verschiedene Angaben vor. Während Ursprung und Blum mit ihrer Methode Saugkräfte der Zelle ( $Sz_n$ ) bis zu 40 Atm gefunden hatten, konnten die übrigen Autoren, die auf diesem Gebiete tätig waren, nur viel niedrigere Werte erhalten und glaubten daher die hohen Maxima Versuchsfehlern zuschreiben zu dürfen.

Die neuen Messungen erreichten nicht nur die früher gefundenen Werte, sondern sie überstiegen dieselben bei weitem, indem sie in Rosetten von Topfkulturen nach 37-wöchiger Trochenheit bis zu 100 Atm führten.

Die Zuverlässigkeit dieser Resultate wurde einer eingehenden Prüfung unterzogen. Dabei führten die verschiedenen Saugkräftmethoden (Querstreifen-, Längstreifen-, Hebel, Einzellmethode, wie auch die direkte Beobachtung der Dickenänderung) zu übereinstimmenden Resultaten, auch liess sich zeigen, dass die zu berücksichtigenden Fehlerquellen keine Störung verursachten. Ausserdem lieferten die Messungen der Saugkraft des Inhaltes ( $S_{i_n}$ ) und der Saugkraft bei Grenzplasmolyse ( $S_{i_g}$ ) Ergebnisse, die mit den  $S_{z_n}$  Werten harmonisierten. Damit hatte die Richtigkeit der angezweifelte hohen Saugkräfte auf verschiedenen, von einander unabhängigen Wegen ihre Bestätigung gefunden.

Dass von mehreren Autoren die hohen Maxima nicht erhalten worden waren, erklärt sich durch die Beschaffenheit des Untersuchungsmaterials, das sich nicht im richtigen Stadium der Wasserunterbilanz befunden hatte.

L'Accademico BOLDRINI presenta le seguenti Note:

P. MARTINOTTI - *Interpolazione e medie.*

I sostegni di equazioni normali, relativi a tutti i metodi di interpolazione, vengono ridotti ad uguaglianze fra le medie dei valori osservati e le medie dei valori calcolati.

Con il riferimento di queste medie ad opportune funzioni, si realizzano alcune semplificazioni sulla risoluzione dei sistemi stessi.

A. UGGÈ - *Di alcune proprietà dei momenti della curva delle probabilità e degli indici di normalità.*

In questa Nota l'Autore ricorda le proprietà dei momenti della funzione di probabilità ed indica come esse forniscano criteri per valutare la normalità di una distribuzione.

Il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico COLONNETTI:

G. COLONNETTI, *La statica delle cupole cerchiate.*

Con questa Nota l'Autore intende compiere un nuovo passo su la via, che persegue da tempo, verso l'uso sistematico degli stati di coazione nei sistemi iperstatici.

Da un punto di vista assolutamente generale il problema va posto nei termini seguenti:

dato un sistema iperstatico di grado  $k$  cioè tale che i singoli suoi stati di tensione in equilibrio con forze esterne date si possano riferire biunivocamente e linearmente ai singoli sistemi di valori di  $k$  parametri indipendenti (incognite iperstatiche), e supposto che ad esso venga impressa una coazione di ordine cioè tale che la si possa sempre caratterizzare biunivocamente e linearmente per mezzo di  $h$  parametri indipendenti (caratteristiche della coazione), è noto che si possono stabilire  $k$  equazioni lineari e non omogenee tra le  $k$  incognite iperstatiche e le  $h$  caratteristiche della coazione.

Se ne deduce che, assunti ad arbitrio i valori di  $h$  delle incognite iperstatiche — o di  $h$  funzioni lineari delle stesse — sono generalmente da considerarsi — come determinate in conseguenza tanto le altre  $k-h$  incognite iperstatiche come le  $h$  caratteristiche della coazione.

Ciò è quanto dire che, con una opportuna scelta dello stato di coazione, si potrà sempre far in modo che  $h$  parametri dello stato di tensione assumano valori arbitrariamente prescelti.

Il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico DAL PIAZ:

P. LEONARDI — *Sui risultati degli scavi sistematici eseguiti nel deposito pleistocenico di Quinzano presso Verona.*

In seguito alle pubblicazioni dei professori Graziosi e Battaglia i quali misero in evidenza e illustrarono la grande importanza del giacimento paleolitico di Quinzano nel Veronese, la Sovrintendenza delle Antichità delle Venezie ha fatto intraprendere una lunga e minuziosa campagna di scavi sistematici, che hanno fruttato una nuova e ricca serie di manufatti litici e resti di mammiferi fossili.

Nel lavoro che ho l'onore di presentare, il Prof. Leonardì dà notizia di questi nuovi scavi e descrive il ricco materiale paleontologico raccolto, fra il quale è particolarmente interessante un gruppo di utensili litici, che per i loro caratteri arcaici si rivelano appartenere ad un Musteriano molto antico, a cavallo fra il Paleolitico medio e il Paleolitico inferiore. Pure assai interessante è una bella serie di manufatti silicei che per la loro tecnica più perfezionata sono da riferire invece da un musteriano più recente, del tipo « La Quina ».

Nel complesso lo scavo di Quinzano ha portato un notevole contributo per la conoscenza del Paleolitico delle Venezie e in generale dell'alta Italia. Esso ha

permesso di precisare meglio i livelli occupati da due fra le più antiche industrie litiche riscontrate nel nostro Paese.

L'Accademico GEMELLI presenta la seguente Nota:

A. GEMELLI - *Il meccanismo dell'influenza dei movimenti della testa sulla localizzazione dei suoni.*

L'Autore descrive un complesso di ricerche compiute per determinare il meccanicismo della localizzazione dei suoni nello spazio e mediante la quale egli è giunto alla conclusione che non bastano nè le differenze di intensità, di fase o temporale con cui le stimolazioni acustiche giungono alle due orecchie. Occorrono, per giungere alla localizzazione, i movimenti della testa che furono dall'Autore registrati, e che appaiono come sequenze di piccoli, rapidi e successivi movimenti riferentisi allo « schema corporeo », che è, secondo l'Autore, l'elemento direttivo della localizzazione spaziale.

L'Accademico Giorgi presenta le seguenti Note:

A. CHIPELLINI - *Ancora sugli invarianti del sistema formato da due equazioni differenziali lineari del secondo ordine e su classi di sistemi riducibili a coefficienti costanti.*

Nella prima parte di questa Nota si stabilisce, senza preventivamente passare per la così detta forma ridotta alterna, mediante un procedimento facilmente generalizzabile, un semplice sistema completo di invarianti differenziali (relativi ed assoluti) per il sistema formato da due equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Inoltre per la prima volta, viene studiato il sistema formato da un'equazione lineare del secondo ordine e da una del primo e se ne dà il significato geometrico.

Nella seconda parte, servendosi dei risultati sopra stabiliti, dopo aver stabilita in generale la sostituzione atta ad eseguire la riduzione di un sistema in un altro a coefficienti costanti (quando ciò è possibile) si determina una classe ampia di tali sistemi (che quindi risultano integrabili elementarmente) che comprende come caso particolare i così detti sistemi di Fuchs di prima specie. Tale classe di sistemi è dall'Autore chiamata (in analogia a ciò che ha precedentemente fatto per il caso delle equazioni lineari) la classe dei pseudosistemi di Fuchs di prima specie.

### X. COLOMBO - *Sulle funzioni delle matrici.*

La definizione generale di funzione di una matrice è stata posta nel 1928 dal Giorgi. In seguito ai lavori del Giorgi sono apparse numerose ricerche sulle funzioni delle matrici fra le quali una del Fantappié sul calcolo delle stesse e nella quale l'Autore fa uso della sua teoria dei funzionali analitici, le cui formule tuttavia possono compendiarsi nelle note formule del Cartan; e le formule del Fantappié e del Cartan, equivalenti, generalmente, a quelle del Giorgi, possono di fatto agevolare in molti casi il calcolo delle funzioni. Quindi il Cipolla ha ha fattato un notevole contributo alla questione studiandone a fondo un caso particolare in un lavoro sulle matrici espressioni analitiche di un'altra.

Anche in altri lavori si è ricercata la forma esplicita della matrice funzione ed il problema è stato sufficientemente risolto per le matrici del secondo ordine in seguito ai lavori del Bottasso, Porcu-Tortrini e Martis in Biddau.

Nella presente Nota l'Autrice, che ha inteso svolgere analoghi studi per le matrici del terzo ordine di cui è ben nota l'importanza geometrica e meccanica, è partito dalle formule del Fantappié e connettendosi alle idee del Giorgi ha sviluppato un nuovo metodo atto a stabilire le espressioni proposte da quest'ultimo.

Il nuovo metodo consiste sostanzialmente nel calcolare il residuo, rispetto al punto all'infinito, in modo opportuno, ottenendo, benchè dedotte per tutt'altra via, le formule di Porcu-Tortrini per le matrici del secondo ordine e formule che si ritengono nuove per le matrici del terzo ordine.

Il metodo potrebbe poi estendersi a matrici di qualunque ordine, ma i calcoli sarebbero assai complicati.

### O. GARAVALDI - *Sulle proprietà cardinali dei sistemi ottici. Saggio di una trattazione sintetica.*

L'Autrice riprende lo studio delle proprietà cardinali dei sistemi di lenti, e dimostra come tutte queste proprietà possano dedursi dalla sola ipotesi che il sistema sia corretto da aberrazioni, e come i metodi sintetici della geometria proiettiva promettano di ricavare i risultati in modo indipendente dalla struttura dei sistemi e dalle leggi della rifrazione.

### G. PATERNA - *Formule risolutive per i problemi generali sulle reti di conduttori elettrici.*

Data una rete composta di un qualunque numero finito di conduttori chimici, si presenta il problema di calcolare le correnti nei singoli lati e le diffe-

renze di potenziale fra le singole coppie di nodi, quando la rete è sollecitata da forze elettromotrici date agenti lungo i lati, quando intensità di correnti date entrano in alcuni nodi, e quando altri nodi sono mantenuti da sorgenti esterne a potenziali obbligati. Ogni problema di questo tipo si può risolvere di volta in volta, scrivendo le equazioni di Kirchoff per ogni maglia e semplificando i calcoli, se si vuole, con la considerazione delle correnti circolanti (metodo di Maxwell). Partendo da questi fondamenti, interessa ricavare formule generali che diano senz'altro la soluzione per una rete di  $n$  nodi in forma algebrica.

Un primo esempio di formule di questo tipo si trova già in Maxwell, mentre altri Autori hanno esposto nuove formule, tra cui J. H. Jeans e G. Giorgi.

In questa Nota l'Autrice ha voluto riprendere gli studi sulla forma più generale. In questa ricerca interviene una certa matrice formata dalle conduttanze dei lati della rete, ed è da alcune uguaglianze e proprietà dei determinanti minori di questa matrice che si è tratto profitto per ottenere nella forma più semplice le formule risolutive.

L'Accademico LOMBARDI presenta la seguente Nota:

L. LABOCETTA - *Riduzione a forma simmetrica delle espressioni per le azioni gravitazionali ed elettriche.*

L'Autore, definendo allo stesso modo le unità di quantità di materia e di quantità di elettricità come le quantità di agente, che se una eguale quantità all'unità di distanza esercitano un'azione eguale all'unità di forza, ottiene come costante gravitazionale il quadro del rapporto fra la quantità di materia e la massa neutrone, e come costante dielettrica il quadro fra la carica e la massa dell'elettrone. Il rapporto delle sue costanti è la costante cosmica, ossia un numero puro; da ciò consegue che la quantità di materia è omogenea dimensionalmente con la quantità di elettricità.

L'Accademico SOMIGLIANA presenta la seguente Nota:

G. ASCOLI - *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali.*

Il Prof. GUIDO ASCOLI trova una nuova dimostrazione del teorema della media di Gauss per le funzioni armoniche, dimostrazione basata unicamente sulle proprietà dell'equazione di Laplace di essere lineare, e di essere invariante per sostituzioni lineari ortogonali. Questo fatto apre la via ad una generalizzazione

della formola di Gauss, poichè essa può essere estesa a tutte le equazioni che godono le due suddette proprietà.

Il Prof. Ascoli trova poi la forma generale di queste equazioni differenziali lineari ed invariantive per il gruppo delle rotazioni, e per esse estende il teorema di Gauss.

In base a questi concetti studia poi la serie di funzioni che godono di proprietà invariantive analoghe e dimostra che coincidono colle serie di funzioni sferiche o ipersferiche.

Il lavoro presenta un notevole interesse sia dal punto di vista dell'analisi che della Fisica matematica.

L'Accademico SEVERI presenta la seguente Nota:

F. PELLEGRINO - *Una condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di potenze abbia sulla circonferenza di convergenza un solo polo multiplo.*

Si dà una condizione necessaria e sufficiente per riconoscere dei coefficienti di una serie di potenze quando tale serie ha, sulla circonferenza di convergenza, un solo polo di molteplicità qualunque  $h$ , ritrovandosi, per  $h=1$ , una condizione già nota.

L'Accademico PENSA presenta le seguenti Note:

G. PALUMBI - *Contributo allo studio della innervazione delle anastomosi artero-venose ed al problema della esistenza di un parasimpatico spinale.*

L'Autore ha studiato i rapporti delle fibre nervose con le anastomosi artero-venose della membrana interdigitale della zampa dell'oca. Ha dimostrato fini particolari che permettono di ammettere la esistenza, in rapporto con tali organelli vascolari, di una duplice innervazione effettrice e recettrice per mezzo della quale sarebbe possibile, l'istituirsi di quei riflessi regolatori della circolazione che sono stati dimostrati dalla osservazione sperimentale.

Ha notato, in questo settore della innervazione periferica, la presenza di cellule nervose simpatiche le cui fibre nervose pregangliari non possono essere che di provenienza spinale toraco-lombare. Verrebbe così data la dimostrazione concreta dell'elemento finora in discussione che consente di far accettare la esistenza di un parasimpatico spinale e cioè la presenza di cellule nervose simpatiche periferiche omologhe a quelle del parasimpatico già noto ed indiscusso nella sua essenza: il mesencefalico, il rombencefalico ed il pelvico.



L. SABBIA - *Sulla innervazione sensitiva del palato della rana (Rana esculenta).*

L'Autore descrive la ricca innervazione del palato della rana; i fini plessi nervosi della sottomucosa, della lamina propria connettivale della mucosa e le espansioni terminali intraepiteliali.

Particolari degni di rilievo ha messo in evidenza, con fini metodi di tecnica, riguardo ai rapporti delle fibre nervose coi dischi terminali di Engelmenn-Merkel che l'Autore ritiene abbiano funzione gustativa e forse anche tattile.

In corrispondenza di questi organelli sensoriali le fibre nervose sensitive formano espansioni terminali a groviglio che hanno questo di caratteristico: di essere, ognuna di esse formata da più fibre nervose in parte midollate ed in parte ammidollate di varia provenienza; di essere collegate fra di loro da fibre di passaggio; di essere localizzate in parte nel connettivo della lamina propria della mucosa e in quello sottostante; in parte estese nell'epitelio.

Segnala la presenza di cellule nervose simpatiche intorno alle quali fibre nervose pregangliari formano apparati spiraliformi terminali molto fitti.

L'Accademico SILVESTRI presenta la seguente Nota:

F. SILVESTRI - *Nuove osservazioni sulla Mengenilla parvula Silv. (Insecta Strepsiptera).*

L'Autore, che aveva già descritto questa specie su esemplari della Sicilia, ora ne accerta il ciclo avendo provato che l'ospitatore è il Tisanuro Lepismide *Ctenolepisma Michaelsoni* Escherich, specie conosciuta finora solo dell'Africa settentrionale.

Dà anche notizie sul periodo della nascita delle larve, della fuoriuscita dal parassita, della comparsa dei maschi e della femmina adulta.

L'Accademico TONIOLO fa una comunicazione sopra il volume ora pubblicato dal Dr. MELICCHIA sulle *Variazioni climatiche dell'Italia Centrale e loro rapporto col regime del Tevere*, che presenta in omaggio, ponendo in evidenza le analogie osservate nel regime di questo fiume rispetto a quelle del Po e dell'Adige, che presentano tutte una accentuata depressione attorno alla fine del secolo XIX, e coglie l'occasione per richiamare l'attenzione su questo intervallo di tempo, che si mostra particolarmente caratteristico anche su altri fenomeni geografici della penisola Italiana, quali i limiti delle nevi perpetue, le variazioni delle spiagge sottili e i limiti altimetrici della vegetazione.

L'Accademico VERGELLI presenta la seguente Nota:

G. D. MATTEOLI - *Sulla trasmissione del calore tra parete e corrente turbolenta nei tubi circolari e leggi di resistenza non isoterma.*

È un problema di meccanica-fisica non ancora risolto razionalmente. Partendo dalla propria teoria sui regimi turbolenti, completata nel presente lavoro, l'Autore deduce una formola di validità molto generale, che consente il calcolo del riscaldamento, o del raffreddamento, qualunque sia il parametro caratteristico  $\sigma$  (numero di Prandtl).

Sono riportate le verifiche sperimentali e sono dati esempi di calcolo numerico per facilitare l'utilizzazione delle nuove formole.

L'Accademico STEIN presenta in omaggio la prima copia della serie nona dell'Atlante delle Stelle Variabili (A. S. V.) or'ora venuta alla luce, insieme con i due numeri delle « Ricerche Astronomiche » riferentisi ad essa.

Come le serie precedenti, la nona si compone di due parti: 1° le carte, 42 in numero, con 46 stelle variabili; 2° il catalogo della grandezza delle stelle di confronto, in numero di 3280, cioè in media di quasi 80 stelle per carta. Con questo numero di stelle, affatto soverchiamente grande per il fine primario, si intendeva di dare insieme un contributo di qualche importanza alla fotometria stellare.

La nuova serie si distingue dalle anteriori sotto duplice rispetto: 1° le grandezze di tutte le stelle di confronto furono determinate fotovisualmente; a questo fine la regione della variabile e la regione circompolare furono fotografate, l'una accanto dell'altra, sulla medesima lastra con filtro giallo, per mezzo di un portastre a slitta: le grandezze furono misurate con il microfotometro termo-elettrico e calibrate con la sequenza polare internazionale; 2° invece delle carte diseguate e litografate delle serie precedenti, che contengono le sole stelle di confronto, nella specola stessa si sono fatte delle riproduzioni ingrandite dei clichés fotovisuali, ottenuti al grande astrografo. In tal modo la regione celeste è rappresentata sulla carta, come si presenta all'occhio dell'osservatore, cosicchè l'identificazione delle stelle si fa a prima vista. Forse questo prodotto pienamente « autarchico » della Specola Vaticana è il primo saggio di un'atlante di carte celesti fotovisuali.

Delle 46 stelle variabili di questa serie 29 furono già prescelti dal P. Hagen; quindi si può dire *in un certo senso*, che con la nona serie il suo grande lavoro, iniziato quasi 50 anni fa, fu condotto a fine. Un breve sguardo retrospettivo su

il primordio e lo sviluppo dell'A. S. V. è dato nel n. 3 delle « Ricerche Astronomiche », che accompagna la nuova serie.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente ricorda che occorre provvedere per il nuovo Premio Pio XI. Le discipline non ancora considerate sono chimica, fisica e matematica.

L'Accademico RONDONI ritiene che sarebbe conveniente assegnare il Premio alla chimica, e dello stesso parere è l'Accademico SOMIGLIANA; vari Accademici parteciparono alla discussione.

L'Accademico SEVERI propone di ricorrere più semplicemente al metodo della sorte.

La proposta è accettata ed il nuovo Premio Pio XI risulta da assegnarsi per le scienze fisiche.

Si passa quindi al quinto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente ricorda che sono attualmente vacanti il seggio 5. (BIANCHI) - Italia - Astronomia; il Seggio 10. (BORTAZZI) - Italia - Biologia; il Seggio 11. (BRANLY) - Francia - Fisica; il Seggio 32. (GREGOIRE) - Belgio - Biologia; il Seggio 33. (GUIDI) - Italia - Costruzioni; il Seggio 39. (LEVI-CIVITA) - Italia - Matematica; il Seggio 48. (NOYONS) - Olanda - Biologia; il Seggio 53. (PICARD) - Francia - Matematica; e che purtroppo data l'attuale impossibilità, in periodo di guerra, di far votare tutti gli Accademici non c'è altro mezzo che servirsi dell'art. degli Statuti e dell'art. 9 del Regolamento.

Il Presidente desidera però conoscere il parere degli Accademici presenti ed avere con essi una consultazione in proposito. Data la delicatezza della questione crede opportuno trattare la cosa in seduta segreta da tenersi subito dopo.

La seduta pubblica viene tolta alle ore 17.

RESOCONTO  
DELLA TERZA TORNATA ORDINARIA  
DEL VI ANNO ACCADEMICO

(Sabato 6 giugno 1942)

Presiede S. E. il Rev.mo P. AGOSTINO GEMELLI, O. F. M.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELINI, BONINO, BOLDRINI, QUAGLIARIELLO, CROCCO, DAINELLI, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, DE BLASI, LEPRI, TONELLI, LOMBARDI, SOMIGLIANA, NOBILE, PANETTI, SEVERI, PISTOLESI, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VALLAURI, VERCCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della Seconda Tornata del VI Anno Accademico. 2) Comunicazioni della Presidenza. 3) Commemorazione dell'Accademico Noyons. 4) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 5) Varia.

La Tornata è aperta alle 16,15.<sup>2</sup>

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno:

Il Presidente GEMELLI comunica che i giorni 2 marzo, anniversario dell'Elezione; 13 maggio, Giubileo episcopale; 2 giugno, festa di S. Eugenio I Papa, onomastico del S. Padre, l'Accademia ha umiliato all'Augusto Pontefice telegrammi di fervido e filiale augurio al quale il S. Padre si è degnato rispondere a mezzo del Suo Cardinale Segretario di Stato.

Il Cancelliere dà lettura dei documenti relativi.

(Telegramma)

2 marzo 1942.

*Sua Santità Pio XII — Città del Vaticano. — Odierna faustissima duplice ricorrenza umilio Augusto Trono Vostra Santità filiale esultanza profonda devozione Accademici Pontifici di ogni nazione con vivo sentimento che umile collaborazione nostri pacifici studi sodisfi voti Santità Vostra precludendo realizzazione paterni disegni pace giustizia mondo. — Gemelli, Presidente.*

(Telegramma)

3 marzo 1942

*Sua Eccellenza Gemelli Presidente Pontificia Accademia delle Scienze — Città del Vaticano. — Santo Padre grato devoti auguri Eccellenza Vostra invia Accademici Pontifici e loro famiglie implorata Benedizione Apostolica auspicio celesti grazie. — Cardinale Maglione.*

(Telegramma)

13 maggio 1942.

*Sua Santità Pio XII — Città del Vaticano. — Accademici Pontifici sparsi ogni parte mondo umiliano Trono Augusto Vostra Santità per faustissima ricorrenza giubilare fervidissimi voti filiale devozione e inalterata volontà poter con loro studi coadiuvare Vostro operoso desiderio pace et umilmente servire Vostro verace magistero. — Agostino Gemelli, Presidente.*

(Telegramma)

*Sua Eccellenza Padre Agostino Gemelli Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano. — Sua Santità vivamente gradito omaggio giubilare Accademia Pontificia esprimente chiara coscienza loro alla funzione rinnova voti felice conseguimento nobili fini prefissi illustre consesso e benedice di cuore. — Cardinale Maglione.*

(Telegramma)

2 giugno 1942.

*Sanctissimo Domino Nostro Pio Papa XII — Città del Vaticano. — Sanctitas Tua Faustissima hac die honorum Academicorum coetus omen libenti animo suscipere dignetur. — Augustinus Gemelli Pontificiae Academiae Scientiarum Praeses.*

(Telegramma)

5 giugno 1942.

*Sua Eccellenza Padre Agostino Gemelli Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano. — Sua Santità particolarmente gradito omaggio augurale rivolto per ricorrenza onomastica da Pontificia Accademia delle Scienze risponde delicato pensiero con effusa Benedizione Apostolica. — Cardinale Maglione.*

Il Presidente GEMELLI comunica che il Santo Padre ha nominato Accademico Pontificio al Seggio N. 68 in sostituzione del defunto Accademico Vito Volterra, il Prof. ANTONIO CARDOSO FONTES, direttore dell'Istituto Oswaldo Cruz in Rio de Janeiro.

Il Cancelliere dà lettura del venerato dispaccio N. 40541, in data 25 agosto 1941, a firma del Cardinale Segretario di Stato.

Il Presidente GEMELLI comunica che a seguito del parere favorevole degli Accademici presenti all'ultima Tornata, avendo umiliato al Santo Padre, a norma del secondo comma dell'art. IV degli Statuti e dell'art. 9 del Regolamento per la nomina di Accademici, la successione ai Seggi N. 5, N. 10, N. 32, N. 33, N. 34 e N. 53 resisi vacanti per la morte degli Accademici Bianchi, Bottazzi, Gregoire, Guidi, Levi-Civita e Picard, il Cardinale Segretario di Stato di Sua Santità ha comunicato le nuove nomine.

Il Cancelliere dà lettura del venerato dispaccio N. 47632 che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Luigi Maglione, Segretario di Stato di Sua Santità, ha spedito in data 23 maggio 1942 per comunicare le seguenti Sovrane decisioni del Santo Padre:

*La Santità di Nostro Signore Pio Papa XII si è benignamente degnata di nominare Accademici Pontifici gl'Ill.mi Signori Professori Giovanni Battista Bonino, Ordinario di Chimica fisica nell'Università di Bologna, Gaetano Quagliariello, Ordinario di Chimica biologica nell'Università di Napoli, Cornelle Heymans, Ordinario di Farmacologia nell'Università di Gand, Dante De Blasi, Ordinario di Igiene nell'Università di Roma, Leonida Tonelli, Ordinario di Analisi matematica nell'Università di Roma, José Garcia Sineriz, Vice-Presidente del Consiglio superiore di Investigazioni scientifiche a Madrid.*

Il Presidente GEMELLI interpretando i sentimenti dei Colleghi tutti si rallegra con i nuovi Accademici Pontifici BONINO, QUAGLIARIELLO, DE BLASI e TONELLI che partecipano oggi per la prima volta alle Tornate, presenta le migliori felicitazioni per l'altissimo riconoscimento dei loro meriti scientifici e dà il benvenuto da parte del Corpo Accademico e suo personale.

Il Cancelliere procede quindi alla distribuzione delle insegne ai nuovi Accademici.

I nuovi Accademici presenti ringraziano ed esprimono sentimenti di profonda sodisfazione e di devota gratitudine al Sommo Pontefice.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per la commemorazione del defunto Accademico A. K. M. Noyons.

L'Accademico GEMELLI pronuncia un discorso commemorativo che nel suo testo integrale viene pubblicato nel presente volume degli «Acta».

Vivi applausi accolgono la fine della commemorazione.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico AMALDI presenta le seguenti Note:

G. ZAPPA - *Sui gruppi quasi-abeliani con elementi aperiodici.*

L'Autore in un suo lavoro precedentemente presentato alla Pontificia Accademia delle Scienze ha chiamato *quasi-abeliani* quei gruppi, in cui due sottogruppi quali si vogliono sono fra loro permutabili e ha determinato tutti i tipi

di gruppi quasi-abeliani, che si possono generare per mezzo di due loro elementi. In questa Nota, proseguendo lo studio sistematico di questa classe di gruppi, determina tutti i tipi di gruppi quasi-abeliani, che contengono elementi aperiodici e sono generabili con un numero finito di loro elementi e preannunzia un'ulteriore ricerca diretta a classificare tutti i gruppi quasi-abeliani, che sono ancora generabili per mezzo di un numero finite di elementi, ma non contengono elementi aperiodici.

E. FELDHEIM - *Sul prodotto di due polinomi di Laguerre.*

L'Autore, riprendendo e generalizzando risultati precedentemente ottenuti da lui stesso e da altri ricercatori, stabilisce per il prodotto di due polinomi del Laguerre nuovi sviluppi in serie di polinomi della stessa classe e successivamente deduce formule d'inversione degli sviluppi così assegnati.

L'Accademico ARMELLINI presenta le seguenti Note :

C. CATTANEO - *Attrazione newtoniana ritardata.*

In questa nota l'Autore, dopo un esame storico riassuntivo delle varie ricerche compiute in passato nel campo dell'Astronomia Classica sopra una possibile velocità di propagazione della gravità, pone due postulati di grande semplicità. E da questi passa ad una formulazione della legge di gravitazione che viene ad escludere (in accordo alle idee della fisica moderna) il carattere deterministico presentando piuttosto quello di ereditarietà.

Mostra poi che approssimatamente, trascurando termini superiori, questa legge si riduce a quella già studiata da Armellini e da lui applicata all'Astronomia in nuove ricerche di carattere cosmogonico.

G. VACCA - *Primo racconto della presentazione di un cannocchiale olandese al Principe Maurizio di Nassau nel settembre 1608 e le prime osservazioni celesti.*

Il racconto più particolareggiato noto agli storici della scienza della presentazione di un cannocchiale costruito da un occhialaio olandese al Principe Maurizio di Nassau nel settembre 1608, è quello riferito da Gilberto Govi nel 1875 e successivamente da Antonio Favaro nel 1883. Esso risale al *Mercure François* nel 1611.



Recentemente però il prof. Paul Pelliot ripubblicò un opuscolo, senza luogo di stampa di cui non si conosce altra copia, intitolato: *Ambassades du Roy de Siam envoyé à l'Excellence du Prince Maurice, arriué à la Haye le 10 Septemb. 1608. L'an de grace 1608.*

È interessante per la storia del telescopio il secondo paragrafo, che non ha alcuna relazione con quanto precede e che è certamente la fonte a cui attinse il *Mercurio François*.

Questo racconto, più completo di quello del *Mercurio François*, permette di fissare con precisione la data della presentazione e, rifacendosi agli *Avvisi Urbani*, che si conservano manoscritti nella Biblioteca Vaticana, si può sicuramente inferire che il marchese Spinola e il principe Enrico salirono sulla torre dell'Aia nell'ultima decade di settembre del 1608 e che per conseguenza l'opuscolo scoperto dal Pelliot deve essere stato pubblicato pochi giorni dopo.

Il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del titolo e riassunto della seguente Nota presentata dall'Accademico COLONNETTI:

G. COLONNETTI - *Sul problema della flessione composta in regime elasto plastico.*

Facendo seguito a precedenti suoi saggi su lo stesso argomento, l'Autore tratta qui il problema della flessione composta, e ricerca quali relazioni esistano fra le componenti  $\epsilon_z$  e le componenti  $\gamma_{yz}$  della deformazione plastica.

Assodato come la natura di queste relazioni potrebbe giustificare un ritardo nella comparsa dei fenomeni plastici, l'Autore segnala la opportunità di ricerche sperimentali intese ad assodare se tale ritardo sia in qualche modo in relazione con la presenza di sforzi taglianti.

L'Accademico CROCCO presenta la seguente Nota:

G. A. CROCCO - *La legge di barra nella gran volta dei motovelivoli.*

L'Autore prosegue in questa seconda nota il suo studio sulla equazione generale della gran volta, pubblicata nella nota precedente presentata nella seduta del 30 novembre 1941.

Dimostra come la *legge di manovra* possa ricavarsi con procedimento inverso dopo aver prestabilito la forma della traiettoria. Così ricerca la legge di manovra corrispondente a gran volta circolare e riporta due esempi numerici di questo particolare tipo di evoluzione.

Poichè la legge di manovra è ottenuta dal pilota agendo sulla barra che comanda l'equilibratore, e quindi determina la rotazione del velivolo, in questa seconda nota vengono indagate le relazioni esistenti tra quella che è stata chiamata legge di manovra, riguardante gli elementi della evoluzione, e quella che si può chiamare *legge di barra*, riguardante gli elementi della rotazione.

Vengono pertanto introdotti e richiamati alcuni concetti aerodinamici semplificativi come quello di angolo cinetico e di angolo equivalente; e dopo aver prospettato le difficoltà analitiche di una trattazione esatta della legge di barra, si determinano due particolari espressioni approssimate di quest'ultima, una partendo dalla legge di manovra della volta isoclima; l'altra da quella della volta isoprotata.

L'Autore mostra infine le difficoltà matematiche che sorgerebbero se si volesse seguire il procedimento inverso; cioè quello di determinare la legge di manovra partendo dalla legge di barra e accenna in proposito ai due casi più semplici di quest'ultima cioè quella, geometrica, a *spostamento costante* oppure quella, dinamica, a *reazione costante*.

L'Accademico DAINELLI presenta la seguente Nota:

P. RODOLICO e R. PIERUCCINI - *Rocce filoniane del Tigris*.

Il prof. Merla ed il dott. Minucci nel corso del rilevamento geologico del Tigris da loro eseguito nel 1936, distinsero dalle rocce vulcaniche effusive ivi esistenti, alcuni tipi con giacitura intrusiva o filoniana più o meno spiccata. A queste rocce - particolarmente notevoli, non essendo state ancora bene individuate, nè dal lato geologico, nè da quello petrografico - appartengono undici campioni raccolti dal prof. Merla e descritti nella presente Nota.

Due campioni sono costituiti da una medesima roccia tinguaitica; altri otto da rocce di tipo gabbrico e basaltico, le quali formano un gruppo abbastanza omogeneo sotto l'aspetto mineralogico e chimico, pur mostrando diversità notevoli nei riguardi della struttura. Vi è inoltre una roccia basica quanto mai singolare essendo costituita dall'associazione di plagioclasico basico, di augite e di ortose, quest'ultimo in quantità tale da farlo ritenere costituente essenziale. Si ritiene che questa roccia, indicata come *gabbro ortoclasico*, costituisca una differenziazione di altra di tipo gabbrico normale che si trova nel medesimo luogo.

Dalle ricerche petrografiche, e specialmente dalla discussione delle analisi chimiche, risulta che le rocce di tipo gabbrico e basaltico appartengono tutte alla serie vulcanica più antica esistente nella regione, la *trappica o stratoide*. Inoltre, tenuto conto soprattutto della struttura presentata da queste rocce si ritiene accer-

tata la loro natura filoniana, anche in alcuni casi nei quali le osservazioni geologiche non apparivano sufficienti per decidere la cosa.

Quanto alla roccia tinguaitica appare sicuro il riferimento alla serie più recente delle rocce vulcaniche della regione, quella di Adua-Axum, ma i caratteri strutturali non sembrano sufficienti per confermare l'asserita natura filoniana, in mancanza di precise osservazioni sul terreno.

L'Accademico GEMELLI presenta le seguenti Note :

R. GALBAZZI-LISI - *Sul sintomo cerebellare dell'adiadococinesia.*

L'Autore, criticando l'interpretazione che della adiadococinesia diedero fin'ora gli Autori (fra cui A. Thomas, Gordon, Holmes, Babinski) interpretazione da lui ritenuta parziale e non esauriente, e dopo aver studiate le varie forme cerebellari ed extrapiramidali in cui l'adiadococinesia è sintomo presente, prende come punto di partenza la dottrina sulle funzioni del cervelletto di A. Luciani e dimostra come l'adiadococinesia sia un fenomeno di origine squisitamente cerebellare, determinato da una fondamentale distonia e nelle cui componenti entrano la bradicinesia, la ipermetria, l'aritmocinesia e l'asinergia; cosicchè esso risulta essere un fenomeno tutt'altro che semplice e dovuto soprattutto a svincolo dei gruppi muscolari dal controllo cerebellare e a caduta di essi l'assoluto dominio di forze tonigene non più regolate dal freno del cervelletto.

A. GEMELLI e C. TRABATTONI - *Un elettroencefalografo a penna scrivente a inchiostro per uso clinico.*

Gli Autori descrivono un elettroencefalografo per registrare con penna ad inchiostro le variazioni di potenziale della corteccia cerebrale. L'istrumento è stato ideato per esame clinico, ossia per permettere la esplorazione contemporanea di vari punti del cranio e di eseguire la registrazione anche per parecchie ore. Gli Autori danno le caratteristiche costruttive dello strumento le quali dimostrano la fedeltà delle registrazioni che si possono con esso ottenere.

L'Accademico GIORGI presenta le seguenti Note :

G. S. COEN - *Catalogo dei Gasteropodi Polmonati della mia collezione.*

Da un cinquantennio non si era pubblicato alcun catalogo generale di specie di molluschi; e gli studiosi erano costretti a ricorrere ad elenchi non più con-

formi alla classificazione e alla nomenclatura moderna. L'ing. Coen è noto in tutto il mondo come una grande autorità nella scienza malacologica; e la sua collezione, è ben apprezzata per la sua ricchezza e per l'accuratezza con cui è classificata: ivi è rappresentato il 60% dei generi di molluschi viventi. Ho potuto indurre l'illustre Autore di quella raccolta a redigere, in forma adatta per la pubblicazione, il catalogo completo di quanto la collezione contiene. La divulgazione del medesimo sarà di valore inestimabile per gli studiosi. Con la presente memoria viene portato alla stampa tutto quanto concerne la sottoclasse dei Polmonati.

G. APRILE - *Funzioni generatrici, generalizzate e loro applicazione ai metodi grafico-numericì di valutazione nel calcolo operativo funzionale.*

Si indicano alcune generalizzazioni del concetto di funzione  $f(\Delta)$ , caratterizzando cioè l'operatore stesso mediante la sua applicazione ad una qualunque delle funzioni  $j_n(t) = \Delta^n Fu(t)$  del Giorgi, oppure a funzioni del tipo  $e^{-\lambda t} \cdot 1(t)$ . Particolare interesse pratico, per l'impiego in metodi grafico-numericì di valutazione delle espressioni simboliche presenta il caso  $n = -2$ , del quale viene mostrato un semplice esempio.

S. MINERTI - *Sulla normalità delle famiglie di funzioni analitiche.*

Vi si presenta un nuovo criterio di normalità per famiglie di funzioni analitiche; è un criterio di carattere locale che riduce da due ad uno i valori eccezionali che la famiglia deve possedere, per esser normale, col famoso criterio di Montel (detto per l'appunto criterio dei due valori eccezionali finiti). — L'unico valore eccezionale che loco per loco la famiglia deve qui possedere può inoltre variare da punto a punto, sotto la condizione però, considerato come funzione del posto, di costituire una funzione localmente univalente.

S. MINERTI - *Qualche nuova proposizione nella teoria delle funzioni.*

Si presentano varie nuove proposizioni e teoremi nella teoria delle funzioni; uno di essi dà una condizione sufficiente affinché una funzione olomorfa in un cerchio  $C$  (contorno incluso) non assuma ivi valori puramente imaginari o nulli, ovvero puramente reali o nulli, come anche una condizione necessaria affinché l'equazione  $f(z) = 0$  possa ivi ammetter qualche radice.

Un altro porge, in certe circostanze, una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia l'interno di un campo  $C$ , funzione eccezionale.

Varie altre proposizioni completano il lavoro.

L'Accademico LOMBARDI presenta la seguente Nota:

O. BARBIER - *Attuazione di un metodo per rivelare immagini ultracustiche.*

L'Autore accenna, nella premessa, all'estensione che può avere il concetto di ottica a quei fenomeni i quali, pur non avendo stretta attinenza con la luce, soddisfano alle medesime leggi della propagazione dei raggi luminosi nei mezzi rifrangenti.

Poichè in acustica si possono attuare per mezzo degli ultrasuoni esperimenti di acustica geometrica analoghi a quelli di ottica geometrica, è possibile ottenere vero e proprie immagini acustiche. Per l'osservazione di esse è però necessario provvedere alla loro conversione in immagini ottiche nel senso ordinario.

Nel dispositivo sperimentale, sul quale si riferisce, uno specchio concavo fornisce l'immagine ultracustica di un oggetto colpito da un fascio di ultrasuoni. Per la conversione dell'immagine acustica questa viene esplorata per successive linee orizzontali da un quarzo piezoelettrico mobile, la cui superficie attiva viene limitata con uno schermo, portante un foro circolare di diametro eguale allo spessore della riga di scansione.

Le tensioni ricavate alle armature del quarzo, dopo amplificazione, comandano un dispositivo modulatore di una sorgente luminosa. Il fascetto di luce così modulato, avente dimensioni corrispondenti a quelle del foro analizzatore, è quindi proiettato su di una lastra fotografica, solidale con il sostegno del quarzo ricevitore. L'immagine acustica dell'oggetto viene in tal modo registrata sulla lastra fotosensibile.

Si riportano alcune fotografie di immagini ottenute col procedimento sopra descritto.

L'Accademico SOMIGLIANA presenta la seguente Nota:

G. LORIA - *La vita scientifica di Cristiano Huygens, quale si desume dal suo carteggio.*

Uno dei più interessanti problemi offerti dalla storia delle idee consiste nel seguire l'evoluzione del pensiero dei più eminenti fra coloro che contribuirono alla costituzione dell'odierno patrimonio scientifico. È un problema arduo che può risolversi soltanto in casi assai rari per la mancanza di dati sicuri. In questa situa-

zione privilegiata si trova uno degli astri di prima grandezza che splendorono durante il secolo XVII, Cristiano Huygens, grazie alla pubblicazione dei venti volumi delle sue *Oeuvres complètes*, di cui i primi dieci comprendono circa 3000 lettere scritte da lui od a lui dirette o che in qualche misura a lui si riferiscono. L'Autore della presente Memoria ne ha tentato lo studio e così ne trasse gli elementi per una biografia del sommo Olandese. Le pagine che la costituiscono abitano il lettore a rendersi conto come Huygens, dopo una promettente giovinezza, abbia compiuto scoperte di primo ordine che gli consentirono di poter esser considerato come degno successore di Galileo e di Cartesio, e come ricercatore che ha spianato la via, che condusse Newton e Leibniz all'immortalità. Il contributo da lui portato alla conoscenza dell'anello di Saturno, alla costruzione degli orologi a pendolo, la scoperta di alcune leggi fondamentali della meccanica e di alcuni principi del calcolo infinitesimale gli assicurano una gloria imperitura.

L'Accademico NOBILE presenta la seguente Nota:

U. NOBILE - *Nuovi metodi grafici per il calcolo delle caratteristiche di volo di un aeroplano.*

In questa nota, dopo aver accennato a taluni ben noti metodi grafici per il calcolo delle potenze motrici di un aeroplano, si espone un nuovo metodo che rispetto ai precedenti offre, nelle applicazioni pratiche, notevoli vantaggi. Questo nuovo tipo di diagrammi, oltrechè utili nella determinazione degli elementi caratteristici di volo di un aeroplano, può riuscire particolarmente utile anche negli studi preliminari di un nuovo progetto.

L'Accademico SEVERI presenta le seguenti Note:

G. APRILE - *Il Teorema di Bezout-Severi ed i sistemi algebrici  $\infty^d$  di  $S_k$  dello  $S_r$ .*

In questo lavoro l'Autore determina, secondo i concetti e la teoria di Severi, la base minima per la totalità dei sistemi algebrici di data dimensione costituiti da spazi lineari  $S_k$  entro un  $S_r$ .

E. MARTINELLI - *Sull'immagine proiettiva di equivalenza elementare sopra una varietà algebrica.*

Si determina l'immagine proiettiva del sistema in discorso entro la varietà di Segre, in cui si può presentare il prodotto dei sistemi lineari che danno per intersezione il considerato sistema di equivalenza.

M. TOGNETTI - *Sul gruppo di cuspidi delle curve cuspidate di una rete.*

Si esprime il gruppo  $Q$  delle cuspidi delle curve cuspidate di una rete, appartenente ad un sistema lineare triplamente infinito, per mezzo di un gruppo (canonico) di punti della curva  $H$  luogo delle cuspidi delle curve cuspidate del sistema e di gruppi delle serie d'equivalenza invarianti e covarianti fondamentali.

L'Accademico SILVESTRI presenta la seguente Nota:

F. SILVESTRI, *Tisanuri (Insecta) della Cina continentale.*

In questa Nota l'Autore riunisce le poche notizie che si hanno finora sui Tisanuri della Cina e descrive illustrandole con figure 4 specie da lui raccolte. Aggiunge qualche commento sui rapporti di origine di tali insetti con quelli d'Europa e d'America.

L'Accademico DOM ALBAREDA O. S. B. presenta in omaggio: *I due primi registri di prestito della Biblioteca Apostolica Vaticana (Codici Vaticani latini 3964-3966)* di recente pubblicati in fototipia e in trascrizione con note e indici di Maria Bertola a cura della Biblioteca Apostolica Vaticana, facendo la seguente comunicazione:

I due primi registri di prestito della Biblioteca Apostolica Vaticana al tempo del Platina contengono degli autografi delle principali figure degli umanisti che prendevano i libri in prestito lasciandone la ricevuta. Questi autografi sono ora pubblicati in un'accurata trascrizione, con una precisa relazione e con la riproduzione fototipografica dei medesimi, seguita da indici analitici e tipografici. È questa un'opera di grande valore per la storia della Biblioteca Apostolica e per la storia di tutto l'umanesimo. Fa piacere vedere pubblicata quest'opera che è una prova vivente del contributo dato dalla Santa Sede agli studi, venendo pubblicata sotto il Pontificato di Pio XII in questi tempi travagliati, confermando la tradizione del favore sempre concesso dai Pontefici alle scienze.

L'Accademico P. GATTERER S. I. fa una comunicazione dal titolo: *Die Anregung reiner Bandenemission durch die Kohleflamme*, nella quale propone un nuovo metodo per accertare gli spettri molecolari mediante la fiamma del carbonio.

Die kurze Mitteilung, die ich der hohen Akademie vorlegen möchte, betrifft ein neues Verfahren, reine Bandenemission von Molekülen auf thermischen Wege anzuregen.

Während die Linienspektren der meisten chemischen Elemente schon weitgehend erforscht sind, gilt das nicht im selben Masse für die Bandenspektren. Besonders das Gebiet der Emissionsbanden weist noch beträchtliche Lücken auf. Der Grund hiefür liegt z. T. wohl darin, dass die charakteristische Bandenmission vieler Moleküle nicht so leicht und bequem zu erhalten ist wie die Linienmission der Atomspektren. Zwar treten bei vielen Anregungsarten neben der Atomlinien auch Banden der Elementarstoffe bzw. deren Verbindungen auf, doch sind diese Banden häufig verdeckt und gleichsam erdrückt von der Fülle der Atomlinien, sodass ihre Messung und Beobachtung nicht selten mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist.

Da die Anregungspotentiale der Bandenemission gewöhnlich tief liegen, verwendet man zur Bandenanregung entsprechend sanft wirkende Energiequellen wie Flammen verschiedener Temperatur, Floreszanregung durch Bestrahlung mit kurzwelligem Licht oder langsamer Kathodenstrahlung udgl. Alle diese Anregungen liefern für gewöhnlich lichtschwache Spektren, die auch bei Anwendung von lichtstarker Optik manchmal bis zu mehreren Stunden Belichtungszeit erfordern, um ein gut durchgezeichnetes Spektrogramm zu erhalten. Erhöht man die Anregungsenergie, um ein helleres Spektrum zu bekommen z. B. im elektrischen Lichtbogen, so erreicht man in vielen Fällen die gewünschte Intensitätszunahme, muss aber gleichzeitig eine mehr oder weniger starke Zersetzung der im Bogen verdampfenden Verbindungen in Kauf nehmen, was zu einem unerwünschten Gemenge von Banden, Atomlinien und kontinuierlichen Gebieten führt, wenn nicht in einzelnen Fällen die Bandenemission durch Eintritt der wölligen Dissoziation überhaupt verschwindet. Ähnliches gilt auch für die Anregung der Spektren im elektrischen Ofen. Es fehlt also offenbar noch an einer bequemen, leicht dosierbaren Anregungsmethode, die lichtstärke und zugleich reine Bandenspektren zu liefern vermag.

Durch systematische Weiterführung der Versuche zur Erzeugung spektralreiner Kohle wurde im Astrophysikalischen Laboratorium der Vatikanischen Sternwarte ein neues thermisches Anregungsverfahren ausgearbeitet, das den oben gestellten Forderung weitgehend entspricht. Es sei im folgenden kurz beschrieben.

Ein kleines Kohlestäbchen (Länge 60 mm, 5 mm) wird in massive Graphitklemmen horizontal eingespannt und als Widerstand geschaltet durch einen Strom von cca 300 Ampere 5 bis 10 Sekunden gereinigt. Nach dem Erkalten wird es mit einigen Tropfen der Probelösung getränkt und getrocknet. Bei einer neuen



Belastung der Kohle mit 200-300 Ampere verdampft das Salz und über dem weissglühenden Stäbchen erscheint eine intensiv leuchtende Flamme — wir wollen sie kurz als *Kohleflamme* bezeichnen — deren Analyse die leicht anregbaren Spektren der Moleküle bzw. der Atome der Probe liefert. Da die Stärke der Anregung mit der Entfernung vom oberen Rand der Kohle abnimmt, finden sich in der direkt anliegenden Dampfschicht gewöhnlich Banden um leicht anregbare Atomlinien gemischt, in den höher gelegenen Schichten reicht die Anregung nur mehr für die Bandenemission, welche sich mitunter bis zu Höhen vom 10 mm und mehr über der wagrechten Kohle erstreckt. Dieser Teil der Flamme gelangt nun auf dem Spalt des Spektrographen zur Abbildung. Das Bild der horizontalen Kohle wird durch geeignetes Spiegelsystem um 90° gedreht und kommt so neben ihm und parallel zu ihm zu stehen, während das Flammenbild in horizontaler Richtung über den Spalt hinwegstreicht. Wenn man die Stromstärke richtig bemisst und die günstige Schicht der Flamme zur Erzeugung des Spektrums auswählt, erhält man reine Bandenemission ohne störende Atomlinien.

Diese *Methode der Kohleflamme* hat sich schon in Hunderten von Aufnahmen bewährt. Z. B. wurden nach diesem Verfahren die Oxydspektren sämtlicher seltener Erden erhalten; einige Beispiele seien zur Begutachtung vorgelegt.

Die Methode ist keine Universalmethode, macht auch die anderen bisher bekannten Anregungsmethoden nicht überflüssig, aber sie besitzt ein weites Anwendungsgebiet für alle Fälle, wo rein thermische Anregung in Temperaturbereich von etwa 1000 bis 3000° gewünscht wird. In mehr als einer Beziehung unterscheidet sich das Verfahren vorteilhaft von den bisher bekannten Anregungsmethoden: Gasflamme, Lichtbogen und elektrischer Kohlerohröfen. Es sind Versuche im Gange ausser Oxyd — und Halogen — auch noch Hydrid — und Sulfidspektren auf dieselbe Weise anzuregen.

La seduta viene tolta alle ore 18.

## APPENDICE

LETTERA POSTULATORIA AL S. PADRE PER LA PROCLAMAZIONE DI  
S. ALBERTO MAGNO A PATRONO DEI CULTORI DELLE SCIENZE  
SPERIMENTALI.

RELAZIONE SUL « PREMIO PIO XI » 1939-1940 PER L'ASTRONOMIA.

LETTERA POSTULATORIA AL S. PADRE  
PER LA PROCLAMAZIONE DI S. ALBERTO MAGNO A PATRONO DEI CULTORI  
DELLE SCIENZE SPERIMENTALI (4).

*Beatissime Pater,*

Decima die anniversaria obvéniente, in qua immortalis memoriae Praedecessori Tuo per Bullam « In Thesauris » coelitum honores Alberto Magno rite decretos ad universam Ecclesiam extendere ipsumque titulo Doctoris augere placuit; permultis quum studiorum Universitatibus tum scientiarum Athenacis in votis esse patet, ut sanctus Doctor Albertus potiori gloria augeatur; quod peropportune fieri posse videtur, si illum studiosis artium quibus ab experimentis rerum physicarum nomen indutum est exemplar Patronumque rite concedere Sanctitatem Vestram libuerit.

Quorum votis Pontificia haec Academia sua quoque, eaque admodum flagrantia, confert, cum sibi persuasum sit neminem omnibus numeris absolutiorem Alberto Magno ad huiusmodi adipiscendum honorem inveniri posse. Qui cum ea floreret aetate qua doctrinae rerum naturalium seu physicarum si non penitus despicerentur parvi certe haberetur, rarisque eas colentibus, utpote quibus uni Aristoteli vel nonnullis aliis ex vetustioribus doctoribus penitus insistentibus (iisque ara-

---

*Beatissimo Padri,*

Ricorrendo il decimo anniversario della Bolla « In Thesauris », in cui il Tuo Predecessore d'imm. mem. estendeva il culto di Alberto Magno a tutta la Chiesa e lo dichiarava Dottore, molte Università ed Atenei Scientifici hanno espresso il voto che egli venisse ulteriormente glorificato, proponendolo a modello e dandolo a Patrono dei cultori delle discipline fisico-naturali o sperimentali.

A questi voti si unisce il suo, e caloroso, questa Pontificia Accademia delle Scienze ben persuasa che nessuno meglio di S. Alberto Magno abbia titoli per la opportuna designazione. Egli, infatti, vissuto in un secolo in cui le scienze naturali eran riguardate con indifferenza e i rari cultori giuravano in verbo magistri, fossilizzati ad Aristotile ed agli antichi, deformati per lo più dagli Arabi, operò un completo capovolgimento, coll'abbandonare il metodo deduttivo e sot-

(4) Rimessa al S. Padre dal Presidente dell'Accademia nella solenne Tornata Inaugurale del VI Anno Accademico. Cfr. pag. xxv del presente volume.

bicis interpolationibus vitiatis) plerumque in verba magistri jurare mos esset; deductionem relinquens, cunctaque exactissimae investigationi peculiari subjiciens, absolutam vetustioris methodi eversionem paravit. Nec tamen quis putet illum funditus ea quae apud veteres, praesertim ab Aristotele, inter naturae speculatores praestantissimo, scriptis mandata adhuc extarent, evertisse, sed quantum illi fas esset aliorum assertiones cribro subiecit, cuncta et singula iteratis peculiaribus sui ipsius experimentis rimans (oportet — sic ille — experimentum non in uno modo, sed secundum omnes circumstantias probare — De Universalibus l. II, c. I), vel sociorum ope utens (experti sumus, idem scribit, ego et socii mei; multis videntibus ex sociis nostris; fui et vidi experiri...).

Cui per inductivam rationem disposito, de omni genere scientiarum disserere fas fuit: de alchimia nempe et de physica; de animalium (zoologia) herbarumque (botanicam dicunt) scientiis; item de siderum (astrologia) et de coeli statu (meteorologia); de anatome atque embriologia; de geologia atque de agrorum colendorum ratione (agrariam vocant).

Immo vero, ut Jessen animadvertit (Alberti Magni historia animalium in « Archiv für Naturgeschichte » 23), in plerisque earum quas commemoravimus disciplinarum. Albertus semina quoque novarum rationum ab ipsiusmet animadversionibus atque experimentis scatentium ingerere potis fuit, ubique sua propria afferens, etiam cum praeceptorem imitari videretur. Eapropter Meyer (Geschichte der Botanik, Königsberg 1857) Alberti Magni « ingenium certum in naturalia investiganda, sincerum firmumque sensum, naturae permagnum studium, pol-

---

toporre tutto alla più scrupolosa indagine personale. Non già che egli facesse tabula rasa di quanto gli antichi, e specialmente Aristotile, uno dei più grandi osservatori della natura, avevano scritto, ma per quanto gli era possibile sottoponeva le altrui affermazioni al vaglio osservando tutto con ripetuti esperimenti personali (oportet experimentum non in uno modo, sed secundum omnes circumstantias probare — De mineralibus l. II; c. I) o con l'aiuto di assistenti (experti sumus ego et socii mei; multis videntibus ex nostris sociis; fui et vidi experiri...). Con tale preparazione e metodo egli scrive in ogni campo della scienza, di alchimia e di fisica, di zoologia e di botanica, di astronomia e di meteorologia, di anatomie ed embriologia, di geologia e di agraria; e in molti — come nota il Jessen (Alberti Magni historia animalium — in Archiv für Naturgeschichte, 23) egli è in grado di gettare semi di nuove verità scaturenti dalle sue osservazioni e dai suoi esperimenti... ovunque egli è originale, anche quando pare che egli copii il suo Maestro. Per questo il Meyer (Geschichte der Botanik, Königsberg, 1857) riconosce in Alberto Magno « un deciso talento per la ricerca naturale, uno schietto e forte sentire, un amore grande della natura, un possente stimolo alla sintesi delle verità sparse »; il Pouchet (Histoire des Sciences naturelles au Moyen-âge ou A. le Grand et son époque, Paris 1853) che Alberto « tutto assoggettò all'analisi delle sue fa,

lensque ad rerum disjunctarum synthesim efficiendam stimulum », prae-dicare minime veretur: Pouchet (*Histoire des Sciences naturelles au Moyen-âge, ou Albert le Grand et son époque*, Paris, 1853) testatur Albertum omnia et singula suarum virium animi investigationi subje-cisse, ipsumque primas ferre in humanarum cogitationum regno, mate-rieique atomis dominari. Tschirch Bernensis (*Handbuch der Pharma-kognosie I*, Leipzig 1908) Albertum « Polystorem (alterum) vocat me-liori (tamen) vocabuli significatione, quippe cui nec levis rerum pro-spectus vel nomina vel earum synonymia proferre fas est; sed ubique in rem funditus penetrat ».

De opere illo Albertino fere proprio ac novo (originali) cui titulus « De vegetalibus et plantis », quod ex Tschirch sententia, « si generatim illius inspicias primarium conatum ordinatae explanationis relationum biologicarum inter plantas fundamentis rationalibus innixum consti-tuit », ita Meyer sentit: « Nihil quod cum isto opere conferri possit per illa duo millia annorum quot ab Aristotele et Theophrasto ad Al-bertum et ab Alberto ad Cesalpinum Linneunque decurrerunt, exara-tum est. Nec officit si ob temporum obscuritatem quibus Albertus vitam degere contigit eiusque interdum mentis aciem aliquantulum obnubi-latam cernere contingat, dum nos duxerimus nobis esse discutiendas atque perpendas eas vires animi sui contra cuiusque generis obstacula sibi certantis occurrentia. Id quod altissimam erga eum admirationem nobis ingeret ». De tractatu autem quod nuncupatur « De Animalibus » quod ex Alberti operibus maximum autumatur, Pouchet refert « ipsum unum, si caetera desiderarentur, singularis, sodes, pretii monumentum

---

coltà » e che « egli regna sovrano nello più alte sfere del pensiero e domina gli atomi della ma-teria »; il Tschirch di Borna (*Handbuch der Pharmakognosie, I, Leipzig, 1908*) « Ein Polystor in des Wortes bester Bedeutung, begnügt Er sich nicht mit oberflächlichen Angaben oder Namen und ihrer Synonymie; sondern geht überall tiefer auf den Gegenstand ein ».

Del « De vegetalibus et plantis », opera quasi originale, che, secondo il Tschirch, costituisco nella parte generale il primo tentativo di una organica esposizione dei rapporti biologici delle piante poggiata su basi razionali, il Meyer dà questo giudizio: « Nulla che possa star a lato di quest'opera fu scritto in 2000 anni, quanti decorrono da Aristotile e Teofrasto ad Alberto o da Alberto a Cesalpino ed a Linneo. E se l'oscurità dei tempi nei quali Alberto visse ha turbato ta-lora la sua visione, noi dobbiamo considerare e misurare la forza del suo spirito lottando contro tutti gli ostacoli che gli si paravano dinanzi ed essere penetrati per lui di alta ammirazione ». Del trattato « De animalibus », poi, che è l'opera maggiore di Alberto, il Pouchet dice che « solo ba-sterrebbe ad immortalare il nome del suo autore: monumento prezioso perchè raduna... le prime osservazioni veramente scientifiche fatte dopo Aristotile ». E il Dezani (*La figura di A. M. nel quadro storico della scienza sperimentale — Atti della Settimana Albertina 1931, p. 260 ss.*) dopo

esse, utpote quod primus post Aristotelem scientificas pervestigationes coacervaverit, suumque auctorem immortalitalem donandum effecerit ».

Quibus accessit modo Dezanii sententia (La figura di A. M. nel quadro storico della scienza sperimentale — Atti della Settimana Albertina 1931, p. 160 ss.), qui, S. Doctoris pretiosarum investigationum catalogo efformato, de anatomia et physiologia inter se comparatis; de generum variatione, de interdependentia inter constitutionem somaticam, humoralem et physicam evolutionem; de hodierna doctrina hormonidum, de cranioscopia, de quaestione finalismi, de inventione nervi funiculi artropodum etc. illud usurpans Balls (Albertus Magnus als Zoologe, München 1928) « Albertum Magnum, ita concludit, biologum purum, juxta hodiernam vocabuli significationem, fuisse ».

Multa sane in Albertinis operibus desiderari, nec contradictiones quoque deficere; at cum Meyer fateri oportere (op. cit.) « errores quidem in istis aetati illi tribuendos, merita vero ipsi uni adjudicanda ». Quod si, ut cum Dezani fatemur, Albertus Magnus doctrinae hodiernae quae ab experimentis rerum naturalium nomen ducit minime auctor (ut Pouchet autumare non dubitat) praedicandus sit, minime tamen dubitandum quin illum saltem eius praecursorem Baptistam fuisse dici possit, cum huic doctrinae viam straverit. Hinc quaeri a nobis potest quae et quot humanitas emolumenta consequuta esset « si scientia (ut hodie eam dicunt) in viam regiam sibi ad Alberto constrictam vel delineatam audacter irruisset »!

Quae cum ita sint, Beatissime Pater, si a Sanctitate Tua Albertus Magnus Patronus rite declaretur colentium eas doctrinas, quae ab expe-

---

aver elencato queste preziose osservazioni del Santo Dottore sull'Anatomia generale e sull'Anatomia e Fisiologia comparata, sul variare delle razze, sull'interdipendenza fra costituzione somatica, umorale e sviluppo psichico, sulla dottrina moderna degli ormoni, sulla cranioscopia, sul problema del finalismo, sulla scoperta del cordone nervoso ventrale degli artropodi ecc.... conclude facendo suo il giudizio di Balls (Albertus Magnus als Zoologe, München 1928): Alberto Magno è « un vero biologo nel senso moderno della parola ». Certo le lacune e anche le contraddizioni non mancano nell'opera Albertina, ma è doveroso riconoscere col Meyer (op. cit.) che « gli errori nell'opera di Alberto sono imputabili al suo tempo, mentre i meriti di essa spettano a lui solo »; e col Dezani che se Alberto Magno non fu — come vorrebbe il Pouchet — « il vero fondatore della scienza sperimentale moderna » fu almeno « il Battista che a questa preparò la via », e chiederei quali conseguenze ne sarebbero derivate per la civiltà se « la scienza si fosse audacemente lanciata per la via maestra che audacemente S. Alberto Magno le aveva tracciata »!

La proclamazione pertanto, Beatissimo Padre, di Alberto Magno a Patrono dei cultori di quelle discipline sperimentali, nelle quali egli fu un precursore e un condottiero eminente, tornerà senza dubbio di gloria alla S. Chiesa, mecenate in ogni tempo del vero progresso moderno,

rimentis nomen ducunt, in quibus ille, ut vidimus, praecursor et dux praestat, id procul dubio magnae gloriae Ecclesiae quoque erit, cum illa jugiter se humana vera incrementa hodierna promoverit, foverit, auxerit; rectamque illam amicalem conjurationem scientiarum inter se et cum Deo urgebit, cuius Albertus Magnus magister incomparabilis extitit, prout nos in Bulla « In Thesauris » imm. Praedecessor Tuus his verbis edocuit: « Ipse (scil. Albertus) suo praeclarissimo exemplo nos admonet, inter scientiam et fidem... nullam existere oppositionem, intimam potius cohaesionem adesse ».

Has Litteras Postulatorias huius Pontificiae Academiae a Te exaudatum iri Praeses eiusdem confidit, sibi que simul suisque Academiae sodalibus gratiam Apostolicae Benedictionis implorat.

AUGUSTINUS GEMELLI O. F. M., *Praeses.*

---

spingerà a quella giusta coordinazione delle scienze tra loro e rispetto a Dio, di cui Alberto Magno fu maestro incomparabile, come notava nella Bolla « In Thesauris » il Tuo imm. Praedecessore: « Ipse (scil. Albertus) suo praeclarissimo exemplo nos admonet, inter scientiam et fidem... nullam existere oppositionem, intimam potius cohaesionem adesse ».

Nella speranza che la Postulatoria di questa P. Accademia venga accolta, l'Infrascritto Presidente domanda per sè e per gli Accademici la grazia dell'Apostolica Benedizione.

AGOSTINO GEMELLI O. F. M., *Presidente.*

RELAZIONE  
SUL « PREMIO PIO XI » 1939-1940  
PER L'ASTRONOMIA

La Commissione per aggiudicare il Premio Pio XI per l'Astronomia, bandito dalla Pontificia Accademia nelle Scienze per il biennio 1939-1940, composta dagli Accademici Pontifici: GIUSEPPE ARMELLINI, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Monte Mario; EMILIO BIANCHI, Direttore dell'Osservatorio di Brera; ALOIS GATTERER, Prefetto del Laboratorio astrofisico della Specola Vaticana; PAUL GUTHNICK, Direttore dell'Osservatorio astronomico di Berlin-Neubabelsberg; JOHAN STEIN, Direttore della Specola Vaticana a Castel Gandolfo: dopo ampia discussione, alla quale prese parte anche l'accademico Bianchi, prima della sua morte, associandosi completamente al giudizio degli altri Commissari, mentre non potè parteciparvi l'accademico Guthnick per le attuali circostanze, si è trovata concorde nello stendere la seguente relazione da presentare all'approvazione del Consiglio Accademico.

Nato nel 1885, HARLOW SHAPLEY studiò nelle Università del Missouri e di Princeton, ed iniziò la carriera astronomica all'Osservatorio. Nel 1914 passò all'Osservatorio di Mount Wilson, e nel 1921 veniva nominato Direttore dell'Osservatorio astronomico di Harvard a Cambridge. L'Unione Astronomica Internazionale lo nominava Presidente

---

RAPPORT SUR LE PRIX PIE XI (1939-1940)  
POUR L'ASTRONOMIE.

La Commission d'attribution du Prix Pie XI (1939-1940) pour l'Astronomie, composée des Académiciens Pontificaux: Joseph ARMELLINI, Directeur de l'Observatoire astronomique du Monte Mario; Emile BIANCHI, Directeur de l'Observatoire de Brera; Aloïs GATTERER, Préfet du Laboratoire astrophysique de l'Observatoire du Vatican; Paul GUTHNICK, Directeur de l'Observatoire astronomique de Berlin-Neubabelsberg; Johan STEIN, Directeur de l'Observatoire du Vatican à Castel-Gandolfo; après une large discussion à laquelle prit part également, peu avant sa mort, l'académicien BIANCHI, s'associant complètement au jugement des autres Commissaires, tandis que l'académicien GUTHNICK était empêché par les circonstances actuelles d'y participer, s'est trouvée d'accord pour établir le rapport suivant et pour le présenter à l'approbation du Conseil Académique.

Né en 1885, HARLOW SHAPLEY étudia dans les Universités de Missouri et de Princeton, et débuta dans la carrière astronomique à l'Observatoire de Princeton. En 1914, il passa à l'Observatoire de Mount Wilson, et en 1920 était nommé Directeur de l'Observatoire astronomique de Harvard à Cambridge. L'Union Astronomique Internationale le nomma Président de la Commission des Etoiles variables et, par le fait, Président de la Commission pour l'étude des Nébuleuses. La médaille Draper de la National Academy of Science lui fut attribuée, ainsi que le prix Janssen



della Commissione di Stelle variabili e quindi Presidente della Commissione per lo studio delle Nebulose. Gli fu assegnata la medaglia Draper dalla National Academy of Science, il premio Janssen dalla Société Astronomique de France, la medaglia Rumford dall'American Academy, la medaglia d'oro dalla Royal Astronomical Society a Londra, la medaglia d'oro Bruce dall'Astronomical Society of the Pacific.

1. - H. Shapley iniziò la sua attività scientifica con importanti lavori sopra le stelle variabili ad eclisse. Egli perfezionò la teoria data dal Russell per il calcolo dell'orbita della stella satellite dalla curva di luce, in modo da tener conto anche dell'oscuramento prodotto al lembo stellare dall'atmosfera che avvolge la stella stessa, come pure anche della forma ellissoidica allungata a causa della mutua attrazione dei due astri. In tal modo egli potè calcolare una novantina di orbite stellari, come pure ottenere importanti risultati sulla forma e le dimensioni di questi sistemi.

Passato all'Osservatorio di Mount Wilson, continuò lo studio delle stelle variabili, dedicandosi alle Cefeidi, variabili di grandissima importanza nell'astronomia siderale moderna, giacchè diffuse nelle estreme regioni della Via Lattea, negli ammassi globulari e nelle nebulose extragalattiche. Egli concentrò la sua attenzione sulla forma asimmetrica della curva di luce, come pure studiò le variazioni di luce, e sostenne in proposito la teoria delle pulsazioni stellari, teoria che le scoperte moderne hanno brillantemente confermata. È pure merito grandissimo

de la Société Astronomique de France, la médaille Rumford dell'American Academy, la médaille d'or de la Royal Astronomical Society à Londres, la médaille d'or de l'Astronomical Society of the Pacific.

1. — H. Shapley inaugura son activité scientifique par d'importants travaux sur les étoiles variables à éclipse. Il perfectionna la théorie donnée par Russell pour le calcul de l'orbite de l'étoile satellite par la courbe de lumière, de manière à tenir compte également de l'obscurité produite sur la lisière stellaire de l'atmosphère qui enveloppe l'étoile elle-même, comme aussi de la forme ellipsoïdale allongée à raison de la mutuelle attraction des deux astres. De la sorte, il put calculer environ quatre-vingt dix orbites stellaires et également obtenir d'importants résultats sur la forme et les dimensions de ces systèmes.

Passé à l'Observatoire de Mount Wilson, il poursuivit son étude des étoiles variables, s'appliquant à celle des Céphéides, variables de très grande importance dans l'astronomie sidérale moderne, parce que répandues dans les extrêmes régions de la Voie Lactée, dans les amas globulaires et dans les nébuleuses extragalactiques. Il concentra son attention sur la forme asymétrique de la courbe de lumière, et il étudia également les variations subies par leur représentation spectrale au même temps que les variations de lumière, et soutint à ce sujet la théorie des pulsations stellaires, théorie que les découvertes modernes ont brillamment confirmée. C'est aussi un très grand mérite de Shapley que d'avoir perfectionné la célèbre relation trouvée par Miss Leavitt entre la

dello Shapley di avere perfezionato la celebre relazione trovata da Miss Leavitt tra la grandezza assoluta ed il periodo delle Cefeidi. In tal modo si è venuto in possesso di un nuovo e potente mezzo per determinare con osservazioni fotometriche le distanze di ammassi e gruppi stellari secondo il metodo per primo ideato dall'Hertzsprung.

2. — Ma il merito maggiore di Harlow Shapley è indubbiamente costituito dalle sue ricerche sopra un problema di fondamentale importanza, quale è quello della costituzione e delle dimensioni del Sistema Galattico.

Fino al 1915 si credeva che la nostra Galassia avesse forma di un ellissoide schiacciato con un diametro equatoriale di ventimila anni di luce ed un diametro polare di quattro o cinque mila. Si credeva pure che il centro dell'ellissoide coincidesse quasi con la posizione occupata dal Sole, e posto — secondo le ricerche di Easton — in direzione della costellazione del Cigno. Si calcolava pure che il numero di astri, componenti la grande famiglia galattica, fosse di circa uno o due miliardi.

Fu in quell'anno, che Shapley iniziò e sviluppò in 19 articoli, rimasti famosi nell'astronomia, le sue ricerche sopra gli ammassi globulari, servendosi dei due potentissimi telescopi di 60 e di 100 pollici di Mount Wilson. Studiando i colori e le grandezze fotometriche delle stelle che li compongono, pervenne a riconoscere tra queste stelle molte Cefeidi e quindi riuscì a determinare la distanza degli ammassi stessi.

---

grandeur absolue et la période des Céphéides. De cette façon, on a obtenu un nouveau et puissant moyen pour déterminer, par des observations photométriques, les distances des amas et groupes stellaires selon la méthode inventée en premier lieu par Hertzsprung.

2. — Mais le principal mérite de Harlow Shapley est indubitablement dans ses recherches sur un problème d'importance fondamentale, tel que celui de la constitution et des dimensions du système Galactique.

Jusqu'en 1915 on croyait que notre Galaxie avait une forme d'ellipsoïde brisé avec un diamètre équatorial de vingt-mille années-lumière et un diamètre polaire de quatre ou cinq mille. On croyait aussi que le centre de l'ellipsoïde coïncidait à peu près avec la position occupée par le Soleil et qu'il était placé — d'après les recherches de Easton — en direction de la constellation du Cygne. On calculait également que le nombre d'étoiles composant la grande famille galactique était d'environ un ou deux milliards.

Ce fut cette année-là que Shapley entreprit et développa en 12 articles, demeurés fameux en astronomie, ses recherches sur les amas globulaires, on se servant des deux très puissants télescopes de 60 et de 100 pouces de Mount Wilson. En étudiant les couleurs et les grandeurs photométriques des étoiles qui les composent, il parvint à reconnaître parmi ces étoiles beaucoup de Céphéides et, par là, réussit à déterminer la distance des amas eux-mêmes. Il en conclut que ces amas sont disposés avec une certaine symétrie autour d'un point situé en direction du Sagittaire.

Egli ne concludeva che questi ammassi sono disposti con una certa simmetria intorno ad un punto situato in direzione del Sagittario ad una distanza di parecchie decina di migliaia di anni di luce dal Sole. E quindi considerando gli ammassi globulari come sistemi satelliti del grande sistema galattico, egli ne dedusse logicamente che il centro di esso era precisamente quel punto nella costellazione del Sagittario, immensamente lontano dal Sole.

Ma da ciò scaturiva ancora un'altra conseguenza. Infatti poichè anche nella regione del cielo opposta al Sagittario esistono stelle galattiche numerosissime e lontanissime, ne risultava che il Sistema Galattico aveva indubbiamente dimensioni di gran lunga maggiori di quanto si era fin'allora creduto. Anzi, attribuirgli un diametro di ventimila anni di luce, bisognava dunque giungere almeno ai centomila e forse anche di trecentomila, mentre il numero di stelle di cui esso era formato doveva aumentarsi in proporzione. D'altra parte la nuova concezione della Via Lattea sembrava mettere in grandissimo dubbio l'interpretazione delle nebulose spirali come altrettante galassie esterne di dimensioni comparabili con quelle della nostra immensa Galassia. Quindi, tenuto pure conto dei movimenti interni, misurati dal Van Maanen (più tardi provati spuri), Shapley assegnava provvisoriamente alle nebulose spirali una distanza media di 20000 anni di luce.

Questi nuovi risultati, che l'illustre astronomo cominciò ad esporre verso il 1918, destarono vivissimo interesse, e diedero occasione nel

---

taire, à une distance du Soleil de plusieurs dizaines de milliers d'années-lumière. Et par suite, considérant les amas globulaires comme des systèmes satellites du grand système galactique, il en déduisit logiquement que leur centre était précisément ce point dans la constellation du Sagittaire, immensément éloigné du Soleil.

Mais de là déconlait encore une autre conséquence. Puisque même dans la région du ciel opposé au Sagittaire, il y a des étoiles galactiques très nombreuses et très lointaines, il s'ensuivait que le système galactique avait indubitablement des dimensions de très loin plus grandes que celles admises jusqu'alors. Au lieu de lui attribuer un diamètre de vingt-mille années-lumière, il fallait donc arriver au moins au cent-mille et peut-être même aux trois-cent-mille, tandis que devait être augmenté en proportion le nombre des étoiles dont il est formé. D'autre part, la nouvelle conception de la Voie Lactée semblait rendre fort douteuse l'interprétation de nébuleuses spirales comme autant de voies lactées extérieures de dimensions comparables à celles de notre immense Voie Lactée. Conséquemment, même en tenant compte des mouvements internes, mesurés par Van Maanen (démontrés depuis comme inexistantes), Shapley assignait provisoirement aux nébuleuses spirales une distance moyenne de vingt-mille années-lumières.

Ces nouveaux résultats que l'illustre astronome commençait à exposer vers 1918, provoquèrent le plus vif intérêt et donnèrent occasion, en 1920, au fameux débat sur « l'Echelle de l'Univers », tenu à l'Académie Nationale des Sciences, entre Shapley et H. D. Curtis. Ce dernier défon-

1920 al famoso dibattito su « la Scala dell'Universo », tenuto all'Accademia Nazionale delle Scienze, fra Shapley e H. D. Curtis. Quest'ultimo sosteneva un Sistema Galattico quasi dieci volte più piccolo, mentre considerava le spirali come galassie esterne, simili alla nostra in forma e dimensioni, a distanze dell'ordine di milioni di anni di luce. Mentre le nuove scoperte hanno in massima dato ragione alle idee del Curtis intorno alle galassie esterne — idee pure ben presto brillantemente confermate dalle ulteriori ricerche del suo oppositore — esse hanno sostanzialmente confermato e posto fuori dubbio la geniale concezione dello Shapley intorno al nostro Sistema Galattico. Oggi sappiamo infatti che questo Sistema ha un diametro forse assai superiore ai centomila anni di luce, che il suo centro si trova appunto in direzione del Sagittario ad una distanza di circa trenta mila anni di luce dal Sole e che questa immensa famiglia di astri deve essere valutata ad alcune centinaia di miliardi di stelle. Gli ultimi venticinque anni di studi hanno dunque prodotto un radicale rinnovamento nelle nostre cognizioni sulla Via Lattea; rinnovamento di cui Harlow Shapley deve essere indubbiamente salutato come il grande antesignano ed il massimo artefice.

3. — Di non minore importanza sono le ricerche extra-galattiche, che sono e vengono fatte da Shapley in cooperazione con i suoi assistenti. Una prima rassegna delle posizioni e grandezze delle 1249 galassie più luminose (fino alla 13<sup>a</sup> grandezza) fu pubblicata nel 1932.

---

daît un système galactique près de dix fois plus petit, tandis qu'il considérait les spirales comme des voies lactées extérieures, semblables à la nôtre par la forme et les dimensions, à la distance d'un ordre de dix millions d'années-lumière. Alors que les nouvelles découvertes ont, en principe, donné raison aux idées de Curtis au sujet des voies lactées extérieures, — idées d'ailleurs bien vite brillamment confirmées par les recherches ultérieures de son contradicteur, — elles ont aussi substantiellement confirmé et placé hors de conteste la géniale conception de Shapley au sujet de notre Système de la Voie Lactée. Nous savons en effet aujourd'hui que ce Système a un diamètre peut-être bien supérieur aux cent-mille années-lumière, que son centre se trouve précisément en direction du Sagittaire à une distance du Soleil d'environ trente-mille années-lumière, et que la population de cette immense famille d'étoiles doit être évaluée à quelques centaines de milliards d'étoiles. Les derniers vingt-cinq ans d'études ont donc produit un renouveau radical dans nos connaissances sur la Voie Lactée, renouveau dont Harlow Shapley doit être sans nul doute salué comme le guide et le très grand ouvrier.

3. — Elles ne sont pas de moindre importance les recherches extra-galactiques qui ont été et sont effectuées par Shapley en collaboration avec ses assistants. Un premier recueil des positions et grandeurs des 1249 voies lactées les plus lumineuses (jusqu'à la 13<sup>e</sup> grandeur) fut publié en 1932. Un second recueil donne les positions, les grandeurs, les diamètres angulaires et les types de 11652 voies lactées plus faibles. Finalement est en cours un troisième recueil du ciel entier.

Una seconda rassegna dà le posizioni, le grandezze, i diametri angolari e i tipi di 11652 galassie più deboli. Finalmente è in corso una terza rassegna del cielo intero, fino alla grandezza  $18^a$ , che probabilmente ci darà le grandezze apparenti e posizioni approssimate di circa 500000 galassie in uno spazio del raggio di circa cento milioni di anni di luce. Già sono state trovate 150000 galassie sparse su un po' più di un terzo del cielo. Di pari passo vanno le ricerche sul gradiente della densità metagalattica e sulla distribuzione delle galassie nel detto spazio. Da uno studio speciale di 10000 galassie ( $+22^\circ > \delta > -20^\circ$ ,  $|\beta| > 40^\circ$ ) risultano cospicue irregolarità in tale distribuzione e l'esistenza di concentrazioni molto estese: nubi metagalattiche con diametri di 50 milioni di parsecs e popolazioni di decine di migliaia di nebulose. L'emisfero australe appare meno ricco del settentrionale in galassie di grandezze superiori alla  $18^a$ ; verso la  $18^a$  la disuguaglianza tende a sparire. Queste ricerche sono di grandissima importanza per la cosmogonia e il problema fondamentale dell'espansione dell'Universo.

A causa dell'importanza speciale delle Nubi Magellaniche come satelliti della nostra Galassia, esse sono state studiate dallo Shapley con grande profitto, esaminando particolarmente le grandezze assolute ed i periodi delle Cefeidi, la luminosità delle Supergiganti, gli spettri, gli effetti di assorbimento di luce, gli ammassi e le distanze delle Nubi dal Sole. Dalle misure densitometriche eseguite sulle fotografie risultarono diametri circa due volte più grandi di quanto appare visual-

---

jusqu'à la  $18^e$  grandeur, qui probablement nous fournit les grandeurs apparentes et les positions approximatives d'environ 500.000 voies lactées, en un espace du rayon d'environ cent millions d'années-lumière. Déjà l'on a trouvé 150.000 voies lactées éparées sur un peu plus du tiers du ciel. Les recherches sur la mesure de la densité métagalactique et sur la distribution des voies lactées dans l'espace en question, avancent d'un pas égal. D'après une étude spéciale de dix-mille voies lactées ( $+22^\circ > \delta > -20^\circ$ ,  $|\beta| > 40^\circ$ ) d'importantes irrégularités apparaissent dans cette distribution et l'on remarque l'existence de concentrations fort étendues: nuages métagalactiques d'un diamètre de 50 millions de parsecs et populations de dizaines de milliers de nébuleuses.

L'hémisphère austral apparaît moins riche que le nord en voies lactées de grandeurs supérieures à la  $18^e$ ; à partir de la  $18^e$ , l'inégalité tend à disparaître. Ces recherches sont de très grande importance pour la cosmogonie et le problème fondamental de l'expansion de l'Univers.

A cause de leur importance spéciale comme satellites de notre Voie Lactée, les Nuées de Magellan ont été étudiées par Shapley avec grand profit, on examinant particulièrement les grandeurs absolues et les périodes des Céphéides, la luminosité des Surrégantes, les spectres, les effets d'absorption de lumière, les amas et les distances des Nuées par rapport au Soleil. Il résulte des mesures densitométriques exécutées sur les photographies que les diamètres sont environ deux fois plus grands de ce qu'ils apparaissent à la vue sur les photographies elles-mêmes. De même l'aire de la nébuleuse d'Andromède apparaît dix fois plus grande, et les mesures densitométriques

mente sulle fotografie stesse. Così pure l'area della nebulosa di Andromeda risultò dieci volte maggiore, e misure densitometriche delle galassie più lucide diedero dimensioni da 2, 3 a 5 volte maggiori. Studi speciali furono pure fatti sull'assorbimento della luce nello spazio, sulla supragalassia in Coma-Virgo, su nuovi tipi di sistemi stellari in Sculptor e Fornax, su stelle variabili dietro il centro e nell'anticentro della nostra Galassia, e sulla corona di stelle tutto intorno alla Galassia, onde risulta che lo spessore della Via Lattea è del medesimo ordine del diametro, pure essendo la densità stellare tenuissima nelle regioni più remote dall'equatore galattico...

Quanto sopra basterà per caratterizzare la prodigiosa attività del Direttore dell'Osservatorio di Harvard. Nei soli bollettini 800-909 (1924-1939) si contano 100 comunicazioni di Shapley stese da solo o con uno o due collaboratori.

4. - Uomo di alto ingegno, Harlow Shapley unisce ad una energia instancabile un talento di organizzazione di prima classe. Egli deve considerarsi come astronomo di straordinario valore, il quale con la sua attività ha trasformato l'astronomia stellare moderna, e le ha dato un nuovo indirizzo lasciandovi un'impronta stabile. Per questa ragione la Commissione unanime propone che al Dott. Shapley venga assegnato il premio Pio XI 1939-1940 per l'astronomia.

G. ARMELLINI

[† E. BIANCHI]

A. GATTERER

J. STEIN

---

ques des voies lactées plus brillantes ont fourni des dimensions 2, 3 et 5 fois plus grandes. Des études spéciales ont été faites aussi sur l'absorption de la lumière dans l'espace, sur la supra-voie lactée de Coma-Virgo, sur de nouveaux types de systèmes stellaires dans Sculptor et Fornax, sur les étoiles variables derrière le centre et dans l'anti-centre de notre Voie Lactée, et sur la couronne d'étoiles tout autour de celle-ci, d'où il résulte que l'épaisseur de la Voie Lactée est du même ordre de diamètre, bien que la densité stellaire soit très ténue dans les régions plus distantes de l'équateur galactique...

Ce que nous venons de dire suffira pour caractériser la prodigieuse activité du Directeur de l'Observatoire de Harvard. Dans les seuls bulletins 800-909 (1924-1939) on compte cent communications de Shapley élaborées par lui seul ou avec un ou deux collaborateurs.

4. — Homme d'intelligence remarquable, Harlow Shapley unit à une énergie inlassable un talent d'organisation de premier ordre. On doit le considérer comme un astronome de valeur extraordinaire dont l'activité a transformé l'astronomie stellaire moderne et lui a imprimé un nouvel élan en lui laissant une marque durable. Pour cette raison, la Commission, à l'unanimité, propose que le prix Pio XI pour l'astronomie soit attribué au docteur Shapley.

## OSSERVAZIONI SULLA OSSIFICAZIONE ETERTOPICA DEL RENE (\*)

G. C. PERRI

SYMMARIUM. — Auctor denuo investigans in eterotopicam renum ossificationem post vasalis (arteriae et venae) pedunculi alligaturam, perpendit, istologica ratione, mutationes elementorum cellularium renalis materiae, quae efficiunt ut ossea materia enascatur.

Dall'esperimento di SACERDOTTI e FRATTIN (1901) che dimostrò la possibilità della formazione di osso nel rene in seguito a legatura del peduncolo vasale (vena e arteria), le ricerche sull'argomento si susseguirono numerose per risolvere il problema di questa ossificazione eterotopica.

Così molti autori (DONATI e MARTINI, POSKARISSKY, MAXIMOW, LIECK, ASAMI e DOCK, SAMEK e MICHELAZZI, GIULIANI, CECCARELLI, CAVALLI e LUCINESCU, SILANI, SCHULTZE, SEVERI, VILLAPANE, ecc.) ripeterono fondamentalmente l'esperimento di SACERDOTTI e FRATTIN con lievi modifiche, ottenendo ciascuno qualche dato nuovo, ma senza mai poter risolvere adeguatamente il problema, nè dare una spiegazione causale sufficientemente completa del fenomeno.

Mentre alcuni autori diedero importanza ai sali di calcio precipitati nei tessuti come agenti della trasformazione del connettivo in osso (SACERDOTTI e FRATTIN, POSKARISSKY, ASAMI e DOCK, ecc,) altri la esclusero (DONATI e MARTINI). Altri ancora pensarono all'influenza di spe-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa nella Tornata dell'8 giugno 1941.

Lavoro eseguito presso l'Istituto di Anatomia umana normale ed istologia della R. Università di Pavia.

ciali fattori come, ad esempio, a quella delle condizioni circolatorie GIULIANI, SAMEK e MICHELAZZI).

Infine altri autori ancora, avevano notato un costante rapporto topografico dell'osso con l'epitelio del bacinetto o con formazioni epiteliali neoformatesi nel parenchima renale, (secondo gli autori per proliferazione dell'epitelio dei calici) e supposero una influenza di queste cellule epiteliali neoformate sulla differenziazione del connettivo.

Questo modo di vedere prende le mosse dall'insieme delle ricerche di HUGGINS sull'ossificazione eterotopica in presenza di epitelio delle vie urinarie.

Infatti HUGGINS dimostrò che innestando mucosa vescicale in una fascia addominale del cane, si ha dopo circa 20-25 giorni dall'intervento la formazione di osso nel punto dell'innesto.

Dall'esame della letteratura potei notare che, mentre quasi tutti gli autori si sono preoccupati di studiare le condizioni di esperimento che portano alla formazione di osso, sono invece scarse le ricerche che riguardano da un punto di vista istologico, le trasformazioni dei vari elementi del tessuto renale dopo la legatura del peduncolo vasale.

Ritenni perciò opportuno istituire una serie di esperimenti in cui ripetei fondamentalmente l'operazione di SACERDOTTI e FRATTIN per seguire a distanze di tempo sufficientemente ravvicinate le varie tappe dei processi che si susseguono nel rene operato e che conducono alla formazione dell'osso.

Dalle mie ricerche condotte su 26 conigli ho potuto trarre alcune conclusioni che ritengo degne di nota, e che espongo brevemente.

Il processo che porta alla formazione dell'osso è abbastanza complesso per le trasformazioni che subiscono i vari elementi del tessuto renale in seguito alla legatura del peduncolo vasale.

Il rene, in seguito alla interruzione della circolazione, si altera profondamente; le cellule epiteliali dei tubuli vanno rapidamente incontro a processi regressivi: degenerazione grassa, precipitazione di sali di calcio.

Mentre questi due fenomeni sono particolarmente intensi nella corticale, nella midollare manca la deposizione dei sali di calcio e si ha soltanto lo sfaldamento dell'epitelio dei tubuli retti dalla loro membrana basale così che le cellule cadono nel lume. Non tutte però le cellule dei tubuli retti subiscono questa sorte, ma alcuni di questi rimangono



normali tanto che, dopo 5 giorni dalla legatura dei vasi, vi si può notare l'esistenza di cellule epiteliali ancora vitali.

A quest'epoca sono già iniziati i fenomeni progressivi che a poco a poco si vengono a sovrapporre a quelli regressivi. Capillari cominciano a penetrare dalla rete arteriosa capsulare e dai rami dell'arteria ureterica a livello del punto di riflessione dell'epitelio dei bacini sui calici. Tali capillari penetrando dalla periferia verso il centro dell'organo a poco a poco lo invadono tutto e ripristinano la circolazione in ogni punto del suo parenchima.

Nel frattempo tutta la sostanza corticale è a poco a poco occupata da depositi di sali di calcio che precipitano formando una specie di semicerchio attorno alla midollare.

Con l'intervento di numerosi macrofagi vengono riassorbiti abbastanza rapidamente i residui del parenchima distrutto, ed il siero trasudato; rimangono invece allo stato vitale alcune cellule epiteliali dei tubuli retti, cellule connettivali e vasi sanguigni; mentre nella corticale sono aumentati i sali di calcio.

Questi elementi si possono vedere chiaramente nella trentesima giornata dall'operazione.

In questo stadio i vasi hanno una rete capillare che è estesa radialmente dalla periferia al centro dell'organo con un decorso inverso di quello della normale circolazione del rene che si estende piuttosto dall'ilo alla periferia.

Le cellule connettivali proliferate in grande numero hanno assunto i caratteri di cellule del connettivo giovane.

Le cellule epiteliali dei tubuli retti che si sono mantenute vitali cominciano a proliferare ed in breve il rivestimento di questi tubuli diventa pluristrificato; anzi alcuni tubuli vengono trasformati in cordoni epiteliali pieni.

Importante è il fatto che queste neoformazioni epiteliali assumono dei caratteri morfologici tipici; non si tratta più come per i tubuli retti di un rivestimento epiteliale a cellule cubiche o cilindriche monostratificate, che rivestono un lume; ma bensì di vari strati di cellule epiteliali. Di queste cellule quelle degli strati più profondi sono allungate, mentre, a mano a mano che si sale verso gli strati superficiali le cellule acquistano sempre più una forma prismatica e poi appiattita.

Nell'insieme questo epitelio di rivestimento neoformato viene ad assumere le caratteristiche di quel tipico epitelio di transizione che è proprio delle grandi vie urinarie e della vescica.

Attorno a queste neoformazioni epiteliali o in vicinanza del rivestimento epiteliale del bacinetto le fibre connettivali si addensano: i vasi aumentano e le cellule del connettivo subiscono delle trasformazioni che le conducono ad assumere i caratteri degli osteoblasti.

Ad un dato momento, in più punti del parenchima si vedono comparire lamelle ossee con le rispettive lacune contenenti osteociti, circondate da osteoblasti.

Io ho potuto constatare l'inizio della presenza di osso in 40<sup>a</sup> giornata. A questo stadio l'osso era rappresentato da 7-8 lamelle di varie dimensioni, sparse nel parenchima a contatto con qualcuna delle formazioni epiteliali descritte e da una formazione ossea più grande, a contatto con l'epitelio del bacinetto. Questa formazione ossea delimitante una cavità riempita di midollo osseo con megacariociti aveva l'aspetto di una qualunque sezione di nucleo di ossificazione di un osso lungo.

Riguardo al modo di formazione, l'osso si genera in un primo tempo per trasformazione diretta del connettivo in cui si sono differenziati gli osteoblasti poi, avanzando il processo, per apposizione di nuove lamelle da parte di altri osteoblasti.

Da questo momento il connettivo prolifera, aumenta il numero dei vasi e la quantità di osso, mentre i sali di calcio che erano rinvolti nella sostanza corticale si vanno assorbendo.

Tutti questi fenomeni procedono tanto che, dopo 70 giorni dall'operazione, il rene è sostituito da un ammasso di connettivo contenente tessuto osseo, residui epiteliali e vasi mentre i depositi di calcio della corticale sono scomparsi totalmente.

Vien fatto di chiedersi a quali influenze sia legata la comparsa di tessuto osseo in queste condizioni sperimentali. Molti sono, come abbiamo visto, i fattori invocati dai vari Autori ed io ne passerò in rassegna i principali:

- 1) Influenza dei depositi di sali di calcio.
- 2) Alterazioni circolatorie.
- 3) Influenza dell'epitelio urinario.

Contrariamente a quello che pensa la maggior parte degli Autori non posso ritenere che i sali di calcio depositati possano avere una influenza diretta sulla trasformazione ossea del connettivo, perchè si tratta di una sostanza oramai inerte nei riguardi della quale l'organismo reagisce come di fronte a qualunque corpo estraneo.

È noto che il calcio per essersi utilizzato nel processo di ossificazione deve trovarsi allo stato ionico; penso perciò che i precipitati di sali di calcio della corticale potranno essere utilizzati solo quando, avvenuta la loro scissione per opera dei macrofagi e delle cellule giganti, potrà essere liberato il calcio e portato in circolo allo stato ionico.

Più importanti sono le modificazioni circolatorie, sempre presenti in tutti i processi e accidentali e sperimentali che conducono alla neoformazione di tessuto osseo. Le modificazioni circolatorie assumono grande importanza nel determinare una evoluzione del tessuto connettivo in un senso piuttosto che nell'altro, per quanto non si possa, come fa GIULIANI, subordinare tutto il processo al solo fatto circolatorio.

Con la legatura del peduncolo vasale si provoca una profonda alterazione circolatoria: ad una imponente e veloce circolazione quale quella del rene normale, si viene a sostituire una circolazione di tipo capillare, che partendo dalla periferia giunge al centro dell'organo. Qui nei capillari dilatati il sangue ristagna e la corrente è fortemente rallentata. Circa la grande importanza della stasi venosa che si determina, sono d'accordo col GIULIANI. Infatti il rallentamento del circolo permette a tutte le sostanze che si trovano in circolo o che si producono nel tessuto, di rimanere lungamente a contatto con le cellule del connettivo ed eventualmente di influenzarle profondamente.

Veniamo ora a considerare l'influenza dell'epitelio sul tessuto connettivo. Molte ipotesi sono state fatte sul meccanismo di azione di queste formazioni epiteliali (epitelio del bacinetto, di mucosa vescicale innestate) sulla determinazione della formazione del tessuto osseo. Nell'esperimento di SACERDOTTI e FRATTIN, come sappiamo si ha la neoproduzione dai tubuli retti di formazione epiteliali. Queste neoformazioni intraviste da DONATI e MARTINI furono in seguito descritte anche da CAVALLI e LUCINESCU. D'altra parte tutti gli Autori notarono il rapporto stretto tra epitelio delle vie urinarie e formazione di tessuto osseo, sia negli innesti che in seguito a legatura del peduncolo del rene.

Io ho potuto dimostrare a tale proposito un fatto che non era mai stato messo in evidenza dai vari Autori che mi precedettero. Le cellule dei tubuli retti che nel processo regressivo non sono andate distrutte, riprendono a proliferare, perdono i caratteri citologici primitivi per assumere quelli degli epitelii di rivestimento delle grandi vie urinarie ed in particolare quelli della mucosa vescicale.

Questo fatto permette di identificare l'ossificazione eterotopica ottenuta con l'esperimento di SACERDOTI e FRATTIN con quelle ottenute invece con gli innesti di mucosa vescicale.

Che queste cellule con i caratteri morfologici e, io penso, anche metabolici di cellule della vescica urinaria, avessero influenza nel determinare la formazione dell'osso, era stato supposto da HUGGINS il quale pensò che tale influenza consistesse nella produzione di fosfatasi da parte di queste cellule epiteliali. In base alla teoria di ROBINSON circa l'azione della fosfatasi nel fenomeno dell'ossificazione, si avrebbe così una spiegazione della produzione del tessuto osseo in seno al tessuto connettivo. SEVERI sviluppò questo concetto considerando le cellule epiteliali delle vie urinarie come « organizzatori » del tessuto osseo in seno al connettivo in quanto produttrici di fosfatasi.

Tale idea però non è accettabile se si pensa che sia HUGGINS che ROBINSON e collaboratori in realtà conclusero nei loro esperimenti che la comparsa della fosfatasi in quantità discreta coincide con la comparsa degli osteoblasti e dell'osso e non la precede. Inoltre la comparsa di cellule differenziate (cellule della cartilagine ipetrofica e osteoblasti) sia nelle culture (ROBINSON) che negli innesti (HUGGINS, REGEN e WILKINS) porta ad un aumento rilevante del tasso di enzima nel tessuto in questione.

In base a questi dati io penso che la fosfatasi debba essere considerata un meccanismo enzimatico che interviene nell'ossificazione e che nel processo ha importanza fondamentale, ma che non agisce per sé stessa sul connettivo stimolandolo fin dall'inizio a differenziare le sue cellule in osteoblasti.

Per quello che riguarda l'evidente rapporto topografico tra cellule e osso, penso che questo fatto possa essere spiegato così: le cellule epiteliali che ad un dato momento proliferano, agiscono come centro di attrazione di materiali nutritizii, ed anche rappresentano col loro progressivo bisogno di metaboliti, il punto di convergenza della neopro-

duzione di vasi coi quali giungono le sostanze nutritizie. Attorno a queste cellule il tessuto connettivo viene a trovare migliori condizioni di vita, prolifera rigogliosamente e vi si addensa.

Ora non si può escludere che qualche prodotto del metabolismo di queste cellule possa influenzare il tessuto connettivo i cui elementi hanno ripreso caratteristiche embrionali e con esse una capacità elevatissima ad evolvere in un senso o nell'altro sotto uno stimolo adeguato. Questo stimolo che non credo sia dato dalla fosfatasi, per quanto ho detto sopra, non è facilmente identificabile tra i metaboliti di queste cellule.

Deve però esserci una sostanza che agisce sul tessuto connettivo per indurlo a trasformazioni così profonde e sopra tutto alla differenziazione degli osteoblasti.

Una considerazione a proposito delle varie influenze che agiscono sul tessuto connettivo deve essere fatta basandosi sui risultati anatomici che si osservano nel rene legato.

Se si tiene presente la disposizione dei depositi di calcio nel rene dopo la legatura del peduncolo, si può facilmente notare che i sali di calcio precipitano solamente ed esclusivamente nella corticale e cioè formano una fascia periferica che circonda la midollare, nella quale zona esclusivamente si ha invece la formazione di osso. Questo almeno nella grande maggioranza dei casi, se non sono state introdotte variazioni notevoli di tecnica nell'intervento.

Orbene, osservando il rene dopo la legatura del peduncolo ed il modo in cui si ripristina la circolazione sanguigna si nota che il circolo collaterale di compenso che si stabilisce ha un decorso che va dalla periferia al centro. Ci si può allora rendere conto di un fatto che ha, secondo me una grande importanza nella spiegazione del fenomeno.

I macrofagi e le cellule giganti attaccano i depositi di sali di calcio, li riassorbono e li scindono nei loro componenti che, secondo le ricerche di WELLS sono identici a quelli dell'osso normale.

Questi elementi in grande concentrazione vengono condotti nei vasi sanguigni e lentamente vengono convogliati verso il centro dell'organo. Quivi, nella rete capillare il sangue ristagna lungamente e può a lungo rimanere a contatto col tessuto connettivo giovane indifferenziato.

Si può pensare che lo stato di concentrazione piuttosto elevato in calcio e in fosforo che deriva dalla sopradetta scissione dei sali di calcio e il peculiare tipo di circolazione sanguigna siano in grado, insieme all'influenza diretta delle cellule epiteliali neoformate, ed in particolare di quel prodotto metabolico la cui natura per ora ci sfugge, di promuovere la trasformazione delle cellule connettivali in osteoblasti e del connettivo in osso.

Una volta che si è avuta la comparsa degli osteoblasti, la spiegazione del resto del fenomeno è facile in quanto che gli osteoblasti, in base alla teoria di ROBISON, sono essenzialmente dei produttori di fosfatasi. Questa, alzando il tasso di fosforo inorganico nella linfa interstiziale del tessuto, permette la precipitazione di fosfato tricalcico nel connettivo addensato e si ha così la edificazione e la calcificazione delle prime lamelle ossee.

SULL'EQUAZIONE DEL MOTO SMORZATO  
CON PARAMETRI VARIABILI  
E SU UN CASO DI INSTABILITÀ(\*)

ENZO FOÀ

SYMMARIUM. — Auctor, professoris GRAFFI, magistri sui, vestigia secutus, exponit integrationem vero proximam (superiore quoque erroris limite perpenso) pro aequatione motus restincti, lineari secundi ordinis et cuius coëfficientia sint variabilia; solutionum valorem in peculiari quodam casu perpendit.

1. — Si abbia l'equazione differenziale del 2° ordine

$$[1] \quad y'' + 2py' + q^2 y = 0$$

dove  $y$  è la funzione incognita della variabile indipendente  $t$  che identificheremo col tempo, e  $p$  e  $q$  due parametri. È ben noto che se  $p$  e  $q$  sono costanti, con  $p > 0$  e  $p^2 - q^2 < 0$  la [1] rappresenta l'equazione di un moto armonico smorzato e l'integrazione della [1] è molto facile. Più complesso diventa il problema se  $p$  e  $q$  sono variabili col tempo pur essendo in ogni istante  $p^2 < q^2$ . Noi esporremo in questa Nota dapprima una integrazione approssimata della [1] valendoci di un risultato del GRAFFI<sup>(1)</sup> determinando anche un valore maggiorante

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita nella Tornata del 30 novembre 1941.

(1) D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie VI-XV, 1932, pag. 657.

D. GRAFFI, *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*. « Annali di Matematica », IV-XV, 1936, pag. 87.

dell'errore commesso con questa approssimazione. Poi, presa in esame l'equazione particolare

$$y'' + 2py' + (A^2 e^{2\lambda t} + p^2)y = 0$$

con  $A, p, \lambda$  costanti positive, dimostreremo un curioso caso di instabilità. Proveremo infatti che, pure essendo  $p > 0$  cioè presente lo smorzamento, al tendere di  $t$  all'infinito  $y$  tende allo zero; ma se  $p < \frac{\lambda}{2}$ , la  $y'$  non tende allo zero, anzi in certi istanti diventa grande quanto si vuole; se invece  $p > \frac{\lambda}{2}$ ,  $y'$  per  $t$  tendente all'infinito tende allo zero e la  $y$  è soluzione stabile della [1]. Questo teorema si comprende e potrebbe anche dedursi dai risultati del WIMAN<sup>(1)</sup> per l'equazione di un moto non smorzato (cioè per la [1] con  $p=0$ ) ma abbiamo creduto opportuno ottenerlo in modo del tutto indipendente da queste memorie.

2. - Facciamo nella [1] la sostituzione ben nota

$$[2] \quad y = e^{\int_0^t p \, dt} x$$

dove  $x$  è una nuova incognita; otteniamo subito:

$$[3] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -(q^2 - p^2 - p')x = -\omega^2 x$$

con ovvio significato del simbolo  $\omega$ , che supporremo in ogni istante positivo.

Ora il GRAFFI<sup>(2)</sup> ha dato la seguente soluzione di [1]. Posto

$$[4] \quad x = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \operatorname{sen} \vartheta \quad x' = \sqrt{2J\omega} \cos \vartheta$$

<sup>(1)</sup> A. WIMAN, *Über eine Stabilitätsfrage in der theorie der linearen differentialgleichungen*, « Acta Mathematica », 66, 1936, pag. 121.

<sup>(2)</sup> Vedi memorie citate.



dove  $J$  e  $\vartheta$  sono nuove funzioni (incognite) della variabile  $t$ , si trova la relazione

$$[5] \quad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta dt} \quad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\vartheta dt$$

dove  $J_0$  e  $\vartheta_0$  sono i valori iniziali di  $J$  e  $\vartheta$  calcolabili facilmente mediante le [4] e [2] dai valori iniziali di  $y$  e  $y'$ . Le formule di [5] non permettono però il calcolo esplicito di  $J$  e  $\vartheta$  perchè contengono a 2° membro gli integrali da 0 a  $t$  di  $\frac{\omega'}{\omega} \cos 2\vartheta$  e  $\frac{\omega'}{\omega} \sin 2\vartheta$  che sono incogniti perchè dipendenti da  $\vartheta$ ; ma supponendo  $\omega$  variabile lentamente col tempo, considerazioni che si riconnettono alla teoria degli invarianti adiabatici, inducono a ritenere gli integrali ora citati, trascurabili, e del resto esporremo fra poco il metodo che assicura la validità di tale ipotesi. Allora le [5] si riducono a

$$[6] \quad J = J_0 \quad \vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega dt$$

Perciò per le [4] e [6] la soluzione approssimata della [1] è espressa dalle

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} y &= e^{-\int_0^t p dt} x = \frac{e^{-\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0}}{\sqrt{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} \\ y' &= -p e^{-\int_0^t p dt} x + e^{-\int_0^t p dt} x' = -\frac{p e^{-\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0}}{\sqrt{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} + \\ &\quad + e^{-\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0} \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \cos \left\{ \vartheta_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} \end{aligned} \right.$$

Le [7] rappresentano una soluzione approssimata di [1]. L'approssimazione sarà tanto maggiore quanto più piccoli in valore assoluto sono gli integrali

$$I(t) = \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\mathfrak{D} dt ; \quad I'(t) = \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\mathfrak{D} dt$$

Ora il GRAFFI ha dimostrato che

$$[8] \quad |I(t)| \leq \Delta_m a' \int_0^t |a'| dt + \left( \frac{1}{2} + \pi e^{\Delta_m a} \right) \Delta_m a \int_0^t |a'| dt + \Delta_m a$$

dove  $a$  vale  $\log \omega$  e  $\Delta_m a$  e  $\Delta_m a'$  sono rispettivamente i massimi in  $(0, t)$  di

$$\Delta a = \int_t^{t+\Gamma(t)} |a'| dt \quad \Delta a' = \frac{\int_t^{t+\Gamma(t)} |a''| dt \Gamma(t)}{\Delta_m a} \quad \Gamma(t) = \frac{2\pi}{\omega(t)}$$

Poichè identica limitazione vale per  $I'(t)$  si conclude che quanto più piccolo è il 2° membro di [8] (cioè tanto più piccoli sono  $\Delta_m a$  e  $\Delta_m a'$ ) tanto più approssimata è la nostra integrazione. Anzi la [8] ci dà facile modo di valutare questa approssimazione.

3. - Applichiamo ora i risultati ottenuti all'equazione:

$$[9] \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2p \frac{dy}{dt} + (A^2 e^{2\lambda t} + p^2) y = 0$$

con  $A, p, \lambda$  costanti positive.

Soluzioni approssimate di [9] sono date da

$$[10] \quad \begin{cases} y = e^{-(p+\frac{\lambda}{2})t} \sqrt{\frac{2J_0}{A}} \operatorname{sen} \left[ \mathfrak{D}_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right] \\ y' = -pe^{-(p+\frac{\lambda}{2})t} \sqrt{\frac{2J_0}{A}} \operatorname{sen} \left[ \mathfrak{D}_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right] + e^{-(p-\frac{\lambda}{2})t} \sqrt{2J_0 A} \cos \left[ \mathfrak{D}_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right] \end{cases}$$

Si ha poi subito, applicando la [8] e tenendo presente che  $T(t) = \frac{2\pi}{A} e^{-\lambda t} < \frac{2\pi}{A}$

$$a' = \lambda; \quad \Delta_m a' = 0; \quad \Delta a = T(t)\lambda < \frac{2\pi}{A} \lambda$$

$$[11] \quad I(t) \leq \left( \frac{1}{2} + \pi e^{\frac{2\pi\lambda}{A}} \right) \frac{2\pi\lambda^2}{A} t + \frac{2\pi\lambda}{A}$$

e analogia limitazione vale per  $I'(t)$ . In base alle [5] e [7] e [1] la soluzione esatta di [9] sarebbe però data da

$$[12] \quad \left\{ \begin{aligned} y &= e^{-\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{\frac{2J_0}{A}} \operatorname{sen} \left[ \vartheta_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2} \right] \\ y' &= -pe^{-\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{\frac{2J_0}{A}} \operatorname{sen} \left[ \vartheta_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2} \right] + \\ &\quad + e^{-\left(p - \frac{\lambda}{2}\right)t - I(t)} \sqrt{2J_0 A} \operatorname{cos} \left[ \vartheta_0 + \frac{A}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + \frac{I'(t)}{2} \right] \end{aligned} \right.$$

Esaminiamo ora le [10]. È interessante notare che se  $\frac{\lambda}{2} > p$  la  $y$  tende allo zero per  $t \rightarrow \infty$  mentre il valore di  $y'$  in certi istanti e in particolare quelli in cui l'argomento del coseno di [10] assume il valore  $k\pi$  ( $k$  intero), tendono al trascorrere del tempo a crescere esponenzialmente, cioè a diventar grandi quanto si vuole. In altre parole, al tendere di  $t$  all'infinito, se  $y$  rappresentasse la coordinata di un punto mobile, la sua posizione tende a zero, mentre, in sostanza, la velocità compie oscillazioni la cui ampiezza tende all'infinito. Il moto sarebbe dunque instabile anche in presenza di smorzamento.

Invece se  $p > \frac{\lambda}{2}$ , anche  $y'$  tende allo zero per  $t \rightarrow \infty$  e il moto è stabile.

Ma questa deduzione non è però rigorosa perchè abbiamo trascurato i termini  $I(t)$  e  $I'(t)$  di cui, per ora, non abbiamo esaminato il comportamento all'infinito. Per far ciò, premettiamo la seguente osservazione essenziale. Se nella formula [9] spostiamo l'origine dei tempi, cioè cambiano  $t$  in  $t'$  ponendo

$$t' = t - t_0$$

dell'errore commesso con questa approssimazione. Poi, presa in esame l'equazione particolare

$$y'' + 2py' + (A^2 e^{2\lambda t} + p^2)y = 0$$

con  $A, p, \lambda$  costanti positive, dimostreremo un curioso caso di instabilità. Proveremo infatti che, pure essendo  $p > 0$  cioè presente lo smorzamento, al tendere di  $t$  all'infinito  $y$  tende allo zero; ma se  $p < \frac{\lambda}{2}$ , la  $y'$  non tende allo zero, anzi in certi istanti diventa grande quanto si vuole; se invece  $p > \frac{\lambda}{2}$ ,  $y'$  per  $t$  tendente all'infinito tende allo zero e la  $y$  è soluzione stabile della [1]. Questo teorema si comprende e potrebbe anche dedursi dai risultati del WIMAN<sup>(1)</sup> per l'equazione di un moto non smorzato (cioè per la [1] con  $p=0$ ) ma abbiamo creduto opportuno ottenerlo in modo del tutto indipendente da queste memorie.

2. - Facciamo nella [1] la sostituzione ben nota

$$[2] \quad y = e^{\int_0^t p \, dt} x$$

dove  $x$  è una nuova incognita; otteniamo subito:

$$[3] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -(q^2 - p^2 - p')x = -\omega^2 x$$

con ovvio significato del simbolo  $\omega$ , che supporremo in ogni istante positivo.

Ora il GRAFFI<sup>(2)</sup> ha dato la seguente soluzione di [1]. Posto

$$[4] \quad x = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \operatorname{sen} \vartheta \quad x' = \sqrt{2J\omega} \cos \vartheta$$

<sup>(1)</sup> A. WIMAN, *Über eine Stabilitätsfrage in der theorie der linearen differentialgleichungen*, « Acta Mathematica », 66, 1936, pag. 121.

<sup>(2)</sup> Vedi memorie citate.

dove  $J$  e  $\mathcal{D}$  sono nuove funzioni (incognite) della variabile  $t$ , si trova la relazione

$$[5] \quad J = J_0 e^{-\int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \cos 2\mathcal{D} dt} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \int_0^t \omega dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\omega'}{\omega} \sin 2\mathcal{D} dt$$

dove  $J_0$  e  $\mathcal{D}_0$  sono i valori iniziali di  $J$  e  $\mathcal{D}$  calcolabili facilmente mediante le [4] e [2] dai valori iniziali di  $y$  e  $y'$ . Le formule di [5] non permettono però il calcolo esplicito di  $J$  e  $\mathcal{D}$  perchè contengono a 2° membro gli integrali da 0 a  $t$  di  $\frac{\omega'}{\omega} \cos 2\mathcal{D}$  e  $\frac{\omega'}{\omega} \sin 2\mathcal{D}$  che sono incogniti perchè dipendenti da  $\mathcal{D}$ ; ma supponendo  $\omega$  variabile lentamente col tempo, considerazioni che si riconnettono alla teoria degli invarianti adiabatici, inducono a ritenere gli integrali ora citati, trascurabili, e del resto esporremo fra poco il metodo che assicura la validità di tale ipotesi. Allora le [5] si riducono a

$$[6] \quad J = J_0 \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \int_0^t \omega dt$$

Perciò per le [4] e [6] la soluzione approssimata della [1] è espressa dalle

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} y &= e^{\int_0^t p dt} x = \frac{e^{-\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0}}{\sqrt{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \mathcal{D}_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} \\ y' &= -p e^{\int_0^t p dt} x + e^{\int_0^t p dt} x' = -\frac{p e^{-\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0}}{\sqrt{q^2 - p^2 - p'}} \operatorname{sen} \left\{ \mathcal{D}_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} + \\ &\quad + e^{\int_0^t p dt} \sqrt{2J_0} \sqrt{q^2 - p^2 - p'} \cos \left\{ \mathcal{D}_0 + \int_0^t \sqrt{q^2 - p^2 - p'} dt \right\} \end{aligned} \right.$$

dove  $t_0$  è una costante, l'equazione [9] rimane invariata soltanto A va sostituita dalla costante  $Ae^{\lambda t_0}$ . Ora preso  $t_0$  sufficientemente grande si può rendere questa costante grande quanto si vuole. Si conclude dunque che con una opportuna scelta dell'origine del tempo l'equazione [9] a cui soddisfa la  $y$  rimane la stessa solo che la costante che moltiplica l'esponenziale  $e^{\lambda t}$  (e che potremo senza pericolo di equivoci indicare ancora con  $A^2$ ) si può scegliere grande quanto si vuole e in particolare soddisfacente alla diseuguaglianza (essendo  $\alpha$  un numero positivo inferiore a  $\frac{\lambda}{2} - p$ ; ammetteremo cioè  $\frac{\lambda}{2} > p$ )

$$[13] \quad \frac{\lambda}{2} - p > \alpha \geq \left( \frac{1}{2} + \pi e^{\frac{2\pi\lambda}{A}} \right) \frac{2\pi\lambda^2}{A}$$

Quindi<sup>(1)</sup>

$$[14] \quad |I(t)| \leq \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{A} \quad |I'(t)| \leq \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{A}$$

Ciò posto, riprendiamo la prima di [12]. Poichè si ha

$$[14'] \quad e^{-(p+\frac{\lambda}{2})t+I(t)} \leq e^{-(p+\frac{\lambda}{2})t+|I(t)|} \leq e^{-(p+\frac{\lambda}{2}-\alpha)t} e^{\frac{2\pi\lambda}{A}}$$

e poichè  $\alpha$  è minore di  $\frac{\lambda}{2} - p$  e quindi di  $\frac{\lambda}{2} + p$  si vede subito che il limite del secondo membro di [14'] per  $t \rightarrow \infty$  è nullo, quindi tale sarà anche il limite del primo. Allora dalla prima di [12], essendo il seno sempre limitato si deduce che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$$

Studiamo ora la  $y'$ . Osserviamo che l'argomento  $\vartheta$  del seno e del coseno che compaiono nella sua espressione tende all' $\infty$  per  $t \rightarrow \infty$  e

---

(<sup>1</sup>) Anche se l'origine è spostata indicheremo ancora per semplicità il tempo con  $t$ .

ciò perchè i primi due termini di  $\mathcal{S}$  tendono a infinito, per  $t \rightarrow \infty$ , in modo esponenziale, mentre l'ultimo  $I'(t)$ , per la [11] anche se tendesse a  $-\infty$ , vi tenderebbe al più in modo lineare. Perciò esisterà una successione di istanti tendente all'infinito  $t_1, t_2, \dots t_n \dots$  per cui è  $t_n = n\pi$  ( $n$  intero). Allora i valori assoluti di  $y'$  in questo istante saranno

$$|y'(t_n)| = e^{-\left(p - \frac{\lambda}{2}\right)t_n + I(t_n)} \sqrt{2J_0 A} > e^{-\left(p - \frac{\lambda}{2}\right)t_n - |I(t_n)|} \sqrt{2J_0 A} > \sqrt{2J_0 A} e^{\left(\frac{\lambda}{2} - p - \alpha\right)t_n} e^{-\frac{2\pi\lambda}{A}n\pi} \\ [15] \\ = \sqrt{2J_0 A} e^{\left(\frac{\lambda}{2} - p - \alpha\right)n\pi} e^{-\frac{2\pi\lambda}{A}n\pi}$$

Ora nell'esponente, il coefficiente  $\frac{\lambda}{2} - p - \alpha$  di  $\pi n$  è, per l'ipotesi fatta su  $\alpha$ , positivo, perciò  $|y'(t_n)|$  per  $n \rightarrow \infty$  ossia  $t_n \rightarrow \infty$ , tende a  $+\infty$ . Il moto è perciò instabile. Si avrà la stabilità del moto se  $p > \frac{\lambda}{2}$ . Per provare ciò si supponga di aver scelto  $A$  in modo che valgano ancora le [14], [14'] dove ora però  $\alpha$  è inferiore a  $p - \frac{\lambda}{2}$ . Allora per i due esponenziali che compaiono nelle [12] si può scrivere:

$$e^{-\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)t + I(t)} \leq e^{-\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)t + \alpha t + \frac{2\pi\lambda}{A}t} = e^{\frac{2\pi\lambda}{A}t} e^{-\left(p + \frac{\lambda}{2} - \alpha\right)t} e^{-\lambda t} \\ e^{-\left(p - \frac{\lambda}{2}\right)t + I(t)} < e^{-\left(p - \frac{\lambda}{2} - \alpha\right)t} e^{-\frac{2\pi\lambda}{A}t}$$

Poiché  $\alpha < p - \frac{\lambda}{2}$  e  $p > \frac{\lambda}{2}$  i secondi membri di queste disequaglianze tendono per  $t \rightarrow \infty$  allo zero: altrettanto perciò succederà per i primi. Allora passando al limite per  $t \rightarrow \infty$  nelle [12] si avrà:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} y' = 0$$

e ciò dimostra la stabilità della soluzione.

## UN'OSSERVAZIONE SUL CALCOLO DELLE CATENE INFINITE DI TRASDUTTORI ELETTRICI (\*)

ANNIBALE BLANCHI

SUMMARY. — In formulis analyticis quae ad infinitas electricorum transductorum catenas attinent, et ad apparatus electricis undis emittendis, signa ambigua oriuntur (scil.: +, -); quae res olim nimis negligi solebat, necdum plane explanari potuit.

Auctor solutionem tradit cuiusdam casus peculiari difficultate obnoxii.

Consideriamo una catena infinita di trasduttori elettrici uguali, passivi. Si indichi con  $V_0$  e  $I_0$  il voltaggio e l'ampereaggio ai morsetti d'entrata del 1° trasduttore;  $V_1$  e  $I_1$  ai morsetti d'entrata del 2°;  $V_n$  e  $I_n$  ai morsetti  $n+1$ esimo.

I successivi voltaggi e ampereaggi sono legati da relazioni lineari di questo tipo:

$$[1] \quad \begin{cases} V_0 = aV_1 + bI_1 \\ I_0 = cV_1 + dI_1 \end{cases}$$

Nel caso di correnti continue le  $V$  e le  $I$  e così pure le  $a, b, c, d$ , sono grandezze reali. Nel caso di correnti alternanti sinusoidali si deve intendere che i simboli complessi sono sostituiti a quelli reali e che le  $a, b, c, d$ , dipendono oltrechè dalle resistenze anche dalle induttanze e capacità componenti e sono funzioni della frequenza. Questo caso delle correnti alternanti sinusoidali è quello che interessa i filtri elettrici.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 30 novembre 1941.



Indichiamo con:

$$G = \frac{I_0}{V_0} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{I_2}{V_2} \dots$$

la conduttanza, o ammettenza, asintotica della catena infinita di trasduttori. Similmente con:

$$S = \frac{V_1}{V_0} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{V_2}{V_1} \dots$$

indichiamo il rapporto di trasmissione della catena stessa.

Poichè facciamo l'ipotesi che l'energia partendo dal 1° trasduttore viaggi nel senso delle  $n$  crescenti il modulo di  $S$  deve riuscire minore od eguale all'unità.

Con un noto calcolo dalla [1] si deduce:

$$[2] \quad G = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b}$$

ed

$$[3] \quad S = \frac{a + d \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2}$$

abbiamo pure che l'inverso di  $G$  (cioè la resistenza o impedenza asintotica) assume la forma:

$$[4] \quad R = \frac{1}{G} = \frac{d - a \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

L'esame di queste formule fermò la mia attenzione sulla questione del segno da far precedere al radicale.

Il segno non poteva infatti essere preso indifferentemente ma doveva essere tale che:

$$|S| \leq 1$$

*Questa osservazione era trascurata nella letteratura dei trasduttori.*

Veniva scelto quasi sempre uno solo dei segni, e precisamente il segno *meno*, da far precedere al radicale nell'espressione di  $S$  (e quindi

il segno *più* in quelle di G e di R) perchè, si faceva riferimento al caso di trasduttori composti di sole resistenze ohmiche, in corrente continua o alternante, ed all'ipotesi che  $a$  e  $d$  fossero positive; allora per:

$$a + d > 2$$

era necessario porre il segno *meno* davanti al radicale per avere

$$|S| < 1$$

(quando  $(a + d) < 2$  si ha sempre  $|S| = 1$ ). Ma le formule che forniscono G, R ed S non sono, in questo caso, trasportabili senz'altro nel campo delle correnti alternanti, con la sostituzione dei numeri complessi ai numeri reali, perchè la scelta del segno davanti al radicale implica la considerazione di maggiore o minore, considerazione non trasportabile dal campo reale a quello complesso.

Le conclusioni relative al segno da far precedere al radicale, tratte per correnti continue, non sono quindi applicabili al caso di correnti alternanti, in circuiti contenenti induttanze e capacità ove  $a, b, c, d$ , risultano complessi.

Infatti, ad esempio, in un filtro a T, simmetrico, passa basso, costruito nella forma più semplice, quando sia:

$$[6] \quad \omega^2 LC > 2$$

la  $a$  e  $d$  sono reali e soddisfano alla condizione:

$$(a + d) < -2$$

Davanti al radicale si deve allora porre il segno *più*.

È quindi necessario far precedere al radicale talvolta il segno *più* talvolta il *meno*.

Mi proposi di esaminare la questione e stabilire, a priori, quale segno debba precedere il radicale per un trasduttore qualsiasi, formato da resistenze induttanze e capacità. In questo trasduttore,  $a, b, c, d$ , sono complessi, e non, come nel caso dei filtri, reali o immaginari

puri. Questo complicò notevolmente la questione, ma permise di risolverla in modo completo.

Posto  $\frac{a+d}{2}$  sotto forma di un unico numero complesso  $P+jQ$  e indicato con  $x+jy$  il valore della radice, stabilii, in un primo tempo, che, se i valori assoluti di  $P$  e  $Q$  erano preceduti dallo stesso segno questo fatto doveva verificarsi anche per il segno che doveva precedere  $x$  e  $y$ . Se invece  $P$  e  $Q$  erano preceduti da segno opposto questo doveva verificarsi anche per  $x$  e  $y$  (per  $P=0$  risultava sempre  $x=0$ ). Premesso questo determinai quanto costituiva oggetto della ricerca:

*Il segno da far precedere al radicale deve essere scelto in modo da rendere il segno di  $x$  opposto a quello di  $P$  (e quindi quello di  $y$  risulta opposto a quello di  $Q$ ).*

Quando  $Q=0$  e  $x=0$  (si verifica questo per  $\frac{a+d}{2}=P$  reale e  $|P|<1$ , come nel caso delle zone passanti dei filtri ideali, puramente reattivi) si avrebbe il caso denominato *ambiguo* perchè in base alla premessa  $|S|\leq 1$ , sarebbe indifferente far precedere il segno *più* o il *meno* al radicale.

Escluso questo caso osserviamo che, una volta fissato il segno da far precedere al radicale nell'espressione di  $S$  viene stabilito anche quello da far precedere al radicale nelle espressioni di  $G$  e di  $R$ .

Occorre tener presente che, quando in  $S$  compare il *meno*, in  $R$  e  $G$  deve comparire il *più* e viceversa.

Questi risultati furono esposti nella mia Memoria:

*Osservazioni alle formule che intervengono nel calcolo dei filtri elettrici*, pubblicata sulla « Rassegna delle Poste dei Telegrafi e dei Telefoni » del marzo 1938.

È stato da taluni osservato, che in luogo di partire dalla condizione  $|S|<1$ , avrei potuto prendere in considerazione l'espressione di  $R$  anzichè quella di  $S$  e fissare il segno del radicale in modo da rendere la parte reale di  $R$  positiva. Dalle espressioni di  $S$  e di  $R$  risulta però subito come questo procedimento sia molto più complicato. Nell'espressione di  $R$  intervengono, infatti, tre parametri complessi

anzichè due, come nell'espressione di  $S$ , ed uno di essi è al denominatore. Di più i parametri  $a$  e  $d$  non restano conglobati in un unico numero complesso, perchè fuori del radicale compare la loro differenza ed entro la loro somma mentre invece nell'espressione di  $S$  compare solo la somma.

Ritenni quindi opportuno, al fine proposto, considerare l'espressione di  $S$  anzichè quella di  $R$ .

Il caso *ambiguo*, però, fa eccezione.

Mostro qui, come detto caso, per i filtri ideali, possa venire risolto ricorrendo alla considerazione di  $R$ .

In questo caso, per le ipotesi fatte,  $a$  e  $d$  sono reali,  $|a+d| < 2$  e  $c$  e  $b$  sono immaginari puri.

Poichè per  $|a+d| < 2$  il radicale è un immaginario puro ed  $a-d$  è reale, nell'espressione di  $R$ , sarà  $\frac{d-a}{2c}$  l'immaginario e  $\frac{\pm \sqrt{(d+a)^2 - 4}}{2c}$  la parte reale.

Affinchè questa risulti positiva il radicale dovrà essere preso col segno *più* o *meno* in modo che il rapporto tra i due immaginari puri

$$\frac{\pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

sia positivo.

Se prendiamo in considerazione  $R$  anzichè  $S$  si ha, per i filtri elettrici, il caso ambiguo per  $|a+d| > 2$  anzichè per  $|a+d| < 2$ .

Infatti per  $|a+d| > 2$  l'espressione di  $R$  divonta un immaginario puro. Non è quindi possibile stabilire il segno della sua parte reale.

È evidente come il problema proposto si semplifichi nel caso particolare, importante, dei filtri elettrici ideali, ove  $a$  e  $d$  sono reali e  $b$  e  $c$  immaginari puri.

Il segno da far precedere al radicale è spesse volte, subito, evidente e non si pensa allora a prendere in esame di questione.

Per  $a+d < -2$  occorre far precedere al radicale il segno *più*, per  $a+d > 2$  il segno *meno*. Per  $|a+d| \leq 2$ , nell'espressione di  $R$ , il segno che rende il rapporto  $\frac{\pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$  positivo.

Con l'uso delle funzioni iperboliche l'attenuazione prodotta da una cellula è, apparentemente, calcolabile senza dover considerare il segno da far precedere al radicale.

Infatti posto:

$$[7] \quad S = e^k$$

si ottiene:

$$[8] \quad \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \cosh k = \frac{a+d}{2}$$

dei due valori, opposti, di  $k$  che soddisfano a questa equazione si sceglieva quello ove la parte reale di  $k$  risultava negativa.

Non compare nella [8] il radicale, quindi non sembra necessario considerare il segno da attribuirgli per il calcolo dell'attenuazione prodotta da una cellula.

Occorre però fare subito un'osservazione. I due valori di  $S$ , ottenuti ponendo il segno *più* o il segno *meno* davanti al radicale, sono reciproci fra di loro; infatti:

$$\begin{aligned} \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2} \cdot \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2} &= \\ &= \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Gli esponenziali rappresentanti i due valori di  $S$  differiscono, quindi, solo per il segno da attribuire all'esponente. Applicato allora, a questi esponenziali, il calcolo che conduce alle [8] si ottiene, ponendo davanti al radicale, sia il segno *più* sia il segno *meno* la stessa espressione

$$\cosh k = \frac{a+d}{2}$$

soltanto il segno da attribuire all'argomento distingue i due casi uno dall'altro. Questo non era accertabile dalla [8] perchè il coseno iperbolico è una funzione pari. L'eventuale errore commesso, in partenza, sul segno attribuito al radicale non veniva così rilevato.

Ritengo che questa ultima osservazione, unita a quella sulla facilità colla quale si determina il segno da attribuire al radicale nel caso dei filtri elettrici, ove le formule [2], [3], [4], trovano maggiore applicazione pratica, renda ragione del motivo per cui la questione del segno da far precedere al radicale sia stata sollevata soltanto in tempi recenti.

## FORMULE RISOLUTIVE PER I PROBLEMI GENERALI SULLE RETI DI CONDUTTORI ELETTRICI (\*)

CARLOTTA PATERNA

SUMMARIVM. — Inquirat Auctor in problemate generali de computatione retis conductorum electricorum et formulae resolutionis ostendit.

1. — Data una rete composta di un qualunque numero finito di conduttori ohmici, si presenta il problema di calcolare le correnti nei singoli lati e le differenze di potenziale fra le singole coppie di nodi, quando la rete è sollecitata da forze elettromotrici date agenti lungo i lati, quando intensità di correnti date entrano in alcuni nodi, e quando altri nodi sono mantenuti da sorgenti esterne a potenziali obbligati. Ogni problema di questo tipo si può risolvere di volta in volta, scrivendo le equazioni di KIRCHHOFF per ogni maglia e semplificando i calcoli, se si vuole, con la considerazione delle correnti circolanti (metodo di MAXWELL). Partendo da questi fondamenti, interessa ricavare formule generali che diano senz'altro la soluzione di  $n$  nodi in forma algebrica.

Un primo esempio di formule di questo tipo si trova già in MAXWELL (1), altri autori hanno esposto nuove formule, tra cui J. H. JEANS (2). G. GIORGI (3).

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata 20 febbraio 1942.

(1) J. C. MAXWELL, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 2<sup>a</sup> ed. Vol. I, § 280.

(2) J. H. JEANS, *The mathematical Theory of electricity and magnetism*, 5<sup>a</sup> ed. Cambridge, 1925, Cap. IX, Art. 360 e segg.

(3) G. GIORGI, *Lezioni di fisica matematica tenuta alla R. Università di Cagliari*, Vol. I, Roma, 1926-27, Cap. V.

Qui ho voluto riprendere la ricerca nella forma più generale. In questa ricerca interviene una certa matrice formata dalle conduttanze dei lati della rete. Ho trovato alcune uguaglianze e proprietà dei determinanti minori di questa matrice e ne ho tratto profitto per ottenere nella forma più semplice le formule risolutive.

Confido di aver potuto dare un insieme completo di tali formule, atto alla risoluzione esplicita dei diversi problemi tipici cui ho fatto cenno più sopra. Spero con ciò che questo lavoro possa riuscire utile agli studiosi.

\* \* \*

2. - Sia data una qualsiasi rete di conduttori ohmici.

Indichiamo con  $g_{RS}$  la conduttanza del lato che congiunge il nodo R e il nodo S; con  $i_{RS}$  la corrente che fluisce nel lato RS nel verso da R verso S; con  $e_{RS}$  la f.e.m. impressa inserita in detto lato, sempre in detto verso; infine sia  $V_R$  il potenziale nel nodo generico R,  $I_R$  la corrente che, dall'esterno, eventualmente, affluisce al nodo R.

Valgono le relazioni:

$$g_{RS} = g_{SR}; \quad e_{RS} = -e_{SR}; \quad i_{RS} = -i_{SR}$$

Per convenzione poniamo:

$$g_{SS} = - \sum_{R=1}^n g_{RS} \quad R \neq S$$

e consideriamo il determinante simmetrico:

$$D = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix}$$



Questo determinante, a causa della convenzione posta, per cui tutte le righe e tutte le colonne hanno per somma zero, è nullo; inoltre ha la proprietà di avere tutti i minori di ordine  $n-1$  uguali tra loro, come si può facilmente verificare. Tale proprietà, che credo non sia stata finora osservata, permette di semplificare le formule, indicando con  $D_0$  uno qualunque di tali minori, mentre con  $D_{qs}^{pr}$  viene indicato il determinante che si ottiene da  $D$  sopprimendo le righe e le colonne che si incrociano sugli elementi  $g_{pr}, g_{qs}$ .

3. - Poste queste convenzioni, consideriamo anzitutto il caso più semplice in cui ai nodi della rete non arrivi alcuna corrente dall'esterno e le f.e.m. impresse siano inserite nei lati. Allora la corrente che fluisce lungo il lato generico  $R S$  è:

$$[1] \quad i_{rs} = g_{rs} (V_r - V_s + e_{rs})$$

e per ogni nodo come  $R$  si ha l'equazione:

$$\sum_S i_{rs} = 0$$

ovvero:

$$[2] \quad \sum_S g_{rs} (V_r - V_s + e_{rs}) = 0$$

Questo sistema di equazioni è evidentemente indeterminato, quando come incognite si vogliono riguardare i potenziali, perchè questi possono venire incrementati tutti di una comune costante additiva, senza che vengano perturbate le condizioni della rete e senza che le equazioni cessino di essere soddisfatte.

Ciò è in accordo col fatto che, ordinando le equazioni e scrivendole come equazioni nelle incognite  $V_i$ , il determinante dei coefficienti di queste incognite, essendo il determinante  $D$ , è nullo. Il sistema è invece determinato se come incognite si assumono le differenze dei potenziali.



Questa ha, naturalmente, lo stesso valore della precedente ed è più semplice, poichè si riduce al calcolo di due determinanti invece che di tre. Essa mette in evidenza un'altra proprietà del determinante  $D$ : la differenza tra due minori di ordine  $n-2$ , complementi algebrici di due elementi appartenenti alla stessa riga o alla stessa colonna di una medesima matrice di ordine  $n-1$ , complemento algebrico di un elemento della diagonale principale di  $D$ , è ancora un minore di ordine  $n-2$  di  $D$ . Anche questa proprietà permette una semplificazione delle formule.

Al rapporto

$$[5] \quad \frac{V_r - V_s}{e_{rQ}} = g_{rQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0}$$

si può dare il nome di fattore di trasduzione tra f.e.m.

Poichè è

$$i_{rs} = (V_r - V_s) g_{rs}$$

introducendo la [4] risulta:

$$[6] \quad \frac{i_{rs}}{e_{rQ}} = g_{rs} g_{rQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0}$$

il 2° membro è quello che riceve il nome di *ammettenza mutua* dei due lati RS, PQ, e si indica col simbolo  $G_{PQ}^{RS}$ . Il nome è giustificato dal fatto che a una f.e.m.  $e_{rQ}$  inserita nel lato PQ, corrisponde nel lato RS una corrente

$$[7] \quad i_{rs} = G_{PQ}^{RS} e_{rQ}$$

e a una f.e.m. inserita nel lato RS, corrisponde nel lato PQ una corrente

$$[8] \quad i_{rQ} = G_{PQ}^{RS} e_{rs}$$

Queste formule conducono al noto teorema di reciprocità:

« La corrente che fluisce in un lato PQ, quando una f.e.m. impressa è inserita nel lato RS, è uguale alla corrente che fluisce nel lato RS quando la stessa f.e.m. è inserita nel lato PQ ».

5. - Ricavando invece la d. d. p. e l'intensità di corrente lungo lo stesso lato PQ in cui agisce la f.e.m., si ha:

$$[9] \quad V_P - V_Q = e_{PQ} g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

$$[10] \quad i_{PQ} = e_{PQ} g_{PQ} \left[ g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0} + 1 \right]$$

All'espressione

$$[11] \quad G_{PQ}^{PQ} = g_{PQ} \left[ g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0} + 1 \right]$$

si addice il nome di *conduttanza*; conduttanza del sistema composto del lato PQ e del complesso della rete compresa tra i nodi P e Q.

6. - Interessa frequentemente determinare la conduttanza  $G_{PQ}$  di una rete, essa sola, tra due nodi P e Q, considerati come estremi della rete. Si ottiene questo come caso particolare del precedente quando  $g_{PQ}$  diventa infinita essendo la f.e.m. applicata direttamente tra i due nodi. L'espressione [11] ha bisogno in tal caso di essere modificata per eliminare gli infiniti. Più semplicemente si può sottrarre  $g_{PQ}^{-1}$  dalla reciproca della precedente. L'elemento  $g_{PQ}$  viene eliminato dal risultato, il quale si può porre sotto la forma

$$[12] \quad G_{PQ} = - \frac{D_0}{D_{PP}^{QQ}}$$

purchè si pongano uguali a zero tutti gli elementi di  $D_0$  che contengono  $g_{PQ}$ .

La d. d. p. tra due nodi qualunque si ottiene, in questo caso, dividendo il numeratore e il denominatore della [9] per  $g_{PQ}$  e mandando al limite per  $g_{PQ} \rightarrow \infty$ .

Si perviene alla formula:

$$[13] \quad V_r - V_s = e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_{PP}^{QQ}}$$

dove non compaiono più gli infiniti.

7. - Il caso generale di  $n$  forze elettromotrici inserite in tutti gli  $n$  lati, per la proprietà additiva delle d. d. p., si può ricavare dal caso di una sola f. e. m. impressa, sommando  $\binom{n}{2}$  termini analoghi a quello già trovato:

$$[14] \quad V_r - V_s = \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{1}{D_0} \left[ D_{SS}^{PR} - D_{SS}^{QR} \right] \quad \begin{array}{l} \text{dove } P = 1, 2, \dots, n-1 \\ \quad \quad Q = 2, 3, \dots, n \\ \quad \quad P < Q \end{array}$$

e nei determ.  $Q \neq S$

ovvero

$$[15] \quad V_r - V_s = \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} \quad \text{con le stesse condizioni.}$$

Facendo figurare le ammettenze mutue:

$$G_{RS}^{PQ} = g_{PQ} g_{RS} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0}$$

si ha la corrente nel lato generico RS sotto la forma:

$$[16] \quad i_{rs} = \sum_{P,Q} G_{RS}^{PQ} e_{PQ} + g_{rs} e_{rs}$$



La corrente nel lato PQ è

$$[19] \quad i_{PQ} = -g_{PQ} I_P \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

Il fattore di traduzione tra le correnti è invece

$$[20] \quad \frac{i_{PQ}}{I_P} = -g_{PQ} \frac{D_{PP}^{QQ}}{D_0}$$

9. - Nel caso generale in cui a tutti i nodi arrivino delle correnti, la *d. d. p.* tra due nodi qualunque si riduce a una sommatoria di termini analoghi al 2° membro della [17]:

$$[21] \quad V_R - V_S = - \sum_{L}^n I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0} \quad L \neq S$$

La corrente che fluisce nel lato RS sarà

$$[22] \quad i_{RS} = -g_{RS} \sum_{L}^n I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0}$$

Questa formula dà la distribuzione delle correnti in ciascun lato della rete quando siano note le conduttanze dei lati e le correnti che arrivano a ogni nodo.

10. - Estendendo i risultati ottenuti al caso in cui f. e. m. impresse siano inserite in tutti i lati e correnti arrivino a tutti i nodi, si hanno per le *d. d. p.* e per le correnti le formule generali:

$$[23] \quad V_R - V_S = \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} - \sum_{L}^n I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0}$$

$$[24] \quad i_{RS} = g_{RS} \left[ \sum_{P,Q} g_{PQ} e_{PQ} \frac{D_{QS}^{PR}}{D_0} + e_{RS} - \sum_{L}^n I_L \frac{D_{SS}^{LR}}{D_0} \right]$$

con le condizioni già convenute riguardo alla variazione degli indici. Da queste si può poi discendere, con facili calcoli, a qualsiasi caso particolare.

OSSERVAZIONI  
SU UN NUOVO *PSEUDAMPHISTOMUM* UMANO  
DELL' ETIOPIA (\*)

(Con cinque figure in tavola f. t.)

UMBERTO PIERANTONI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Refert Auctor de novo trematode parasita interaneo humano ex intestinis cuiusdam aethiopsis in A. O. I. reperto.

Il dott. Raffaele Cacciapuoti ebbe a presentarmi per determinazione qualche mese fa alcuni esemplari di un piccolo trematode che mi disse di aver trovato nell'Africa orientale italiana e propriamente nella regione del Gimma nella parete intestinale di un negro nella sottomucosa ove gli esemplari, cinque o sei, si trovavano contenuti in una sorta di nodulo notevolmente resistente, tanto che per liberare gli esemplari non bastò il semplice grattamento della superficie interna dell'intestino.

All'esame sommario compresi trattarsi di una forma di Opistorchide appartenente al genere *Metorchis* o, come vuole il LÜHE, al genere *Pseudamphistomum*, ma la sua presenza in un uomo, con il suo rinvenimento in Abissinia, mentre le specie note del genere sono state finora rinvenute solo in Europa ed in Asia, mi ha fatto sorgere il desiderio di farne oggetto di un più accurato esame, data anche la rarità di questo genere ed il fatto che sulla sua organizzazione e posizione sistematica, oltre che sul suo ciclo biologico, non si è ancora detta l'ultima e definitiva parola.

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 30 novembre 1941.



Nel 1819 RUDOLPHI diede notizia di un trematode digenetico che chiamò *Amphistoma truncatum*, parassita del fegato del gatto, e lo assegnò al genere *Amphistoma* interpretando come ventosa posteriore l'estremo del corpo slargato a campana, caratteristica di questo trematode. Nel 1846 l'ERCOLANI trovò tre individui di questo genere nella cistifellea di un cane a Bologna e poi lo ritrovò ancora nel 1875 nel fegato di un cane, facendone oggetto di descrizione come di una nuova specie che chiamò *Distoma campanulatum*. Nel 1892 WINOGRADOFF rinvenne in un uomo a Tomsk dei piccoli trematodi che descrisse come *Opistorchis felineus*, ma che, secondo BRAUN, potrebbero assegnarsi a *Metorchis truncatus* (Rad.) di cui sopra, in considerazione specialmente delle dimensioni e della spinosità della pelle. Su questo reperto alquanto dubbioso *Metorchis truncatus* è stato in questi ultimi tempi riportato come probabile parassita umano e quindi è amoverato anche nell'opera del BRAUN sui parassiti animali dell'uomo.

Gli esemplari studiati da ERCOLANI, e rinvenuti nel fegato di un cane, ove avevano formato dei noduli nel parenchima, circondati da tessuto fibroso, forse originati da trasformazione di tratti di tuboli epatici, ricchi di cavità interne ripiene di liquido purulento e di numerosissimi esemplari di questi vermi, erano assai piccoli, non più di mm. 1,5 di lunghezza e con tegumento molto ricco di finissimi aculei. Il grande numero di uova contenute in questi esemplari mette fuor di dubbio che dovesse trattarsi di forma adulta. L'ERCOLANI dà una descrizione dei caratteri anatomici assai breve, incompleta e per alcuni dati errata <sup>(1)</sup>.

Nel 1908 LÜHE in un breve scritto ha voluto sistemare i generi, distaccando questa forma dal genere *Metorchis* e comprendendo nel genere *Pseudamphistomum* appunto questi opistorchidi con il corpo terminato a campana somigliante, ma non corrispondente, ad una ventosa, e riassumendo così i caratteri del nuovo genere: « Opistorchidi » al disotto della media grandezza, con corpo proporzionalmente corto, » introflesso posteriormente e mozzo, la cui grossezza alquanto dietro » la metà del corpo è la massima e si assottiglia in dietro come verso

(1) ERCOLANI G. B., *Osservazioni elmintologiche sulle dimorfobiosi nei Nematodi, sulla Filaria immitis e sopra una nuova specie di distoma dei cani*. Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna, 1875.

» l'estremo anteriore a forma di cono. Pelle aculeata. Sbocco della ve-  
» scicola escretoria sulla superficie ventrale, proprio dietro i testicoli  
» e solo poco innanzi l'estremo posteriore; sul fondo una insenatura  
» della pelle che ha forma di fossa o imbuto, limitata da un cercine  
» muscoloso. Rami dell'intestino giungenti fino all'estremo posteriore,  
» alquanto ripiegati verso l'interno senza peraltro avvolgere completa-  
» mente i testicoli. Questi pressochè rotondi, più affiancati che uno  
» dietro l'altro. Ovario tondeggiante tendente al reniforme, spinto al-  
» quanto in avanti dai testicoli, ricoperto dalla anse dell'utero, talora  
» diviso mediante queste dai testicoli. Tranne queste differenze utero  
» e vitellogeno come in *Metorchis* (1). Dotto iaculatorio con parte musco-  
» losa fortemente sviluppata ».

Questa diagnosi del genere a me sembra in verità troppo partico-  
lareggiata. Alcuni caratteri infatti si mostrano nella forma che ho preso  
in esame differenti anche dai caratteri generici del LÜHE, pur non es-  
sendovi dubbio che essa sia molto affine a quella che è stata oggetto  
delle osservazioni di questo autore quando egli ha fondato il genere  
*Pseudamphistomum*. Infatti negli esemplari, che sono nel mio caso net-  
tamente parassiti umani e che albergavano nella sottomucosa intesti-  
nale anzichè nel fegato, non vi è alla superficie del corpo la minima  
traccia di aculei. La pelle è assolutamente glabra, liscia e trasparente  
e non presenta alcuna sorta di struttura cuticolare. Secondo la dia-  
gnosi di LÜHE basterebbe questo carattere per dover attribuire la forma  
da me studiata ad un nuovo genere, ciò che mi guarderò bene dal  
fare, riconoscendo che per altri caratteri è molto affine alle specie di  
*Pseudamphistomum* finora note.

Ma vi sono, oltre alla mancanza di aculei cutanei, anche altri dati  
specialmente anatomici, che permettono di stabilire sugli esemplari da  
me studiati una nuova e ben distinta specie.

Il LÜHE che ha dato varie notizie sull'anatomia di *Pseudamphisto-  
mum truncatum* nel suo lavoro in cui scinde il genere da *Metorchis* nel  
quale era stato fin'allora incluso, dà anche delle figure da cui possono rica-  
varsi molti dati anatomici. Si ricava dal confronto con quelli della specie

---

(1) LÜHE M., *Zur Systematik und Faunistik der Distomen*. 1. Die Gattung  
*Metorchis* Looss nebst Bemerkungen über die Familie Opistorchiidae. Centralbl.  
Bakt., Parasitk. ecc. Bd. 48, 1908.

da me qui descritta: 1° Che i testicoli prendono delle dimensioni molto più vistose, come può ricavarsi dalla sezione rappresentata nella fig. 3; 2° che le uova, a giudicare della fig. 3<sup>a</sup> di LÜHE, in cui esse sono rappresentate in sezioni dell'ovario, sono assai più grandi in questa specie che in *P. truncatum* a meno che la figura di LÜHE, di natura un po' schematica, non le abbia rappresentate fuori delle dimensioni esatte. 3° La vescicola seminale grandissima si protrae lungo la parte mediana del corpo in una estensione pari alla metà della intera lunghezza dell'animale, riccamente circonvolta, ma la parte eiaculatoria, più prossima al poro sessuale, si presenta assai differente dalla descrizione che ne fa il LÜHE a proposito di *P. truncatum*. La parte prossima al poro genitale non differisce molto, ma la parte muscolare si presenta anch'essa a decorso ondulato, come la vescicola e non ha la grande prevalenza nella tunica muscolare longitudinale che il LÜHE descrive e figura, ma invece presenta ricchissima la muscolatura trasversale, e la longitudinale, più che formare un vero rivestimento muscoloso, forma delle sorta di briglie muscolose che si dipartono dal condotto e si dirigono verso la parete esterna del corpo confondendosi con lo strato muscolare cutaneo v. fig. 5. 4° Inoltre non vi è nella piccola tasca che trovasi presso lo sbocco alcuna formazione di cirro, mentre dalla figura di LÜHE pare che esso esista.

È infine da notare che innanzi a questo sbocco vi è un'area cutanea in cui la parete si presenta composta da grosse cellule di natura glandolare, che non è stata osservata in nessuna altra specie e che forse è un'area adesiva, utilizzabile durante l'accoppiamento (fig. 5, 2g).

I testicoli occupano quasi l'intero spessore del corpo (v. fig. 4 te).

La regione mediana del corpo è un poco rigonfia ed occupata oltre che dalla parte maschile (vescicola seminale), dai vitellogeni e soprattutto dall'utero pieno di uova. Negli individui ben maturi non è possibile di trovare più le tracce dell'utero, che va in disfaccimento sotto la pressione del gran numero di uova. Io ritengo anzi che la fuoriuscita delle uova mature dal corpo dell'animale avvenga per un processo di deiscenza della regione mediana del corpo, la cui pelle si trova lacerata in tutti gli esemplari giunti a completa maturità sessuale. Probabilmente questa deiscenza fa passare le uova nel liquido che si trova nella cavità della cisti o nodulo intestinale che contiene il verme, cisti che poi rompendosi a sua volta permette alle uova stesse

di versarsi nell'intestino ed indi venir fuori con le feci d'onde passeranno assai probabilmente ad infettare pesci o crostacei d'acqua dolce.

In complesso dunque questa specie di opisthorchide è da classificare senza dubbio nel genere *Pseudamphistomum* di LÜHE che, con maggiore larghezza di criteri, potrebbe essere caratterizzato nella seguente diagnosi che deve essere meno particolareggiata di quella di LÜHE.

#### Gen. *Pseudamphistomum*

« Opisthorchide con corpo conformato a campana per la presenza » di un infossamento terminale simulante ma non costituente una grossa » ventosa, con sbocco della vescicola escretoria verso la superficie ventrale, dietro i testicoli e poco innanzi l'estremo posteriore, sul fondo » della infossatura terminale a campana. Rami dell'intestino giungenti » fino all'estremo posteriore, alquanto ripiegati verso l'interno dopo aver » sfiorato i testicoli. Questi, accostati uno all'altro, poco prima dell'estremo posteriore. Ovaio tondeggianti o reniforme ».

Per tal modo potrebbero poi assegnarsi a questo genere tre specie: 1° Quella tipica descritta in origine da RUDOLFI e poi studiata da ERCOLANI, forse da WINOGRADOFF, da LÜHE ecc. e cioè *Pseudamphistomum truncatum*. 2° Quella di CIURBA trovata nel gatto nel 1913 e illustrata col nome di *P. danubiense*. 3° La presente, che proporrei di chiamare *Pseudamphistomum Aethiopicum*, specie sicuramente umana, la cui diagnosi potrebbe essere la seguente:

#### *Pseudamphistomum aethiopicum* n. sp.

Corpo lungo circa 2,2 mm., largo 0,7, spesso mm. 0,25, con forma complessiva a campana allungata per ampia infossatura terminale. Uova grandi, della lunghezza di circa 30  $\mu$ . Testicoli grandi, occupanti tutta la regione subterminale del corpo. Vescicola seminale protraentesi per una lunghezza pari alla metà dell'intera lunghezza del corpo, riccamente circonvolta, con porzione eiaculatoria anch'essa a decorso ondulato e con muscolatura circolare molto sviluppata. Area adesiva ventrale innanzi allo sbocco di questa vescicola. Superficie del corpo glabra, senza traccia di aculei.

Habitat. Uomo, in un tumoretto della parete interna intestinale, in Etiopia, regione del Gimma.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — *Pseudamphistomum aethiopicum*, fotografia da preparazione in toto di F. Giovanola.  $\times 20$ .

- » 2. — *P. aethiopicum* in diversi stati di contrazione.
- » 3. — Organizzazione interna di *P. aethiopicum*: *int*, intestino; *vg*, vitello-  
geni; *te*, testicolo; *ov*, ovario; *spt*, spermateca; *vv* ventosa ventrale;  
*ut*, utero; *pg*, poro genitale.
- » 4. — Sezione sagittale di *P. aethiopicum* (lettere come alla figura precedente).
- » 5. — Sezione della regione ventrale di *P. aethiopicum* in corrispondenza della  
ventosa ventrale e del poro genitale: *mu*, muscoli; *zg*, zona glan-  
dolare; il resto delle lettere come nelle figure precedenti.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

- Fig. 1. — *Pseudamphistomum aethiopicum*, fotografia da preparazione in toto di F. Giovanola.  $\times 20$ .
- » 2. — *P. aethiopicum* in diversi stati di contrazione.
  - » 3. — Organizzazione interna di *P. aethiopicum*: *int*, intestino; *vg*, vitello-geni; *te*, testicolo; *ov*, ovario; *spt*, spermateca; *vv* ventosa ventrale; *ut*, utero; *pg*, poro genitale.
  - » 4. — Sezione sagittale di *P. aethiopicum* (lettere come alla figura precedente).
  - » 5. — Sezione della regione ventrale di *P. aethiopicum* in corrispondenza della ventosa ventrale e del poro genitale: *mu*, muscoli; *zg*, zona glandolare; il resto delle lettere come nelle figure precedenti.



FIG. 1.

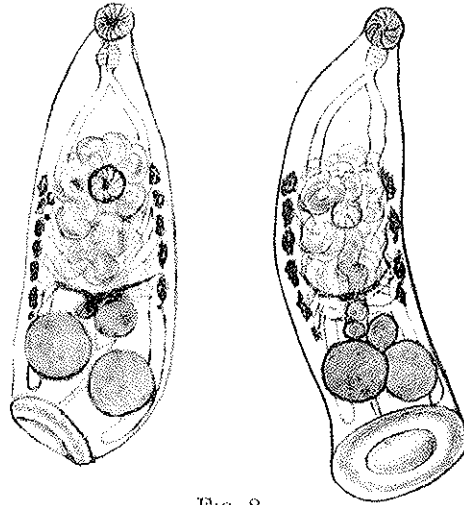


FIG. 2.

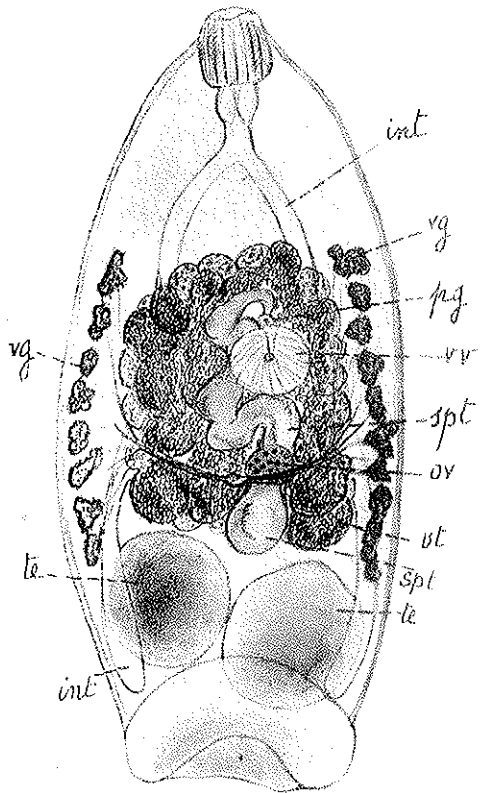


FIG. 3.

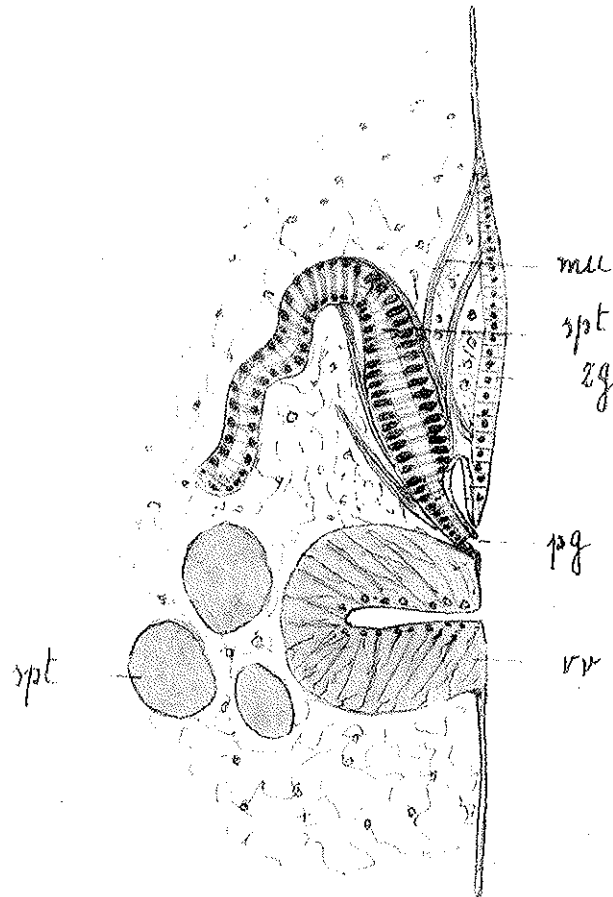


FIG. 5.

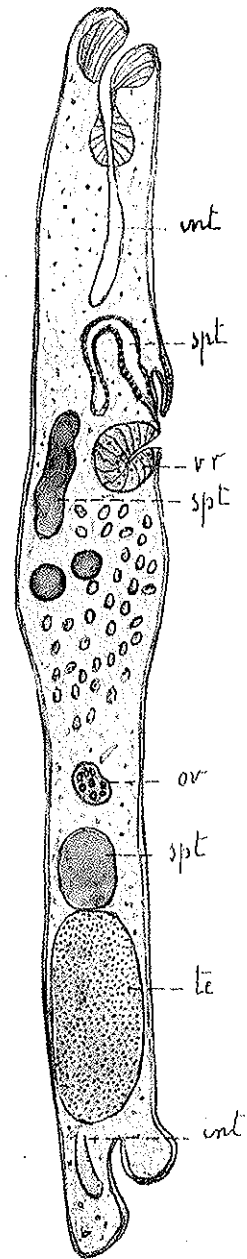


FIG. 4.

## SU DI UN CASO CARATTERISTICO DI RINFORZO DI UNA VOLTA SOTTILE (\*)

*(Con sette figure e una tavola fuori testo)*

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

**SVMMARIVM.** — Licet subtilioribus concamerationibus absque periculo imponi possint onera uniformiter distributa, minime vero res diversi ponderis et inaequalis, auctor, experimentis apte institutis, ostendit quomodo huiusmodi concamerationes firmare liceat, ita ut gravari etiam possint oneribus non uniformiter dispositis.

Ho recentemente avuto occasione di studiare un interessante e caratteristico problema di statica di una volta sottile, e di progettarne il rinforzo con criteri che, per la loro attitudine ad essere applicati in casi consimili, mi sembrano meritevoli di essere conosciuti.

Si trattava di una struttura lamellare, costituita da un reticolato rombico di aste metalliche disposte in modo da formare, nel loro insieme, due sistemi di archi obliqui mutuamente intersecantisi (fig. 1 e tav. I).

Per dare un'idea della singolare leggerezza di una tale struttura, basterà dire che la volta, con soli 38 centimetri di spessore, raggiungeva ben 42 metri di luce.

Tale arditezza era stata possibile perchè si era previsto che la struttura dovesse resistere esclusivamente a carichi simmetricamente distribuiti, per i quali la curva delle pressioni veniva naturalmente ad assumere un andamento molto prossimo a quello dell'asse geometrico.

Senonchè, in prosieguo di tempo, si rese necessario prevedere l'eventualità di carichi concentrati in posizioni dissimmetriche, rappre-

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 30 novembre 1941.



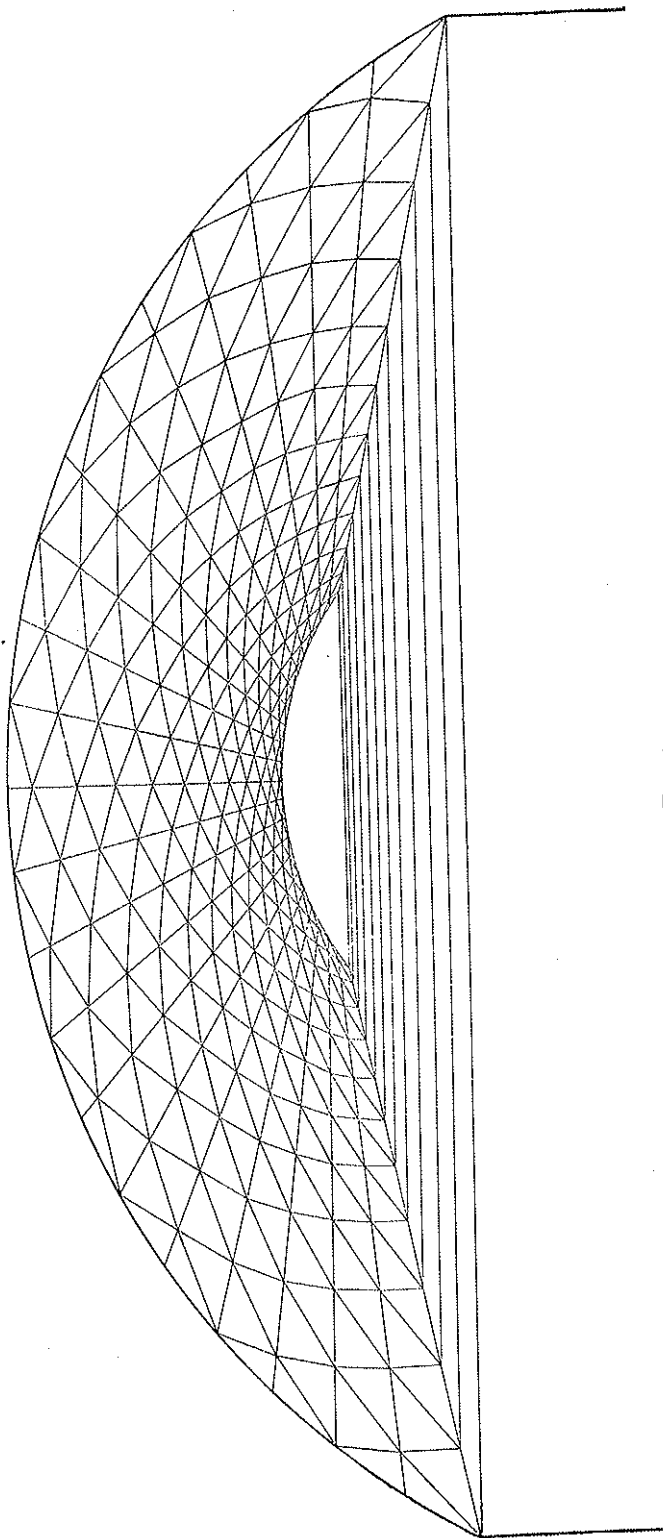


FIG. 1.

sentati da paranchi scorrevoli su guide che, per inderogabili ragioni di spazio, non potevano venir sostenute se non da sospensioni direttamente ancorate alla volta (fig. 2).

Ora, sotto l'azione di siffatte forze concentrate — come del resto per qualsiasi condizione dissimmetrica di carico — la curva delle pressioni si sarebbe scostata dall'asse geometrico si da dar luogo a tensioni interne assolutamente inammissibili; e le deformazioni avrebbero, preso subito proporzioni allarmanti.

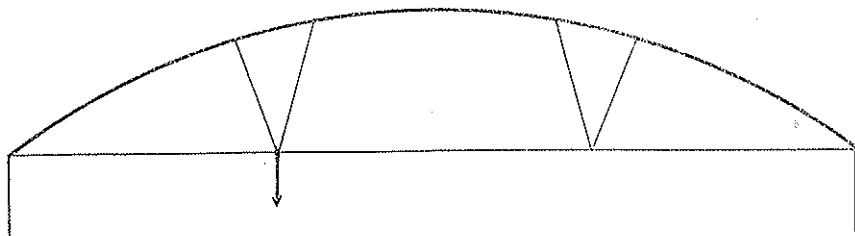


FIG. 2.

Un rinforzo si imponeva dunque, e tale da modificare radicalmente il regime statico della struttura.

La prima idea che naturalmente si doveva presentare fu quella di costruire sotto la volta delle travature reticolari sulle quali la volta stessa potesse trovare appoggio e scaricare quella parte dei carichi che essa, per la sua particolare costituzione, non era atta a sopportare.

Su queste direttive vari progetti vennero elaborati.

Ma si dovette ben presto riconoscere che, per compiere un tale ufficio, le travature di rinforzo avrebbero dovuto avere dimensioni tali che sarebbero bastate da sole a sostenere un'ordinaria copertura del locale; sicchè la volta si sarebbe automaticamente ridotta alla troppo modesta funzione di una semplice soprastruttura, ed il costo del rinforzo avrebbe differito ben poco da quello di una costruzione nuova.

Ora, quando il problema mi venne per la prima volta prospettato, la mia attenzione fu subito attratta da un fatto caratteristico: che cioè, sotto l'azione di una forza applicata lateralmente, su di una delle falde della volta, questa si deformava accusando, insieme all'inevitabile cedimento della falda caricata, un innalzamento non meno cospicuo della falda simmetrica.

Ne arguii che, alla eccessiva deformabilità della volta, si sarebbe potuto porre rimedio non solo contrastando gli abbassamenti dei punti caricati, ma anche contrastando gli innalzamenti dei loro simmetrici.

Mi confortava in quest'idea la considerazione che il far ciò equivaleva in sostanza ad introdurre delle nuove forze tendenti a ricostituire quella simmetria dei carichi che la volta era, per sua natura, atta a sopportare senza inconvenienti.

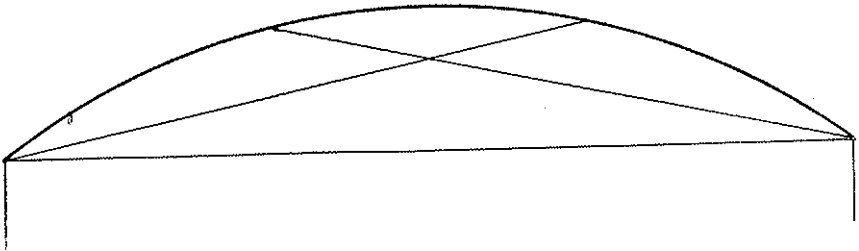


FIG. 3.

Io fui così condotto a concepire il rinforzo come costituito molto più semplicemente (e quindi anche molto più economicamente) da un duplice sistema di tiranti incrociati (fig. 3), destinati ad entrare alternativamente in funzione sempre e soltanto quando la volta venisse sollecitata da carichi dissimmetrici.

In realtà, grazie a questi tiranti - o, per esser precisi: grazie alle tensioni iperstatiche che in essi si generano sotto l'azione dei carichi dissimmetrici - la curva delle pressioni viene effettivamente a riaccostarsi all'asse geometrico della volta, le tensioni interne si riducono a valori accettabili, e le deformazioni si riportano entro limiti tali da non destare più alcuna preoccupazione.

Per precisare le idee e dimostrar l'efficacia di questo singolare, e forse nuovo, tipo di rinforzo, presento alcune figure nelle quali sono riprodotte curve delle pressioni e deformate, relative ad una medesima condizione dissimmetrica di carico, nella volta originaria e nella volta rinforzata.

Nella figura 4 la struttura portante - idealmente ridotta ad un arco a due cerniere AB - si è supposta caricata dal peso P del pa-

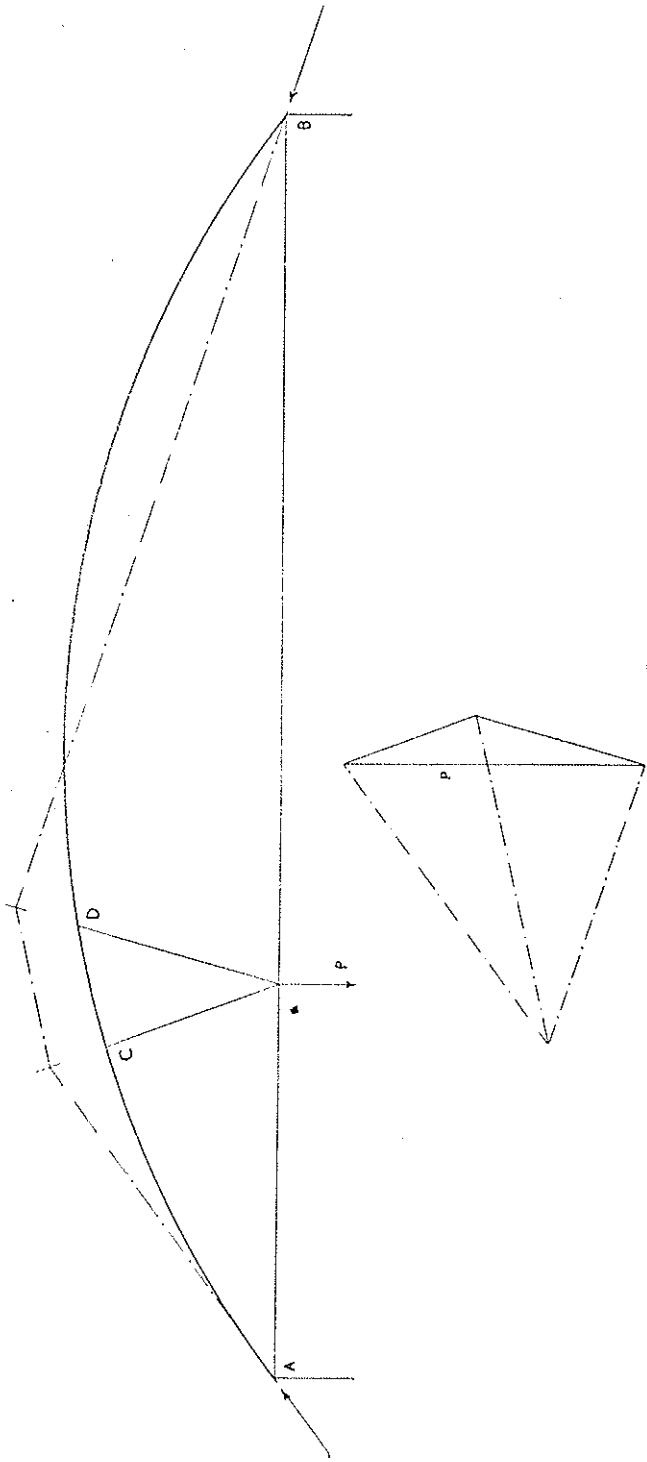


FIG. 4.

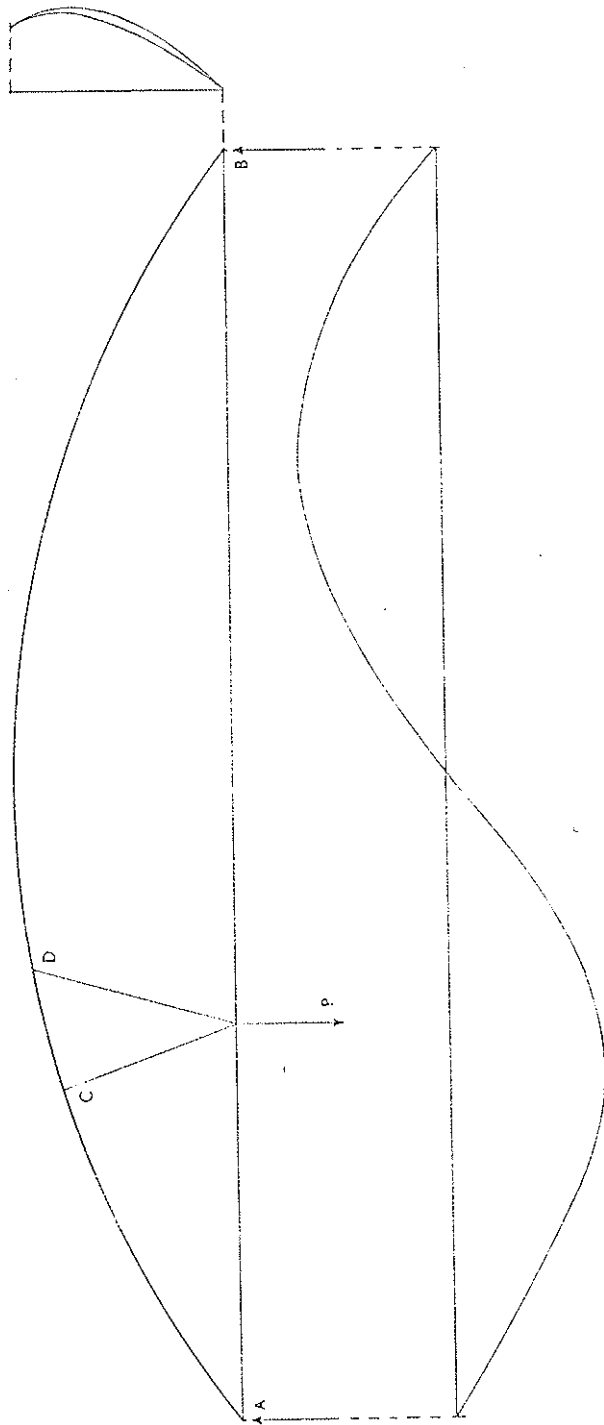


FIG. 5.

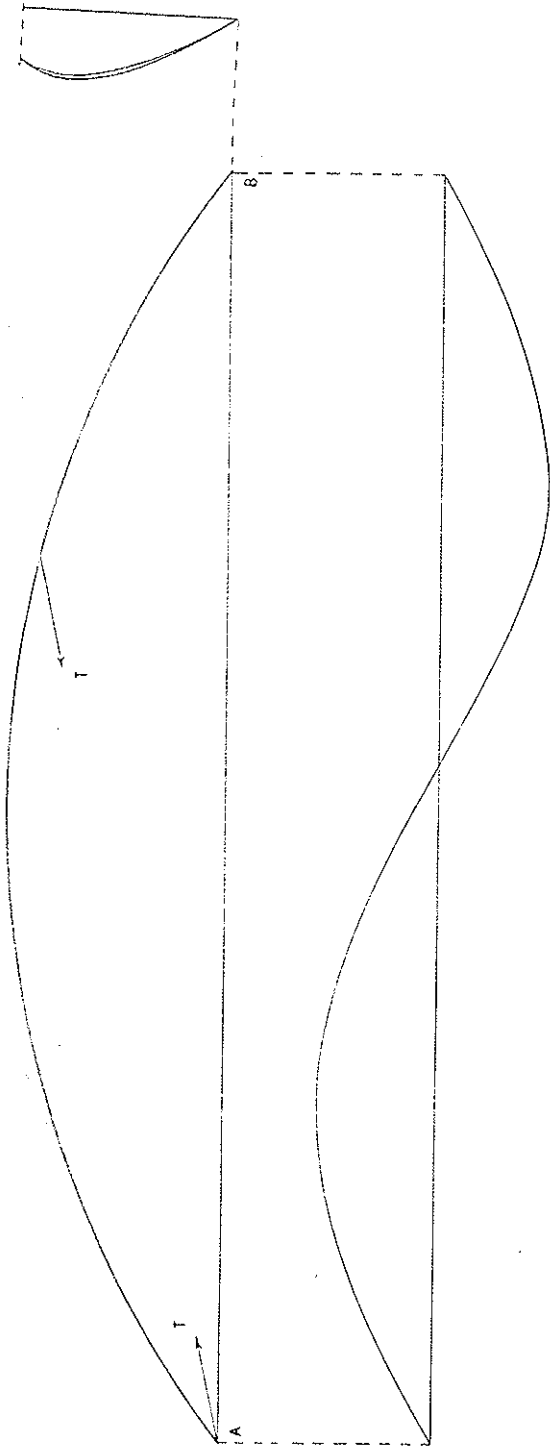


FIG. 6.

rango, trasmesso all'arco da due aste di sospensione facenti capo rispettivamente ai due punti C e D.

Determinata, coi metodi noti, la reazione iperstatica della catena AB, si è tracciato il poligono delle successive risultanti o curva delle pressioni nell'arco.

Nella figura 5 sono poi state tracciate le deformate, verticale ed orizzontale, dell'arco per tale condizione di carico.

La figura 6 rappresenta invece l'andamento delle analoghe deformate nella ipotesi che l'arco sia stato assoggettato all'azione di una unica forza T rappresentante l'ipotetica tensione di un tirante obliquo collegante la falda scarica coll'imposta opposta.

Si vede subito che questa volta le deformazioni sono ovunque di segno contrario alle precedenti; il che giustifica la presunzione che un tale tirante possa efficacemente contrastare le deformazioni dovute al paranco.

D'altra parte, in virtù del secondo principio di reciprocità le stesse deformate possono notoriamente venir interpretate come linee d'influenza delle tensioni nel tirante.

La scala in cui queste linee d'influenza van lette dipende naturalmente dalla deformabilità del tirante, vale a dire dalle sue caratteristiche resistenti (modulo di elasticità del materiale ed area della sezione).

Fissate pertanto queste caratteristiche, si potrà coll'aiuto di dette linee calcolare la tensione T che nel tirante stesso verrà determinata da una qualsiasi condizione di carico, ed in particolare dal peso P applicato al paranco.

Reciprocamente si potrà sempre far in modo che la tensione T assuma un valore determinato *a priori*, scegliendo opportunamente le caratteristiche resistenti del tirante.

Naturalmente rispetto al primitivo arco a due cerniere la T può sempre venir considerata come una forza esterna. Si potrà quindi sempre, coi metodi noti, determinare il valore della reazione iperstatica della catena nella ipotesi della coesistenza del carico P e della tensione T.

La poligonale delle successive risultanti, o curva delle pressioni nell'arco, assume allora un andamento del genere di quello indicato, in un caso particolare, nella figura 7; andamento che conferma appieno le mie previsioni.

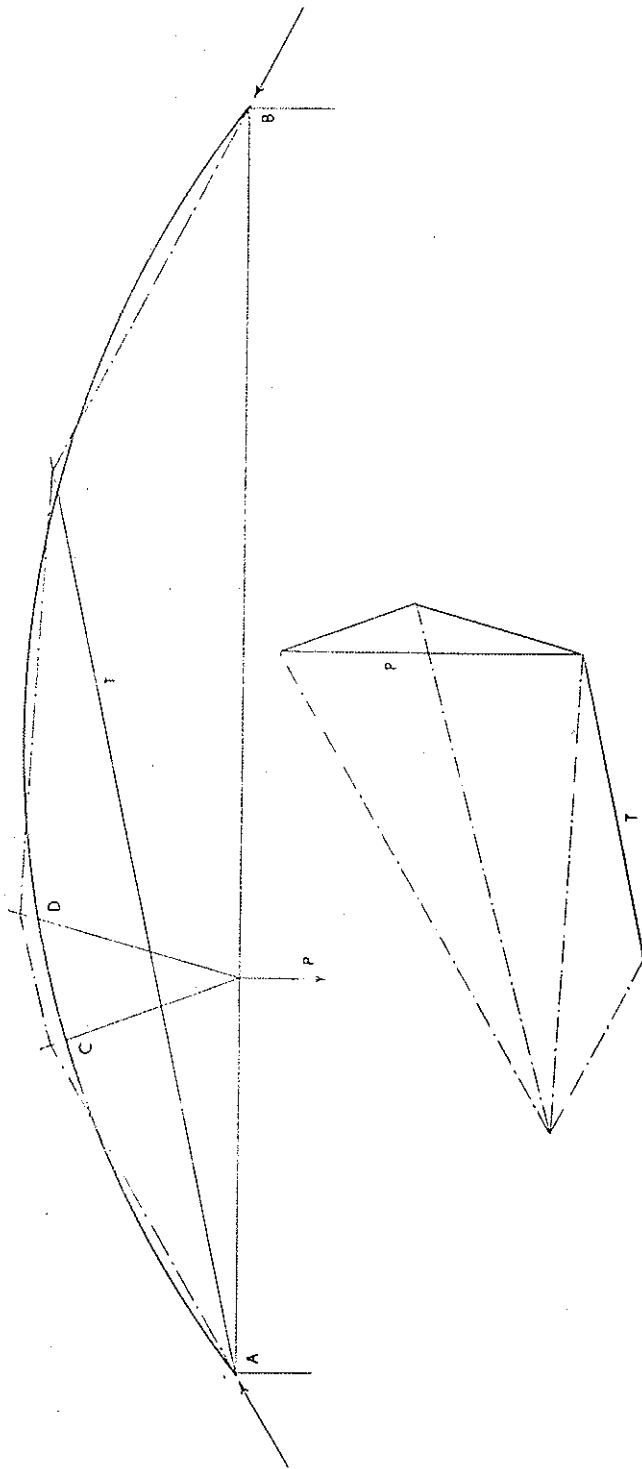


FIG. 7.



Ai miei due valorosi collaboratori - gli Ingegneri GIULIO PIZZETTI e WALTER LO VARCO - lascio il compito di esporre in altra sede <sup>(1)</sup> le modalità del calcolo, e di descrivere gli accorgimenti che hanno resa possibile la realizzazione pratica del mio progetto.

Io mi limiterò qui ad aggiungere che il radicale mutamento di condizioni statiche che le curve delle pressioni accusano così chiaramente è stato anche sperimentalmente controllato mediante una duplice prova di carico effettuata, durante l'esecuzione dei lavori, su due tronchi di volta, uno dei quali si trovava ancora nelle condizioni originarie, mentre l'altro era già stato rinforzato.

I risultati ottenuti in quell'occasione si trovano raccolti nella seguente tabella, e dimostrano fino a qual punto il rinforzo, opponendosi direttamente agli innalzamenti della falda scarica, riesca a contrastare indirettamente, ma efficacemente, gli abbassamenti della falda caricata.

*Misura delle deformazioni per un sovraccarico distribuito su di una sola falda della volta in ragione di 90 Kg/m<sup>2</sup> di proiezione orizzontale (Gli spostamenti verticali si considerano positivi se rivolti verso il basso; gli spostamenti orizzontali si considerano positivi se diretti verso la falda scarica).*

	Sul tronco di volta originario mm.	Sul tronco di volta rinforzato mm.
Spostamento verticale in mezzeria della falda caricata . . . . .	+ 29,2	+ 8,9
Spostamento verticale in chiave dell'arco .	+ 18,8	+ 8,2
Spostamento orizzontale in chiave dell'arco	+ 7,5	+ 1,0
Spostamento verticale in mezzeria della falda scarica . . . . .	- 14,9	- 0,1

(1) G. PIZZETTI e W. LO VARCO, *Su di un caso caratteristico di rinforzo di una volta sottile*. « L'Ingegnere », 1942.

Colonnetti, *Su di un caso caratteristico di rinforzo di una volta sottile*



## LA STATICA DELLE CUPOLE CERCHiate (\*)

(Con una figura e due tavole fuori testo)

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

SUMMARY. — Auctor demonstrat e generali doctrina de elasticis coactionibus novam rationem dimetiendi tholos circulis munitos deduci posse.

Con questa Nota io intendo compiere un nuovo passo su la via, che perseguo da tempo, verso l'uso sistematico degli stati di coazione nei sistemi iperstatici.

\* \* \*

Da un punto di vista assolutamente generale il problema va posto nei termini seguenti:

*dato un sistema iperstatico di grado  $k$  cioè tale che i singoli suoi stati di tensione in equilibrio con forze esterne date si possano riferire biunivocamente e linearmente ai singoli sistemi di valori di  $k$  parametri indipendenti (incognite iperstatiche);*

*e supposto che ad esso venga impressa una coazione di ordine  $h \leq k$  cioè tale che la si possa sempre caratterizzare biunivocamente e linearmente per mezzo di  $h$  parametri indipendenti (caratteristiche della coazione);*

*è noto che si possono stabilire  $k$  equazioni lineari e non omogenee tra le  $k$  incognite iperstatiche e le  $h$  caratteristiche della coazione (1).*

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *Scienza delle costruzioni*. Torino, Einaudi, 1941, pag. 371 e segg.

*Se ne deduce che, assunti ad arbitrio i valori di  $h$  delle incognite iperstatiche - o di  $h$  funzioni lineari delle stesse - sono generalmente da considerarsi come determinate in conseguenza tanto le altre  $k-h$  incognite iperstatiche come le  $h$  caratteristiche della coazione.*

*Ciò è quanto dire che, con un'opportuna scelta dello stato di coazione, si potrà sempre far in modo che  $h$  parametri dello stato di tensione assumano valori arbitrariamente prescelti.*

\* \* \*

Io ho avuto occasione di applicare per la prima volta questo procedimento nel calcolo della cupola che sto progettando per la costruzione Cattedrale di La Spezia.

Si tratta di una grande cupola (di ben 44 metri di diametro esterno) costituita da due sottili solette ellissoidiche collegate da sedici costoloni disposti secondo piani meridiani equidistanti.

Il calcolo di stabilità si può notoriamente condurre in due tempi: **nel primo dei quali** uno spicchio, isolato dal resto, viene trattato come un semiarco incastrato alla base e vincolato in sommità a subire soltanto spostamenti verticali.

Nel caso concreto lo spicchio, corrispondente ad un sedicesimo di giro, risulterà costituito da uno dei costoloni e dalle adiacenti porzioni delle due solette (fig. 1).

La curva delle pressioni (pel peso proprio dello spicchio e relativo sovraccarico consistente nella corrispondente frazione del peso del cupolino) potrà facilmente venir tracciata quando si siano costruite le linee di influenza delle incognite iperstatiche; essa presenta l'andamento indicato nella tavola I.

Nella stessa tavola è stata anche costruita (per punti) la deformata dell'asse geometrico dello spicchio, colle sue due proiezioni orizzontale e verticale.

Ora l'andamento della curva delle pressioni lascia prevedere possibili tensioni positive nei meridiani; mentre la proiezione orizzontale della deformata (quasi integralmente rivolta verso l'esterno) ci avverte che analoghe tensioni si verificheranno sicuramente nella quasi totalità dei paralleli.

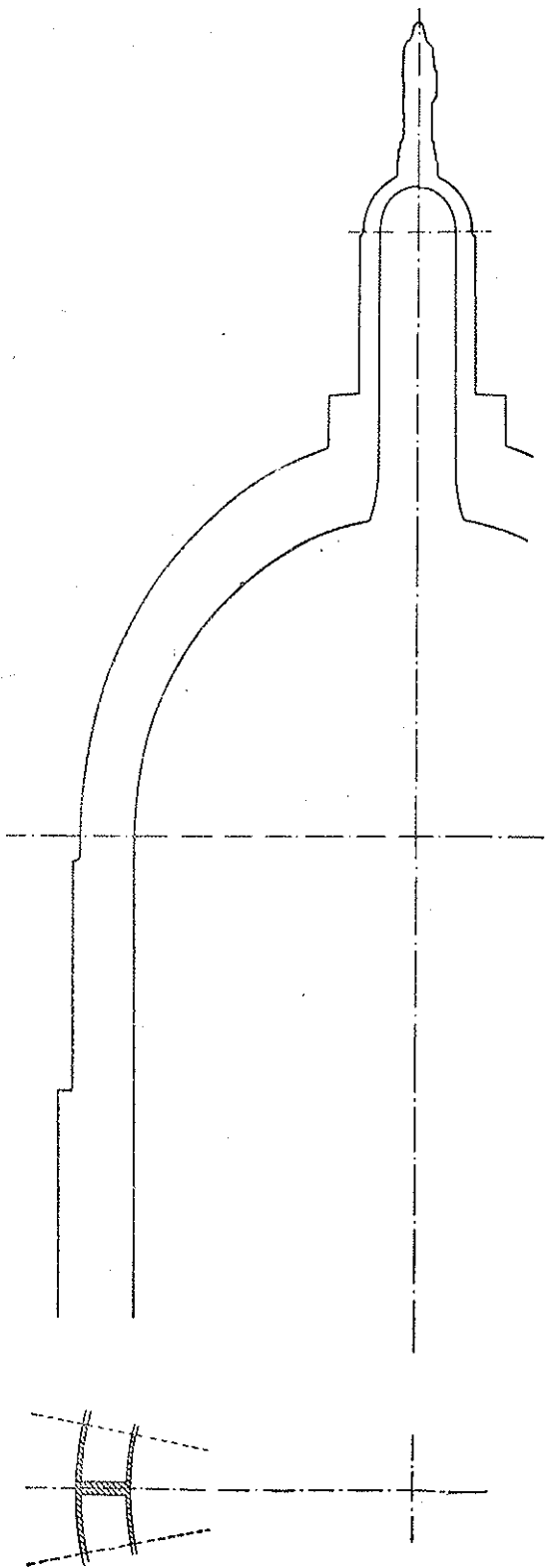


FIG. 1.

Questo risultato non ha nulla di singolare. È infatti proprio a queste tensioni che notoriamente si debbono le lesioni che, presto o tardi, affliggono quasi tutte le costruzioni di questo genere.

Ma queste tensioni - e le lesioni che ne possono derivare - debbono potersi evitare introducendo un opportuno stato di coazione.

A tal fine giova elevare il grado di iperstaticità della struttura mediante l'aggiunta di un certo numero di anelli di cerchiatura - o più precisamente: di sistemi di tiranti disposti secondo i lati di poligoni regolari, situati in piani orizzontali, coi vertici ancorati alle sedici costole.

Il necessario stato di coazione verrà poi creato mettèndo questi anelli in tensione colla manovra di organi di registrazione opportunamente situati in corrispondenza dei predetti ancoraggi.

Il calcolo delle tensioni - o, ciò che fa lo stesso, delle forze orizzontali che i vari anelli debbono esercitare su ciascuno specchio, supposto sempre isolato dal resto della struttura - non presenta alcuna difficoltà quando si conoscano quelle certe linee d'influenza delle incognite iperstatiche originarie dello specchio, di cui abbiamo già parlato a proposito della determinazione della curva delle pressioni.

Coll'aiuto di queste linee i valori delle incognite iperstatiche originarie possono infatti venire immediatamente determinati per qualsiasi condizione di carico, non esclusa quella costituita dalle predette forze orizzontali che, in questo calcolo, van riguardate come delle forze esterne.

Ogni condizione che si voglia imporre alla curva delle pressioni (e per riflesso alle incognite iperstatiche originarie da cui essa dipende) si verrà così a tradurre in una equazione di condizione fra queste forze, e potrà pertanto venire utilizzata per determinarne i valori. E tante condizioni indipendenti si potranno imporre quanti sono gli anelli di cerchiatura, e quindi le incognite iperstatiche aggiunte.

La conclusione si è che la curva delle pressioni può venir condotta ad assumere un andamento tanto vicino quanto si vuole a quello dell'asse geometrico dello specchio (tav. II) realizzando così l'annullamento delle eventuali tensioni positive nei meridiani, come l'inversione di segno degli spostamenti orizzontali, con conseguente eliminazione di ogni tensione positiva nei paralleli.

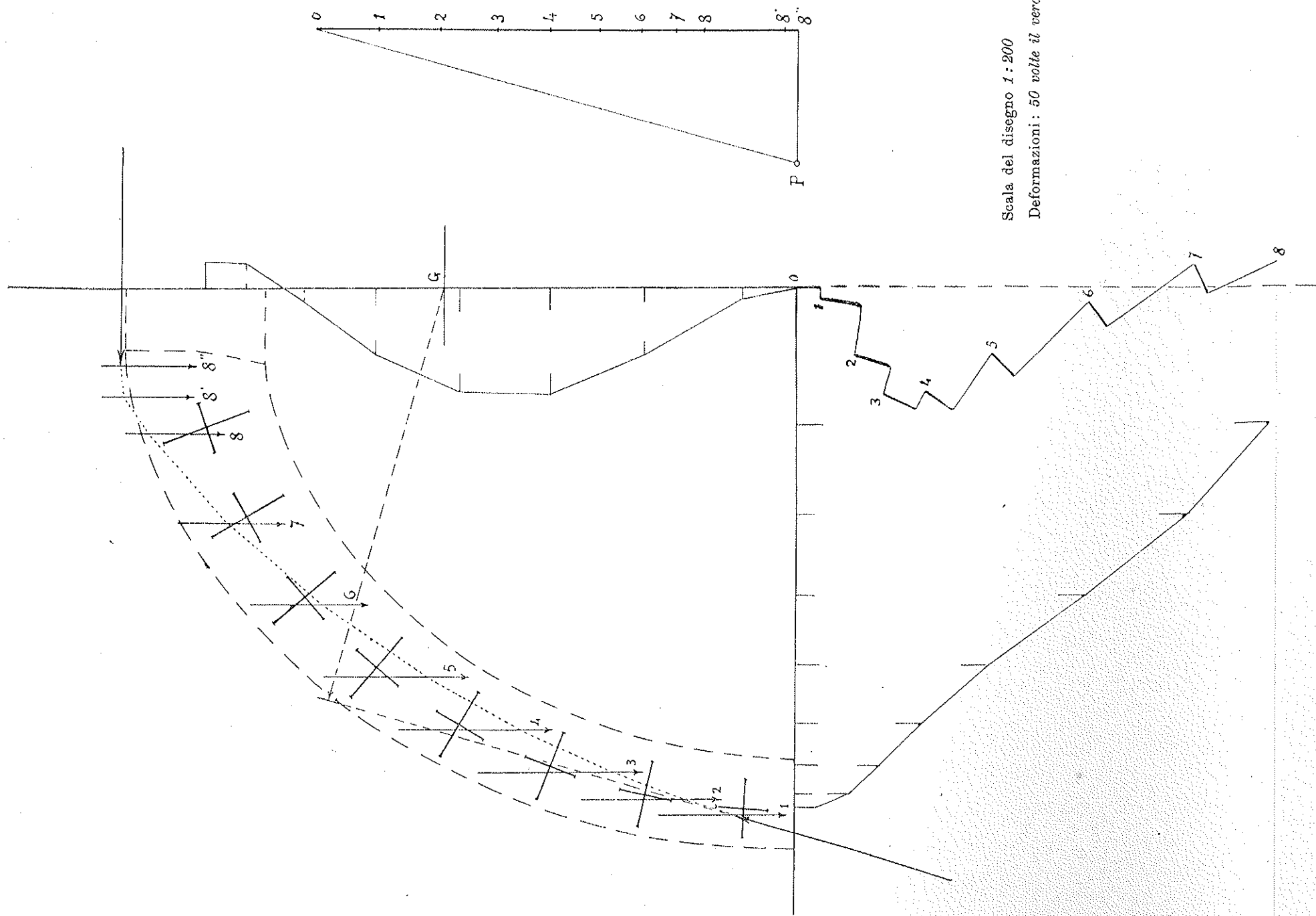
Resta, **in un secondo tempo**, da risolvere il problema del passaggio dalla curva delle pressioni nello spicchio isolato alla curva delle pressioni nella cupola, tenendo nel dovuto conto le azioni che in questa si esercitano, tra spicchio e spicchio, secondo i paralleli.

Ma anche questo problema diviene suscettibile di una soluzione singolarmente semplice ed immediata se si tien conto della libertà, che noi ci siamo riservata, di fissare a nostro arbitrio le tensioni negli anelli di cerchiatura.

Nulla ci vieta infatti di adottare come deformata dello spicchio in seno alla cupola quella stessa deformata che noi siamo stati condotti ad attribuire allo spicchio isolato. Perchè ciò avvenga basta che le deformazioni dei paralleli corrispondano agli spostamenti orizzontali dei relativi punti dello spicchio. E ciò si ottiene creando nei paralleli i necessari stati di tensione mediante forze opportune, per esempio mediante opportuni incrementi delle tensioni negli anelli di cerchiatura.

Accadrà allora che le forze orizzontali che comparivano nei nostri calcoli di stabilità dello spicchio isolato come dovute alle tensioni degli anelli di cerchiatura, saranno le stesse che compariranno nei calcoli di stabilità della cupola come risultanti delle tensioni degli anelli di cerchiatura e delle azioni che si esercitano tra spicchio e spicchio secondo i paralleli.

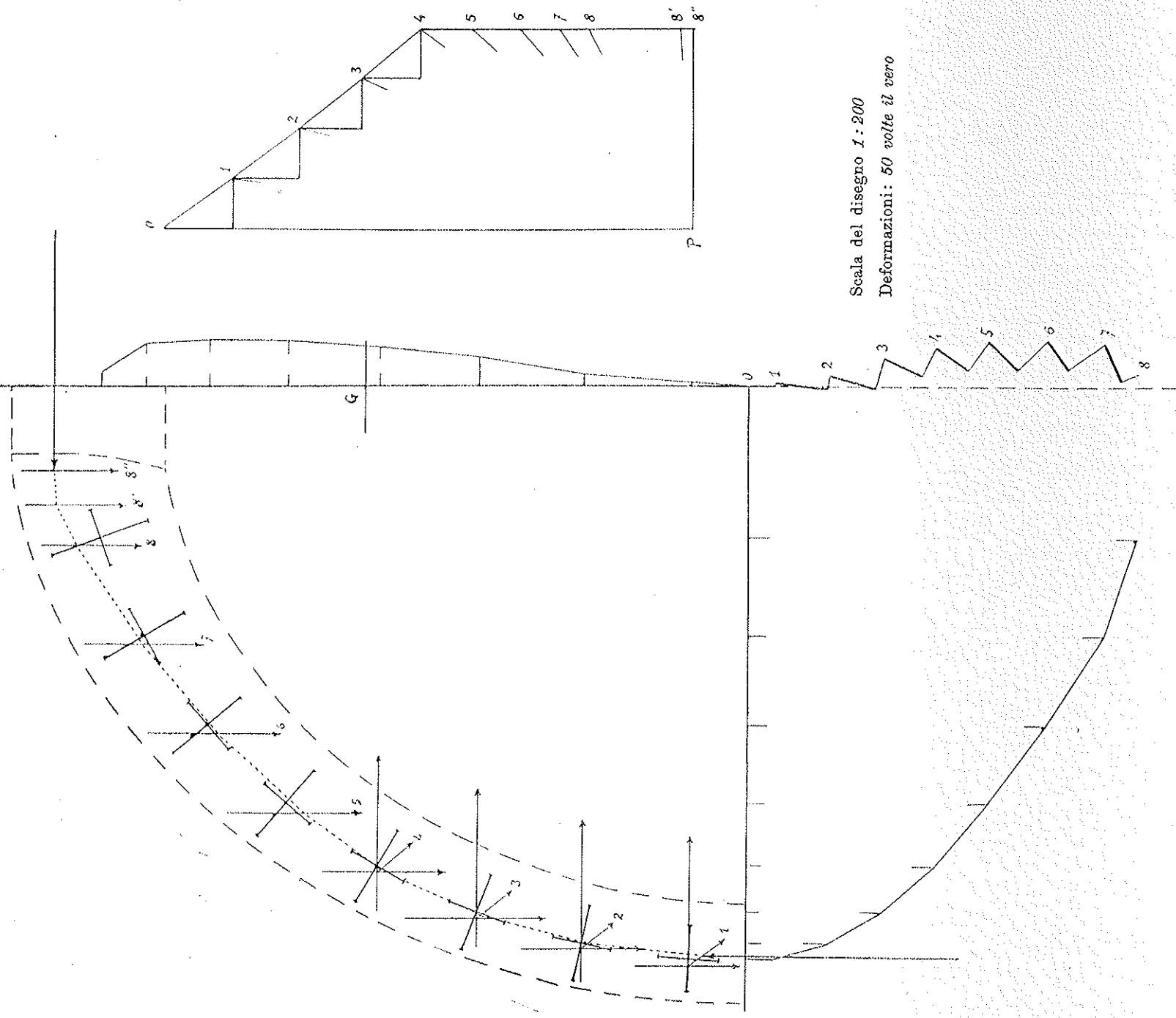
La stessa sarà perciò anche, nei due casi, la curva delle pressioni.



Carichi verticali in t.	
88,4	1
80,0	2
75,0	3
68,6	4
64,9	5
57,0	6
48,0	7
35,4	8
110,0	8'
15,7	8''

Reazione d'imposta	
X = 11232 <i>trn.</i>	Momento rispetto a G . . . . .
Y = 687 t.	Componente verticale . . . . .
Z = 180 t.	Componente orizzontale . . . . .
R = 662 t.	Intensità risultante . . . . .
$\frac{X}{R} = m. 16,97$	Distanza della linea di azione da G





Scala del disegno 1:200  
 Deformazioni: 50 volte il vero

	Carichi verticali in t.	Tensioni orizzontali in t.
1	88,4	60,0
2	80,0	60,0
3	75,0	60,0
4	68,6	60,0
5	64,3	
6	57,0	
7	48,0	
8	36,4	
8'	110,0	
8''	15,7	

	Reazione d'imposta
Momento rispetto a G . . . . .	$X = 13000 \text{ tm.}$
Componente verticale . . . . .	$Y = 637 \text{ t.}$
Componente orizzontale . . . . .	$Z = 0$
Intensità risultante . . . . .	$R = 637 \text{ t.}$
Distanza della linea di azione da G	$\frac{X}{R} = \text{m. } 20,41$

CARLO SOMIGLIANA

IN COMMEMORAZIONE DI VITO VOLTERRA



## VITO VOLTERRA

DISCORSO COMMEMORATIVO, PRONUNCIATO NELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA  
DEL SESTO ANNO ACCADEMICO, IL 30 NOVEMBRE 1941

da CARLO SOMIGLIANA  
*Accademico Pontificio*

*Illustre Presidente, Eminentissimi Colleghi, Signore e Signori,*

Ricordare Vito Volterra nella Pontificia Accademia delle Scienze è per me un alto onore. Lo considero anche un dovere verso la memoria di un Uomo che ho grandemente stimato e ammirato, e col quale ho avuto lunga affettuosa intimità. Più di mezzo secolo di continuata amicizia, non offuscata mai da una nube, non velata mai da un'ombra, affinità di studi, identità di tendenze e di aspirazioni scientifiche, talvolta anche collaborazione diretta, creano vincoli che lasciano un'impronta profonda nell'animo, vincoli anche salutari che nella vita confortano e sostengono.

Vito Volterra è una di quelle grandi figure della scienza che onorano il Paese ove sorgono, che onorano la generazione alla quale appartengono. Le sue ricerche, i risultati raggiunti, le grandi teorie da Lui create restano come pietre miliari sulla strada maestra della scienza mondiale.

Fu essenzialmente un uomo di scienza, che abbracciò e dominò tutto il campo vastissimo dell'Analisi matematica pura e delle sue applicazioni alla Fisica matematica, alla Meccanica, alla Fisica, alle Scienze naturali, lasciando ovunque una traccia profonda del suo ingegno acuto ed originale, con un'attività meravigliosa durata sessant'anni.

Ma accanto a queste attività fondamentali altre ne svolse che ne completano ed adornano la personalità.

Vero apostolo della Scienza percorse più volte l'Europa e l'America portando la sua parola limpida e persuasiva, ed il suo sentimento d'italianità in tutti i principali centri di coltura. A Stoccolma ed a Buenos Aires, al Rice Institute nel Texas ed alle Università di Illinois e di Princeton, a Chicago, a Madrid, a Parigi, a Bucarest, Cluj, Jassy in Romania, a Praga, a Brünn, a Bruxelles, ovunque ricercato ed onorato.

In patria fu fondatore o promotore di importanti istituzioni scientifiche: la Società italiana per il progresso delle scienze, la Società di Fisica, il Politecnico di Torino, il Comitato talassografico per lo studio dei nostri mari, l'Ufficio invenzioni e ricerche, che fu poi trasformato nell'attuale Consiglio nazionale delle ricerche.

Fuori d'Italia fu Presidente del *Bureau international des poids et mesures* dal 1921 fino agli ultimi suoi giorni; e tenne degnamente l'alta carica occupandosi assiduamente delle delicate questioni che si connettono col complesso problema delle unità di misura.

Durante la guerra mondiale dal 1915 al 1918 mise le sue cognizioni scientifiche e la sua competenza tecnica a servizio della patria su tutte le fronti dell'immano conflitto, non curante delle fatiche, non curante dei pericoli.

Quando io lo conobbi a Pisa intorno al 1880 era un giovinetto non ancora ventenne, dagli occhi chiari e pensosi, dal dolce sorriso. La sua straordinaria vigoria mentale talvolta appariva, ma raramente. Era di solito sereno, faceto, arguto, pronto all'amicizia ed alla fraterna colleganza. La sua superiorità mai non ostentava; tutti l'ammettevano senza discutere. Questi lineamenti del giovinetto ventenne si conservarono poi, con lievi varianti, nell'uomo maturo, pur fra tanti onori, pure nell'estimazione universale che lo circondava. Talchè a me sempre sembrò di rivedere in lui il collega studente ed amico dell'Università di Pisa.

Vito Volterra nacque ad Ancona il 3 maggio 1860. La città era allora assediata dalle truppe italiane ed una bomba cadde nella camera ove stava la culla del neonato, che rimase fortunatamente illeso. A due anni perdette il padre e rimaneva solo colla madre, donna di grandi virtù. Uno zio materno si prese cura dell'orfano e lo condusse seco, insieme alla madre, in varie città d'Italia. A Firenze potè poi cominciare i primi studi regolari, e la sua inclinazione per le matematiche si manifestò prestissimo. Ad undici anni già aveva appreso da sè

qualche nozione di questa scienza ed avendo letto il viaggio *Dalla terra alla luna* di Jules Verne, tentava di calcolare la traiettoria del proiettile, che doveva far uscire dalla terra gli aerei viaggiatori. A quattordici anni si dava a studiare, senza aiuto d'alcuno, l'Algebra del Bertrand, e poi il classico trattato di Calcolo differenziale ed integrale dell'eminente matematico francese.

Ma le difficoltà finanziarie urgevano e la famiglia desiderava che il giovinetto si desse alla carriera commerciale, per la quale egli non sentiva alcuna attrattiva. Un lontano cugino ingegnere (che poi doveva diventare suo suocero) chiamato per persuadere il giovinetto a darsi al commercio, ebbe la sensazione esatta della sua straordinaria attitudine alle scienze, e usò della sua influenza perchè tale inclinazione non fosse contrastata. Ma le difficoltà economiche non ammettevano libera scelta, e Vito Volterra, avendo terminato gli studi all'Istituto Tecnico, stava per entrare in una Banca. L'intervento provvidenziale di Antonio Roiti, il fisico geniale che allora insegnava all'Università di Firenze, risolse la situazione. Egli nominò il giovane Vito, che non era ancora studente universitario, suo preparatore nel laboratorio di Fisica. Difficilmente si sarebbe potuto dire che cosa egli sapesse preparare. Ma si mise subito a lavorare con ardore sotto la guida del Roiti, e si iscrisse studente alla Facoltà di Scienze naturali, non essendovi allora a Firenze Facoltà di matematica.

L'anno dopo nel 1879 il Volterra, probabilmente per consiglio dello stesso Roiti, si presentò al concorso per la Scuola Normale Superiore di Pisa e lo vinse. Si iscrisse per la laurea in Fisica; cominciava così per lui la più brillante delle carriere.

La Facoltà di Scienze di Pisa possedeva allora eminenti personalità: Riccardo Felici per la fisica, Enrico Betti per la Fisica matematica e la Meccanica celeste, Ulisse Dini per il calcolo infinitesimale e l'Analisi superiore, Giuseppe Meneghini per la Geologia. Il Volterra non si curò molto della Fisica sperimentale, ma si diede tutto alle scienze matematiche sotto la guida specialmente del Dini e del Betti, distinguendosi subito, già da studente, per notevoli pubblicazioni.

Laureatosi con lode in Fisica il 30 giugno 1882, era subito nominato assistente di Meccanica razionale e supplente del Betti.

L'anno dopo, essendo stato aperto il concorso per la cattedra di Meccanica razionale nella stessa Università di Pisa, il Volterra lo vinceva. Della Commissione esaminatrice del concorso facevano parte Francesco Brioschi, Enrico Betti, Eugenio Beltrami, le più alte personalità della scienza analitica di quel tempo. Egli entrava così nell'Università sotto i migliori auspici. Aveva allora 23 anni, e ne erano trascorsi appena sei da quando era stato nominato preparatore all'Istituto fisico di Firenze.

A Pisa rimase fino al 1893, per circa dieci anni, manifestando subito una grande attività scientifica con numerosi lavori su argomenti svariati di fisica matematica, di meccanica e di analisi. Alcune idee che poi formarono la base di ampi svolgimenti successivi e caratterizzarono l'orientamento delle sue ricerche, sono di quest'epoca. La Memoria della Società dei XL *Sulle equazioni differenziali lineari*, ove si ricerca un metodo generale di calcolo per la loro integrazione, le Note lincee sulle funzioni che dipendono da tutti i valori di altre funzioni, funzioni così dette di linee, la Memoria degli « Acta Mathematica » sulla generalizzazione della teoria delle funzioni di variabile complessa, contengono i germi di teorie che svolse in seguito e dalle quali più non si staccò fino si può dire agli ultimi giorni della sua vita. Sono pure di questa epoca le ricerche sulle equazioni fondamentali della Meccanica, sulle equazioni dell'elettrodinamica e sulle equazioni di Hertz. Nel 1892 poi comparve la grande Memoria degli « Acta Mathematica » *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi birifrangenti*, che può dirsi un capolavoro di ricerca analitica applicata ad un fenomeno fisico e risolve esaurientemente una difficile e fondamentale quistione della propagazione della luce nei mezzi birifrangenti.

Nel 1893 il Volterra è chiamato a Torino come successore di Francesco Siacci, l'artigliere scienziato che aveva tenuto in quella Università la cattedra di Meccanica superiore. Al Volterra fu affidata questa disciplina ed insieme la Meccanica razionale. Specialmente in questo ultimo insegnamento ebbe modo di mostrarsi la sua abilità didattica, naturale conseguenza della limpidezza delle sue idee, e della sua facilità di espressione. Ancor oggi molti ingegneri che lo ebbero a maestro lo ricordano con venerazione.

Il periodo torinese del nostro matematico è caratterizzato dallo studio di due fondamentali problemi, l'uno di meccanica, la variazione

delle latitudini ed i moti del polo terrestre; l'altro di analisi, le equazioni integrali ed i metodi della loro risoluzione.

La genialità del Volterra, ormai ricercatore maturo e padrone dei metodi analitici, a cui fa compiere essenziali progressi, appare in queste ricerche in tutta la sua potenza, in tutto il suo splendore. Trova una causa nuova per i moti del polo nei moti ciclici che possono avvenire nella massa terrestre, ne costruisce le equazioni differenziali e riesce alla loro integrazione con un metodo analiticamente analogo a quelli con cui Jacobi aveva risolto il problema del moto di un corpo rigido con un punto fisso.

Nel problema delle equazioni integrali e della inversione degli integrali definiti apre all'analisi un campo estesissimo di ricerche, considerando il problema da un punto di vista assai più generale di quanto era stato fatto prima ed indicando procedimenti nuovi per risolverlo, che saranno poi seguiti da tutti gli autori, che studiarono tali questioni. Per più di un ventennio i matematici di tutte le Nazioni si dedicarono a questi problemi.

Nel 1900 era scomparso a Roma Eugenio Beltrami, il geniale geometra e fisico-matematico, che aveva saputo unire alla profondità della ricerca uno speciale carattere artistico. Era naturale che la Facoltà di Roma si rivolgesse al Volterra per sostituirlo. Lo troviamo così al principio di questo secolo professore a Roma di Fisica matematica e di Meccanica celeste.

Sono di quest'epoca due avvenimenti importanti nella vita del Volterra. Il suo matrimonio con Virginia Almagià, e la sua nomina, qualche anno dopo, a Senatore del Regno d'Italia.

Il periodo romano dell'attività scientifica del nostro matematico non è stato meno fecondo dei due che l'avevano preceduto. Oltre a frequenti ritorni alle teorie già svolte ed ai loro sviluppi, comprende alcune teorie interamente nuove ed originali. La teoria classica dell'elasticità fu da lui arricchita di un capitolo di alto interesse collo studio delle deformazioni non prodotte da forze esterne, ma dovute a discontinuità di spostamenti sopra certe superfici, e che corrispondono, dal punto di vista fisico, a infiltrazioni o sottrazioni di materia per strati sottilissimi su quelle superfici. Questa teoria si presenta sotto forma semplice ed elegante e fu condotta dal suo autore fino a numerose ed intuitive verifiche sperimentali. Egli considerò specialmente



queste deformazioni nei corpi non semplicemente connessi, nei quali il fenomeno presenta caratteri speciali di semplicità e si presta a stabilire interessanti analogie con l'idrodinamica. Questa teoria può essere utilizzata anche alla risoluzione di importanti problemi tecnici, come fu dimostrato dal nostro illustre collega il prof. Colonnetti.

Altro campo nuovo di ricerche, dischiuso dal Volterra in quest'epoca, riguarda la teoria dei fenomeni così detti ereditari, quelli cioè in cui lo stato attuale di un sistema non dipende solo dalle condizioni esistenti nel momento che si considera, ma anche da tutti gli stati precedenti nei quali esso è passato. Il Volterra trovò un modo generale di porre in equazione questi problemi, ed in vari casi riuscì anche a risolverli mediante la teoria delle equazioni integrali ed integro-differenziali da lui stesso costruita. Le sue teorie analitiche ebbero così un largo campo di svolgimento, che ne mise in luce la fecondità e l'utilità.

Nell'applicazione dell'analisi ai fenomeni naturali il Volterra fino a quest'epoca non era uscito dai limiti dei fenomeni fisici e meccanici. Ragioni di parentela, verso il 1926, lo misero in stretta relazione con un valoroso zoologo, che gli suggerì di cercare se il calcolo fosse applicabile ad alcuni fatti statistici, che egli incontrava studiando le variazioni verificantesi in specie animali conviventi.

Il Volterra si appassionò subito di tali questioni e colla sua naturale genialità riuscì facilmente a costruire una teoria matematica delle fluttuazioni che si verificano nel numero degli animali di specie diverse conviventi, per effetto delle azioni che le une esercitano sulle altre.

La teoria ha poi avuto ampi sviluppi fino a poter essere considerata come una teoria matematica della *lotta per la vita*, che ovunque si manifesta negli ambienti biologici.

Anche in questo campo poi egli poté considerare i fenomeni ereditari, ed applicare la sua prediletta teoria delle equazioni integrali e dei funzionali, quella teoria alla quale, negli ultimi anni dichiarava di essere lieto di aver dedicato mezzo secolo della sua vita.

Guidato dall'analogia meccanica riuscì anche a stabilire un principio di minimo, dal quale si deducono le equazioni delle fluttuazioni biologiche, arrivando così a stabilire una dinamica biologica analoga alla dinamica dei sistemi materiali, e stabilendo un principio analogo a quello che porta il nome di Hamilton, principio che egli chiamò della *minima azione vitale*.

Le vedute filosofiche di Maupertuis secondo le quali la Natura nelle sue manifestazioni tende a risparmiare il più possibile di ciò che essa dispensa nella realizzazione dei fenomeni, trovarono così una nuova conferma nel mondo biologico, all'infuori quindi del mondo fisico e meccanico, al quale specialmente si riferiva il matematico francese.

Ben interessante sarebbe uno studio approfondito sul Volterra come trattatista e come conferenziere, due attività che Egli ha ampiamente svolto e nelle quali ha acquistato larghe benemerenze.

I trattati hanno tutti per argomento le sue ricerche di analisi pura e ne sono una esposizione limpida che mette in luce non solo le teorie che a Lui appartengono, ma anche quelle che esse hanno prodotto e sono dovute ad altri ricercatori. Sono sei i trattati che si sono succeduti in ordine di tempo dal 1912 al 1938, alcuni riproducendo e perfezionando la materia dei precedenti. Dalle prime *Leçons sur les fonctions de lignes* e *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* del 1912 e 1913 si giunge al grande Trattato *Théorie générale des Fonctionnelles* che doveva comprendere tutte le sue teorie originate dal concetto di funzione di linea, sviluppato poi nella teoria dei funzionali e collegato collo studio delle equazioni integrali ed integro-differenziali, e alle loro applicazioni alla Meccanica ed alla Fisica matematica. Doveva essere come il quadro completo del suo pensiero analitico. Ma non ne abbiamo che il primo volume, dei tre progettati, edito nel 1936, sebbene nell'opera Egli si fosse associato un valente collaboratore e continuatore delle sue teorie, il prof. Joseph Pérès della Sorbona. Alcuni anni dopo similmente ha avuto un altro eminente collaboratore nel prof. Borislav Hostinsky della Università Masaryk di Praga per la redazione del Trattato sulle *Operations infinitesimales lineaires* del 1938, nel quale sono esposte ed estese le teorie delle sostituzioni secondo un concetto molti anni prima sviluppato nella Memoria *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*.

Non molto ci resta delle numerose conferenze tenute dal Volterra in tante città d'Europa e d'America, ed è doloroso poichè in esse le origini delle sue idee principali trova una spiegazione ed una illustrazione più soddisfacente allo spirito, che nelle Memorie originali. Esse sono come una storia vivente del suo pensiero scientifico. Forse la sola raccolta completa che abbiamo sono le *Trois Leçons sur quel-*

*ques progrès recents de la Physique mathématique*, tenute per la celebrazione del XX° Anniversario della fondazione della Clark University, nel 1909.

La voce di Vito Volterra, che aveva cominciato a risuonare nel mondo scientifico, nel 1881, ha avuto la sua ultima eco in quest'Aula, sessan'anni dopo, nel maggio dello scorso anno. Una prescrizione medica gli aveva impedito di intervenire all'Adunanza, ma Egli inviò ugualmente il suo lavoro *Sulla degradazione dell'energia nei fenomeni ereditari*, facendo omaggio della sua ultima attività a questa Accademia, a cui lo legavano profondi sentimenti di simpatia e di gratitudine.

L'opera scientifica di Vito Volterra è grandiosa, multiforme, altamente originale, e può stare degnamente fra quelle dei maggiori matematici che la storia scientifica ricordi. Dotato di una potenza analitica meravigliosa, di un ingegno creativo fortissimo, padrone come ben pochi della tecnica più raffinata del calcolo, fornito di una coltura estesissima, costruì teorie fondamentali, e le teorie seppe applicare alle più disparate e difficili questioni.

Ebbe largo senso fisico e genialità meccanica, non perdette perciò mai nelle sue ricerche l'aderenza ai fenomeni, se pur talvolta l'analista abbia in lui sopraffatto il fisico matematico, attratto dall'eleganza e dalla stessa difficoltà dei calcoli.

Nel mondo scientifico italiano Egli può considerarsi come un continuatore dell'opera di Brioschi, di Betti, di Beltrami, di Casorati, forse anche con una larghezza di vedute ed una fecondità creativa, che raramente si trova nell'epoca classica di quei nostri grandi matematici.

Da questo esame sintetico e sommario dell'opera del nostro scienziato, credo doveroso scendere ora a qualche considerazione più particolareggiata sulla sua produzione scientifica.

La sua primissima attività fu diretta ad uno dei campi più astratti e lontani dal comune pensiero matematico. Era ancora studente e sotto l'influenza del Dini, di cui seguiva i corsi, si diede allo studio di quelle funzioni singolari, per cui non è possibile una rappresentazione geometrica, ma solo una espressione concettuale, funzioni che non si ve-

dono, ma che pur hanno notevolissime proprietà. Il Volterra arrivò subito ad un risultato importante, dimostrando l'esistenza di funzioni, la cui derivata, pur essendo limitata, non è integrabile secondo la definizione Riemanniana di integrale. Questa proprietà, così contraria alla comune classica concezione dei rapporti fra derivata ed integrale, fu una grande sorpresa nel campo scientifico, ed è stata probabilmente l'origine della nuova definizione di integrale di Lebesgue, ora largamente usata.

Ma l'influenza del Betti, di cui seguivamo le lezioni con appassionato fervore, distrasse presto il Volterra dalle ricerche Diniane, e lo portò in altri campi, ove orizzonti più vasti di applicabilità ai fenomeni naturali si aprono all'ingegno del ricercatore.

Il primo dei grandi problemi di Fisica matematica, a cui si dedicò il Volterra, dopo aver studiato molte altre quistioni particolari di teoria del potenziale, di idrodinamica e di analisi pura, fu la propagazione della luce nei mezzi birifrangenti.

Esiste una meravigliosa armonia fra i fenomeni fisici e le leggi del nostro pensiero. Essa permette, dentro certi limiti, di scoprire fatti e leggi nuove dei fenomeni, senza venire con essi a diretto contatto. È questa la base della Fisica matematica ed una prova diretta, quasi tangibile, del grande potere del metodo scientifico positivo. La birifrangenza biassica è un esempio di queste scoperte; essa fu trovata col calcolo, prima che i fisici l'osservassero nei cristalli. Il matematico francese Lamé aveva in seguito tentato di rappresentare analiticamente la propagazione delle onde birifratte con la superficie d'onda di Fresnel, in analogia colla propagazione per onde sferiche dei mezzi isotropi, e ritenne di aver raggiunto lo scopo.

Riprendendo la quistione il Volterra si servì di una rappresentazione della superficie d'onda di Fresnel, mediante funzioni ellittiche, dovuta a Weber. Egli ritrovò così gli integrali di Lamé, ma colla nuova rappresentazione poté osservare che questi integrali non soddisfacevano alla condizione necessaria della monodromia. La soluzione del Lamé diveniva così illusoria. E parimenti illusoria risultava una soluzione del problema trovata da Weierstrass e pubblicata dalla Kowalewski, perchè fondata su quella di Lamé.

Il Volterra non si limita però a questa parte negativa della sua ricerca, ma attraverso a formule complicatissime riesce a trovare una

soluzione al riparo di ogni obbiezione, ed a dare così l'estensione ai mezzi biassici del principio di Huygens, secondo il metodo generale proposto da Kirchhoff.

È questo un risultato che può dirsi faccia epoca nella storia della Fisica matematica.

In una direzione analoga si svolsero le ricerche del Volterra sulla propagazione delle onde cilindriche, nei mezzi isotropi giungendo anche in questo caso alla estensione del principio di Huygens, con ampi sviluppi di calcolo, non privi però di eleganza.

Ma nei primi anni della sua residenza a Torino l'attenzione del nostro matematico fu richiamata verso un problema meccanico, di cui largamente si occupavano in quel tempo astronomi e geodeti. Si era scoperto che le latitudini dei punti della terra non erano invariabili, ma subivano piccolissime oscillazioni, rivelate dalla grande precisione e finezza delle osservazioni in quel tempo raggiunte. Il polo terrestre non era fisso sulla superficie del globo, ma descriveva delle curve irregolarmente spirali intorno ad una posizione media centrale. La spiegazione di questo fenomeno fu cercata dagli astronomi, come Schiaparelli e Giorgio Darwin, in fatti di natura accidentale, moti sismici, eruzioni vulcaniche, spostamenti di masse glaciali e così via. Il Volterra ebbe l'idea di ricercare le cause del moto polare in fenomeni di carattere permanente, come le correnti oceaniche, il moto dei fiumi, gli scambi di vapor acqueo fra la terra e l'atmosfera. Tali fenomeni per la loro regolarità possono, assai meglio degli altri, essere sottoposti al calcolo. E difatti il Volterra trovò le equazioni del moto di un corpo, nel quale certe parti si muovono senza che ne risulti alterata la distribuzione della massa. Il problema così schematizzato è suscettibile di una trattazione che è una generalizzazione di quella usata da Jacobi per risolvere il problema del moto di un corpo rigido intorno ad un punto. Si perviene per questa via a trovare dei periodi di rotazione del polo, che effettivamente coincidono con periodi osservati. Il fenomeno però nella realtà presenta grandi irregolarità, per il sovrapporsi delle perturbazioni accidentali, ed anche attualmente gli astronomi incontrano serie difficoltà, anche limitandosi ad una rappresentazione con formole empiriche.

Le ricerche del Volterra in questo campo presentano un altro grande interesse perchè s'incontrano colla teoria dei moti ciclici, im-

maginati da Helmholtz, per la spiegazione delle leggi della termodinamica, e con quella dei moti nascosti introdotti da Hertz nella meccanica.

Passando ora al campo delle ricerche analitiche del nostro matematico, incontriamo anzitutto quelle relative al problema della inversione degli integrali, e delle equazioni integrali, nelle quali ha segnato nuovi successi e nuove conquiste.

Casi speciali d'inversione d'integrali definiti si erano da tempo presentati nell'analisi. L'integrale doppio di Fourier può essere considerato come un primo caso d'inversione d'integrali. Abel aveva pure dato un esempio classico d'inversione e Beltrami aveva osservato che il problema fondamentale dell'elettrostatica è sostanzialmente un problema d'inversione d'integrali. Un lavoro assai importante di Liouville e Sturm del 1836 era stato quasi dimenticato.

Il Volterra ebbe l'idea di studiare il problema da un punto di vista generale, lasciando indeterminata, salvo alcune inevitabili limitazioni, la funzione che costituisce il così detto *nucleo* dell'integrale. E, colla solita abilità analitica, riuscì a scoprire la soluzione del problema mediante quei procedimenti iterativi che poi furono usati da tutti gli autori che in numero grandissimo si occuparono di problemi di questa specie.

Egli aprì in tal modo agli analisti un campo vastissimo di ricerche. La sua originalità e l'importanza dei risultati raggiunti appaiono qui in piena luce. Il metodo di ricerca da lui usato in questi studi è sostanzialmente basato su di un principio assai semplice, già usato in qualche caso in analisi, ma da Lui elevato a principio generale ed applicato ad una grande quantità di questioni diverse. Egli lo chiama *Principio di passaggio dal discontinuo al continuo* e, cosa curiosa, non si è mai curato di formularlo in modo preciso. Nella *Théorie générale des fonctionelles* (Parigi, 1936, pag. 3) Egli scrive: *esso costituisce un metodo di scoperta che si è rivelato estremamente fecondo. Il suo ufficio è stato e resta fondamentale nei progressi del calcolo funzionale.*

Veniamo così a contatto col campo delle grandi ricerche analitiche del nostro matematico, campo astratto al quale ha dedicato gran parte della sua attività scientifica, compiendo conquiste imperiture, ma del quale non sarebbe possibile parlare senza il sussidio dell'algoritmo

matematico, mezzo di espressione potente, ma, pur troppo, non a tutti accessibile.

Ricorderò piuttosto un giudizio di Lui sulle scienze matematiche, che rivela come Egli intimamente le concepisse:

« Il sentimento artistico, inteso nel suo significato più alto e comprensivo, ha avuto ed ha una gran parte nelle scoperte geometriche. »  
 « Si comprende quindi come la matematica, la scienza che non solo è la più pura e la più ideale, ma è la più schiettamente artistica delle scienze, abbia potuto trovare, sino dalle epoche lontane, un terreno favorevole per svilupparsi in Italia, ove il genio artistico è innato nelle genti, e ben si comprende il carattere dell'opera matematica prodotta dagli ingegni italiani, carattere che si ravviserà nelle varie scuole e nelle diverse tendenze... ».

(Discorso pronunziato nella solenne inaugurazione del Congresso internazionale dei matematici in Roma il 6 aprile 1908).

Più prossime al campo fisico sono le applicazioni che il Volterra poté compiere, mediante la sua teoria delle equazioni integrali, nello studio dei fenomeni ereditari. Questa parola *eredità* ha nel campo fisico un significato convenzionale, ben diverso da quello che essa ha nelle scienze naturali, e sta a significare il fatto che alcuni fenomeni non dipendono soltanto dalle azioni attuali, che li determinano, ma anche dalle azioni che hanno subito in epoca precedente. Fatti di questo genere erano ben noti ai fisici, che li denominavano fenomeni di *isteresi*, ma scarse erano le ricerche teoriche su di essi, e soprattutto non sistematiche.

Il Volterra applicando le generalizzazioni del concetto di funzione, da Lui stabilite, poté dare una rappresentazione analitica generale delle azioni ereditarie. Nel campo dei fenomeni elastici, ove particolarmente questi fenomeni si manifestano, estese le equazioni dell'equilibrio in modo che comprendessero anche l'eredità. Ritrovò così delle equazioni integrali, oggetto delle sue classiche ricerche ed anche un nuovo tipo di equazioni che denominò integro-differenziali, poichè partecipano simultaneamente del carattere di equazioni integrali e differenziali.

All'antica classica teoria dell'elasticità fu così aperto un nuovo campo di ricerche, che la avvicina assai più alla realtà fisica. Natural-

mente il Volterra non si fermò alle nuove equazioni stabilite, ma colla solita abilità analitica e approfittando dei metodi generali, già da lui stabiliti, ne studiò la integrazione, e la raggiunse effettivamente in vari casi notevoli. Così risolse nel caso ereditario il problema della deformazione della sfera isotropa per dati spostamenti, o per date tensioni in superficie.

Oltre che alle equazioni dell'elasticità il Volterra applicò i suoi metodi alle equazioni elettro-magnetiche di Hertz, ottenendone la generalizzazione nel caso ereditario. Preparò così gli elementi per lo studio teorico dei fenomeni così importanti e di difficile trattazione che si verificano nei dielettrici, e nella propagazione delle onde elettriche.

Non soddisfatto dei grandi successi ottenuti nella analisi, nella meccanica, nella fisica-matematica, il nostro analista nell'ultimo periodo della sua meravigliosa attività, si volse alle scienze biologiche.

« Ho cominciato - egli lasciò scritto - gli studi più concreti e più sistematici di biologia matematica nel 1926 in seguito a conversazioni avute col professore Umberto d'Ancona. Facendo delle ricerche statistiche sui pesci che popolano i nostri mari, egli mi domandò se sarebbe stato possibile trovare qualche via matematica per prevedere le variazioni nella composizione delle associazioni biologiche ». L'invito non poteva cadere in terreno più adatto. Il Volterra pensò subito a porre in equazione il fenomeno basandosi su due principi assai semplici ed intuitivi: 1° considerare come continue le variazioni del numero degli individui appartenenti ad una data associazione, 2° ammettere che le variazioni naturali, non perturbate da agenti esterni, siano proporzionali al numero stesso degli individui componenti l'associazione. Diveniva così possibile scrivere l'equazione differenziale che regge le variazioni e quindi applicare le regole ordinarie del calcolo.

« Ho cominciato - Egli scrive - dall'esaminare il caso di due specie conviventi che si contendono lo stesso nutrimento, o che si nutrono l'una dell'altra. In questo caso è evidente, anche senza ricorrere al calcolo, che se la prima si nutre della seconda, questa aggredita dall'altra, diminuisce di numero. Ma raggiunto un certo limite, la prima non trova più il nutrimento sufficiente, quindi deperisce e va decrescendo. In conseguenza di ciò la seconda specie tende ad essere meno danneggiata dalla prima, la cui aggressione si fa meno intensa, onde



la seconda cresce fino a ritornare alle primitive condizioni. In tal modo gli aumenti e le diminuzioni delle due specie si susseguono dando luogo a fluttuazioni aventi carattere periodico ».

Sono appunto queste fluttuazioni che anche l'analisi matematica può rivelare, permettendo talvolta un confronto quantitativo coi dati della osservazione.

Il caso di due specie che convivono insieme può estendersi, seguendo gli stessi criteri, al caso di un numero qualunque di specie. Il risultato a cui si arriva può concretarsi in tre leggi: la prima afferma l'esistenza di fluttuazioni nel numero degli individui delle varie specie. La seconda che le medie di tali numeri non cambiano col variare delle condizioni di partenza. La terza che se si cerca di assottigliare il numero degli individui delle varie specie, le specie vittime se ne avvantaggiano, mentre gli aggressori sono danneggiati. Esiste, per così dire, una specie di giustizia sociale nelle associazioni animali, che forse sarebbe utile anche fra gli uomini.

Questa ultima legge era stata prevista da Carlo Darwin, ed il calcolo potè darne una conferma.

Il Volterra aveva avuto dei precursori nell'applicazione del calcolo a fenomeni biologici di carattere statistico, ma entro limiti più ristretti. Il biologo Ross, celebre per le sue ricerche sulla malaria, aveva stabilito delle equazioni per definire il corso della malattia nelle popolazioni. Attualmente vari naturalisti, anche in Italia, si servono di metodi ispirati alle idee del Volterra.

Possiamo ora notare, alla fine di questa rapida e certamente assai incompleta corsa nelle ricerche del nostro matematico, che Egli, qualunque abbia spinto le sue indagini in campi nuovi e con metodi nuovi, è rimasto sempre sostanzialmente fedele alle tradizioni ed ai procedimenti della Fisica matematica classica, nell'indirizzo di Betti, di Beltrami, di Lord Kelvin, di Helmholtz, di Poincaré. Delle nuove teorie innovatrici comparse in tempi recenti nella Fisica matematica e che hanno dato origine a tante discussioni, poco si curò; ne io lo sentii mai esprimere un giudizio su di esse, nè favorevole, nè contrario.

Debbo ora ricordare una pagina delle meno conosciute della vita del nostro Uomo di scienza, anche per il fatto che Egli non ne parlava mai. È quella che riguarda il suo servizio militare di guerra.

Volontario, a 55 anni, nel luglio 1915 fu nominato Tenente del genio, l'anno successivo Capitano per meriti speciali, addetto alle esperienze sui dirigibili. In tale ufficio si trovò durante il 1916 sul fronte italiano da Verona a Gorizia per studi di fototelemetria, nel novembre del 1916 sul fronte francese a Reims, Chalons, Fismes, Soisson per studiare gli apparecchi di quell'armata. Nel 1917 di nuovo sul fronte italiano a Gorizia, Monfalcone, Vertalba, Doberdò, poi sul Sabotino. Nella primavera del 1917 ed in quella del 1918, e nell'autunno 1918 ha attraversato ripetutamente la Manica per recarsi in Inghilterra.

Nel suo stato di servizio si legge:

« Il Capitano Volterra, durante il suo servizio militare diede prova della sua incomparabile competenza tecnica, sia per gli studi e le pubblicazioni fatte sui tiri d'artiglieria, sia per gli studi e le esperienze di fototelemetria. Oltre a ciò Egli ha il merito di essere stato il primo a proporre il gas elio per i dirigibili.

» Durante le sue missioni militari Egli ha mostrato ovunque una calma esemplare di fronte ai pericoli; per cui nel luglio 1916 ottenne un encomio solenne perchè a Campi di Bisenzio, durante una pericolosissima discesa da un'altezza di 5000 m. del dirigibile N. 7, su cui si facevano esperienze attinenti ad operazioni belliche, conservava tale sangue freddo da continuare i suoi studi e registrare tutte le variazioni del moto della aeronave.

» In zona d'operazione poi ha compiuto tutti i suoi studi ed esperienze sulle linee d'operazione avanzate, ed ha fatto osservazioni scientifiche sia sul fronte italiano, che su quello francese su terreno battuto dalle artiglierie nemiche di medio calibro, non curandosi degli immensi rischi a cui era sottoposto.

» Per i suaccennati motivi credo doveroso proporre il summenzionato Capitano del genio, Senatore Vito Volterra per la concessione della Croce al merito di guerra

(firmato): « Generale *Morrone* ».

Questa nota militare e guerriera getta uno sprazzo singolare di luce sulla figura di questo Uomo, apparentemente mitissimo, tutto de-

dito ad una vita di pensiero, che mai aveva avuto prima alcuna preparazione militare. Ed è per noi una fulgida prova che il suo carattere era completo, senza lacune, senza deficienze.

Enumerare gli onori, le distinzioni d'ogni genere che ebbe da quasi tutte le Nazioni del mondo sarebbe ben lungo. Egli fu socio si può dire di tutte le Accademie e Società scientifiche esistenti in Italia e fuori d'Italia.

Fu *doctor honoris causa* in Matematica della Università di Oslo, in Scienze della Università di Cambridge, in Filosofia della Università di Stoccolma, in Fisica della Clark University (Worcester Mass.), in Scienze della Università di Strasburgo, in Scienze della Sorbona, in Legge della Università di Edimburgo, in Scienze della Università di Oxford.

Anche dalla famiglia, che si formò, ha avuto grandi consolazioni: una consorte che come un angelo benefico tutta si diede a rendergli facile la vita, perchè potesse, senza preoccupazioni, dedicarsi ai suoi studi, alle sue ricerche, ai suoi viaggi; figli degni in tutto dei loro genitori.

Vito Volterra si spense in Roma l'11 di ottobre dello scorso anno, dopo un lento deperimento delle forze fisiche, che aveva lasciato intatte le facoltà intellettuali.

Aveva superato di cinque mesi gli ottant'anni.

La scienza nostra scrive il nome del Volterra accanto a quello dei grandi ricercatori che hanno tenuto alto fra le Nazioni il prestigio scientifico italiano alla fine del secolo XIX ed al principio del secolo XX.

La scienza mondiale vede con compiacimento celebrato l'eminente scienziato in questa eccelsa Accademia Pontificia, che non conosce confini, nè di Stati, nè di Nazioni, ed onora la scienza per sè stessa come una delle più alte, delle più pure, delle più nobili manifestazioni dello spirito umano.



VITO VOLTERRA e CARLO SOMIGLIANA

dal gruppo fotografico dei neo-laureati - Pisa 1881.

## PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DI VITO VOLTERRA

1881.

*Sul potenziale di un'elissoide eterogenea sopra di se stessa.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* Napoli (Giornale di Matem. diretto dal Prof. G. Battaglini).

1882.

*Sui principi del calcolo integrale.* Napoli (Giornale di Matem. diretto dal Prof. G. Battaglini).

*Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.* Milano (Annali di Matematica pura od applicata).

*Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti Galvaniche costanti in un corpo qualunque.* Pisa (Nuovo Cimento).

*Sopra alcuni problemi di idrodinamica.* Pisa (Ibid.).

*Sulle apparenze elettrochimiche alla superficie di un cilindro.* Torino (R. Acc. di Torino).

1883.

*Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale.* Pisa (Ann. della Scuola Normale).

1884.

*Sopra un problema di elettrostatica.* Roma (Transunti R. Acc. dei Lincei).

*Sull'equilibrio delle superfici flessibili ed inestensibili.* Roma (Ibid.).

*Sopra un problema di elettrostatica.* Pisa (Nuovo Cimento).

1885.

*Sulla deformazione delle superfici flessibili ed inestensibili.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Integrazione di alcune equazioni differenziali del secondo ordine.* Roma (Ibid.).

*Sulle figure elettrochimiche di A. Guebhard.* Torino (R. Acc. di Torino).

1886.

*Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1887.

*Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Napoli (Memorie Società dei XL).

*Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sopra le equazioni dipendenti da linee.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni differenziali lineari.* Roma (Ibid.).

1888.

*Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabile complessa.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle funzioni analitiche polidrome.* Roma (Ibid.).

*Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Palermo (Circolo Matematico di Palermo).

1889.

*Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.* Stockholm (Acta Mathematica).

*Delle variabili complesse negli iperspazii.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle funzioni coniugate.* Roma (Ibid.).

*Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali.* Roma (Ibid.).

*Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate.* Palermo (Circ. mat. di Palermo).

1890.

*Sulle variabili complesse negli iperspazii.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni.* Roma (Ibid.).

*Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni.* Roma (Ibid.).

1891.

*Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sopra le equazioni di Hertz.* Pisa (Nuovo Cimento).

*Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* Pisa (Ibid.).

1892.

*Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Stockholm (Acta Mathematica).

*Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* Roma (Ibid.).

*Sul principio di Huygens.* Pisa (Nuovo Cimento).

*Necrologia del Prof. Enrico Betti.* Pisa (Ibid.).

*Necrologia del Prof. Enrico Betti.* Firenze (Rivista Scientifico-Industriale).

1893.

*Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* Roma (Ibid.).

1894.

*Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* Stockholm (Acta Mathematica).

*Esercizi di Fisica Matematica. Sulle funzioni potenziali.* Torino (Rivista di Matematica).

1895.

*Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Roma (Memoria Soc. dei XL).

*Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* Kiel (Astr. Nachrichten).

*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili.* Roma (Ibid.).

*Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* Milano (Annali di Matematica pura ed applicata).

*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici.* Milano (Ibid.).

*Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Torino (R. Acc. di Torino).

*Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni strazionarii.* Torino (Ibid.).

*Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Torino (Ibid.).

*Sui moti periodici del polo terrestre.* Torino (Ibid.).

*Osservazione sulla mia Nota « Sui moti periodici del polo terrestre ».* Torino (Ibid.).

*Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quali sussistono moti interni strazionarii.* Torino (Ibid.).

*Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre.* Torino (Ibid.).

*Necrologia del Prof. G. B. Erba.* Torino (Annuario dell' Univ. di Torino).

1896.

*Lettera al Presidente Brioschi.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulla inversione degli integrali definiti.* Roma (Ibid.).

*Sulla inversione degli integrali multipli.* (Ibid.).

*Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.* Milano (Annali di Matematica pura ed applicata).

*Sulla inversione degli integrali definiti.* I. Nota. Torino (R. Acc. di Torino).

*Sulla inversione degli integrali definiti.* II. Nota. Torino (Ibid.).

- Sulla inversione degli integrali definiti. III. Nota. Torino (Ibid.).*  
*Sulla inversione degli integrali definiti. IV. Nota. Torino (Ibid.).*  
*Osservazione sulla Nota del Prof. Lauricella relativa alla integrazione delle equazioni e sopra una nota di analogo argomento dell'Ing. Almansi. Torino (Ibid.).*  
*Lezioni di Meccanica. Prime nozioni di Cinematica. Livorno.*

1897.

- Sulle equazioni differenziali lineari. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).*  
*Sulla scarica elettrica nei gas. Roma (Ibid.).*  
*Sul principio di Dirichlet. Palermo (Circolo di Palermo).*  
*Un teorema degli integrali multipli. Torino (R. Acc. di Torino).*

1898.

- Sur la théorie des variations des latitudes. Stockholm (Acta Mathematica).*  
*Sul fenomeno delle Seiches. Pisa (Nuovo Cimento).*  
*Sur la théorie des variations des latitudes. Leipzig (Astr. Gesellschaft).*  
*Sopra una classe di equazioni dinamiche. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche. Torino (Ibid.).*  
*Sopra alcune applicazioni delle leggi del flusso di energia meccanica nel moto dei corpi che si attraggono con la legge di Newton. Torino (Ibid.).*  
*Sopra una classe di moti permanenti stabili. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del Prof. Mittag-Leffler. Torino (Ibid.).*  
*Sul flusso di energia meccanica. Torino (Ibid.).*  
*Sul flusso di energia meccanica. Pisa (Nuovo Cimento).*  
*Sulle funzioni poliarmoniche. Venezia (Istituto Veneto).*

1900.

- Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Necrologia del Prof. Eugenio Beltrami. Roma (Annuario dell'Univ. di Roma).*  
*Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse. Paris (Congrès International des Mathématiciens).*  
*Sur les équations aux dérivées partielles. Paris (Congrès International des Mathématiciens).*

1901.

- Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali. Roma (Annuario dell'Università di Roma).*



1902.

*Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre.* Stockholm. (Acta Mathematica).

1903.

*Sul numero dei componenti indipendenti d'un sistema.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Congresso storico Internazionale.* Firenze (Arch. Storico Italiano).

*Commemorazione del Socio straniero G. G. Stokes.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sur les équations différentielles du type parabolique.* Paris (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences).

*Note on the application of the method of images to problems of vibrations.* London (Proceedings of the London Mathematically Society).

*Relazione sul viaggio compiuto dal Prof. Vito Volterra per incarico avuto dalla Commissione nominata per il riordinamento del Politecnico di Torino* (Febbraio-Marzo 1940).

1905.

*Un teorema sulla teoria della elasticità.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici.* Roma (Ibid.).

*Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.* Roma (Ibid.).

*Opere del Prof. Alfredo Cornu.* Torino (R. Acc. di Torino).

1906.

*Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions.* Paris (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences).

*Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Leçons sur l'Intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm.* (Février-Mars 1906) Upsal.

*Les Mathématiques dans les sciences biologiques et sociales.* Paris (Revue du Mois).

*Sui tentativi delle applicazioni delle matematiche alle scienze biologiche e sociali.* Firenze (Archivio di Fisiologia).

*L'economia matematica ed il nuovo manuale del Prof. Pareto.* Roma (Giornale degli Economisti).

*Fondazione di un Politecnico nella città di Torino. Discorso pronunciato in Senato* (Giugno 1906).

1907.

*Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* Paris (Ann. de l'école Normale Supérieure).

*Proposta di una Associazione Italiana per il progresso delle Scienze.* Milano (Congresso dei Naturalisti Italiani).

*Parole pronunciate alle feste giubilari di Augusto Righi.* Bologna.

1908.

*Il momento scientifico presente e la nuova Società Italiana per il progresso delle Scienze.* Roma (Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze).  
*Parole pronunciate al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.* Firenze (Ibid.).

*Parole del Preside della Facoltà di Scienze.* Roma (Onoranze al Prof. Sella).

1909.

*Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni di tipo iperbolico.* Roma (Atti del IV Congr. Intern. dei Matematici).

*Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione.* Roma (R. Acc. Lincei).

*Sulle equazioni integro-differenziali.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni della elettrodinamica.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità.* Roma (Ibid.).

*Parole pronunciate al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* Venezia (Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze).

*Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.* Roma (IV Congr. Intern. Matematico).

*Parole del Preside della Facoltà di Scienze.* Roma (Onoranze al Prof. Cremona).

*Necrologia del Prof. G. Vailati* Roma. (Boll. della Mathesis).

*Commemorazione di Valentino Cerruti.* Roma.

*Lectures delivered at the Clark University,* Worcester. Mass.

1910.

*Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.* Roma (Rend. R. Acc. Lincei).

*Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* Roma (Ibid.).

*Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Roma (Ibid.).

*Deformazione di una sfera elastica soggetta a date tensioni nel caso ereditario.* Roma (Ibid.).

*Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni permutabili.* Roma (Ibid.).

*Espacio, tiempo i masa segun las ideas modernas.* Buenos Aires (Sociedad científica Argentina).

*Parole pronunziate avanti al feretro di Stanislao Cannizzaro.* Pisa (Nuovo Cimento).

1911.

- Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Contributo allo studio delle funzioni permutabili.* Roma (Ibid.).  
*Sopra le funzioni permutabili di 2 specie e le equazioni integrali.* Roma (Ibid.).  
*Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali.* Roma (Ibid.).  
*Parole del Preside della Facoltà.* Roma (Onoranze al Prof. De Helguero).

1912.

- Sulle temperature nell'interno delle montagne.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Sopra equazioni di tipo integrale.* Cambridge. (Intern. Congress of Mathematicians).  
*Vibrazioni elastiche nel caso della eredità.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sur les équations integro-differentielles et leurs applications.* Upsala (Acta Mathematica).  
*L'évolution des idées fondamentales du calcul infinitésimal.* Paris.  
*L'application du calcul aux phénomènes d'hérédité.* Paris, 1912 (Révue du Mois).  
*Onoranze al Prof. Valentino Cerruti.* Roma.

1913.

- Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales-différentielles.* Paris.  
*Leçons sur les fonctions des lignes.* Paris.  
*Sui fenomeni ereditari.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sopra equazioni integro-differenziali aventi limiti costanti.* Roma (Ibid.).  
*Henri Poincaré. L'œuvre mathématique.* Paris (Révue du Mois).  
*Discorso sulla fondazione della scuola degli Ingegneri di Pisa.* Roma (Rend. del Senato).

1914.

- Henri Poincaré. Nouvelle collection scientifique.* Paris.  
*Onoranze al Prof. Dott. G. B. Guccia.* Palermo (Supplemento al Rend. del Circolo Matematico di Palermo).  
*Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Roma (Ibid.).  
*Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Roma (Ibid.).  
*Les problèmes qui ressortent du concept des fonctions de lignes.* Leipzig (Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft).  
*Die Vorlesungen über neue Fortschritte der Mathematisch Physik gehalten in September 1919 an der Clark University.* Berlin. e Leipzig, 1914.  
*Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Henri Poincaré. The Rice Institute Pamphlet.*  
*The theory of permutable functions.* Princeton (Lectures delivered at Princeton University, October 1912).  
*Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Note I, II, III, IV. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1916.

*Teoria sulle potenze dei logaritmi e delle funzioni di composizione.* Roma (Memoria della R. Acc. dei Lincei).

*Metodi di calcolo degli elementi di tiro dell'artiglieria aeronautica.* Roma (Rend. Istituto Centrale di Aeronautica).

1917.

*The generalization of the analytic functions.* The Rice Institute Pamphlet.  
*On the theory of waves and Green's method* (Ibid.).

*Inaugurazione dell'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.* Venezia, Dicembre 1916.

*Discorso inaugurale per l'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.* Venezia (Boll. Trimestrale del R. Comitato Talassografico Italiano).

*Relazione sulla missione in Inghilterra ed in Francia compiuta dal 24 Aprile al 19 Maggio 1917.* Roma.

1918.

*Pietro Blaserna.* Roma (Rend. del Senato. Tornata del 27 Febbraio 1918).

*Dedica della memoria: Teoria delle potenze dei logaritmi, alla Università di Edinburgo.* Edinburgh.

1919.

*Relazione della Conferenza Interalleata sulla organizzazione scientifica.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Rapporto preliminare sulla terza conferenza del Consiglio Internazionale delle Ricerche tenuta a Bruxelles dal 18 al 28 Luglio 1919.* Roma (Ibid.).

*L'entente scientifique.*

*La terza conferenza del Consiglio Internazionale delle Ricerche.* Bologna (Intesa Intellettuale).

1920.

*Functions of composition.* Houston [Texas] (The Rice Institute Pamphlet).  
*Saggi scientifici.* Bologna.

*Pietro Blaserna.* Paris (Bull. du Bureau Intern. des Poids et Mesures).

*Le Congrès de Mathématiques de Strasbourg.*

*Interpellanza sulla Stazione Zoologica di Napoli.* Roma (Atti Parlamentari del Senato del Regno).

*Osservazioni sul metodo di determinare la velocità dei dirigibili.* Roma (Rassegna Marittima Aeronautica illustrata).

*Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'analyse.* Toulouse (Comptes Rendus du Comité International des Mathématiciens).

*Commemorazione di Augusto Righi.* Roma (Atti Parlamentari del Senato del Regno).

1921.

*Funzioni di linee, equazioni integrali e integro-differenziali.* Buenos Aires (Anales de la Sociedad Científica Argentina).

*Relazione sull'insegnamento della dinamica nelle scuole industriali.* Bologna (Rivista di ottica e di meccanica di precisione).

*Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Roma (Atti Parlamentari).

*Flow of electricity in a magnetic field.* Berkeley University of California.

1922.

*Address at the inaugural ceremony of the international Astronomical Assembly.* London (Transactions of the Astr. Intern. Union).

*Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Roma (Atti Parlamentari).

1923.

*Sur les fonctions permutables.* Paris (Bull. de la Soc. Math. de France).

*Mouvement d'un fluide en contact avec un autre et surface de discontinuité.* Paris (Comptes Rendus des Séances de l'Ac. des Sciences).

*Commemorazione di Luigi Pasteur.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1924.

*Leçons sur la composition et les fonctions permutables.* Paris.

*Discorso presidenziale all'Accademia dei Lincei.* Roma (Rend. delle adunanze solenni della R. Acc. dei Lincei).

*Arthur Gordon Webster.* Worcester, Mass.

1925.

*Paroles prononcées au cinquantenaire de la Société Française de Physique.* Paris (Le livre du Cinquantenaire de la Société Française de Physique).

*Toast an Cinquantenaire de la Société Française de Physique.* Paris (Ibid.).

*Discorso presidenziale all'Accademia dei Lincei.* Roma (Rend. delle Adunanze solenni della R. Acc. dei Lincei).

*Commemorazione del Presidente Francesco D'Ovidio.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*In memoria di Cornelia Fabri.* Ravenna (Arti Grafiche).

1926.

*Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically.* London (Nature).

*Variazioni e fluttuazioni del numero di individui in specie animali conviventi.* Città di Castello (Memoria R. Acc. dei Lincei).

*L'ignorance sépare, la science rapproche (La science et la vie).*

1927.

*Teoría de las funcionales y de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.*  
Madrid (Conferencias en la Facultad de Ciencias de Madrid).

*Variazioni e fluttuazioni in specie animali conviventi.* Venezia (Comitato Talas. Italiano).

*Sulle fluttuazioni biologiche.* (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Leggi sulle fluttuazioni biologiche.* Roma (Ibid.).

*Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche.* Roma (Ibid.).

*Essai mathématique sur les fluctuations biologiques.* Paris (Bull. de la Société d'Océanographie de France).

*Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza.* Milano.

*Une théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Milano (Scientia).

*Rapports et Procès verbaux des réunions du Conseil Permanent pour l'Exploration de la mer.* Copenhaque.

*Cinquantième scientifique de M. Appell.* Paris.

*Lois de fluctuations de la population de plusieurs espèces coexistant dans le même milieu.* Paris (Ass. Française pour l'Avancement des Sciences).

*La création du Bureau International des Poids et Mesures.* Paris (Préface).

*Discours prononcé à la septième conférence générale des Poids et Mesures.* Paris (Comptes Rendus des Séances).

1928.

*Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires* (Journal de Mathématiques).

*La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari.* Bologna (Atti del Congresso Internazionale dei Matematici).

*Théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Mosca (in russo).

*Variations and fluctuations of the number of individuals in animals species living together* (Journal du Conseil Intern. pour l'Exploration de la mer.).

*In memoria di H. A. Lorentz.* Bologna (Nuovo Cimento).

*Erik Ivar Fredholm.* Paris (Comptes Rendus des Séances du Comité International des Poids et Mesures).

*Cinquantième scientifique de Mr. Emile Picard* (Allocution au nom de l'Ac. Royale des Lincei).

1929.

*Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle fluttuazioni biologiche.* Conferenza redatta dal Prof. Masotti, Milano (Seminarario Matematico e Fisico di Milano).

*Presentazione dell'ultimo volume delle opere di Alessandro Volta.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1930.

*La théorie des fonctionnels appliquées aux phénomènes héréditaires* (Révue Générale des Sciences. Traduction de M. J. Pérès).

*Sulla meccanica ereditaria*. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Theory of the Volterra integral equation of second kind*. By Harold Thayer Davis (Indiana University Studies).

1931.

*Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris (Redigées par M. Brelot).

*Ricerche matematiche sulle associazioni biologiche*. Roma (Giornale dell'Ist. Ital. degli Attuarii).

*La concorrenza vitale tra le specie nell'ambiente marino*. Per Vito Volterra e Umberto d'Ancona. Paris [Orléans] (VII Congrès Intern. d'Aquiculture et de Pêche).

*Italians Physicists and Faraday's researches* (Supplement to Nature).

*I Fisici Italiani e le ricerche di Faraday* (L'elettrotecnica).

1932.

*Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la physique mathématique*. Praha [Brno] (Conférences Faites en 1931).

*Sur les jets liquides* (Journal de Mathématiques).

1933.

*Variacni pocet jeho vijvoj jeho pokroky ulcha y matenaticke iysice*. Praha.

*De Moivre's Miscellanea analytica* (Nature).

*Paul Painlevé et les inventions interallées* (Recherches et Inventions).

*Discours prononcé à la première Séance de la Conférence générale des Poids et Mesures*.

1934.

*Sur la théorie des ondes liquides et la méthode de Green* (Journ de Mathématiques).

*Equations aux dérivées partielles et théorie des fonctions* (Ann. de l'Institut H. Poincaré).

*Représentation des fonctionnelles analytiques déduites du théorème de Mittag-Leffler* (Journal de Mathématiques).

1935.

*Les associations biologiques au point de vue Mathématique* par M. Vito Volterra et M. Umberto d'Ancona. Paris, Hermann (Actualités Scientifiques et Industrielles).

1936.

*Les équations des fluctuations biologiques et le calcul des variations.* Paris (C. R. Ac. des Sciences).

*Les équations canoniques des fluctuations biologiques.* Paris (C. R. Ac. des Sciences).

*Sur l'intégration des équations des fluctuations biologiques* (Ibid.).

*Le principe de la moindre action en biologie.* Paris (Ibid.).

*La théorie mathématique de la lutte pour la vie et l'expérience* (Scientia).

*Théorie générale des fonctionnelles.* Volume I. *Généralité sur les fonctionnelles.*

*Théorie des équations intégrales,* in collaborazione col Prof. J. Pérès). Paris (Gauthier-Villars).

1937.

*Préface à l'ouvrage de Mlle Elena Freda. Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris (Gauthier-Villars).

*Principe de la Biologie Mathématique* (Acta Biotheoretica).

*Préface à l'ouvrage: W. A. Kostitzin, Biologie Mathématique.* Paris (Collection Armand Colin).

*Leggi sulle fluttuazioni e principii di reciprocità in biologia.* Perugia (Rivista di Biologia).

*Conférence des Poids et Mesures* (Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences).

*I miei studi più recenti di Biologia Matematica* (Gazzetta del Popolo della Sera).

*Applications des mathématiques à la Biologie.* Genève (Enseignement mathématique).

1938.

*Population growth, equilibria, and extinction under specified breeding conditions; a development and extension of the theory of the logistic curve* (Human Biology).

*Lois des fluctuations biologiques et leur conséquences.* Paris (Bull. Soc. Mathématique de France).

*Opérations infinitésimal linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles* par Vito Volterra et Bohuslaw Hostinsky. Paris (Gauthier-Villars).

*Conférences sur quelques questions de Mécanique et de Physique Mathématique. Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes,* par Vito Volterra (Redaction de P. Costabel). Paris (Gauthier-Villars).

*Remarques sur l'action toxique du milieu à propos de la Note de M. Rehnier et Mlle Lambin.* Note de M. M. Vito Volterra et de V. A. Kostitzin. Paris (Ac. des Sciences).



*The General equations of biological strife in the case of historical actions.* Edinburgh. (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society).

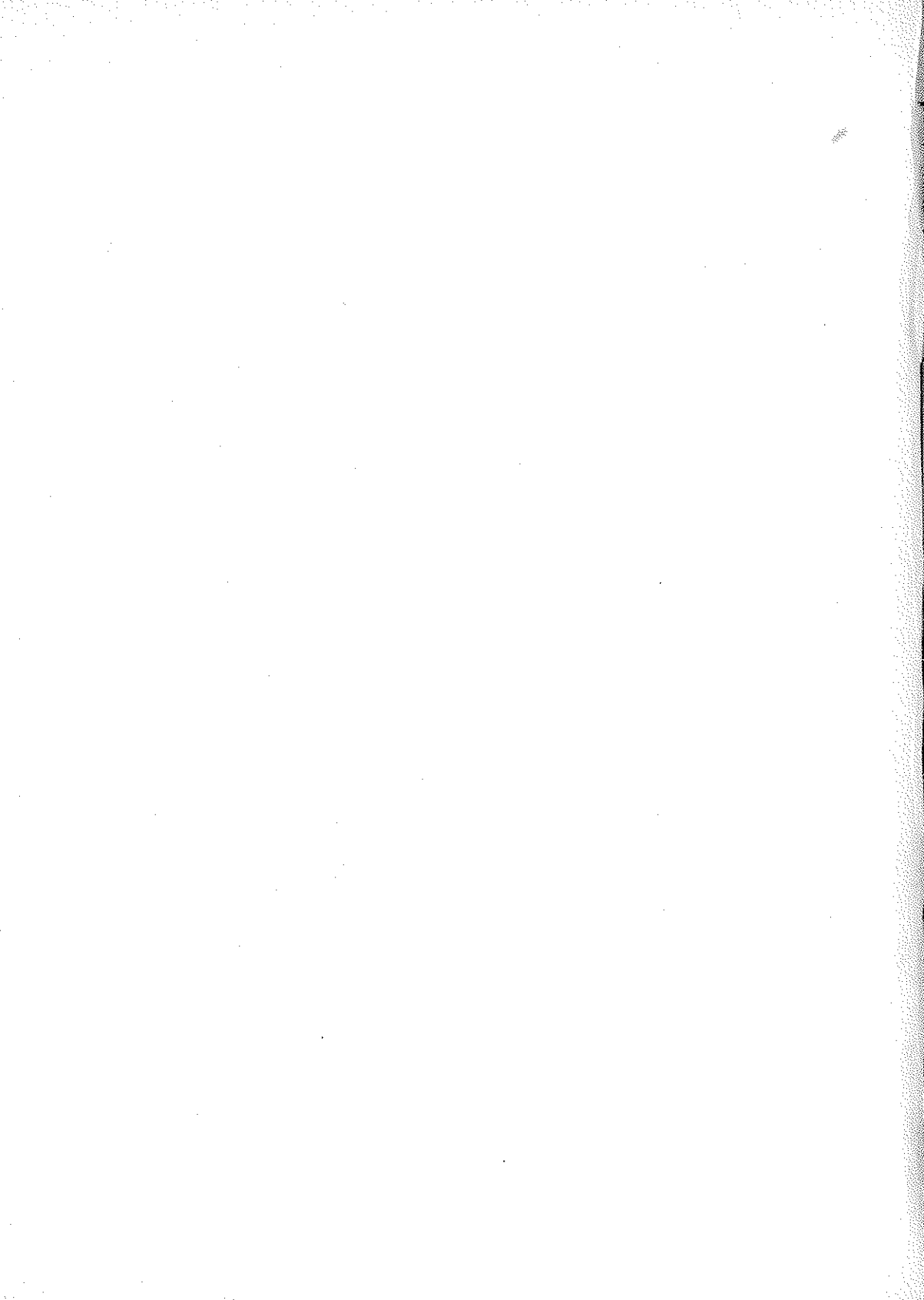
*Fluctuations dans la lutte pour la vie. Leurs lois fondamentales et de réciprocité. Conférences de la Réunion Intern. des Mathématiciens tenue à Paris, Juillet 1937.* (Gauthier-Villars).

1939.

*Calculus of Variations and the logistic curve* (« Human Biologie »).

1940.

*Energia nei fenomeni ereditarij.* Città del Vaticano (Pontificia Academia Scientiarum: « Acta », anno IV, n. 14).



LIQUIDO  
NEL QUALE LA VELOCITÀ DEGLI ULTRASUONI  
È INDIPENDENTE DALLA TEMPERATURA (\*)

(Con tre figure)

AMEDEO GIACOMINI

SUMMARIVM. — Velocitatem qua ultra-soni per aquam etilico alcoole mixtam propagantur, metitus est Auctor.

Diagrammata, quae exprimunt quomodo velocitas ad spissitudinem se habeat, cacumen semper habent, cuius situs caloris mutatione mutatur.

Constat autem, si mixtio ita fiat ut septendecim centesimae partes circiter ex alcoole sint, ultra-sonis eadem velocitatem servare quomodocumque caloris vis varietur.

I fisici si sono spesso proposti di costituire sostanze o corpi i quali godessero della proprietà, che un loro determinato parametro caratteristico fosse sensibilmente indipendente della temperatura.

In questo ordine di idee si possono ricordare, ad esempio, le leghe a resistività elettrica poco variabile<sup>(1)</sup>, l'acciaio *invar*<sup>(2)</sup>, che ha coefficiente di dilatazione termica assai piccolo, l'acciaio *elinvar*<sup>(3)</sup>, avente modulo di elasticità quasi indipendente dalla temperatura.

Conviene inoltre citare le piastrine di quarzo usate come campioni di frequenza. Anche per queste si è studiato a lungo<sup>(4)</sup> onde tro-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, nella Tornata del 30 novembre 1941.

(1) Vedi, ad es., G. WIEDEMANN, *Die Lehre von der Elektrizität*, vol. I, pag. 485. Ediz. Vieweg-Braunschweig, 1893.

(2) A. GUILLAUME, *Comptes Rendus des séances de la Troisième conférence générale des poids et mesures*. Gauthier Villars, Paris, 1901.

(3) A. GUILLAUME, *Le Génie Civil*, vol. 80, pag. 88, 1922.

(4) F. R. LACK, *Proc. I. R. E.*, vol. 17, pag. 1123, 1929. — A. SCHEIBE, V. ADELSBERG, *H. F. Tech. u. El. Ak.*, vol. 43, pag. 37, 1934. — F. R. LACK, G. W. WILLARD, I. E. FAIR, *Bell. Syst. techn. Journ.*, vol. 13, pag. 453, 1934. — W. P. MASON, *Proc. I. R. E.*, vol. 28, pag. 220, 1940.

vare un « taglio », che rendesse la frequenza di risonanza della piastrina sensibilmente indipendente dalla temperatura.

Non ci risulta che sino ad ora si fosse pensato di ricercare un liquido nel quale la velocità di propagazione degli ultrasuoni fosse, entro conveniente intervallo, indipendente dalla temperatura.

Per conseguire tale scopo abbiamo preso le mosse osservando che, per tutti i liquidi sui quali è stato sperimentato, la velocità di propagazione delle onde elastiche è funzione decrescente della temperatura, eccezione fatta per il caso dell'acqua. Ciò ha fatto pensare che una mescolanza di due liquidi, dei quali uno fosse l'acqua, potesse presentare coefficiente di temperatura per la velocità degli ultrasuoni sensibilmente nullo <sup>(1)</sup> in ampio intervallo. Il coefficiente di temperatura cui si allude è ovviamente la grandezza  $k = \frac{dv}{d\theta}$ , ( $v$  velocità degli ultrasuoni,  $\theta$  temperatura).

Abbiamo quindi intrapresa una serie di misure della velocità di propagazione di ultrasuoni, aventi frequenza uguale a 2019,4 kHz, in mescolanze di acqua ed alcool etilico. L'alcool adoperato è quello assoluto della ditta Merck.

Il metodo sperimentale seguito è sostanzialmente quello di Hiedemann e collaboratori. Una descrizione esauriente delle apparecchiature usate e del procedimento di misura è apparsa in altro lavoro <sup>(2)</sup> e ad essa il lettore viene rimandato per maggiorî chiarimenti.

Qui conviene solo aggiungere che la precisione inerente alle presenti misure è lievemente inferiore a quella ottenuta in passato. Ciò dipende essenzialmente dalle difficoltà incontrate nello sperimentare a temperature discoste da quella ambiente.

Sin dalle prime determinazioni abbiamo appurato che non era soddisfatta la regola di addittività. Infatti avviene, in alcuni casi, che la velocità nelle mescolanze è più grande che nei liquidi componenti puri. In altre parole, la curva rappresentativa della velocità in funzione della percentuale di un componente (a temperatura costante) presenta un massimo. Questo fatto, che nel caso particolare della mescolanza

<sup>(1)</sup> A. GIACOMINI, *La Ricerca scientifica*, vol. 12, pag. 384, 1941.

<sup>(2)</sup> A. GIACOMINI e B. PESCE, *La Ricerca Scientifica*, vol. 11, pag. 605, 1940.

etanolo-acqua non era stato constatato da altri, trova riscontro nei risultati ottenuti precedentemente su alcune poche altre miscele, per le quali appunto la curva rappresentativa della velocità in funzione della concentrazione presenta un massimo <sup>(1)</sup>(<sup>2</sup>) od un minimo <sup>(3)</sup>.

La constatazione che la regola di addittività non era soddisfatta fece in un primo tempo dubitare che la meta prefissata potesse venir raggiunta. Tuttavia tracciate, sulla scorta dei dati sperimentali che si andavano accumulando, le curve rappresentative della velocità in funzione della temperatura, abbiamo ottenute le grafiche mostrate in fig. 1. Da una semplice ispezione di esse risulta palese quanto segue:

1°) Le curve  $v = f(\theta)$  non sono sempre situate nella porzione del piano compresa fra le curve relative ai liquidi componenti allo stato puro. Ciò dimostra indirettamente il carattere generale dell'osservazione prima fatta, circa l'andamento anomalo delle caratteristiche velocità-concentrazione ricavate a temperatura costante.

2°) Se si esclude la curva relativa all'acqua pura, le altre sono con buona approssimazione delle rette, aventi equazioni del tipo  $v = k\theta + \text{costante}$ . In altre parole il coefficiente di temperatura  $k$  appare sensibilmente costante, per assegnata percentuale dell'alcool e nell'intervallo di temperatura considerato.

3°) Al crescere della percentuale  $p$  dell'alcool i valori di  $k$ , dapprima positivi, decrescono regolarmente e divengono poi negativi. Ciò assicura la possibilità di costituire una mescolanza avente  $k = 0$ , con le limitazioni derivanti dall'aver assimilato le curve  $v = f(\theta)$  a delle rette.

Per cercare il valore di  $p$ , al quale si annulla  $k$ , abbiamo costruita la grafica di fig. 2, ove sono riportate in ascisse le percentuali di alcool ed in ordinate le variazioni totali di velocità che si hanno quando la temperatura passa da 5°C a 45°C.

Come si vede, la percentuale di alcool cui corrisponde l'annullamento del coefficiente di temperatura è prossima al 17%. Per riprova

(1) A. SMITH e M. EYING LEWIS, *Journ. of. Chem. Phys.*, vol. 7, pag. 682.

(2) B. PESCE e A. GIACOMINI, *La Ricerca scientifica*, vol. 11, pag. 619, 1940.

(3) K. SÄGER, *Phys. ZS.*, vol. 41, pag. 360, 1940.

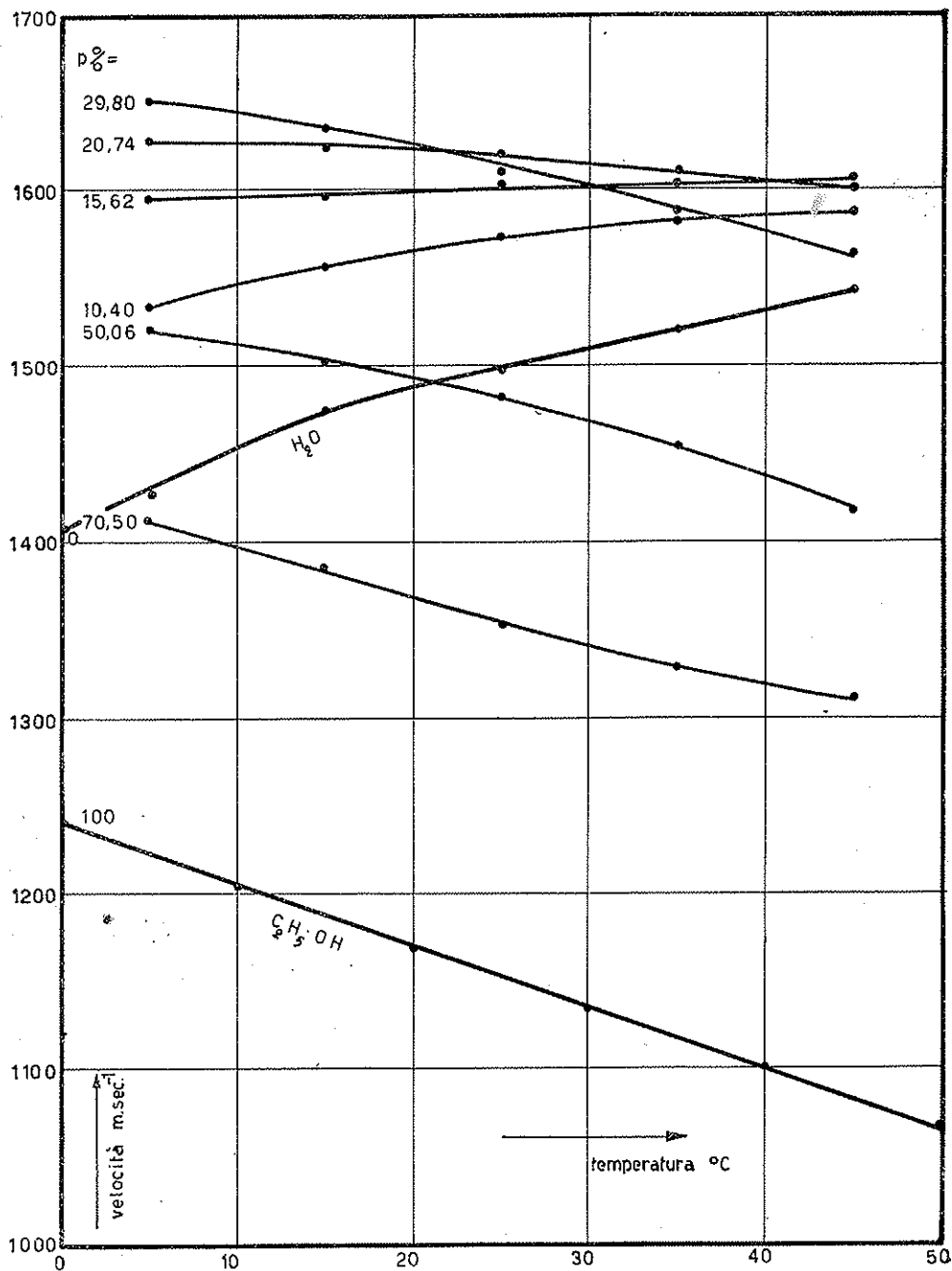


FIG. 1.

Dipendenza dalla temperatura della velocità di propagazione degli ultrasuoni in mescolanze alcool etilico-acqua.

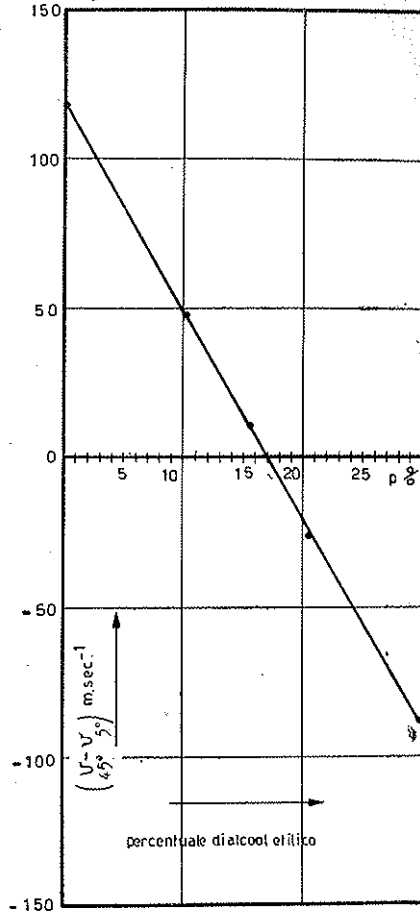


FIG. 2.

Variazioni di velocità degli ultrasuoni tra  $5^\circ\text{C}$  e  $45^\circ\text{C}$   
in funzione della percentuale di alcool.

sono state eseguite quattro misure di velocità in una miscelazione con  $p = 17,35 \%$ , ottenendo i valori seguenti:

- per  $\theta = 5^\circ\text{C}$   $v = (1,610 \pm 0,0017) \times 10^5 \text{ cm. sec.}^{-1}$
- »  $\theta = 15^\circ\text{C}$   $v = (1,611 \pm 0,0008) \times 10^5 \text{ cm. sec.}^{-1}$
- »  $\theta = 25^\circ\text{C}$   $v = (1,611 \pm 0,0020) \times 10^5 \text{ cm. sec.}^{-1}$
- »  $\theta = 35^\circ\text{C}$   $v = (1,609 \pm 0,0020) \times 10^5 \text{ cm. sec.}^{-1}$

Si deduce che la variazione di velocità, entro tutto l'intervallo  $5^{\circ}\text{C} \rightarrow 35^{\circ}\text{C}$ , non supera l'errore da cui sono affetti i valori sperimentali.

Ammettendo, per prudenza, che l'errore assoluto sia, in tutte le determinazioni, di  $\pm 2$  m. sec.<sup>-1</sup> si calcola immediatamente un limite superiore per variazione media di velocità, per grado centigrado, nell'intervallo  $5^{\circ}\text{C} \rightarrow 35^{\circ}\text{C}$ . Esso risulta di quattro parti su centomila.

Ci proponiamo di elaborare in seguito un metodo che consenta di valutare, con precisione assai grande, anzichè i valori assoluti delle velocità le variazioni di questa rispetto ad un valore iniziale, conosciuto per altra via con buona precisione. Si potrà così accertare se esiste una miscela nella quale la costanza della velocità con la temperatura sia assicurabile entro limiti ancor più ristretti di quelli già segnalati di alcune unità su centomila.

Con riferimento allo studio della velocità in funzione della concentrazione si son potute tracciare le grafiche della fig. 3. Da esse appare che vi è una percentuale di alcool cui corrisponde un massimo per la velocità. Tale massimo è tanto meno pronunciato quanto più alta è la temperatura, e la sua posizione dipende da quest'ultima. Le stesse cose è probabile si verifichino anche nelle mescolanze acido acetico-acqua, metanolo-acqua, alcool etilico-tetracloruro di carbonio, che furono studiate (1) ad una sola temperatura.

Premesso che i risultati così ottenuti forniscono fin da ora indicazioni utili per una migliore conoscenza della struttura molecolare dei liquidi è lecito segnalare alcune possibili utilizzazioni della mescolanza a velocità costante, che logicamente potrebbe chiamarsi *takinvar*.

È senz'altro palese che essa potrà servire da liquido campione ogni qual volta si possano compiere misure di velocità degli ultrasuoni adottando metodi di confronto.

Altra possibile applicazione, della quale non è dato in questo momento valutare l'importanza, è la seguente. In quei ricevitori per televisione che utilizzano una cella ultrasonora per modulare la luce, il punto luminoso che, per così dire, costruisce l'immagine, si muove con velocità proporzionale alla velocità degli ultrasuoni nella cella. Il riscaldamento del liquido contenuto in quest'ultima provoca, a cagione delle

---

(1) Vedi note 1, 2 e 3 a pag. 89.



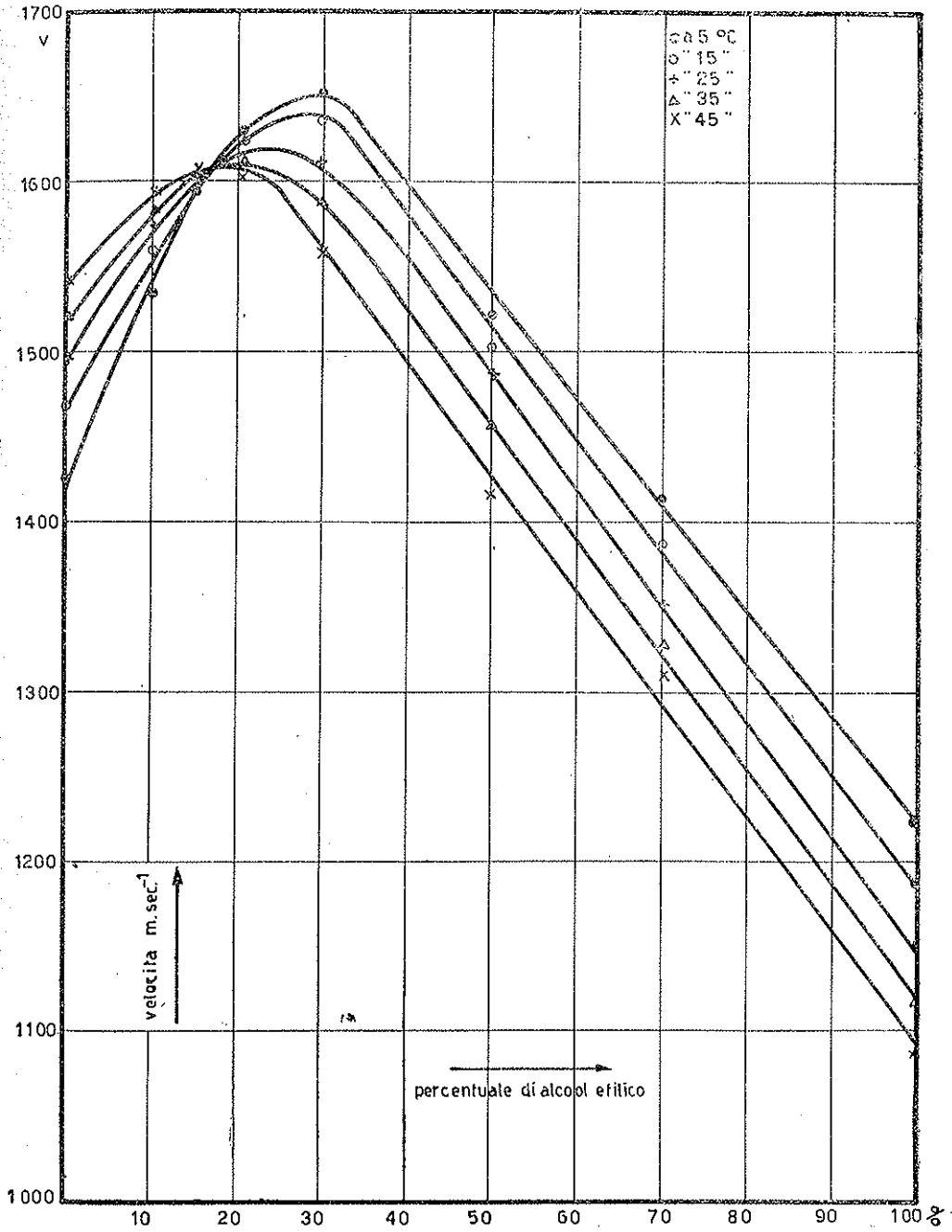


FIG. 3.

Dipendenza dalla percentuale di alcool della velocità di propagazione degli ultrasuoni.

variazioni di velocità degli ultrasuoni, una alterazione del sincronismo nel processo di costruzione dell'immagine. È presumibile che la miscela a velocità costante possa eliminare totalmente questo inconveniente.

È cosa gradita ringraziare l'Accademico Luigi Lombardi per il suo interessamento a questo lavoro, e la Sig.na M. Giannoli perchè ha intelligentemente curata la esecuzione di gran parte delle misure.

Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino »  
Roma, 25 novembre 1941-xx

NUOVE OSSERVAZIONI  
SULLA *MENGENILLA PARVULA* SILV.  
(INSECTA STREPSIPTERA) (\*)

FILIPPO SILVESTRI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Postquam Auctor *Mengenillam parvulam* Silv. corpore *Ctenolepisma Michaelseni* Esch. hospitio uti demonstravit, eius vitae cyclum breviter perhibet.

Nella Nota che presentai per gli « Acta » di questa Accademia nella Tornata dell'8 Giugno 1941<sup>(1)</sup> indicai l'ospitatore di 5 specie di *Mengenilla* (*M. quaesita* Silv., *M. spinulosa* Silv., *M. nigrifula* Silv., *M. subnigrescens* Silv., *M. laevigata* Silv.), ma non potei farlo per la *M. parvula* Silv., per la quale espressi solo il sospetto che potesse ospitare in una specie di *Lepisma*.

Raccolte ed osservazioni continuate nell'estate dello stesso anno mi hanno fatto accertare che la *Mengenilla parvula* è parassita della *Ctenolepisma Michaelseni* Escherich. Questo Lepismide è per la prima volta segnalato pure per la Sicilia; fino ad ora era noto solo per l'Africa settentrionale.

La *Mengenilla parvula* è stata finora raccolta solo nei dintorni collinosi di Carlentini e Lentini in provincia di Siracusa.

La sua biologia nota è la seguente: le larve fuoriescono dal corpo della madre, contenuta nel pupario, in estate (osservate dal 21 luglio al 25 agosto).

(\*) Nota presentata nella Tornata del 20 febbraio 1941.

(<sup>1</sup>) *Notizie, specialmente corologiche e biologiche, sulle specie di Mengenilla* (Insecta, Strepsiptera) finora trovate in Italia. « Acta », Pontificia Academia Scientiarum, anno V, n. 9, pagg. 57-65, fig. 1-4.

Pupari maschili e femminili si trovano nelle contrade collinari dei comuni indicati verso la metà d'agosto (nel 1939 ne furono raccolti vari dal 17 al 18 agosto) sotto pietre alquanto infossate, nel 1941 un buon numero dal 9 agosto al 4 settembre: da *Cten. Michaelsoni* raccolte presso Carlentini il 23 agosto 1941 fuoriuscirono fino al 26 a mattina 5 esemplari (♀♀) di *Meng. parvula*; la larva della 3<sup>a</sup> età fuoriesce dal corpo della *Ctenolepisma* tra il 6° ed il 7° o tra questo e l'8° urotergite.

Il 22 agosto del 1939 alle ore 5<sup>1/2</sup> si ebbe il primo maschio adulto ed altri fino al 30 agosto sempre di mattina fra le 5 e le 6 (ora solare).

Una parte delle femmine adulte abbandonano il pupario pure di mattina in estate, ma una parte (ora minore ora maggiore della metà) restano nel pupario stesso (da 46 pupari, raccolti il 18 agosto 1939, 6 femmine uscirono dal 20 al 21, 28 dal 21 al 29 agosto, 12 restavano ancora nel pupario), da 403, raccolti dal 9 agosto al 4 settembre, fuoriuscirono fino al 10 settembre 175 femmine. Da pupari femminili, raccolti nella stessa contrada dal 9 agosto al 4 settembre, si ebbero femmine libere fino al 13 settembre.

L'accoppiamento è extravulvare ed ha luogo nello stesso modo da me descritto per la *M. spinulosa*; la capacità copulatoria del maschio è massima dall'ora della comparsa a circa mezz'ora dopo, decresce un poco nella mezz'ora successiva e in seguito va rapidamente diminuendo per cessare del tutto dopo circa un'altra ora, quantunque una leggera vitalità del maschio duri per oltre 3 a 4 ore.

L'ovo allo stadio di ovocite di 1° ordine ha una piastra equatoriale con 5 cromosomi, circondati ciascuno da una sorta di guaina, mentre le altre specie di *Mengenilla* da me raccolte, ne hanno 9.

SULLA INNERVAZIONE  
DEL PALATO DELLA RANA (\*)  
(RANA ESCULENTA)

LUIGI SABBIA

*SYMMARIVM.* — Auctor describit minuta quaedam de ratione qua in palati mucosa et submucosa nervi disponantur. Praeterea exponit quomodo fibrae sensoriae aliter suorum nervorum extrema expandant, prout aliter se habeant sensorii disci, quos ipse putat et gustui et forte tactui quoque inservire.

Avendo avuto il compito di contribuire alle ricerche sulla innervazione periferica che sono in corso nell'Istituto Anatomico dell'Università di Pavia, mi sono occupato della innervazione della muccosa orale della rana e comunico, per ora, quanto ho osservato, in modo particolare, in quella del palato. Mi sono valso, per la tecnica, del metodo del BIBLSCHOWSKY-GROSS nelle sue varie modalità di applicazione e modificazione.

Ho notato che la muccosa palatina della rana è dotata di una ricchissima innervazione.

Tra lo strato connettivale e il periostio della volta palatina sottostante, decorre un notevole numero di nervi macroscopicamente visibili, i quali emettono diramazioni penetranti nello spessore dello strato connettivale sottomucoso. Tali diramazioni intraconnettivali, ridottesi ad ordine di grandezza microscopico, si confondono con nervi di pari

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

Ricerche eseguite nell'Istituto diretto dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa.

entità provenienti, sempre nello spessore del connettivo, dalla regione faringea. Il complesso di tali fasci nervosi si espande per tutta l'estensione del tessuto connettivale sottomucoso.

I detti tronchi nervosi si anastomizzano frequentemente tra loro dando origine ad una vera rete nervosa a maglie di notevole dimensione, di forma per lo più rombica, costituita di tronchi mielinici. Lungo il decorso di questi si dipartono tronchi minori che si dividono e suddividono fino a farsi apparentemente amielinici. Dal plesso sopra descritto partono filamenti che danno luogo ad una notevole innervazione della tonaca propria della mucosa e soprattutto dello strato immediatamente sotto epiteliale. Quivi si riscontrano filamenti molto sottili, amielinici con decorso sinuoso che, proseguendo, si insinuano tra le cellule epiteliali, ma senza formare una vera rete nervosa. Non mi è stato quindi possibile mettere in evidenza quanto lo STEFANELLI ha osservato e descritto in corrispondenza della tonaca propria della mucosa del palato di topi, pipistrelli e lucertole e cioè una rete nervosa diffusa chiusa. Però desidero fare qualche riserva su questo mio reperto negativo; ho in corso altre ricerche in proposito.

Lungo i tronchi nervosi più grossi, spesso in prossimità dei punti di biforcazione e qualche volta nell'angolo di biforcazione stessa si notano delle cellule nervose simpatiche.

La maggior parte di queste cellule non sono provviste di capsula, sono globose o piriformi, consimili a quelle descritte dal HUBER e dal BETHE pure nel palato della rana, dal SEREBRIAKOW nella vescica dello stesso animale e dal KRAUSE nei gangli della catena del simpatico. Le ritengo di natura simpatica e sono caratterizzate da un apparato spiriforme fittissimo che circonda il neurite e si estende anche intorno al corpo cellulare. Tale apparato è l'espansione terminale di fibre aventi il significato di pregangliari.

Particolarmente interessanti sono le espansioni sensitive quali le ho potute dimostrare in tutta la loro completezza in rapporto con quelli che vennero definiti dal ENGELMANN, dal MERKEL, dal BETHE e da altri col nome di dischi terminali, o di dischi gustativi o di colliette sensoriali.

In corrispondenza di ognuno di questi dischi sensoriali, giungono fascetti composti da parecchie fibre nervose in parte midollate e in parte amidollate che fanno capo a complesse espansioni terminali.

Queste fibre giunte ai dischi, formano nella lamina connettivale basale numerose anse e volute decorrenti in vari piani ed intrecciate fra di loro. Emettono qui, durante il loro percorso, numerosi rami collaterali che presentano ingrossamenti e varicosità e che si dividono a loro volta in rami sempre più sottili: si forma in tal modo un fittissimo groviglio nervoso costituito da fibre mieliniche grosse disposte generalmente nei piani più profondi e di fibre più sottili amieliniche con frequenti ingrossamenti e varicosità, disposte specialmente negli strati più prossimi all'epitelio.

Al descritto groviglio nervoso che costituisce l'espansione terminale di parecchie fibre mieliniche giungono anche, da varie direzioni, sottilissime fibre nervose amieliniche di natura molto probabilmente simpatica. Esse s'intrecciano alle fibre e fibrille provenienti dai tronchi mielinici principali, tanto fittamente che è assolutamente impossibile seguire il loro percorso nell'ambito della loro espansione nervosa e valutare l'entità della loro partecipazione alla innervazione del disco terminale.

Quasi tutte le espansioni terminali del palato sono tra loro collegate da una o più fibre nervose apparentemente amieliniche decorrenti in parte nella tonaca propria e in parte nello strato connettivale sottomucoso.

I grovigli nervosi delle espansioni terminali sono in parte inclusi nel connettivo sottoepiteliale della lamina propria (*plexus subbasalis* di EHRLICH) e in parte arrivano immediatamente a contatto dell'epitelio e, colle fibre più fini amieliniche, si espandono anche fra le cellule dell'epitelio.

Sottilissimi filamenti che correndo sinuosamente negli spazi intercellulari si addentrano nello spessore dell'epitelio del disco sensoriale, si spingono fino allo strato delle cellule cilindriche più superficiali e terminano nei seguenti modi: o con terminazioni a bottoncino, o con una espansione a laminette, o liberamente fra le cellule.

I bottoni hanno forma ovale di solito e talvolta una delle estremità è appuntita: stanno tra le cellule cilindriche lievemente sporgenti sulla loro superficie. Le laminette sono notevolmente più grandi e differiscono da quelle descritte dal BETHE per il fatto che ho potuto dimostrarvi una finissima struttura reticolare: tanto che, più che vere placche o lamine potrebbero dirsi espansioni reticolari terminali. Le

terminazioni libere stanno situate negli spazi interposti tra le cellule cilindriche e paiono lievissimamente sporgere al pari di finissimi peli sulla superficie libera dell'epitelio. Rimane da stabilire se i primi due tipi di terminazioni siano endo o pericellulari. Vari autori come il MITROFANOFF, REZJUS, DOGIEL, discussero a lungo la questione con disparità di vedute; prevalse però il concetto che si dovesse parlare solo di terminazioni pericellulari « *per contiguitatem* ».

Dall'osservazione di moltissimi preparati e, per quanto ho potuto vedere, anche nelle papille fungiformi della lingua di rana, ammettendo col FAJERSZTAIN la perfetta analogia fra le due formazioni sensoriali, io sarei di avviso che le terminazioni siano pericellulari. Infatti è dato talvolta vedere come i bottoncini terminali, osservati di profilo, nelle varie sezioni siano lievissimamente rilevati sulla superficie cellulare a cui aderiscono.

Non tutte le fibrille che si staccano dal groviglio principale però terminano in uno dei modi descritti; ma alcune, sempre fra le più fini, si allontanano notevolmente dalla zona limitante il disco terminale e con decorso molto sinuoso si spingono nel circostante epitelio.

Riguardo al significato di queste formazioni sensitive e delle espansioni terminali delle fibre che vi fanno capo, ritengo, in base a dati sperimentali di BRUNI e BARTOLI ed anche conformemente a mia esperienza personale, che abbiano funzione gustativa.

Non escluderei però che abbiamo, oltre a questa, anche funzione tattile, non però esclusiva come avrebbero ammesso il MERKEL, il FAJERSZTAIN e il KRAUSE.

La caratteristica propria delle espansioni terminali nervose descritte che è quella di essere in parte localizzate nel connettivo sottoepiteliale e in parte nell'interno dell'epitelio; inoltre la particolarità da me notata che alla loro formazione contribuiscono varie fibre nervose e di diverse provenienze, potrebbero forse essere fatti legati a questa duplice funzione.



RIDUZIONE A FORMA SIMMETRICA  
DELLE ESPRESSIONI  
PER LE GRANDEZZE CARATTERISTICHE  
DEI CAMPI GRAVITAZIONALI ED ELETTRICI<sup>(\*)</sup>

LETTERIO LABOCETTA

SUMMARIVM. — Si et unitas quantitatis materiae et unitas quantitatis electricae aequae definiantur tamquam ea quantitas agentis quae ab eadem distantia, attrahendo vel repellendo tantum operetur quantum est roboris unitas, conficitur: constans gravitationale  $\kappa^2 = (g/m_1)^2$  esse quadratum relationis inter quantitatem materiae et neutronis massam; constans dielectricum  $\sigma^2 = (e/m_2)^2$  esse quadratum relationis inter caricam et massam electronis; relationem inter haec duo constantia esse constans cosmicum  $\psi'' = (e/g)^2 (m_1/m_2)^2$ , qui est numerus purus; ex quo cum  $(e/g)$  necessario sit numerus purus, consequitur hanc etiam materiae quantitatem eiusdem esse generis, quod attinet ad dimensionem, ac quantitas electrica.

Le unità del sistema C. G. S. sono puramente cinetiche. Per giungere con esse ad esprimere le grandezze gravitazionali ed elettriche si procede, come è noto, in due modi del tutto diversi.

Per le unità gravitazionali, ponendo la massa cinetica proporzionale a quella ponderale e quindi alla quantità di materia, come unità di quantità di materia si assume quella corrispondente all'unità di massa cinetica ed allora nella espressione della legge di NEWTON bisogna introdurre un coefficiente dimensionale che è la costante gravitazionale  $k$ .

Per le unità elettriche, assumendo come unità di quantità di elettricità quella carica che attira con l'unità di forza una carica uguale

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

e di segno contrario posta nello spazio vuoto all'unità di distanza, la legge di COULOMB conduce a porre uguale all'unità la costante dielettrica che dovrebbe corrispondere a quella gravitazionale.

Si hanno perciò due forme diverse come espressioni di queste due leggi:

$$[1] \quad F_1 = k \frac{M_1 M_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{E_1 E_2}{R^2}.$$

La dissimetria di queste due formule fondamentali si riproduce poi in tutte le altre espressioni che da esse derivano; cosicchè per l'intensità del campo, il potenziale e la densità dell'energia in un punto dello spazio, fuori del corpo attraente, si hanno, secondo che si tratta di un campo gravitazionale od elettrico, le due serie di espressioni:

$$[2] \quad f_1 = \frac{k M_1}{R^2}, \quad U_1 = \frac{k M_1}{R}, \quad \Delta_1 = \frac{f_1^2}{8\pi k}$$

$$[3] \quad f_2 = \frac{E_1}{R^2}, \quad U^2 = \frac{E_1}{R}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2^2}{8\pi}$$

Questa disimetria non esiste se si adoperano le *unità atomiche naturali*, come da me definite<sup>(1)</sup>, delle quali io ho sempre fatto uso, giacchè con esse le due serie di espressioni [2] e [3] risultano perfettamente simmetriche e corrispondenti.

Non è però senza interesse il ricercare se ad una forma simmetrica delle espressioni per le grandezze gravitazionali ed elettriche si possa pervenire, pur conservando sostanzialmente i concetti ai quali è informato il sistema C. G. S. E l'interesse non è soltanto formale perchè, come si vedrà, la riduzione a forma simmetrica delle due serie di espressioni conduce a mettere in evidenza delle relazioni d'importanza veramente fondamentale che la dissimetria delle espressioni aveva finora impedito di scorgere.

---

<sup>(1)</sup> In un precedente scritto: *Le costanti numeriche caratteristiche dello spazio fisico*. «Act. Pont. Acc. Scient. Nov. Lync.», anno LXXXVIII, Sessio V (Maggio 1935).

A tale scopo, riprendendo una idea già ripetutamente applicata<sup>(1)</sup>, si definiscano in modo analogo le quantità di materia e di elettricità; si assuma cioè come unità di materia (di elettricità) quella quantità di materia (di elettricità) che collocata all'unità di distanza da una eguale quantità dia luogo ad una attrazione (ripulsione) misurata dall'unità di forza.

Con questa convenzione la legge di NEWTON, e quella di COULOMB, indicando con  $Q$  la quantità di materia e con  $E$  quella di elettricità, prendono la forma

$$[4] \quad F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{E_1 E_2}{R^2}.$$

Queste due formule, se si indica con  $q$  la quantità di materia di un neutrone<sup>(2)</sup>, con  $e$  la carica di un elettrone, e con  $N$  un numero intero, ponendo cioè per la quantità di materia (di elettricità)  $Q = qN$ ,  $E = eN$ , diventano

$$[5] \quad F_1 = \frac{q^2 N_1 N_2}{R^2}, \quad F_2 = \frac{e^2 N_1 N_2}{R^2}$$

e queste due nuove espressioni alla loro volta, indicando con  $m_1, m_2$  rispettivamente le masse, cinetiche, del neutrone e dell'elettrone, si possono identicamente scrivere

$$[6] \quad F_1 = \left(\frac{q}{m_1}\right)^2 \left(\frac{m_1}{R}\right)^2 N_1 N_2, \quad F_2 = \left(\frac{e}{m_2}\right)^2 \left(\frac{m_2}{R}\right)^2 N_1 N_2.$$

Poniamo per semplicità di scrittura  $q/m_1 = z$ ,  $e/m_2 = \sigma$  e con ciò le relazioni [6] potranno pure scriversi

$$[7] \quad F_1 = z^2 \left(\frac{m_1}{R}\right)^2 N_1 N_2, \quad F_2 = \sigma^2 \left(\frac{m_2}{R}\right)^2 N_1 N_2$$

(1) Vedi ad es. W. THOMPSON and P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, pag. 9, Vol. I, University Press. Cambridge, 1883.

(2) Si considera per maggiore semplicità un corpo costituito soltanto di neutroni per eliminare l'effetto di ogni azione elettrica dovuta alla carica dei protoni e degli elettroni; e d'altra parte è evidente che per un corpo allo stato neutro l'azione delle dette cariche è nulla.

essendo evidentemente  $\kappa^2, \sigma^2$  la costante gravitazionale e la costante dielettrica dello spazio vuoto. Si deve cioè avere  $\kappa^2 = kc$  e poichè le due costanti  $\kappa^2, \sigma^2$  devono essere dimensionalmente identiche, affinché possano essere verificate entrambe le [7], ne segue dimensionalmente si deve avere pure

$$[8] \quad [\kappa^2] \equiv [\sigma^2] \equiv [k] \equiv M^{-1} L^3 T^{-2}$$

risultato questo al quale già ero giunto per altra via, appunto in una precedente ricerca<sup>(1)</sup> sul significato della costante  $\sigma$ . Ma qui l'apparizione contemporanea e parallela delle due costanti  $\kappa, \sigma$  nelle espressioni [7] delle due leggi di NEWTON e di COULOMB porta a delle conseguenze notevoli che vanno subito rilevate.

Anzitutto discende dalla [7] una definizione assoluta, identica, delle due costanti gravitazionale e dielettrica che le collega direttamente alle *costanti fisiche fondamentali discontinue*; si ha infatti:

*La costante gravitazionale  $\kappa^2$  è il quadrato di rapporto fra la quantità di materia del neutrone e la sua massa*<sup>(2)</sup>.

*La costante dielettrica  $\sigma^2$ , del vuoto, è il quadrato del rapporto fra la carica dell'elettrone e la sua massa, cioè il quadrato della carica specifica dell'elettrone.*

Mentre dunque nella definizione ordinaria di queste due costanti apparisce una distanza, dovendosi avere, per la costante gravitazionale ad esempio,

$$[9] \quad kc = F_1 R^2 / M_1 M_2$$

qui la distanza nella definizione di  $kc = \kappa^2$  è scomparsa e ciò in armonia col fatto che  $\kappa$  e  $\sigma$  debbono esprimere una proprietà intrinseca dei punti dello spazio indipendente dalla distanza  $R$  alla quale casualmente possono venire a trovarsi due corpi, o due cariche, in presenza e che, nel fatto, varia durante il moto.

(1) *La carica specifica dell'elettrone e la costante gravitazionale.* « La ricerca scientifica », IX, 1, Gennaio 1938, n. 1-2, pag. 41.

(2) Il valore di questo rapporto  $q/m_1$  si è presentato, come è noto, in altre ricerche, essendo appunto  $\sqrt{k}$  l'espressione della durata, in secondi, dell'ora naturale. Vedi G. LIPPMANN, *Sur la mesure absolue du temps déduite des lois de l'attraction universelle*, « C. R. de l'Académie des Sciences », 8. V. 1899.

Poi la nuova definizione delle due costanti, presa insieme con la relazione dimensionale [8], permette di scrivere immediatamente il loro valore, in forma assoluta mediante le unità atomiche naturali delle quali io mi servo. Chiamando infatti  $\lambda_1, \mu_1, \tau_1, \lambda_2, \mu_2, \tau_2$  le unità atomiche naturali gravitazionali ed elettriche di lunghezza, di massa, di tempo la [8] mostra che si deve avere

$$[10] \quad \kappa^2 = \mu_1^{-1} \lambda_1^3 \tau_1^{-2}, \quad \sigma^2 = \mu_2^{-1} \lambda_2^3 \tau_2^{-2}.$$

La prima di queste due espressioni era stata già indicata in un mio precedente scritto<sup>(1)</sup> ed alla seconda si potrebbe giungere con un analogo ragionamento; ma, in modo più semplice, basta osservare che sostituendo nelle [10] i valori delle unità naturali, gravitazionali ed elettriche,

$$[11] \quad \mu_1 = m_1, \quad \lambda_1 = k m_1 / c^2, \quad \tau_1 = k m_1 / c^3$$

$$[12] \quad \mu_2 = m_2, \quad \lambda_2 = e^2 / m_2 c^2, \quad \tau_2 = e^2 / m_2 c^3$$

si ottiene identicamente

$$[13] \quad \mu_1^{-1} \lambda_1^3 \tau_1^{-2} = k, \quad \mu_2^{-1} \lambda_2^3 \tau_2^{-2} = (e/m_2)^2.$$

Inoltre dalla identità dimensionale delle due costanti  $\kappa^2, \sigma^2$  segue che il loro rapporto

$$[14] \quad (\sigma/\kappa)^2 = (e/q)^2 (m_1/m_2)^2 = (\mu_1/\mu_2)^{-1} (\lambda_1/\lambda_2)^3 (\tau_1/\tau_2)^{-2}$$

deve essere un numero puro essendo dato da un prodotto di rapporti di grandezze omogenee.

Avviene poi che questo numero è una delle *costanti cosmiche* e ricordo a questo proposito che sono tre le costanti cosmiche nascenti appunto dal confronto fra le azioni gravitazionali e quelle elettriche

$$[15] \quad \psi = \frac{e^2}{k m_1^2}, \quad \psi' = \frac{e^2}{k m_1 m_2}, \quad \psi'' = \frac{e^2}{k m_2^2}$$

<sup>(1)</sup> Una definizione assoluta della costante della gravitazione. « Atti S. I. P. S. », XXIII Riun. Napoli 11-17 Ottobre, 1934, Vol. II, pag. 309-310.

legate fra loro, come ho mostrato in un precedente scritto<sup>(1)</sup> da una relazione semplicissima

$$[16] \quad \psi' = \psi \mu_0, \quad \psi'' = \psi \mu_0^2$$

se si chiama  $\mu_0$  il rapporto della massa del protone a quella dell'elettrone.

Introducendo poi per  $k$  il suo valore innanzi trovato  $(g/m_1)^2$  si hanno anche per le dette tre costanti le espressioni

$$[17] \quad \psi = \left(\frac{e}{q}\right)^2, \quad \psi' = \left(\frac{e}{q}\right)^2 \mu_0, \quad \psi'' = \left(\frac{e}{q}\right)^2 \mu_0^2$$

le quali mettono meglio in evidenza in qual modo, nella espressione della costante cosmica, intervengano i due rapporti: quello della carica dell'elettrone alla quantità di materia del neutrone e quello delle due masse del neutrone e dell'elettrone.

La costante cosmica che nella [14] si presenta è quella  $\psi''$  che fra le tre ha il valore maggiore.

Appare perciò che il rapporto fra le costanti dielettrica e gravitazionale, che sono dimensionalmente omogenee, è un numero puro e precisamente la costante cosmica maggiore.

Da questa constatazione ne discende una conseguenza assai importante ed è la seguente. Poichè il rapporto  $(\sigma/\kappa)^2 = \psi''$  è un numero puro ed esso risulta a sua volta dal prodotto di due fattori  $(m_1/m_2)^2$ ,  $(e/q)^2$  uno dei quali  $(m_1/m_2)^2$  è il rapporto di due quantità omogenee, l'altro fattore  $(e/q)^2$  deve essere un numero puro anch'esso.

*Ciò significa dunque che la quantità di materia è una grandezza omogenea con la quantità di elettricità.*

Questo risultato è d'altra parte una immediata necessaria conseguenza delle definizioni date con le [4] e [5].

In conclusione si scorge che vi è perfetta omogeneità fra tutte le grandezze gravitazionali ed elettriche. Ciò costituisce una generalizza-

<sup>(1)</sup> Costante gravitazionale, costante elettrica e costante cosmica. «La ricerca scientifica», IX-2, Novembre 1938, n. 9-10, pag. 628.

zione completa dei risultati ai quali ero giunto in precedenti scritti<sup>(1)</sup> sulla corrispondenza che esiste fra campi gravitazionali ed elettrici. Ma più direttamente a quei risultati si perviene, come appunto qui si è visto, adottando un criterio unico ed uniforme per la definizione delle unità fondamentali dei due casi. Nell'applicazione di questo criterio si possono seguire due vie diverse: una è quella di mettere in evidenza in entrambi i casi la quantità di agente, estendendo alla quantità di materia la definizione adottata per la quantità di elettricità e così procedendo le due costanti gravitazionale ed elettrica vengono a sparire riducendosi l'una e l'altra all'unità; l'altra via è quella invece di mettere in evidenza queste due costanti estendendo alla definizione della quantità di elettricità quella adottata per la quantità di materia e così facendo si mettono in evidenza le masse associate alle quantità di materia e di elettricità, mentre queste quantità restano implicitamente contenute nelle due costanti gravitazionali e dielettrica. L'introduzione infine nelle espressioni così ottenute delle unità naturali gravitazionali ed elettriche, carica e massa dell'elettrone e quantità di materia e massa del neutrone, conduce ad eliminare, ogni coefficiente dimensionale introducendo, come si è visto, dei numeri interi per la misura delle quantità di materia, di elettricità e delle corrispondenti masse, le quali grandezze tutte cessano di essere continue e diventano quantificate.

Così le espressioni [2], [3] per l'intensità del campo, il potenziale e la densità dell'energia, divengono, nei campi gravitazionali ed elettrici

$$[18] \quad f_1 = \frac{\kappa^2 m_1 N_1}{R^2}, \quad U_1 = \frac{\kappa^2 m_1 N_1}{R}, \quad \Delta_1 = \frac{f_1^2}{8\pi \kappa^2}$$

$$[19] \quad f_2 = \frac{\sigma^2 m_2 N_1}{R^2}, \quad U_2 = \frac{\sigma^2 m_2 N_1}{R}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2^2}{8\pi \sigma^2}$$

In entrambe le due serie di espressioni si ha, simmetricamente, che l'intensità del campo ha la dimensione di una accelerazione che

(1) *L'omogeneità dei campi gravitazionali elettrici*. «La ricerca scientifica». IX-1, Giugno 1938, n. 11-12, pag. 636.

*La similitudine fisica fondamentale*. «La ricerca scientifica», IX-2, Dicembre 1938, n. 11-12, pag. 734.

moltiplicata per una massa dà una forza; il potenziale ha le dimensioni del quadrato di una velocità, cosicchè moltiplicato per una massa dà un lavoro e così pure dà un lavoro la densità dell'energia, che ha le dimensioni di una pressione, quando venga moltiplicata per un volume.

Inoltre in esse non appaiono più che le due masse del neutrone e dell'elettrone e le due costanti  $\kappa^2$ ,  $\sigma^2$ , nelle quali sono implicitamente contenute la quantità di materia  $q$  del neutrone e la carica  $e$  dell'elettrone, corrispondenti ai due modi di distribuzione della densità dell'energia nei campi gravitazionali ed elettrici.

Quali siano questi due modi di distribuzione della densità dell'energia è stato messo in chiaro in due precedenti scritti nei quali ho mostrato che: nel caso dei campi elettrici<sup>(1)</sup> la densità è sempre dello stesso segno in tutto lo spazio, positiva o negativa, dal centro dell'elettrone al quale è dovuto il campo (positrone e negatrone) sino all'infinito; nel caso dei campi gravitazionali invece<sup>(2)</sup> la densità dell'energia è positiva all'interno della sfera normale, anzi *uniformemente normale*, formata con la massa del neutrone ed è negativa nello spazio esterno compreso fra la superficie di detta sfera e l'infinito.

---

(1) *La massa dell'elettrone in riposo.* « La ricerca scientifica », VII-1, marzo 1937-xv, n. 5-6, pag. 223.

(2) *Energia potenziale e curvatura nei campi gravitazionali.* « R. C. Acc. Naz. Lincei », Vol. XXV, pag. 122-128, Febbraio 1937.



PRIMO RACCONTO DELLA PRESENTAZIONE DI  
UN CANNOCCHIALE OLANDESE AL PRINCIPE  
MAURIZIO DI NASSAU NEL SETTEMBRE 1608  
E LE PRIME OSSERVAZIONI CELESTI (\*)

GIOVANNI VACCA

SUMMARIVM. — Prima descriptio perspicilli a quodam Belga elaborati et in ultimis diebus mensis septembris 1608, in summa turre urbis Hagae Comitibus exhibiti principi Mauritio de Nassau et genuensi marchioni Ambrosio Spinola, nuper reperta est a clarissimo Paul Pelliot.

Ex hac descriptione patet hoc perspicillum a quodam curioso ad coelum contemplandum eodem anno 1608 usum fuisse. Sed propter parvam amplificationem (tres vel quatuor diametrorum) stellae tantum septimae magnitudinis visae sunt. Quamvis in rarissimo opusculo typis impresso, haec observatio astronomis latuit et nostris diebus tantum reperta est.

Il racconto più particolareggiato noto agli storici della scienza, della presentazione di un cannocchiale costruito da un occhialaio olandese al Principe Maurizio di Nassau nel settembre 1608, è quello riferito da GILBERTO GOVI<sup>(1)</sup> nel 1875 e successivamente da ANTONIO FAVARO<sup>(2)</sup> nel 1883. Esso risale al *Mercure François*<sup>(3)</sup> del 1611.

Recentemente però il prof. PAUL PELLIOT<sup>(4)</sup> acquistò e ripubblicò nel 1936 un opuscolo di undici pagine, in francese, senza luogo di

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini nella Tornata del 6 Giugno 1942.

(1) GILBERTO GOVI, *Galileo e i matematici del Collegio Romano nel 1611*, Documenti e illustrazioni, «Atti della R. Accademia dei Lincei», t. II, Serie II, pag. 230-239. Roma, 1875.

(2) A. FAVARO, *Galileo Galilei e lo studio di Padova*. Firenze, 1883, vol. I, pag. 343.

(3) *Mercure François*, etc. Paris, MDCXI, a carte 244

(4) P. PELLIOT, *Les relations du Siam et de la Hollande en 1608*, T'oung Pao, Archives concernant l'histoire... de l'Asie Orientale. Leiden, 1936, vol. XXXII, pag. 223-229.

stampa di cui non si conosce altra copia, intitolato: *Ambassades du Roy de Siam envoyé à l'Excellence du Prince Maurice, arrivé à la Haye le 10. Septemb. 1608. L'an de grace 1608.*

Il primo paragrafo di questo opuscolo descrive l'arrivo in Olanda di due ambasciatori siamesi e la loro visita al Principe Maurizio di Nassau. È interessante per la storia del telescopio il secondo paragrafo, contenuto nelle pagine 9-11 dell'opuscolo, che non ha alcuna relazione con quanto precede e che è opportuno riprodurre per intero, poichè esso è certamente la fonte a cui attinse il *Mercure François*: « Peu de jours deuant le despart de Spinola de la Haye, vn faiseur de lunettes de Mildebourg pauvre homme, fort religieux & craignant Dieu fist present à Son Excellence de certaines lunettes, moyennant lesquelles on peut decourir & voir distinctement les choses esloignées de nous de trois & quatre lieux, comme si nous les voions a cent pas pres de nous: Estans sur la tour de la Haye on voit par lesdictes lunettes clairement l'horloge de Delft, & les fenestres de l'Eglise de Leyden, nonobstant que lesdites villes soyent esloignées l'une d'une heure & demie, l'autre de trois heures & demie de chemin de la Haye. Messieurs les Estats l'ayant sçeu, enuoyerent vers son Excellence pour les voir, qui les leur enuoya, disant que par ces lunettes ils verroient les tromperies de l'ennemi. Spinola aussi les vid avec grand estonnement, & dit à Monsieur le prince Henry, a cette heure je ne sçauris plus estre en seureté, car vous me verrez de loing. A quoy le dit Sieur Prince respondit, nous deffendrons à nos gens de ne tirer point à vous. Le maitre faiseur des dites lunettes a eu trois cens escus, & en aura plus en faisant dauantage, à la charge ne n'apprendre ledit mestier à personne du monde, ce qu'il a promis tresuolontiers, ne voulant point que les ennemis s'en peussent preualoir contre nous, lesdites lunettes seruent fort en des sieges, & en semblables occasions, car d'une lieue loing & plus, on peut aussi distinctement remarquer toutes choses, comme si elles estoyent tout aupres nous: & mesmes les estoilles qui ordinairement ne paroissent à notre veüe & à nos yeux pour leur petitesse & foiblesse de notre veüe, se peuuent voir par le moyen de cest instrument. Le jour que Spinola partist d'ici, il disna avec son Excell. qui le conduisit demi lieu, & le Prince Henri son frere les accompagna iusques aux nauires, ou ils s'embarquerent pour aller à Anuers ».

Questo racconto, più completo di quello del *Mercure François*, scritto in un francese scorretto, ci permette di fissare con precisione la data della scena avvenuta sulla torre dell'Aia, press'a poco un anno prima di quella analoga avvenuta sul campanile di San Marco, della presentazione cioè del telescopio da parte di Galileo al Doge di Venezia<sup>(1)</sup>.

Ricorreremo perciò agli *Avvisi Urbinati*<sup>(2)</sup> che si conservano manoscritti nella Biblioteca Vaticana.

Urb. Lat. 1076 fol 721 r.: *D'Anversa, li 19 sett.bre 1608:*

...Sopra li dui vascelli gionti a Medelburgo dell'Indie come si scrisse dicono essere venuti due ambasciatori di uno delli Re delle Moluche mandati per trattar amicitia col Conte Mauritio al quale hanno portato presenti di gioie ed altro per il valore di alquante migliaia di fiorini.

fol. 725, r.: *Di Anversa li 19 sett. 1608:*

Sopra li dui vascelli gionti in Medelburgo dalle Indie, come si scrisse dicono essere venuti due ambasciatori del Re di Syan delle Moluche mandati a trattar amicitia col Co.Maur.o al quale dicesi hanno portato presenti di gioie et altro.

fol. 756 r.: *Di Anversa 3 Ottobre 1608:*

...il Spinola era partito di detto luogo (Aga) all'ultimo passato [30 settembre] con gli altri deputati suoi colega di ritorno per Bruxelles, sendo stato accompagnato dal Conte Mauritio sino a Dessel, nel cui porto s'era imbarcato sopra una fregata del m.mo conte con altri otto vasselli per le bagaglie, da che non si può aspettar altro che noia et più crudel guerra che mai, dovendo in breve esso Spinola partir per Spagna et in questo mentre Don Pietro di Toledo subintrar in suo luoco.

---

(1) GALILEO, *Opere*, ediz. Nazionale, vol. XIX, pag. 387.

(2) Su questi *Avvisi* si veda: D. RENÉ ANCEL, O. S. B., *Études critiques sur quelques recueils d'Avvisi*, Mélanges de l'École Française de Rome, vol. XXVIII, 1908, pag. 115 e segg.

*Di Colonia 5 ottobre:*

...dopo la partita di Aga del Spinola... scrivon di Bruxelles l'arrivo ivi alli 2 del Spinola, il quale alli 3 haveva fatto la sua relatione intieramente al Ser.mo Alberto.

Il Principe Maurizio di Nassau, figlio di Guglielmo il Taciturno, (1567-1625) ebbe come successore suo fratello Federico Enrico di Nassau (1584-1647). Il genovese marchese Ambrogio Spinola (1571-1630) comandò gli eserciti spagnoli nelle Fiandre e combattè valorosamente contro Maurizio di Nassau.

Dalle date riferite in questi *Avvisi* si può sicuramente inferire che il marchese Spinola e il principe Enrico salirono sulla torre dell'Aia nell'ultima decade di settembre del 1608 e che per conseguenza l'opuscolo scoperto da P. PÉLIOT e di cui non si conosce nessuna altra copia, deve essere stato pubblicato pochi giorni dopo. Sembra verosimile che l'*Avviso delli nuovi occhiali*, « avuto già più di un mese » di cui parla Fra PAOLO SARPI<sup>(1)</sup> nella sua lettera del 6 gennaio 1609, potrebbe essere questo avviso scritto in francese di cui ora abbiamo dato notizia<sup>(2)</sup>.

Non sembra però che Galileo lo abbia conosciuto per intero, ma che tutt'al più Fra PAOLO SARPI potrebbe avergli accennato alla utilità di rivolgere lo strumento verso le stelle. Se anche così fosse, (e noi non ne abbiamo finora alcuna prova), si spiegherebbe più facilmente come Galileo sia stato spinto a perfezionare con ogni mezzo l'occhiale rudimentale olandese nello strumento di gran lunga più perfetto che ingrandiva per la prima volta nel mondo, le immagini di oltre trenta diametri e permetteva a Galileo di compiere rapidamente le sue meravigliose scoperte. Il cannocchiale olandese permetteva *soltanto* di vedere un maggior numero di stelle, cioè soltanto quelle che *ordinariamente* non si distinguono ad occhio nudo, ma nulla più. Permetteva soltanto di vedere le stelle di settima grandezza e quindi probabilmente ingrandiva appena tre o quattro volte.

<sup>(1)</sup> *Lettere di Fra Paolo Sarpi*. Firenze, 1863, vol. I, pag. 181, cfr. A. FAVARO, loc. cit., pag. 343.

<sup>(2)</sup> Potrebbe darsi che negli archivi e nelle biblioteche italiane si potesse trovare qualche altra copia di questo avviso, e che altre notizie potessero rintracciarsi nella corrispondenza del marchese Ambrogio Spinola.

UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE  
PERCHÈ UNA SERIE DI POTENZE  
ABBIA SULLA CIRCONFERENZA DI CONVERGENZA  
UN SOLO POLO MULTIPLO<sup>(\*)</sup>

FRANCO PELLEGRINO

SUMMARIVM. — Exponit auctor quae condicio requiratur et sufficiat ut ex coefficientibus alicuius potentiarum seriei dignosci possit quandonam haec series unum polum cuiuslibet multiplicitatis  $h$  in circumferentia convergentiae habeat; si  $h=1$ , condicio iam nota est.

I. — Com'è ben noto in un lavoro sulle serie di potenze<sup>(1)</sup> è enunciata la seguente proposizione:

Se la sola singolarità situata sul circolo di convergenza è un polo, semplice o multiplo, questo è dato dal limite del rapporto  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ .

E si dice in seguito che, se per esempio la serie

$$[1] \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

convergente entro il circolo di raggio  $\rho$  ammette come unica singolarità sulla circonferenza il polo semplice  $z=\alpha$ , non solo il rapporto  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  tende verso  $\alpha$ , ma ciò avviene in maniera che la differenza, a partire

---

<sup>(\*)</sup> Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

<sup>(1)</sup> J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*. « Journal de Math. » (4<sup>e</sup> série), tome VIII, fasc. II, 1892.

da un certo indice in poi, sia in modulo inferiore a  $h^n$ ,  $h$  indicando un numero positivo conveniente  $< 1$ , cioè in modo che sia

$$[2] \quad \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right| < h^n$$

Si dimostra poi che questa è condizione anche sufficiente per concludere che la [1] ammette un solo polo semplice sulla circonferenza del circolo di convergenza.

Scopo di questa nota è di generalizzare quanto sopra, trovando una condizione necessaria e sufficiente perchè, sulla circonferenza del cerchio di convergenza, vi sia un solo polo d'ordine  $h$  qualunque.

2. - Riprendiamo le formule<sup>(1)</sup> che nel lavoro citato, sono indicate come punto di partenza per la dimostrazione della proposizione ricordata all'inizio.

Per esse, nel caso che sulla circonferenza di convergenza di raggio  $R$ , vi sia un solo polo, d'ordine  $h > 1$ , posto

$$[3] \quad f(z) = \frac{A_0}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1}{(\alpha - z)^{h-1}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z)$$

con  $\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$  serie convergente in un circolo di raggio  $\rho$  più grande di  $R$ , si ha

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h} (n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-1) + \\ + \frac{A_1}{\alpha^{h+1}} (n+1) \times \dots \times (n+h-2) + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n$$

<sup>(1)</sup> G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, etc.* « Journal de Math. », 1878, pag. 15.

con  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho - k)^n b_n = 0$ ,  $\rho - k$  indicando un numero minore di  $\rho$  ma superiore ad  $\mathbb{R}$ , e quindi:

$$[4] \quad b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}$$

$\varepsilon_n$  tenendo verso zero con  $\frac{1}{n}$ , da cui

$$[5] \quad a_n = A_0 \frac{(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-1)}{\alpha^{n+h}} + A_1 \frac{(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-2)}{\alpha^{n+h-1}} + \dots +$$

$$+ A_{h-1} \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}$$

e

$$a_{n+1} = A_0 \frac{(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+h)}{\alpha^{n+1+h}} + A_1 \frac{(n+2)(n+3) \dots (n+h-1)}{\alpha^{n+h}} + \dots +$$

$$+ A_{h-1} \frac{1}{\alpha^{n+2}} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho - k)^{n+1}}. \text{ Allora è}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{A_0(n+1) \times \dots \times (n+h-1) + \alpha A_1(n+1) \times \dots \times (n+h-2) + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2}(n+1) + \alpha^{h-1} A_{h-1} + \alpha^{n+h} \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}}{A_0(n+2) \times \dots \times (n+h) + \alpha A_1(n+2) \times \dots \times (n+h-1) + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2}(n+2) + \alpha^{h-1} A_{h-1} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho - k)^{n+1}}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per  $(n+2) \times \dots \times (n+h)$ , si ha

$$[6] \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{A_0 + \alpha A_1} + \alpha A_1 \frac{n+1}{(n+h-1)(n+h)} + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2} \frac{n+1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} A_{h-1} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h} \frac{\varepsilon_n}{(\rho-k)^n} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}{\frac{1}{A_0 + \alpha A_1} \frac{1}{n+h} + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2} \frac{1}{(n+3) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} A_{h-1} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho-k)^{n+1}} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}$$

da cui

$$[7] \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha = \alpha \frac{\frac{1-h}{A_0 + \alpha A_1} + \alpha A_1 \frac{2-h}{(n+h)(n+h-1)} + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2} \frac{(h-1)-h}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} \left[ \frac{\varepsilon_{n+1}}{\rho-k} \right]}{\frac{1}{A_0 + \alpha A_1} \frac{1}{n+h} + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2} \frac{1}{(n+3) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} A_{h-1} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho-k)^{n+1}} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}$$



Intanto, segue subito dalla [6] la proposizione ricordata all'inizio, poichè, per  $n \rightarrow \infty$  il secondo membro tende evidentemente ad  $\alpha$ .

Segue anche che gli  $a_n$  dovranno allora essere tutti diversi da zero da un certo punto in poi, e si ha quindi immediatamente una parte d'un noto teorema sulla serie di potenze lacunari<sup>(1)</sup>, e cioè che: « Se uno sviluppo di TAYLOR ha lacune, la funzione da esso rappresentata non può avere sulla circonferenza di convergenza dello sviluppo in questione un solo polo ».

Questa proposizione merita d'essere rilevata, perchè associa la presenza in uno sviluppo di TAYLOR di lacune di qualsiasi tipo, alle singolarità della funzione rappresentata da tale sviluppo.

Di più si ha dalla [7] che, per  $n \rightarrow \infty$ , il denominatore tende ad  $A_0 \neq 0$ , mentre nel numeratore il primo termine è infinitesimo del primo ordine. Ma gli altri termini sono tutti infinitesimi d'ordine superiore al primo, quindi tutto il primo membro della [7] è infinitesimo come  $\frac{1}{n}$  per  $n \rightarrow \infty$ , e per il quoziente di questi due infinitesimi avremo anzi, al limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right) = 1 - h$$

Dunque possiamo intanto concludere che, se sulla circonferenza di convergenza si ha una sola singolarità, consistente in un polo multiplo d'ordine  $h > 1$ , è necessario che la differenza  $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha$  sia infinitesima del prim'ordine per  $n \rightarrow \infty$  e che il limite

$$[8] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right) = 1 - h$$

sia un intero negativo.

Notiamo subito che in questo caso tale limite cambiato di segno e aumentato di 1 dà l'ordine del polo.

(1) MANDELBROJT, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes.* « Annales Ecole Normale Supérieure » (3), 40.

3. - Perchè poi sulla circonferenza di convergenza di raggio  $\rho$  d'uno sviluppo  $\Sigma a_n z^n$  la funzione  $f(z)$  da esso rappresentata abbia un solo polo multiplo  $\alpha$  ( $|\alpha| = \rho$ ) d'ordine  $h$  è evidentemente necessario e sufficiente che, moltiplicando tale sviluppo per  $\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^h$ , la nuova serie così ottenuta converga in un circolo di raggio  $\rho' > \rho$ . Il nuovo coefficiente  $b_n$  di  $z^n$ , in tale secondo sviluppo, viene dato dall'espressione

$$[9] \quad b_n = a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}.$$

Sarà allora necessario e sufficiente, per l'esistenza del solo polo multiplo, che

$$[10] \quad \begin{aligned} & \text{Max} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \\ & = \text{Max} \lim \left| \sqrt[n]{a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}} \right| = \frac{1}{\rho^h} < \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la  $f(z)$ , rappresentata dallo sviluppo  $\Sigma a_n z^n$ , abbia appunto sulla sua circonferenza di convergenza di raggio  $\rho$  un solo polo multiplo  $\alpha$ . Allora si sa dalla memoria citata in (3) al principio di questo lavoro, che la successione dei rapporti  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  è regolare e converge ad  $\alpha$ . Sarà allora regolare  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  e, per conseguenza  $\left| \sqrt[n]{a_n} \right|$ , che convergerà a  $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho}$ , cioè

$$[11] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{\rho}$$

Scritta la relazione

$$\left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \left| \sqrt[n]{a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}} \right|$$

sotto la forma:

$$[12] \quad \left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt[n]{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right|$$

prendiamo poi due numeri positivi  $M$  ed  $M'$  tali che

$$[13] \quad \frac{1}{\rho^4} < M < M' < \frac{1}{\rho};$$

per la [10], da un certo indice in poi, è certo

$$\left| \sqrt[n]{b_n} \right| < M \text{ cioè:}$$

$$[14] \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt[n]{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| < M$$

cioè ancora, da un opportuno indice  $\nu$  in poi, a causa delle [11] e [13]

$$[15] \quad \left| \sqrt[n]{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| < \frac{M}{\left| \sqrt[n]{a_n} \right|} < \frac{M}{M'} = k < 1$$

e infine, per ogni  $n > \nu$ ,

$$[16] \quad \left| 1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h} \right| < k^n$$

dove  $k$  è come si è visto, un opportuno numero positivo minore di 1. Concludiamo allora che:

*Per l'esistenza sulla circonferenza di convergenza di un solo polo multiplo d'ordine  $h$ , è necessario che esista il limite:*

$$[17] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$$

che dà la posizione del polo  $e$ , determinato questo, è necessario che, da un certo indice in poi, sia sempre per  $k$  numero positivo opportuno  $< 1$ :

$$[18] \quad \left| 1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^h} \right| < k^n$$

4. - Supponiamo viceversa che siano verificate le [17] e [18]. Dalla [17] segue allora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho} \quad \text{cioè} \quad \left| \rho \sqrt[n]{a_n} \right| \rightarrow 1$$

Preso ora un numero  $k'$  positivo, maggiore di 1 ma minore di  $\frac{1}{k}$ , cioè tale che  $1 < k' < \frac{1}{k}$  e quindi  $kk' < 1$ , da un certo indice in poi sarà

$$[19] \quad \left| \rho \sqrt[n]{a_n} \right| < k' \quad \text{o anche} \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \frac{k'}{\rho};$$

ma per la [18] si ha, da  $v$  in poi,

$$\left| \sqrt[n]{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} + \dots + (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| < k$$

e quindi, tenendo presente la [19], si ha

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt[n]{1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| = \left| \sqrt[n]{b_n} \right| < \frac{kk'}{\rho} < \frac{1}{\rho}$$

da un certo indice  $v' \geq v$  in poi, segue allora

$$\text{Max lim} \left| \sqrt[n]{b_n} \right| < \frac{1}{\rho}$$

il che ci dice che le condizioni [17] e [18] sono non solo necessarie, ma anche sufficienti per l'esistenza di un solo polo multiplo d'ordine  $h$  sulla circonferenza di convergenza.

5. - Volendo far vedere come le condizioni da noi trovate, si riducono per  $h=1$ , a quella ricordata al principio del presente lavoro, scriviamo la [18] ponendovi  $n+h$  al posto di  $n$  e moltiplichiamone ambo i membri per  $|\alpha|^h$ , avremo allora

$$[20] \quad \left| \alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}} \right| < k^{n+h} \rho^h = k^n (\rho k)^n.$$

e quindi si potrà trovare un  $k_1 < 1$  tale che a partire da un certo indice in poi sia sempre:

$$\left| \sqrt[n]{\alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}}} \right| < k \sqrt[n]{(\rho k)^h} < k_1 < 1$$

cioè

$$[21] \quad \left| \alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}} \right| < k_1^n$$

e quindi

$$[22] \quad \left| \alpha - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| < k_1^n$$

che è la condizione (2).

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLA INNERVAZIONE  
DELLE ANASTOMOSI ARTERO-VENOSE  
ED AL PROBLEMA DELLA ESISTENZA  
DI UN PARASIMPATICO SPINALE (\*)

*(Con una tavola fuori testo)*

GENNARO PALUMBI

**SUMMARIVM.** — Auctor describit quomodo in ansere fibrae nervinae, motoriae vel sensoriae, in extrema sua parte se habeant iuxta artero-venosam membranae interdigitalis anastomosin; significat praeterea adesse nervinas sympathicas cellulas, quibus confirmari putat spinale parasymphaticum revera exsistere.

Per lo studio della innervazione delle anastomosi artero-venose o glomeruli vascolari degli uccelli, ho scelto quale materiale d'esame, la membrana interdigitale dell'oca che, come è noto, è abbondantemente provvista di tali formazioni vasali.

Ricordo anzitutto che nella membrana natatoria dell'oca le anastomosi artero-venose sono in maggior numero disposte in prossimità della sua porzione distale. In ciascuna di esse si possono essenzialmente distinguere tre segmenti:

1°) Il segmento iniziale, breve, rappresentato dall'arteria afferente del globo, che si distacca spesso, ma non sempre, da una arteriola nel suo tratto preterminale. L'arteria afferente ha struttura identica a quella delle comuni arteriole.

2°) Il segmento intermedio il quale rappresenta il tratto più caratteristico di tutta la formazione e merita veramente il nome di

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia umana e di Istologia della R. Università di Pavia.

tratto anastomotico. Viene da alcuni autori indicato col nome di Canale di Sucquet o anche di Sucquet-Hoyer. Può essere semplice o anche formato da più branche. La parete di questo segmento manca di una elastica interna ed esterna (Popoff); è costituita da caratteristici elementi epitelioidi, disposti in più strati che, nel tratto iniziale del canale, determinano sollevamenti dell'endotelio a guisa di cuscinetti, che riducono il lume vasale ad una semplice fessura.

Secondo alcuni autori detti elementi epitelioidi non sarebbero altro che elementi muscolari che avrebbero subito una metamorfosi epitelioidie (SCHUMACHER, CLARA). La metamorfosi può interessare un numero vario di elementi muscolari ed in ogni caso, sarebbe più completa nei canali a decorso molto tortuoso e complicato. Altri autori considerano le cellule epitelioidi quali elementi secernenti, di tipo paragangliare.

3°) Infine il settore terminale, rappresentato da una vena che raccoglie il sangue proveniente dal tratto precedente. La sua parete ha la caratteristica di essere molto ricca di elementi elastici.

Le formazioni glomerulari più complesse sono delimitate più o meno dall'ambiente circostante da un involucro di tessuto connettivo lasso.

In base alla osservazione diretta, per mezzo della camera trasparente di E. R. ed E. L. KLARK, del comportamento delle A. a. v. nell'animale vivente, in varie condizioni sperimentali, normali e patologiche, si è potuto stabilire che l'arteria afferente ed il segmento intermedio, indicati dal MASSON come « tratto arterioso » del globo, si contraggono e si rilasciano bruscamente secondo un ritmo variabile ed indipendente dal ritmo di contrazione delle arteriole. Stimolazioni fisiche locali anche minime, (termiche, tattili, elettriche, irradiazioni di raggi ultravioletti) e varie sostanze chimiche influenzano il loro stato di contrazione. L'apertura delle anastomosi pone fuori circolo la rete capillare; la chiusura di esse provoca invece un riempimento del settore capillare ed un rallentamento del flusso sanguigno.

Si è creduto che le A. a. v. abbiano il compito di regolare la temperatura di una determinata regione (BRANT, BLAND, CAMP, LEWIS, PRICHERING, KLARK, CLARA, NUZZI ed altri); quella di regolare la pressione sanguigna arteriosa (GROSSER) o quella venosa (SCHUMACHER); quella di determinare l'insorgenza di riflessi vasomotori locali atti a regolare la pressione interstiziale e la nutrizione dei tessuti, per mezzo delle loro strutture nervose: per MASSON sarebbero da considerare quali organi

neurovascolari. Gli intimi rapporti topografici esistenti fra A. a. v. e corpuscoli di MEISSNER e PACINI ha suggerito ad alcuni l'idea che potesse esistere tra le due formazioni un qualche rapporto funzionale. Infine alcuni autori le aggregano agli organi paragangliari feocromi, assegnando, come ho già ricordato, alle cellule epitelioidi la proprietà di secernere sostanze acetilcolino-simili.

Per quanto riguarda ora l'innervazione della A. a. v. i dati non sono molto numerosi.

MASSON ha dimostrato, per mezzo di metodi di impregnazione argentea, che i segmenti contrattili dei glomi cutanei del polpastrello e del letto ungueale delle dita, sono provvisti di manicotti nervosi alla cui costituzione concorrono fibre provenienti sia dai plessi nervosi vasali arteriosi e venosi, sia fibre mieliniche provenienti dai plessi nervosi del derma. In ciascun manicotto egli distingue uno strato esterno ove si trovano fibre mieliniche voluminose che presentano rigonfiamenti ed appiattimenti locali e successivi, alcune delle quali terminano sulla superficie o ai margini del manicotto nervoso con « arborizzazioni di indubbio significato tattile ».

L'Autore distingue nel manicotto nervoso uno strato medio ed uno interno a fibre esili circolari direttamente applicate allo strato esterno della tonaca media, derivanti dai rami di divisione delle fibre più esterne. Talora filetti molto esili penetrerebbero nella media e quivi, in parte si continuerebbero in un « velo reticolato » corrispondente al terminal reticolo di STÖHR e REISER; in parte terminerebbero liberamente fra le cellule epitelioidi.

Anche BROWN (1937) ha riscontrato che le A. a. v. della lingua del cane, sono provvedute di un ricco corredo nervoso che in alcuni casi maschera la formazione vasale. Secondo l'Autore le fibre più sottili, probabilmente amieliniche, dapprima circonderebbero il segmento anastomotico, quindi terminerebbero nella sua tonaca media; invece le fibre più grosse e mieliniche, apparentemente di natura recettoriale, terminerebbero con « massicce » espansioni nell'avventizia del segmento arterioso o nella sua immediata vicinanza.

Tanto MASSON che BROWN non hanno riscontrato, nel materiale da loro esaminato, cellule nervose annesse agli apparati da loro descritti.

I miei preparati, allestiti secondo il metodo BIELSCHOWSKY, nella mia modificazione, confermano, in linea di massima, i risultati degli



Autori ora citati. Le formazioni glomerulari più complesse sono spesso circondate da un plesso nervoso a larghe maglie costituito dall'intreccio di fibre mieliniche di vario spessore e di fibre amieliche provenienti in parte dai fasci nervosi che accompagnano i vasi arteriosi ed in parte dai tronchi nervosi che decorrono, in vario senso, in loro vicinanza. Vi partecipano anche rami collaterali di fibre grosse e mieliniche. Molte di queste presentano lungo il loro decorso improvvise variazioni di calibro; altre danno luogo a tipiche terminazioni sensitive talora molto vistose e capsulate, alla cui costituzione sembrano partecipare anche fibre fini ed apparentemente amieliniche. Queste si applicano a volte direttamente sul contorno del segmento arterioso di alcune anastomosi; in altri casi invece appaiono disposte nel connettivo periglomerulare (fig. 1).

Talora in immediata vicinanza delle formazioni glomerulari si riscontrano una o più cellule nervose multipolari che fra poco descriverò.

Dal plesso periferico si dipartono fibre in parte ancora provviste di sottile guaina mielinica che circondano direttamente, o per mezzo dei loro rami di divisione, l'unica o le singole branche del segmento anastomotico (fig. 2). Da questo plesso nervoso avventiziale, perivasale, si approfondano nello spessore della parete vasale, esili filamenti che danno luogo ad una delicata trama nervosa a diretto contatto con gli elementi epitelioidi.

Dati più precisi sul comportamento delle fibre nervose verranno forniti in altro lavoro più completo.

Comunque, già fin d'ora, mi par di poter ammettere la esistenza, in rapporto con l'organello costituito dalla anastomosi artero-venosa, di una duplice innervazione: effettrice e recettrice per mezzo della quale sarebbe possibile, come ho fatto notare anche per il glomo carotideo, l'istituirsi di quei riflessi regolatori della circolazione che sono stati dimostrati dall'osservazione sperimentale.

Il fatto però che particolarmente ha attratto la mia attenzione e sul quale voglio soffermarmi per l'importanza che credo abbia per la conoscenza dell'apparecchio simpatico in generale, è la presenza, in rapporto con le anastomosi artero-venose della membrana interdigitale dell'oca, di piccole cellule nervose multipolari simpatiche. Se ne trovano sul percorso di fascetti di fibre mieliniche di piccolo calibro e di fibre amieliniche che accompagnano i vasi arteriosi; ma soprattutto in vici-

nanza delle aree occupate dalle anastomosi artero-venose. Alcune sono poste direttamente a ridosso del segmento arterioso di alcune anastomosi, fra le fibre del plesso avventiziale.

Il maggior numero di tali cellule presenta un corpo di forma globosa provvisto di un numero vario di prolungamenti brevi che terminano in laminette a struttura finemente neuro-fibrillare e di un unico prolungamento a lungo decorso che, per i suoi caratteri, si può ritenere rappresenti il neurite; sono cellule che, in altra occasione, ho definito come cellule di primo tipo. Il diametro del pirenoforo varia da 9 a 15 micron.

Altre, in minor numero, del tipo che ho definito come secondo tipo, oltre alle propaggini brevi presentano un numero vario di prolungamenti lunghi e aventi tutti uno stesso carattere che li fa ritenere tutti come aventi il significato di neuriti.

Esse sono generalmente isolate le une dalle altre; qualche volta si raccolgono in numero di tre o quattro a costituire un microganglio (fig. 3). Ho potuto constatare *de visu* che alcuni dei prolungamenti di tali cellule concorrono alla formazione del plesso nervoso avventiziale che circonda il segmento arterioso di alcune anastomosi.

Qualcuna delle cellule più grandi sembra delimitata da una delicatissima capsula con piccolissime cellule satelliti.

Attorno al pirenoforo di quasi tutti gli elementi cellulari si nota un intreccio, mai molto fitto, di fibrille di estrema delicatezza. Queste sembrano derivare dai più fini rami di divisione di piccole fibre midollate.

Talora le fibrille contraggono più intimi rapporti solo con le espansioni brevi e lamellari, a struttura neurofibrillare, di alcune cellule.

Cellule nervose simpatiche sono state spesso descritte nella guaina avventiziale dei grossi vasi arteriosi del collo, sul percorso dei nervi periavventiziali. Invece sono state molto raramente riscontrate nella parete delle arterie periferiche. STÖHR ha visto, una sola volta, nella avventizia di una arteria del plesso corioideo, una piccolissima vera cellula gangliare.

GLOSER ha visto cellule simpatiche nell'avventizia e tessuto periavventiziale delle arterie della cavità toracica ed addominale.

In tutti questi casi si può evidentemente pensare che le cellule osservate, per la loro sede, possono essere elementi periferici del para-

simpatico rombencefalico perchè si trovano nel campo di distribuzione dei nervi romboencefalici.

Orbene la presenza di cellule da me notata nella membrana interdigitale dell'oca si riconnette invece con la questione della esistenza anche di un parasimpatico spinale (meglio cervico-dorso lombare) oltre al rombencefalico, al mesencefalico ed al pelvico.

Per questo appunto ritengo il mio reperto di particolare importanza.

Già nel 1876 STRICKER dimostrò che tagliando in un cane la VI e VII radice posteriore spinale e stimolandone il moncone periferico si provocava vasodilatazione nell'arto posteriore corrispondente.

La fondamentale scoperta dello STRICKER, confermata in seguito da BAYLISS e LANGLEY, fece sorgere il problema del come lo stimolo possa essere trasmesso alla periferia, attraverso le radici posteriori.

BAYLISS manifestò il parere che le fibre sensitive possano condurre gli stimoli non solo in senso centripeto ma anche in senso inverso ed indicò questo fatto col nome di « conduzione antidromica ». Molti fisiologi condividono ancora oggi questa veduta.

Altri invece, supposero nelle radici posteriori, la presenza di fibre efferenti spinali. CAYAL e LENHOSSÉK fornirono le prime prove morfologiche della loro esistenza, in embrioni di pollo.

CAYAL le indicò col nome di « fibres motrices des racines postérieures »; LENHOSSÉK col nome di « durchtretende Fasern ».

La scoperta di queste fibre suscitò vivo interesse ed in seguito numerosi autori, sia con metodi puramente morfologici ed embriologici, sia con metodo sperimentale, in parte dimostrarono in parte negarono la presenza di fibre efferenti spinali nelle radici posteriori.

Rimando per più ampie notizie sull'argomento, ai lavori fondamentali di BECCARI (1913 e 1914) e di TERNI (1921 e 1931). Quest'ultimo autore, nel 1935, ha riassunta la questione in termini molto chiari.

Mi limito a ricordare che attualmente, in base alle più recenti ricerche morfo-sperimentali, specialmente di LUGARO e di KEN KURÉ e collaboratori, si tende ad ammettere la presenza, nelle radici posteriori, di fibre centrifughe. Però, mentre LUGARO sostiene che non siano da considerare quali vere fibre pregangliari, il KEN KURÉ invece ammette per tali fibre il significato di pregangliari.

Questo autore ammise come cosa indubbia che in tutte le radici posteriori, decorrono, commiste alle fibre sensitive, fibre efferenti spinali, piccole e midollate<sup>(1)</sup>, da uno a tre micron di spessore; che hanno il loro centro trofico in quasi tutti i segmenti del midollo spinale e precisamente, secondo NITTA, fra il corno anteriore e la sostanza gelatinosa del corno posteriore - fatto questo negato da GAGEL ed ammesso invece da FOERSTER e MÜLLER.

Secondo KEN KURÉ, parte delle fibre efferenti spinali raggiunge gli organi periferici seguendo la via dei nervi misti; parte invece, dalla radice posteriore va, attraverso al cordone limitante, agli organi interni e provvede alla innervazione parasimpatica di questi.

Queste fibre condurrebbero, attraverso le radici posteriori, l'impulso per la vasodilatazione dei vasi periferici, per la secrezione del sudore, per il riflesso pilomotore; condurrebbero inoltre impulsi tonici e trofici ai muscoli; impulsi trofici alla pelle, alle ossa ed alle articolazioni. Determinerebbero dilatazione dei vasi gastrici ed intestinali; costrizione dei vasi polmonari; mobilità gastrica ed intestinale. Pertanto rappresenterebbero vere fibre di natura parasimpatica. Al loro complesso il KEN KURÉ ha dato il nome di « parasimpatico spinale ».

Stabilita così l'esistenza di fibre efferenti spinali che sarebbero pregangliari di natura parasimpatica, il KEN KURÉ si prospettò subito la questione: dove risiedono le cellule intercalari di esse.

E qui purtroppo i dati forniti da questo autore non sono più così chiari.

In un primissimo tempo egli suppose che esse potessero trovarsi nei gangli spinali, quivi rappresentate da quelle cellule descritte da DOGIEL, provviste di plessi pericellulari e periglomerulari. Ma ben presto si è accorto che nei gangli spinali non sono in realtà differenziabili, nè con i comuni metodi istologici, nè con i metodi di sperimentazione fisiologica, cellule effettrici di natura simpatica. E pertanto ha cercato di risolvere il problema per altra via: studiando le alterazioni presentate dalle cellule gangliari spinali in seguito a sezione della rispettiva radice posteriore; sezione del nervo periferico, del nervo frenico, degli splancnici; asportazione del cordone limitante del simpatico.

---

(<sup>1</sup>) Per KEN KURÉ non tutte le fibre piccole midollate sono di natura simpatica effettrice; alcune sarebbero di natura parasimpatica ma sensitiva.

Egli, sulla base di dati sperimentali, assieme a MURAKAMI ed OKINAKA (1934) ha enunciato il parere che le cellule intercalari - effettrici - del suo parasimpatico spinale si trovano nei gangli spinali comiste alle cellule sensitive; sarebbero quivi rappresentate dalle piccole cellule - 15-30 micron - che dopo la sezione della radice posteriore restano inalterate e che, invece, dopo la sezione del nervo periferico si alterano rapidamente. Suppone anche che esse non inviino un prolungamento centrale.

Conformemente a ciò, lo stesso KEN KURÉ, assieme a TATSUO SANO, in seguito ad esperimenti di sezione intracranica del nervo facciale e sezione di questo stesso nervo fra ganglio genicolato e punto di emergenza della corda del timpano, ha espresso il parere che le cellule intercalari delle fibre parasimpatiche del nervo intermediario di WRISBERG non sono situate, come comunemente ammesso, nel ganglio sottomandibolare, ma nel ganglio genicolato, omologabile ai gangli spinali.

Però le deduzioni del KEN KURÉ non sono state ritenute decisive; sono in contrasto con quanto sembra debba ritenersi fondamentalmente dimostrato sulla costituzione dei gangli sensitivi e sulla morfologia delle cellule simpatiche in confronto con quella dei gangli sensitivi; contrastano anche con i dati forniti da altri autori che, nello stesso intento di identificare nei gangli sensitivi cellule di natura simpatica, hanno eseguito esperimenti di sezione identici a quelli praticati dal KEN KURÉ stesso. Infatti WARRINGTON e GRIFFITH considerarono le cellule piccole e piccolissime dei gangli spinali in un primo tempo quali elementi viscerosensitivi; in un secondo tempo quali rappresentanti dei vasodilatatori. ELLINGER ed HIRT presumono invece che le piccole e medie cellule dei gangli spinali D12 e L1 esplichino una influenza vasocostrittrice sui vasi renali. Per il KISS infine le cellule simpatiche effettrici, nei gangli spinali, sarebbero rappresentate da cellule scure, multiangolari, di grandezza intermedia fra quelle grandi chiare e quelle piccole.

Orbene, io credo che niente di meglio e di più dimostrativo delle piccole cellule simpatiche da me riscontrate nella membrana natatoria dell'oca, possa essere considerato come rappresentante delle cellule intercalari di un parasimpatico spinale (cervico-dorso-lombare). Tali cellule si trovano infatti intercalate sul percorso delle piccole fibre midollate senza dubbio provenienti dal midollo spinale (probabilmente

segmento lombare); fibre che, per i loro molto intimi rapporti topografici con le guaine dei vasi arteriosi e con le anastomosi artero-venose, indicano chiaramente la loro natura vasomotrice - con ogni probabilità vasodilatatrice -.

Questo mio reperto indicherebbe che il così detto « parasimpatico spinale » è costituito sullo stesso schema fondamentale che contraddistingue gli altri settori, mesencefalico, rombencefalico e pelvico del parasimpatico: e cioè che gli elementi cellulari intercalari sono, anche per il parasimpatico spinale, di tipo simpatico e disposti perifericamente.

Ho in corso ulteriori ricerche per decidere se la presenza di queste piccole cellule è un fatto sporadico, esclusivo della membrana interdigitale dell'oca o se piccole cellule dello stesso tipo e con identici rapporti con fibre piccole midollate perivasali, esistano anche in altri segmenti periferici del corpo dello stesso o di altri animali.

Bisogna ad ogni modo tener presente che, connesse ai reticoli nervosi periferici del simpatico, esiste, in tutti gli organi periferici, un gran numero di piccolissime cellule da alcuni autori ritenute gangliari a tipo neuroblastico, indicate dal SEREBRIACOW col nome di « cellule micronervose a tipo embrionale » e da altri autori invece considerate quali cellule interstiziali di CAYAL; che dal BOEKE e MEIJLING sono ritenute di natura nervosa; da altri autori invece sono omologate a quelle cromaffini o alle cellule di SCHWAN. Non è improbabile che anche questi elementi rappresentino cellule intercalari del parasimpatico spinale di KEN KURÉ.

## AUTORI CITATI

- AGDUHR E., « Verh. d. Akad. v. Wetensch. », Amsterdam, vol. 20, 1920.
- BECCARI N., « Arch. Ital. di Anat. e di Embriol. », vol. 11, pag. 299, 1913; *ibidem*, vol. 13, pag. 1, 1914.
- BAYLISS W. N., *Principles of general Physiol.*, N. York, 1918.
- *The vaso-motor system.*, London (Longmans, Green and Comp.), 1923.
- BROWN M. E., « The Anat. Record », vol. 69, pag. 287, 1937.
- CAJAL S. R., « Anat. Anz. », Bd. 5, pag. 85, 1890.
- CLARA M., « Erg. Anat. », Bd. 27, pag. 246, 1927.
- *Die arterio-venösen Anastomosen.* J. A. Barth, Leipzig, 1939.
- CLARK R. and CLARK E. L., « Americ. J. Anat. », vol. 54, pag. 229, 1934.
- « Americ. J. Anat. », vol. 55, pag. 47, 1934.
- « Americ. J. Anat. », vol. 55, pag. 407, 1934.
- DOGIEL A. S., *Der Bau der Spinalganglien des Menschen u. d. Säugetiere.* Jena, 1908.
- ELLINGER u. HIRT, « Arch. f. Exp. Pathol. u. Pharmakol. », Bd. 106, 1925.
- GROSSER O., « Arch. Mikrosk. Anat. », Bd. 60, pag. 191, 1902.
- GRANT R., « Heart », vol. 15, pag. 281, 1931.
- GRANT R. and BLAND E., « Heart », vol. 15, pag. 385, 1931 e vol. 16, 1932.
- GAGEL O., « Zeit. Neurol. », Bd. 126, 1930.
- HINSEY J. C., « Journ. of comp. Neur. », vol. 59, 1934.
- KEN-KURÓ e collaboratori, « Quart. Journ. exper. Physiol. », vol. 18 (1928); vol. 20 (1930); vol. 21 (1931); vol. 22 (1931).
- « Pflügers Arch. », Bd. 218, H. 5/6, 1928.
- « Z. Zellf. », Bd. 9, pag. 229 (1929), Bd. 9, pag. 245 (1929); Bd. 13, pag. 249 (1931); Bd. 13, pag. 276 (1931); Bd. 17, pag. 453 (1933); Bd. 17, pag. 467 (1933).

- KEN-KURÉ, MURAKAMI u. OKINAKA, «Z. Zellf.», Bd. 22, pag. 54, 1934-1935.
- KEN-KURÉ u. SANO, «Z. Zellf.», Bd. 23, pag. 495, 1935-1936.
- KISS F., «Journ. of Anat.», vol. 66, pag. 488, 1932.
- LANGLEY J. N., «Erg. Physiol.», 1903.
- «Journ. of Physiol.», vol. 30, 1904.
- *Trattato*, parte I, Cambridge, 1921.
- LENHOSSÉK (von) M., «Anat. Anz.», Bd. 5, pag. 360, 1890.
- LOBWY A., LEWIS T. and PICKERING S., *Heart*, vol. 16, pag. 33, 1931.
- LUGARO E., «Arch. Suisse de Neur. et Psych.», vol. 31, 1933.
- «Riv. Pat. nervosa e mentale», vol. 43, 1934.
- MASSON P., «Bull. d'Histol. appliquée», tomo 13, pag. 209, 1936.
- *Les glomus neuro-vasculaires*, Paris, 1937.
- MÜLLER L. R., *Lebensnerven und Lebenstriebe*, J. Springer», Berlin, 1931.
- NUZZI O., «Ric. di Morfol.», vol. 18, pag. 5, 1940.
- PALUMBI G., «Anat. Anz.», Bd. 87, pag. 257, 1939.
- «Z. Anat.», Bd. 109, pag. 396, 1939.
- POPOFF N. W., «Bull. d'Histol. appliquée», tomo 12, 1935.
- SCHUMACHER S., «Arch. f. mikr. Anat.», Bd. 87, pag. 309, 1915.
- «Z. Mikr. Anat. Forsch.», Bd. 43, 1938.
- STÖHR PH. JR., *Mikroskopische Anatomie des vegetativen Nervensystems*, J. Springer, Berlin, 1929.
- «Erg. d. Anat.», Bd. 32, pag. 1, 1938.
- STRICKER, *Lezioni di patologia generate sperimentale*, ed. Fr. Vallardi, Milano.
- TERNI T., «Arch. Ital. di Anat. e di Embriol.», vol. 20, pag. 433, 1923.
- «Z. f. Anat. u. Entw.», Bd. 96, pag. 289, 1931.
- «Boll. Soc. Ital. di Biol. sperim.», vol. 10, pag. 994, 1935.
- WATZKA M., «Z. Mikr. Anat. Forsch.», Bd. 39, 1936.
- «Verh. 10 Tagg. dtsh. Ges. Kreislaufforsch.», 171, 1937.
- WARRINGTON and GRIFFITH, *Brain*, vol. 27, 1901.



## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA I.

FIG. 1. — Membrana interdigitale dell'oca.

Espansione sensitiva terminale disposta nel connettivo che circonda il segmento arterioso di una anastomosi artero-venosa.

Metodo Bielschowsky-Palumbi (Ingr. 375 ×).

FIG. 2. — Membrana interdigitale dell'oca.

1 - arteriola in sezione longitudinale con plesso nervoso.

2 - segmento intermedio di una anastomosi artero-venosa in sezione trasversale con plesso nervoso avventiziale.

3 - piccola cellula nervosa multipolare, sul percorso di un fascetto nervoso che accompagna l'arteriola.

4 - espansione sensitiva terminale.

Metodo Bielschowsky-Palumbi (Ingr. 500 ×).

FIG. 3. — Membrana interdigitale dell'oca.

Gruppetto di piccole cellule nervose multipolari riscontrate sul percorso di fascetti nervosi periarteriosi in prossimità di anastomosi artero-venose.

Metodo Bielschowsky-Palumbi. (Ingr. 900 ×).

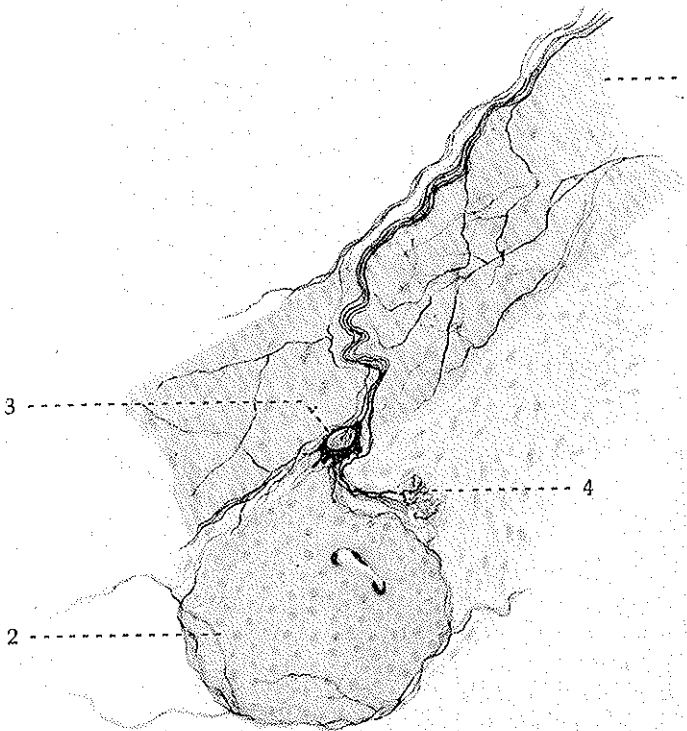


FIG. 2.

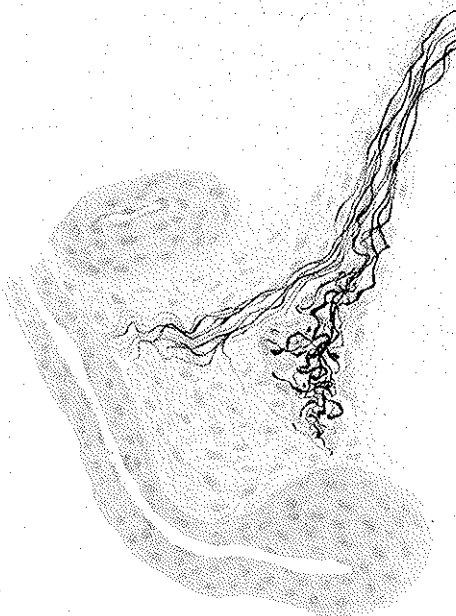


FIG. 1.



FIG. 3.

FUNZIONI GENERATRICI GENERALIZZATE,  
E LORO APPLICAZIONE  
AI METODI GRAFICO-NUMERICI DI VALUTAZIONE  
NEL CALCOLO OPERATORIO FUNZIONALE (\*)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARY. — Quaedam significantur rationes quibus notio functionis  $f(\Delta)$  ad generalia extendi potest, cum scilicet terminatur ipse operator ex eiusdem applicatione cuilibet ex functionibus  $j_n(t) = \Delta^n Fu(t)$  GIORGI, vel ex functionibus  $e^{-\lambda t} \cdot 1(t)$ . Facile exhibetur exemplum quo  $n = -2$ , quo utilissime uti possumus in rationibus graphico-numericis ad perpendendas symbolicas expressiones.

1. — I metodi grafici o grafico-numericis di valutazione delle equazioni simboliche del calcolo operatorio funzionale, del tipo (1):

$$W(t) = f(\Delta) V(t)$$

possono, come è noto, sostituire utilmente i procedimenti analitici, quando la funzione operanda  $V(t)$  sia di espressione difficile da trattare, oppure quando essa, addirittura, non sia esprimibile praticamente in formule (curva grafica).

Detti metodi si fondano per lo più sulla scomponibilità delle funzioni operande in funzioni (elementi) di andamento « impulsivo », o di andamento « a gradino », ed inoltre sul principio di linearità che per-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Notazioni del GIORGI; vedi: *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*. Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, vol. IX (1905), pag. 651-699, ristampato nel « Bollettino Tecnico dell'Istituto Militare Superiore delle Trasmissioni », anno 1940, n. 3 e 4, pag. 91-139.

mette di ottenere il risultato complessivo sommando i risultati parziali relativi agli elementi singoli di scomposizione<sup>(1)</sup>. Il risultato, od effetto, di un elemento impulsivo ha la stessa forma (a meno di un semplice moltiplicatore numerico) della « funzione generatrice »  $G(t)$  dell'operatore  $f(\Delta)$ , mentre quello di un elemento di tipo a gradino ha la forma della « funzione generatrice integrale »  $H(t)$  dell'operatore medesimo.

2. - Un operatore funzionale  $f(\Delta)$  è interamente caratterizzato dalla relativa  $G(t)$  che ne esprime l'applicazione alla funzione impulsiva unitaria  $Fu(t)$ , oppure dalla  $H(t)$  che ne esprime l'applicazione al « gradino unitario »  $1(t)$ . Questo concetto può estendersi, introducendo la *funzione generatrice generalizzata di ordine  $n$* ,  $A_n(t)$ , data dalla relazione:

$$A_n(t) = f(\Delta)j_n(t)$$

ove è, secondo il GIORGI:

$$j_n(t) = \Delta^n Fu(t)$$

La  $G(t)$  e la  $H(t)$  rientrano in tale definizione come casi particolari:

$$G(t) = f(\Delta) Fu(t) = f(\Delta)\Delta^0 Fu(t) = A_0(t)$$

$$H(t) = f(\Delta) 1(t) = f(\Delta)\Delta^{-1} Fu(t) = A_{-1}(t)$$

3. - Particolare interesse presenta la funzione generatrice di ordine  $n = -2$ :

$$A_{-2}(t) = f(\Delta)\Delta^{-2} Fu(t) = f(\Delta) \cdot t \cdot 1(t)$$

risultato dell'applicazione del generico operatore  $f(\Delta)$  alla funzione

$$j_{-2}(t) = t \cdot 1(t)$$

(1) Vedi: ANGELINI, *Calcolo operatorio e studio dei circuiti elettrici in regime transitorio*, Monografie dell'Elettrotecnica, Milano, 1935, pag. 46.

Il suo impiego si basa sulla scomposizione della funzione operanda  $V(t)$  in elementi aventi la forma della  $j_{-2}(t)$ , come indicato nella figura 1.

L'uso di questa scomposizione presenta in pratica i vantaggi seguenti:

1) È facile ottenere con pochi elementi un tracciato approssimato alla curva  $V(t)$ , più di quanto non consenta la scomposizione in elementi di tipo impulsivo o in elementi a gradino.

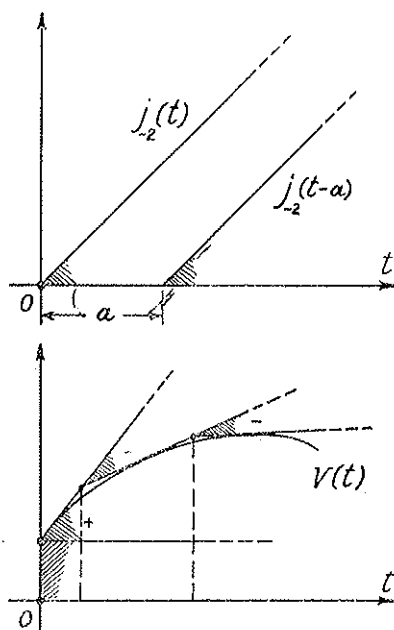


FIG. 1.

Funzione  $j_{-2}(t)$ , e scomposizione di una funzione  $V(t)$  in elementi del tipo  $j_{-2}(t)$ .

2) La funzione generatrice generalizzata di ordine  $n = -2$  non comporta termini impulsivi per gli operatori le cui  $G(t)$  o  $H(t)$  presentano termini impulsivi del tipo  $Fu(t)$ .

Il metodo da seguire per l'applicazione dei concetti suesposti è il seguente. Conseguita la scomposizione della  $V(t)$  in elementi di tipo  $j_{-2}(t)$ , e tracciata la generatrice generalizzata  $A_{-2}(t)$  dell'operatore  $f(\Delta)$ , si sommano, graficamente o numericamente, le ordinate di questa, moltiplicate per i fattori numerici (positivi o negativi) che esprimono le

intensità degli elementi singoli di scomposizione, tenendo beninteso presente che ognuno di questi ha una differente ascissa  $a$  di localizzazione (fig. 1). Oppure si tracciano le curve esprimenti i risultati parziali relativi ai singoli elementi di scomposizione e si sommano le ordinate corrispondenti.

4. - Altre generalizzazioni sono possibili. Così può caratterizzarsi un generico operatore  $f(\Delta)$  mediante il risultato  $B_\lambda(t)$  della sua applicazione alla particolare funzione seguente ( $\lambda$  reale  $> 0$ ):

$$\varepsilon_\lambda(t) = 1(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

ponendo cioè:

$$B_\lambda(t) = f(\Delta) \cdot \varepsilon_\lambda(t) = f(\Delta) \cdot 1(t) e^{-\lambda t}$$

L'andamento della  $\varepsilon_\lambda(t)$  è praticamente quello dell'onda di voltaggio (onda esponenziale smorzata, a fronte ripida) prodotta da taluni generatori ad impulso, adoperati in prove ad alta tensione sopra sistemi elettrici<sup>(1)</sup>.

Al fine di caratterizzare l'operatore  $f(\Delta)$  esprime il comportamento di un sistema elettrico, può convenire qualche volta di ricavare la  $B_\lambda(t)$  sperimentalmente (per esempio mediante l'oscillografo), impiegandola in procedimenti grafici per trovare l'effetto di una operanda  $V(t)$  qualunque. A tal fine è necessario scomporre la  $V(t)$  in elementi aventi la forma della  $\varepsilon_\lambda(t)$ , ciò che si ottiene come mostrato in figura 2.

È degna di nota la relazione intercorrente fra la funzione  $B_\lambda(t)$  e la generatrice  $G(t)$ :

$$B_\lambda(t) = \frac{1}{\Delta + \lambda} G(t)$$

e quella relativa al caso limite  $\lambda = 0$ :

$$B_0(t) = \frac{1}{\Delta} G(t) = H(t)$$

---

<sup>(1)</sup> Vedi ad esempio: «Rassegna Tecnica del Tecnomasio Italiano Brown Boveri», maggio-giugno 1941, pag. 38-39.

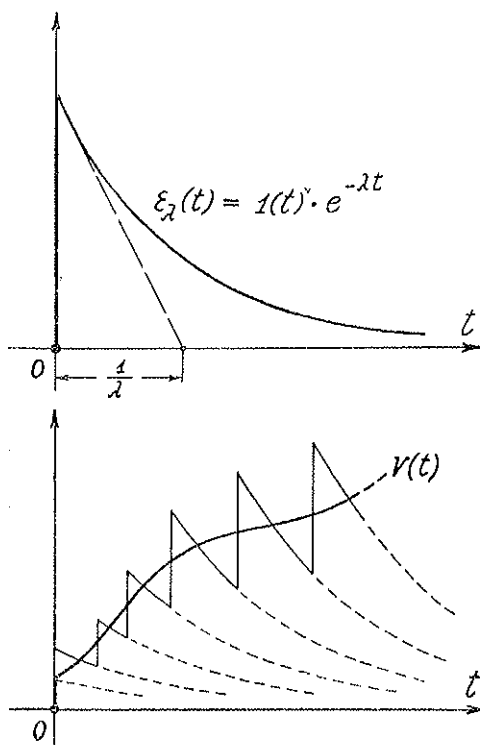


FIG. 2.

Funzione  $\varepsilon_\lambda(t)$ , e scomposizione di una funzione  $V(t)$  in elementi di tipo  $\varepsilon_\lambda(t)$ .

5. - Mostriamo, come chiarimento per l'uso delle generalizzazioni sopra indicate, un esempio pratico, scegliendo di proposito un caso assai semplice, facilmente verificabile per altre vie.

Sia un circuito elettrico costituito da una resistenza  $R = 100$  ohm, in serie con una induttanza  $L = 0,02$  henry, ed alimentato, a partire dall'istante  $t = 0$ , da una f. e. m. :

$$V(t) = 100 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 1000 t) \text{ volt}$$

Si voglia ricavare l'andamento della corrente  $I(t)$  nel fenomeno d'inserzione di cui trattasi, per esempio nel primo semiperiodo della  $V(t)$ , applicando un procedimento basato sull'uso della funzione generatrice generalizzata di ordine  $n = -2$ .

L'operatore che caratterizza il circuito (*conduttanza funzionale*) è il seguente:

$$f(\Delta) = \frac{1}{R + L\Delta} = \frac{1}{L} \frac{1}{\Delta + \rho}$$

essendo

$$\rho = \frac{R}{L} = 5000 \quad 1/\text{sec}$$

L'equazione simbolica che governa il fenomeno è pertanto:

$$I(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\Delta + \rho} V(t)$$

espressione che si tratta appunto di valutare. La funzione generatrice generalizzata, di ordine  $n = -2$ , dell'operatore anzidetto vale:

$$\begin{aligned} A_{-2}(t) &= f(\Delta)j_{-2}(t) = \frac{t}{L\rho} - \frac{1}{L\rho^2}(1 - e^{-\rho t}) = \\ &= \frac{1}{0,02} \left[ \frac{t}{5000} - \frac{1}{25 \times 10^6} (1 - e^{-5000t}) \right] \text{amp} \end{aligned}$$

cioè ha l'andamento (fig. 3, curva  $A_{-2}(t)$ ) della corrente che si otterrebbe applicando al circuito una f. e. m. di legge temporale

$$j_{-2}(t) = 1(t) \cdot t \text{ volt}$$

vale a dire crescente, con legge lineare, di un volt al secondo, a partire dall'istante  $t = 0$ .

Secondo il metodo in questione, si sostituisce alla sinusoide della  $V(t)$  una opportuna spezzata come nella figura 3 anzidetta, il che corrisponde ad una scomposizione in elementi 1), 2), 3), 4), 5), di tipo  $j_{-2}(t)$ .

Gli effetti  $y_1, y_2, \dots, y_5$  di tali elementi hanno la forma della generatrice generalizzata  $A_{-2}(t)$ , a meno di opportuni fattori numerici



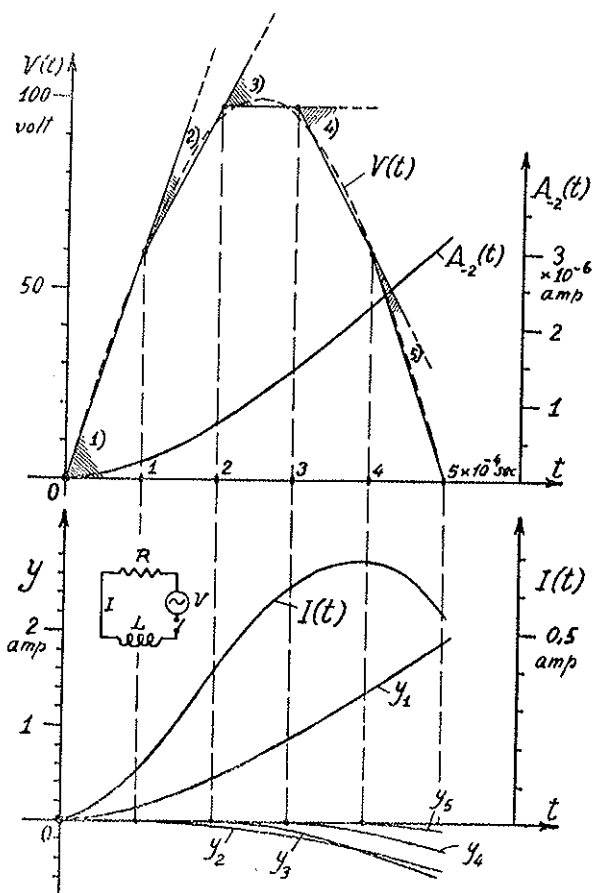


FIG. 8.

Esempio di applicazione della generatrice generalizzata  $A_{-2}(t)$  al calcolo grafico-numerico di un transitorio in un circuito elettrico:

- $V(t)$  tensione impressa;  
 1), 2), ... 5) elementi di scomposizione, di tipo  $j_{-2}(t)$ ;  
 $A_{-2}(t)$  funzione generatrice di ordine  $n = -2$  dell'operatore  $f(\Delta)$  espressamente la conduttanza funzionale del circuito;  
 $y_1, y_2, \dots, y_5$  risultati parziali dovuti ai singoli elementi di scomposizione;  
 $I(t)$  corrente del transitorio (risultato complessivo).

che dipendono dalla «ripidità» degli elementi singoli di scomposizione. La curva esprimente l'andamento cercato dalla corrente  $I(t)$  si ricava sommando le ordinate corrispondenti delle curve  $y$ .

Nel caso trattato, al risultato poteva naturalmente arriversi più rapidamente con altri procedimenti. Ove invece, però, la  $V(t)$  sia data graficamente, oppure sia difficilmente esprimibile in formule, i metodi grafico-neri si rendono particolarmente preferibili: fra essi quello sopraccennato offre il vantaggio, come si è detto, di poter adoperare in pratica, con buona approssimazione, una scomposizione di  $V(t)$  in elementi poco numerosi.

## SULLA IMAGINE PROIETTIVA DELLE SERIE E DEI SISTEMI D'EQUIVALENZA ELEMENTARI SOPRA UNA VARIETÀ (\*)

ENZO MARTINELLI

*SUMMARY.* -- Generali ratione ostenditur notio imaginis projectivae systematis aequivalentiae elementaris; cuius imaginis, quam MARONI iam invexerat pro serie aequivalentiarum elementarium, quaedam notae peculiare plenius perpenduntur.

1. Mi propongo di estendere la nozione di immagine proiettiva di una serie lineare sopra una curva o di un sistema lineare sopra una varietà, e talune proprietà di quest'immagine, al caso di una serie e di un sistema d'equivalenza elementari sopra una varietà.

Limitatamente al caso di una serie d'equivalenza sopra una superficie, il MARONI<sup>(1)</sup> ha già indicato vari procedimenti, che permettono di ottenere immagini proiettive della serie. Io ho fissato l'attenzione sopra uno di questi, che mi sembra il più opportuno. La sua opportunità voglio appunto dimostrare - presentandolo in generale per le serie e per i sistemi d'equivalenza sopra una varietà di dimensione qualunque - col far vedere che è possibile di perseguire un pò più a fondo l'analogia con il caso delle serie e dei sistemi lineari.

In sostanza, come l'immagine proiettiva di una serie o di un sistema lineare, di dimensione  $r$ , si ottiene entro uno spazio lineare  $S_r$ , in relazione alle sezioni della varietà immagine con gli spazi lineari  $S_{r-1}$

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. A. MARONI. *Scritti matematici offerti a L. Berzolari*, Pavia (1936), pag. 511.

subordinati ad  $S_r$ , così l'immagine proiettiva di una serie o di un sistema d'equivalenza, di dimensione  $r$ , si ottiene entro una varietà di SEGRE  $M_r$  di specie  $s$  conveniente, in relazione alle sezioni della varietà immagine con le varietà di SEGRE  $M_{r-s}$  subordinate ad  $M_r$ . E come due immagini proiettive in  $S_r$ , l'una proiezione dell'altra, rappresentano serie o sistemi lineari l'uno subordinato all'altro, così due immagini proiettive in  $M_r$ , ottenuta l'una dall'altra mediante una certa trasformazione analoga alla proiezione ordinaria, e che chiamo « proiezione entro  $M_r$  », rappresentano serie o sistemi d'equivalenza l'uno subordinato all'altro.

2. Sopra una varietà irriducibile  $V_k$ , a  $k$  dimensioni, sia assegnato il sistema d'equivalenza elementare  $\Sigma$ , di dimensione  $r$  e di specie  $h$ , come intersezione di  $k-h$  sistemi lineari di varietà a  $k-1$  dimensioni,  $[A^{(1)}], [A^{(2)}], \dots, [A^{(k-h)}]$ . Si suppongano i sistemi lineari preventivamente ridotti ad avere dimensioni  $r_1, r_2, \dots, r_{k-h}$ , soddisfacenti alla relazione  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_{k-h}$ : in modo cioè che per la generica varietà  $W_h$  di  $\Sigma$  passi una sola  $(k-h)$ -pla di varietà  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k-h)}$  <sup>(1)</sup>. Per  $h=0$  il sistema  $\Sigma$  si riduce ad una serie di equivalenza elementare di gruppi di punti su  $V_k$ .

Sia  $M_r$  la varietà di SEGRE di specie  $s = k-h$ , che rappresenta le  $(k-h)$ -ple di punti estratti da  $k-h$  spazi  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$  di dimensioni  $r_1, \dots, r_{k-h}$ . Ricordiamo che, quando si pensi  $M_r$  come prodotto di questi spazi lineari, ad ogni  $s$ -pla di spazi  $S_{q_1}, \dots, S_{q_s}$  subordinati a (o coincidenti con)  $S_{r_1}, \dots, S_{r_s}$ , corrisponde un prodotto  $M_{q_1+\dots+q_s}$ , che è anche una varietà di SEGRE, di specie  $s$  (o inferiore, se qualcuno dei  $q$  è nullo), contenuta in  $M_r$ . Osserviamo inoltre che, entro  $M_r$ , sussiste una specie di dualità (prodotto delle dualità esistenti in  $S_{r_1}, \dots, S_{r_s}$ ), la quale fa corrispondere ad ogni varietà  $M_{q_1+\dots+q_s}$  una varietà  $M_{r-(q_1+\dots+q_s)-s}$ , prodotto degli spazi duali di  $S_{q_1}, \dots, S_{q_s}$  nei propri ambienti. In particolare, ai punti di  $M_r$  corrispondono, per

<sup>(1)</sup> Si può soddisfare a questa condizione, per esempio imponendo alle varietà di ciascuno dei sistemi lineari  $[A]$  il passaggio per un numero conveniente di punti fissi, scelti in modo generico su  $V_k$ .

dualità, le  $M_{r-s}$  di una totalità  $\infty^r$  (che è a sua volta una varietà di SEGRE  $M_r$  di elementi).

Ciò premesso, si pongano  $k-h$  corrispondenze proiettive tra le varietà di  $|A^{(1)}|, \dots, |A^{(k-h)}|$  e gl'iperpiani di  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ , e ad ogni varietà di  $\Sigma$  intersezione effettiva o virtuale di una  $(k-h)$ -pla di varietà  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$ , si faccia corrispondere la varietà di SEGRE  $M_{r-s} = M_{r-k+h}$ , contenuta in  $M_r$ , prodotto degli  $S_{r_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-1}$ , corrispondenti proiettivamente ad  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$ . Vuol dire che, se  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$  s'incontrano effettivamente lungo una varietà di dimensione  $> h$ , alla  $(k-h)$ -pla  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-h)}$  corrispondono infinite varietà di  $\Sigma$ , costituenti un sistema d'equivalenza su una varietà subordinata a  $V_k^{(1)}$ . Queste infinite varietà appaiono come elementi eccezionali nella corrispondenza che si pone fra  $\Sigma$  e le varietà  $M_{r-s}$  di  $M_r$ .

Risulta che alle varietà di  $\Sigma$  che contengono un punto  $P$  di  $V_k$ , corrispondono le  $M_{r-s}$  passanti per un punto  $P'$  di  $M_r$ . Al variare di  $P$  su  $V_k$ , se  $\Sigma$  è *semplice*,  $P'$  descrive in  $M_r$  una varietà  $V'_k$  in corrispondenza birazionale con  $V_k$ . Al sistema  $\Sigma$  su  $V_k$ , corrisponde il sistema  $\Sigma'$  segato su  $V'_k$  dalla totalità  $\infty^r$  delle  $M_{r-s}$  di  $M_r$ . *La varietà  $V'_k$  è l'immagine proiettiva di  $\Sigma$  in  $M_r$ .*

Viceversa, assegnata una varietà  $V'_k$  in  $M_r$ , il sistema  $\Sigma$  di varietà di dimensione  $h$ , segato su  $V'_k$  dalle  $M_{r-s}$  di  $M_r$ , è un sistema d'equivalenza elementare, che può ottenersi come intersezione dei  $k-h$  sistemi lineari su  $V'_k$  di varietà di dimensione  $k-1$ , che sono a loro volta intersezione di  $V'_k$  con i  $k-h$  sistemi lineari su  $M_r$  costituiti dalle varietà (di SEGRE, di specie  $s$  e di dimensione  $r-1$ ), prodotti degli iperpiani di  $S_{r_1}$  con  $S_{r_2}, S_{r_3}, \dots, S_{r_{k-h}}$ , degli iperpiani di  $S_{r_2}$  con  $S_{r_1}, S_{r_3}, \dots, S_{r_{k-h}}$ , ecc. Naturalmente il sistema  $\Sigma'$ , che in generale risulta di dimensione  $r$ , può, per particolari varietà  $V'_k$  entro  $M_r$ , abbassarsi di dimensione.

OSSERVAZIONE. — Si è supposto che il sistema d'equivalenza  $\Sigma$  sia semplice; in caso contrario occorre distinguere a seconda che esso sia *composto* con un'involuzione di gruppi di punti, o con una con-

(<sup>1</sup>) Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, (Ed. Cremonese, Roma, 1942), Cap. III, n. 41.

gruenza di varietà di dimensione  $l < h$ , su  $V_k$ . Conseguentemente  $V'$  risulta ancora di dimensione  $k$ , ovvero di dimensione  $k-l$ , e non più riferita birazionalmente a  $V_k$ , ma soltanto in corrispondenza univoca in un senso con  $V_k$ , e nell'altro in corrispondenza d'indice finito ( $> 1$ ), ovvero infinito. Insomma, non vi è nulla di nuovo rispetto a quanto avviene per le serie e i sistemi lineari.

3. Vediamo come si possa estendere al caso delle serie e dei sistemi d'equivalenza il teorema che lega due serie o sistemi lineari, che abbiano immagini proiettive l'una proiezione dell'altra.

A tal fine, si considerino entro gli spazi  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ ,  $k-h$  proiezioni eseguite rispettivamente dai centri  $S_{e_1}, \dots, S_{e_{k-h}}$  sopra gli spazi  $S_{r_1-e_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-e_{k-h}-1}$ , essendo  $0 \leq e_1 \leq r_1 - 2, \dots, 0 \leq e_{k-h} \leq r_{k-h} - 2$ . Il prodotto topologico di tali proiezioni dà luogo ad una trasformazione che chiameremo *proiezione entro*  $M_r$ , avente come centro la varietà di SEGRE  $M_{e_1 + \dots + e_{k-h}} = \Omega_e$ , prodotto di  $S_{e_1}, \dots, S_{e_{k-h}}$ , e come quadro di proiezione la varietà di SEGRE  $M_{r-(e_1 + \dots + e_{k-h})-s} = \omega_{r-e-s}$ , prodotto di  $S_{r_1-e_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-e_{k-h}-1}$ .

Precisamente, un punto  $P$  di  $M_r$  (fuori di  $\Omega_e$ ), il quale provenga dal prodotto dei punti  $P^{(1)}, \dots, P^{(k-h)}$  rispettivamente in  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ , verrà proiettato entro  $M_r$ , da  $\Omega_e$  sopra  $\omega_{r-e-s}$ , nel punto  $P'$  di  $\omega_{r-e-s}$ , che è prodotto dei punti  $P'^{(1)}, \dots, P'^{(k-h)}$ , proiezioni rispettivamente in  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$  dai centri  $S_{e_1}, \dots, S_{e_{k-h}}$  sopra gli spazi  $S_{r_1-e_1-1}, \dots, S_{r_{k-h}-e_{k-h}-1}$ . Altrimenti (senza ricorrere all'immagine offerta dal considerare  $M_r$  come prodotto topologico di  $S_{r_1}, \dots, S_{r_{k-h}}$ ) si può dire così: un punto  $P$ , variabile in  $M_r$ , individua insieme ad  $\Omega_e$  una varietà di SEGRE  $M_{e+s}$  subordinata ad  $M_r$ , la quale passa per  $\Omega_e$  e per  $P$ , e sega  $\omega_{r-e-s}$  nel punto  $P'$  proiezione di  $P$ . Le varietà  $M_{e+s}$ , passanti per  $\Omega_e$ , stanno in luogo degli spazi proiettati nella proiezione ordinaria.

Ciò posto, sia in  $M_r$  una varietà  $V'_k$ , e  $V''_k$  ne sia una proiezione biunivoca entro  $M_r$ , eseguita dal centro  $\Omega_e$  (non appoggiato a  $V'_k$ ) sopra la varietà di SEGRE  $\omega_{r-e-s}$ . Al sistema d'equivalenza elementare  $\Sigma''_0, \infty^{r-e-s}$ , di specie  $h$ , segato su  $V''_k$  dalle varietà di SEGRE  $\omega_{r-e-2s}$  subordinate ad  $\omega_{r-e-s}$ , e duali in  $\omega_{r-e-s}$  dei punti di  $\omega_{r-e-s}$  stessa (n. 2), corrisponde su  $V'_k$  il sistema segato dalle  $M_{r-s}$  di  $M_r$  passanti per  $\Omega_e$ : cioè un sistema d'equivalenza elementare  $\Sigma'_0$  con-

tenuto totalmente nel sistema  $\Sigma', \infty'$ , segato su  $V'_k$  da tutte le  $M_{r-s}$  di  $M_r$ . E poichè le varietà  $V'_k, V''_k$  si possono considerare come immagini proiettive, rispettivamente in  $M_r, \omega_{r-q-s}$ , di sistemi elementari  $\Sigma, \Sigma_0$ , trasformati di  $\Sigma', \Sigma'_0$ , su una  $V_k$  birazionalmente equivalente a  $V'_k$  e  $V''_k$ , si conclude col teorema:

*Se una varietà  $V'_k$  è proiezione biunivoca entro  $M_r$  di un'altra varietà  $V_k$ , la proiezione essendo eseguita da un centro  $\Omega_0$  (che non incontri  $V_k$ ) sopra un quadro  $\omega_{r-q-s}$ , il sistema  $\Sigma_0$  su una varietà  $V_k$ , del quale  $V''_k$  può considerarsi come immagine proiettiva in  $M_r$ , è totalmente contenuto in un sistema più ampio  $\Sigma$  su  $V_k$ , del quale  $V'_k$  è immagine proiettiva in  $M_r$ .*

OSSERVAZIONE. — Allorchè il centro di proiezione  $\Omega_0$  si appoggi a  $V'_k$ , il precedente teorema va modificato (in modo del tutto analogo al caso delle serie e dei sistemi lineari), nel senso che il sistema  $\Sigma_0$  risulta solo *parzialmente* contenuto entro il sistema  $\Sigma$ .

## LA DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEL MOMENTO D'INERZIA E L'INFLUENZA DELL'ELASTICITÀ (\*)

PIETRO TEOFILATO

SUMMARY. — Postquam critice exposuerit quibus rationibus haecenus inventis momenta inertiae experimentis determinari possint, auctor duas rationes suas exhibet, disputans quomodo se habeat elasticitatis influxus si valutatio iuxta eas fiat.

§ 1. — La conoscenza dell'ellissoide d'inerzia di un corpo costituisce un problema di speciale importanza per lo studio e la previsione di alcuni fenomeni, come ad esempio quello dell'avvitamento dei vlivoli.

Vari metodi sperimentali sono stati all'uopo immaginati, ma non tutti rispondenti alle desiderate esigenze di precisione, sia perchè le misure si fanno nell'aria e l'influenza di questa non viene opportunamente computata, sia perchè, volendo evitare grandiose attrezzature, quali si richiedono per l'esame dei corpi del peso di varie tonnellate, si fa ricorso a modelli che non rispecchiano esattamente la stessa distribuzione delle masse al vero.

Noi, dopo un rapido accenno ai vari metodi ideati, tra i quali uno da noi stessi trovato, esporremo ancora un nuovo metodo che abbiamo escogitato al fine di semplificare le grandi attrezzature sopra indicate; infine studieremo l'effetto che l'elasticità del materiale reca sulla valutazione del momento d'inerzia, in quanto siffatta valutazione viene ottenuta supponendo perfettamente rigido un corpo il quale, invece,

---

(\*) Memoria presentata nella Tornata del 20 febbraio 1942, dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini.



fisicamente si presenta più o meno in uno stato di coazione elastica, in virtù del proprio peso e delle reazioni di sostegno.

§ 2. - Il metodo classico, fin qui seguito, desume il momento inerziale dalla durata  $T$  di oscillazione del corpo sospeso alla bilancia bifilare, partendo dalla equazione del moto:

$$[1] \quad I_{\alpha} \ddot{\theta} + M_{\alpha} g \frac{d^2}{l_{\alpha}} \cdot \theta = 0,$$

dove  $I_{\alpha}$  è il momento inerziale intorno all'asse verticale di oscillazione,  $M$  la massa,  $d$  la distanza dei fili,  $l_{\alpha}$  la loro lunghezza ed  $\alpha$  un indice il quale sta a denotare che gli elementi si riferiscono ad un certo corpo  $\alpha$ .

Si deduce dalla [1]:

$$[2] \quad I_{\alpha} = \frac{T^2 M_{\alpha} g d^2}{16 \pi l_{\alpha}}.$$

Siffatta determinazione è però risultata molto grossolana, a causa dell'esistenza di un giuoco d'aria (aria satellite) che inficia il valore trovato  $I_{\alpha}$ .

Alcuni sperimentatori <sup>(1)</sup> hanno perciò introdotto una correzione per  $I_{\alpha}$ , ricorrendo al concetto da loro denominato del *momento d'inerzia virtuale*.

Si fanno cioè compiere sulla bilancia bifilare le oscillazioni, tanto al corpo  $\alpha$  di cui si vuol determinare il momento d'inerzia vero, che chiameremo  $I_{0\alpha}$ , quanto ad un corpo  $\beta$  di identiche o quasi identiche forme esterne, del quale il momento d'inerzia vero  $I_{0\beta}$  sia invece ben conosciuto a priori. Regolata la lunghezza  $l_{\beta}$  dei fili in modo che ampiezza e periodo di oscillazione del corpo  $\beta$  siano gli stessi del corpo  $\alpha$ , è

(1) GATES S. B., *Moments of inertia of airplanes*. R. and M. 1415 « British ARC » 1932. — HARTLEY, SOULÉ, MARVEL, MILLER, *The experimental determination of the moments of inertia of airplanes*. « Nat. Advisory Committee », Rep. 467, 1933.

legittimo ritenere che il giuoco d'aria sia lo stesso nei due casi e che le differenze  $I_\alpha - I_{0\alpha}$ ,  $I_\beta - I_{0\beta}$  siano da attribuire a tale giuoco.

Tuttavia non sembra conforme ad una più completa esperienza il ritenere che quelle differenze esprimano proprio la misura dell'effetto dell'aria, come a prima vista si presenta invece plausibile e semplice; tanto da indurre i sopra citati autori ad assumere:

$$[3] \quad I_{0\alpha} = I_\alpha - (I_\beta - I_{0\beta}).$$

Abbiamo infatti saggiato il metodo in parola, spingendone l'applicazione oltre gli ordinari confini, col provocare cospicui effetti d'aria in confronto a piccoli volumi (eguali) dei due corpi  $\alpha$  e  $\beta$ , ed abbiamo trovato risultati sconcertanti.

Ora, mentre logicamente è possibile assumere, per la misura di quell'effetto, qualunque funzione  $f$  tale che:

$$f(I_\alpha, I_{0\alpha}) = f(I_\beta, I_{0\beta}),$$

in sostanza l'esperienza ne determina una sola e non sembra anzi che questa sia proprio la differenza  $I - I_0$ , come invece presume la [3]. È poi da aggiungere che, a priori, non si può senz'altro ammettere che l'effetto accennato sia valutabile mediante una funzione finita come la  $f$ , nè che esso sia indipendente dalla forma dei corpi, dall'atto di moto e forse anche dall'accelerazione.

§ 3. - Per queste ragioni ho cercato<sup>(1)</sup> di procedere alla determinazione dei momenti d'inerzia partendo da un altro concetto. Invece di far oscillare il corpo alla bilancia bifilare, lo si faccia cadere in modo però che, mentre da una parte esso resti appoggiato e possa così ruotare intorno alla retta congiungente due appoggi, dall'altra estremità possa, dopo opportuno scapolamento di appoggio, spostarsi liberamente di qualche centimetro abbattendosi dopo sopra opportuni am-

(<sup>1</sup>) Cfr. TEOFILATO, *Sulla determinazione sperimentale dei momenti d'inerzia*. «Atti di Guidonia» n. 36, 1940.

mortizzatori. L'estremità ruotante traccerà sopra un cinemometro <sup>(1)</sup> il diagramma del moto incipiente di caduta; l'esame del diagramma permetterà poi di risalire alla conoscenza del momento d'inerzia.

Infatti, il moto incipiente di rotazione è regolato dall'equazione:

$$[5] \quad I\ddot{\theta} + Mg\zeta \sin \theta + \varphi = 0$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione,  $\zeta$  la distanza del baricentro dall'asse,  $\theta$  l'angolo che il vettore  $\zeta$  fa con la verticale,  $\varphi$  la funzione resistente.

Quest'ultima dipenderà dagli attriti tra solidi (linea di appoggio) e dalle forze aerodinamiche. Il momento degli attriti si può ritenere espresso da una costante, peraltro incognita; ma quanto alle forze aerodinamiche, potremo pensare che esse dipendano dalla sola velocità, come del resto si fa per lo studio dei proietti, ovvero anche dall'accelerazione, il che significa che dette forze possono dipendere non solo dall'atto di moto ma anche dal succedersi di questi.

Sta però il fatto che, per quel dato corpo, con quei determinati vincoli, la velocità e l'accelerazione finiscono per essere funzioni determinate (incognite) del tempo; per cui, pensando eliminato quest'ultimo, in ultima analisi l'accelerazione risulta funzione della velocità, mentre, in ogni caso, le forze aerodinamiche diventano, se non sostanzialmente, certo formalmente, dipendenti dalla sola velocità.

Potremo allora immaginare che il momento di quelle forze rispetto all'asse fisso, sia sviluppabile in serie di potenze della velocità, cosicchè, limitando lo sviluppo ai primi termini, si avrà in luogo della [5]:

$$[6] \quad I\ddot{\theta} - Mg\zeta \cdot \sin \theta + f_1 + f_2 \dot{\theta} + f_3 \dot{\theta}^2 = 0,$$

con  $f_1 f_2 f_3$  coefficienti incogniti dipendenti dal corpo e dai vincoli, e perciò costanti nel tempo. La [6] rispecchia molto fedelmente il moto incipiente, mentre il cinemometro registrerà la funzione  $\theta(t)$ , soluzione della [6], durante il brevissimo tempo di caduta (meno di  $1/10$  di secondo).

<sup>(1)</sup> Da noi espressamente fatto costruire al Centro Studi ed Esperienze di di Guidonia.

La difficoltà di dedurre dall'esame del diagramma il valore di  $\bar{\theta}$ , è stata da noi superata profittando, nel caso dei velivoli, dell'entità di alcune grandezze. Sotto queste particolari circostanze, moltiplicando la [6] per  $dt$  e integrando due volte successivamente, si ottiene una equazione nella quale figurano linearmente dei coefficienti, costruiti con  $I f_1 f_2 f_3$ , rispettivamente moltiplicati per alcune espressioni le quali si ottengono facilmente mediante l'integrafo operante due volte sopra  $\theta(t)$  e  $\theta^2(t)$ . Quattro letture, in corrispondenza di quattro tempi, daranno tante equazioni quante ne occorrono per ricavare i suddetti coefficienti e conseguentemente  $I f_1 f_2 f_3$ .

La precisione del metodo richiede una buona lettura delle ordinate del diagramma  $\theta(t)$  al microscopio del comparatore, oppure un un buon maneggio dell'integrafo. La precisione di registrazione sul cinemometro richiede un'esatta indicazione del tempo che abbiamo realizzato mediante apposito vibrografo comandato da un oscillatore a quarzo.

Il metodo è stato controllato saggiando un parallelepipedo rettangolo, omogeneo, molto allungato, appoggiato sopra un piano, per uno spigolo, e ivi impedito di slittare, mentre l'altra estremità era bruscamente abbandonata.

§ 4. - Secondo un altro metodo proposto <sup>(1)</sup> il corpo da esaminare dovrebbe rinchiudersi entro un recipiente stagno poggiato sopra una piattaforma mobile su ralla. La misura delle reazioni provocate dall'inerzia del corpo sulla piattaforma oscillante fornirebbe le caratteristiche inerziali.

Il metodo si presta con difficoltà ad una pratica attuazione, causa la delicatezza delle misure cinetostatiche e l'ingombro di tutto il dispositivo, quando si tratti di esaminare le caratteristiche per i velivoli.

Un altro procedimento escogitato <sup>(2)</sup> ed attuato consisterebbe nel far oscillare intorno ad un asse verticale un cassone entro cui si trovi contenuto e solidale il corpo da saggiare. Misurata la durata di oscillazione di tutto il sistema, nell'interno del cassone si sostituisce il corpo con masse note (di forma geometrica semplice) e spostabili lungo

(1) FERRACANE, « Atti di Guidonia », n. 34, 1940.

(2) Prof. BROGLIO.

un asse orizzontale in modo che il cassone, dopo l'avvenuta sostituzione, possa ancora oscillare con la legge di prima. In tale circostanza, il momento d'inerzia (calcolabile a priori) delle masse rispetto all'asse di oscillazione del cassone è assolutamente eguale al momento d'inerzia del corpo, che si desiderava determinare.

Il metodo si presta convenientemente allo studio di corpi di piccola mole, come modelli di velivoli, per i quali del resto può anche farsi la determinazione, certo, con minore agio che col procedimento del BROGLIO, facendoli oscillare senz'altro entro un cassone riempito di idrogeno o, meglio ancora, vuoto, e applicando poi la [2].

§ 5. - Il secondo metodo, da noi escogitato e che ora descriveremo, è applicabile anche a corpi di grande mole e richiede attrezzature più semplici in confronto degli altri metodi.

Esso, come nel metodo del § 3, presuppone che il corpo da saggiare perda improvvisamente un appoggio, restando fissi gli altri; ma, invece di sfruttare un diagramma, sia pure relativo ad un tempo brevissimo, sfrutta la sola segnalazione della variazione che subisce la pressione degli appoggi che restano fissi. Anzi, non necessita nemmeno registrare l'entità della variazione, ma soltanto l'esistenza di questa, esistenza manifestata dall'improvviso squilibrio di contrappesi posti, in luogo degli appoggi fissi, a mantenere il corpo in equilibrio, oppure manifestata da dispositivi piezoelettrici collocati fra questi appoggi e il corpo. L'assenza di siffatta segnalazione starebbe a significare che le reazioni dinamiche degli appoggi fissi coincidono, nell'attimo in cui si inizia il moto a causa del cedimento dell'appoggio mobile, con le reazioni statiche (anteriori al cedimento).

Un opportuno e determinato spostamento di masse<sup>(1)</sup> permetterà il verificarsi di questa circostanza.

Immaginiamo che dei tre punti  $A B C$ , ai quali si appoggia il corpo in esame, i primi due stiano sopra uno stesso piano orizzontale  $\alpha$  e il terzo a una distanza  $h$  da  $\alpha$ . Sia  $O$  il piede della perpendicolare condotta dal baricentro  $G$  del corpo alla retta  $AB$ ; sia  $\theta$  l'angolo che la verticale di  $O$  diretta verso il basso forma con la posizione variabile di  $OG$ ; sia  $k$  il momento costante degli attriti fra solidi e finalmente si ponga  $l = OG$ .

(1) Cfr. § 6.

L'equazione che governa il moto incipiente, nel tempuscolo sufficiente ad avere appena la segnalazione del disturbo dalla quiete per effetto dell'improvviso cedimento dell'appoggio C, mentre A e B restano fissi sarà:

$$[7] \quad I\ddot{\theta} + Pl \operatorname{sen} \theta + k = 0$$

trascurando, come sembra lecito nel caso in questione, l'azione delle forze dissipative aerodinamiche.

Siano  $P_1^0$   $P_2^0$   $P_3^0$  i carichi su ABC quando tutti e tre i punti giacciono sopra uno stesso piano orizzontale  $\alpha$  ( $h=0$ ) e invece siano  $P_1^{00}$   $P_2^{00}$   $P_3^{00}$  quelli che si hanno quando C è rialzato sul piano  $\alpha$  ( $h \neq 0$ ). La conoscenza di questi sei carichi, ottenibili uno per volta a mezzo di una bascula, permette di dedurre la posizione della proiezione del baricentro sul piano ABC nei due diversi aspetti, rispetto al piano  $\alpha$ , del corpo in esame, e conseguentemente di ricavare la posizione del baricentro rispetto ai tre appoggi ABC.

Saranno quindi conosciuti  $P, l$ , nonchè il valore iniziale di  $\theta$  e i due segmenti AO, OB, che indicheremo rispettivamente con  $a, b$ .

Si assuma come asse  $x$  la retta AB e l'asse  $y$  nel piano orizzontale di AB, e passante per O; si indichi poi con  $I_{xy}$  il momento misto rispetto agli assi  $xy$  e si distinguano con indice o apice zero gli elementi relativi all'assetto  $h=0$ , e con indice o apice doppio zero gli elementi relativi all'assetto  $h \neq 0$ . Si immagini quindi liberato il corpo dai due vincoli di appoggio A e B, e sostituiti ai medesimi le reazioni di appoggio. Il teorema del moto del baricentro e quello della derivata temporale del momento cinetico, il primo relativo alla verticale, il secondo rispetto all'asse  $z$ , forniranno due equazioni per ciascun assetto, le quali, dopo eliminazione dell'accelerazione angolare mediante la [7] e il congruaggio delle reazioni dinamiche a quelle statiche esercitate su A e B, diventano nell'istante iniziale:

$$\frac{Pl}{gI} \operatorname{sen} \theta_0 (Pl \operatorname{sen} \theta_0 + k) = -P_1^0 - P_2^0 + P$$

$$\frac{I_{xy}^0}{I} (Pl \operatorname{sen} \theta_0 + k) = P_1^0 a - P_2^0 b,$$

e due analoghe per il doppio indice o apice zero.

Si ricava:

$$I_{xy}^0 = \frac{P_1^0 a - P_2^0 b}{P_3^0} \cdot \frac{Pl}{g} \operatorname{sen} \theta_0; \quad I = \frac{Pl \operatorname{sen} \theta_0}{P_3 g} (Pl \operatorname{sen} \theta_0 + k)$$

e l'analogia per  $I_{xy}^{00}$  e ancora per I. Eliminando  $k$  dalle sue espressioni di I si ottiene finalmente:

$$I = \frac{P^2 l^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta_0 - \operatorname{sen} \theta_{00}}{\frac{P_3^0}{\operatorname{sen} \theta_0} - \frac{P_3^{00}}{\operatorname{sen} \theta_{00}}}$$

Essendo poi:

$$I_{xy}^{00} = I_{xy}^0 \cos(\theta^{00} - \theta^0) - I_{xz}^0 \operatorname{sen}(\theta^{00} - \theta^0),$$

si deducono  $I_{xz}^0$  e così  $I_{xz}^{00}$ .

Scambiando gli appoggi, cioè facendo cadere B, anzichè C, e iterando quanto si è fatto per C, si ricavano tutti gli elementi occorrenti alla determinazione dell'ellissoide centrale d'inerzia.

§ 6. - Gli schemi considerati finora prescindono dalla elasticità degli appoggi e del corpo. Eppure l'elasticità interviene, tanto nel caso che il corpo si faccia oscillare, quanto nel caso che si faccia cadere un appoggio; soltanto se ne può ridurre l'effetto modificando la rigidità dei vari organi.

Al fine di stabilire un rapido raffronto tra l'ipotesi della rigidità e quella dell'elasticità, ci serviremo di uno schema molto semplice ed altrettanto istruttivo.

Consideriamo dapprima un'asta rigida pesante OB, di lunghezza L, cernierata in O (vincolo fisso) ed appoggiata in B (vincolo cedevole) con O e B situati sulla stessa orizzontale. Indicata con M la massa dell'asta e con  $x_0$  la distanza del suo baricentro da O, la reazione in O sarà:

$$[8] \quad F = Mg \frac{L - x_0}{L}$$

D'altra parte, se improvvisamente cede l'appoggio B, l'asta ruota intorno a O di un angolo  $\theta$ , contato a partire dall'orizzontale OB, tale che se I è il momento inerziale rispetto a O, risulterà inizialmente:

$$[9] \quad I\ddot{\theta}_0 = Mg x_0 ,$$

mentre la reazione dinamica in O sarà inizialmente:

$$[10] \quad S_0 = Mg - Mx_0\ddot{\theta}_0 ,$$

ovvero, a causa della [9]:

$$[11] \quad S_0 = Mg - M^2 x_0^2 \frac{g}{I} .$$

Da quest'ultima equazione, quando, mediante opportuni spostamenti di masse (note e di forma geometrica semplice), si riesca a soddisfare la condizione:

$$[12] \quad F = S_0 ,$$

si ricava dal congruaggio dei secondi membri di [8] e [11]:

$$[13] \quad I = ML x_0 .$$

Ad esempio, per un'asta sottile, omogenea, di massa  $m_1$  e lunghezza L, sulla quale si sposti un cursore puntiforme di massa  $m_2$ , l'applicabilità della [13] richiede che la distanza del cursore dalla cerniera sia:

$$\frac{1}{2} L \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{m_1}{m_2}} \right) ,$$

e con ciò risulterà naturalmente  $F = S_0$ .

§ 7. - Per esaminare ora l'effetto dell'elasticità e stabilire il paragone con quanto abbiamo trovato nei riguardi dell'asta rigida OB, rivolgiamo la nostra attenzione ad un sistema di due aste rigide sot-



tili, OA, AB senza massa, cernierate fra loro in A e di lunghezze rispettive  $l_1, l_2$ . Sulla prima sia rigidamente connessa una massa puntiforme  $m_1$  alla distanza  $a_1$  da O, sull'altra una massa puntiforme  $m_2$  alla distanza  $a_2$  da A. Il punto O sia fisso (cerniera fissa); il punto B, situato inizialmente sulla stessa orizzontale di O, sia appoggiato. Una opportuna molla in A, contrasti il ripiegamento del sistema delle due aste, che sarebbe provocato dall'azione dei pesi agenti sulle masse  $m_1, m_2$ .

Supponiamo dapprima il sistema in equilibrio, e quindi l'appoggio A fermo, mentre le due aste formano tra loro un angolo  $\widehat{OAB} = \pi - \alpha_0$ , con  $\alpha_0$  molto piccola se la rigidità della molla è sufficientemente grande.

Il momento reattivo della molla, quando l'appoggio in A è senza attrito, e si ha equilibrio, è dato da:

$$[14] \quad R_{\alpha_0} = k,$$

dove, come si trova facilmente:

$$k = -\frac{g}{L} (m_2 a_2 l_1 - m_1 a_1 l_2 - m_2 l_1 l_2)$$

$$(L = l_1 + l_2)$$

Immaginiamo ora che, venuto meno l'appoggio B, la spezzata, libera da questo vincolo, ruoti intorno alla cerniera fissa O, mentre AB ruota intorno ad A. Indicheremo con  $\theta$  l'angolo che la congiungente OB forma con l'orizzontale, e con  $\pi - \alpha$  l'angolo variabile  $\widehat{OAB}$ .

Presi i momenti delle forze perdute, ora rispetto ad A ed ora rispetto a O, tenendo conto dei vincoli, otterremo:

[15]

$$-R\alpha + m_2 a_2 g \cos(\theta + \alpha) + m_2 [-\ddot{\theta}(a_2 l_1 \cos \alpha + a_2^2) - a_2^2 \ddot{\alpha} - a_2 l_1 \dot{\theta}^2 \sin \alpha] = 0$$

$$m_1 g a_1 \cos \theta + m_2 g (l_1 \cos \theta + a_2 \cos(\theta + \alpha)) - m_1 a_1^2 \ddot{\theta} - m_2 (l_1^2 + a_2^2 + 2a_2 l_1 \cos \alpha) \ddot{\theta} -$$

$$- m_2 (l_1 \cos \alpha + a_2) a_2 \ddot{\alpha} + m_2 a_2 l_1 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + 2m_2 a_2 l_1 \sin \alpha \cdot \dot{\theta} \dot{\alpha} = 0$$

L'istantaneità della cessazione del vincolo è un'astrazione; effettivamente il cedimento completo dell'appoggio assorbe un tempuscolo  $\tau$  durante il quale  $\theta$  ed  $\alpha$  variano con legge prescritta dal modo col

quale il cedimento si produce (sgancio, scapolamento di un appoggio il quale praticamente non può terminare con uno spigolo vivo, ecc.).

Possiamo poi sempre immaginare che, durante il cedimento, di durata brevissima, anche  $\dot{\theta}$  ed  $\dot{\alpha}$ , grandezze le quali partono da valori nulli, si conservino piccole; sicchè, al momento in cui, unico vincolo rimasto sia la cerniera, i valori iniziali della nuova specie di movimento che sta per iniziarsi, saranno  $\alpha_* \theta_* \dot{\alpha}_* \dot{\theta}_*$ , tutti sufficientemente piccoli. Per precisare supporremo:

$$\begin{aligned}
 [16] \quad & (\alpha_*, \alpha_0, \theta_*, \theta_0) < \alpha_1 \\
 & (\dot{\alpha}_*, \dot{\theta}_*) < \sqrt{H \alpha_1} \quad (H \text{ limitata})
 \end{aligned}$$

dove  $\alpha_1$  è una quantità trascurabile rispetto alla sua radice quadrata.

Anzi, a causa della piccolezza di  $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$  durante il prescritto moto di cedimento, e a causa della breve durata di questo, potremo ritenere senz'altro, tenuto conto che il cedimento si inizia con  $\alpha = \alpha_0, \theta = 0$ , che sia:

$$[16 \text{ bis}] \quad \alpha_* = \alpha_0, \theta_* = 0,$$

a meno di quantità del secondo ordine.

L'integrale delle forze vive, finchè  $\alpha$  e  $\theta$  si conservano piccole, sarà:

$$[17] \quad \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2 \dot{\alpha}^2 - M g x_0 \theta - m_2 g a_2 \alpha - \frac{1}{2} R \alpha^2 = \varepsilon$$

essendo  $I$  il momento d'inerzia del sistema  $OAB$  nella configurazione in cui  $OA$  e  $OB$  sono per diritto,  $x_0$  la distanza del baricentro da  $O$ , nella stessa configurazione, ed  $\varepsilon$  una costante.

L'equazione dei momenti:

$$\begin{aligned}
 [18] \quad & \frac{d}{dt} \left\{ \left[ m_2 (l_1^2 + a_2^2 + 2 a_2 l_1 \cos \alpha) + m_1 a_1^2 \right] \dot{\theta} + m_2 a_2 (l_1 \cos \alpha + a_2) \dot{\alpha} \right\} = \\
 & = m_1 g a_1 \cos \theta + m_2 g (l_1 \cos \theta + a_2 \cos (\theta + \alpha)),
 \end{aligned}$$

a sua volta nell'ipotesi fatta circa  $\alpha$  e  $\theta$ , fornisce mediante integra-

zione rispetto al tempo, a partire dall'istante  $t=0$  relativo alla completa cessazione del vincolo B:

$$[19] \quad I\dot{\theta} + m_2 a_2 (l_1 + a_2) \dot{\alpha} = M g x_0 t + \eta,$$

con  $\eta$  costante.

Le tre equazioni, dalla [17] e [19], vigono dunque per tutto il tempo in cui  $\alpha$  e  $\theta$  sono così piccole che se ne possono trascurare i termini del secondo ordine, governando il moto di caduta del sistema OAB, vincolato soltanto in O.

Dalle due equazioni [17] e [19] si ricavano  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta}$  in funzione del tempo e di  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon$ ; tanto  $\dot{\alpha}$  che  $\dot{\theta}$  risultano del tipo:

$$[21] \quad a t + b \eta + [(m t + n \eta)^2 + p \varepsilon + q \theta + r \alpha + h R \alpha^2]^{\frac{1}{2}}$$

dove  $a b m n p q r h$  sono costanti il cui valore è limitato e il cui significato si rileva dalla effettiva risoluzione delle due suddette equazioni, e dove il momento  $R \alpha$  è da considerare, in analogia alla [14], limitato.

Si tenga ora conto delle espressioni in cui si esplicitano le costanti di integrazione  $\varepsilon$ ,  $\eta$  le quali figurano nella [17] e [19].

In virtù della [16] risulterà:

$$\varepsilon < \left[ \frac{1}{2} (I + m_2 a_2^2) + m_2 g a_2 + \frac{1}{2} R \alpha_1 \right] \alpha_1 = P \alpha_1$$

dove, potendo ritenersi il momento  $R \alpha_1$  grandezza limitata, altrettanto potrà dirsi della costante P.

Inoltre:

$$\eta < [I + m_2 a_2 (l_1 + a_2)] \sqrt{H \alpha_1} = \sqrt{Q \alpha_1}, \quad (Q \text{ limitata})$$

Pertanto se si assume:

$$[22] \quad t \ll T, \text{ dove } T = \frac{\sqrt{Q \alpha_1}}{M g x_0},$$

avremo dalla [21] che, almeno durante un tempo T siffatto,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta}$  sono limitati come segue:

$$\dot{\alpha}, \dot{\theta} < \sqrt{S \alpha_1}, \quad (S \text{ limitata})$$

e pertanto sarà lecito trascurare, nelle [15], i termini in

$$\alpha \dot{\alpha}^2, \alpha \dot{\theta}^2, \alpha \dot{\alpha} \dot{\theta}, \alpha^2, \theta^2,$$

i quali vi figurano, quando, alle funzioni trigonometriche, si sostituiscono i rispettivi sviluppi in serie di potenze.

Così le [15] diverranno:

$$[23] \quad -Rz + m_2 a_2 g - m_2 a_2 [(l_1 + a_2) \ddot{\theta} + a_2 \ddot{\alpha}] = 0$$

$$[24] \quad I \ddot{\theta} = M g x_0 - m_2 (l_1 + a_2) a_2 \ddot{\alpha}$$

le quali, a differenza delle [17] e [19], richiedenti soltanto  $z$  e  $\theta$  piccoli, invece vivono sotto la specifica condizione [22] circa la limitazione del tempo.

D'altra parte, la reazione dinamica  $S$  che si esercita sul punto  $O$ , è data, sempre che  $\alpha$  e  $\theta$  siano piccoli, da:

$$[25] \quad S = M g - M x_0 \ddot{\theta} - m_2 a_2 \ddot{\alpha}.$$

Ora la [24] e la [25] non differiscono rispettivamente dalla [9] e [10] che per l'aggiunta dei termini in  $\ddot{\alpha}$  e la sostituzione di  $\ddot{\theta}$  a  $\ddot{\theta}_0$ .

Ne consegue che, eliminando  $\ddot{\theta}$  tra [24] e [25] e congruando  $F$  con  $S$ , si otterrà invece della [13], la seguente:

$$I = M x_0 L + \sigma \ddot{\alpha},$$

dove:

$$\sigma = m_2 a_2 \frac{L}{g} \left( \frac{I}{M x_0} - l_1 a_2 \right)$$

§ 8. - Si tratta ora di valutare il termine  $\sigma \ddot{\alpha}$  che rappresenta lo scarto da quel valore di  $I$  che si presenta nel caso della rigidità. A tal fine consideriamo l'equazione in  $\alpha$  che si deduce da [23] e [24] dopo eliminazione di  $\ddot{\theta}$ . Pongasi per semplicità:

$$[26] \quad \omega^2 = R I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2)$$

e si tenga presente che, essendo la differenza  $\alpha_* - \alpha_0$  trascurabile rispetto ad  $\alpha_0$  in base alla [16 bis], si può scrivere:

$$\alpha_* \omega^2 = R \alpha_0 I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2)$$

ovvero, a norma della [14]:

$$[27] \quad \alpha_* \omega^2 = k I : (m_1 m_2 a_1^2 a_2^2) = v, \quad (v \text{ quantità limitata}).$$

Pongasi inoltre:

$$\frac{g}{a_1 a_2} (l_1 + a_2 - a_1) = \lambda,$$

e l'accennata eliminazione di  $\ddot{\theta}$  fornirà:

$$[28] \quad \ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha - \lambda.$$

Attese le condizioni iniziali, avremo quindi:

$$[29] \quad \alpha = -\frac{\lambda}{\omega^2} + \left( \alpha_* + \frac{\lambda}{\omega^2} \right) \frac{\cos(\omega t + \beta)}{\cos \beta}.$$

Lo scarto  $\sigma \ddot{\alpha}$  si riduce quindi, in base alla [27], a:

$$\sigma \ddot{\alpha} = -\frac{\sigma}{\cos \beta} (v + \lambda) \cos(\omega t + \beta);$$

e quindi oscillerà tra i limiti  $\pm \sigma(v + \lambda) : \cos \beta$ , i quali comprendono un intervallo tutt'altro che evanescente.

Per altro la registrazione di S, anzichè con mezzi piezoelettrici, può essere fatta con mezzi meccanici. Ad esempio si può giudicare se S è o no diverso da F, dalla mobilità o meno di un contrappeso il quale, mediante una carrucola di rimando, tiri un filo verticale attaccato in O, quando l'azione della cerniera sia sostituita dalla tensione del filo e simultaneamente dall'appoggio del punto O contro una parete verticale perfettamente levigata.

In tal caso, attesa la grande frequenza con cui oscilla  $S$ , sarà il valore medio di  $S$  che influirà sul moto del contrappeso. Avremo intanto dalla [25], quando si assuma un tempo di registrazione  $T$  dato dalla [22]:

$$S_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = Mg - \frac{Mx_0}{T} \int_0^T \ddot{\theta} dt - \frac{m_2 a_2}{T} \int_0^T \ddot{x} dt ;$$

ed eliminando  $\ddot{\theta}$  a mezzo della [24]:

$$[30] \quad S_{\text{medio}} = Mg - \frac{M^2 x_0^2 g}{I} + \frac{m_2 a_2}{I} \left[ (l_1 + a_2) x_0 M - I \right] \frac{\dot{\alpha}_r - \dot{\alpha}_*}{T} .$$

Cioè  $S_{\text{medio}}$  differisce dal valore iniziale  $S_0$ , fornito dalla [11] per il corpo irrigidito, per il termine contenente il fattore:

$$[31] \quad \frac{\dot{\alpha}_r - \dot{\alpha}_*}{T} .$$

Ora ricordiamo che abbiamo scelto la grandezza  $\alpha_1$  con la condizione di essere maggiore di  $\alpha_0$  e di essere trascurabile rispetto alla sua radice quadrata.

Ebbene se si assume  $\alpha_1$  in modo che sia:

$$[32] \quad \alpha_1 = h^2 \omega^{2(n-1)}$$

con  $h^2$  limitato ed  $n$  tale che  $\omega^{-n}$  sia trascurabile rispetto all'unità e inoltre tale che:

$$0 < n < 1, \quad (n \neq 0, n \neq 1)$$

risulterà certamente, per una rigidità molto grande della molla,  $\alpha_1 > \alpha_0$ , essendo per la [27]:

$$\alpha_0 = v \omega^{-2};$$

inoltre risulterà anche  $\alpha_1$  trascurabile rispetto a  $\sqrt{\alpha_1}$ .

Con l'assunzione [32] il tempo di registrazione  $T$ , dato dalla [22], sarà piccolo, ma tuttavia tale da potersi ritenere grande rispetto alla frequenza di  $\alpha$ , perchè:

$$T : \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{Q}}{2\pi M g x_0} h \omega^2$$

D'altra parte, dalla [29] si ha:

$$\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}_* = - \frac{\nu + \lambda}{\omega} \frac{1}{\cos \beta} [\text{sen}(\omega t + \beta) - \text{sen} \beta],$$

quantità dell'ordine di  $\omega^{-1}$ .

Pertanto il fattore [31] che figura nella [30] sarà, per la [22], dell'ordine di:

$$\omega^{-1} : \omega^{n-1} = \omega^{-n}$$

e quindi sarà quantità piccola.

Si conclude che  $S_{\text{medio}}$  differisce dal valore  $S_0$  per quantità dell'ordine di  $\omega^{-n}$  e, in conseguenza, che il momento d'inerzia  $I$  del corpo elastico differisce dal valore  $M x_0 L$ , trovato per il corpo irrigidito, per meno di quantità dello stesso ordine. Tale conclusione vale sotto l'ipotesi che la durata di registrazione sia invece dell'ordine di  $\omega^{n-1}$ , condizione questa, che del resto è molto lata e dipendente massimamente dalla grandezza che si sceglie per la rigidità della molla.

È vero che ci siamo riferiti ad uno schema quanto mai semplice ed astratto; esso è tuttavia del tipo degli schemi che si sogliono fare nella teoria delle vibrazioni e che pure, malgrado la loro distanza dalla realtà che intendono rappresentare, riescono a dare un'idea abbastanza precisa dell'andamento del fenomeno vibratorio.

Infine rileviamo che, praticamente, con mezzi meccanici quali quelli da noi accennati, la registrazione viene a farsi, non solo durante il tempo  $T$ , ma anche durante il tempo  $\tau$  che dura lo sgancio, sicchè  $S_{\text{medio}}$  si riferisce in sostanza al tempo  $\tau + T$ ; ma nulla vieta di pensare, in adesione anche alle possibilità costruttive, che  $\tau$  sia trascura-

bile rispetto a T, ovvero che la registrazione si inizi a sgancio avvenuto.

In tal modo  $S_{\text{medio}}$ , e quindi il momento d'inerzia I, può essere valutato con mezzi semplici, quali una bilancia (per l'appoggio fisso) e un dispositivo di sgancio (per l'appoggio mobile), purchè si provveda a spostare opportunamente masse note, al fine di realizzare la condizione di eguaglianza tra pressione statica e pressione dinamica.



## IL TEOREMA DI BÉZOUT-SEVERI ED I SISTEMI ALGEBRICI $\infty^d$ DI $S_k$ DELL' $S_r$ (\*)

GIORGIO APRILE (\*)

SUMMARY. — Auctor, attentis Severi notionibus eiusque doctrina, determinat minimam basim pro universis algebraicis systematibus certae dimensionis, quae spatiis linearibus  $S_k$  in quodam  $S_r$  constant.

È ormai ben noto in che cosa consista, secondo SEVERI, il problema della base sopra una varietà algebrica  $M_r$ . Tenuto presente il concetto di equivalenza algebrica (nel campo virtuale) fra varietà (pure) di dimensione  $d$  ( $= 1, 2, \dots, R-1$ ) tracciate su  $M_r$ , si tratta di trovare su  $M_r$  certe varietà a  $d$  dimensioni  $V^{(1)}, \dots, V^{(e)}$ , formanti base: tali cioè che, presa un'altra qualunque varietà a  $d$  dimensioni  $V$ , esistan convenienti interi  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_e$  in guisa che:

$$\lambda V + \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_e V^{(e)} \equiv 0,$$

ove  $\equiv$  denota la relazione d'equivalenza algebrica.

Si dice che la base è *minima*, quando nella precedente è  $\lambda=1$ .

In un lavoro recente (2) SEVERI ha ottenuto la soluzione esplicita del problema detto, sopra la grassmanniana  $M_r$  [ $R=(r-k)(k+1)$ ], che rappresenta gli  $S_k$  dello  $S_r$ .

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) L'argomento di questo lavoro è stato indicato da SEVERI nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Cfr. *Problemi, risultati e discussioni* « Rend. di Matematica della R. Università di Roma e del R. Ist. Naz. di Alta Matematica » (1940) fasc. 2-3, pag. 249, n. 32. Vedi inoltre SEVERI, *I fondamenti della geometria numerativa* « Annali di Matematica » (4), 19, 1940-XVIII, n. 35, pag. 197.

(2) Cfr. SEVERI, Memoria ora citata, nn. 32-35.

Egli deduce la soluzione da quello che può chiamarsi il teorema di BÉZOUT-SEVERI sulla  $M_R$ , vale a dire il teorema che assegna il numero virtuale delle intersezioni di due varietà di dimensioni complementari tracciate su  $M_R$ . Spiegheremo brevemente di che cosa si tratta.

Ricordiamo che col simbolo  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ , ove  $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r$ , s'indica una *forma fondamentale* di SCHUBERT, cioè la totalità  $\infty^d$  degli  $S_k$  dello  $S_r$  che giacciono in un dato  $S_{a_k}$ , hanno con un dato  $S_{a_{k-1}}$  di  $S_{a_k}$  un  $S_{k-1}$  comune, con un dato  $S_{a_{k-2}}$  di  $S_{a_{k-1}}$  un  $S_{k-2}$  comune, ..., con un dato  $S_{a_0}$  di  $S_{a_1}$  un punto comune.

Entro  $M_R$  una forma  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$  è rappresentata da una varietà di dimensione

$$d = \sum_{i=0}^k a_i - \frac{1}{2} k(k+1).$$

Sia  $\Gamma_d$  un sistema algebrico  $\infty^d$  di  $S_k$  dello  $S_r$  ( $d=1, \dots, R-1$ ). Indichiamo con  $c_\delta$  ( $\delta=R-d$ ) la condizione algebrica di dimensione  $\delta$  imposta ad un  $S_k$  perchè questo appartenga a  $\Gamma$ , e con  $(a_0, \dots, a_k)$  la condizione di dimensione  $\delta$  imposta ad un  $S_k$  perchè appartenga alla forma  $[a_0, \dots, a_k]$  di dimensione  $d$ .

Ebbene, il teorema di BÉZOUT-SEVERI dà immediatamente, come dimostra SEVERI, la soluzione del problema delle caratteristiche concernenti le condizioni algebriche relative agli  $S_k$  di  $S_r$  <sup>(1)</sup> cioè l'eguaglianza tra condizioni:

$$[1] \quad c_\delta = \sum \nu_{a_0 \dots a_k} (a_0, \dots, a_k)$$

dove il sommatorio è esteso in corrispondenza a tutte le condizioni  $(a_0, \dots, a_k)$  di dimensioni  $\delta$ , ed i coefficienti  $\nu_{a_0 \dots a_k}$  sono *caratteri* del

(1) La prima soluzione del problema, ottenuta in maniera non del tutto rigorosa, è dovuta, come si sa, a SCHUBERT, *Lösung des Charakteristiken-Problems*, ecc. « Mittheilungen der Math. Gesel. in Hamburg », t. I, 1886, pag. 134. SEVERI diede, per una via rigorosa e nuova, la soluzione del problema stesso nella Nota: *Le coincidenze d'una serie algebrica  $\infty^{(k+1)(r-k)}$  di coppie di spazi a  $k$  dimensioni immersi nello spazio ad  $r$  dimensioni* « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (5), 9, 1900, pp. 321-326. Il procedimento cui si allude nel testo è quello che trovasi in SEVERI, Memoria cit. in nota 1 a pag. 171, pagg. 191-192.

sistema  $\Gamma$ , che esprimono il numero (finito) degli  $S_k$  di  $\Gamma$  appartenenti ad una generica forma  $[r - a_k, \dots, r - a_0]$ , di dimensione  $R - d$ , *duale* della forma  $[a_0, \dots, a_k]$  <sup>(1)</sup>.

D'altronde la [1] equivale alla relazione d'equivalenza aritmetica

$$[2] \quad \Gamma \equiv \sum v_{a_0} \dots v_{a_k} [a_0, \dots, a_k],$$

da cui discende, con SEVERT, l'equivalenza algebrica

$$[3] \quad \varepsilon \Gamma \equiv \sum \varepsilon v_{a_0} \dots v_{a_k} [a_0 \dots a_k]$$

con  $\varepsilon$  intero conveniente.

Nulla può dirsi a priori circa il valore di  $\varepsilon$ , sulla base del ragionamento ricordato, di carattere eminentemente numerativo: onde dalla [3] risulta soltanto che le forme di SCHUBERT, di dimensione  $d$ , costituiscono una base dei sistemi algebrici di  $S_k$  di dimensione  $d$ , ma non necessariamente una *base minima* (di fronte alle equivalenze algebriche).

Per dimostrare che, invece, così è di fatto, SEVERT stesso ha accennato <sup>(2)</sup> (nel caso  $r = 3$ ), ad un altro procedimento col quale può giungersi per via più elementare e diretta alla determinazione della base (e, automaticamente, della base minima) sopra la varietà grassmanniana. Si tratta in sostanza di costruire in  $S_r$  convenienti omo-

(1) I caratteri  $v_{a_0} \dots v_{a_k}$  del sistema  $\Gamma$  si riducono, per il caso dei sistemi di rette dell' $S_r$ , a quelli che il MARLETTA chiama *ordine* e *classi*. Cfr. *Preliminari per la teoria degli  $(r-1)$ -complessi di rette dell' $S_r$*  « Circolo Matematico, Catania », 1928-VI. E difatti per  $k=1$  il carattere  $v_{a_0 a_1}$  (dove  $a_0 + a_1 = d + 1 = 2r - \delta - 1$ ) è dato dal numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[r - a_1, r - a_0]$ , di dimensione  $\delta$ ; per cui:

a) per  $a_1 = r$ , e quindi  $a_0 = d - r + 1$ , il carattere  $v_{a_0 a_1}$  diviene il numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[0, 2r - d - 1]$ , numero che coincide con quello che il MARLETTA chiama *ordine* del sistema; e cioè con l'ordine delle varietà (di punti)  $V_{d-r+2}$  generata dalle  $\infty^{d-r+1}$  rette di  $\Gamma$  passanti per un generico punto dell'ambiente  $S_r$ .

b) per  $a_1 = r - i$  (e quindi  $a_0 = d - r + i + 1$ ;  $i \geq 1$ ) il carattere  $v_{a_0 a_1}$  vien dato dal numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[i, 2r - d - i - 1]$ , numero che coincide con quello che il MARLETTA chiama *esima classe* di  $\Gamma$ ; e cioè con l'ordine della varietà  $V_{2r-d-2i-1}$  generata dalle  $\infty^{2r-d-2i-2}$  rette di  $\Gamma$  esistenti in un generico spazio  $S_{2r-d-i-1}$ .

(2) Cfr. la Memoria citata in nota 1 a pag. 171, pag. 197.

logie variabili, mediante le quali sia possibile di ridurre, con una variazione continua, ogni sistema algebrico di  $S_k$  ad una combinazione lineare di forme di SCHUBERT.

In questo lavoro io sviluppo appunto tal procedimento per  $r$  qualunque, ritrovando così il risultato di SEVERI e la sua maggiore precisazione, espressa dalla [3] stessa, ove si ponga  $\varepsilon = 1$ .

1. OSSERVAZIONE PRELIMINARE. — Avvertiamo che, allo scopo di stabilire la [3] con  $\varepsilon = 1$ , è sufficiente di dimostrare che ogni sistema  $\Gamma$  può ridursi per continuità — come si è accennato — ad una somma di forme di SCHUBERT  $[a_0, \dots, a_k]$  di dimensione  $d$ , ciascuna contata un certo numero  $\lambda_{a_0 \dots a_k}$  di volte (eventualmente anche zero volte), e quindi che risulta:

$$[4] \quad \Gamma \equiv \sum \lambda_{a_0 \dots a_k} [a_0, \dots, a_k]$$

Infatti, una volta stabilita la [4], si vede subito che i numeri  $\lambda_{a_0 \dots a_k}$  risultano automaticamente coincidenti con i caratteri  $\nu_{a_0 \dots a_k}$  di  $\Gamma$ , dei quali dianzi si è ricordato il significato.

Basta all'uopo intersecare i due membri della [4] con una forma di SCHUBERT  $[r-b_k, \dots, r-b_0]$  di dimensione  $R-d$ , in posizione generica, ottenendosi:

$$[\Gamma \cdot [r-b_k, \dots, r-b_0]] = \sum \lambda_{a_0 \dots a_k} [[a_0, \dots, a_k] [r-b_k, \dots, r-b_0]]$$

Tenuto conto che l'intersezione  $[[a_0, \dots, a_k] [r-b_k, \dots, r-b_0]]$  vale 1 per  $a_0=b_0, \dots, a_k=b_k$  (cioè quando  $[a_0, \dots, a_k], [r-b_k, \dots, r-b_0]$  sono forme coniugate), e zero in ogni altro caso (1), si trae:

$$[\Gamma \cdot [r-b_k, \dots, r-b_0]] = \lambda_{b_0 \dots b_k}$$

cioè:

$$\nu_{b_0 \dots b_k} = \lambda_{b_0 \dots b_k} .$$

(1) Cfr. la Memoria citata in nota 1 a pag. 171, pag. 194.

Pertanto nel seguito tralascieremo di precisare di volta in volta la molteplicità con la quale deve contarsi ciascuna forma di SCHUBERT, nel gruppo delle forme a cui ridurremo per variazione continua il dato sistema  $\Gamma$ , poichè sappiamo ormai che in ogni caso questa molteplicità dovrà essere data, in corrispondenza alla forma  $[a_0, \dots, a_k]$  dal carattere  $v_{a_0 \dots a_k}$  del sistema  $\Gamma$  considerato.

2. GENERALITÀ SULLA VARIAZIONE CONTINUA DEI SISTEMI  $\Gamma$ , MEDIANTE SISTEMI CONTINUI D'OMOGRAFIE. — Fissati un punto  $O_1$  ed un iperpiano  $\Pi_1$  di  $S_r$  in posizione generica fra loro e rispetto a  $\Gamma_a$ , si consideri l'omologia di centro  $O_1$  ed iperpiano  $\Pi_1$  individuata dal birapporto  $(O_1 P A A') = \sigma$ , essendo  $A, A'$  punti omologhi e  $P$  il punto in cui la retta  $O_1 A A'$  incontra  $\Pi_1$ .

Se si fa tendere  $\sigma$  a zero, l'omologia varia tendendo a degenerare e a ridursi ad una proiezione da  $O_1$  su  $\Pi_1$ .

Basta difatti osservare che, se  $A, A'$  sono due punti corrispondenti nell'omologia variabile, ed  $A$  varia con  $\sigma$  tendendo ad una posizione limite  $\bar{A}$ , diversa da  $O_1$  per  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $A'$  tende al punto  $\bar{A}'$  coincidente con l'intersezione della retta  $O_1 \bar{A}$  con  $\Pi_1$ .

Inoltre, se  $A'$  varia con  $\sigma$  tendendo ad una posizione limite  $\bar{A}'$  fuori di  $\Pi_1$ ,  $A$  tende ad  $O_1$ .

Trasformiamo il sistema  $\Gamma$  con le omologie del sistema continuo considerato; si tratta di determinare a cosa tende il sistema trasformato quando  $\sigma \rightarrow 0$ .

a) Consideriamo anzitutto il caso di sistemi  $\Gamma_a$  di  $S_k$  con  $d \geq r - k$ ; e si indichi con  $\Gamma^*$  il sistema  $\infty^{d-(r-k)}$  degli  $S_{k-1}$  traccia, sull'iperpiano  $\Pi_1$ , degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ .

Dico che un  $S_k$  generico appoggiato in un  $S_{k-1}$  qualunque di  $\Gamma^*$  è posizione limite di qualche  $S_k$  del sistema trasformato per  $\sigma \rightarrow 0$ .

Infatti, sia  $\bar{A}' S_{k-1}$  un tal  $S_{k-1}$ , con  $\bar{A}'$  fuori di  $\Pi_1$ . Il punto  $A'$ , variabile con  $\sigma$ , tenda ad  $\bar{A}'$  per  $\sigma \rightarrow 0$ . Gli  $S_k$  del sistema trasformato uscenti da  $A'$  sono i corrispondenti degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti dal punto  $A$ , omologo di  $A'$  nella omologia inversa; sicchè se  $A S_{k-1}^{(1)}$  è un  $S_k$  di  $\Gamma$  ed  $S_{k-1}^{(1)}$  ne è l'intersezione con  $\Pi_1$ , sarà  $A' S_{k-1}^{(1)}$  il suo trasformato, essendo  $\Pi_1$  luogo di punti uniti per l'omologia che si considera.

Ne segue che per  $\sigma \rightarrow 0$ ;  $A' \rightarrow \bar{A}'$ , gli  $S_k$  di  $\Gamma$  per  $A$  tendono agli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ , e gli  $S_k$  corrispondenti nella data omologia tendono agli  $S_k$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ , cioè gli  $S_k$  *limiti* che così si ottengono generano il sistema, che indicheremo con  $\Gamma'$ , di tutti e soli gli  $S_k$  dell' $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  anzidetti.

b) D'altra parte gli ulteriori  $S_k$  limiti, dovuti al sistema continuo di omologie considerate, risultano tutti e soli quelli provenienti da  $S_k = A S_{k-1}^{(1)}$  (essendo  $S_{k-1}^{(1)}$  di  $\Pi_1$ ) di  $\Gamma$ , con  $A$  funzione di  $\sigma$  e per  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \bar{A} \neq O_1$ .

Ma si è sopra osservato che in tal caso  $A'$  tende al punto  $\bar{A}'$  coincidente con l'intersezione  $\bar{P}$  della retta  $O_1 \bar{A}$  con  $\Pi_1$ ; per cui gli ulteriori  $S_k$  limiti sono tutti e soli gli  $S_k$  proiezioni, su  $\Pi_1$  dal punto  $O_1$ , di quelli del dato sistema  $\Gamma$ .

c) Nell'ipotesi di  $d < r - k$  vengono, ovviamente, a mancare gli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da un generico punto dell' $S_r$  ambiente, onde nel sistema trasformato (a mezzo della variazione continua dianzi applicata) verranno a mancare gli  $S_k$  limiti ottenuti in a).

Esistono invece gli  $S_k$  limiti considerati in b), e soltanto questi, cioè il dato sistema  $\Gamma_d$  viene, in tal caso, trasformato nel *solo* sistema di questi ultimi  $S_k$  limiti; sistema che indicheremo con  $\Gamma_d^{[1]}$  e che coincide, come si è sopra accennato, con la proiezione del dato  $\Gamma$  su  $\Pi_1$  da  $O_1$ .

Se è  $d < r - k - 1$ , si applichi al sistema  $\Gamma_d^{[1]}$ , dianzi ottenuto, la solita variazione continua (con procedimento analogo a quello tenuto per  $\Gamma_d$ ); si ottiene in tal modo un nuovo sistema  $\Gamma_d^{[2]}$ , proiezione di  $\Gamma_d^{[1]}$  su un  $S_{r-2}$ . Così procedendo si possono ottenere le successive proiezioni  $\Gamma_d^{[3]}$ , ...,  $\Gamma_d^{[s]}$ , rispettivamente su  $S_{r-3}$ , ...,  $S_{r-s}$  dell' $S_r$  ambiente. Ed è chiaro che si può sempre pervenire, in tal modo, ad un sistema  $\Gamma_d^{[s]}$ , appartenente ad uno spazio di dimensione  $r' = r - s$ , per il quale vale la relazione  $d = r' - k = r - k - s$ .

d) Si osservi infine che gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$  sono  $\infty^{d-(r-k)}$ , e quindi un generico  $S_k$  dell'iperpiano  $\Pi_1$  ne contiene  $\infty^{d-(r-k)}$ .

Ne segue che, per  $d \geq r - k$ , anche gli  $S_k$  limiti, considerati in b) appartengono al sistema  $\Gamma'$  degli  $S_k$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ ; per cui in tal caso il sistema  $\Gamma$  viene trasformato nel solo sistema  $\Gamma'$ , cioè nel sistema di tutti e soli gli  $S_k$  dell' $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ .

3. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI SUL PROBLEMA DELLA BASE PER I SISTEMI  $\Gamma$ .

a) Accenneremo anzitutto al caso di  $k=1$ , cioè considereremo i sistemi  $\Gamma_d$  di rette dell' $S_r$ , di dimensione  $d$ .

Il sistema  $\Gamma^*$ , sopra considerato, è dato in questo caso da una varietà  $V_{d-r+1}$  di punti (traccia su  $\Pi_1$  dell'ipercono delle rette di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ ), varietà che può ridursi con continuità ad uno spazio lineare  $S_{d-r+1}$ , contato più volte <sup>(1)</sup> (e precisamente tante volte quanto è l'ordine della anzidetta  $V_{d-r+1}$ ). Ne risulta quindi che il sistema  $\Gamma'$  può ridursi alla forma fondamentale  $[d-r+1, r]$ , contata più volte.

Se  $d=R-1=2r-3$ , il sistema  $\Gamma'$  è il solo che si ottiene da  $\Gamma$  per la deformazione anzidetta (n. 2,  $d$ ), e quindi si conclude che: la base minima del sistema  $\Gamma_d$  è data dalla sola forma  $[r-2, r]$ .

Per  $d < R-1$  le ulteriori rette limiti costituiscono come si è detto (n. 2,  $b$ ) un nuovo sistema, che indicheremo con  $\Gamma^{[1]}$ , luogo delle  $\infty^d$  rette proiezioni delle rette di  $\Gamma$  da  $O_1$  su  $\Pi_1$ .

Applicando a  $\Gamma^{[1]}$  lo stesso procedimento dianzi tenuto per trasformare  $\Gamma$ , si otterrà in modo analogo una forma fondamentale  $[d-r+2, r-1]$  da contarsi più volte ed un nuovo sistema  $\Gamma^{[2]} \infty^d$  di rette dell' $S_{r-2}$ . Così continuando si ottengono nuove forme fondamentali  $[d-r+i+1, r-i]$  e nuovi sistemi  $\Gamma^{[i+1]}$  dell' $S_{r-i+1}$ .

Si conclude quindi che, per  $0 \leq i \leq r - \frac{d+1}{2}$ , le predette forme fondamentali costituiscono la base minima dei sistemi  $\Gamma, \infty^d$  di rette dell' $S_r$  <sup>(2)</sup>.

b) Dopo quanto precede, circa il problema della base relativo ai sistemi di rette dell' $S_r$ , poverremo alla risoluzione del problema

<sup>(1)</sup> Cfr. SEVERI, *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze ecc.* «Memorie della R. Accademia d'Italia» 1934, XII.

<sup>(2)</sup> Per  $d=R-1$ ,  $R-2$  ed  $r=3$  si ritrovano gli esempi accennati da SEVERI nella Mem. citata in nota 1 a pag. 171, pag. 197; in tale Memoria la sussesta variazione è ottenuta, per  $d=R-2$  a mezzo di omologie e per  $d=R-1$  a mezzo di omografie biassiali degeneri. Osserviamo a tal proposito che anche l'uso delle omografie biassiali è estensibile al caso generale qui trattato.

generale della base, per i sistemi di  $S_k$  dell'  $S_r$ , con metodo induttivo.

Poichè abbiamo dimostrato che è possibile, con variazione continua, trasformare ogni sistema algebrico di rette in una combinazione lineare ( $a$  e n. 1) di forme di SCHUBERT, possiamo ammettere il problema risoluto per i sistemi  $\Gamma_{d_1}^{\infty}$ ,  $\infty^{d_1}$  di  $S_{k_1}$  dell'  $S_r$ , dove  $k_1 \leq k-1$  ed  $r_1 \leq r$ , e risalire da questi ai sistemi  $\Gamma$  di  $S_k$  dell'  $S_r$ . Ci basta ammettere, in particolare, già risoluto il problema della base per  $k_1 = k-1$ ,  $r_1 = r-1$ ; ammettere cioè che la base minima per il sistema  $\Gamma_{d_1}^{\infty}$  sia costituita da forme fondamentali di SCHUBERT  $[a_0, \dots, a_{k_1}]$ , di dimensione  $d_1$ , dove  $d_1 = \sum_{i=0}^{k_1} a_i - \frac{1}{2} k_1 (k_1 + 1)$ .

4. LA BASE DEI SISTEMI  $\infty^d$  DI  $S_k$  IN GENERALE. - Per risolvere infine il problema della base in generale, si tenga presente quanto è acquisito al n. 2; e cioè che, per  $d \geq r-k$ , la variazione continua ivi applicata porta a trasformare il dato sistema  $\Gamma_d$  nel modo che segue.

a) In primo luogo si ottiene un sistema  $\Gamma'$ , da contarsi più volte, costituito da tutti e soli gli  $S_k$  dell'  $S_r$  incidenti l'iperpiano  $\Pi_1$  negli  $S_{k-1}$  traccia su questo iperpiano degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ .

Questi  $S_{k-1}$  formano un sistema  $\Gamma_{d_1}^{\infty}$  ( $d_1 < d$ ) dell'iperpiano  $\Pi_1$ , sistema che è quindi riducibile (n. 3, b) a forme fondamentali  $[a_0, \dots, a_{k_1}]$ , da contarsi un certo numero di volte. Per cui da queste forme, che costituiscono la base minima di  $\Gamma_{d_1}^{\infty}$  (n. 3, b), si ottengono tutte e sole quelle formanti la base (minima) del sistema  $\Gamma'$  anzidetto; queste ultime forme sono evidentemente quelle costituite dagli  $S_k$  dell'  $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  delle forme fondamentali sopra indicate.

Ne segue che, se è  $d \geq R-k$ , anche gli ulteriori  $S_k$  limiti, che coincidono con le proiezioni degli  $S_k$  di  $\Gamma$  da  $O_1$  su  $\Pi_1$  (n. 2, d), appartengono al sistema  $\Gamma'$  anzidetto e quindi, in questo caso, la base minima di  $\Gamma'$ , sopra determinata, coincide con quella di  $\Gamma$ ; ed è in tal modo completamente risoluto il problema della base dei sistemi  $\Gamma$  siffatti<sup>(1)</sup>.

b) Se invece è  $d < R-k$  l'ulteriore sistema di spazi limiti, che coincide sempre con la proiezione  $\Gamma^{[1]}$  del dato sistema  $\Gamma$  da

(1) Per  $d = R-1$  si ritrova l'esempio dato da SEVERI, Mem. citata in nota I a pag. 171, pag. 195.



$O_1$  su  $\Pi_1$  (n. 2, b), non appartiene al sistema  $\Gamma'$  dianzi accennato. Si ottiene quindi un nuovo sistema,  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_{r-1}$ ; per cui è  $R_1 = (k+1)(r-k-1) = R - (k+1)$ .

Allora se è  $d \geq R_1 - k$  si ricade nel caso precedente, e quindi al sistema  $\Gamma^{[1]}$  si possono applicare le conclusioni di già acquisite onde ridurlo in forme fondamentali. In tal modo è risoluto completamente il problema della base del dato sistema  $\Gamma$ . E difatti queste ultime forme insieme a quelle considerate in a) costituiscono la base minima del sistema  $\Gamma$ . Nel caso invece in cui risulta  $d < R_1 - k$  si procede nei riguardi del sistema  $\Gamma^{[1]}$  come si è prima operato nei riguardi di  $\Gamma$  (proiettando cioè  $\Gamma^{[1]}$  su un iperpiano  $\Pi_2$  di  $\Pi_1$ ); si ottiene così un nuovo sistema  $\infty^d \Gamma^{[2]}$  dell' $S_{r-2}$ , per cui è  $R_2 = R - 2(k+1)$ . Se è  $d \geq R_2 - k$  si ricade nel caso precedente e quindi è raggiunta la soluzione della questione.

Se invece è  $d < R_2 - k$ , si continua nel modo indicato, fino ad ottenere un sistema  $\Gamma^{[s]}$  dell' $S_{r-s}$ , con  $d \geq R_s - k$ ; e si perviene così alla soluzione del problema della base per il dato sistema  $\Gamma$ .

c) Infine il caso  $d < r - k$  può rientrare, senz'altro, in quelli dianzi esaminati, considerando la proiezione  $\Gamma_d^{[s]}$  del dato sistema su un  $S_{r-s}$ , con  $r-s = d+k$ , (n. 2, c). Ne segue concludendo, che:

*un qualsiasi sistema algebrico  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_r$ ,  $0 < d < (r-k)(k+1)$ , si può ridurre mediante variazione continua ad una somma delle forme fondamentali:*

$$\sum v_{a_0 \dots a_k} [a_0, \dots, a_k],$$

dove le  $a_n$  ( $n=0, 1, \dots, k$ ) sono numeri interi soddisfacenti alle condizioni indicate nelle premesse, e  $v_{a_0 \dots a_k}$  sono i caratteri del sistema. Le dette forme costituiscono perciò la base minima per i sistemi algebrici  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_r$ .

## SUL PROBLEMA DELLA FLESSIONE COMPOSTA IN REGIME ELASTO PLASTICO (\*)

(Con quattro figure)

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Compositam flexionem in elasto-plastico regimine perpendens (quod antea fecerat nemo), auctor ostendit quibus limitibus coarctetur huius problematis solutio iuxta generalem rationem doctrinae DE SAINT-VENANT, et experimentorum seriem proponit, quibus elasto-plasticorum deformationum studium summo opere proficere possit.

Nei miei precedenti saggi sulla *Statica dei corpi elasto plastici* <sup>(1)</sup> ho mostrato come il problema dell'equilibrio delle travi potesse venire affrontato per via indiretta valendosi delle espressioni che, secondo DE SAINT-VENANT, spettano alle tre componenti della deformazione elastica

$$\varepsilon_x \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

per attribuirle alle componenti della deformazione totale

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x \quad \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx}$$

La sollecitazione, che dovrebbe essere uno dei dati del problema, resta così determinata implicitamente, e può venir calcolata in conseguenza.

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », vol. II, n. 12 (1938); ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, ed. Einaudi, Torino, 1941, pag. 379 e segg.

Basta ricorrere alle note espressioni delle tre componenti speciali di tensione non identicamente nulle, in funzione delle componenti della deformazione elastica

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

e dedurne i valori delle caratteristiche della sollecitazione relativa alla sezione generica

$$\mathcal{N} = \int_A \sigma_x dA$$

$$\mathcal{M} = \int_A \sigma_x y dA$$

$$\mathcal{T} = \int_A \tau_{yz} dA$$

.....

Si constata allora che l'intervento delle deformazioni plastiche non influisce sulle deformazioni totali *qualitativamente*, ma solo *quantitativamente*, in quanto sostituisce

allo sforzo normale effettivamente applicato  $\mathcal{N}$

uno sforzo normale fittizio  $\mathcal{N} + E \int_A \bar{\varepsilon}_x dA$

al momento flettente effettivamente applicato  $\mathcal{M}$

un momento flettente fittizio  $\mathcal{M} + E \int_A \bar{\varepsilon}_x y dA$

allo sforzo tagliante effettivamente applicato  $\mathcal{T}$

uno sforzo tagliante fittizio  $\mathcal{T} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA$

.....

rendendo ragione dei due fatti nuovi che caratterizzano il modo di deformarsi di una trave in regime elasto plastico, e cioè:

1°) che le deformazioni non sono più delle funzioni lineari delle forze esterne;

2°) che una quota parte di dette deformazioni ha carattere permanente, cioè continua a sussistere anche quando le forze esterne hanno cessato di agire.

\* \* \*

Nel tentare l'applicazione di questi risultati alla teoria delle travi inflesse, io mi sono, di proposito, sempre limitato a considerare il solo caso particolare in cui l'intervento delle deformazioni plastiche è determinato dalla tensione normale  $\sigma_z$ ; più precisamente: dal fatto che questa tensione normale raggiunge il limite di elasticità del materiale.

Una tale impostazione del problema è pienamente giustificata fin che si ha a che fare soltanto con sollecitazioni a semplice flessione od a pressoflessione, nelle quali, delle diverse componenti speciali di tensione, è presente la sola  $\sigma_z$ .

Ma nel caso generale della flessione composta - in cui coesistono sollecitazioni alla flessione (od alla pressoflessione) ed al taglio, e per conseguenza tensioni normali e tensioni tangenziali - è evidente che il raggiungimento dei limiti di elasticità ed il conseguente intervento delle deformazioni plastiche non potranno più farsi dipendere soltanto da questa o da quella particolare componente speciale di tensione; ma dovranno essere messi in relazione coll'intero stato di tensione che quelle componenti definiscono; e in particolare coi valori estremi (massimi e minimi) delle tensioni che quello stato, in ciascun punto materiale, comporta.

Se poi si ammette che le deformazioni plastiche consistano in scorrimenti lungo piani obliquamente disposti rispetto alle direzioni principali, vien fatto di pensare che il loro intervento possa dipendere dai valori delle tensioni (normali e tangenziali) che si verificano in corrispondenza di questi piani.

È noto che su questo argomento sono state enunciate ipotesi diverse, sulle quali l'esperienza non ha ancor detto la sua ultima parola.

Nei casi più semplici sembra ragionevole adottare, sulla sezione retta generica, una distribuzione della componente  $\bar{\epsilon}_x$  della deformazione plastica del genere di quella rappresentata con area punteggiata nella figura 1.

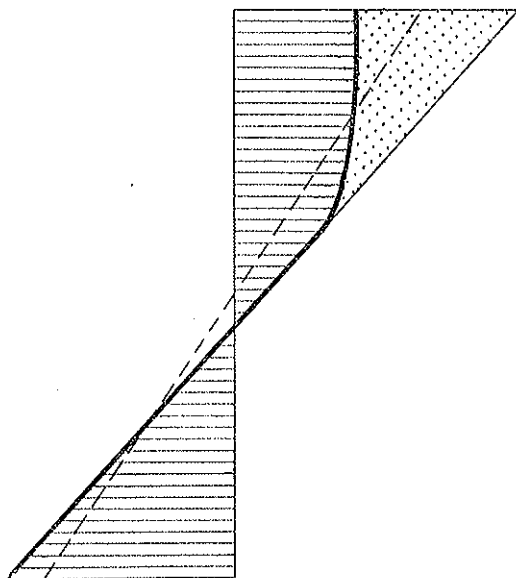


FIG. 1.

La quale si riferisce ad un caso molto particolare perchè è stata tracciata per una sezione (rettangolare) sollecitata soltanto a flessione e taglio, nella ipotesi che il materiale presenti allungamenti plastici soltanto là dove è sollecitato da tensioni positive.

Un simile caso particolare, pur nella sua semplicità, si presta tuttavia assai bene ad illustrare le nostre considerazioni con tutta la desiderabile generalità, in quanto implica una distribuzione dissimmetrica di deformazioni plastiche, e quindi una sollecitazione fittizia che comprende, oltre al momento flettente ed allo sforzo tagliante, anche uno sforzo normale.

Così stando le cose, per differenza rispetto al diagramma (sempre lineare) delle deformazioni totali  $\epsilon_x + \bar{\epsilon}_x$ , si potrà, dal diagramma (pun-

teggiato) della componente  $\bar{\varepsilon}_z$ , dedurre il diagramma (tratteggiato) dell'analoga componente  $\varepsilon_z$ .

E questo, con un semplice cambiamento di scala, si potrà poi interpretare come diagramma della tensione normale  $\sigma_z$ .

\* \* \*

Consideriamo ora un tronco elementare di trave compreso fra due sezioni rette vicinissime  $SS$  ed  $S'S'$  di quote  $z$  e  $z+dz$ .

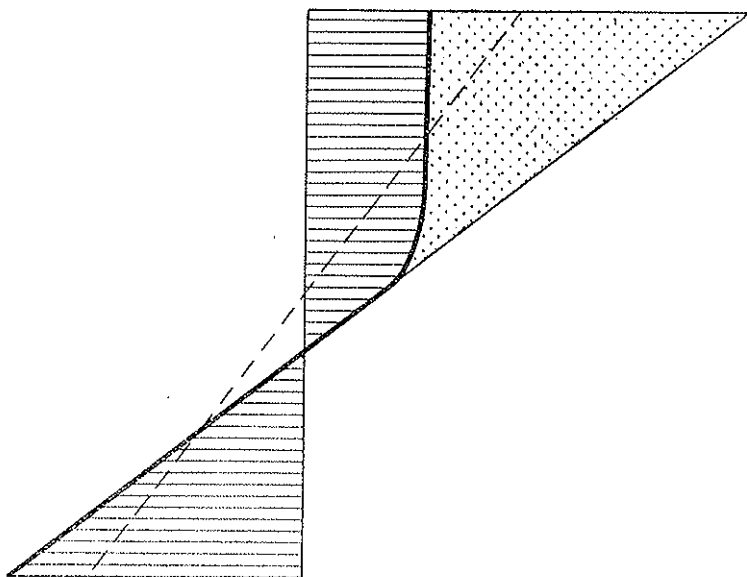


FIG. 2.

Supporremo naturalmente che sul tronco di trave compreso fra quelle due sezioni non sia applicata alcuna forza esterna.

Immaginiamo tracciata, sulla sezione  $SS$ , una corda generica parallela all'asse neutro, e per essa condotto il piano parallelo all'asse  $z$  fino ad incontrare la sezione  $S'S'$ .

Per l'equilibrio della porzione di solido limitata da questo piano e dalle due sezioni rette considerate, deve (fra l'altro) essere verificata

l'equazione che si ottiene eguagliando a zero la somma delle proiezioni di tutte le forze sull'asse  $z$

$$\int (\sigma_z + d\sigma_z) dA - \int \sigma_z dA = \int \tau_{yz} dA.$$

dove i due integrali al primo membro s'intendono naturalmente estesi a quella porzione della sezione retta che la corda considerata delimita,

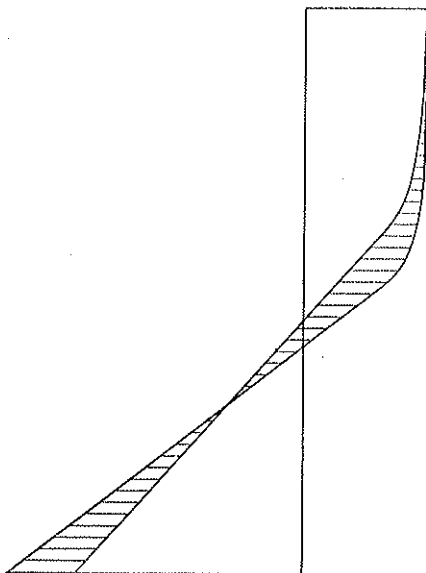


FIG. 3.

mentre l'integrale al secondo membro va invece esteso all'area della sezione longitudinale: area rettangolare che ha per lati la lunghezza  $b$  della corda e la distanza  $dz$  delle due sezioni.

Se pertanto si conviene di indicare con

$$\tau_{yz} \text{ media}$$

il valor medio della tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  su quest'area (o, al limite, sulla corda a cui l'area tende per  $dz$  tendente a zero) si ha

$$\tau_{yz} \text{ media} = \frac{1}{b} \int \frac{d\sigma_z}{dz} dA.$$

Questa formola si presta bene al calcolo grafico.

A tal fine si assumeranno le due sezioni  $SS$  ed  $S'S'$  ad una distanza finita, ma abbastanza piccola, in relazione al grado di approssimazione che, col calcolo, si vuol raggiungere.

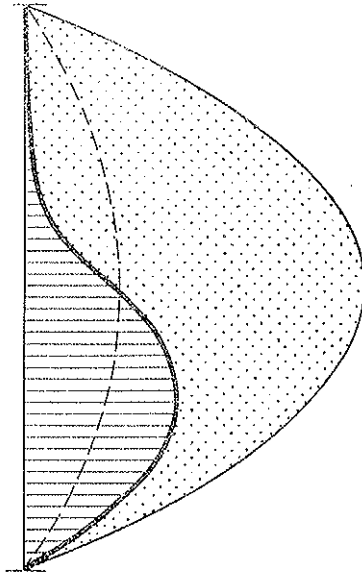


FIG. 4.

Per differenza tra i diagrammi delle  $\sigma_z$  relativi a quelle due sezioni (figg. 1 e 2) si otterrà (fig. 3) un diagramma approssimato della

$$\frac{d\sigma_z}{dz}$$

dal quale, con una integrazione e successiva riduzione di ordinate nel rapporto  $1/b$ , noi dedurremo il diagramma delle

$$\tau_{yz} \text{ medie}$$

Questo diagramma si trova rappresentato nell'area tratteggiata della figura 4, in una scala che non è necessariamente quella usata nelle figure 1 e 2 (che anzi è stata nel caso concreto volutamente alterata per maggiore chiarezza di rappresentazione).



Ed è interpretabile, con le solite cautele, come diagramma dei valori medii della componente  $\gamma_{yz}$  della deformazione elastica.

\* \* \*

A questo punto giova ricordare che, per la supposta assenza di forze esterne sul tronco di trave considerato,

$$\mathfrak{S} = \frac{d\mathfrak{M}}{dz}$$

e che inoltre <sup>(1)</sup>

$$G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA = \frac{d}{dz} \left[ E \int_{\Lambda} \bar{\varepsilon}_x y dA \right]$$

Ne segue che anche le componenti della sollecitazione fittizia saranno legate da una relazione analoga:

$$\mathfrak{S} + G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA = \frac{d}{dz} \left[ \mathfrak{M} + E \int_{\Lambda} \bar{\varepsilon}_x y dA \right]$$

Dati dunque il momento flettente  $\mathfrak{M}$  e le deformazioni plastiche  $\bar{\varepsilon}_x$  in funzione di  $z$ , non solo lo sforzo tagliante  $\mathfrak{S}$ , ma anche lo sforzo tagliante fittizio

$$\mathfrak{S} + G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA$$

son da considerarsi come determinati.

Si potrà perciò tracciare, coi metodi noti, il diagramma degli scorrimenti totali  $\gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz}$  o, per esser più precisi, quello dei loro valori medii su ciascuna corda.

<sup>(1)</sup> Cfr. G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », vol. II, n. 12 (1938), pag. 464; ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, ed. Einaudi. Torino 1941, pag. 388.

Ne segue subito che anche i valori medii della componente  $\bar{\gamma}_{yz}$  della deformazione plastica sono da considerarsi come determinati in conseguenza.

Ora il diagramma di queste

$\bar{\gamma}_{yz}$  medie

che è stato contrassegnato, al solito, con area punteggiata nella figura 4, non si estende soltanto a quella, od a quelle parti della sezione (prosime ai bordi) dove, per l'avvenuto superamento dei limiti di elasticità del materiale, eravamo stati condotti ad attribuire certi ben determinati valori alle  $\bar{\epsilon}_x$ ; ma si estende anche a quelle altre parti (centrali) della sezione in cui le  $\bar{\epsilon}_x$  erano identicamente nulle, ed in cui - se l'intensità dello sforzo tagliante non supera certi limiti - non v'era, a prima vista, ragione alcuna di credere che il primitivo regime elastico dovesse venire turbato.

\* \* \*

Questa singolare conclusione merita di essere segnalata in quanto sembra offrire una spiegazione nuova di certi fatti ripetutamente osservati da taluni sperimentatori.

THUM e WUNDERLICH<sup>(1)</sup> sollecitando a flessione al di là dei limiti elastici certe barre di acciaio, hanno infatti constatato che la comparsa delle linee di Lüders non si verificava per quei valori del momento flettente per cui il limite di elasticità del materiale poteva ritenersi raggiunto ai bordi della sezione, bensì per valori assai superiori e tali da giustificare l'immediato estendersi del regime plastico alla intiera sezione.

Un tal fatto viene spiegato dal PRAGER<sup>(2)</sup> ammettendo che, quando un elemento materiale entra in regime plastico, esso tenda a subire d'un tratto deformazioni discontinue a cui gli elementi vicini, che si trovano ancora in regime elastico, non si possono adattare. Potrebbe

<sup>(1)</sup> A. THUM e F. WUNDERLICH, *Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung, Forschung a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens*, t. 3 (1932), pag. 261.

<sup>(2)</sup> W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique, Mémorial des Sciences Mathématiques*, vol. LXXXVII (1937), pag. 51 e segg.

allora accadere che le fibre situate in prossimità dei bordi della sezione fossero in qualche modo impedito di deformarsi plasticamente, e costrette ad oltrepassare il limite di elasticità comportandosi come se fossero ancora in regime elastico; e ciò fino a quando il momento flettente abbia raggiunto un valore tale da giustificare il passaggio allo stato plastico anche per le fibre interne. Allora le deformazioni plastiche si manifesterebbero d'un tratto sull'intera sezione.

Ora, io ho già avuto occasione di accennare <sup>(1)</sup> ai gravi dubbi che nutro sulla attendibilità di esperienze in cui il manifestarsi dei fenomeni plastici verrebbe segnalato esclusivamente dalla comparsa delle linee di Lüders.

Ho detto allora come un tal modo di procedere mi sembri ben poco idoneo ad avvertire *il primo inizio* delle deformazioni plastiche.

L'esperienza mi ha infatti costantemente dimostrato che, assai prima che le linee di Lüders facciano la loro comparsa, si determinano frecce permanenti apprezzabili, indizio sicuro che la fase elastica del fenomeno è terminata e che qualche deformazione plastica si è in qualche parte verificata.

Tuttavia un eventuale ritardo nel manifestarsi dei fenomeni plastici - se sperimentalmente confermato - potrebbe forse spiegarsi anche senza far ricorso all'ipotesi della discontinuità delle deformazioni introdotta dal PRAGER.

Nel quadro della mia teoria dell'equilibrio elasto plastico, tale ritardo potrebbe infatti trovare la sua giustificazione nel fatto che, quando il momento flettente è accompagnato da uno sforzo tagliente (sia pur piccolo), i fenomeni plastici non possono più restare localizzati in prossimità dei bordi, ma debbono necessariamente estendersi a tutta la sezione.

Varrebbe intanto la pena di istituire nuove esperienze nelle quali - previo un più sicuro accertamento della esistenza o meno dell'accennato ritardo - venisse assodato se il tempo ed il modo con cui i fe-

---

(1) G. COLONNETTI, *Su la resistenza alla flessione in regime elasto plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », vol. III, n. 1 (1939); cfr. anche: E. GIACCHERO e F. LEBVI, *Conferme sperimentali della teoria di Colonnetti su l'equilibrio elasto plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. III n. 7 (1939).

nomeni plastici si rendono manifesti sia in qualche maniera connesso colla presenza di sforzi taglienti.

\* \* \*

Che se le esperienze dovessero poi avere esito decisamente negativo - se cioè, anche in presenza di sforzi taglienti, le deformazioni plastiche si manifestassero dapprima soltanto in corrispondenza dei bordi, per estendersi in seguito e gradualmente alla parte centrale della sezione - ne dovremmo semplicemente dedurre che il quadro delle soluzioni a cui ci siamo riferiti è insufficiente a contenere tutta la gamma dei fenomeni dei quali ci stiamo occupando.

A questo era d'altronde ben prevedibile che si sarebbe, una volta o l'altra, arrivati.

Le soluzioni di cui si tratta sono state infatti trasferite dalla teoria classica dell'elasticità alla teoria dell'equilibrio elasto plastico, ammettendo non soltanto che siano verificate le ipotesi di DE SAINT-VENANT in ordine alla distribuzione delle forze applicate, ma anche che siano verificate restrizioni analoghe in ordine alla distribuzione delle deformazioni impresse.

Ora non è affatto detto che ciò debba necessariamente avvenire quando queste deformazioni impresse sono di origine plastica.

E se le supposte restrizioni non sono verificate, debbono originarsi stati di equilibrio non compresi nel nostro quadro, e cioè stati in cui faranno la loro comparsa quelle componenti speciali di tensione

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}$$

che, seguendo DE SAINT-VENANT, noi avevamo supposte identicamente nulle.

Il problema dovrà allora venire affrontato in termini assai più generali, cioè per deformazioni impresse affatto qualunque; e la sua soluzione potrà presentare gravi difficoltà.

Ma questo è un altro discorso, che esorbita dai limiti dell'argomento che qui abbiamo impresso a trattare, e sul quale, occorrendo, ritorneremo in altra occasione.



*C. K. M. Rogers*

ADRIANO CARLO MARIA NOYONS  
(1878-1941)

COMMEMORAZIONE LETTA NELLA TORNATA ACCADEMICA  
DEL 6 GIUGNO 1942

da Fr. AGOSTINO GEMELLI O. F. M.  
*Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze*

Prendo la parola per commemorare il compianto accademico Carlo Maria Noyons per due ragioni: avendo pure io impiegato metodi sperimentali ideati dal compianto collega, sono stato condotto ad occuparmi della sua attività scientifica e ad apprezzarne il grande valore e la eccezionale probità scientifica; mi sono indotto poi a ricordarne la vita anche perchè legato a lui da una solida amicizia nata e sviluppata sul terreno di una comunanza di ideali religiosi.

Il prof. Adriano Carlo Maria Noyons appartiene a quella valorosa schiera di fisiologi che negli ultimi quarant'anni ha dato largo impulso alle ricerche della fisiologia intesa come disciplina fondamentale e direttiva tra le scienze biologiche. Mentre altri fisiologi della sua generazione si sono distinti per aver apportato a questa disciplina il contributo di nuove vedute nella interpretazione dei fenomeni fondamentali della vita, il Noyons si è distinto, ed è salito in grande fama, per il contributo di metodi tecnici nuovissimi che rivelarono quanto fosse la sua mente scaltrita nell'uso dei moderni perfezionamenti della tecnica fisiologica tanto da arrivare a indicare la via per la soluzione di problemi rimasti sin qui oscuri per la impossibilità di accertare con metodo sicuro le leggi dei fenomeni studiati. Il nome del Noyons deve essere annoverato tra quelli dei maggiori fisiologi del nostro tempo, appunto perchè legato ad alcune tecniche da lui ideate.

È da aggiungersi quanto ebbe già a far notare il grande istologo olandese, il prof. Boeke di Utrecht; la inattesa notizia della sua morte, avvenuta il 1° giugno 1941, pressochè improvvisa, destò profonda commozione e risvegliò vivo dolore, perchè, se il Noyons era noto e stimato come grande scienziato, era però assai amato da tutti quanti lo avvicinarono come uomo di grande carità cristiana; mentre da molti medici, che furono da lui educati, era considerato come uno dei più insigni maestri della medicina olandese, dai colleghi era amato per il suo grande amore per i malati.

Il Noyons morì inaspettatamente quando tutti ritenevano che egli potesse continuare a lavorare ancora molti anni, e proprio quando aveva raggiunto somma perfezione nella tecnica fisiologica, e quando il suo laboratorio, per opera sua, ebbe tale perfezionamento di attrezzature da essere pronto per più approfondite e più estese ricerche.

Nacque il Noyons a Utrecht il 7 gennaio 1878 da un capo d'Istituto d'istruzione assai stimato; dal padre ereditò l'amore per la esattezza della ricerca scientifica e la precisione dello studio. Nel 1906 conseguì la laurea in medicina; divenne poscia assistente del fisiologo Zwaardemaker, celebre soprattutto per le sue ricerche di fonetica fisiologica; nel 1909 venne nominato libero docente in fisiologia nell'Università di Utrecht; nel 1912 ottenne la nomina di professore all'Università cattolica di Lovanio, ove, mediante un non comune sforzo, fu tra i primi a tener lezione sia nella lingua francese, che nella fiamminga, istruendo così del pari gli studenti valloni e i fiamminghi, ma anche contribuendo a quella pacificazione degli animi che trovava, anche tra i cattolici, un grave ostacolo nell'uso della lingua. Grazie all'aiuto della Fondazione Rockefeller trasformò il laboratorio di fisiologia, che attualmente è lustro e decoro dell'Università di Lovanio.

Durante la grande guerra, mentre molti biologi fuggirono dal Belgio, il Noyons, olandese, e perciò console di un paese neutrale, rimase al suo posto, e poté essere di aiuto a molti con il consiglio e con l'opera di medico. Poscia collaborò anche alla ricostruzione dell'Università cattolica di Lovanio che, come ognuno sa, è decoro del Belgio, ma anche fattore precipuo della grandezza di quel paese.

Quando, nel 1928, il prof. Zwaardemaker, ormai settantenne, dovette lasciare l'insegnamento, egli venne nominato suo successore nella Università di Utrecht, città, è bene sottolinearlo, protestante, ove i

professori universitari cattolici sono in numero assai ristretto. Occupò il suo nuovo posto dopo un lungo viaggio in Europa e nelle Indie; anche a Utrecht, ad onta della grave crisi economica, grazie alla influenza della quale godeva in ogni ceto, grazie alla rinomanza della quale godeva all'estero, poté porre mano alla ricostruzione dell'Istituto di fisiologia, così che seppe dotare la sua città natale di un organismo scientifico di primo ordine, nel quale l'utilizzazione sapiente dei locali e la ricchezza degli strumenti e la larghezza con cui furono compiuti gli impianti dimostrano le non comuni capacità organizzative del Noyons.

Molteplici furono i contributi scientifici apportati dal Noyons alla fisiologia. Sono da ricordarsi in primo luogo i contributi apportati, quando fu assistente di Zwaardemaker, allo studio dell'influenza del radio sul cuore dei poichilotermi e all'esame dell'origine della emolisi. Sono poi da ricordarsi i contributi alla fisiologia del cuore e alla circolazione del sangue, ma soprattutto hanno importanza i suoi contributi allo studio del metabolismo. Queste ultime ricerche il Noyons compì grazie all'ideazione e alla realizzazione di nuovi metodi di ricerca. A Lovanio, a questo scopo, egli aveva costruito un calorimetro differenziale; proseguì poi nello sviluppo e nel perfezionamento della complessa apparecchiatura, portandola a fine a Utrecht. Fra i nuovi strumenti da lui ideati e costruiti speciale importanza hanno quelli a mezzo dei quali è stato possibile nelle ricerche sul metabolismo basale, raggiungere una accuratezza prima mai raggiunta da alcuno. È da notarsi che il Noyons non solo ha ideato e realizzato alcuni istrumenti, tra i quali la «cassa di vetro», imitata da molti altri laboratori ed adoperata dappertutto con risultati mirabili, ma che egli ha ideato e realizzato tutta una complessa attrezzatura per lo studio del metabolismo, la quale ha richiamato l'attenzione di molti studiosi stranieri, che si sono recati a Utrecht per lavorare insieme con il Noyons, traendo grande vantaggio da una installazione che permette di condurre a termine con esattezza le complesse ricerche atte a determinare i fattori del metabolismo e le sue leggi. Il prof. Gerard di Chicago scrisse al proposito. «The laboratory of Noyons is overflowing with ingenious devices and clever apparatuses of all sorts, such as I did not encounter elsewhere in extensive visits. There is no doubt of his genius with apparatus, an opinion which many other physiologists have also expressed to me. Nor has this mechanical genius failed of application in his researches on physiolo-



gical Problems and a large amount of important work continues to come from the Utrecht laboratory ».

Il prof. Heymans, fisiologo dell'Università di Gand, ha scritto che il calorimetro differenziale costruito dal Noyons, calorimetro basato sul principio della diaferometria termica e di una squisita sensibilità, grazie alle applicazioni che se ne possono fare, e grazie al fatto che permette un continuo controllo del ricambio, pone il Noyons al primo posto fra quanti si sono occupati della fisiologia del ricambio.

È opportuno a questo riguardo qualche cenno. Il Noyons nello studiare il metabolismo non era soddisfatto dei metodi di analisi dei gas, eseguiti secondo i criteri di Haldane; questi metodi inoltre richiedevano troppo tempo; perciò essi non permettevano di seguire agevolmente le modificazioni del ricambio. Per semplificare la tecnica, il Noyons ideò uno strumento che chiamò « schudapparaat » (apparecchio a scossa), da lui presentato al Congresso di fisiologia internazionale tenutosi nel 1929 a Boston e che attirò l'attenzione dei convenuti per la possibilità che esso da di porre in evidenza e seguire le variazioni della quantità di acido carbonico esistente in un miscuglio di gas espirati. Successivamente lo studio delle caratteristiche di questo miscuglio di gas condusse il Noyons all'accertamento delle variazioni di conducibilità di calore di questo miscuglio, indipendentemente dalla pressione dei gas contenuti nel miscuglio stesso. Nel 1922 il Noyons applicò per la prima volta questo principio per stabilire il contenuto di acido carbonico nell'aria espirata; nel 1934, proseguendo nelle sue ricerche, con la collaborazione del suo valoroso tecnico, Van Hinten, arrivò a registrare il contenuto di acido carbonico e di ossigeno del miscuglio espirato, e ciò con stupefacente esattezza, giungendo a rivelare le tracce di acido carbonico sino al milionesimo di rarefazione. Per questa via l'accurato esame del ricambio dei gas è divenuto facilissimo per chi sappia adoperare il diaferometro termico di Noyons.

La serie di ricerche da lui compiute, in questo campo insieme con vari collaboratori, costituisce l'inizio di un nuovo capitolo della fisiologia. Basti accennare alle ricerche sul bisogno di ossigeno del tessuto nervoso e in principal luogo del cervello, che hanno condotto ad importanti conclusioni circa l'effetto della depressione atmosferica e anche allo studio dell'influenza dei narcotici. Si deve anche ricordare la diversità enorme di bisogno di ossigeno dell'uovo non ancora fecondato

e di quello fecondato. Purtroppo la guerra prima e poscia la morte del Noyons hanno interrotto una attività in questa direzione che non era solo una promessa, ma era già una realtà. Gli armadi del laboratorio di Noyons conservano pacchi di grafiche e di diagrammi che sono la testimonianza di questa attività. Malgrado le sue eccezionali qualità di lavoratore infaticabile, il Noyons non arrivò a ricavare da tutto questo materiale i vantaggi che se ne potevano ricavare per la scienza; gliene mancò il tempo; dovette lottare contro la mancanza di collaboratori e di denaro; e questa incapacità di arrivare a utilizzare tutto il materiale raccolto fu per lui causa di profondo dolore particolarmente negli ultimi anni di vita.

Ma oramai il Noyons si era acquistata larga fama. Quando venne costituita la nostra Accademia, un altro fisiologo, al quale io ero legato da fraterna amicizia e pur lui, quest'anno, passato a miglior vita, Filippo Bottazzi, mi suggerì che l'Accademia nostra doveva onorare il Noyons nominandolo tra i primi accademici, per rendergli quell'onore che ancora non gli era stato reso in misura adeguata al suo valore dalle consimili istituzioni internazionali. Ad attestare quanto fosse degno il Noyons dalla nomina conviene ricordare quale alta opinione aveva di lui un altro nostro Accademico e « premio Nobel », il prof. Heymans di Gand. Già ho ricordato quello che questi ha scritto del metodo della diaferometria per lo studio del ricambio; aggiungo che l'Heymans considerava il Noyons come uno dei suoi maestri. È da aggiungersi anche che il Benedict, il nordamericano la cui autorità nel campo dei problemi del ricambio è massima, attirò l'attenzione della fondazione Rockefeller sul valore dell'opera del Noyons; ne visitò ripetutamente il laboratorio di Utrecht e gli ottenne generosi aiuti della grande istituzione americana. Ricordo anche un'altra testimonianza; il grande istologo olandese, il prof. Boeke, dedicò alla memoria del Noyons uno scritto nel quale egli definì il Noyons « uno dei migliori fisiologi e uno dei primissimi nel campo della fisiologia del ricambio ».

È da aggiungersi che il Noyons non fu soltanto uomo di laboratorio. Medico cattolico convinto, pose la sua arte a beneficio dei poveri e degli umili con una larghezza, con un disinteresse del quale ci si può rendere ragione solo considerando che era mosso nell'agire in questo modo dal suo profondo sentimento cattolico. Mosso da questo

sentimento di amore per il prossimo, e specie per gli sventurati, diede attiva opera alla lotta contro la tubercolosi e fu membro attivo dell'Unione fra i sanatori antitubercolari cattolici.

Molti erano i medici che si recavano da lui per consiglio; per essi il suo laboratorio era sempre aperto; egli era sempre pronto a prestare il suo aiuto ai colleghi, anche quando era carico di lavoro; gli strumenti del suo laboratorio erano in continua attività per i molti pazienti a pro dei quali i medici richiedevano gratuitamente il suo aiuto.

Negli ultimi anni della sua vita il Noyons ebbe un compito di alta responsabilità, cioè la ricostruzione dell'Ospedale di S. Antonio a Utrecht, del quale era Presidente. Nell'adempiere questa missione delicata, in cui ebbe modo di dimostrare l'equilibrio del suo spirito conciliando gli interessi opposti dell'ospedale, dei pazienti, dei medici, del personale di assistenza, dell'amministrazione comunale, e per assolvere la quale dovette risolvere questioni d'indole finanziaria, scientifica, medica, assistenziale e sociale, il Noyons dimostrò di quale tatto era fornito e come fosse ad un tempo fermo e prudente nelle decisioni. Per l'Ospedale di S. Antonio, la perdita di un uomo dell'autorità, della scienza e della rettitudine del Noyons costituì una perdita non facilmente riparabile.

L'attività del Noyons era molto apprezzata nel suo paese; per le sue insigni doti di integrità e di onestà fu soprintendente del Ginnasio di Utrecht e alle Cliniche accademiche e statali. Era di frequente chiamato a partecipare a molte commissioni di Facoltà nell'Università di Utrecht, nella quale era Preside della Facoltà di medicina. Il suo giudizio era tenuto in grande conto, perchè si sapeva e si riconosceva che esso era frutto di un grande ingegno e di cuore appassionato; il suo giudizio su uomini e cose era sempre ben fondato, rivelatore di un profondo senso di umanità, fondato su una profonda comprensione dei bisogni del prossimo.

L'opera del Noyons ebbe molti riconoscimenti; l'Università di Gand lo nominò dottore « honoris causa »; l'Associazione fiamminga per il progresso della medicina gli conferì la medaglia Palfijn; l'Accademia Reale del Belgio per la medicina e la Reale Accademia fiamminga lo nominarono socio. Era insignito di molte onorificenze; ma stimava che il maggior onore gli era stato reso da Pio XI quando lo no-

minò accademico pontificio. Fu infatti il Noyons uomo di fede cristiana profonda, che egli rivelava anche quando, venendo a Roma abbastanza di frequente, chiedeva ed otteneva ogni volta di essere ricevuto privatamente da Sua Santità, al quale manifestava figlialmente i suoi sentimenti.

Morì nell'Ospedale che aveva governato con tanto amore, fra le braccia della compagna esemplare della sua vita, che durante i lunghi mesi della grave malattia non volle mai allontanarsi da lui. Morì confortato dai Sacramenti della Chiesa, di cui fu sempre un fedele servitore.

La sua memoria rimarrà viva fra noi come esortazione ad operare così com'egli ha fatto nella sua vita, per la scienza, per la Fede, per la Patria.

#### NOTA PRIMA

Ritengo utile indicare alcune tra le più importanti necrologie.

C. HEYMANS, *In memoriam prof. Dr. A. K. M. Noyons*. « Archives internationales de Pharmacodynamie et de thérapie », vol. LXVI, 3, 1941.

R. BRUYNOGHE, *Le professeur A. Noyons*. « Revue médicale de Louvain », 20, 305, 1941.

J. BOEKE, *In memoriam prof. A. K. M. Noyons*. « Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde », 85, 24, 1941.

H. WIEVE, *In memoriam Adriaan Noyons*. « R. K. Artsenblad », 20, 7, 1941.

## NOTA SECONDA

PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE  
DELL'ACCADEMICO PROF. A. K. M. NOYONS

- GRIJNS G. en A. K. M. NOYONS, *De absolute gevoeligheid van het menschelijk oog voor licht*. Ned. Tijds. v. Geneesk, 1904, II.
- GRIJNS G. und A. K. M. NOYONS, *Über die absolute Empfindlichkeit des Auges für Licht*. Arch. f. Anat. u. Physiol., 1905.
- GRIJNS G. et A. K. M. NOYONS, *Sur la sensibilité absolue l'œil pour la lumière*. Onderz. Physiol. Lab. R., VI, 1905.
- NOYONS A. K. M., *Alcoholisme en tuberculose*. Versl. Kath. Drankbestr. Congr. Nijmegen, 1907.
- *Über Modifikationen unpolarisierbarer Elektroden*. Zts. biol. Techn. u. Meth., 1909.
- *About the independence of the electrocardiogram with regard to the form of cardiogram*. Proc. Kon. Ak. A'dam, 1908.
- *About the determination of hardness in muscles*. Proc. Kon. Ak. A'dam, 1908.
- *Over hardheidsbepaling bij spieren*. Versl. Kon. Ak. A'dam, 1908.
- *Onderzoekingen omtrent het electrisch phenomeen der hartcontractie*. Annaalen, 1908.
- *Over de zelfstandigheid van het electrocardiogram tegenover het vormcardiogram*. Versl. Kon. Ak. A'dam, 1908.
- *Over den autotonus der spieren*. Proefschr. Utrecht, 1908.
- BOEKELMAN W. A. en A. K. M. NOYONS, *Het verloop van zoutzuur- en pepsinsecretie onder invloed van proefbouillon, is functioneel diagnostieum*. Ned. Tijds. v. Geneesk, 1908.
- NOYONS A. K. M., *Over waarnemingen aan het electro-myogram en vorm-myogram ond den invloed van de vermoeienis*. Versl. Kon. Ak. A'dam, 1908.
- *About observations on the electro-myogram under the influence of fatigue*. Proc. Kon. Ak. A'dam, 1909.
- *De vertolking van het electrocardiogram*. Handel. XIII Nat. en Geneesk. Congr., 1909.
- *Mededeelingen omtrent het electrogram van het atrium cordis*. Versl. Kon. Ak. A'dam, 1909.

- ZWAARDEMAKER H. und A. K. M. NOYONS, XXXI. *Das Elektrogramm des isoliert pulsierenden Atraventrikels*. Arch. d. Fisiol., VII, 1909.
- NOYONS A. K. M., *Über den Autotonus der Muskeln*. Arch. f. Anat. u. Physiol. Abt., 1910.
- *Physiological Sclerometry*. Proc. Kon. Ak. A'dam, 1910.
- *Physiologische sklerometrie*. Versl. Kon. Ak. A'dam, 1910.
- *Communications about the electrogram of the atrium cordis*. Proc. Kon. Ak. A'dam, 1910.
- *Verlag . . . onderzoekingen verricht in het Zool. Stat. te Napels, gedurende de maand Mei*. Ned. Staatscour, 1910.
- NOYONS A. K. M. und J. v. UEBCKÜLL, *Die Härte der Muskeln*. Zts. f. Biol. 1911, LVI.
- NOYONS A. K. M., *Invloed van den alcohol op het centrale zenuwstelsel*. De Wegwijzer, 1911.
- *Over sclerometrie*. Ned. Tijds. v. Geneesk, 1912.
- *Endocrinologie, Physiologisch gedeelte*.
- *L'étude de l'hémolyse par l'extinctionométric*. Arch. intern. des Physiolog., vol. XVIII, 1921.
- *Over den tonus*. Handel. XVIII Ned. Nat. en Geneesk. Congr., 1921.
- *Description of the institute of physiology of the university of Louvain*, 1922.
- *Hendrik Zwaardemaker Corn. zoon*. Arch. néerl. d. Physiol., 1922, VII.
- *Méthode physique pour la détermination de l'acide carbonique dans l'air respiratoire*. Arch. néerl. d. Physiol., VII, 1922.
- BOUCKAERT J. J., J. P. BOUCKAERT et A. K. M. NOYONS, *Rapport entre les effets des ions potassium et calcium et le coefficient de température du coeur de grenouille*. Arch. Int. d. Physiol., 19, 1922.
- COUSY R. et A. K. M. NOYONS, *L'irritabilité du coeur et le balancement des ions*. Arch. int. d. Physiol., XX, 1922.
- NOYONS A. K. M. et R. COURY, *La survie du coeur de grenouille perfusé au glucose*. C. R., 1923, LXXXVIII.
- BELJEHRADEK J. et A. K. M. NOYONS, *L'électrocardiogramme de coeur perfusé au glucose*. C. R., 1923, LXXXVIII.
- NOYONS A. K. M. et W. STRICKER, *La détermination de l'eau dégagée par l'homme dans le calorimètre différentiel*. C. R., XC, 1924.
- NOYONS A. K. M. et C. D. VERRIJP, *Description d'un appareil pour mesurer la chronaxie*. C. R. Soc. de Biol., 1924, XC.
- NOYONS A. K. M., J. BOUCKAERT et A. SIERBENS, *Influence de l'insuline sur la déperdition calorifique chez le lapin*. C. R. Soc. Biol., 1924, XC.
- NOYONS A. K. M. et W. STRICKER, *Le métabolisme du diabetique après l'injection d'insuline*. C. R. du Métab. de Base, 5 juin 1924.
- NOYONS A. K. M., *Le métabolisme basal de l'homme et des animaux déterminé par la calorimétrie différentielle*. C. R. du Métab. de Base, 1924.

- NOYONS A. K. M., *Un respiro-calorimètre pour de petits animaux*. C. R. Soc. Biol., 1925, XCII.
- *Détermination de l'équivalence d'humidité dans le calorimètre différentiel au moyen des piles thermo-électriques*. C. R. Soc. Biol., XCIII, 1925.
- *Méthode de perfusion aseptique du cœur des mammifères à circulation permanente d'une petite quantité de liquide*. Comptes rendus. Soc. Biol., XCII, 1925.
- *Le calorimètre différentiel pour animaux de taille moyenne*. J. d. physiol. et d. pathol., gén. 1925.
- CAPPELLEN L. et A. K. M. NOYONS, *Méthode gazo-analytique à vote ouverte servant à la détermination du métabolisme*. Comptes rend. Soc. Biol., XCIII, 1925.
- NOYONS A. K. M. et J. P. BOUCKAERT, *L'influence du tartrate d'ergotamine sur le métabolisme basal dans le goître exophtalmiques et les hyperthyroïdes en général*. Comptes rendus Soc. Biol., CXV, 1926.
- NOYONS A. K. M., *Toepassing van de thermozuil ter verkrijging van kleine potentialen*. Ned. Tijdschr. v. Geneesk, 1926, I.
- *Een gasanalytische methode ter bepaling der stofwisseling bij constante doorstroming der respiratiekamer*. Ned. Tijds. v. Geneesk, 1926, I.
- BOUCKAERT J. P. et A. K. M. NOYONS, *Diminution du métabolisme basal sous l'influence du tartrate d'ergotamine (gynergène) chez les basedowiens*. Ann. Soc. scient. Brux., XLV, 1926.
- SIBRENS A. et A. K. M. NOYONS, *L'influence de la thyroxine sur le métabolisme du pigeon*. Soc. Belge d. Biol., 1926, XCIV.
- NOYONS A. K. M. et J. STEENHOUDT, *Le micro-dosage du chloroforme dans le sang ou dans une atmosphère gazeuse*. C. R. Soc. de Biol., XCVII, 1927.
- NOYONS A. K. M., *Institute of physiology University of Louvain*. Met. a. Probl. Med. Education, 1927.
- *The different calorimeter and the determination of human basal metabolism*. Bull. Soc. Sc. d'Hyg. Aliment., XV, 1927.
- *Grepen uit de ontwikkeling onzer kennis over het métabolisme*. Rede, aanv. hoogl. ambt, Utrecht, 1928.
- *Grepen uit de ontwikkeling onzer kennis over het métabolisme*. Boekbespr. Geneesk. Gids, 7 e jrg., 1929.
- *Over de ontwikkeling onzer kennis der hartphysiologie*. Diligentia-lezing, Den Haag, 1926.
- ZWAARDEMAKER H. et A. K. M. NOYONS, *Quelques remarques sur le réveil du cœur des poïkilothermes sous l'influence de l'application extérieure du radium*. Arch. Int. d. Pharmacodyn. et d. Théor., XXXVIII, 1930.
- NOYONS A. K. M., *Hendrik Zwaardemaker Czn*. Ergebn. d. Physiol., 33, 1931.
- CHAMULEAU F. J. et A. K. M. NOYONS, *La pression de vapeur et le spectre d'absorption de quelques matières odorantes*. Acta brev. neerl., II, 1932.

- JONGBLOED J. und A. K. M. NOYONS, *Über den Einfluss von Beschleunigungen auf den Blutkreislauf*. Acta brev. neerl., 1932, II.
- *Weitere Mitteilungen über den Einfluss von Beschleunigungen auf den Blutkreislauf*. Acta brev. neerl., 1932, II.
- NOYONS A. K. M., *Démonstration d'un psychromètre électrique*. Acta brev. neerl., 1932, II.
- NOYONS A. K. M. et C. A. G. WIERSMA, *L'influence de la lumière sur la consommation d'oxygène de la rétine de l'œil de grenouille*. Acta brev. neerl., 1933, III.
- NOYONS A. K. M., *Démonstration d'un calorimètre différentiel refroidi par l'air servant à la détermination du métabolisme des animaux de taille moyenne et de celui des enfants*. Acta brev. neerl., 1933, III.
- *Determination of basal metabolism by psychrometric way*. Arch. di Scienze Biol., 1933, XLIII.
- NOYONS A. K. M. und J. JONGBLOED, *Demonstration eines pneumatischen Kabinetts für Unter- und Überdruck. Demonstration der Reaktionszeitmessung bei normalem und niedrigem Luftdruck*. Acta brev. neerl., 1933, III.
- NOYONS A. K. M. et J. JONGBLOED, *Sur la thermo-rhéographie aérienne et quelques-unes de ses applications*. Ann. de Physiol., 1933, IX.
- NOYONS A. K. M., A. van HARREVELD und B. W. GRUTTERINK, *Über den Einfluss der umgebenden Temperatur und Feuchtigkeit auf die Perspiratio Insensibilis des Menschen*. Acta brev. neerl., 1933, III.
- JONGBLOED J. und A. K. M. NOYONS, *Eine thermo-rhéographische Methode zum Studium des Stoffwechsels*. Acta brev. neerl., 1933, III.
- *Der Einfluss von Beschleunigungen auf den Kreislaufapparat*. Pf. Arch. f. Physiol., 233, 1933.
- NOYONS A. K. M., N. v. WESTENRIJK und J. JONGBLOED, *Methode zum Studium der Vasomotilität des Ohres beim Kaninchen*. Acta brev. neerl., 1934, IV.
- NOYONS A. K. M., *Grundsätze einer neuen Methodik zur Bestimmungen des Herzschlagvolumens*. Acta brev. neerl., 1934, IV.
- NOYONS A. K. M. und J. JONGBLOED, *Luftdruckveränderungen als Mittel zur Bestimmung des spezifischen Gewichts beim lebenden Objekt*. Acta brev. neerl., 1934, IV.
- JONGBLOED J. et A. K. M. NOYONS, *Une méthode d'enregistrement à distance de la pression du sang*. Arch. néerl. de Physiol., XIX, 1934.
- NOYONS A. K. M., *Eine Methode zur kontinuierlichen Registrierungen des Stoffwechsels von Mensch und Tier*. Acta brev. neerl., 1935, V.
- NOYONS A. K. M. und H. van GOOR, *Über die Bestimmung der Reserveluft und der Residualluft aus der Verbrennungswärme eines Zusatzgases*. Acta brev. neerl., 1935, V.
- NOYONS A. K. M., N. v. WESTENRIJK und J. JONGBLOED, *Zur Kenntnis der Vasomotilität des Gehirns*. Acta brev. neerl., 1935, V.



- NOYONS A. K. M. und J. JONGBLOED, *Über die Bestimmung des wahren Volumens und des spezifischen Gewichts von Mensch und Tier mit Hilfe von Luftdruckveränderung*. Pfl. Arch., 1935, 235.
- NOYONS A. K. M., N. v. WESTENRIJK en J. JONGBLOED, *Bijdrage tot de kennis der hersen-vasomotiliteit*. Ned. Tijds. v. Geneesk., 1935, 79.
- NOYONS A. K. M., *La régulation du débit circulatoire du cerveau*. Réunion plén. Soc. d. Biol., 1935.
- *Eine Methode zur fortwährenden Registrierung des Mikrostoffwechsels*. Acta brev. neerl., 1935, V.
- NOYONS A. K. M., N. v. WESTENRIJK und J. JONGBLOED, *Über Veränderungen im Gehirnkreislauf bei experimenteller Anwendung verschiedener äusserer Temperaturen*. Acta brev. neer., 1935, V.
- NOYONS A. K. M. und H. VAN GOOR, *Die Bestimmung des Herzschlagvolumens mittels eines Luftgemisches mit zwei Zusatzgasen mit verschiedenen Absorptionskoeffizienten*. Acta brev. neerl., 1935, V.
- FISCHER F. P. und A. K. NOYONS, *Über sympathische Beeinflussung des Lidschla*. Acta brev. neerl., 1935, V.
- *Over sympathicusinvloed op den lidslagreflex*. Ned. Tijds. v. Geneesk. 1935, 79.
- *Zur Messung der Muskeldurchblutung während der Kontraktion mittels der Reinschen Thermostromuhr*. Zts. Biol., 1935, 96.
- HARREVELD A. v., A. K. M. NOYONS und B. W. GRUTTERINK, *Über den Einfluss einiger äusserer Factoren auf die Perspiratio insensibilis*. Biochem. Zts., 1935, 281.
- NOYONS A. K. M., *Une méthode d'inscription continue de la pression sanguine*. Acta brev. neerl., 1936, VI.
- *Over regeling der Lichaamswarmte in verband met wonen werkruimten*. De Ingenieur, 1936.
- NOYONS A. K. M., N. v. WESTENRIJK et J. JONGBLOED, *Recherches sur la régulation du débit circulatoire du cerveau*. Arch. néerl. d. Physiol., 1936, XXI.
- JONGBLOED J. und A. K. NOYONS, *Über den Stoffwechsel der Frosch-Retina bei Dunkel und Licht*. Acta brev. neerl., 1936, VI. Zts. f. Biol., 1936, 97.
- *Een toestel voor de nauwkeurige objectieve bepaling van koolmonoxyde en andere bestanddeelen van motoruitlaatgassen in de lucht*, Handel. XXVI. Ned. Nat. en Gen. Congr. Utrecht, 1937.
- NOYONS A. K. M., *Zuurstof- en koolzuurbepaling langs physischen weg*. Handel. XXVI. Ned. Nat. en Gen. Congr. Utrecht, 1937.
- *Die kontinuierliche Bestimmung des Umsatzes im Herz-Lungen-Präparat*. Acta brev. neerl. 1937, VII.
- *La détermination du métabolisme de base de l'homme au moyen du diaféromètre thermique*. Vol. Jubil. J. Demoor, 1937.
- *Méthode d'enregistrement continu de la teneur en CO et en O, des gaz respiratoires au moyen du diaféromètre thermique, servant à l'étude du*

- métabolisme des tissus des animaux et de l'homme. Ann. d. Physiol. XIII, 1937.*
- NOYONS A. H. M., *Over den dieperen zin en de integratieve waarde der grondstofwisseling. Vlaamsch Geneesk. Tijds. 51-52, 1937.*
- *Sauerstoffverbrauch und Kohlendioxyde produktion der Froschretina bei Dunkelheit und bei Licht. Zts. f. Biol., 97, 1936.*
- MAAS J. A. und A. K. M. NOYONS, *Über den Einfluss von Suspensionen indifferenten Stoffe auf den Koronarkreislauf des Kaninchenherzen. Acta brev. neerl. VII, 1937.*
- NOYONS A. K. M., *Eine neue Methode zur Messung des Schlag- und Minutenvolumens des Herzens. Sechenow Journ. of Physiol. USSR. XXI, 1938.*
- JONGBLOED J. und A. K. M. NOYONS, *Die Bestimmung des wahren Volumens und des spezifischen Gewichtes vom Menschen mittels Luftdruckveränderungen. Pflüg. Arch. 240, 1938.*
- NOYONS A. K. M., *On a polyfilar diaferometer for micrometabolism. Acta brev. neerl. VIII, 1938.*
- *La signification générale et les recherches comparatives du métabolisme de base. Atti del VII Convegno. Reale Acc. d'Italia, XV, 1937.*
- NOYONS A. K. M. und F. P. FISCHER, *Über die Chronaxie der Lidschlagreflexe. I. Arch. néerl. d. Physiol. XXIII, 1938.*
- NOYONS A. K. M. und H. VAN GOOR, *Over de stofwisseling van hersenweefsel. Ned. Tijds. v. Geneesk. 83, 1939.*
- *Über den Stoffwechsel des Hirngewebes. Acta brev. neerl. IX, 1939.*
- NOYONS A. K. M. en P. M. H. DE HESSELLE, *Over de stofwisseling van het kippenei en de beteekenis van de Luchtkamer. Ned. Tijds. v. Geneesk. 83, 1939.*
- *Über den Stoffwechsel des Hühnereies und die Bedeutung der Luftkammer. Acta brev. neerl. IX, 1939.*
- NOYONS A. K. M., *Ein Oxygenator für Stoffwechseluntersuchungen von Organen. Acta brev. neerl. IX, 1939.*
- MAAS J. A. und A. K. M. NOYONS, *Über den Einfluss von osmotischen Veränderungen auf die Durchlässigkeit der Koronargefäße. Acta brev. neerl. IX, 1939.*
- NOYONS A. K. M. et H. VAN GOOR, *Narcose et métabolisme. Acta brev. neerl. IX, 1939.*
- DIJKSTRA C. et A. K. M. NOYONS, *Recherches sur la sensibilité à l'acétylcholine des muscles lisses du poumon de la grenouille. Arch. Int. Physiol. XLIX, 1939.*
- NOYONS A. K. M., *Het wetenschappelijk werk van Prof. Dr. C. Heymans. Vlaamsch Geneesk. Tijds. 44, 1939.*
- NOYONS A. K. M. en H. VAN GOOR, *Over den invloed van glucose op de hersenstofwisseling. Ned. Tijds. v. Geneesk. 84, 1940.*
- *Sur l'influence du glucose sur le métabolisme cérébral. Acta brev. neerl. X, 1940.*

- NOYONS A. K. M., *Des recherches biologiques au moyen du diaferomètre thermique mono- et polyflair*. Boll. Soc. Ital. d. Biol. Sperim. XV, 1940.
- EVERDINGEN W. A. G. v. and A. K. M. NOYONS, *The irreducible metabolism and specific action of ultra short waves*. Acta Radiol. XXI, 1940.
- NOYONS A. K. M. en H. VAN GOOR, *Stofwisseling van hersenweefsel, zuurstof-concentratie en Warburg-techniek*. Ned. Tijds. v. Geneesk. 84, 1940.
- *Le métabolisme du tissue cérébral, la concentration de l'oxygène et la technique selon Warburg*. Acta brev. neerl. X, 1940.
- NOYONS A. K. M., *Over de grootte en de natuur van de stofwisseling der hersenen*. Ned. Tijds. v. Geneesk. 84, 1940.
- JONGBLOED J. and A. K. M. NOYONS, *The course of oxydation in muscle-masch*. Acta brev. neerl. XI, 1941.
- NOYONS A. K. M. und H. VAN GOOR, *Wirkung von Elektrolyten auf den Gehirnstoffwechsel*. Acta brev. neerl. XI, 1941.
- NOYONS A. K. M., *Ein Apparat zur Herstellung genau bekannter Gasmische*. Acta brev. neerl. XI, 1941.

## SERBATOI SFERICI A SOSPENSIONE FUNICOLARE(\*)

*(Con cinque tavole fuori testo)*

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

**SUMMARIVM.** — Novum rotundum receptaculum pro gravioribus liquidis describitur, et quomodo eius rationes adamussim supputari possint ostenditur.

Il serbatoio sferico, che rappresenta notoriamente la soluzione ideale del problema dell'immagazzinamento dei gas compressi, si presta evidentemente meno bene all'immagazzinamento dei liquidi in ragione della non uniforme distribuzione delle pressioni che questi esercitano sulle sue pareti.

I vantaggi che l'involucro sferico presenta son tuttavia tali da suggerire l'adozione di armature irrigidenti che ne rendano possibile l'impiego anche in questo caso.

Ora, tra i tanti tipi — più o meno razionali — di armature che sono stati a questo fine escogitati, uno ve n'è, nuovissimo (1), il quale mi sembra meritevole di esser qui brevemente illustrato, anche perchè segna una nuova, caratteristica tappa verso l'impiego sistematico degli stati di coazione nei sistemi iperstatici.

\* \* \*

Consideriamo una sfera cava, ripiena di un liquido.

La pressione che questo esercita sopra un elemento qualunque dell'involucro si può sempre considerare come la somma di una pres-

---

(\*) Nota presentata il 7 luglio 1941.

(1) Brevetto italiano n. 395700 in data 5 febbraio 1942.

sione uniformemente distribuita, corrispondente al battente liquido sul vertice della sfera, e di una pressione variabile con legge idrostatica, epperò di intensità proporzionale alla profondità dell'elemento per rapporto al detto vertice.

Alla pressione uniforme resiste bene l'involucro, in quanto ha precisamente la forma della superficie funicolare del carico.

Convieni invece liberare l'involucro dal compito di resistere alla pressione variabile (nonchè alle sollecitazioni accessorie: in particolare al peso proprio della struttura) ed affidare questo compito all'armatura.

A tal fine giova foggare quest'armatura secondo la funicolare delle forze ch'essa dovrà sopportare.

Perciò, suddiviso idealmente l'involucro in un conveniente numero di spicchi limitati da meridiani verticali equidistanti, e ciascuno spicchio in un certo numero di settori mediante paralleli orizzontali, si determinerà per ciascun settore la risultante del suo peso proprio e delle pressioni idrostatiche a battente nullo.

Poi, nel piano meridiano contenente tutte le risultanti relative ai varî settori di un medesimo spicchio, si conetteranno queste risultanti con un poligono funicolare (la cui forma e posizione possono, entro certi limiti, farsi variare a volontà mediante una opportuna scelta del polo e della posizione di uno dei lati); e si realizzerà questo poligono funicolare mediante una catena di aste articolate, ancorata ad un robusto pilone centrale, e le cui singole articolazioni verranno collegate all'involucro mediante un sistema di tiranti disposti secondo le linee d'azione delle predette risultanti.

A ciascuno spicchio verrà così a corrispondere una sua *funicolare di sospensione*.

È chiaro che una cosiffatta armatura assolverà al compito che le abbiamo prefisso - liberando l'involucro dall'onere di sopportare il suo proprio peso nonchè il peso del liquido in esso contenuto, e riportando l'uno e l'altro sul pilone centrale - se le tensioni nei singoli tiranti saranno ordinatamente eguali alle anzidette risultanti. Il che si può sempre ed immediatamente ottenere attribuendo, in ciascuna funicolare di sospensione, un conveniente valore alla tensione di uno qualunque dei suoi lati.

\* \* \*

Si noti bene che non a caso ho detto che bisogna *attribuire una tensione conveniente alla funicolare di sospensione*.

È noto infatti che, secondo la teoria classica dell'elasticità, la tensione (iperstatica) determinata nel poligono funicolare da un dato sistema di forze esterne applicate all'involucro, è in ogni singolo caso concreto perfettamente determinata in funzione delle dette forze esterne e delle costanti elastiche delle varie parti della struttura.

Ma questa tensione non sarà, generalmente, quella che realizza le condizioni statiche sopra indicate.

Le quali condizioni statiche non potranno pertanto, generalmente, venire raggiunte se non *attribuendo* al poligono funicolare una tensione impressa - o di montaggio - tale che, sommata con la tensione determinata dalle forze esterne, ci dia precisamente il valore voluto.

Il fatto poi che il secondo termine della somma dipenda dalle costanti elastiche della struttura ci permette evidentemente di raggiungere il risultato in infiniti modi diversi, vale a dire con valori diversi della tensione impressa.

E di questa circostanza ci si potrà sempre valere per soddisfare a qualche condizione ulteriore: concernente per esempio le condizioni statiche della struttura a serbatoio vuoto.

\* \* \*

Per dare qui un'idea del modo con cui lo studio statico di una tal costruzione può venire condotto, io presento nelle cinque tavole allegate a questa Nota il disegno ed il calcolo di un serbatoio sferico di metri 9,15 di diametro - epperò della capacità di 400 metri cubi - che, seguendo le direttive da me indicate, è stato studiato dai miei collaboratori Ingegneri PIZZETTI e LO VARCO, per conto della Società Ansaldo che ne eseguirà la costruzione negli stabilimenti di Livorno della «Liquigas».

Per questo serbatoio la condizione estrema di carico sarà realizzata con riempimento di acqua alla pressione di 7,5 atmosfere.

In base a questa pressione (supposta uniforme) è stato quindi progettato l'involucro che verrà costruito in lamiera d'acciaio dolce di 16 mm. di spessore.

La funicolare di sospensione è stata tracciata in modo che uno dei suoi lati coincida con una corda dell'involucro. Ciò equivale praticamente a dividere la funicolare in due parti; una delle quali sottende il semispicchio superiore, mentre l'altra sostiene il semispicchio inferiore; il che presenta qualche vantaggio dal punto di vista costruttivo, pur senza nulla mutare nella funzione statica della sospensione.

Le tensioni che questa è chiamata a sopportare, nella predetta condizione estrema di carico, sono state determinate per via grafica nella tavola II.

In base ai risultati di questo calcolo è stato studiato il dimensionamento della sospensione.

Nelle tavole III e IV è stato invece determinato il regime delle tensioni che nella sospensione stessa son prodotte dalle forze esterne applicate all'involucro (indipendentemente da ogni eventuale tensione di montaggio).

A tal fine si è postulato uno stato di tensione arbitrario ( $T=1$ ) della sospensione; si sono determinate le sollecitazioni che esso produrrebbe nell'involucro, nonchè le conseguenti deformazioni.

Interpretata poi la deformata dell'involucro come *diagramma di influenza della tensione nella sospensione*, si è calcolato il valore di questa tensione per la condizione effettiva di carico.

Per differenza si dedurrà il valore della tensione di montaggio, ed, in funzione di questo, si studieranno le condizioni statiche della struttura a serbatoio vuoto.

Nella tavola IV il tracciamento del diagramma di influenza è stato fatto due volte, in relazione ai diversi dimensionamenti della sospensione ottenuti supponendo di impiegare, nella costruzione di questa, due diversi tipi di acciaio: un ordinario acciaio dolce ed un acciaio ad alta resistenza.

È interessante istituire un raffronto tra i due diagrammi, e tra i valori delle tensioni che se ne deducono:

Tensione della sospensione misurata in corrispondenza del suo estremo superiore	Costruzione in acciaio dolce ordinario	Costruzione in acciaio ad alta resistenza
	kg.	kg.
Tensione impressa (o di montaggio) . .	2.250	14.400
Tensione effettiva a serbatoio vuoto . .	2.480	14.800
a serbatoio pieno con battente nullo . .	6.250	16.480
a serbatoio pieno sotto carico . . . .	23.400	23.400

Il paragone mette bene in evidenza l'influenza delle diverse caratteristiche del materiale.

Ferme restando le condizioni statiche della struttura a pieno carico, si ha infatti nel secondo caso una cospicua diminuzione della tensione determinata dalle forze esterne; quindi un corrispondente aumento della tensione di montaggio.

Le conseguenze si rendono palesi nella tavola V, dove si trovano riprodotti, l'uno accanto all'altro, i diagrammi degli sforzi secondo i paralleli e secondo i meridiani dell'involucro nelle due ipotesi suaccennate, sia a serbatoio pieno con battente nullo, sia a serbatoio vuoto (vale a dire sotto l'azione del solo peso proprio della struttura).

Degno di particolare attenzione è poi il fatto che l'aumento della tensione nella sospensione, per un incremento del 10% del carico, è nel caso dell'acciaio dolce di 1715 kg. (pari al 7,33%) mentre nel caso dell'acciaio ad alta resistenza è di soli 692 kg. (pari al 2,96%).

\* \* \*



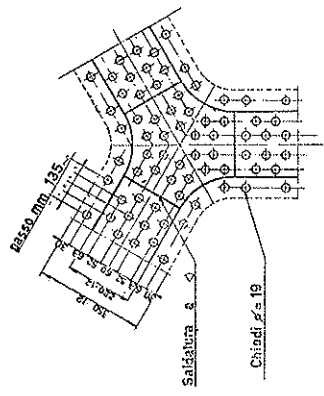
I miei collaboratori illustreranno, in altra sede e con ben maggiore ampiezza, le più interessanti caratteristiche dello studio che essi hanno condotto a termine con singolare perizia.

A me basta far qui tre semplicissimi ma fondamentali rilievi, la cui portata esorbita dal particolare problema di cui qui si tratta per investire in pieno il problema, ben più ampio e generale, delle strutture iperstatiche in stato di coazione.

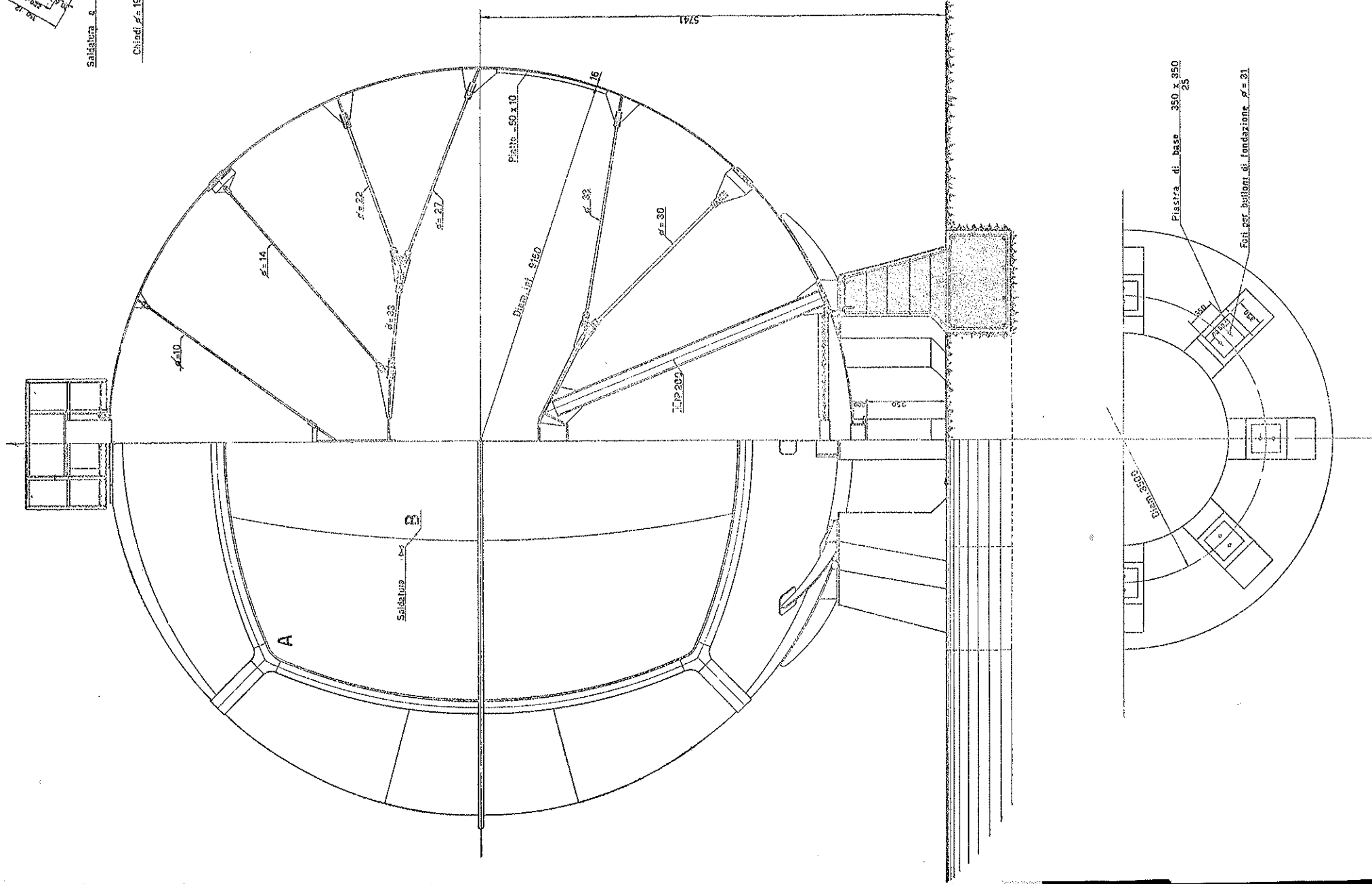
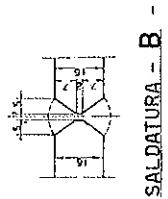
Il primo rilievo concerne la possibilità di una utilizzazione integrale delle caratteristiche di resistenza dei materiali, nei quali si può, con un impiego razionale degli stati di coazione, determinare sollecitazioni che, a pieno carico, raggiungano ovunque i limiti di sicurezza, realizzando (anche nei sistemi più complessi) le condizioni statiche ideali e le caratteristiche del solido di egual resistenza.

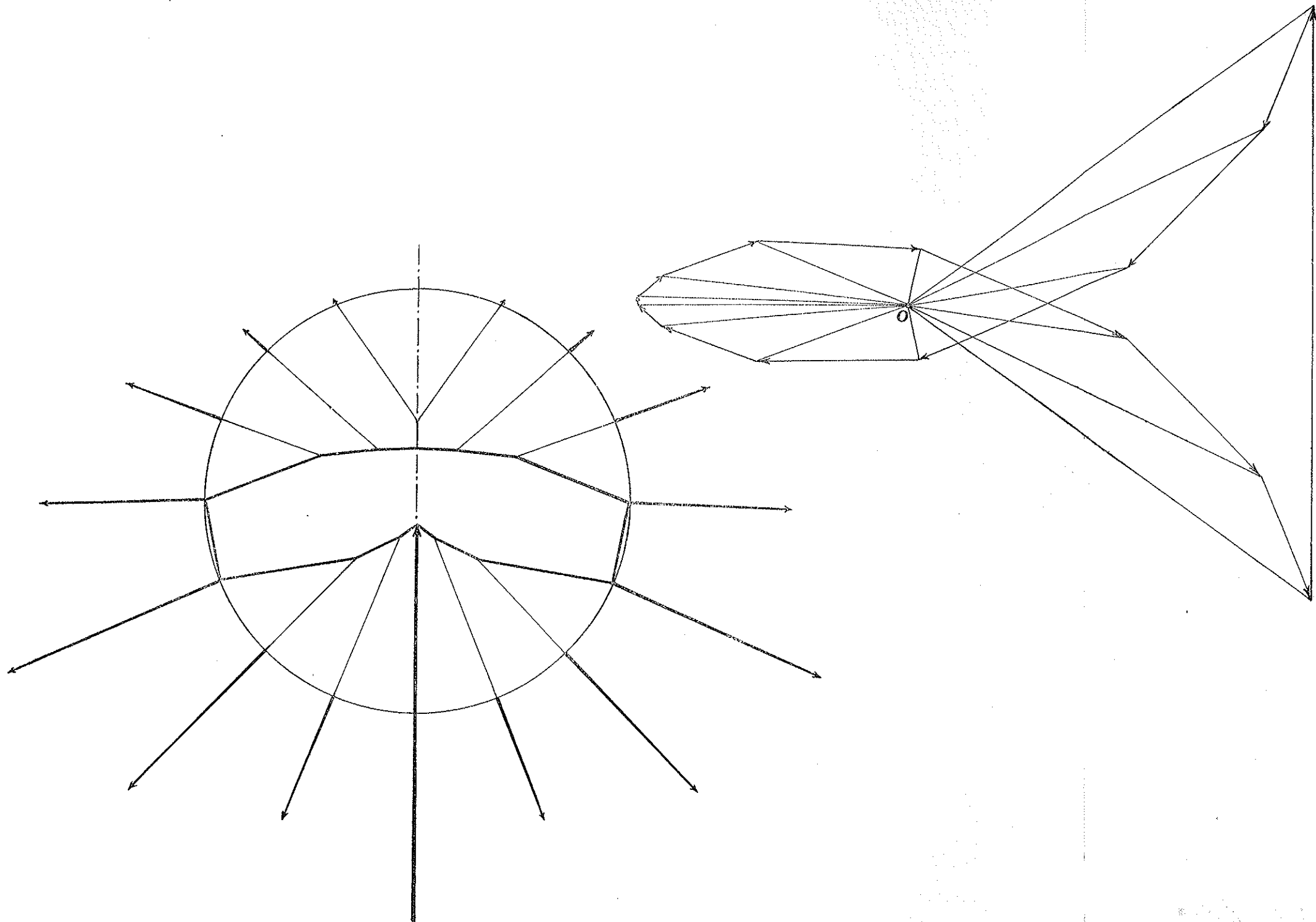
Il secondo rilievo riguarda l'uso degli acciai di qualità a cui l'impiego sistematico degli stati di coazione conduce il progettista, nonchè i minori margini di sicurezza che per essi si possono adottare, dipendentemente da ciò che le sollecitazioni non crescono più proporzionalmente ai carichi, bensì in base ad una legge ancor lineare ma non più omogenea.

Il terzo ed ultimo rilievo si riferisce alla possibilità che il proporzionamento delle strutture, adeguato alle condizioni statiche a pieno carico, sia tale che certe condizioni particolarmente sfavorevoli alla stabilità (come compressioni secondo i meridiani o secondo i paralleli) si vengano a verificare soltanto per condizioni di carico parziali o addirittura a serbatoio vuoto.



PARTICOLARE - A -

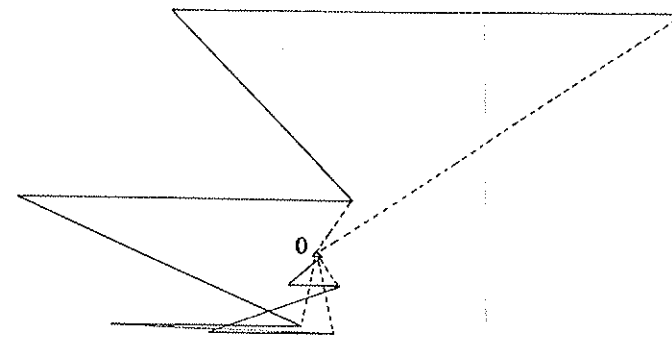
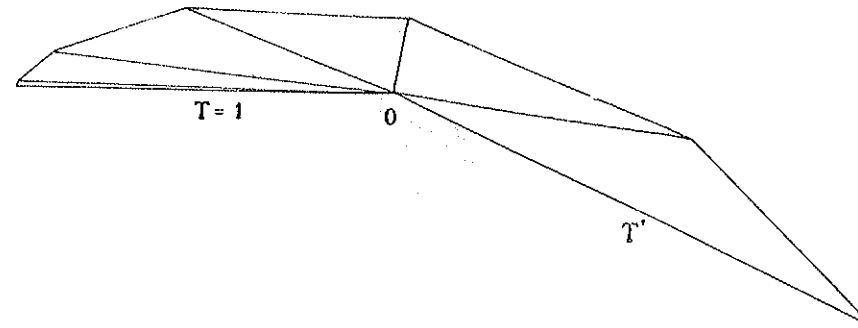
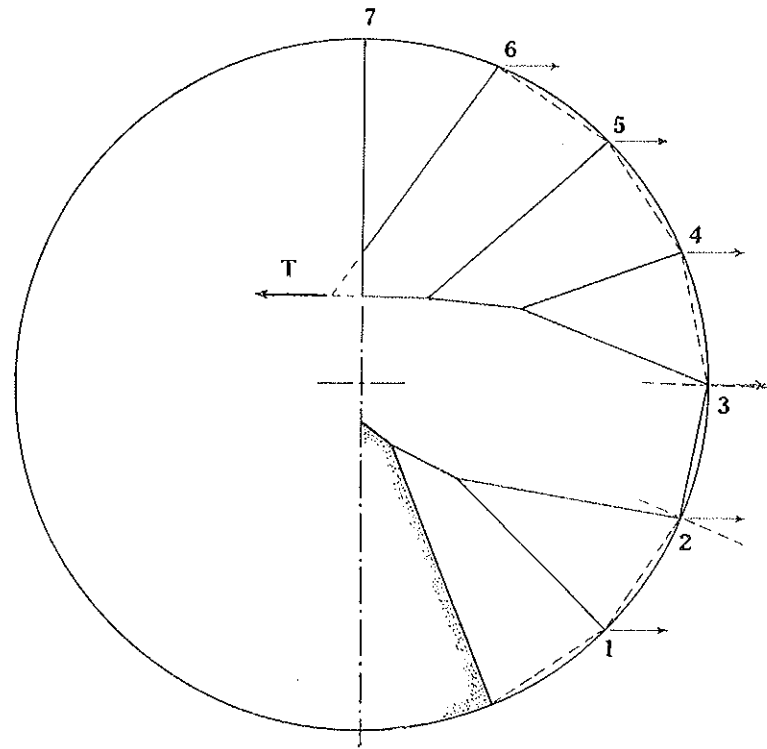




Poligono delle forze e poligono funicolare per le risultanti del peso proprio della struttura e delle pressioni idrostatiche a serbatoio pieno con battente nullo.

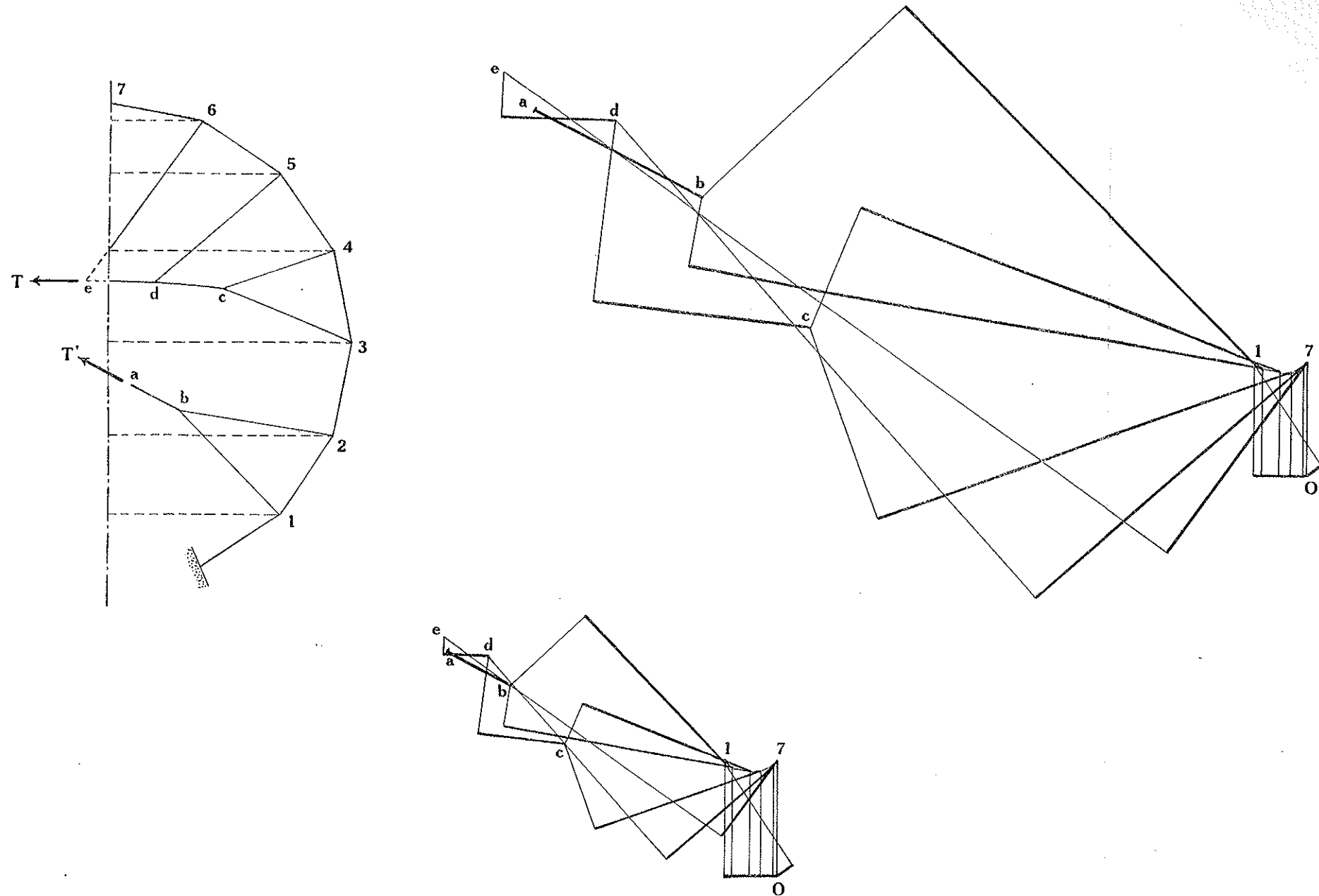
Scala delle lunghezze 1:1000

Scala delle forze 1cm. = 4000 kg.



IPOTESI  $T=1$ .

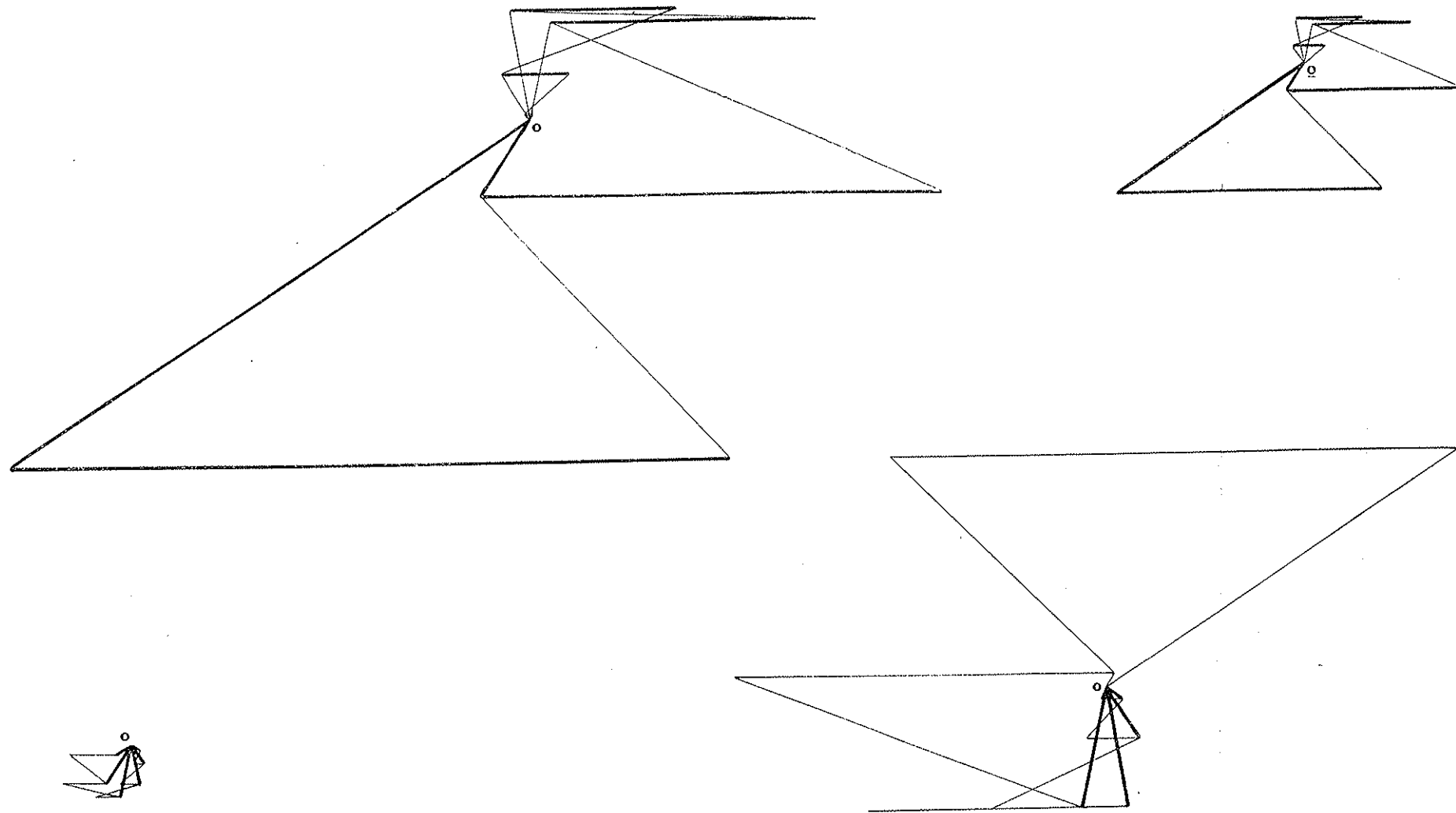
*In alto:* il poligono delle forze nella funicolare di sospensione e nei tiranti che da essa si dipartono.  
*In basso:* la determinazione delle reazioni che ne conseguono secondo il meridiano o secondo i paralleli.



Costruzione grafica della deformata del meridiano da interpretarsi come diagramma di influenza della tensione nella funicolare di sospensione.

*In basso:* nella ipotesi che nella costruzione della sospensione si sia impiegato un acciaio dolce (A 37).

*In alto:* nella ipotesi che nella costruzione della sospensione si sia impiegato un acciaio ad alta resistenza ( $R = 90-100$ ).



Diagrammi degli sforzi secondo il meridiano e secondo i paralleli (*Scala delle forze 1cm. = 1000 kg.*).

*A sinistra:* nella ipotesi che nella costruzione della sospensione si sia impiegato un acciaio dolce (A 37).

*Diagramma in alto:* a serbatoio pieno con battente nullo.

*Diagramma in basso:* a serbatoio vuoto.

*A destra:* nella ipotesi che nella costruzione della sospensione si sia impiegato un acciaio ad alta resistenza ( $R = 90-100$ ).

*Diagramma in alto:* a serbatoio pieno con battente nullo.

*Diagramma in basso:* a serbatoio vuoto.

## DEFORMAZIONI PLASTICHE E DEFORMAZIONI VISCOSE<sup>(\*)</sup>

(Con tre figure)

GUSTAVO COLONNETTI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARY. — Postquam significaverit quam variae esse possint permanentes deformationes, et quam opportunum sit eas distinguere quae originem plasticam ab iis quae viscosam originem habent, auctor ostendit has plerumque efficienter influere non posse in staticam illam compositionem quae plasticas deformationes sequi solet.

In occasione dei miei studi su la statica dei corpi elasto-plastici, mi è accaduto più di una volta di sentirmi obiettare che non tutti i materiali comunemente impiegati nelle costruzioni presentano caratteristiche di deformabilità del genere di quelle da me postulate.

Sta di fatto che certe deformazioni permanenti di alcuni corpi (che non posseggono limiti di snervamento ben definiti) piuttosto che alla plasticità del materiale sembrano attribuibili a quella che più propriamente si chiama la sua viscosità.

Caratteristico, a questo proposito, è il caso dei calcestruzzi, nei confronti dei quali l'attendibilità di calcoli esclusivamente basati su la mia teoria dell'equilibrio elasto-plastico potrebbe pertanto essere messa in dubbio<sup>(1)</sup>.

---

<sup>(\*)</sup> Nota presentata il 5 luglio 1942.

<sup>(1)</sup> A. DANUSSO, *Le autotensioni, spunti teorici ed applicazioni pratiche*, «Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano», R. Politecnico di Milano, 1935; G. OBERI, *Sul comportamento statico di archi incastrati notevolmente ribassati*, R. Politecnico di Milano 1937 (cfr. in modo particolare la nota a piè di pagina 28).

Ora io non ho mai voluto introdurre nelle mie considerazioni la variabile « tempo » per non dar luogo a complicazioni che mi sembrano e mi sembrano tuttora non strettamente indispensabili.

Tuttavia, se proprio ci si vuol porre da questo punto di vista, qualche precisazione è possibile; ed io mi propongo anzi di mostrar qui come se ne possano immediatamente trarre alcune conseguenze di un certo rilievo.

\* \* \*

Noi chiamiamo *deformazione permanente* — in contrapposto con la *deformazione elastica* — quella parte della deformazione prodotta in un corpo dall'azione delle forze esterne, che permane anche quando le forze stesse hanno cessato di agire.

Ora l'esperienza dimostra che la grandezza di queste deformazioni permanenti è in relazione con la intensità delle forze e con la durata della loro azione; più precisamente dimostra che si possono ottenere deformazioni permanenti apprezzabili sia come effetto immediato dell'azione di forze sufficientemente grandi, sia come effetto dell'azione prolungata di forze anche molto piccole.

Giova pertanto distinguere i due casi e studiarli separatamente, attribuendoli rispettivamente alla *plasticità* ed alla *viscosità*, come a due proprietà distinte (se pur coesistenti) della materia.

Perciò noi converremo di chiamare plastiche le deformazioni permanenti che si presentano (insieme con le deformazioni elastiche) come effetto immediato dell'azione delle forze esterne, ammettendo che esse siano indipendenti dalla durata di azione di queste forze.

Queste deformazioni plastiche divengono apprezzabili solo quando l'intensità della sollecitazione oltrepassa un certo limite, variabile da caso a caso, che si chiama limite di elasticità.

Al di sotto di esso il materiale si comporta come perfettamente elastico, nel senso che le deformazioni che si verificano all'atto dell'applicazione delle forze esterne scompaiono completamente se queste forze esterne cessano (immediatamente appresso) di agire.

Se però l'azione delle forze esterne si prolunga nel tempo, può darsi che deformazioni permanenti facciano la loro comparsa, e ciò anche senza che il limite di elasticità sia stato superato; può darsi



ciò che, sotto l'azione di forze anche molto piccole, si manifestino nel materiale deformazioni crescenti, non suscettibili di scomparire (o almeno di scomparire immediatamente) quando le forze cessano di agire.

Ad esse noi daremo il nome di deformazioni viscosse.

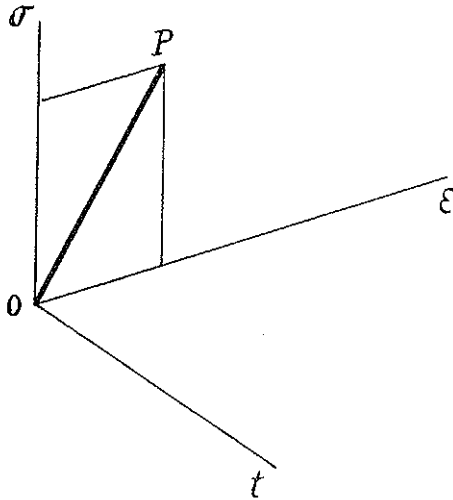


FIG. 1.

A differenza delle deformazioni plastiche, esse non possono più considerarsi come definite in funzione delle sole grandezze delle forze che le hanno prodotte; esse dipendono infatti anche dalla durata di azione di queste forze. Occorre perciò, nel loro studio, introdurre una variabile nuova: il tempo.

\* \* \*

Tentiamo una rappresentazione geometrica del fenomeno.

A tal fine, assunti, a partire da un'origine  $O$ , tre assi coordinati

$\sigma \quad \epsilon \quad t$

su cui intenderemo rispettivamente rappresentate le tensioni, le deformazioni ed i tempi, incominciamo col tracciare sul piano  $\sigma\epsilon$  la linea

rappresentativa del fenomeno per  $t = 0$ , vale a dire all'atto dell'applicazione del carico.

Se l'intensità di questo è tale che i limiti di elasticità del materiale non vengono sorpassati, noi siamo autorizzati a ritenere valida

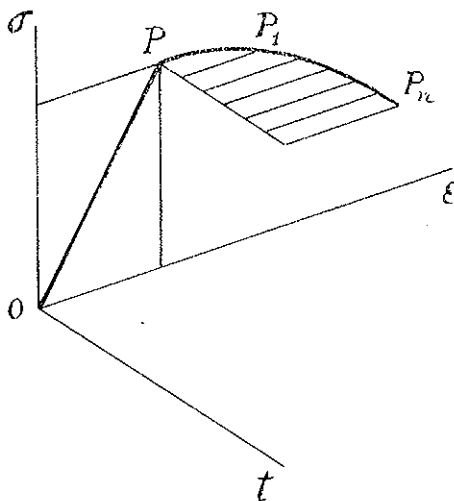


FIG. 2.

la legge di Hooke, cioè ad ammettere che tra le tensioni e le deformazioni interceda una relazione di semplice proporzionalità.

L'operazione sarà quindi graficamente rappresentabile con una retta OP (fig. 1).

Supponiamo ora che il carico si mantenga costante.

L'esperienza dimostra che la deformazione cresce secondo una legge rappresentabile (nel piano di equazione  $\sigma = cost.$ ) con una curva

$$PP_1 \dots P_n$$

del genere di quella prospetticamente disegnata in fig. 2<sup>(1)</sup>.

Al variare di  $\sigma$  questa curva descrive una superficie (fig. 3) la cui forma, naturalmente variabile da caso a caso, può in un certo senso assumersi a definizione della viscosità del materiale.

<sup>(1)</sup> W. H. GLANVILLE, *Studies in Reinforced Concrete. Building Research*, «Technical Paper», n. 12, 1930.

E qui, se vogliamo poter procedere oltre, bisogna evidentemente che noi facciamo qualche ipotesi.

Ora, fin che ci si limita (come noi vogliamo fare) alla considerazione di deformazioni molto piccole - per esempio dell'ordine di gran-

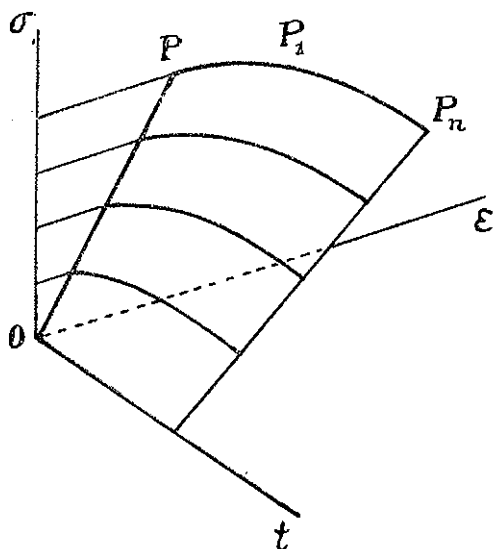


FIG. 3.

dezza delle deformazioni elastiche - sembra ragionevole postulare che, in ogni istante (vale a dire per ogni dato valore di  $t$ ), le deformazioni si mantengano proporzionali alle forze che le hanno prodotte.

Ciò equivale ad assumere come superficie rappresentativa del fenomeno una rigata a generatrici contenute nei piani  $t = \text{cost.}$  avente per direttrici la curva generica  $PP_1 \dots P_n$  e l'asse dei tempi con cui la curva stessa viene ovviamente a coincidere per  $\sigma = 0$ <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Come caso particolare va segnalata la possibilità che, per  $\sigma = \text{cost.}$ , le deformazioni crescano proporzionalmente al tempo (che cioè la curva  $PP_1 \dots P_n$  si riduca ad una retta). Ciò si verifica se il materiale non è suscettibile di in-  
crudimento.

Noi siamo allora condotti a postulare la proporzionalità tra le  $\sigma$  e le velocità di deformazione  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ . La superficie rappresentativa diventa un paraboloido iperbolico.

Per definire il comportamento del materiale basta dare il valore del coeffi-

Se ne può allora generalmente dedurre che, se il corpo è omogeneo, e quindi il coefficiente di proporzionalità è (per ogni valore di  $t$ ) lo stesso in tutti i punti, le deformazioni viscosse costituiscono, come le deformazioni elastiche, un sistema congruente e compatibile coi vincoli<sup>(1)</sup>; un sistema cioè che può sussistere anche da solo, e che per conseguenza continuerà a sussistere da solo, quando al cessare dell'azione delle forze esterne la deformazione elastica si sarà annullata.

\* \* \*

Ora il lettore sa che nel caso delle deformazioni plastiche le cose vanno ben diversamente.

Il passaggio del materiale dal regime elastico al regime plastico si verifica infatti, per ipotesi, solo quando vien superato il limite di elasticità; e questo superamento può avvenire, e di solito avviene, in certi punti del corpo e non in certi altri, per modo che le deformazioni plastiche vi costituiscono un sistema generalmente non congruente (o quanto meno non compatibile coi vincoli) che non può realizzarsi da solo, ma esige, per realizzarsi, la concomitanza di un sistema di de-

---

ciente di proporzionalità, che nella fattispecie prenderà il nome *coefficiente di viscosità*.

A questo caso particolare si riferiscono tutti i tentativi che sono stati fatti per dare veste matematica ad una teoria dei solidi viscosi (Ofr. W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique*, «Mémorial des sciences mathématiques», Paris, 1937, pag. 11 e segg.).

In realtà le cose non sono, generalmente parlando, così semplici.

Al crescere della deformazione i materiali naturali presentano quasi sempre fenomeni di incrudimento più o meno marcati; il coefficiente di viscosità cresce; la velocità di deformazione sotto carico costante diminuisce quindi col trascorrer del tempo; se essa tende a zero, il solido va verso uno stato limite di equilibrio.

Per definire il comportamento del materiale non basta più dare il valore di quel certo coefficiente; bisogna effettivamente definire la forma della superficie che noi abbiamo introdotta come rappresentativa della viscosità.

(<sup>1</sup>) Potremmo addirittura dire che le deformazioni viscosse sono, nei corpi omogenei, ovunque proporzionali alle deformazioni elastiche (e quindi deducibili da queste con un semplice cambiamento di scala) se non ci fosse di mezzo il coefficiente di contrazione laterale  $m$  che, nel caso delle deformazioni viscosse, deve verosimilmente assumere il valore limite  $\frac{1}{2}$  corrispondente alla invarianza del volume.

formazioni elastiche complementari, vale a dire tali che sia congruente e compatibile coi vincoli il sistema delle deformazioni risultanti <sup>(1)</sup>.

Accade così che le deformazioni plastiche di un dato elemento determinino uno stato di deformazione elastica - ed un corrispondente stato di tensione - negli elementi attigui che non hanno ancor raggiunto il loro limite di elasticità; stato che noi designiamo col nome di stato di coazione per distinguerlo dagli ordinari stati di deformazione e di tensione dovuti all'azione delle sollecitazioni esterne.

Il lettore sa anche che questo stato di coazione, sovrapponendosi al primitivo stato di deformazione elastica, tende a modificarlo nel senso di una limitazione delle tensioni in quei punti del corpo in cui il limite di elasticità è stato raggiunto; limitazione compensata da un accrescimento delle tensioni là dove la resistenza del materiale era inizialmente meno bene utilizzata.

In questo senso si può dire che, grazie ai fenomeni plastici, le tensioni interne emigrano, man mano che se ne presenta la necessità, dagli elementi che hanno toccato il limite delle loro possibilità di prestazione a quelli che posseggono ancora un margine più o meno largo di resistenza.

Così, grazie alla plasticità, la natura realizza - nei limiti che i dati del problema di volta in volta le impongono - la migliore possibile utilizzazione delle caratteristiche di resistenza del materiale.

\* \* \*

Nel caso delle deformazioni viscosse, qualcosa di simile si verificherà soltanto nei corpi non omogenei.

Consideriamo per esempio il caso tipico delle strutture in cemento armato, in cui al calcestruzzo (notoriamente suscettibile di deformazioni viscosse) viene accoppiato l'acciaio che, nelle ordinarie condizioni di sollecitazione e di temperatura, non presenta fenomeni di viscosità apprezzabili.

---

<sup>(1)</sup> G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, Torino (ed. Einaudi) 1941 pag. 365 e seg.

È evidente che alle deformazioni viscosse del calcestruzzo dovranno necessariamente corrispondere deformazioni elastiche (e conseguenti incrementi delle tensioni) nelle armature.

Si avrà cioè bensì un trasferimento delle tensioni dagli elementi più deformabili a quelli meno deformabili.

Ma si tratta di un fenomeno che - sia pur nell'ambito delle deformazioni permanenti, e con tutte quelle conseguenze che le deformazioni permanenti notoriamente comportano - fa semplicemente riscontro a quello che si verifica, in regime di perfetta elasticità, per il fatto che i due materiali accoppiati sono dotati di moduli elastici differenti.

Quell'altro trasferimento di tensioni che, in regime elasto-plastico, indipendentemente da ogni difetto di omogeneità dei materiali, tende a porre un limite alle massime sollecitazioni interessando alla resistenza regioni del corpo inizialmente meno impegnate, sembra non avere riscontro alcuno nel caso delle deformazioni viscosse.

## ATTUAZIONE DI UN METODO PER RIVELARE IMMAGINI ULTRAACUSTICHE (\*)

(Con due figure)

OSVALDO BARBIER

SUMMARIVM. — Praevia quaedam significantur de apparatu experimentalis quo, electrico tramite, imago ultraacustica in opticam converti potest. Duae imagines hac ratione effectae exhibentur.

I concetti propri dell'ottica, limitati inizialmente a quanto aveva attinenza con la luce, ed in genere con le radiazioni elettromagnetiche di piccolissima lunghezza d'onda, sono stati in tempi recenti estesi a fenomeni di varia natura, che presentano però analogia con quelli inerenti alla propagazione dei raggi luminosi nei mezzi rifrangenti.

Si è così delineata, tra le altre, un'ottica degli ultrasuoni. Essa si fonda sulla possibilità di conseguire agevolmente valori tanto piccoli del rapporto fra la lunghezza d'onda e le dimensioni degli ostacoli incontrati dalla radiazione, da poter considerare non rilevanti i noti fenomeni diffrazionali, sicchè è stato possibile attuare, sperimentalmente, una acustica geometrica analoga all'ottica geometrica (1).

Ci si è allora domandati se non fosse lecito spingere l'analogia fino a cercare di ottenere vere e proprie immagini ultraacustiche di

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, nella Tornata del 6 giugno 1942.

Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino » del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Vedasi, ad es.: A. GIACOMINI, *Alcuni esperimenti di ottica degli ultrasuoni*, « Alta Frequenza », vol. 7, pag. 660, 1938.

oggetti investiti da ultrasuoni, così come avviene in ottica per gli oggetti illuminati.

Per raggiungere lo scopo, irradato con ultrasuoni l'oggetto di cui si desidera l'immagine, un sistema di specchi o di lenti acustiche ne potrà fornire l'immagine. Poichè questa non è però senz'altro visibile, occorrerà procedere alla « conversione » di essa in immagine ottica nel senso ordinario.

Un procedimento di « conversione », mediante rivelazione per via elettrica, fu già da me descritto (1). Successivamente R. POHLMAN (2) è riuscito ad ottenere sperimentalmente immagini acustiche di oggetti immersi in liquidi, ed a rivelare queste con un dispositivo basato sull'azione direttiva esercitata da un campo sonoro su una sospensione, in xilolo, di lamelle di alluminio.

Attuando in massima il procedimento precedentemente da me descritto, ho potuto ottenere e rivelare immagini acustiche di oggetti immersi in acqua nel modo seguente.

Un generatore di alta frequenza, alimenta un proiettore a quarzo piezoelettrico. Il proiettore è costruito in modo che il quarzo emetta ultrasuoni soltanto da una delle facce, trovandosi l'altra a contatto dell'aria invece che del liquido. In tal modo la potenza ultrasonora, inviata nel liquido, è quadrupla di quella che si avrebbe se il cristallo di quarzo vi fosse completamente immerso.

La frequenza fondamentale di risonanza della piastrina è di  $2,3 \cdot 10^6$  Hz, cui corrisponde, nell'acqua, una lunghezza d'onda di 0,65 mm; la piastrina ha il diametro di 30 mm.

Il generatore di alta frequenza è modulato in ampiezza a frequenza acustica, cosicchè risultano modulati anche gli ultrasuoni generati dal quarzo.

Davanti al proiettore possono essere situati schermi, nei quali sono intagliate aperture di varia forma, ovvero gli oggetti di cui si desiderano le immagini acustiche. L'immagine viene ottenuta per mezzo di uno specchio sferico concavo di vetro, del diametro di 110 mm e distanza focale di 150 mm.

(1) O. BARBIER, « Brev. ital. », n. 370-101; 19 febbraio 1939.

(2) R. POHLMAN, *Über die Möglichkeit einer akustischen Abbildung in Analogie zur optischen*, « ZS. f. Phys. », vol. 113, pag. 697, 1939.



La conversione della immagine ultraacustica in immagine ottica avviene come segue.

Un ricevitore di ultrasuoni a quarzo piezoelettrico esplora l'immagine ultraacustica per successive areole elementari; le tensioni disponibili alle armature del quarzo regolano il flusso luminoso di un sottile pennello di luce, che costruisce l'immagine ottica su una lastra fotografica.

Il ricevitore a quarzo è analogo al proiettore, ma la sua superficie attiva viene limitata da uno schermo portante un foro circolare. Dal diametro di esso dipende la finezza di analisi che si consegue.

Il ricevitore è montato su un supporto mobile, sia orizzontalmente sia verticalmente.

La tensione oscillatoria ricavata alle armature del quarzo, dopo amplificazione di alta frequenza, rivelazione e successiva amplificazione di bassa frequenza, viene condotta ad un dispositivo di modulazione di una sorgente luminosa. La tensione a questo applicata sarà quindi alternativa, di frequenza uguale a quella con la quale è modulato il generatore di alta frequenza.

Per la modulazione della luce viene impiegato un equipaggio di oscillografo Siemens.

L'immagine di una fenditura luminosa viene proiettata, attraverso lo specchietto mobile dell'equipaggio dell'oscillografo, sulla zona centrale di uno schermo, munito di due finestre rettangolari separate da una zona opaca.

In condizioni di riposo dello specchietto, cioè quando nell'elemento di immagine esplorata dal quarzo ricevitore non sono presenti ultrasuoni, non passa luce attraverso la doppia finestra. Quando invece il foro analizzatore si trova in corrispondenza di una zona nella quale siano presenti ultrasuoni, lo specchietto compirà oscillazioni di frequenza eguale a quella con la quale questi sono modulati, e di ampiezza proporzionale alla loro intensità.

L'immagine della fenditura cesserà di coincidere con la zona opaca dello schermo a doppia finestra, e attraverso questa passerà più o meno luce secondo l'ampiezza delle oscillazioni dello specchietto stesso. La luce uscente, modulata secondo i « chiaro-scuro » dell'immagine acustica, viene concentrata su uno schermo munito di un foro circolare di conveniente diametro. Una lente proietta finalmente su una lastra foto-

sensibile, solidale col carrello portante il quarzo ricevitore, una immagine del foro illuminato, di diametro uguale allo spessore della riga di scansione. L'immagine ultraacustica risulterà così fotograficamente registrata.

La figura 1 mostra in grandezza naturale l'immagine di un intaglio a V, eseguito su di uno schermo posto davanti al proiettore di ultrasuoni. Lo specchio concavo forniva una immagine acustica ingrandita nel rapporto 1,5:1; il foro usato per l'analisi aveva il diametro di 1,7 mm. Il caso ottico analogo corrisponde all'immagine acustica di una fenditura illuminata in luce parallela.

La figura 2 si riferisce invece all'immagine acustica di un oggetto investito da un fascio di ultrasuoni. L'oggetto era costituito da tre lastre di ottone della larghezza di 5 mm. L'immagine acustica è stata ottenuta con ingrandimento 1:1; il foro di analisi aveva il diametro di 1 mm.



FIG. 1.

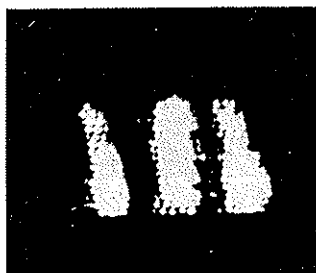


FIG. 2.

Sono state infine ottenute con esito soddisfacente anche immagini ultraacustiche interponendo sul cammino del fascio ultrasonoro lamine metalliche.

L'Autore esprime la sua gratitudine al Presidente dell'Istituto nazionale di elettroacustica, S. E. il Senatore LUIGI LOMBARDI, per il suo interessamento a questo lavoro, e ringrazia vivamente il prof. AMEDEO GIACOMINI, vicedirettore dello stesso Istituto, per l'aiuto ed i consigli ricevuti durante l'esecuzione delle esperienze.

## DI ALCUNE PROPRIETÀ DEI MOMENTI DELLA CURVA DI PROBABILITÀ E DEGLI INDICI DI NORMALITÀ (\*)

ALBINO UGGÈ

*SUMMARIVM.* — Quasnam notas momenta functionis probabilitatis habeant commemorat auctor, ac demonstrat quomodo ex iis deduci possint rationes ad perpendendam distributionis cuiusdam normalitatem.

Vari mezzi, più o meno efficaci, ha a sua disposizione lo statistico per giudicare se una distribuzione di frequenza è assimilabile o no, per il suo andamento, alla funzione delle probabilità degli errori accidentali. Egli può interpolare la curva degli errori e determinare la bontà dell'adattamento, conseguito con la interpolante teorica, confrontando le ordinate note dalla osservazione con quelle calcolate; può, più sommariamente, constatare se vi è coincidenza fra la frequenza degli scarti - o delle intensità - eccedenti, o non eccedenti, in valore assoluto, dati limiti espressi in multipli dello scarto quadratico medio, e la corrispondente frequenza teorica che si avrebbe in una distribuzione obbediente alla legge di GAUSS, può, con analogo criterio, esaminare se, nella distribuzione empirica, i quartili non differiscono dallo scarto probabile; può, d'altronde, trarre un primo parziale indizio dal confronto tra media aritmetica mediana e moda; può, nel caso di grandezze estensive, comparare lo scarto quadratico medio effettivo con quello teorico, desunto da particolari schemi (BERNOULLI, LEXIS, POISSON, ecc.); può, infine, calcolare costanti segnaletiche fondate sulla com-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

parazione fra certe caratteristiche proprie di momenti o di funzioni di momenti della curva delle probabilità ed i corrispondenti valori calcolati sulla distribuzione fornita dalla osservazione. Così, si esamina se  $\beta_1 = \frac{v_3^2}{v_2^3} = \frac{v_3}{\sigma^3}$ , del PEARSON, cioè il rapporto fra il terzo momento medio dalla media aritmetica e il cubo dello scarto quadratico medio sia uguale a 0, e se  $\beta_2 = \frac{v_4}{v_2^2} = \frac{v_4}{\sigma^4}$ , cioè il rapporto fra il quarto momento medio dalla media aritmetica e il quadrato del secondo momento differiscono da 3, poichè 0 e 3 sono, rispettivamente, i valori che detti rapporti acquistano nella curva gaussiana. Parimenti si suole talvolta osservare se si verifica la relazione  $\frac{2v_2}{|v_1|^2} = \frac{2\sigma^2}{|v_1|^2} = \pi$  (essendo  $|v_1|$  lo scarto semplice medio dalla media aritmetica cioè la media dei valori assoluti degli scarti o primo momento assoluto) poichè essa si avvera nella funzione delle probabilità.

Ora, in quest'ultimo ordine di idee, è facile immaginare indici di normalità analoghi ed altrettanto semplici, una volta determinato il valore che i momenti di diverso ordine assumono nella funzione teorica che serve di confronto.

Un breve cenno su talune proprietà dei momenti della curva delle probabilità sarà utile per chiarire il fondamento di questa famiglia di indici.

Per la curva normale delle probabilità è stato dimostrato che il momento  $r^o$ , per  $r$  pari, è  $\frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}}$ , e, per  $r$  dispari, è = 0.

È pure stato dimostrato che, per  $r$  dispari, il valore del momento  $r^o$  assoluto - media dei valori assoluti delle potenze  $r^o$  degli scarti dalla media aritmetica - è  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{r-1}{2} \right) !$

È facile il passaggio, dai risultati ottenuti nella curva normale delle probabilità (cioè della curva della probabilità con precisione  $h=1$ ) a risultati vevoli per una curva di probabilità di precisione  $h$  qualsivoglia.

Come è noto, la curva normale è ottenuta alterando, nella stessa proporzione  $h$ , ma in senso opposto, ordinate ed ascisse della fun-

zione  $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ , cioè, considerando la funzione corrispondente

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \text{ relativa all'argomento } \xi = hx = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Il momento  $r^0$  di  $f(x)$  è

$$[1] \quad v_r = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Il momento  $r^0$  di  $f(\xi)$  è, per quanto si è detto:

$$[2] \quad v'_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \begin{cases} \frac{1.3.5.7\dots(r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}$$

ed il momento  $r^0$  assoluto, per  $r$  dispari, risulta:

$$[3] \quad |v'_r| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r-1}{2}\right)!$$

Portando fuori dell'integrale la costante  $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ , possiamo scrivere la [2] e la [3] nella forma:

$$v'_r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \begin{cases} \frac{1.3.5.7\dots(r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}$$

$$|v'_r| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r-1}{2}\right)! \text{ per } r \text{ dispari}$$

e, moltiplicando e dividendo per  $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ , si ha:

$$v'_r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{h} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$[4] \quad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{cases} \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} & \text{per } r \text{ pari} \\ 0 & \text{per } r \text{ dispari} \end{cases}$$

$$|v'_r| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{h} =$$

$$[5] \quad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^r \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2-1}{2}\right)! \quad \text{per } r \text{ dispari}$$

Ma la [4] rappresenta, evidentemente, come risulta subito confrontandola con la [1], il momento  $r^o$  della funzione originaria  $f(x)$  diviso  $(\sqrt{2}\sigma)^r$  e la [5] costituisce, analogamente, il momento  $r^o$  assoluto della  $f(x)$  pure diviso per  $(\sqrt{2}\sigma)^r$ .

Cioè si avranno le relazioni:

$$[6] \quad v'_r = \frac{v_r}{(\sqrt{2}\sigma)^r}, \quad |v'_r| = \frac{|v_r|}{(\sqrt{2}\sigma)^r},$$

e, quindi le altre:

$$[7] \quad v_r = v'_r \cdot (\sqrt{2}\sigma)^r, \quad |v_r| = |v'_r| (\sqrt{2}\sigma)^r$$

Ma per la [2] e la [3] avremo anche:

$$v_r = \frac{1.3.5.7 \dots (r-1)}{2^{\frac{r}{2}}} 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r = 1.3.5.7 \dots (r-1) \sigma^r.$$

$$[8] \quad |v_r| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)! 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r$$

Da questi risultati si ricavano immediatamente le già ricordate proprietà della curva gaussiana

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 3, \text{ e } \frac{2\sigma^2}{|v_1|} = \pi : \text{ infatti } \beta_1 = \frac{0}{v_2^{\frac{1}{2}}}, \beta_2 = \frac{v_4}{v_2^{\frac{3}{2}}} = 3;$$

$$\frac{2\sigma^2}{|v_1|^2} = \frac{2v_2}{|v_1|^2} = \frac{2v_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 0! \cdot 2^{\frac{1}{2}} v_2^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \pi$$

Ma gli stessi risultati permettono di congegnare altri consimili criteri di normalità basati pure sul confronto fra momenti di ordine diverso.

Accenneremo, per esempio ad uno di essi, ricavato dal rapporto fra momenti di ordine  $r$  ed  $r-2$ .

Ragguagliando  $v_r$  ad  $v_{(r-2)}$ , per  $r$  pari, otterremo:

$$[9] \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (r-1) \sigma^r}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (r-2-1) \sigma^{r-2}} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2$$

e, per  $r$  dispari,

$$[10] \quad \frac{|v_r|}{|v_{r-2}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{r}{2}} \sigma^r}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{r-2-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{r-2}{2}} \sigma^{r-2}} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2$$

Quindi, in una distribuzione che segua la legge gaussiana, i rapporti fra il quarto ed il secondo momento, fra il sesto ed il quarto ecc. dovrebbero rispettivamente riuscire pari a  $3\sigma^2, 5\sigma^2$  ecc. o prossimi a tali valori multipli della varianza, mentre i rapporti fra il terzo ed il primo momento assoluto, fra il quinto ed il terzo ecc. dovrebbero essere uguali o prossimi a  $2\sigma^2, 4\sigma^2$ , ecc.

La [10] consente poi di esprimere il momento assoluto di ordine  $r^0$  (per  $r$  dispari) in termini del primo e del secondo momento: infatti da

$$\frac{|v_r|}{|v_{r-2}|} = (r-1) \sigma^2 = (r-1) v_2 \text{ si ricava } |v_r| = |v_{r-2}| (r-1) v_2 \text{ e, partendo}$$

$a_i$	$f_i$	$x_i = (a_i - m)$	$x_i^2 = (a_i - m)^2$	$x_i^3 = (a_i - m)^3$	$x_i^4 = (a_i - m)^4$	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	$x_i^3 f_i$	$x_i^4 f_i$
1	1	-8	64	-512	4096	-1	64	-512	4096
2	5	-7	49	-343	2401	-35	245	-1715	12005
3	24	-6	36	-216	1296	-144	864	-5184	31104
4	92	-5	25	-125	625	-460	2300	-11500	57500
5	279	-4	16	-64	256	-1116	4464	-17856	71424
6	655	-3	9	-27	81	-1965	5895	-17685	53055
7	1210	-2	4	-8	16	-2420	4840	-9680	19360
8	1747	-1	1	-1	1	-1747	1747	-1747	1747
9	1974	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1747	1	1	1	1	1747	1747	1747	1747
11	1210	2	4	8	16	2420	4840	9680	19360
12	655	3	9	27	81	1965	5895	17685	53055
13	279	4	16	64	256	1116	4464	17856	71424
14	92	5	25	125	625	460	2300	11500	57500
15	24	6	36	216	1296	144	864	5184	31104
16	5	7	49	343	2401	35	245	1715	12005
17	1	8	64	512	4096	11	64	512	4096
	10.000					-7895	40838	-65879	500.582
						+7895		+65879	
						15.790		131.758	



da  $|v_3| : |v_1|$  si ha:  $\frac{|v_3|}{|v_1|} = 2v_2$ ,  $|v_3| = 2v_2|v_1|$  da cui discende:  $|v_5| = |v_3| 4v_2 = 4 \times 2 |v_1| v_2 v_2 = 8v_2^2$ ;  $|v_7| = 6 \times 8 |v_1| v_2^2 v_2 = 48 |v_1| v_2^3$ ;  $|v_9| = 8 \times 48 |v_1| v_2^3 v_2 = 384 |v_1| v_2^4$  ecc.

Applichiamo il criterio esposto alla distribuzione, contenuta nella tabella unita, che presenta i caratteri della normalità, per essere stata desunta dalle tavole degli integrali della funzione di probabilità.

I momenti medi dalla media aritmetica risultano:

$$v_1 = 0, |v_1| = 15.790 : 10.000 = 1,790$$

$$v_2 = 40.838 : 10.000 = 4,0838$$

$$v_3 = 0, |v_3| = 131.758 : 10.000 = 13,1758$$

$$v_4 = 500.582 : 10.000 = 50,0582$$

Si confronti il 4° momento col 2°. Converrà applicare la correzione di SHEPPARD, per eliminare od attenuare l'effetto dovuto al fatto che si sono assunte come intensità i valori centrali delle classi (che, nel caso concreto, hanno modulo = 1).

Il momento secondo corretto diventa  $4,0838 - \frac{1}{12} = 4,00047$ , ed il momento 4°  $= 50,0582 - \frac{1}{2} 4,0838 + \frac{7}{240} = 48,04547$ .

Il valore del rapporto che si ottiene,  $48,04547 : 4,00047 = 12,00996$ , è assai prossimo al triplo del secondo momento corretto  $3 \times 4,00047 = 12,00141$ , come potevasi prevedere in base alla relazione posta in luce.

## SUL GRUPPO DELLE CUSPIDI DELLE CURVE CUSPIDATE DI UNA RETE (\*)

MARIO TOGNETTI

**SUMMARY.** — Classis  $Q$  cuspidum curvarum cuspidatarum alicuius retis, quae ad lineare systema tripliciter infinitum pertineat, exprimitur per classem (canonicam) punctorum curvae  $H$ , qui locus est cuspidum curvarum cuspidatarum eiusdem systematis, et per classes serierum aequivalentiae variantium et covariantium fundamentalium.

In questa nota mi propongo di esprimere il gruppo  $Q$  delle cuspidi delle curve cuspidate di una rete, appartenente ad un sistema lineare triplamente infinito  $|C|$ , per mezzo di un gruppo (canonico) di punti della curva  $H$ , luogo delle cuspidi delle curve cuspidate di  $|C|$ , e di gruppi delle serie invarianti  $S$  ed  $\Omega$  di  $F$  e delle serie covarianti  $(C, C)$  e  $(C, C')$  di  $|C|$  (1).

Per semplicità suppongo che il sistema  $|C|$ , irriducibile, semplice, non possedente curve fondamentali, sia anche privo di punti base.

1. — Ricordiamo (2) le seguenti proprietà del sistema  $|C|$ .

Le jacobiane  $C_j$  di tutte le reti estratte da  $|C|$  costituiscono un sistema lineare triplamente infinito  $|C_j|$ ; il sistema jacobiano  $|C_j|$  di

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi, il 6 giugno 1942.

(1) Per la definizione di queste serie d'equivalenza e per le altre nozioni di cui qui si fa uso, in particolare per la relazione funzionale che traduce la nota formula di Noether che dà il genere di una curva spezzata, che qui si applica, vedere: F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche*. Lezioni tenute dall'Autore presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica, raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI. Ed. Cremonese, Roma, 1942-XX.

(2) Vedi, per esempio, M. PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*. Rendiconti del C. Matematico di Palermo. tomo XX, 1905, n. 1 e 2.

$|C_j|$  è il sistema riducibile formato dalla curva fissa  $H$  e dalle curve del sistema  $|C|$ , cioè:

$$|C_j| = |H + C|$$

Sulla superficie  $F$  vi sono  $y$  punti, ciascuno caratterizzato dalla proprietà di essere punto di contatto per le curve della rete di  $|C|$  da esso individuata: i suddetti punti, il cui insieme denoteremo con  $Y$ , sono i punti doppi della involuzione delle coppie neutre di  $F$  rispetto a  $|C|$ ; sicchè, sulla superficie  $F'$  immagine proiettiva di  $|C|$ , essi hanno per immagini i punti cuspidali della linea doppia  $D'$  di  $F'$ .

Inoltre, la curva  $H$  ha un punto doppio in ciascuno dei punti  $Y$  ed appartiene al sistema lineare:

$$|8C + 4K|.$$

2. - La serie canonica virtuale di  $|C_j|$  è data <sup>(1)</sup> da:

$$(C_j, C'_j) \equiv 2\Omega + 9(C_j, C'_j),$$

dove  $\Omega$  rappresenta la serie canonica impura di  $F$ .

D'altra parte, essendo  $|C_j| = |H + C|$ , si ha anche <sup>(2)</sup>

$$(C_j, C'_j) \equiv (H, H') + (C, C') + 2(C, H)$$

dove  $(H, H')$  è un gruppo canonico virtuale di  $H$ ,  $(C, C')$  un gruppo canonico virtuale (= effettivo) di  $C$  e  $(C, H)$  denota il gruppo virtuale delle intersezioni di  $C$  con  $H$ .

Uguagliando le due espressioni di  $(C_j, C'_j)$  si ottiene:

$$2\Omega + 9(C_j, C'_j) \equiv (H, H') + (C, C') + 2(C, H);$$

<sup>(1)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 258.

<sup>(2)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 216.

ma  $(C_j, C'_j)$  è a sua volta equivalente a  $2\Omega + 9(C, C')$  e  $H \equiv 8C + 4K \equiv 4(C + C')$ , perciò:

$$2\Omega + 18\Omega + 81(C, C') \equiv (H, H') + (C, C') + 8(C, C) + 8(C, C').$$

Esprimendo un gruppo canonico virtuale  $(H, H')$  di  $H$  per mezzo di un suo gruppo canonico effettivo  $M(H)$  e dei suoi punti doppi  $Y$  mediante la relazione <sup>(1)</sup>

$$(H, H') \equiv M(H) + 2Y$$

e sostituendo si ha:

$$[1] \quad 20\Omega + 72(C, C') \equiv M(H) + 2Y + 8(C, C).$$

Ora il gruppo  $Y$  dei punti cuspidali di  $D'$  può esprimersi per mezzo delle serie invarianti  $S$  ed  $\Omega$  di  $F$  e delle serie covarianti  $(C, C)$  e  $(C, C')$  di  $|C|$  con la relazione <sup>(2)</sup>

$$Y \equiv \Omega - S + 2(C, C) + 4(C, C').$$

Mediante sostituzione nella [1] si deduce:

$$18\Omega + 2'S \equiv M(H) + 12(C, C) - 64(C, C')$$

e da questa, tenendo conto che <sup>(3)</sup>

$$2(S + \Omega) \equiv Q - 12(C, C')$$

si ricava infine l'espressione cercata di  $Q$ :

$$[2] \quad Q \equiv M(H) + 12(C, C) - 52(C, C') - 16\Omega.$$

La [2] può anche scriversi:

$$2(S + \Omega) \equiv M(H) + 12(C, C') - 64(C, C') - 16\Omega$$

e fornisce un'altra espressione della serie invariante assoluta  $2(S + \Omega)$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 229.

<sup>(2)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 270.

<sup>(3)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 260.

## ATTRAZIONE NEWTONIANA RITARDATA (\*)

CARLO CATTANEO

SUMMARY. — Auctor, postquam exposuerit investigationes, quae de possibili velocitate propagationis gravitatis in classica astronomia antea actis temporibus peractae sunt, duo simplicissima postulata ponit, e quibus eruit novam legis gravitationis expressionem, qua deterministicum principium excluditur, seu novam gravitatis legem quae haereditaria nota pollet. Demonstrat praeterea huiusmodi legem nihil fere, si superiores terminos negligas, differre a legibus, quibus ARMELLINI in suis cosmologicis investigationibus usus est.

Per rendere ragione di molti fatti cosmogomici rimasti inspiegati nella meccanica celeste classica, imperniata sulla formula newtoniana di gravitazione, il Professor ARMELLINI ha proposto, or è qualche anno, di modificare la legge dell'attrazione universale alla maniera seguente:

$$[1] \quad F = f \frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right);$$

il significato dei simboli è evidente:  $m$  e  $m'$  sono le masse dei due corpi,  $r$  la loro distanza attuale,  $f$  il medesimo coefficiente che compare nella formula classica di Newton,  $\varepsilon$ , coefficiente della derivata temporale di  $r$ , costituente con essa il cosiddetto termine correttivo, è un parametro assai piccolo che ha, come  $f$ , carattere universale; le sue dimensioni fisiche sono quelle dell'inverso di una velocità.

La [1] saggiata dall'ARMELLINI in una serie di ormai conosciutissime Note<sup>(1)</sup>, ha condotto a conclusioni molto soddisfacenti, vale a

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton*, «Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei» (1937-1938-1939) e «Rendiconti della Reale Accademia d'Italia» (1940-1941).

dire in buon accordo con i dati dell'osservazione astronomica, su una quantità di questioni di cosmogonia che qui non è il caso neppure di accennare.

Il successo della formula dell'ARMELLINI, se da un lato costituisce il migliore argomento della sua fondatezza, dall'altro fa nascere il desiderio di cercarne una giustificazione aprioristica basata sui principi della filosofia naturale. Nella presente Nota mostrerò (n. 3) come in effetto la [1] possa considerarsi espressione approssimata di una spontanea modificazione della legge di Newton, unicamente ispirata al principio di escludere a priori, come impossibile, ogni azione immediata a distanza (n. 2).

Le pagine che seguono sono dedicate ad illustrare questa legge modificata, che chiameremo legge di attrazione newtoniana ritardata.

Nella formula che la esprime compare una costante  $w$  a priori indeterminata: è facile tuttavia riconoscere, in base all'accennata equivalenza approssimata con la formula dell'ARMELLINI, che fra la  $w$  e  $\epsilon$  della [1] intercorre una semplice relazione: la circostanza presenta qualche interesse potendosi tal  $w$  interpretare, *in un certo senso*, come misura della rapidità con cui si propaga la gravitazione.

Della formula proposta è facile (n. 4) seguendo un'osservazione del KRALL<sup>(1)</sup>, riconoscere il carattere ereditario poichè la forza di attrazione attuale viene da essa subordinata, in sostanza, alle simultanee derivate temporali, di ogni ordine, della distanza tra i due corpi. Da un punto di vista speculativo, ammessa la legge indicata, si vengono ad escludere nell'ambito meccanico i principi deterministici ordinari.

Poichè il punto di partenza delle presenti considerazioni è l'esclusione di qualsiasi azione immediata a distanza, penso utile, per completezza, cominciare con il riassumere per sommi capi (n. 1) i principali tentativi fatti nell'Astronomia classica per attribuire alla gravitazione una velocità finita.

I. LE IPOTESI CLASSICHE SULLA PROPAGAZIONE DELLA GRAVITAZIONE<sup>(2)</sup>. — La meccanica newtoniana postula che tra due corpi (punti-

(1) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica vibratoria*, Zanichelli, Bologna 1940.

(2) Cfr. J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, tome II, chap. X.

formi) S e P di masse  $m$  e  $m'$  si eserciti, qualunque siano le loro condizioni di moto, una mutua forza attrattiva la cui grandezza  $F$  è legata alla simultanea distanza  $r$  fra i due corpi dalla celebre formula

$$[N] \quad F = f \frac{m m'}{r^2};$$

la subordinazione di  $F$  alla posizione relativa dei due corpi (e cioè al valore di  $r$ ) è istantanea.

La naturale ripugnanza ad ammettere tale immediatezza e il desiderio di eliminare alcune discordanze tra la teoria e l'osservazione, hanno suscitato, già da un secolo, l'idea, pur vaga, che l'azione gravitazionale si propaghi attraverso gli spazi interstellari e interplanetari con velocità finita.

L'ipotesi più antica in proposito risale, come è ben noto, al LAPLACE, secondo il quale la velocità del pianeta rispetto al sole darebbe origine, nei riguardi dell'attrazione, a una specie di aberrazione, perfettamente analoga a quella luminosa. Considerata una terna T di orientamento invariabile con l'origine in S (sole), si postula che la gravità emani da S, così come si propagherebbe l'impulso in un fluido, con velocità finita costante V rispetto a detta terna. Se il pianeta P si muove rispetto a T con velocità che non sia puramente radiale, l'azione che esso risente dal sole non risulta diretta come SP ma appare deviata di un certo angolo. Supposto per semplicità che il pianeta descriva attorno al sole una circonferenza, l'ipotesi del LAPLACE equivale ad ammettere che esso risenta oltre all'ordinaria attrazione newtoniana anche una forza tangenziale opposta al moto, proporzionale all'attrazione medesima e alla velocità del pianeta.

La teoria del LAPLACE mai si accorda con l'osservazione. Basti pensare che l'accennata resistenza tangenziale dovrebbe dar origine, tra l'altro, ad accelerazioni secolari nel moto medio dei pianeti, accelerazioni che non risultano all'osservazione se non per ciò che concerne il moto della Luna attorno alla Terra. È vero che essa porterebbe, in compenso, un'accrescimento secolare della longitudine media, accrescimento effettivamente osservato (sebbene in misura assai piccola) nel moto della Terra e di Mercurio; ma volendo spiegare mediante la teoria del LAPLACE sia l'accelerazione del moto medio lunare sia gli

accrescimenti di longitudine della Terra e di Mercurio, quali risultano dall'osservazione occorrerebbe adottare per  $V$  tre valori distinti<sup>(1)</sup>.

Le cose avvengono in modo un pò diverso secondo il LEHMANN-FILHÈS: anche secondo questo scienziato l'azione risentita dal pianeta proviene, anzichè dalla posizione attuale del sole da una posizione da questo occupata precedentemente, ma quest'ultima è determinata non dal moto relativo pianeta-sole bensì dal moto assoluto del sole rispetto alle stelle fisse.

Anche questa seconda ipotesi non sfugge alle obiezioni della precedente, pur potendo anch'essa dar ragione di alcuni degli accennati effetti secolari riscontrati all'osservazione.

Le teorie precedenti escludono che la forza di attrazione solare sia conservativa. Non volendo rinunciare a questo carattere si è proposto di modificare l'ipotesi di LEHMANN-FILHÈS supponendo che sia il potenziale e non la forza a propagarsi. Le superficie equipotenziali del campo di forza generato dal Sole, mobile nello spazio assoluto, sarebbero sempre sfere di raggio crescente nel tempo e nascenti, istante per istante, attorno alla posizione a mano a mano occupata dal sole. Ma anche questa ipotesi non ha dato migliore prova delle altre.

L'obiezione principale che a mio parere deve farsi a tutte le teorie or ora accennate, a prescindere da ogni controllo sperimentale, sta nel fatto che ciascuna di esse ammette un particolare riferimento privilegiato sede della propagazione gravitazionale. E questo, pur lasciando da parte ogni considerazione relativistica, costituisce un regresso di fronte alla stessa meccanica newtoniana la quale, se pure ammette riferimenti privilegiati, ha almeno il vantaggio di ammetterne infiniti tutti equivalenti (tutti i cosiddetti riferimenti galileiani).

Altro punto debole comune alle teorie stesse consiste nel considerare in modo non simmetrico i due corpi gravitanti, fra i quali viene ben distinto qual'è il corpo attraente e quale il corpo attratto; nè serve invertire l'ufficio dei due corpi, ché le correzioni delle forze risentite dall'uno e dall'altro sono in generale differenti sia in grandezza che in direzione, tanto da dover rinunciare al principio di azione e reazione, anche formulato in una forma più generale di quella classica.

(1) Rispettivamente  $V \approx 9,10^{17} \frac{cm}{sec}$ ,  $V \approx 1,8 \cdot 10^{17} \frac{cm}{sec}$ ,  $V = 1,8 \cdot 10^{19} \frac{cm}{sec}$ .



Fatta questa rapida rassegna passo a proporre, *a puro scopo di tentativo*, un'altra modificazione della legge del NEWTON.

2. AZIONE NEWTONIANA RITARDATA. — Noi ammetteremo che la [N] si mantenga rigorosamente valida solo in condizioni stazionarie, quando cioè la distanza  $r$  fra i due corpi si mantiene costante. In caso diverso noi ammetteremo ancora che a una distanza  $r$  fra i due corpi si associ una forza attrattiva di intensità data da [N] ma, escludendo a priori che tale azione possa esplicarsi istantaneamente, supporremo che essa agisca con un certo ritardo, ritardo tanto maggiore quanto più grande è il valore di  $r$  medesimo. Per motivi di semplicità supporremo che questo ritardo  $\tau$  (il quale dovrà senz'altro annullarsi insieme con  $r$ ) sia semplicemente proporzionale a  $r$  medesimo. Porremo dunque

$$[2] \quad \tau = \frac{r}{w}$$

con  $w$  costante; si tratta perciò del medesimo ritardo che si avrebbe se l'azione gravitazionale si propagasse con velocità finita  $w$ . Ma naturalmente alla costante  $w$ , avente le dimensioni fisiche di una velocità, non converrà in ogni caso attribuire che un significato astratto: a un'effettiva propagazione gravitazionale non si saprebbe neppure se attribuire il verso da S a P o l'opposto (1).

Quanto precede equivale, in termini precisi, ad ammettere i seguenti postulati:

I) *Nelle più generali condizioni di moto l'azione mutua esplicita da due corpi (puntiformi) gravitanti ammette a ogni istante come retta di applicazione la congiungente i due corpi.*

II) *L'intensità di questa azione all'istante  $t$  coincide con quella dell'azione newtoniana ordinaria relativa non alla distanza  $r$  che i due*

---

(1) Volendo parlare di un'effettiva propagazione forse converrebbe considerare due onde sferiche distinte emananti da S e da P o incontrantisi a metà distanza. In tal caso come velocità di propagazione anziché il valore esatto della costante  $w$  bisognerebbe assumere  $\frac{w}{2}$ .

corpi hanno nel medesimo istante, bensì alla distanza  $r_{t-\frac{r}{w}}$  che i due corpi avevano nell'istante  $t - \frac{r}{w}$ . Con tale modificazione la legge di attrazione si formula allora così;

$$[3] \quad F = f \frac{mm'}{r^2_{t-\frac{r}{w}}}.$$

Il secondo postulato, equivalente ad ammettere la semplice proporzionalità fra ritardo  $\tau$  e distanza  $r$ , è giustificato da motivi di semplicità; il primo postulato consegue invece dal considerare la gravitazione come un'azione esplicita direttamente e in modo simmetrico dai due corpi senza alcun intermediario.

Mostreremo ora come la [1] dell'ARMELLINI possa considerarsi un'espressione approssimata della [3].

3. PRIMA E SECONDA APPROSSIMAZIONE; COINCIDENZA CON LA FORMULA DI ARMELLINI. - Sviluppiamo la funzione  $\frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}}$  in serie di TAYLOR nell'intorno dell'istante  $t$ ; si ha, indicando con  $r$  la distanza attuale,

$$[4] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{2}{w} \frac{dr}{dt} + \dots \right).$$

Tenuto conto dell'indubbio grandissimo valore di  $w$  si ha in prima approssimazione

$$[5] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2}.$$

con ciò la formula [3] dell'attrazione ritardata viene ricondotta all'ordinaria formula di NEWTON. In seconda approssimazione si ha invece:

$$[6] \quad \frac{1}{r^2_{t-\frac{r}{w}}} = \frac{1}{r^2} \left( 1 + \frac{2}{w} \frac{dr}{dt} \right).$$

La [6] è in accordo con quanto abbiamo asserito nelle pagine precedenti; basta porre

$$[7] \quad \varepsilon = \frac{2}{w}$$

perchè la [3] in seconda approssimazione si identifichi con la [1]. Attribuendo alla  $\varepsilon$  il valore numerico proposto da ARMELLINI  $\left(4 \cdot 10^{-14} \frac{\text{sec}}{\text{cm}}\right)$  come massimo possibile, si ha per il minimo valore di  $w$

$$w = 5,10^{13} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Il valore di  $w$  è però sempre dubbio. Anche prescindendo dalla inevitabile incertezza nel valore assegnato alla  $\varepsilon$ , si rifletta che il valore numerico effettivamente competente alla  $w$  è certamente diverso, e forse molto diverso, da quello che si può ottenere sostituendo alla [3] una formula approssimata.

Ripeto poi ancora che alla  $w$  non deve attribuirsi il significato concreto di una velocità.

4. ASPETTO EREDITARIO DELL'ATTRAZIONE RITARDATA. — Se nel secondo membro della [3] si immagina sostituito il completo sviluppo [4] la forza  $F$  risulta dipendere *da tutte* le successive derivate della funzione  $r$ . Tale circostanza mette in luce come alla determinazione del valore della forza di attrazione ad un'assegnato istante contribuisca, non solamente la posizione istantanea dei due corpi, ma anche la storia passata delle loro posizioni reciproche, spinta fino ad un intorno *completo* dell'istante attuale. La [3] ha dunque carattere ereditario.

Conseguentemente il problema dei due corpi, e con esso ogni altro problema più complesso, si presenta ricondotto a equazioni differenziali nelle quali compaiono derivate delle funzioni incognite di ordine comunque elevato: a equazioni differenziali, per così dire, di ordine infinito. Come è ben noto, ad analoghe equazioni si possono ridurre, previo sviluppo in serie dei « nuclei ereditari » anche le equazioni

integrodifferenziali che traducono il generico problema ereditario nell'indirizzo di VOLTERRA <sup>(1)</sup>.

La presenza in queste equazioni differenziali di derivate di ordine comunque elevato mostra che, ad individuare la soluzione di un problema meccanico mediante la [3], saranno insufficienti non solamente i dati iniziali consueti (posizione e atto di moto del sistema) ma addirittura non basterà un numero finito di dati numerici. Una Meccanica celeste fondata sulla [3] sembra dunque allontanarsi considerevolmente da ogni schema classico, venendo addirittura a mancare per essa i principi deterministici, almeno nella loro accezione ordinaria.

Di tale notevole circostanza, di interesse prevalentemente speculativo, ci accontentiamo di avere fatto cenno.

---

(1) Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, Vol. I, cap. III.

## GRUPPI QUASI-ABELIANI (\*)

GUIDO ZAPPA

SUMMARY. — Americanus O. Ore, nuper doctrinam de abstractis classibus in generaliore doctrina de structuris inseruit. Qua nova ratione, classes sunt potius subclassium quam elementorum acervi, ita ut praecipuum momentum detur non studio classium abelianarum, sed classium quas Auctor quasi-abelianas vocat, scilicet in quibus duae subclasses inter se permutari semper possint. Priore hac dissertatione Auctor recenset omnia genera classium quasi-abelianarum, quae e duobus tantum elementis gigni possint, in altera expositurus dissertatione classes quasi-abelianas, quae e finito elementorum numero gigni possint.

Nel recente indirizzo dato da O. ORE alla teoria dei gruppi, secondo il quale le proprietà dei gruppi vengono collegate con le proprietà delle strutture (1), viene ad assumere grande importanza, in luogo del concetto di sottogruppo invariante o normale di un gruppo, quello di sottogruppo quasi-normale (cioè permutabile con ogni altro sottogruppo del gruppo) (2).

Diverse proprietà dei sottogruppi quasi-normali vengono studiate, nelle memorie citate, dallo stesso ORE, il quale tra l'altro introduce diversi concetti che hanno il parallelo nell'usuale teoria dei sottogruppi normali, come, ad esempio, quello di *quasi-centro* (sottogruppo generato da tutti i sottogruppi ciclici permutabili con ogni sottogruppo del gruppo) che corrisponde al noto concetto di centro.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi nella tornata del 20 febbraio 1942.

(1) [1] OYSTEIN ORE, *Structures and group theory*, I, Duke Mathematical Journal, 3, pagg. 149-174 (1937).

[2] OYSTEIN ORE, *Structures and group theory*, II, Duke Mathematical Journal, 4, pagg. 247-269 (1938).

[3] OYSTEIN ORE, *Contributions to the theory of groups of finite order*, Duke Mathematical Journal, 5, pagg. 431-460 (1939).

(2) *Op. cit.* [1] in (1), pagg. 162.

Nel presente lavoro vengono introdotti i gruppi *quasi-abeliani* (gruppi in cui due sottogruppi son sempre permutabili tra loro, ovvero ogni sottogruppo è quasi-normale), che corrispondono ai gruppi abeliani dell'usuale teoria. Il loro studio ha evidentemente interesse, oltre che in sé, anche per tutto l'ordine di idee introdotto dalle ricerche di Ore.

In questo lavoro vengono determinati tutti i possibili tipi di gruppi quasi-abeliani, d'ordine finito o infinito, generabili mediante due elementi. In una nota successiva ci proponiamo di trovare i tipi di gruppi quasi abeliani generabili mediante un numero finito di elementi.

1. DEFINIZIONE. *Un gruppo  $G$  si dice QUASI-ABELIANO quando due suoi sottogruppi qualunque sono sempre permutabili tra loro.*

Prima di determinare tutti i gruppi quasi-abeliani con due generatori, esamineremo il caso particolare in cui il sottogruppo ciclico generato da ciascuno dei due generatori, se finito, ha per ordine la potenza di un numero primo.

2. Sia in primo luogo  $C$  un gruppo quasi-abeliano, con due generatori,  $a$  e  $b$ , il primo dei quali sia aperiodico, mentre l'altro abbia periodo  $p^\alpha$  (con  $p$  primo e  $\alpha$  intero positivo) di modo che si abbia  $b^{p^\alpha} = 1$ .

Mostriamo anzitutto che  $\langle b \rangle$  <sup>(1)</sup> è normale in  $G$ . Infatti, nel caso contrario è  $a^{-1} b a = \bar{b}$ , con  $\bar{b}$  non appartenente a  $\langle b \rangle$ . Allora  $\langle b, \bar{b} \rangle$  dovrebbe essere più vasto di  $\langle b \rangle$ , e dovrebbe avere, d'altra parte, ordine finito, perchè tali sono gli ordini di  $\langle b \rangle$  e  $\langle \bar{b} \rangle$ , e perchè questi due sottogruppi devono essere permutabili tra loro. Ma dovendo essere permutabili anche  $\langle a \rangle$  e  $\langle b, \bar{b} \rangle$ , l'indice in  $G$  dell'intersezione  $\langle a \rangle \wedge \langle b, \bar{b} \rangle$  tra  $\langle a \rangle$  e  $\langle b, \bar{b} \rangle$ , in  $\langle b, \bar{b} \rangle$ , dovrebbe eguagliare l'indice di  $\langle a \rangle$  in  $G$ , il quale indice, non avendo  $a$  e  $\bar{b}$  potenze non identiche in comune perchè uno d'ordine finito e l'altro aperiodico, è eguale all'ordine di  $\langle b \rangle$ . E allora l'indice di  $\langle a \rangle \wedge \langle b, \bar{b} \rangle$  in  $\langle b, \bar{b} \rangle$  verrebbe ad essere eguale all'ordine di  $\langle b \rangle$ , cioè minore dell'ordine di  $\langle b, \bar{b} \rangle$ , onde l'ordine di  $\langle a \rangle \wedge \langle b, \bar{b} \rangle$  sarebbe  $> 1$ . Cioè  $\langle a \rangle$  e  $\langle b, \bar{b} \rangle$  avrebbero elementi non identici a comune, il che è assurdo, una volta che  $a$  è aperiodico, mentre  $\langle b, \bar{b} \rangle$  ha ordine finito. Quindi  $\langle b \rangle$  è normale in  $G$ .

(1) Indicheremo, in generale, con  $\langle x, y, \dots, z \rangle$  il sottogruppo generato dagli elementi  $x, y, \dots, z$ .

Si avrà pertanto  $b^{-1} a^{-1} a b = b^k$ , con  $k$  intero. Ma dico, di più, che  $k$  è divisibile per  $p$ . Infatti, se ciò non è, il gruppo generato da  $a^{-1}$  e da  $b^{-1} a^{-1} b$ , contenendo  $b^k$ , contiene anche  $b$ , che in tal caso è potenza di  $b^k$ ; e contenendo anche  $a$ , coincide con  $G$ . Onde i due sottogruppi  $\{a^{-1}\}$  e  $\{b^{-1} a^{-1} b\}$  verrebbero ad essere coniugati nel loro congiungente. Ma allora questi due sottogruppi non possono essere permutabili (1), contro l'ipotesi che  $G$  sia quasi-abeliano.

Giungiamo pertanto alla conclusione che, se  $G$  è un gruppo abeliano generato da due elementi di cui il primo  $a$ , è aperiodico, mentre l'altro,  $b$ , ha ordine  $p^\alpha$ , si deve avere  $a^{-1} b a = b^{1 + p^\alpha}$ , con  $\alpha$  intero.

3. Consideriamo ora un gruppo quasi-abeliano con due generatori  $a$  e  $b$  ambedue aperiodici. Possiamo allora distinguere due casi:

$\alpha$ )  $a$  e  $b$  non hanno potenze non identiche a comune.

Si avrà:

$$[1] \quad b a = a^x b^y$$

perchè  $\{a\}$  e  $\{b\}$  son permutabili. Inoltre, essendo anche  $\{a^x\}$  e  $\{b\}$  permutabili, ogni elemento di  $\{a^x, b\}$  può porsi sotto la forma  $(a^x)^m b^n$ , con  $m$  ed  $n$  interi convenienti. Tra questi elementi, i soli che appartengono ad  $\{a\}$  sono quelli con  $n=0$ , perchè  $\{a\}$  e  $\{b\}$  hanno per ipotesi a comune la sola identità. Cioè  $\{a\} \wedge \{a^x, b\} = \{a^x\}$ . Ma dalla [1] segue che in  $\{a^x, b\}$  c'è  $ba$ , e quindi  $a$ , onde  $a$  dev'essere potenza di  $a^x$ , e di conseguenza si ha  $x = \pm 1$ . Analogamente si ottiene  $y = \pm 1$ .

Sia  $x=1$ ,  $y=-1$ . Si ha allora, dalla [1],  $a^{-1} b a = b^{-1}$ , onde  $(a b)^2 = a b a b = a^2$ , e di conseguenza  $G$  può generarsi mediante gli elementi  $a$  ed  $a b$ , i quali hanno una potenza non identica in comune. Si cade pertanto nel caso  $\beta$ ) considerato più sotto. Analogamente si procede se  $x=-1$ ,  $y=1$ .

Sia invece  $x=y=-1$ . Allora è  $b a = a^{-1} b^{-1} = (b a)^{-1}$ , onde  $ba$  ha ordine 2. Poichè inoltre  $\{a, b\} = \{a, b a\}$ , si ha che  $G$  può generarsi mediante due elementi, uno d'ordine 2, l'altro aperiodico. Il gruppo è pertanto del tipo considerato nel numero precedente.

Se infine  $x=y=1$ , il gruppo è abeliano, e precisamente è un gruppo abeliano libero con due generatori.

(1) O. ORB, *op. cit.* [3] in (1), pag. 434.

$\beta$ )  $a$  e  $b$  abbiano potenze non identiche a comune. Allora, se  $\{a, b\}$  non è ciclico, contiene elementi d'ordine finito non identici.

Supponiamo infatti  $a^m = b^n$ , con un  $m$  intero positivo ed un  $n$  intero, e supponiamo pure che nessuna potenza di  $a$  con esponente positivo minore di  $m$  sia in  $\{b\}$ .

Se  $m$  ed  $n$  hanno almeno un fattore primo  $p$  a comune, esisterà una potenza  $c$  di  $a$  tale che  $c^p = a^m$ , e una potenza  $d$  di  $b$  tale che  $d^p = b^n$ . Allora  $\{c, d\} / \{c^m\}$  è un  $p$ -gruppo d'ordine  $p$  o  $p^2$ , quindi abeliano, e di conseguenza si ha  $dc = cd c^{px} d^{py}$ , con  $x$  e  $y$  interi, ossia, tenendo conto del fatto che  $d^p = c^p$ , si ha  $c^{-1} dc = d^{1+p(x+y)}$ , quindi  $c^{-1} d^p c = d^{p+ p^2(x+y)}$ . E poichè  $d^p$ , essendo eguale a  $c^p$  e potenza di  $c$ , è permutabile con  $c$ , dev'essere  $x+y=0$ , da cui segue  $dc = cd$ . Onde  $\{c, d\}$  è abeliano, ed in esso l'elemento  $cd^{-1}$ , (il quale è diverso dall'identità perchè  $c$ , potenza di  $a$  con esponente positivo minore di  $m$ , non può coincidere con  $d$  che è potenza di  $b$ ) ha periodo finito  $p$  avendo  $(cd^{-1})^p = c^p d^{-p} = c^p d^p = 1$ . Quindi, se  $m$  ed  $n$  non son primi tra loro,  $G = \{a, b\}$  ha elementi d'ordine finito.

Se  $m$  ed  $n$  sono invece primi tra loro, consideriamo il gruppo fattoriale  $\{a, b\} / \{a^m\}$ . Esso è abeliano, come risulta dal lemma che passiamo a dimostrare.

LEMMA. *Un gruppo quasi-abeliano finito è speciale (1).*

Se  $H$  è un gruppo quasi-abeliano finito, non vi possono infatti essere in esso due sottogruppi di SYLOW del medesimo ordine, perchè due tali sottogruppi, pel teorema di SYLOW, sono coniugati in ogni sottogruppo che li contenga, quindi anche nel loro congiungente, e pertanto non possono essere permutabili tra loro, contro l'ipotesi su  $H$ . Il lemma è quindi dimostrato.

In base ad esso, il gruppo  $\{a, b\} / \{a^m\}$ , che evidentemente è quasi-abeliano e finito, risulta speciale. Esso, d'altra parte, è il congiungente dei due gruppi  $\{a\} / \{a^m\}$  e  $\{b\} / \{b^n\}$ , i quali son ciclici e hanno gli ordini primi tra loro. Ma due sottogruppi di ordini primi tra loro di un gruppo speciale sono permutabili elemento per elemento, dunque  $\{a, b\} / \{a^m\}$  è un prodotto diretto dei due gruppi ciclici  $\{a\} / \{a^m\}$  e  $\{b\} / \{b^n\}$ , cioè è abeliano.

(1) Chiamiamo, come è d'uso, *speciale* un gruppo finito quando ogni suo sottogruppo di SYLOW è normale.



Da ciò segue  $b^{-1} a b = a^{1+mb}$ , con  $k$  intero. E allora è anche  $b^{-1} a^m b = a^{m(1+mb)} = a^{m+m^2b}$ . Ma  $a^m$ , essendo eguale a  $b^n$ , è permutabile con  $b$ , onde dev'essere  $k=0$ ,  $ab = ba$ , cioè  $G = \{a, b\}$  abeliano.

E allora, essendo  $m$  ed  $n$  primi tra loro, esistono due interi  $x$  e  $y$  tali che  $mx + ny = 1$ . Da ciò segue  $(b^x a^y)^n = b^{nx} a^{ny} = a^{mx} a^{ny} = a^{mx+ny} = a$ , come anche  $(b^x a^y)^m = b^{mx} a^{my} = b^{mx+ny} = b$  e pertanto  $b^x a^y$ , avendo  $a$  e  $b$  tra le sue potenze, genera da solo tutto  $G$ , che risulta ciclico infinito.

È pertanto dimostrato che, nel caso  $\beta$ ), il gruppo  $G = \{a, b\}$ , se non è ciclico, contiene elementi d'ordine finito.

In quest'ultima ipotesi, gli elementi d'ordine finito di  $G$  devono formare un sottogruppo normale  $N$ .

Infatti, il congiungente di due sottogruppi finiti di  $G$  è ancora un sottogruppo finito di  $G$ , perchè i due sottogruppi son tra loro permutabili; quindi gli elementi di  $G$  aventi ordine finito formano intanto un sottogruppo. Questo sottogruppo è poi normale, perchè, per la sua stessa definizione, è caratteristico.

Evidentemente  $N$  è il più ampio sottogruppo finito di  $G$ . Da ciò segue che  $G/N$  non ha elementi d'ordine finito, altrimenti, detto  $M/N$  il sottogruppo formato da tali elementi,  $M$  sarebbe un sottogruppo finito di  $G$  più ampio di  $N$ .

Pertanto  $G/N$ , che è quasi abeliano, ed è generato dagli elementi  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  omologhi rispettivamente di  $a$  e  $b$  nell'omomorfismo tra  $G$  e  $G/N$ , dovrà essere ciclico. Cioè uno dei due elementi  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , per esempio  $\bar{b}$ , dovrà esser eguale ad una potenza  $\bar{a}^r$  di  $\bar{a}$ . Di conseguenza è  $b = a^r \cdot v$ , con  $v$  in  $N$ . Ma allora  $G$  può generarsi coi soli elementi  $a$  e  $v$ , di cui il primo è aperiodico, mentre l'altro è periodico, appartenendo ad  $N$ .

Il sottogruppo  $\{v\}$ , quale gruppo ciclico finito, è il prodotto diretto di più sottogruppi ciclici il cui ordine è potenza di un numero primo: si avrà cioè  $v = v_1^{s_1} v_2^{s_2} \dots v_h^{s_h}$ , con  $v_1, v_2, \dots, v_h$  elementi il cui periodo è dato rispettivamente da potenze dei numeri primi distinti  $p_1, p_2, \dots, p_h$ . Ma  $\{a, v_i\}$  ( $i = 1, \dots, h$ ), è quasi abeliano e appartiene al tipo considerato nel n. 2; onde si avrà  $a^{-1} v_i a = v_i^{1+p_1 x_i}$ , ossia  $a^{-1} v a = \prod v_i^{s_i(1+p_1 x_i)} = v^t$ , ove  $t$  è un intero conveniente.

In tal caso,  $G$  potrà anche generarsi mediante gli elementi  $a, v_1, v_2, \dots, v_h$ , ciascuno dei quali è aperiodico, o ha per ordine la potenza di un numero primo.

Concludendo, il caso  $\beta$ ) dà luogo ai seguenti possibili tipi di gruppi:

A) *Gruppi abeliani liberi con uno o due generatori.*

B) *Gruppi generabili anche mediante un elemento a aperiodico ed altri elementi  $v_1, v_2, \dots, v_h$ , di ordini rispettivamente  $p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \dots, p_h^{r_h}$  ( $p_1, p_2, \dots, p_h$  primi distinti) tali che  $v_i v_j = v_j v_i$  ( $i, j = 1, 2, \dots, h$ ),  $a^{-1} v_i a = v_i^{1+p_i^{i-1}}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ).*

4. Dal lemma dimostrato incidentalmente nel numero precedente discende che se  $G$  è un gruppo quasi-abeliano generato da due elementi  $a$  e  $b$  di ordini rispettivamente  $p^\alpha, q^\beta$ , con  $p$  e  $q$  numeri primi distinti,  $G$  è addirittura abeliano.

5. Passiamo infine all'esame del caso in cui  $G$  è generato da due elementi  $a$  e  $b$ , di ordini rispettivamente  $p^\alpha$  e  $p^\beta$ ,  $p$  essendo un numero primo.

Se  $p^\delta$  è l'ordine dell'intersezione di  $\{a\}$  e  $\{b\}$ , sarà  $p^{\alpha+\beta-\delta}$  l'ordine di  $G = \{a, b\}$ . Ma l'intersezione di  $\{a\}$  e  $\{b\}$ , coincide con l'intersezione di  $\{a^p\}$  e  $\{b^p\}$ , poichè, evidentemente, nè  $a$  è in  $\{b\}$ , nè  $b$  in  $\{a\}$ . Onde necessariamente, l'ordine di  $\{a^p, b^p\}$  è  $p^{\alpha-1+\beta-1-\delta} = p^{\alpha+\beta-2-\delta}$ , e l'indice di  $\{a^p, b^p\}$  in  $\{a, b\}$  è  $p^2$ . Analogamente si vede che l'indice di  $\{a^p, b^p\}$  in  $\{a, b^p\}$ , come pure in  $\{a^p, b\}$ , è  $p$ , onde  $\{a^p, b^p\}$  è normale sia in  $\{a, b^p\}$  che in  $\{a^p, b\}$ , perchè un sottogruppo di indice  $p$  di un  $p$ -gruppo è sempre normale. Pertanto  $\{a^p, b^p\}$  è addirittura normale in  $\{a, b\}$ , e quindi  $\{a, b\}/\{a^p, b^p\}$  è un gruppo d'ordine  $p^2$ .

Ma i gruppi d'ordine  $p^2$  son tutti abeliani; quindi, detti  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  i corrispondenti di  $a$  e  $b$  nell'omomorfismo tra  $\{a, b\}$  e  $\{a, b\}/\{a^p, b^p\}$ , si ha  $\bar{b} \bar{a} = \bar{a} \bar{b}$ , cioè  $b a = a b c$ , con  $c$  in  $\{a^p, b^p\}$ . Essendo poi  $\{a^p\}$  e  $\{b^p\}$  permutabili, è  $c = (a^p)^x (b^p)^y = a^{px} b^{py}$ , onde  $b a = a b a^{px} b^{py}$ , con  $x$  e  $y$  interi.

Giungiamo pertanto alla seguente conclusione:

*Se  $G$  è un gruppo quasi-abeliano generato da due elementi  $a$  e  $b$  di ordini  $p^\alpha$  e  $p^\beta$  ( $p$  primo) si ha*

$$b a = a b a^{px} b^{py}.$$

Ogni potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a, b\}$  si esprime, evidentemente, in funzione di  $a^p, b^p$  e dei commutatori di  $G$ . Ma ognuno di tali commutatori è in  $\{a^p, b^p\}$ , perchè ivi è il commutatore di  $a$  e  $b$ , come risulta dalla [2]. Quindi:

*Ogni potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a, b\}$  è in  $\{a^p, b^p\}$ .*

Se nè  $a^p$  è in  $\{b\}$ , nè  $b^p$  in  $\{a\}$ , applicando ad  $\{a^p, b^p\}$  i ragionamenti fatti intorno ad  $\{a, b\}$ , si ha che ogni potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a^p, b^p\}$ , quindi anche ogni potenza  $p^2$ -esima di un elemento di  $\{a, b\}$ , dev'essere in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$ . Ma ciò è vero anche se, ad esempio,  $a^p$  è in  $\{b\}$ , poichè in tal caso ogni potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a, b\}$  è in  $\{b^p\}$  e ogni potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a^p, b^p\}$  è in  $\{b^{p^2}\}$ , cioè in  $\{b^{p^2}, a^{p^2}\}$ . In generale, seguitando si ottiene che:

*Ogni potenza  $p^i$ -esima ( $i$  intero qualunque) di un elemento di  $\{a, b\}$  è in  $\{a^{p^i}, b^{p^i}\}$ .*

E poichè tra le potenze  $p^i$ -esime degli elementi di  $\{a, b\}$  ci sono  $a^{p^i}$  e  $b^{p^i}$ , i quali generano insieme  $\{a^{p^i}, b^{p^i}\}$ , si può anche dire che  $\{a^{p^i}, b^{p^i}\}$  è il più piccolo sottogruppo che contiene tutte le potenze  $p^i$ -esime degli elementi di  $\{a, b\}$ .

6. Sia ora  $\alpha \leq \beta$ . Dimostriamo che

*Il sottogruppo  $\{a^{p^{\beta-1}}, b^{p^{\beta-1}}\}$  appartiene al centro di  $\{a, b\}$ .*

Se  $a$  e  $b$  hanno una potenza non identica in comune, si ha  $\{a^{p^{\beta-1}}, b^{p^{\beta-1}}\} = \{b^{p^{\beta-1}}\} = \{a^{p^{\alpha-1}}\}$ , e il teorema è evidente.

Supponiamo pertanto che  $a$  e  $b$  non abbiano potenze non identiche in comune, di modo che sia  $p^{\alpha+\beta}$  l'ordine di  $\{a, b\}$ . Il gruppo  $\{a^{-1}ba, b\}$ , non può coincidere con  $\{a, b\}$ , perchè  $\{a^{-1}ba\}$  e  $\{b\}$ , essendo per ipotesi permutabili, non sono coniugati nel loro congiungente, di modo che  $a$  non è in  $\{a^{-1}ba, b\}$ . Segue che l'ordine di  $\{a^{-1}ba, b\}$  è al massimo  $p^{\alpha+\beta-1}$ . Esso d'altra parte dev'essere  $p^{2\beta-\varepsilon}$ , ove  $p^\varepsilon$  è l'ordine dell'intersezione di  $\{a^{-1}ba\}$  e  $\{b\}$ . Da  $\alpha \leq \beta$  segue allora  $\varepsilon \geq 1$ , onde  $\{a^{-1}ba\}$  e  $\{b\}$  devono avere a comune almeno  $p$  elementi, tra cui necessariamente quelli di  $\{b^{p^{\beta-1}}\}$  che coincide con  $\{(a^{-1}ba)^{p^{\beta-1}}\}$ , ossia con  $\{a^{-1}b^{p^{\beta-1}}a\}$ . Pertanto si ha che  $a$  trasforma in sè  $\{b^{p^{\beta-1}}\}$ , sottogruppo d'ordine  $p$  che viene in tal modo ad essere normale in  $\{a, b\}$ , e quindi, per una nota proprietà dei  $p$ -gruppi, fa parte del centro di  $\{a, b\}$ . Se  $\alpha = \beta$ , in modo analogo si conclude che  $\{a^{p^{\alpha-1}}\}$  appartiene al centro di  $\{a, b\}$ ; ma ciò è vero anche se  $\alpha < \beta$ , perchè in tal caso  $a^{p^{\alpha-1}} = 1$ ; onde in ogni caso  $\{a^{p^{\beta-1}}, b^{p^{\beta-1}}\}$ , al pari di  $\{a^{p^{\beta-1}}\}$  e di  $\{b^{p^{\beta-1}}\}$ , appartiene al centro di  $\{a, b\}$ , c. d. d.

7. Dimostriamo ora che:

*Se  $G$  è un gruppo quasi-abeliano d'ordine  $p^{2\alpha}$  generato da due elementi  $a$  e  $b$ , ciascuno di ordine  $p^\alpha$ , privi di potenze non identiche comuni, tutti e soli gli elementi che sono potenze  $p^i$ -esime di elementi di  $G$  sono gli elementi di  $\{a^{p^i}, b^{p^i}\}$ .*

Notiamo anzitutto che le potenze  $p^{a-1}$ -esime degli elementi di  $\{a^p, b^p\}$ , sono, giusta il n. 5, in  $\{a^{p^a}, b^{p^a}\}$ , ossia sono identiche, onde l'ordine degli elementi di  $\{a^p, b^p\}$  non supera mai  $p^{a-1}$ . Analogamente si vede che l'ordine degli elementi di  $\{a^{p^i}, b^{p^i}\}$  non supera  $p^{a-i}$  ( $1 \leq i \leq a$ ).

Inoltre, ogni elemento  $d$  di  $\{a, b\}$  che non sia in  $\{a^p, b^p\}$ , ha la sua potenza  $p$ -esima in  $\{a^p, b^p\}$ , ma non in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$ . Infatti, se  $d^p$  fosse in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$ , per quanto s'è osservato ora, esso avrebbe ordine al più  $p^{a-2}$ , onde  $d$  avrebbe al più ordine  $p^{a-1}$ . D'altra parte,  $d$ , non essendo in  $\{a^p, b^p\}$ , può porsi sotto la forma  $a^h b^k$ , ove uno almeno dei due numeri  $h$  e  $k$ , poniamo  $h$ , non è divisibile per  $p$ . Di conseguenza  $\{b, d\}$  contiene  $b$  ed  $a^h$ , indi  $a$  (perchè  $a$  è potenza di  $a^h$ ), cioè coincide con  $\{a, b\}$ . Ma ciò non può essere se l'ordine di  $d$  non supera  $p^{a-1}$ , perchè in tal caso l'ordine di  $\{d, b\}$  non supererebbe  $p^{2a-1}$ , onde  $\{d, b\}$  non potrebbe coincidere con  $\{a, b\}$ . Resta quindi dimostrato che  $d^p$  è in  $\{a^p, b^p\}$  ma non in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$ .

In base al n. 5, l'indice di  $\{a^p, b^p\}$  in  $\{a, b\}$  è  $p^2$ , onde gli elementi di  $\{a, b\}$  non contenuti in  $\{a^p, b^p\}$  sono  $p^{2a} - p^{2a-2} = p^{2a-2}(p^2 - 1)$ . E, in base alle ipotesi, si vede analogamente che gli elementi di  $\{a^p, b^p\}$  non contenuti in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$  sono  $p^{2a-4}(p^2 - 1)$ .

Siano ora  $d$  e  $\delta$  due elementi di  $\{a, b\}$  non contenuti in  $\{a^p, b^p\}$ , i quali abbiano la medesima potenza  $p$ -esima. Sarà allora  $\{d, \delta\}$  un gruppo d'ordine  $p^{a+1}$ , che dovrà avere a comune con  $\{a\}$  un sottogruppo d'ordine  $p$  almeno. Onde  $\{a^{p^{a-1}}\}$  e analogamente  $\{b^{p^{a-1}}\}$  indi  $\{a^{p^{a-1}}, b^{p^{a-1}}\}$  è in  $\{d, \delta\}$ . D'altra parte, non avendo  $\{a^{p^{a-1}}\}$  e  $\{b^{p^{a-1}}\}$  elementi non identici comuni,  $d^{p^{a-1}}$  non può essere contemporaneamente in  $\{a^{p^{a-1}}\}$  e in  $\{b^{p^{a-1}}\}$ . Supponiamo che  $d^{p^{a-1}}$  non sia in  $\{a^{p^{a-1}}\}$ . Allora  $\{d, a^{p^{a-1}}\}$  ha ordine di  $p^{a-1}$  e quindi coincide con  $\{d, \delta\}$ . Onde si ha  $\delta = d' \cdot c$ , con  $c$  elemento (di  $\{a^{p^{a-1}}\}$ , indi) di  $\{a^{p^{a-1}}, b^{p^{a-1}}\}$ . Pel n. 6,  $c$  è nel centro di  $\{a, b\}$ , indi è permutabile con  $d$ , e pertanto si ha  $\delta^p = (d' c)^p = d'^p c^p = d'^p$ , perchè  $c^p = 1$ . Ma  $l$  è primo con  $p$ , altrimenti  $\delta = d' \cdot c$  sarebbe in  $\{a^p, b^p\}$  contro l'ipotesi; inoltre da  $\delta^p = d'^p$  e da  $\delta^p = d'^p$  segue  $d'^p = d^p$ , cioè  $d^{(l-1)p} = 1$ , ossia  $l-1 \equiv 0 \pmod{p^{a-1}}$ . Pertanto è  $\delta = d^{1+s} \cdot c = d \cdot d^{sp^{a-1}} \cdot c$ , con  $s$  intero. L'elemento  $\gamma = d^{sp^{a-1}} \cdot c$  è in  $\{a^{p^{a-1}}, b^{p^{a-1}}\}$ , al pari di  $c$  e di  $d^{p^{a-1}}$ . Onde si ha  $\delta = d \cdot \gamma$ , con  $\gamma$  in  $\{a^{p^{a-1}}, b^{p^{a-1}}\}$ . Viceversa da  $\delta = d \cdot \gamma$ , con  $\gamma$  in  $\{a^{p^{a-1}}, b^{p^{a-1}}\}$ , segue  $\delta^p = d^p \gamma^p = d^p$ .

Pertanto fissato un elemento  $d$ , gli elementi  $\delta$  i quali hanno la stessa potenza  $p$ -esima che  $d$  sono tutti e soli gli elementi del tipo  $d \cdot \gamma$ , con  $\gamma$  in  $\{a^{p^{\alpha-1}}, b^{p^{\alpha-1}}\}$ : e poichè l'ordine di quest'ultimo sottogruppo è  $p^2$ , segue che sono  $p^2$  gli elementi di  $\{a, b\}$ , i quali danno luogo alla stessa potenza  $p$ -esima.

Essendo  $p^{2\alpha-2}(p^2-1)$  gli elementi di  $\{a, b\}$  non contenuti in  $\{a^p, b^p\}$ , saranno  $p^{2\alpha-4}(p^2-1)$  le loro potenze  $p$ -esime distinte. Esse d'altra parte devono esser tutte in  $\{a^p, b^p\}$  senza essere in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$ ; e gli elementi di  $\{a^p, b^p\}$  non contenuti in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$  sono esattamente  $p^{2\alpha-4}(p^2-1)$ . Onde ogni elemento di  $\{a^p, b^p\}$  non contenuto in  $\{a^{p^2}, b^{p^2}\}$  è potenza  $p$ -esima di un elemento di  $\{a, b\}$  non contenuto in  $\{a^p, b^p\}$ .

Dal che si deduce subito il teorema in generale.

8. Passiamo a dimostrare che:

*Se  $G$  è un gruppo quasi-abeliano d'ordine  $p^{\alpha+\beta}$  generato da due elementi  $a$  e  $b$  d'ordini  $p^\alpha$  e  $p^\beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ) non aventi potenze non identiche in comune, detto  $y$  un qualunque intero  $< p^\beta$ , tra le potenze di  $a^k b$  ( $k$  intero qualunque) ve ne è una della forma  $a^{kx} b^y$ , con  $x$  intero conveniente.*

Giusta il n. 5, la potenza  $p^\beta$ -esima di  $a^k b$  è in  $\{a^{p^\beta}, b^{p^\beta}\}$ , quindi è identica, onde l'ordine di  $a^k b$  divide  $p^\beta$ . D'altra parte quest'ordine deve essere non minore di  $p^\beta$ , poichè  $\{a, a^k b\}$  contiene  $a$  e  $b$ , e coincide quindi con  $G$ , onde l'ordine di  $a^k b$  è proprio  $p^\beta$ .

Ogni potenza di  $a^k b$  ha la forma  $a^{kz} b^z$ , con  $z \leq p^\beta$ . Se dimostro che alle  $p^\beta$  potenze di  $a^k b$  corrispondono valori  $z$  tutti diversi, questi valori saranno tutti e soli gli interi  $\leq p^\beta$ , e quindi tra essi vi sarà anche il numero  $y$  prefissato. Onde il teorema sarà provato.

Tutto si riduce pertanto a dimostrare che non vi possono essere due diverse potenze di  $a^k b$ , siano  $a^{kx} b^y$ ,  $a^{kt} b^y$ , che diano luogo al medesimo  $y$ . E ciò risulta dal fatto che, altrimenti, del pari che  $a^{kx} b^y$  e  $a^{kt} b^y$ , anche  $a^{kx} b^y (a^{kt} b^y)^{-1} = a^{k(x-t)}$  lo sarebbe. Ma  $a^k b$ , avendo ordine  $p^\beta$  e generando insieme con  $a$  tutto  $G$ , non può avere potenze non identiche a comune con  $a$ . Onde verrebbe ad essere  $a^{k(x-t)} = 1$ , cioè  $a^{kx} = a^{kt}$ , quindi anche  $a^{kx} b = a^{kt} b$ , contro l'ipotesi. Il teorema è pertanto completamente dimostrato.

9. Dimostriamo ora il seguente teorema, che segna il punto culminante della trattazione:

*Se  $G$  è un gruppo quasi-abeliano con due generatori  $a$  e  $b$  di ordini  $p^\alpha$  e  $p^\beta$  rispettivamente ( $p$  primo), esso ha un sottogruppo normale ciclico  $N$ , tale che il fattoriale  $G/N$  risulti anch'esso ciclico.*

Dimostreremo il teorema per induzione, ammettendolo vero per gruppi il cui ordine divide l'ordine di  $G$ . Distingueremo vari casi:

I) Presa una qualunque coppia di elementi, che insieme generino tutto  $G$ , essi hanno sempre una potenza non identica a comune. Allora, in particolare, ciò deve capitare ad  $a$  e  $b$ , onde sarà  $\{a^{p^{\alpha-1}}\} = \{b^{p^{\alpha-1}}\}$ . Posto  $\{a^{p^{\alpha-1}}\} = C$ , si ha che  $G/C$  è un gruppo quasi-abeliano con due generatori costituiti dagli elementi  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , che corrispondono ad  $a$  e  $b$  nell'omomorfismo tra  $G$  e  $G/C$ , e pertanto per esso vale il teorema. Vale a dire  $G/C$  ha un sottogruppo normale  $N/C$  ciclico, tale che il fattoriale  $G/N$  risulti anch'esso ciclico. Sia  $\delta$  un elemento generatore di  $N/C$ ; vi sarà allora in  $G/C$  un elemento  $\gamma$ , tale che  $G/C = \{\gamma, \delta\}$ .

Siano rispettivamente  $g$  e  $d$  due elementi di  $G$ , cui corrispondono in  $G/C$  gli elementi  $\gamma$  e  $\delta$ . Sarà  $g = a^m b^n$  e  $d = a^r b^s$ , e di conseguenza  $\gamma = \bar{a}^m \bar{b}^n$  e  $\delta = \bar{a}^r \bar{b}^s$  ( $m, n, r, s$  interi convenienti). Non potranno ambedue i numeri  $m$  ed  $r$  esser divisibili per  $p$ , altrimenti si avrebbe  $\{\gamma, \delta\} = \{\bar{a}^p, \bar{b}^p\}$ , mentre deve essere  $\{\gamma, \delta\} = \{\bar{a}, \bar{b}\}$  per ipotesi. Analogamente,  $n$  ed  $s$  non posson essere ambedue divisibili per  $p$ . Ne segue che  $\{g, d\}$  contiene  $a$  e  $b$ , e quindi coincide con  $G$ .

Inoltre, dal fatto che  $m$  ed  $r$  non sono ambedue divisibili per  $p$ , segue che è o  $\{a, g\} = G$ , o  $\{a, d\} = G$ . Pertanto, stando all'ipotesi formulata in questo caso I), o  $\{g\}$  o  $\{d\}$  deve contenere  $\{a^{p^{\alpha-1}}\}$  che è l'unico sottogruppo d'ordine  $p$  di  $\{a\}$ . Ma anche  $\{g\}$  e  $\{d\}$  devono per ipotesi avere a comune un sottogruppo d'ordine  $p$ , onde, in particolare,  $\{d\}$  deve contenere  $\{a^{p^{\alpha-1}}\} = C$ .

L'elemento  $\delta$ , generando il sottogruppo normale  $N/C$ , è trasformato da ogni elemento di  $G/C$  in una sua potenza; onde  $d$  è trasformato da ogni elemento di  $G$  in un elemento della forma  $d^x \cdot c$ , con  $c$  in  $C$ . Ma  $c$ , essendo in  $C$  è, per quanto s'è visto or ora, potenza di  $d$ , quindi  $d$  è trasformato in una sua potenza da ogni elemento di  $G$ . Segue che  $\{d\}$  è un sottogruppo normale ciclico di  $G$  e coincide con  $N$ ; essendo poi  $G/N$  ciclico, ne discende, in questo caso, il teorema.

II) Esistano ora invece due elementi generatori di  $G$ , non aventi potenze non identiche a comune. Potremo supporre, senza ledere la generalità, che questi generatori siano  $a$  e  $b$ . Supponiamo inoltre, in primo luogo  $\alpha < \beta$ .

Evidentemente, l'ordine di  $G$  viene ad essere  $p^{\alpha+\beta}$ . Se è  $\alpha = 1$ ,  $\{b\}$  ha indice  $p$  in  $G$ , e pertanto è normale in esso, e dà luogo ad un fat-

toriale d'ordine  $p$ , quindi ciclico, onde il teorema è dimostrato. Possiamo pertanto supporre  $\alpha > 1$ .

Il sottogruppo  $\{b^{p^{\beta-1}}\}$  è evidentemente normale in  $G$ . Posto pertanto  $\{b^{p^{\beta-1}}\} = C$ , il teorema vale, per ipotesi, per  $G/C$ , ossia  $G/C$  ha un sottogruppo normale  $N/C$  ciclico tale che anche  $G/N$  sia ciclico.

Se  $N$  è anch'esso ciclico, il teorema è dimostrato. Supponiamo pertanto che  $N$  non sia ciclico.

Detti  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  i corrispondenti di  $a$  e  $b$  nell'omomorfismo tra  $G$  e  $G/C$ , si ha che  $\bar{a}$  ha ordine  $p^\alpha \leq p^{\beta-1}$ , e  $\bar{b}$  ha ordine  $p^{\beta-1}$ . D'altra parte  $\{\bar{a}, \bar{b}\} = G/C$ , quindi, in base al n. 5, ogni elemento di  $G/C$  ha un ordine che divide  $p^{\beta-1}$ .

Detto  $\delta$  un generatore di  $N/C$  dovrà esistere un elemento  $\gamma$  di  $G/C$  tale che  $\{\gamma, \delta\} = G/C$ . Per quanto s'è osservato or ora, sia l'ordine di  $\gamma$  che quello di  $\delta$  divide  $p^{\beta-1}$ , cioè sia l'indice di  $\{\gamma\}$  che quello di  $\{\delta\}$  in  $G/C$  è divisibile per  $\frac{p^{\alpha+\beta-1}}{p^{\beta-1}} = p^\alpha$ . Ma se l'indice di  $\{\gamma\}$  in  $G/C$  è divisibile per  $p^\alpha$ , anche l'ordine di  $\delta$  lo è.

Sia  $d$  un elemento cui corrisponde  $\delta$  nell'omomorfismo tra  $G$  e  $G/C$ . Se  $\{\delta\}$  contiene  $C$ ,  $d$  genera tutto  $N$ , che è ciclico, contro quanto si è supposto. Pertanto  $\{d\}$  non contiene  $C$ , e di conseguenza  $b$  e  $d$  non hanno potenze a comune. Segue che  $\{b, d\}$  ha ordine  $p^{\alpha+\beta}$  (perchè l'ordine di  $d$  è divisibile per  $p^\alpha$ ) e quindi coincide con  $G$ . Inoltre è evidente che l'ordine di  $d$  è esattamente  $p^\alpha$ .

Se il commutatore di  $b$  e  $d$  è in  $C$ , essendo  $C$  in  $\{b\}$ ,  $b$  è trasformato da  $d$  in una sua potenza, e pertanto  $\{b\}$  è normale in  $G$ . Poichè esso evidentemente dà luogo a un fattoriale ciclico, il teorema è in tal caso provato.

Supponiamo invece che ciò non sia. Si avrà allora  $b^{-1}db = d^{1+k} \cdot c$ , con  $c$  in  $C$  e  $k$  non divisibile per  $p^\alpha$ .

Posto  $l = b^{p^{\beta-\alpha}}$ , consideriamo il sottogruppo  $\{d, l\}$ , d'ordine  $p^{2\alpha}$ , generato dai due elementi  $d$  ed  $l$  d'ordine  $p^\alpha$ . L'elemento  $d^k \cdot c$ , commutatore di  $b$  e  $c$ , è contenuto in esso.

In base al teorema del n. 7, applicato a  $\{d, l\}$ , l'elemento  $d^k c$ , posto  $k = p^n \cdot h$ , con  $h$  non divisibile per  $p$ , e, per quanto s'è detto,  $n < \alpha$ , è potenza  $p^n$ -esima di un elemento  $l^x d^y$  contenuto in  $\{d, l\}$ , ma non in  $\{d^p, l^p\}$ . Dico inoltre che deve essere  $y$  non divisibile per  $p$ . Infatti, in caso contrario, si avrebbe  $d^k c = (l^x d^y)^{p^n} = l^{x p^n} d^{y p^n}$ , con  $z$  di-

visibile per  $p$  (n. 7), cioè, essendo  $c$  nel centro di  $G$ ,  $cd^k = l^{z^n} d^{z^n}$ , ossia  $k = zp^n$ , e  $k$  sarebbe divisibile per  $p^{n+1}$ , contro l'ipotesi.

Detto pertanto  $u$  un numero tale che sia  $yu \equiv 1 \pmod{p^a}$ , che esiste perchè  $y$  è primo con  $p$ , dovrà esistere, in base al n. 8, un numero  $r$ , tale che sia  $(l^x d^y)^r = l^{xs} d^{ys} = l^{xs} d$ , con  $s$  intero conveniente. Inoltre  $r$  deve essere non divisibile per  $p$ , altrimenti  $(l^x d^y)^r$ , in base al n. 5, sarebbe in  $\{l^y, d^y\}$ , indi anche in  $\{l, d^y\}$ , e ciò non può essere, perchè, mentre  $l^{xs}$  è in  $\{l, d^y\}$ ,  $d$  non vi è.

Segue che, come  $l^{xs} d$  è potenza di  $l^x d^y$ , così anche  $l^x d^y$  è potenza di  $l^{xs} d$ . E poichè  $d^x c$  è potenza di  $l^x d^y$ , si ha che  $d^k c$  è potenza di  $l^{xs} d$ , poniamo  $d^x c = (l^{xs} d)^t$ .

Ora, si ha  $l^{-1} l^{xs} d l = l^{xs} l^{-1} d l = l^{xs} d \cdot d^k c = (l^{xs} d)^{t+1}$ , onde  $\xi = l^{xs} d$  è mutato da  $l$  in una sua potenza, cioè  $\{\xi\}$  è normale in  $\{l, \xi\}$ . Ma  $\{l, \xi\}$  contiene  $l$  e  $l^{xs} d$ , indi  $d$ , cioè coincide con  $G$ . Inoltre  $G/\{\xi\}$  è ciclico, onde il teorema risulta dimostrato anche nel caso II).

III) Conservando l'ipotesi che esistano due elementi, che chiameremo  $a$  e  $b$ , di ordini  $p^a$  e  $p^b$ , senza potenze non identiche a comune, tali che  $\{a, b\} = G$ , supponiamo ora che sia  $\alpha = \beta$ , cosicchè  $G$  avrà ordine  $p^{2\alpha}$ .

Posto  $C = \{a^{p^{\alpha-1}}, b^{p^{\alpha-1}}\}$ , consideriamo il gruppo fattoriale  $G/C$ , in cui, per l'ipotesi a base del processo d'induzione, vale il teorema.

Esiste pertanto in  $G/C$  un sottogruppo  $N/C$  ciclico e normale, tale anche  $G/N$  sia ciclico. Sia, come al solito,  $\delta$  un generatore di  $N/C$ , e  $\gamma$  un elemento di  $G/C$  tale che sia  $\{\gamma, \delta\} = G/C$ .

Siano poi  $d$  e  $g$  due elementi di  $G$ , cui corrispondono rispettivamente  $\delta$  e  $\gamma$  nell'omomorfismo tra  $G$  e  $G/C$  e siano  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  i corrispondenti di  $a$  e  $b$  in questo omomorfismo. Sarà  $d = a^m b^n$ ,  $g = a^r b^s$ , indi anche  $\delta = \bar{a}^m \bar{b}^n$ ,  $\gamma = \bar{a}^r \bar{b}^s$ , con  $m, n, r, s$  interi convenienti. Non potranno contemporaneamente  $m$  ed  $r$ , nè contemporaneamente  $n$  ed  $s$  esser divisibili per  $p$ , come si vede con un ragionamento analogo a quello fatto nel caso I). Segue che  $d$  e  $g$  generano insieme tutto  $G$ , cioè l'ordine di  $\{d, g\}$  è  $p^{2\alpha}$ . D'altra parte l'ordine di  $d$  e quello di  $g$  non possono superare  $p^\alpha$  (n. 5) quindi l'ordine di ciascuno di essi è esattamente  $p^\alpha$ .

L'elemento  $\gamma$  trasforma per ipotesi  $\delta$  in una sua potenza, quindi si avrà  $g^{-1} d g = c d^{k+1}$ , con  $c$  in  $C$ , ossia il commutatore di  $g$  e  $d$  è  $c d^k$ , od anche, notando che  $\{g^{p^{\alpha-1}}, d^{p^{\alpha-1}}\} = C$ , e che pertanto può porsi



$c = g^{u p^{\alpha-1}} \cdot d^{v p^{\alpha-1}}$  il commutatore di  $g$  e  $d$  è  $g^{u p^{\alpha-1}} d^{v p^{\alpha-1} + k}$ . Posto  $u p^{\alpha-1} = z, v p^{\alpha-1} + k = t$ , si ha che, se  $t = 0$ ,  $d$  trasforma  $g$  in una sua potenza, onde  $\{g\}$  è un sottogruppo normale di  $G$  con fattoriale ciclico, e il teorema è dimostrato.

Sia invece  $t \neq 0$ , cioè  $t$  non divisibile per  $p^\alpha$ . Allora si vede, ricorrendo ai nn. 7 e 8, che  $g^z d^t$  è potenza di un elemento della forma  $g^w d$ . Notando poi che è  $g^{-1} g^w d g = g^w g^{-1} d g = g^w d g^t = (g^w d)^{s+1}$ , se si chiama  $x$  l'esponente da dare a  $g^w d$  per ottenere  $g^z d^t$ , si ottiene che  $g^w d$  è trasformata da  $g$  in sua potenza. Posto  $g^w d = \xi$ , si ottiene allora che  $(g, \xi)$ , contenendo  $g$  e  $g^w d$ , contiene  $g$  e  $d$ , e pertanto coincide con  $G$ , che in esso  $\{\xi\}$  è normale e dà luogo a un fattoriale ciclico, e il teorema è provato.

Più precisamente, si ha che, come discende dalle proprietà dei  $p$ -gruppi,  $G$  può essere generato da due elementi  $g$  e  $d$ , il secondo dei quali generi da solo tutto  $N$ , legati dalle relazioni

$$d^m = 1, g^{p^n} = d^s, g^{-1} d g = d^{1+r}$$

con  $m, n, s, x$ , interi  $\geq 0$  tali che  $s \leq m, x = p^r \cdot k$  ( $k$  primo con  $p$ ),  $s + r + 1 \geq m, m + r + 1 \geq n$ .

La diseuguaglianza  $s + r + 1 \geq m$  segue dal fatto che dev'essere  $g^{-1} d^{p^s} g = d^s$ , mentre l'altra  $m + r + 1 \geq n$  dal fatto che dev'essere  $g^{-r} d g^{p^n} = d$ .

10. Ora possiamo determinare i possibili tipi di gruppi quasi-abeliani con due generatori, lasciando cadere l'ipotesi che ciascuno di essi, se periodico, abbia per ordine la potenza di un numero primo.

Sia in primo luogo  $G$  un gruppo quasi-abeliano generato da due elementi  $a$  e  $b$ , il primo dei quali aperiodico, il secondo di periodo  $m = p^\alpha q^\beta \dots r^\nu$ , con  $p, q, \dots, r$  numeri primi distinti.

Allora può porsi  $b = b_1 \cdot b_2 \dots b_h$ , ove  $b_1$  ha periodo  $p^\alpha, b_2$  periodo  $q^\beta, \dots, b_h$ , periodo  $r^\nu$ . Inoltre i gruppi  $\{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \dots, \{a, b_h\}$ , i quali sottogruppi di  $G$ , devono essere quasi-abeliani, e pertanto, in base al n. 2, deve aversi  $a^{-1} b a = b_1^{1+x_1}, a^{-1} b_2 a = b_2^{1+x_2}, \dots, a^{-1} b_h a = b_h^{1+x_h}$ , con  $x_1, x_2, \dots, x_h$  interi convenienti.

Ma allora  $G$  è del tipo B) considerato nel n. 3. Giungiamo pertanto alla conclusione che ogni gruppo quasi-abeliano, che non sia abe-

liano, con due generatori, uno dei quali aperiodico, è del tipo B) considerato nel n. 3.

Si supponga, di più, che uno dei fattori primi di  $m$ , poniamo  $p$ , sia eguale a 2; allora, conservando a  $x_1$  il significato di poco fa, si ha che  $x_1$  deve esser pari. Se infatti  $x_1$  fosse dispari e  $\alpha > 1$ , detta  $l$  una potenza di  $b_1$ , certo esistente, d'ordine 4, si avrebbe  $a^{-1}la = l^{1+2x_1} = l^{-1}$ ; e allora si avrebbe anche  $(al)^2 = alal = a^2$ , onde l'intersezione di  $\{a\}$  ed  $\{al\}$  avrebbe indice 2 in  $\{al\}$ , mentre  $\{a\}$  avrebbe indice 4 in  $\{a, al\} = \{a, l\}$ , e i sottogruppi  $\{a\}$  ed  $\{al\}$  non sarebbero permutabili tra loro, contro l'ipotesi. Se poi  $\alpha = 1$ , può porsi  $x_1 = 0$ , cioè pari.

Sia invece ora  $G$  un gruppo quasi-abeliano generato da due elementi  $a$  e  $b$  di ordini rispettivamente  $m = p^{\alpha_1} q^{\beta_1} \dots r^{\gamma_1}$  e  $n = p^{\alpha_2} q^{\beta_2} \dots r^{\gamma_2}$ , con  $p, q, \dots, r$  numeri primi distinti, e  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2$  interi positivi o nulli.

Allora può porsi  $a = a_1 \cdot a_2 \dots a_h$ , ove  $a_1$  ha ordine  $p^{\alpha_1}$ ,  $a_2$  ha ordine  $q^{\beta_1}$ ,  $\dots$ ,  $a_h$  ha ordine  $r^{\gamma_1}$ , e  $b = b_1 \cdot b_2 \dots b_h$  con  $b_1$  di ordine  $p^{\alpha_2}$ ,  $b_2$  di ordine  $q^{\beta_2}$ ,  $\dots$ ,  $b_h$  di ordine  $r^{\gamma_2}$ . Inoltre, in base al lemma dimostrato al n. 3,  $G$  è dato dal prodotto diretto  $\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \dots \times \{a_h, b_h\}$ . Ciascuno dei gruppi  $\{a_i, b_i\}$  ( $i = 1, \dots, h$ ) è del tipo considerato nel n. 9.

Giungiamo pertanto alla conclusione che ogni gruppo quasi-abeliano con due generatori d'ordine finito è prodotto diretto di gruppi del tipo considerato nel n. 9.

11. Rovesciamo ora i risultati sin qui raggiunti, dimostrando che ogni gruppo dei tipi considerati nel numero precedente è quasi-abeliano.

Sia in primo luogo  $G$  un gruppo generato da due elementi  $a$  e  $b$ , il primo dei quali aperiodico, l'altro di periodo  $m = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$ , con  $p, q, \dots, r$  numeri primi distinti; e supponiamo inoltre che, posto  $b = b_1 b_2 \dots b_h$ , ove  $b_1$  ha periodo  $p^\alpha$ ,  $b_2$  periodo  $q^\beta$ ,  $\dots$ ,  $b_h$  periodo  $r^\gamma$ , si abbia  $a^{-1} b_1 a = b_1^{1+x_1}$ ,  $a^{-1} b_2 a = b_2^{1+x_2}$ ,  $\dots$ ,  $a^{-1} b_h a = b_h^{1+x_h}$  con  $x_1, x_2, \dots, x_h$  interi; e che, se, ad esempio, è  $p = 2$ , sia  $x_1$  pari.

Vogliamo dimostrare che  $G$  è quasi-abeliano. Faremo la dimostrazione nel caso  $h = 1$ ,  $m = p^\alpha$ ; il caso generale si tratta allo stesso modo, salvo qualche complicazione formale.

Basterà dimostrare che due qualunque sottogruppi ciclici di  $G$  sono tra loro permutabili. Siano rispettivamente  $a^r b^s$  e  $a^t b^u$  i genera-

tori di due sottogruppi ciclici di  $G$ : dimostreremo che  $\{a^r b^s\}$  e  $\{a^t b^u\}$  son tra loro permutabili.

Notiamo anzitutto che è, qualunque sia l'intero  $v$ ,

$$(a^r b^s)^v = a^{rv} b^{sv} \text{ con } \mu = \frac{(1 + px)^{rv} - 1}{(1 + px)^r - 1}$$

ove s'è messo  $x$  in luogo di  $x_1$  per semplicità. Se ora si pone  $v = p^\alpha$ , si vede subito che riesce  $\mu$  divisibile per  $p^\alpha$ , onde si ottiene

$$(a^r b^s)^{p^\alpha} = a^{rp^\alpha}.$$

Inoltre da ciò segue che  $a^{p^\alpha}$ , quale potenza di  $a$  e di  $ab$ , è permutabile con  $a$  e con  $ab$ , indi anche con  $b$ , e pertanto appartiene al centro di  $G$ .

Ancora,  $a^{rp^\alpha}$  appartiene ad  $\{a^r b^s\}$ , ed  $a^{tp^\alpha}$  appartiene ad  $\{a^t b^u\}$ ; onde  $a^{rp^\alpha}$  appartiene all'intersezione di  $\{a^r b^s\}$  e  $\{a^t b^u\}$ . Segue che, una volta dimostrato che  $\{a^r b^s\}/\{a^{rp^\alpha}\}$  è permutabile con  $\{a^t b^u\}/\{a^{tp^\alpha}\}$ , sarà anche dimostrato  $\{a^r b^s\}$  esser permutabile con  $\{a^t b^u\}$ .

Basta quindi dimostrare che è quasi-abeliano un gruppo con due generatori  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , di ordini rispettivamente  $rt p^\alpha$  e  $p^\alpha$  e tali che  $\bar{a}^{-1} \bar{b} \bar{a} = \bar{b}^{1+px}$ , con  $x$  pari nel caso che sia  $p = 2$ .

E ancora, si ha

$$\bar{a}^{-v} \bar{b} \bar{a}^{p^\alpha} = \bar{b}^{(1+px)p^\alpha} = \bar{b}$$

onde, posto  $rt = k \cdot p^\delta$ , con  $k$  non divisibile per  $p$ ,  $\bar{a}$  è dato dal prodotto di due elementi  $\bar{a}_1$  e  $\bar{a}_2$ , di ordini rispettivamente  $p^{\delta+\alpha}$  e  $k$ , il secondo dei quali è permutabile con  $\bar{b}$ .

Segue che  $\{\bar{a}, \bar{b}\} = \{\bar{a}_1, \bar{b}\} \times \{\bar{a}_2\}$ ; e una volta dimostrato che è quasi-abeliano  $\{\bar{a}_1, \bar{b}\}$ , risulterà subito che lo è anche  $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ .

Tutto si riduce pertanto a dimostrare che è quasi-abeliano un  $p$ -gruppo con due generatori  $\bar{a}_1$  e  $\bar{b}$ , di ordini rispettivamente  $p^{\delta+\alpha}$  e  $p^\alpha$ , tali che  $\bar{a}_1^{-1} \bar{b} \bar{a}_1 = \bar{b}^{1+px}$ , con  $x$  pari nel caso che sia  $p = 2$ .

Poniamo, per semplicità,  $a$  in luogo di  $\bar{a}_1$ ,  $b$  in luogo di  $\bar{b}$ ,  $\mu = \delta + \alpha$ , lasciamo cadere le ipotesi che sia  $\mu > \alpha$ , e che  $\{a\}$  e  $\{b\}$  abbiano a comune la sola identità.

Basterà dimostrare che sono tra loro permutabili due sottogruppi ciclici generati uno da un elemento della forma  $a b^{h p^e}$ , l'altro da un elemento della forma  $a^{k p^n} b$ , con  $h$  e  $k$  primi con  $p$ , bastando, in caso contrario, sostituire ad  $a$  e  $b$  delle loro potenze convenienti, e a  $G$  un sottogruppo conveniente, per ridursi a questo caso.

Inoltre,  $a b^{h p^e}$  trasforma, al pari di  $a$ ,  $b$  in  $b^{1 + p^e}$ , e genera, assieme a  $b$ , tutto  $G$ . Onde, posto  $a' = a b^{h p^e}$ , l'elemento  $a^{k p^n} b$  può indubbiamente porsi sotto la forma  $a'^r b^s$ . Tornando a chiamare  $a$  l'elemento  $a'$ , e notando che, per una ragione addotta poco fa, si può anche qui supporre  $s = 1$ , posto  $r = l p^v$ , con  $l$  primo con  $p$ , si vede che basterà dimostrare, sotto le stesse ipotesi di partenza, che sono permutabili i gruppi ciclici generati da  $a$  e da  $a^{l p^v} b$ .

Evidentemente, l'indice di  $\{a\}$  in  $G$  eguaglia l'indice in  $\{b\}$  dell'intersezione  $I$  di  $\{a\}$  e  $\{b\}$ , perchè  $\{a\}$  e  $\{b\}$  son tra loro permutabili,  $\{b\}$  essendo normale in  $G$ . Una volta dimostrato che l'indice in  $\{a^{l p^v} b\}$  dell'intersezione  $J$  di  $\{a\}$  e  $\{a^{l p^v} b\}$  eguaglia quello di  $I$  in  $\{b\}$ , risulterà che l'indice di  $J$  in  $\{a^{l p^v} b\}$  eguaglia quello di  $\{a\}$  in  $G$  ( $= \{a, a^{l p^v} b\}$ ) onde  $\{a\}$  e  $\{a^{l p^v} b\}$  risulteranno permutabili.

Tutto pertanto si riduce a dimostrare che l'indice di  $J$  in  $\{a^{l p^v} b\}$  eguaglia quello di  $I$  in  $\{b\}$ ; e ciò apparirà evidente una volta che si sarà provato che  $(a^{l p^v} b)^{p^y}$ , con  $y$  intero, è in  $\{a\}$  allora e solo allora che  $b^{p^y}$  è in  $\{a\}$ .

Orbene, dalla relazione  $a^{-1} b a = b^{1 + p^v}$ , segue, posto  $r = l p^v$ ,

$$\begin{aligned} (a^r b)^{p^y} &= a^{r p^y} b^{1 + (1 + p^v)^r + (1 + p^v)^{2r} + \dots + (1 + p^v)^{(p^y - 1)r} \dots \\ &= a^{r p^y} b^{\frac{(1 + p^v)^{r p^y} - 1}{(1 + p^v)^r - 1}} \end{aligned}$$

Fissiamo l'attenzione sopra l'esponente  $\frac{(1 + p^v)^{r p^y} - 1}{(1 + p^v)^r - 1}$  di  $b$  nell'ultima espressione. Si ha

$$(1 + p^v)^{r p^y} - 1 = r p^y \cdot p^v + \binom{r p^y}{2} p^{2v} x^2 + \dots$$

Posto  $x = p^t \cdot \theta$ , con  $\theta$  primo con  $p$ , si avrà, ricordando che  $r = lp^y$ ,  
 $(1 + px)^{r^{y^y}} - 1 = l\theta p^{t+y+y+1} + \frac{1}{2} (r^{y^y} - 1) l\theta^2 p^{2t+y+y+2} + \dots$

Evidentemente, se  $p$  è dispari, i termini della detta somma successivi al primo hanno rispetto a  $p$  un grado maggiore di quello,  $t+y+y+1$ , del primo; e altrettanto può dirsi se, come si è supposto, per  $p=2$ , e  $x$  pari, cioè  $t \geq 1$ . Si avrà quindi

$$(1 + px)^{r^{y^y}} - 1 = H \cdot p^{t+y+y+1}$$

con  $H$  primo con  $p$ . Analogamente si ha

$$(1 + px)^r - 1 = K \cdot p^{t+y+1}$$

con  $K$  primo con  $p$ ; e di conseguenza

$$\frac{(1 + px)^{r^{y^y}} - 1}{(1 + px)^r - 1} = \frac{H}{K} \cdot p^y$$

ove  $\frac{H}{K} = \lambda$  è primo con  $p$ . In conclusione

$$(a^r b)^{r^{y^y}} = a^{r^{y^y}} b^{\lambda r^{y^y}}$$

con  $\lambda$  primo con  $p$ .

Ne risulta che  $(a^r b)^{r^{y^y}}$  è in  $\langle a \rangle$  allora e solo allora che  $b^{\lambda r^{y^y}}$ , cioè anche  $b^{r^{y^y}}$ , è ivi, come si doveva dimostrare. In conclusione,  $G$  risulta quasi-abeliano, come si voleva.

12. Sia ora  $G$  un gruppo del tipo considerato nel n. 9, generato cioè da due elementi  $a$  e  $b$ , tali che

$$b^{r^m} = 1, a^{r^n} = b^{r^s}, a^{-1} b a = b^{1+r^x}$$

con  $m, n, s, x$  interi positivi, tali che  $s \leq m, x = p^r \cdot K$  ( $K$  primo con  $p$ ),  $s+r+1 \geq m, m+r+1 \geq n$ .

Dal ragionamento del numero precedente discende intanto che  $G$  è quasi-abeliano, se  $p$  è dispari; come anche se  $p=2$ , ed  $x$  è pari.

Esaminiamo il caso  $p = 2$ ,  $x$  dispari. Si ha allora, facendo un calcolo analogo a quello del numero precedente

$$(ab)^{2y} = a^{2y} b^{2^{2y} + 1}$$

se  $y > 0$ ,

$$(ab)^{2y} = a^{2y} b^{2^{2y}}$$

se  $y = 0$ .

Segue dalle considerazioni del numero precedente che, se  $G$  è quasi-abeliano, occorre che, ogniqualvolta sia  $(ab)^{2y}$  in  $\{a\}$ , anche  $b^{2y}$  sia in  $\{a\}$ . Ora ciò, nel nostro caso, è possibile se e solo se  $b^2$  è in  $\{a\}$ .

Se  $x$  è dispari, e  $b^2$  è in  $\{a\}$ , si deve avere  $a^{-1} b^2 a = b^2$ . Ma d'altra parte è  $a^{-1} b^2 a = b^{2(1+2x)} = b^{2+4x}$ . Quindi dev'essere  $b^4 = 1$ , e di conseguenza  $x = 1$ ,  $a^{-1} b a = b^3$ ,  $b^3 = a^{2^x - 1}$ . Si ha allora  $b^{-1} a b = a^{1+2^{x-1}}$ , e il gruppo  $G$  è il gruppo generalizzato dei quaternioni, quindi hamiltoniano, e pertanto quasi-abeliano.

Giungiamo pertanto alla conclusione che i gruppi di cui al n. 9 sono quasi-abeliani nel caso che  $p$  sia dispari; mentre, nel caso  $p = 2$ , detti gruppi sono quasi-abeliani se  $x$  è pari. Se poi  $p = 2$ , e  $x$  è dispari, un gruppo del tipo di cui al n. 9 è abeliano allora e solo allora che esso è definito dalle relazioni  $a^{2^x - 1} = b^2$ ,  $b^4 = 1$ ,  $a^{-1} b a = b^3$ . Inoltre i prodotti diretti di gruppi appartenenti a questi tipi, per valori distinti di  $p$ , sono tutti e soli i gruppi quasi-abeliani finiti con due generatori.

È superfluo avvertire che l'esistenza dei gruppi di cui ai nn. 11 e 12 discende dalla teoria dell'ampliamento.

13. Raccogliamo i risultati ottenuti nel seguente

TEOREMA. *Tutti e soli i gruppi quasi-abeliani generabili mediante due soli elementi, non abeliani, rientrano nei tipi seguenti:*

A) *Gruppi generati dagli elementi  $a, b_1, b_2, \dots, b_h$ , legati dalle relazioni*

$$b_1^{p^{\alpha}} = 1, b_2^{q^{\beta}} = 1, \dots, b_h^{r^{\gamma}} = 1 \quad (p, q, \dots, r \text{ numeri primi distinti})$$

$$a^{-1} b_1 a = b_1^{1+p\alpha_1}, a^{-1} b_2 a = b_2^{1+q\alpha_2}, \dots, a^{-1} b_h a = b_h^{1+r\alpha_h}$$

*con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$  interi, e inoltre, se  $p$  (ad esempio)  $= 2$ ,  $\alpha_1$  pari.*

B) *Gruppi generabili mediante due elementi  $a$  e  $b$ , legati dalle relazioni*

$$b^{p^n} = 1, a^{p^s} = b^{p^s}, a^{-1} b a = b^{1+p^s}$$

con  $m, n, s, x$  interi positivi, tali che  $s \leq m, x = p^r k$  ( $k$  primo con  $p$ ),  $s + r + 1 \geq m, m + r + 1 \geq n, r \geq 0$  se  $p$  è dispari,  $r \geq 1$  se  $p = 2$ .

C) Gruppi generabili mediante due elementi  $a$  e  $b$  legati dalle relazioni

$$a^{2^n-1} = b^2, b^4 = 1, a^{-2} b a = b^3.$$

D) Prodotti diretti di gruppi del tipo C per gruppi del tipo B corrispondenti a valori dispari distinti di  $p$ .

14. OSSERVAZIONE. I nostri risultati sembrano a prima vista rientrare in quello ottenuto da G. A. MILLER (1) attraverso il seguente teorema: « A necessary and sufficient condition that all the operators of a group which is generated by  $s$  and  $t$  can be represented in the form  $s^p t^q$  is that at least one of these operators is transformed into a power of itself by other ». Ma se si approfondisce la cosa, si vede che il valoroso algebrista americano è in questo caso caduto in una lieve svista. Il teorema ora riportato infatti non è esatto. Consideriamo, ad esempio, il gruppo generato da due elementi  $a$  e  $b$ , legati dalle relazioni  $a^{p^3} = b^{p^3} = 1, b^{-1} a b = a^{1+p}$ ,  $p$  essendo un numero primo dispari: esso è quasi-abeliano, come risulta dal numero precedente. Esso può essere generato dagli elementi  $b$  e  $d = b^p a$ ; e, essendo il gruppo quasi-abeliano, ogni suo elemento può mettersi sotto la forma  $b^x d^y$ . Si ha  $b^{-1} d b = d a^p$ , onde il commutatore di  $b$  e  $d$  è  $a^p$ , il quale, giusta il teorema di MILLER, dovrebbe esser potenza di  $b$  o di  $d$ . Ma  $a^p$ , evidentemente, non è potenza di  $b$ ; e non è neanche potenza di  $d$ , poichè se così fosse  $\{d\}$  ed  $\{a\}$  avrebbero a comune un sottogruppo d'ordine  $p^2$  e pertanto  $\{d, a\}$  avrebbe ordine  $p^4$ , mentre esso, contenendo  $b^p$  ed  $a$ , deve avere ordine  $p^5$ . Donde l'inesattezza del teorema. Non ci attardiamo ad indicare il punto della dimostrazione ov'è l'errore, poichè esso non può sfuggire ad un lettore che lo ricerchi attentamente.

(1) G. A. MILLER, *Groups whose operators are of the form  $s^p t^q$* , Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., vol. 13 (1927), pagg. 753-759.

DIE ALTESTE OPFERSTELLE  
DES ALTPALÄOLITHISCHEN MENSCHEN  
IN DEN SCHWEIZER ALPEN (\*)

von P. W. SCHMIDT S. V. A.  
*m. s. m. der P. Academia Scientiarum*

**SUMMARIVM.** — De ursorum calvariis et oblongis ossibus, quae in paleolithicis Helvetiae cavernis, integra quidem et peculiari ratione posita, inventa sunt. Auctor disserit. Ab aliorum sententiis recedens, quas ethnologicis argumentis refellit, Auctor, collatis septemtrionalium quorundam populorum moribus, demonstrat illa e primitiarum sacrificio provenire.

In der Mitteilung, die ich hier der P. Academia Scientiarum zu machen habe, glaube ich mich kurz fassen zu können, da sie einen Teil eines Vortrags bildet, den ich am 14. März 1941 in Bern gehalten habe, und der jetzt in den « Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern » 1941 (S. 27-72) erschienen ist unter dem Titel « Völkerkunde und Urgeschichte in gemeinsamer Arbeit an der Aufhellung ältester Menschheitsgeschichte ». Von diesem Vortrag bildet mein oben genanntes Thema das IV. Kapitel « Homo palaeolithicus alpinus » (S. 48-65), worin sich auch die sehr detaillierten Literaturangaben und Belegstellen zu dem Thema finden.

Dar verdienstvolle Entdecker und Erforscher der Wildkirchli- und Drachenloch-Stationen der Nordost-Schweiz, Direktor Dr. EMIL BÄCHLER, hatte neben Knochenwerkzeugen, die hier viel zahlreicher sind als die sehr primitiven Steinwerkzeuge, die ihrem Alter bis an das Chelléen in der letzten Zwischeneiszeit (Riss-Würm) heranreichen, an mehreren besonders geschützten und entlegenen Stellen der Höhlen gänzlich

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 30 novembre 1941.



unverletzte Schädel- und Arm- und Schenkel-Knochen von Höhlenbären in sorgfältiger Aufschichtung, Beschützung und Orientierung aufgefunden, in denen also die Leckerbissen des Gehirns und des Marks unangestastet geblieben waren. Schon in einer 1920/21 erschienen Schrift « Das Drachenloch ob Vättis im Taminatal, 2445 m über Meer » sprach BÄCHLER den Gedanken aus, dass hier ein primitiver Opferkult vorliege.

Seine Auffassung erhielt eine Stütze durch ganz gleichartige Funde, die Dr. KONRAD HÖRMANN in der Petershöhle bei Velden-Nürnberg fast gleichzeitig machte und unabhängig von Bächler ebenfalls als Opfer deutete (1923).

Dieser Auffassung trat auch Prof. OSWALD MENGHIN bei in seinem Artikel « Der Nachweis des Opfers im Altpaläolithikum » (1926) und in seinem Werk « Weltgeschichte der Steinzeit » (1931 S. 125 ff.). Schon vorher hatte mein Schüler Prof. A. GAHS in seiner Abhandlung « Kopf-, Schädel- und Langknochenopfer bei Rentiervölkern » (W. Schmidt Festschrift 1928) dargelegt, wie die gleichen Teile noch jetzt bei den arktischen Rentiervölkern dargebracht werden als Primitialopfer von den erlegten Jagdtieren, Bären und Rentieren. Damit reihen sich diese Opfer in die Primitialopfer ein, die von der grossen Mehrzahl der Völker der ethnologischen Urkultur dargebracht werden, wofür ich die Belege in meinem Werk « Der Ursprung der Gottesidee » 6 Bände Münster i. W. 1926-1935 (besonders Bd. III S. 527-543, VI S. 70-75, 274-281, 444-454) zusammengetragen habe.

Neuerdings hat der Gerbereichemiker Dr. A. GANSSE-BASEL die Meinung geäussert, die uneröffneten Schädel und Langknochen der Schweizer Alpenhöhlen seien Depots von Hirn, dessen sich die Altpaläolithiker zur Gerberei der Tierfelle bedient hätten, wie das noch jetzt auch bei Eskimos und Indianern geschehe. Dieser Ansicht schloss sich auch Prof. H. OBERMAIER-Freiburg an und bezeichnete sie « als ungleich naheliegender » (Bull. Soc. Fribourg. Sciences nat. XXXV, 1940, S. 12).

Dr. BÄCHLER lehnt in seinem neuen Monumentalwerk « Das Alpine Paläolithikum der Schweiz » (Basel 1940) diese Auffassung ab und vertritt neuerdings mit guten Gründen den Opfercharakter der *unversehrten* Schädel (und Langknochen), will aber das aus den *aufgeschlagenen* Schädeln entnommene Hirn als Gerbereimittel seiner altpaläolithischen Jäger gelten lassen (S. 129 ff.).

Demgegenüber muss daran festgehalten werden, dass die altpaläolithischen Jäger überhaupt noch kein wirkliches Gerben der Felle übten und sicherlich noch kein Hirn bei Bereitung der Tierfelle gebrauchten, so dass auch das Hirn der aufgebrochenen Bärenschädel der Schweizer Alpenhöhlen für diese Verwendung nicht in Frage kam. Noch weniger kann also der Opfercharakter der unversehrten Schädel durch jene Auffassung in Frage gestellt werden.

Eine Deutung dieser Funde ist der Prähistorie nur mit Hilfe der Ethnologie möglich, und so ziehen auch Gansser und Obermaier die Bräuche der « Eskimo und Indianer » zur Erklärung heran. Nun muss aber bei der Heranziehung der Ethnologie zur Erklärung prähistorischer Funde unbedingt der methodische Grundsatz befolgt werden, dass die der Ethnologie entnommenen Vergleiche aus (wenigstens annähernd) gleicher Altersstufe gewählt sein müssen: man kann z. B. nicht einen altpaläolithischen Brauch erklären durch einen ethnologischen Vorgang, der dem Neolithikum gleichkommt. Dieser Fehler wird aber gemacht, wenn man zur Erklärung der altpaläolithischen Funde der Schweizer Alpenhöhlen einfachhin « Eskimo und Indianer » heranzieht.

Die ethnologisch älteren von beiden Völkern sind hier die Eskimo, die nach dem dänischen Arktisforscher K. BIRKET-SMITH in vier Altersschichten: Proto-Eskimo, Paläo-E., Neo-E., und Eshato-E., zerfallen und der dortigen ältesten Kulturschicht der sog. Eislochjagdkultur angehören. Ich habe nun in dem eingangs erwähnten Vortrag mit reichen Belegstellen (S. 52-56) gezeigt, dass keiner der zahlreichen Eskimo-Stämme die Verwendung von Hirn bei der Fellbereitung kennt, sondern dass die ältesten Eskimo nur das Einlegen der Felle in heisses Wasser oder längere Zeit in kaltes fliessendes Wasser üben, dass die mittleren und jüngeren Stämme aber sie in Urin legen. Birket-Smith setzt die Eislochjagdkultur in das Spät- oder Epipaläolithikum; sie ist also um einige Jahrzehntausende jünger als das schweizerische Altpaläolithikum, und nicht einmal diese Eskimo kennen die Verwendung von Hirn bei der Fellbereitung.

Es sind erst jüngere Indianer-Stämme, welche mit der Verwendung von Hirn beginnen. Sie gehören der sog. Schneeschuhkultur an, die sich aber erst im Mittel- oder Spät-Neolithikum in Nordasien bildete und von da nach Nordamerika einwanderte. Den Übergang dazu bildet

die Verwendung von Fischrogen und Leber bei einigen nordostasiatischen Stämmen. Die verschiedenen Indianerstämme von Nordamerika zerfallen in bezug auf die Lederbereitung in folgende Gruppen: 1. blosses Räuchern der Felle, 2. Räuchern mit Hirnbehandlung, 3. blosse Hirnbehandlung, 4. Verwendung von Hirn mit Fett oder Leber. Die eingehenden Belege mit genauer Lokalisierung der Stämme und Gruppen habe ich ebenfalls in dem genannten Vortrag gegeben (S. 59-64).

Alle diese Indianer-Stämme gehören der Schneeschuhkultur an, die aber, wie gesagt, erst dem mittleren oder späten Neolithikum entspricht. Diese neolithischen Stämme kann man also nicht zur Erklärung von Tatsachen der altpaläolithischen Schweizer Alpenhöhlen heranziehen. Die beiden Gruppen liegen um so viel Jahrzehntausende auseinander, dass man sie gewiss nicht als « ungleich naheliegender » bezeichnen kann.

Dagegen entspricht es durchaus dem methodischen Grundsatz, zur Erklärung prähistorischer Tatsachen nur ethnologische von (wenigstens annähernd) gleichem Alter heranzuziehen, wenn zur Deutung der uneröffneten, geschützten und orientierten Schädel und Langknochen der altpaläolithischen Schweizer Alpenhöhlen die Primitivopfer an das Höchste Wesen der Völker der ethnologischen Urkultur verwendet werden; denn beide befinden sich auf der gleichen Altersstufe.

Ich schliesse mit den (etwas erweiterten) Worten meines Vortrags (S. 64): « So bleibt für die Schweiz die Auszeichnung erhalten, dass sie nicht nur die räumlich höchste (Drachenloch 2445 m über Meer) und zeitlich älteste (Altpaläolithikum), sondern auch die inhaltlich höchste altpaläolithische Kulturstätte besitzt..., weil diese Kulturstätte die älteste entdeckte altpaläolithische Kultstätte ist, an welcher dem Höchsten Schöpferwesen von den uralten Menschen Huldigung und Dank für die gewährten Lebensmittel dargebracht wurden in ganz charakteristischen Erstlingsopfern von der Jagdbeute », die zugleich auch Bittopfer um gnädige Gewährung dieser Lebensmittel für die Zukunft waren.

IL PROBLEMA DEI MARGINI DI SICUREZZA  
NELLE STRUTTURE IPERSTATICHE  
IN STATO DI COAZIONE (\*)

(Con nove figure)

GUSTAVO COLONNETTI  
*Accademico Pontificio*

SYMMARIVM. — Auctor, exemplo utens, declarat quibus rationibus (quas plane differre demonstrat a rationibus quibus hodie uti solent constructionum professores) supputari debeat quanto solidiores, quam omnino oporteat, extruendae sint yperstaticae structurae sub coactione positae, quo maior sit operum stabilitas.

In una mia Nota su *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese* (1) ho avuto incidentalmente occasione di accennare a certi particolari criterii con cui va trattato il problema dei margini di sicurezza nella moderna tecnica delle costruzioni.

Più recentemente, in uno studio sui *Serbatoi sferici a sospensione funicolare* (2) ho, nello stesso ordine di idee, formulati alcuni rilievi la cui portata esorbitava dal problema particolare di cui mi stavo occupando ed investiva in pieno il problema, assai più vasto e più generale, delle strutture iperstatiche in stato di coazione.

Ritorno ora sull'argomento per chiarire meglio la portata di quei rilievi e per metterne in luce la fondamentale importanza.

\* \* \*

---

(\*) Nota presentata il 21 settembre 1942.

(1) GUSTAVO COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese* (Il problema della sezione parzializzata). Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », 1940.

(2) GUSTAVO COLONNETTI, *Serbatoi sferici a sospensione funicolare*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », 1942.

Mi riferirò, per fissar le idee, ad un caso concreto; e precisamente al caso di una trave semplicemente appoggiata agli estremi, accoppiata con una sospensione funicolare nel modo schematicamente indicato in fig. 1.

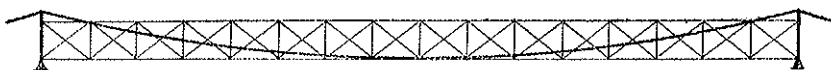


FIG. 1.

I vari aspetti del fenomeno che io mi propongo qui di illustrare possono, nello studio di questo particolarissimo problema, essere messi in evidenza con facilità estrema e singolare semplicità di mezzi.

Sia  $l$  la lunghezza della trave,  $h$  la sua altezza (costante),  $J$  il momento d'inerzia (pure costante) della sua sezione retta, ed  $A$  la sezione (ancor essa costante) della sospensione.

Supporrò che questa sia inizialmente disposta secondo una parabola ad asse verticale (coincidente colla verticale di mezzo della trave) e che la freccia  $f$  di questa parabola sia abbastanza piccola perchè la lunghezza della curva si possa praticamente confondere colla luce  $l$  e la tensione lungo di essa si possa ovunque ritenere eguale alla sua componente orizzontale.

Mi limiterò, nella presente trattazione, a considerare carichi  $Q$  uniformemente ripartiti, e supporrò che uniformemente ripartite siano anche le frazioni  $Q_s$  e  $Q_t$  di tali carichi che, in ciascun caso concreto, verranno a gravare rispettivamente sulla sospensione e sulla trave.

È doveroso avvertire che quest'ultima ipotesi implica il mantenimento (per qualsiasi valore dell'intensità del carico) della forma parabolica della sospensione; ciò che, a rigore, non si verifica. L'errore che si viene così a commettere è però molto piccolo, e rientra nei limiti di approssimazione di cui ci si suole accontentare nella trattazione dei problemi di questo genere.

Così stando le cose, nell'equazione generale<sup>(4)</sup> dell'equilibrio elastico

$$[1] \quad \int_V \left[ (\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta \sigma_y + \dots + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}) \delta \tau_{xy} \right] dV = 0$$

(4) GUSTAVO COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*. Torino, ed. Einaudi, 1941, pag. 369.

cinque dei sei gruppi di termini sotto integrale scompaiono se, nello studio della trave, premesse le solite ipotesi di De Saint-Venant, si conviene di prescindere dalla influenza degli sforzi di taglio.

Delle sei componenti speciali di tensione solo quella normale, avente la direzione dell'asse geometrico della trave, resta infatti, in tal caso, non identicamente nulla.

Assunta come incognita iperstatica del sistema la tensione  $X$  nella sospensione, lo stato di equilibrio che al sistema stesso compete, sotto l'azione di una ben determinata condizione di carico, si potrà pertanto sempre caratterizzare imponendo

$$[2] \quad \int_V (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \frac{\partial \sigma}{\partial X} dV = 0$$

In questa equazione

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

se  $E$  è il modulo di elasticità normale del materiale.

Quantò alle  $\bar{\varepsilon}$  noi ci limiteremo qui ad attribuir loro un valore costante nella sospensione; le riterremo identicamente nulle in tutto il resto della struttura.

Tenuto conto che nella sospensione

$$\sigma = \frac{Q_s l}{8fA}$$

mentre nella trave

$$\sigma = \frac{Q_t z (l-z)y}{2IJ}$$

e che  $Q_s$  e  $Q_t$  sono legate all'incognita  $X$  dalle relazioni

$$Q_s = Q - Q_t = \frac{8f}{l} X$$

la [2] si può facilmente ridurre alla forma

$$[3] \quad \frac{Q_s l}{8fA} - \frac{Q_t f l}{15J} + E\bar{\varepsilon} = 0$$

Di qui, per  $\bar{\varepsilon} = 0$ , si ricava subito

$$[4] \quad \frac{Q_s}{Q_t} = \frac{8f^2 A}{15J}$$

In assenza di deformazioni impresse, il rapporto  $\frac{Q_s}{Q_t}$  di ripartizione del carico riesce dunque completamente determinato in funzione delle sole caratteristiche geometriche del sistema. Resterà quindi anche determinato in conseguenza il rapporto tra le massime tensioni unitarie nella sospensione e nella trave.

Se pertanto queste due parti della struttura sono state costruite col medesimo materiale, non è detto affatto che il limite di elasticità venga in esse raggiunto contemporaneamente; il massimo carico praticamente ammissibile sulla struttura in condizioni di normale esercizio — quello cioè che si designa abitualmente col nome di *carico di sicurezza* della costruzione — dovrà perciò venire fissato in relazione a quella delle due parti della struttura in cui il limite di elasticità verrà raggiunto per primo.

Tanto per fare un esempio, poniamo

$$\begin{aligned} l &= 2000 \text{ cm.} \\ f &= 125 \text{ cm.} \\ A &= 12 \text{ cm}^2 \\ J &= 500.000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

L'equazione [3] diviene

$$[5] \quad \frac{Q_s}{6} - \frac{Q_t}{30} + E\bar{\varepsilon} = 0$$

e per  $\bar{\varepsilon} = 0$

$$[6] \quad \frac{Q_s}{Q_t} = \frac{1}{5}$$

Supponiamo che la trave abbia un'altezza costante

$$h = 100 \text{ cm.}$$

La tensione unitaria massima, ai bordi della sezione in mezzeria, sarà

$$\sigma' = \frac{Q_t l y'}{8 J} = \frac{Q_t}{40}$$

Se il materiale impiegato nella costruzione possiede un limite di elasticità pari a  $2,50 \text{ t/cm}^2$  questo non verrà raggiunto (nella trave) se non per

$$Q_t = 100 \text{ t.}$$

Ma nella sospensione, dove

$$\sigma = \frac{Q_s l}{8 f A} = \frac{Q_s}{6}$$

lo stesso limite verrà raggiunto per

$$Q_s = 15 \text{ t.}$$

ciò che si verifica già quando

$$Q_t = 75 \text{ t.}$$

L'aggiunta della sospensione — se i limiti di elasticità dovessero davvero essere ovunque rispettati — si tradurrebbe quindi in una *limitazione del carico* che la trave avrebbe potuto sopportare da sola.

Qualunque sia infatti il margine  $n$  di sicurezza che si vuol adottare, il carico di sicurezza che, per la trave presa da sola, sarebbe stato di

$$\frac{100}{n} \text{ t.}$$

dovrebbe, per il sistema costituito dall'accoppiamento della trave con la sospensione, venire ridotto a sole

$$\frac{15 + 75}{n} = \frac{90}{n} \text{ t.}$$



Ora chiunque abbia pensato di aggiungere alla trave la sospensione lo avrà fatto certamente coll'idea di trarne un vantaggio, vale a dire di accrescere il carico che la struttura può utilmente portare. Non potrà quindi certamente accontentarsi di un simile risultato.

In realtà noi sappiamo bene quel che accade.

Raggiunte le 90 t., la sospensione entra in regime plastico; al crescere ulteriore del carico la frazione di questo che vien sopportata dalla sospensione cessa di crescere, ma continua a crescere la frazione sopportata dalla trave; e ciò senza inconvenienti di sorta, almeno fino a che le deformazioni plastiche della sospensione non divengono troppo grandi, e fino a che la trave si mantiene in regime di perfetta elasticità; vale a dire fino a che la frazione del carico che essa sopporta non raggiunge le 100 t.

Nulla ci vieta dunque di adottare come carico di sicurezza la somma dei carichi di sicurezza delle due parti della struttura prese separatamente, cioè

$$\frac{15 + 100}{n} = \frac{115}{n} \text{ t.}$$

se siamo disposti ad ammettere il tempestivo intervento di deformazioni plastiche nella misura occorrente perchè sia verificata la [5] epperò si abbia

$$E \bar{\varepsilon} = \frac{Q_t}{30} - \frac{Q_s}{6} = \frac{100}{30} - \frac{15}{6} = 0,833 \text{ t.}$$

Per  $E = 2080 \text{ t/cm}^2$  si trova così un allungamento plastico

$$\bar{\varepsilon} = \frac{0,4}{1000}$$

che qualunque buon acciaio dolce da costruzione può sicuramente sopportare senza danno.

\* \* \*

Del resto non è neppur detto che questo allungamento debba proprio necessariamente essere il risultato di una deformazione plastica.

Questa può anzi essere del tutto evitata se si provvede ad introdurre l'allungamento di cui si tratta, all'atto stesso del montaggio della

sospensione, attribuendo alla fune una lunghezza maggiore di quella che geometricamente le spetterebbe (nella misura di quattro decimi di millimetro per metro lineare di lunghezza).

Tra i due casi v'è solo una differenza; ed è che, se la deformazione precede la messa in carico della struttura, la sospensione non entrerà effettivamente in funzione se non quando il carico avrà raggiunto il valore capace di determinare nella trave quella deformazione elastica che il gioco della sospensione consente.

Se invece la fune è stata montata senza gioco, la ripartizione del carico tra sospensione e trave avverrà, fin dall'inizio, nel rapporto fisso 1:5.

Pei valori del carico ammissibili in condizioni di normale esercizio della struttura, le tensioni unitarie massime potranno dunque risultare, nei due casi, assai diverse. Nella trave esse saranno maggiori nel primo caso che nel secondo; l'opposto accadrà nella sospensione.

Ma a questo si limitano, in ultima analisi, le conseguenze del fatto che le  $\bar{\epsilon}$  vengono, nella prima ipotesi, impresse preventivamente, mentre nell'altra ipotesi faranno la loro tempestiva comparsa solo in caso di bisogno.

Pel fatto che queste  $\bar{\epsilon}$  sono, in definitiva, le stesse, lo stesso sarà, nei due casi, il margine di sicurezza della struttura.

\* \* \*

S'intende che di deformazioni impresse non v'è più bisogno alcuno se le due parti della struttura vengono costruite con materiali differenti, aventi limiti di elasticità appropriati.

Immaginiamo infatti che, fermo restando il limite elastico dell'acciaio con cui è fatta la trave a  $2,50 \text{ t/cm}^2$ , venga adottato nella costruzione della sospensione un acciaio il quale abbia per limite elastico  $3,33 \text{ t/cm}^2$ .

È facile constatare che i due limiti di elasticità verranno in questo caso raggiunti simultaneamente nella sospensione e nella trave quando i rispettivi carichi raggiungeranno (simultaneamente) i valori

$$Q_s = 20 \text{ t.}$$

$$Q_t = 100 \text{ t.}$$

Si potrà perciò adottare senz'altro come carico di sicurezza della struttura

$$\frac{120}{n} \text{ t.}$$

Noi siamo così condotti a prospettareci come vantaggiosa, nei sistemi iperstatici, l'adozione di materiali dotati di limiti di elasticità differenti; nel caso concreto, l'adozione, nella sospensione, di un acciaio di qualità sensibilmente più elevata di quella dell'acciaio impiegato nella costruzione della trave.

\* \* \*

Da un razionale uso degli acciai di qualità e degli stati di coazione preventivamente impressi, si possono d'altronde ricavare ben altri vantaggi.

Supponiamo infatti di impiegare nella costruzione della sospensione un acciaio avente un limite elastico ancor più elevato, per esempio 12,50 t/cm<sup>2</sup> (cinque volte più grande del limite elastico dell'acciaio impiegato nella costruzione della trave).

Una utilizzazione integrale della resistenza dei due materiali si potrà evidentemente ottenere solo se

$$Q_s = 75 \text{ t.}$$

mentre

$$Q_t = 100 \text{ t.}$$

ciò che autorizzerebbe l'adozione di un carico di sicurezza pari a

$$\frac{175}{n} \text{ t.}$$

Ora una siffatta ripartizione del carico tra sospensione e trave si verifica effettivamente se

$$E \bar{\epsilon} = \frac{Q_t}{30} - \frac{Q_s}{6} = \frac{100}{30} - \frac{75}{6} = -9,167 \text{ t.}$$

cioè se

$$\bar{s} = - \frac{4,4}{1000}$$

Si tratta dunque semplicemente di attuare una *messa in tensione preventiva* della sospensione attribuendo alla fune, all'atto del montaggio, una lunghezza minore di quella che geometricamente le competerebbe (nella misura di quarantaquattro decimi di millimetro per metro lineare di lunghezza).

\* \* \*

Una sola obiezione potrebbe farsi all'utile impiego di simili stati di coazione - e potrebbe essere fonte di ben ragionevoli riserve - se i risultati a cui siam giunti fossero inderogabilmente connessi con la perfetta esecuzione delle operazioni di montaggio, e con la perfetta conservazione degli stati di coazione che nel montaggio si sono creati.

Ma non è così.

La plasticità dei materiali è sempre là per rimediare, automaticamente ed entro larghi limiti, ai possibili inconvenienti, e per correggere i possibili errori, realizzando in ogni caso le condizioni più favorevoli per la resistenza della struttura.

Questa volta è la plasticità della trave quella che può esser chiamata ad intervenire.

Supponiamo infatti che, per un errore di montaggio, o per un successivo cedimento di ancoraggi, la deformazione impressa alla sospensione sia, o divenga, inferiore al valore prefisso.

Le cose procederanno allora, al crescer del carico, nel modo seguente: la frazione di carico assunta dalla sospensione sarà minore di quella dianzi indicata; maggiore riuscirà quindi in definitiva la frazione gravante sulla trave; in questa perciò i limiti di elasticità verranno raggiunti quando la resistenza della sospensione non è ancora integralmente utilizzata.

Accadrà così che nella trave si determineranno le prime deformazioni plastiche; il carico da essa sopportato cesserà allora di crescere; gli ulteriori incrementi di carico si riporteranno tutti e soltanto sulla sospensione, e ciò fino al momento in cui in essa pure si sarà raggiunto il limite di elasticità del materiale.

In quel momento le condizioni statiche da noi dianzi definite si saranno automaticamente ripristinate.

Attraverso un processo opposto (consistente in una deformazione plastica della sospensione) lo stesso identico risultato si raggiungerebbe, non meno automaticamente, se l'errore di montaggio fosse stato di segno contrario, se cioè alla sospensione fosse stata attribuita una tensione iniziale eccessiva.

Sembra pertanto lecito assumere in ogni caso come carico di sicurezza della struttura il valore ottenuto sommando i carichi di sicurezza propri della sospensione e della trave separatamente considerate; e valersi dell'equazione generale dell'equilibrio elastico al solo scopo di determinare l'entità delle deformazioni impresse necessarie, nonchè le caratteristiche dello stato di coazione che da esso deriva; facendo poi assegnamento sulla plasticità dei materiali per la produzione di tali deformazioni (se esse non sono eccessivamente grandi) o quanto meno per la correzione degli errori in cui si può incorrere nell'imporle preventivamente e per la compensazione delle variazioni a cui esse possono andare successivamente soggette.

\* \* \*

Di regola l'adozione delle deformazioni impresse preventivamente è da considerarsi come nettamente preferibile.

E ciò non soltanto per la ragione, ovvia, che con essa si evita (o, in ogni caso, si limita) l'intervento dei fenomeni plastici, ma anche e soprattutto per un'altra ragione che merita di essere tenuta nella massima considerazione; ed è la inversione di sollecitazioni che le deformazioni impresse preventivamente determinano nella trave per tutte le condizioni di carico inferiori ad un certo limite.

Questa inversione si spinge spesso a tal segno che le condizioni più sfavorevoli per la stabilità della trave si vengono a verificare a trave scarica.

Così accade per esempio nel caso da noi testè considerato; il carico *negativo* che viene a gravare sulla trave in seguito alla messa in tensione preventiva della sospensione è infatti eguale a tonnellate 45,8 mentre quello *positivo* che graverà su di essa in condizioni normali di

esercizio, se si adotta un margine di sicurezza eguale a due, non dovrà mai superare le tonnellate 27,1.

Ciò è quanto dire che, se un qualunque cedimento anormale dovesse per avventura prodursi nelle membrature della trave - poniamo, per esempio, in dipendenza di una insufficienza di resistenza al carico di punta - esso dovrebbe se mai verificarsi non già sotto carico (quando il fatto potrebbe avere conseguenze gravi) bensì a trave scarica (quando le conseguenze non potrebbero consistere che in una immediata riduzione dello stato di coazione con conseguente assestamento automatico dell'intera struttura).

\* \* \*

La conclusione si può evidentemente compendiare nei tre punti già accennati nella nota che ho citata da principio <sup>(1)</sup>; punti che enunceremo ora più esattamente e più generalmente così:

1) possibilità di raggiungere in ogni caso, con un razionale impiego degli stati di coazione, la utilizzazione integrale delle caratteristiche di resistenza dei materiali impiegati;

2) opportunità di adottare, nella costruzione di certe ben determinate parti della struttura, materiali di qualità; e possibilità di raggiungere in essi (pur senza rinunciare ai consueti doverosi margini di sicurezza) valori delle tensioni anche molto elevati, cioè molto prossimi al loro limite di elasticità;

3) possibilità che certe condizioni più particolarmente sfavorevoli alla stabilità si vengano a verificare a carico nullo, vale a dire sotto l'azione del solo stato di coazione iniziale.

Io penso che questi tre punti meritino tutta l'attenzione degli studiosi: l'ultimo di essi in modo particolarissimo.

La circostanza a cui esso si riferisce - e che è stata qui illustrata con un esempio - è infatti suscettibile di dare al costruttore ed al progettista un senso nuovo di sicurezza che, se io non mi inganno, verrà presto annoverato tra i maggiori pregi della nuova tecnica delle costruzioni.

---

(1) GUSTAVO COLONNETTI, *Serbatoi sferici a sospensione funicolare*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », 1942.

## ALLEGATO

## DIAGRAMMI DI RIPARTIZIONE DEL CARICO

*A documentazione ed illustrazione di quanto sopra esposto si può utilmente ricorrere alla seguente rappresentazione grafica.*

*I carichi verranno portati come ascisse su di un asse orizzontale OQ; come ordinate, a partire da questo medesimo asse, verranno portate:*

*verso l'alto le frazioni  $Q_s$  sopportate dalla sospensione*

*verso il basso le frazioni  $Q_t$  sopportate dalla trave.*

*In regime elastico ed in assenza di deformazioni impresse il diagramma di ripartizione verrà delimitato, superiormente ed inferiormente dalle due rette OS ed OT le cui inclinazioni sull'asse delle ascisse stanno nel rapporto (costante) dato dalla [4].*

*Tale diagramma dovrà intendersi limitato a quel valore del carico per cui il limite di elasticità del materiale viene in qualche punto, per la prima volta, raggiunto (fig. 2).*

*Se si ammette l'intervento di deformazioni plastiche il diagramma può venire esteso come in fig. 3. In questo caso la linea di ripartizione continua a coincidere coll'asse delle ascisse solo fino a quel punto P per cui il limite di elasticità del materiale è per la prima volta raggiunto nella sospensione. A partire da questo punto il carico gravante sulla sospensione deve mantenersi costante; si dovrà perciò assumere come nuova fondamentale la parallela ad OS condotta per P. La linea di ripartizione verrà così ad assumere l'andamento di una bilatera OPR.*

*Reciprocamente, dato il carico ST, somma dei carichi RS ed RT che operando separatamente sulla sospensione e sulla trave vi determinano il raggiungimento del limite di elasticità del materiale, conducendo da R la parallela ad OS fino ad incontrare in P l'asse delle ascisse, si verrà a determinare così l'inizio come l'entità del fenomeno plastico.*

*Ove poi si voglia prevenire questo fenomeno con deformazioni preventivamente impresse, basterà (come in fig. 4) condurre da R la parallela all'asse delle ascisse, ed assumere questa parallela come nuovo asse di riferimento, cioè contare a partire da essa le ordinate di OS e di OT.*

*L'ordinata AO in corrispondenza dell'origine, dovrebbe rappresentare il carico (negativo sulla sospensione) all'atto del montaggio.*

*S'intende che se, per ragioni costruttive, carichi negativi non sono ammissibili — come accade quando la sospensione è fatta per funzionare solo in tensione — si dovrà prescindere da essi ed assumere come linea di ripartizione la bilatera OBR costituita da un primo tratto della retta OS e successivamente da un secondo tratto dell'asse AR.*

*Veniamo ora all'ipotesi che le due parti della struttura siano state costruite con materiali differenti, dotati di limiti di elasticità tali che il loro raggiungimento si verifichi, nelle due parti, simultaneamente. L'utilizzazione integrale delle caratteristiche dei materiali si ottiene allora spontaneamente, vale a dire senza bisogno di deformazioni impresse, nel modo indicato in fig. 5.*

*Le figure seguenti si riferiscono finalmente al caso in cui per la sospensione sia stato impiegato un acciaio ad altissima resistenza. L'utilizzazione integrale delle sue caratteristiche si intende assicurata da opportune deformazioni impresse.*

*In fig. 6 si è supposto che queste intervengano, per effetto del carico, sotto forma di deformazioni plastiche della trave. La linea di ripartizione si dispone allora secondo la bilatera OPR.*

*In fig. 7 si è invece supposto che le stesse deformazioni vengano impresse preventivamente per mezzo di una messa in tensione della sospensione all'atto del montaggio. L'asse di riferimento si sposta parallelamente a se stesso in AR.*

*Nella fig. 8 si è poi fatta l'ipotesi che questa tensione preventiva della sospensione sia stata, all'atto del montaggio (o sia divenuta in seguito) insufficiente. Nella fig. 9 invece si è supposta una tensione preventiva eccessiva. Nel primo caso l'errore verrà corretto sotto carico da una opportuna deformazione plastica della trave; nell'altro caso da una deformazione plastica della sospensione.*



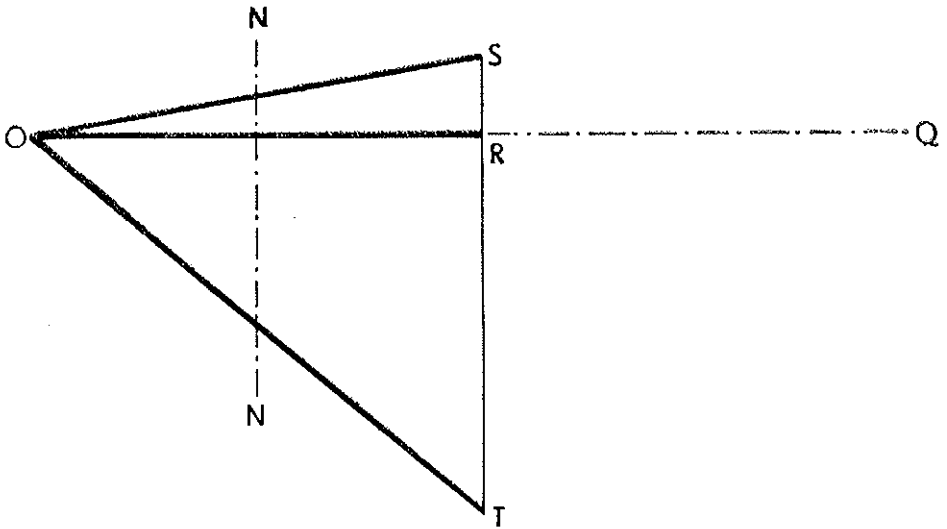


FIG. 2.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	0	0	0	0
45	7.5	1.25	37.5	± 0.94
90	15	2.50	75	± 1.88

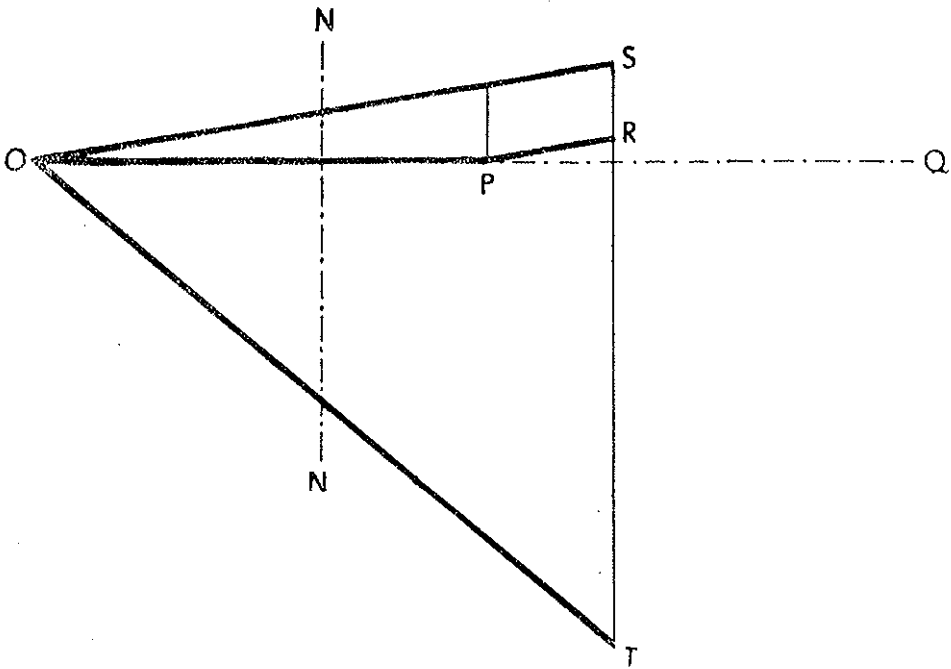


FIG. 3.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	0	0	0	0
57.5	9.5	1.53	48	± 1.20
115	15	2.50	100	± 2.50

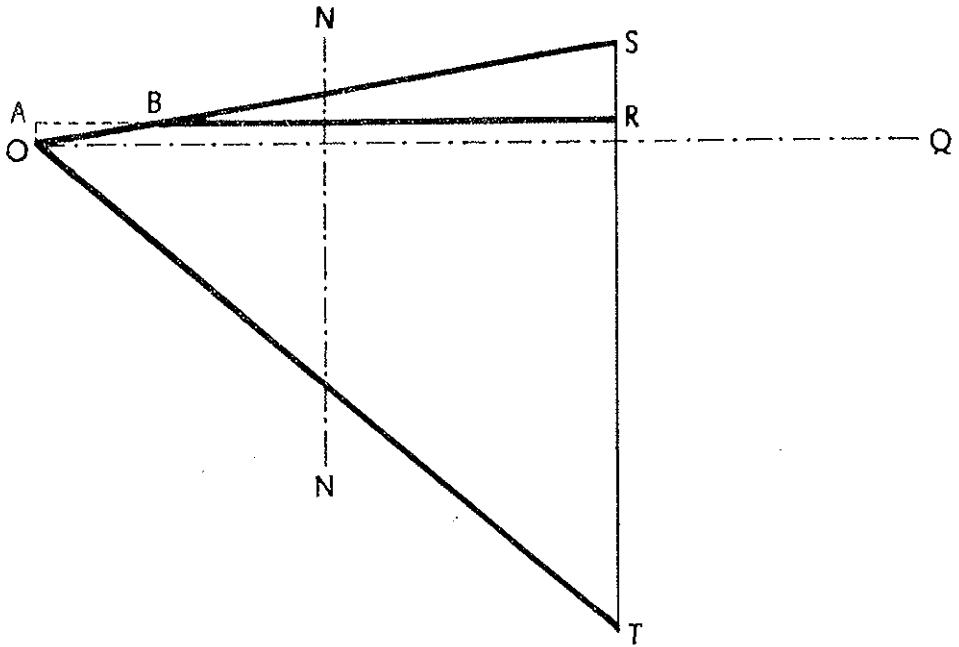


Fig. 4.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	4.2	0.69	— 4.2	± 0.10
57.5	6	1.00	51.5	± 1.29
115	15	2.50	100	± 2.50

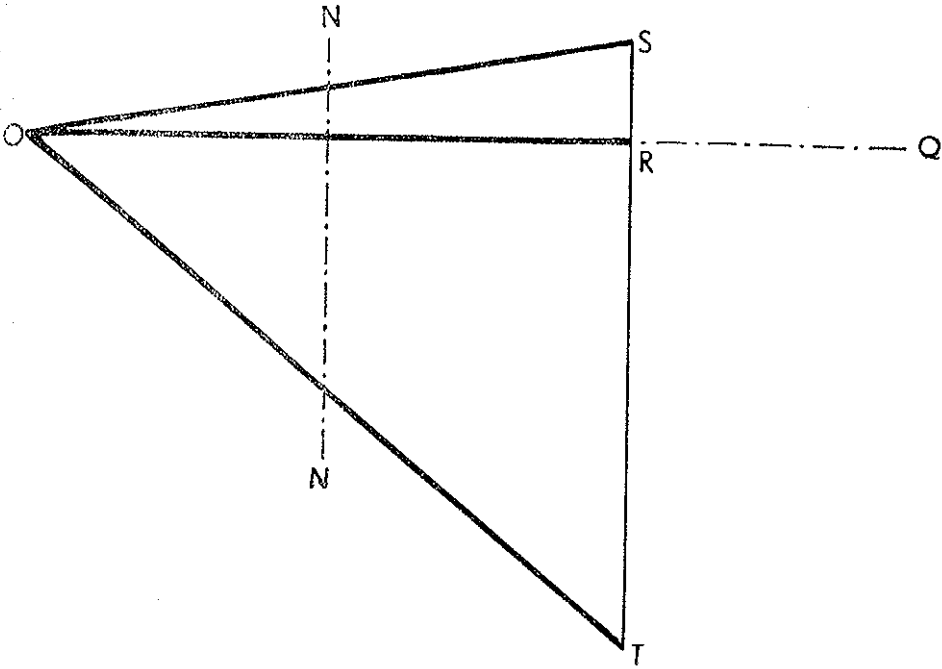


FIG. 5.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio <b>semiduro</b> (lim. elastico 3.33 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio <b>dolce</b> (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	0	0	0	0
60	10	1.67	50	± 1.25
120	20	3.33	100	± 2.50

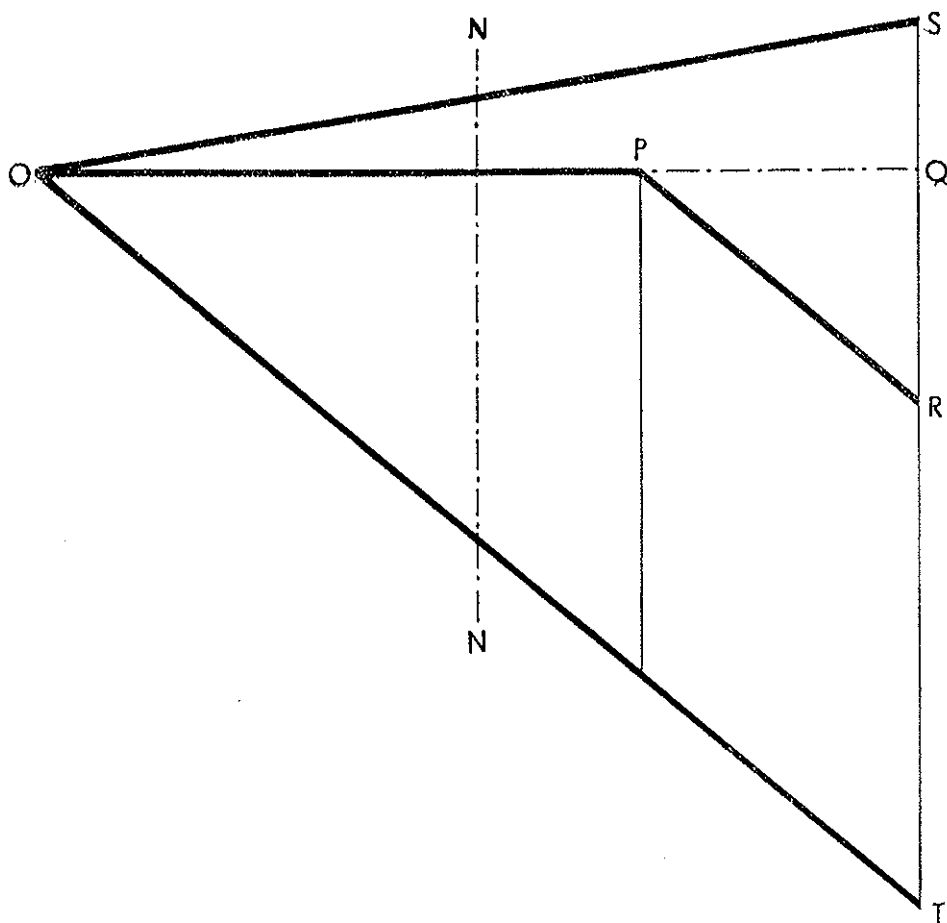


FIG. 6.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio di qualità (lim. elastico 12.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	0	0	0	0
87.5	15	2.50	72.5	± 1.81
175	75	12.50	100	± 2.50

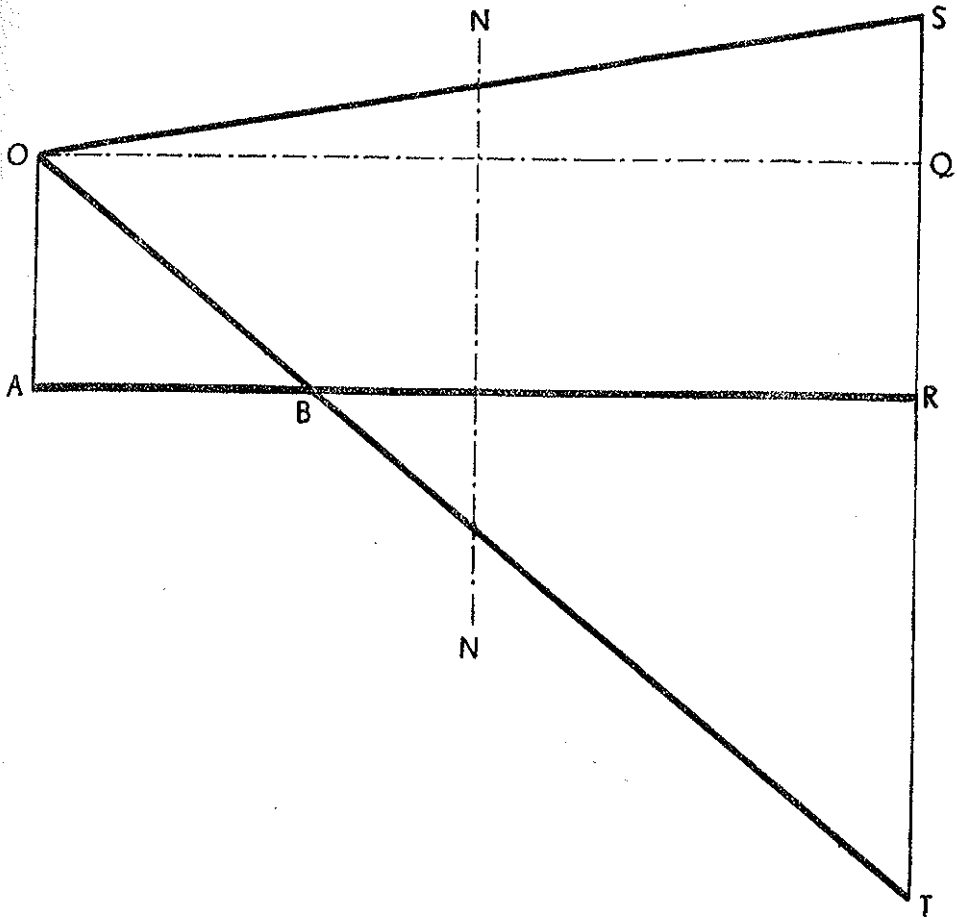


FIG. 7.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio di qualità (lim. elastico 12.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>g</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	45.8	7.64	— 45.8	± 1.16
87.5	60.4	10.07	27.1	± 0.67
175	75	12.50	100	± 2.50

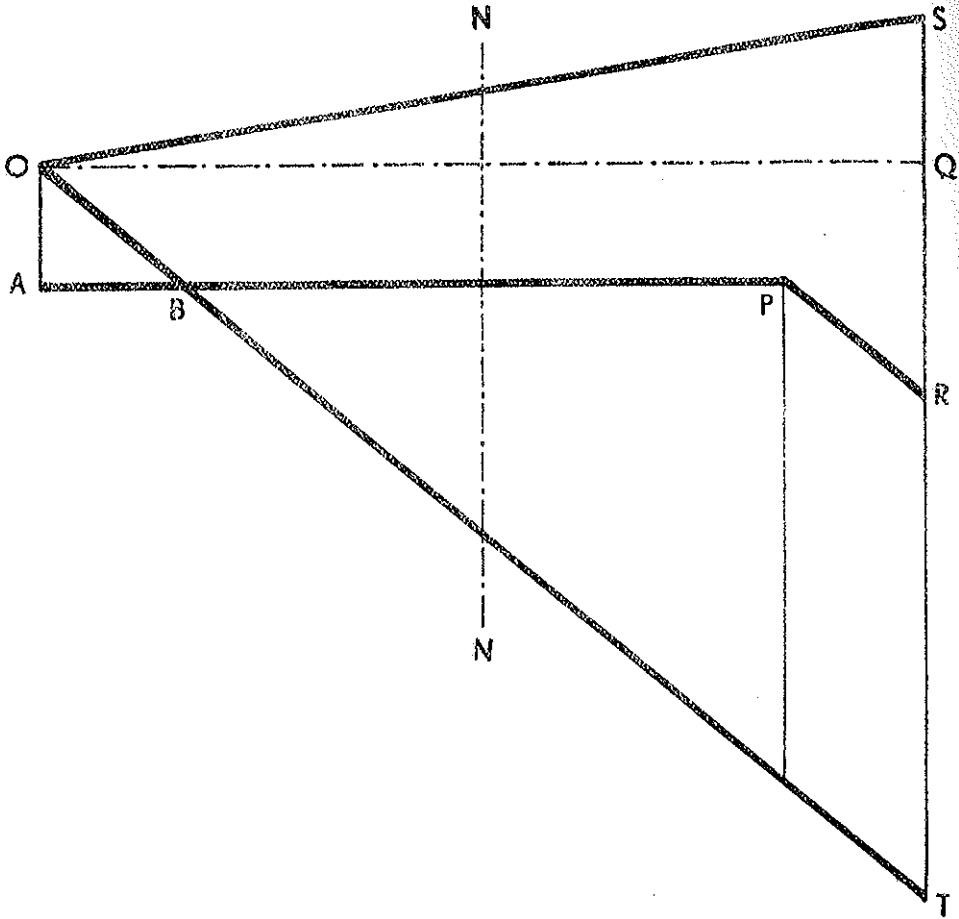


FIG. 8.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio di qualità (lim. elastico 12.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	23	3.03	- 23	± 0.57
87.5	50	8.33	37.5	± 0.94
175	75	12.50	100	± 2.50

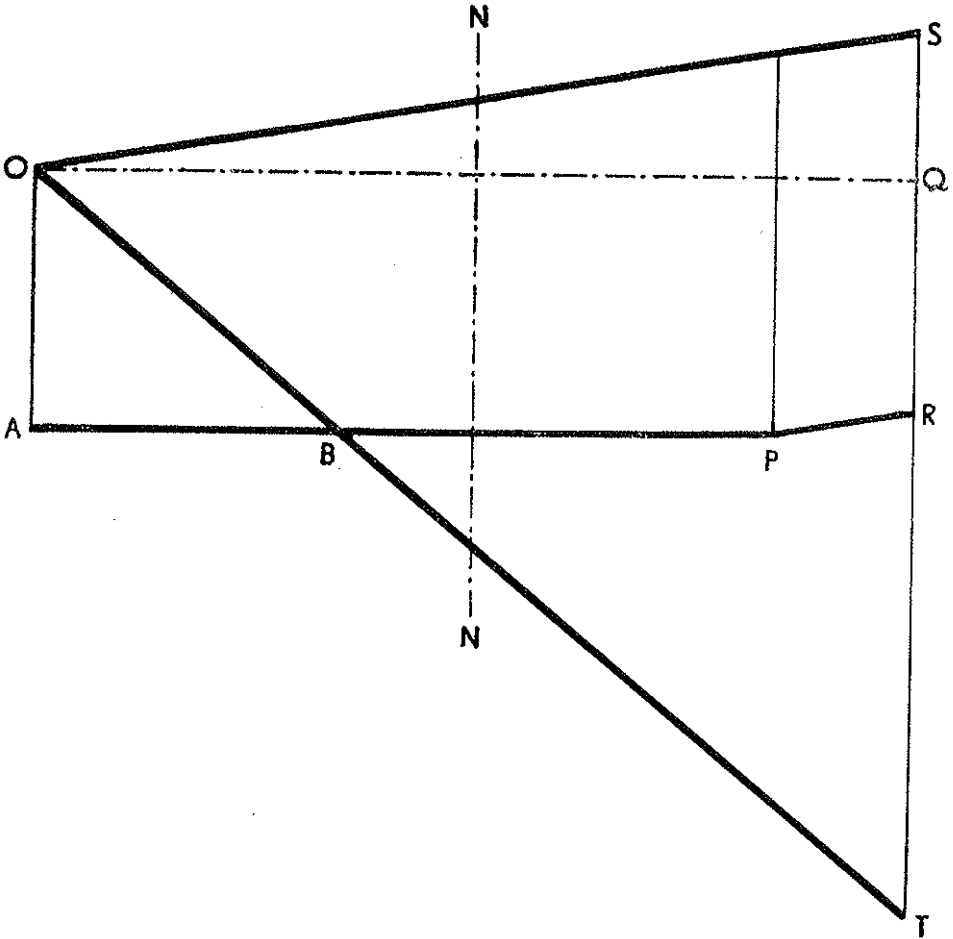


Fig. 9.

Q carico totale applicato alla struttura t	SOSPENSIONE in acciaio di qualità (lim. elastico 12.50 t/cm <sup>2</sup> )		TRAVE in acciaio dolce (lim. elastico 2.50 t/cm <sup>2</sup> )	
	Q <sub>s</sub> frazione del carico gravante sulla sospensione t	tensione unitaria massima nella sospensione t/cm <sup>2</sup>	Q <sub>t</sub> frazione del carico gravante sulla trave t	tensioni unitarie massime nella trave t/cm <sup>2</sup>
0	51	8.50	— 51	± 1.32
87.5	65.5	10.91	22	± 0.55
175	75	12.50	100	± 2.50



## SUI GRUPPI QUASI-ABELIANI CON ELEMENTI APERIODICI (\*)

GUIDO ZAPPA

**SUMMARIVM** — Antecedenti nota Auctor quasi-abelianas classes eas appellavit in quibus binae subclasses quaelibet inter se permutari semper possint, recensitque omnia quasi-abelianarum classium genera, quae e duobus tantum elementis gigni possint.

Hac nota, in studium quasi-abelianarum classium progrediens, Auctor determinat omnes quasi-abelianas classes elementa aperiodica continentes, quae e finito elementorum numero gigni possint; mox expositurus eas quasi-abelianas classes, quae e finito quidem elementorum numero gigni possint, nullum tamen elementum aperiodicum habeant.

In una Nota presentata presso questa stessa Accademia (1) ho introdotto il concetto di gruppi quasi-abeliani. Precisamente, un gruppo vien chiamato quasi-abeliano, quando due suoi qualunque sottogruppi son sempre permutabili tra loro. I gruppi quasi-abeliani generabili mediante due elementi sono stati da me determinati nella suddetta Nota. Continuando lo studio dei gruppi quasi-abeliani possedenti un numero finito di generatori, rivolgo qui l'attenzione su quelli, tra questi gruppi, che posseggono qualche elemento aperiodico. Dimostro che, se  $G$  è un tale gruppo, il quale non sia abeliano, si può trovare un sottogruppo normale finito e abeliano  $H$  di  $G$ , ed un elemento aperiodico  $g$  di  $G$ , di modo che il gruppo  $\{H, g\}$  coincida con  $G$ , e che  $g$  trasformi ogni elemento  $h$  di  $H$ , il cui ordine sia potenza di un numero primo  $p$ , in

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) *Gruppi quasi-abeliani*. Pontificia Academia Scientiarum. « Acta », vol. VI, n. 29.

un elemento della forma  $h^{1+p^x}$ , ove  $x$  è un intero dipendente da  $p$ , ma non dall'elemento  $h$ , soggetto all'ulteriore condizione di esser pari, quando  $p=2$ . Viceversa, un gruppo  $G$  che soddisfaccia alle suddette condizioni, è quasi abeliano.

Vengo in tal modo a generalizzare il risultato, ottenuto nella Nota I, in base al quale ogni gruppo quasi-abeliano generabile mediante due elementi, e possedente qualche elemento aperiodico, si può costruire mediante gli elementi  $g, h_1, \dots, h_s$ , ove  $g$  è aperiodico, mentre  $h_i$  è di ordine  $p_i^{\alpha_i}$  ( $\alpha_i$  intero;  $p_1, p_2, \dots, p_s$  numeri primi distinti); avendosi inoltre  $h_i h_j = h_j h_i$  ( $i, j = 1, \dots, s$ ), e  $g^{-1} h_i g = h_i^{1+p_i^{\alpha_i}}$  ( $i = 1, \dots, s$ ), con  $\alpha_i$  intero, e, nel caso che sia  $p_i = 2$ , pari. Di questo risultato mi giovo in diversi punti della presente Nota.

Per completare lo studio dei gruppi quasi-abeliani con un numero finito di generatori, resta ad esaminare il caso in cui il gruppo sia privo di elementi aperiodici (indi finito). Questo caso sarà oggetto di una Nota successiva.

I. - Determiniamo in primo luogo i gruppi quasi-abeliani, generabili mediante un numero finito di elementi, e *possedenti qualche elemento aperiodico*.

Sia  $G$  un tal gruppo. Il gruppo congiungente due qualsiasi sottogruppi di  $G$  d'ordine finito ha anch'esso ordine finito, perchè i due sottogruppi sono in esso permutabili, e quindi è costituito di elementi aventi tutti ordine finito. Da ciò segue che *gli elementi d'ordine finito di  $G$  costituiscono un sottogruppo  $H$* , evidentemente caratteristico o quindi normale.

Mostriamo ora che

*Ogni elemento di  $H$  è trasformato in una sua potenza da ogni elemento di  $G$ ,*

di guisa che, in particolare

*$H$  è abeliano o hamiltoniano.*

Sia  $h$  un elemento di  $H$ , e  $g$  un elemento di  $G$  (esistente, per ipotesi) aperiodico, cioè non contenuto in  $H$ . Dalla Nota I segue che, essendo  $\{g, h\}$  quasi-abeliano,  $h$  è trasformato da  $g$  in una sua potenza. Onde  $h$  è trasformato in una sua potenza da ogni elemento di  $G$  non contenuto in  $H$ . Se poi  $h'$  è un elemento di  $H$ ,  $g h'$ , al pari di  $g$ ,

non è in  $H$ , quindi trasforma  $\{h\}$  in sè. Ma anche  $g$  trasforma  $\{h\}$  in sè, quindi anche  $h' = g^{-1} \cdot g h'$ , trasforma  $\{h\}$  in sè. In conclusione,  $\{h\}$  è normale in  $G$ , c. d. d.

2. - Supponiamo d'ora in poi che  $G$  non sia abeliano, e mostriamo che allora

*Esiste un elemento  $g$  di  $G$ , tale che  $\{H, g\} = G$ .*

Devono infatti esistere un elemento  $g$  di  $G$  aperiodico, ed un elemento  $h$  di  $H$ , non permutabili. Si può anche supporre che  $g$  sia uno dei generatori di  $G$ , e che, essendo questi in numero finito, non esista alcun generatore  $\bar{g}$  di  $G$  tale che  $\{H, g\}$  sia contenuto in  $\{H, \bar{g}\}$ .

Dico che allora è  $\{H, g\} = G$ . Infatti, in caso contrario, dovrebbe esistere un generatore  $g'$  di  $G$ , non contenuto in  $\{H, g\}$ . Mostriamo anzitutto che  $g$  e  $g'$  dovrebbero avere una potenza non identica in comune.

Se infatti ciò non fosse,  $g$  e  $g'$ , in base alla Nota I sarebbero permutabili. Inoltre  $\{g', h\} = \{g', g'h\}$ , e poichè l'ordine relativo di  $h$  rispetto a  $g'$  è finito, lo sarebbe anche quello di  $g'h$  rispetto a  $g'$ , cioè  $g'h$  e  $g'$  avrebbero potenze non identiche in comune. Ne seguirebbe che  $g'h$  e  $g$  non avrebbero potenze non identiche in comune, e allora, sempre per la Nota I, sarebbero permutabili; e del pari sarebbero permutabili  $g$  e  $h (= g'^{-1} \cdot g'h)$ , contro l'ipotesi.

Avendo pertanto  $g$  e  $g'$  una potenza non identica in comune, si avrebbe, in base alla Nota I,  $\{g, g'\} = \{\bar{h}, \bar{g}\}$ , con  $\bar{h}$  elemento d'ordine finito, quindi appartenente ad  $H$ , e  $\bar{g}$  elemento aperiodico, che si può supporre coincidente con uno dei due elementi  $g$  e  $g'$ . Ma non può essere  $\bar{g} = g$ , altrimenti  $g'$  sarebbe in  $\{H, g\}$ , contro l'ipotesi, onde  $\bar{g} = g'$ , e allora  $g$  sarebbe in  $\{H, g'\}$ , cioè, visto che  $g'$  non è in  $\{H, g\}$ ,  $\{H, g'\}$  conterrebbe propriamente  $\{H, g\}$ , contro l'ipotesi.

Pertanto è necessariamente  $\{H, g\} = G$ .

3. - In base alla Nota I, dovendo  $\{g, h\}$  essere quasi-abeliano, si ha che se l'ordine di  $h$  è del tipo  $p^\alpha$ , con  $p$  numero primo,  $g$  trasforma  $h$  in una sua potenza della forma  $h^{1+px}$ , con  $x$  intero qualunque, se  $p$  è dispari, e con  $x$  intero pari, se  $p=2$ .

Di conseguenza  $H$  è necessariamente abeliano.

Segue già dal n. 1 che  $H$  è abeliano o hamiltoniano. Ma se  $H$  fosse hamiltoniano, esso avrebbe un sottogruppo  $Q$  isomorfo al gruppo dei quaternioni, cioè due elementi del quarto ordine,  $h_1$  ed  $h_2$ , tali che  $h_1 h_2 = h_2 h_1^2 = h_2^2 h_1$ . Per quanto precede, non si può avere  $g^{-1} h_1 g = h_1^{-1}$ , onde necessariamente sarebbe  $g^{-1} h_1 g = h_1$ . Si avrebbe pertanto, posto  $g' = h_2 g$ ,  $g'^{-1} h_1 g' = g^{-1} h_2^{-1} h_1 h_2 g = g^{-1} h_1^{-1} g = h_1^{-1}$ , il che, sempre per quel che precede, non può essere, una volta che, come si vede subito, è  $\{H, g'\} = G$ . Quindi  $H$  è necessariamente abeliano.

Inoltre:

Se  $h_1$  ed  $h_2$  sono due elementi di  $H$ , di ordini rispettivamente  $p^{\alpha_1}$ ,  $p^{\alpha_2}$  ( $p$  primo, e  $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ), si ha  $g^{-1} h_1 g = h_1^{1+p\alpha_1}$ ,  $g^{-1} h_2 g = h_2^{1+p\alpha_2}$ , con  $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ .

Supponiamo  $g^{-1} h_1 g = h_1^{1+p\alpha_1}$ ,  $g^{-1} h_2 g = h_2^{1+p\alpha_2}$ , e dimostriamo che  $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ . L'elemento  $h_1 h_2$ , in base al n. 1, deve essere mutato in una sua potenza da  $g$ . Esso, d'altra parte, è mutato da  $g$  in  $h_1^{1+p\alpha_1} h_2^{1+p\alpha_2}$ , pertanto quest'ultimo elemento deve essere potenza di  $h_1 h_2$ . E ciò, dato che  $h_1$  è permutabile con  $h_2$ , e che  $h_1 h_2$  ha, del pari che  $h_2$ , periodo  $p^{\alpha_2}$ , può avvenire se e solo se  $1+p\alpha_1 \equiv 1+p\alpha_2 \pmod{p^{\alpha_2}}$ , cioè  $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{p^{\alpha_2-1}}$ .

4. - Pertanto tutti gli elementi di  $H$  il cui ordine è potenza di un numero primo  $p$  sono mutati da  $g$  ciascuno nella sua potenza d'ordine  $1+p\alpha$ , ove  $\alpha$  è un intero che può supporre il medesimo per tutti i suddetti elementi. Inoltre, se  $p=2$ ,  $\alpha$  è pari.

Viceversa, sia  $G$  un gruppo possedente un sottogruppo normale  $H$  abeliano d'ordine finito, tale inoltre che il fattoriale  $G/H$  sia ciclico infinito: di modo che sarà  $G = \{g, H\}$ , con  $g$  elemento aperiodico opportuno. Inoltre  $g$  trasformi ogni elemento di  $H$  il cui ordine divide uno stesso numero primo  $p$ , nella sua potenza  $(1+p\alpha)$ -esima, ove  $\alpha$  è un intero dipendente solo da  $p$ , che per di più sia pari quando  $p=2$ . Vogliamo dimostrare che sotto queste ipotesi  $G$  è un gruppo quasi-abeliano.

Siano  $g^r h$  e  $g^s \bar{h}$  due elementi di  $G$ ,  $h$  e  $\bar{h}$  indicando elementi di  $H$ : ci proponiamo di mostrare che  $\{g^r h\}$  e  $\{g^s \bar{h}\}$  son tra loro permutabili. Supponiamo, per fissare le idee, che sia  $h = h_1 \cdot h_2$ , e  $\bar{h} = \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2$ ,

ove  $h_1$  ed  $\bar{h}_1$  hanno per ordini potenze del numero primo  $p_1$  mentre  $h_2$  ed  $\bar{h}_2$  potenze del numero primo  $p_2$ . Dal corso della dimostrazione apparirà chiaro che la cosa vale in generale.

Sia  $L$  il sottogruppo di  $G$  generato da  $g$  e  $\bar{h}$ , e sia  $N$  il sottogruppo normale ciclico generato da  $\bar{h}$ . Poichè  $g^r h$  e  $g^s \bar{h}$  sono in  $L$ , potremo fissare l'attenzione su di questo, senza pensare più a  $G$ .

Il gruppo fattoriale  $L/N$  può evidentemente generarsi mediante i soli elementi  $\gamma$  e  $\eta$  rispettivamente omologhi a  $g$  ed  $h$  nell'omomorfismo tra  $L$  ed  $L/N$ . Inoltre si può porre  $\eta = \eta_1 \eta_2$ , ove  $\eta_1$  ed  $\eta_2$ , omologhi rispettivamente di  $h_1$  ed  $h_2$  hanno ordini di potenze di  $p_1$  e  $p_2$  e sono trasformati da  $\gamma$  ciascuno in una propria potenza, della forma  $1 + p_1 \alpha_1$ , o  $1 + p_2 \alpha_2$ .

In base ai risultati della Nota I, un gruppo generato da tre elementi,  $\gamma, \eta_1, \eta_2$ , tali che l'ordine di  $\eta_1$  è una potenza del numero primo  $p_1$ , l'ordine di  $\eta_2$  è una potenza del numero primo  $p_2$ ,  $\gamma$  è aperiodico e trasforma  $\eta_i$  in una sua potenza del tipo  $\eta_i^{1+p_i \omega_i}$ , in modo che, se  $p_i = 2$ ,  $\alpha_i$  è pari ( $i = 1, 2$ ), è quasi-abeliano. In un tal gruppo si deve pertanto avere

$$[I] \quad \gamma^n \eta_1 \eta_2 \cdot \gamma^s = (\gamma^s)^m (\gamma^n \eta_1 \eta_2)^n$$

con  $m$  ed  $n$  opportuni interi. E poichè un'eguaglianza di questo tipo deve valere qualunque sia l'ordine di  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ), purchè potenza di  $p_i$ , possiamo supporre di avere scelto  $m$  ed  $n$  in modo che, scritto il primo membro della [I] sotto la forma

$$\gamma^{n+s} \eta_1^{(1+p_1 \alpha_1)^s} \eta_2^{(1+p_2 \alpha_2)^s}$$

e il secondo membro sotto la forma

$$\gamma^{sm+rn} \eta_1^{0_1} \eta_2^{0_2}$$

con  $0_i = \frac{(1 + p_i \alpha_i)^{nr} - 1}{(1 + p_i \alpha_i)^r - 1}$ , gli esponenti di  $\eta_i$  nei due membri risultino congrui tra loro rispetto a  $p_i^{\omega_i}$ , ove  $\omega_i$  è un intero positivo prefissato, ma grande quanto si vuole.

Valendo la [1] in  $L/N$ , con  $m$  ed  $n$  scelti nel modo ora detto, dovrà valere di conseguenza, attesa la permutabilità di  $h$  ed  $\bar{h}$ , pel gruppo  $L$ , la relazione seguente

$$[2] \quad g^r h \cdot g^s \bar{h} = (g^s \bar{h})^m \cdot (g^r h)^n \cdot \bar{h}^l$$

con  $l$  opportuno intero. Sviluppando, con l'aiuto delle relazioni  $g^{-1} h_i g = h_i^{1+p_i x_i}$ ,  $g^{-1} \bar{h}_i g = \bar{h}_i^{1+p_i x_i}$ , la [2], si ha

$$[3] \quad g^{r+s} h_1^{(1+p_1 x_1)^s} h_2^{(1+p_2 x_2)^s} \bar{h}_1 \bar{h}_2 = g^{ms+nr} h_1^{t_1} h_2^{t_2} \bar{h}_1^{\bar{t}_1} \bar{h}_2^{\bar{t}_2} \bar{h}_1^l \bar{h}_2^l$$

ove è

$$t_i = \frac{(1 + p_i x_i)^{nr} - 1}{(1 + p_i x_i)^r - 1} \quad \bar{t}_i = \frac{(1 + p_i x_i)^{ms} - 1}{(1 + p_i x_i)^s - 1} (1 + p_i x_i)^{nr}$$

Per quanto precede, si può supporre di avere scelto  $m$  ed  $n$  in modo che si abbia

$$[4] \quad (1 + p_i x_i)^s \equiv t_i \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

con  $\omega_i$  intero prefissato, arbitrariamente grande.

Dalle [4] si ottiene, tenendo presente il significato di  $t_i$

$$(1 + p_i x_i)^s \left[ (1 + p_i x_i)^r - 1 \right] \equiv (1 + p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}},$$

$$(1 + p_i x_i)^{r+s} - (1 + p_i x_i) \equiv (1 + p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}.$$

E tenendo conto del fatto che nella [3] le potenze di  $g$  nei due membri devono esser eguali, cioè  $r + s = ms + nr$ , si ottiene

$$(1 + p_i x_i)^{ms+nr} - (1 + p_i x_i)^s \equiv (1 + p_i x_i)^{nr} - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

e ancora

$$[5] \quad (1 + p_i x_i)^{nr} \left[ (1 + p_i x_i)^{ms} - 1 \right] \equiv (1 + p_i x_i)^s - 1 \pmod{p_i^{\omega_i}}$$

Se, come possiamo supporre<sup>(1)</sup>, è  $x_i \neq 0$ , non può aversi  $(1 + p_i x_i)^s = 1$  se non quando è  $p_i = 2$ , ed  $x_i$  dispari, caso che è stato escluso per ipotesi. Pertanto  $(1 + p_i x_i)^s - 1$  non è zero, ed esiste una massima potenza  $p_i^{\sigma_i}$ , di  $p_i$ , per cui esso è divisibile. Dividendo allora ambo i membri della [5] per  $(1 + p_i x_i) - 1$ , si ottiene

$$[6] \quad \frac{(1 + p_i x_i)^{ms} - 1}{(1 + p_i x_i)^s - 1} (1 + p_i x_i)^{nr} \equiv 1 \pmod{p_i^{\omega_i - \sigma_i}}$$

Si noti a tal punto che  $\sigma_i$ , non dipende dal modo con cui si scelgono  $m$  ed  $n$ . Pertanto essi si possono prendere in modo che, insieme ad  $\omega_i$ , anche  $\omega_i - \sigma_i$  risulti grande quanto si vuole. In particolare, si può supporre  $\omega_i - \sigma_i \geq \alpha_i$ , ove  $p_i^{\alpha_i}$  sia l'ordine di  $\bar{h}_i$ .

Ricordando il significato di  $\bar{t}_i$ , si ha dalla [6]

$$[7] \quad \bar{t}_i \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

D'altra parte nella [3] gli esponenti a cui compare  $\bar{h}_i$  nei due membri devono essere congrui  $\pmod{p_i^{\alpha_i}}$ , e pertanto deve aversi

$$[8] \quad \bar{t}_i + l \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

Dalle [7] e [8] segue  $l \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ , onde  $\bar{h}' = \bar{h}_1^l \bar{h}_2^l = 1$ , e la [2] diviene

$$[9] \quad g^r h \cdot g^s \bar{h} = (g^s \bar{h})^m (g^r h)^n.$$

5. - La [9] del n. prec. ci permette di dedurre senza difficoltà che i gruppi  $\{g^r h\}$  e  $\{g^s \bar{h}\}$  sono tra loro permutabili. Infatti, se  $(g^r h)^m (g^s \bar{h})^n$  son due potenze di  $g^r h$  e di  $g^s \bar{h}$  rispettivamente, si avrà intanto

<sup>(1)</sup> Se  $x_i = 0$ ,  $\{g, h, \bar{h}\}$  è il prodotto diretto di  $\{h_1, \bar{h}_1\}$  e di  $\{g, h_2, \bar{h}_2\}$ , dei quali il primo è abeliano, mentre il secondo è abeliano se  $x_2 = 0$ , quasi-abeliano, in base alla dimostrazione di cui sopra, quando  $x_2 \neq 0$ . E da ciò si deduce facilmente che  $\{g, h, \bar{h}\}$  è quasi-abeliano.

$(g^r h)^u = g^{ru} h^*$ , e  $(g^s \bar{h})^v = g^{sv} \bar{h}^*$ , ove  $h^*$  e  $\bar{h}^*$  son due opportuni elementi di  $H$ . Ma allora, applicando la [9] a  $g^{ru} h^*$  e a  $g^{sv} \bar{h}^*$ , si ha  $g^{ru} h^* \cdot g^{sv} \bar{h}^* = (g^{sv} \bar{h}^*)^\mu (g^{ru} h^*)^\nu$ , con  $\mu$  e  $\nu$  interi opportuni. Da cui

$$(g^r h)^u (g^s \bar{h})^v = (g^s \bar{h})^{v\mu} (g^r h)^{u\nu}$$

il che ci dice che  $\{g^r h\}$  e  $\{g^s \bar{h}\}$  sono permutabili.

Dai numeri precedenti possiamo pertanto concludere che

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo non abeliano  $G$ , generabile mediante un numero finito di elementi, e possedente anche elementi aperiodici, sia quasi-abeliano, è che esso possieda un sottogruppo normale  $H$  finito, ed un elemento  $g$  aperiodico, tali che  $H$  è abeliano, e normale in  $G$ ;*

*gli elementi di  $H$ , il cui ordine è potenza di uno stesso numero primo  $p$ , vengono trasformati da  $g$  ciascuno nella propria potenza  $(1 + p x)$ -esima, ove  $x$  è un intero dipendente unicamente da  $p$ , il quale inoltre, quando  $p = 2$ , è pari;*

*il gruppo  $\{H, g\}$  coincide con  $G$ .*



TISANURI LEPISMATIDI (INSECTA)  
DELLA CINA CONTINENTALE (\*)

(Con dodici figure)

FILIPPO SILVESTRI

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Cum una *Lepismae* species (*L. villosa* F.) in Sinis antea reperta fuerit, Auctor, annis 1924-1925 exempla quinque specierum ibi invenire potuit, quarum quattuor novae sunt (quemadmodum nova sunt duo genera). Has species describit multisque imaginibus exhibet.

Animadvertit Auctor quam rara sint Tisanuria in continentalibus Sinis, eaque demonstrat similia esse Tisanuriis Indomalensibus.

Fino ad oggi è ricordata per la Cina continentale soltanto una specie di questa famiglia di Tisanuri, cioè la *Lepisma villosa* Fabr., che dopo dell'Autore, che la descrisse con poche parole, fu ridescritta poco più ampiamente dal BURMEISTER, il quale ne estese la distribuzione anche alle Indie orientali. La descrizione, che ne possediamo, è troppo breve per poter riconoscere la specie e anche per poterla attribuire in modo sicuro ad uno dei generi attuali, ma, siccome il FABRICIUS la paragona alla *Lepisma saccharina*, della quale la dice più breve e più grossa, è probabile che la specie sia stata fondata sopra un esemplare giovane di *Ctenolepisma longicaudata* Escherich o di *Acrotelsa collaris* F., che sono specie quasi tropicosmopolite. In qualunque modo nelle case ed in magazzini vari è probabile che in Cina si trovino tali specie e anche la *Lepisma saccharina* L. e qualche altra diventate domestiche, ma io durante il viaggio compiuto negli anni 1924 a 1925 non

---

(\*) Nota presentata nella Tornata del 6 giugno 1942.

ebbi tempo di cercarvele e perciò non posso aggiungere alcun dato; raccolsi invece Tisanuri, come altri artropodi, in tutte le località aperte che potei visitare dalla Cina settentrionale alla meridionale, dalla centrale alla orientale sotto pietre, sotto cortecce d'alberi, sotto terra a profondità varie e potei raccogliere esemplari di 5 specie: *Acrotelsella sinensis* sp. n., *Gastrotheellus notabilis* gen. e sp. n., *Proatelura Jacobsoni* Silv., *Protrinemura orientalis* gen. e sp. n., *Lepidospora hemitricha* sp. n.

Di queste specie l'*Acrotelsella* è affine a specie delle isole del Pacifico, la *Proatelura* ha una vasta distribuzione da Giava alle Filippine, da Singapore alla Cina, la *Lepidospora* è largamente distribuita nella Cina e nel Tonchino e probabilmente nelle regioni vicine, il *Gastrotheellus* e la *Protrinemura* sono per ora conosciute solo delle località degli esemplari tipici ma sono affini a forme indo-malesi. In complesso per i Lepismatidi finora conosciuti della Cina continentale dobbiamo notare la grande povertà di specie di questi artropodi e la loro quasi totale affinità con i Lepismatidi indo-malesi con un genere (*Acrotelsella*) esteso nell'Australia e alle isole del Pacifico. La povertà in specie di Tisanuri lepismatidi è ancora maggiore nel Giappone ed è anche forte nella zona temperata del Nord America, mentre si ha una grande ricchezza di forme nell'Africa occidentale dal nord al sud.

Non troviamo tra le forme note per la Cina specie della zona paleartica occidentale o forme ad esse vicine.

## Fam. LEPISMATIDAE

### Sufam. Lepismatinae

#### *Acrotelsella sinensis* sp. n.

(Fig. I)

♀ Corpus supra rufescens, subtus pallide griseum antennis et cercis brunneis fulvo anulatis, pedibus supra fulvescentibus, subtus pallide griseis, femoris et tibiae apice maculis interruptis brunneis maculato.

Squamae magnitudine varia, omnes creberrime radiatae, margine postico integro.

Caput clypeo setarum penicillis duobus, fronte antice setarum seriebus longitudinalibus instructa; oculi sat magni.

Antennae quam corpus (in exemplis observatis haud integrae) aliquantum breviores, articulo primo squamoso et setis apicalibus instructo, articulis ceteris omnibus setis brevioribus nonnullis instructis ut fig. I, 1-2 demonstrant.

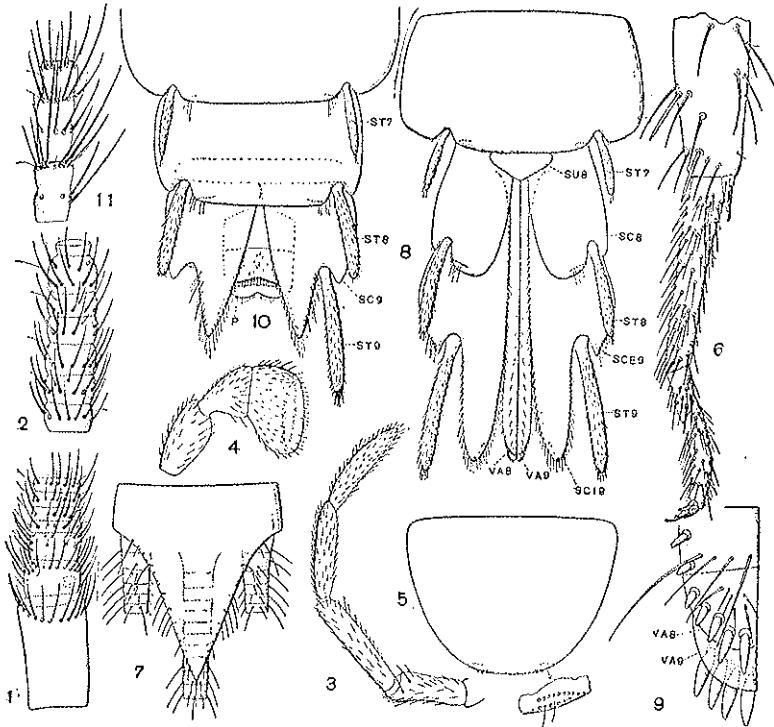


FIG. I.

*Acrotelsella sinensis*: 1. antennae pars proximalis, prona; 2. eiusdem pars a mm. 5 ab antennarum basi; 3. palpus maxillaris; 4. palpus labialis; 5. metasternum; 6. 3<sup>i</sup> paris tibiae apex, tarsus et praetarsus; 7. tergitem 10<sup>um</sup> cum cercorum parte basali; 8. feminae urosterna 7<sup>um</sup> ad 9<sup>um</sup> cum ovipositore; 9. ovipositoris apex, subtus inspectus; 10. maris urosterna 7<sup>um</sup> ad 9<sup>um</sup> cum pene; 11. cerci lateralis pars proximalis: P pene, SC<sub>8-9</sub> subcoxae segmenti 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>, SC<sub>E9</sub> subcoaxarum segmenti 9<sup>i</sup> pars externa, SC<sub>I9</sub> subcoaxarum segmenti 9<sup>i</sup> pars interna, ST<sub>7-9</sub> stili segmentorum 7-9, VAS e VA<sub>9</sub> valvae ovipositoris segmentorum 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>.

Palpi maxillares tenues articulis 3-5 subaequalibus; palpi labiales articulo tertio quam ceteri latiore, apice  $\frac{2}{5}$  quam longitudo tota latiore, sensillorum papillis uniseriatis.

Thorax quam caput aliquantum et quam abdomen paullum latior, tergitis lateraliter pectinibus 6-8, setis 2-3 constitutis, et setis aliis longitudinaliter subuniseriatis nec non pectine postico sublaterali setarum 4-5 instructis; sternitis postice pectinibus duobus setis 8-11 et setis nonnullis aliis brevibus, metasterni parte postica late rotundata.

Pedes squamosi (tarsi articuli primi facie externa inclusa) et setosi, tibiae setis plumosis duabus (altera subdistali infera, altera apicali infera) brevibus et quam ceterae robustioribus.

Abdomen partem posticam versus gradatim aliquantum angustatum, tergitis 2-7 setarum pectinibus 3 + 3 instructis, quorum internum setis maioribus 3, intermedium 4, externum 5-6 compositum est, tergitem 1<sup>um</sup> pectinibus 1 + 1 laterali, 8<sup>um</sup> 2 + 2 laterali et sublaterali. Tergitem 10<sup>um</sup> parum longius, quam ad basim latius, triangulare, peracutum, pectinibus 4 lateralibus setarum 2-3 et setis aliis marginalibus instructum. Urosterna 2-8 pectine laterali setarum 8-11 et a septimo stilis instructa.

Subcoxae segmenti noni processu interno longo, quam stilus eiusdem segmenti paullum brevior, latiusculo paullum attenuato, apice subacuto, processu externo brevior angustato, acuto.

Ovipositor quam subcoxae IX processus internus vix brevior, parum distincte anulatus setis brevioribus subtilibus nonnullis instructus et valvis inferis apice processibus spiniformibus externis 7-8 gradatim ab apice minus longioribus, valvis superis processibus spiniformibus 4 externis apicalibus quam inferae parum longioribus armatis.

Stili a segmento septimo ad nonum gradatim longiores, persetosii, setis apicalibus parum longioribus et robustioribus.

Cerci quam corpus aliquantum breviores, squamis et setis longis, brevibus et sensillis chaeticis subtilissimis ut fig. I, 11 demonstrat.

Long. corporis mm. 10, long. antennarum? (haud integrarum mm. 5), lat. thoracis 2,20, pedum paris tertii 4,45, cercorum? (haud integrorum mm. 6).

♂ Stilorum paria tria ut in femina.

Subcoxae segmenti noni processu interno quam eiusdem segmenti stilus aliquantum brevior, triangulari, sat acuto.

Penis brevis forma consueta.

*Habitat.* Exempla nonnulla sub Pinorum cortice in memore ad Kusang (Foochow, Fukien) legi.

*Observatio.* Species haec stilorum paribus tribus, subcoaxarum uriti 9<sup>i</sup> parte interna tantum paullum attenuata, ovipositoris armatura apicali ab *A. producta* Esch. distincta est.

Subfam. Nicoletiinae

Gen. *Gastrotheellus* nov.

(Fig. II-IV)

*Femina.* Corpus parum magis quam duplo longius quam latius, capite quam thorax angustiore, abdomen a segmento 1<sup>o</sup> gradatim angustato, dorso convexiusculo, ventre subplano, setis et squamis vestitum.

Caput manifestum lateraliter a pronoto amplexum, squamis, macrochaetis longis attenuatis apice bifurcato et setis brevioribus per frontis partem anticam instructum; labrum breve setis paucis brevibus instructum est; antennae in exemplis typicis haud integris, forsan articulo ultimo tantum carentes, parte sistente (fig. II, 4 et 5) articulis 12, omnibus integris composita, sensillis (trichobotriis) consuetis.

Mandibulae graciles dente apicali externo dentibus minimis 2 incisus, mola perparva dentibus 5-7 minimis aucta; maxillae 1<sup>i</sup> paris lacinia dente apicali quam lamina pectinata brevior, lamina pectinata galeam etiam aliquantum superante, palpo brevi, articulo ultimo quam 4<sup>us</sup> aliquantum longiore et sensillo apicali cylindraneo ramusculis microscopicis aucto; labium simplex, forma typica, palpo articulo ultimo longo, circumlitione subovali.

Thorax pronoto macrochaetis attenuatis apice bifurcato transverse 3-seriatis, meso- et metanoto serie postica tantum instructis.

Pedes breves, sat robusti, squamis destituti, setosi et coxa macrochaetis attenuatis externis 5-6, femore setis robustis 2 subapicalibus in-

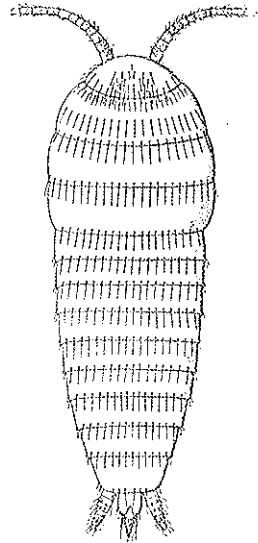


FIG. II.

*Gastrotheellus notabilis*: animalculum totum, pronum.

ternis, tibia seta robusta subapicali interna et setis robustioribus 3 apicalibus externis profunde bifurcatis, tarso brevi, breviter setoso, prae-

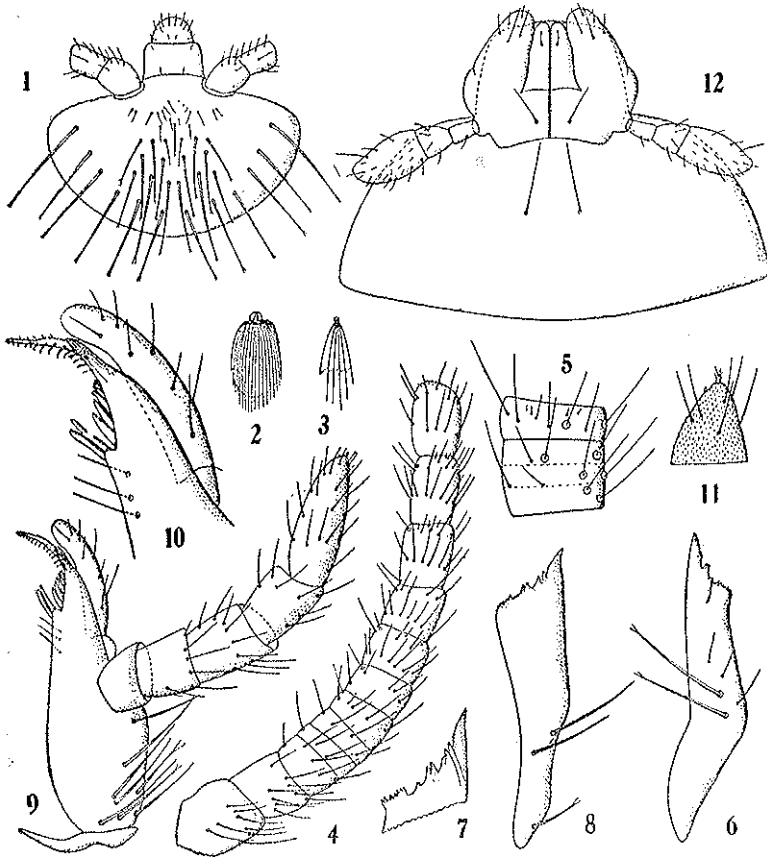


FIG. III.

*Gastrotheellus notabilis*: 1. caput appendicibus buccalibus abruptis; 2. verticis squama; 3. frontis squama; 4. antenna laeva supra inspecta; 5. eiusdem articuli 3<sup>us</sup> et 4<sup>us</sup> subtus inspecti; 6. mandibula laeva, prona; 7. eiusdem apex magis ampliatus; 8. mandibula dextera prona; 9. maxilla li paris; 10. eiusdem lacinia et galea magis ampliatae; 11. palpi maxillaris apex magis ampliatus; 12. labium.

tarsi unguibus externis attenuatis parum arcuatis, unguicula mediana latiuscula.

Abdomen tergitis macrochaetis attenuatis posticis uniseriatis, tergito 9<sup>o</sup> parte mediana aliquantum postice elongata et tergiti 10<sup>i</sup> partem proximalem obtegente, tergito 10<sup>o</sup> subtrapezoidico postice sat profunde

angulatim sinuato utrimque macrochaeta apicali aucto, sternitis macrochaetis posticis 3 + 3 auctis, vesiculis nullis, stilis tantum in segmento 9° sistentibus, ovipositor brevis crassus, pseudoarticulatus.

Cerci breviores, subaequales, tergum 10<sup>um</sup> parum superantes, setis et sensillis, vide fig. IV, 5.

*Mas* ignotus.

Species typica: *Gastrotheellus notabilis* sp. n.

*Observatio.* Genus hoc ad *Gastrotheus* Casey proximum est, sed mandibulis et maxillis 1<sup>i</sup> paris minus evolutis, urotergito 9° 10<sup>i</sup> partem proximalem obtegente, vesiculis nullis et stilis tantum in segmento 9° sistentibus distinctissimum est.

Genus hoc pro vita in formicae (gen. sp.?) nido multo magis quam *Gastrotheus* temperatum est ut mandibularum et laciniae maxillarum 1<sup>i</sup> paris, nec non abdominis partis posticae forma indicat.

*Gastrotheellus notabilis* sp. n.

*Femina.* Ochracea, squamis maioribus radiis 15 vel parum magis numerosis,  $\mu$  56 × 26, minoribus radiis c. 10,  $\mu$  56 × 14.

Caput macrochaetis maioribus mm. 0,20 longis; antennis brevibus articulo 1° parum longiore quam latiore et quam 2<sup>us</sup> aliquantum longiore et paulum crassiore, singulo setis nonnullis brevibus robustis auctis, articulo 3°, consuecte indistincte 3-diviso quam 4<sup>us</sup> fere duplo longiore sensillis inferis et lateralibus 6 instructo, articulis ceteris sensillis (trichobothriis) 2, quorum alter infer et alter apicalis externus, setis vide fig. III, 4.

Thorax setis seriarum transversalium c. 20 (seriei singulae), long. (setae submedianae) mm. 0,20.

Abdomen tergitorum serie trasversali postica setis c. 18 usque ad 4<sup>um</sup>, tergitorum sequentium gradatim minus numerosis, tergiti 9<sup>i</sup> setis 3 + 3 dorsualibus, utrimque 4 lateralibus, tergito 10° macrochaeta apicali et macrochaeta minori subapicali externa instructo.

Urosterni 8<sup>i</sup> pars mediana (fig. IV, 7) subsemiovalis, subcoxis margine arcuato setis marginalibus internis robustis 4 et seta robusta apicali;

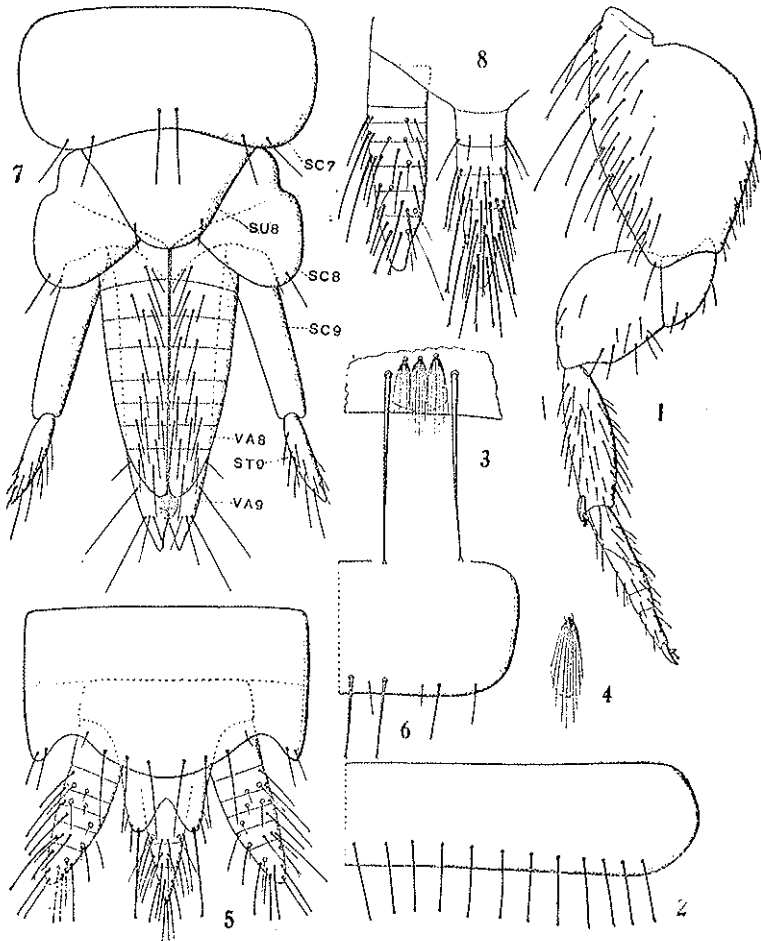


FIG. IV.

*Gastrotheellus notabilis*: 1. pes paris 5<sup>i</sup>; 2. urotergiti 5<sup>i</sup> dimidia pars (squamis omissis); 3. eiusdem particula postica magis ampliata; 4. eiusdem squama; 5. corporis pars postica, prona a segmento 9<sup>o</sup>; 6. urosterni 5<sup>i</sup> dimidia pars (squamis omissis); 7. urosterna 7<sup>um</sup> ad 9<sup>um</sup> cum ovipositore; 8. cercum laterale et cercum medianum subtus inspecta: SC7-9 subcoxae segmentorum 7<sup>i</sup> ad 9<sup>um</sup>, ST<sub>9</sub> stilus segmenti 9<sup>i</sup>, VA<sub>8</sub> ed VA<sub>9</sub> valvae ovipositoris segmenti 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>.

urosterni 9<sup>i</sup> subcoxae elongatae, stilis quam subcoxae brevioribus, macrochaetis et setis nonnullis instructis.



Long. corporis mm. 2,30, lat. thoracis 1, long. antennarum (partis sistentis) 0,62, palporum maxillarium 0,36, pedum paris 3<sup>a</sup> 1,10, stilorum segmenti 9<sup>a</sup> 0,16, cercorum lateralium 0,30, ovipositoris 0,52.

*Habitat.* Exempla duo legi in nidi formicae parvae (haud determinatae) in viridario dicto «Jamon» (Canton).

*Proatelura* (<sup>1</sup>) *Jacobsoni* Silv.

*Atelura Jacobsoni* Silvestri, «Boll. Lab. Zool. Portici», V (1910), pag. 62.

Questa specie fu da me descritta con esemplari raccolti da E. JACOBSON presso Samarang (Giava) in un nido di *Termes malayanus* Hav., ma, invece che in una galleria del *Termes*, potrebbe essersi anche trovata in una di qualche specie di formiche, che spesso si trovano nelle pareti dei nidi di Termiti.

Io ne raccolsi esemplari, non numerosi, in Cina nei dintorni di Macao, di Taipò (Hong Kong), Repulse Bay, Peità e Ausu (Fukien), Canton in nidi di 15 specie di formiche di generi molto diversi: *Triglyphothrix striatidens* var. *flavida* Wheeler (Johore), *Pheidole megacephala* Fabr. (Repulse Bay), *P. rhombinoda* Mayr (Ausu), *Dolichoderus (Hypoclinea) taprobanae* var. *obscuripes* Santschi (Taipò), *Paratrechina (Nylanderia) taylori* Forel (M. Ausu) ed altre non determinate. Ne raccolsi pure sempre in nidi di formiche presso Singapore e Johore (Malacca), in Indocina presso Coxan, XaDoai, Dong Mo, Phuto, in Formosa presso Funkikò, e ho in collezione anche esemplari di Aguilar (Luzon) raccolti da C. F. BAKER.

Questa specie deve considerarsi panmirmecofila e distribuita forse in tutta l'Asia meridionale e orientale, tropicale e temperata comprese le isole adiacenti, eccettuato, sembra, il Giappone, dove non fu raccolta da me durante il viaggio del 1924 e 1925 e finora nemmeno da altri.

---

(<sup>1</sup>) «Boll. Lab. Zool. Portici», XI (1916), pag. 100.

*Lepidospora hemitrica* sp. n.

(Fig. V-IX)

*Femina.* Corpus lateribus subparallelis, postice paulum convergentibus, antennis et cercis longis sed quam corpus brevioribus.

Caput tantum setis, thorax et abdomen setis gradatim a prothorace minus numerosis et squamis a prothorace gradatim magis numerosis instructa.

Caput parum longius quam postice latius, mandibulis haud sumptis subtrapezoidale, postice latius, lateribus aliquantum convergentibus, supra macrochaetis paucis et setis brevioribus et brevibus plus minusve numerosis instructum, clypeo quam labrum aliquantum longiore macrochaetis 2 sublateralibus subanticiis et setis paucis brevioribus, labro antice convexo macrochaeta impari mediana postica, macrochaetis 4 sublateralibus et lateralibus, setis 2 submedianis et 4 brevioribus anticiis. Antennae quam corpus  $1/4$  breviores, 21-articulatae, articulo 1° aliquantum longiore quam latiore setis nonnullis praesertim apicalibus brevibus instructo, articulo 2° paulum latiore quam longiore macrochaetis 5, quarum infera externa articulum 4<sup>um</sup> parum superante, articulo 3° duplo latiore quam longiore sensillis (trichobothriis) superis et inferis 8, quia gradatim articuli novi ab hoc formati sunt, articulo 4° integro brevior sensillis 2, quorum alter infer et alter infer sublateralis est, articulis ab octavo in articulinis 2 gradatim longioribus, a 14° articulino primario in articulinis secundariis 2 gradatim longioribus divisus, a 17° articulinis secundariis in articulinis tertiariis 2 gradatim longioribus, articulo singulo praeter setas, trichobothriis apicalibus 2 instructo, articulo ultimo apice sensillo chaetico 3-ramoso, ramo mediano simplici subtili, lateralibus plumatis; mandibulae dentibus et mola aliquantum inaequalibus, vide fig. V, 3-6; maxillae 1<sup>a</sup> paris galea (cum sensillis apicalibus) quam lacinia paulum longiore setis paucis brevibus et brevioribus externe instructa et sensillis duabus apicalibus subcylindraceis papillis minimis apicalibus auctis instructa; lacinia apice bidentato, dente externo internum tractu longo superante, appendice interna praedentali attenuata, paulum arcuata, margine serrulato quam

dens apicalis parum brevior, appendicibus brevibus 4-5 bidentalis et setis robustis uniseriatis marginalibus et aliis brevioribus proximalibus

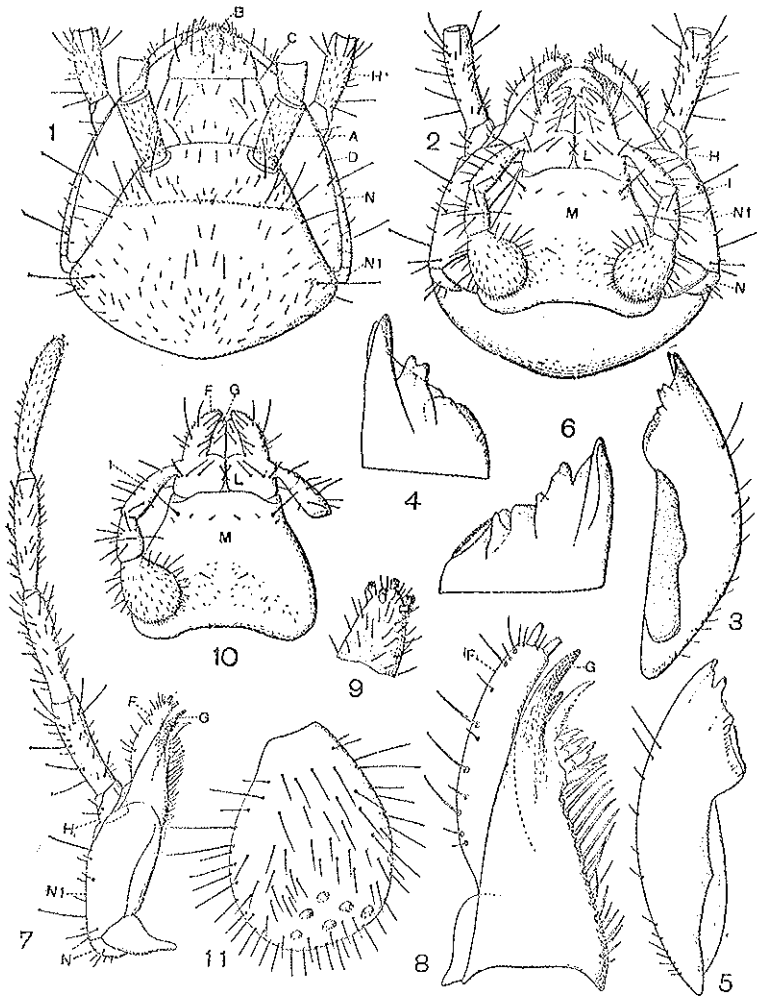


FIG. V.

*Lepidospora hemitricha*: 1.-2. caput pronum et supinum; 3. mandibula dextera prona; 4. eiusdem apex supinus, magis ampliatus; 5. mandibula laeva, prona; 6. eiusdem apex supinus, magis ampliatus; 7. maxilla 1<sup>a</sup> paris; 8. eiusdem galea et lacinia, magis ampliatae; 9. palpi maxillaris apex magis ampliatus; 10. labium; 11. palpi labialis articulus ultimus subtus inspectus; A antenna, B labium, C clypeus, D mandibula, F lobus externus, G lobus internus, H palpus maxillaris, I palpus labialis, L mentum, M submentum, N maxillae 1<sup>a</sup> paris cardo, Ni stipes.

armata; palpo 5-articulato, tenui, articulo ultimo papillis apicalibus 6 pilosulis instructo; labium submento trapezoidali aliquantum (postice)

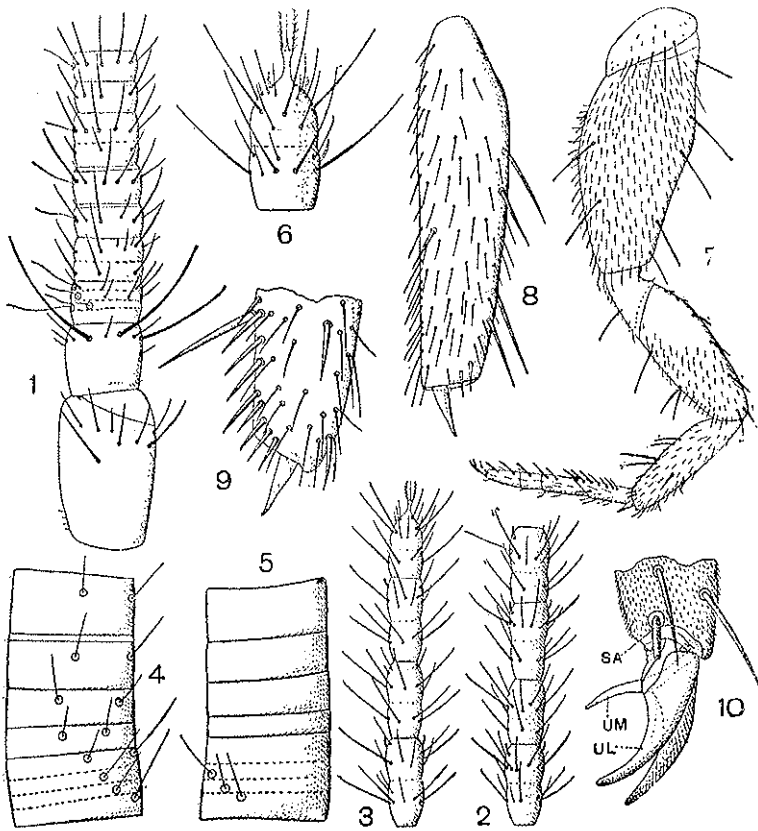


FIG. VI.

*Lepidospora hemitricha*: 1. antennae laevae pars proximalis prona; 2. eiusdem antennae articulus vigesimus; 3. eiusdem antennae articulus ultimus; 4.-5. eiusdem antennae articuli 3<sup>us</sup> ad 7<sup>um</sup> supini et proni cum trichobothriis, setis ceteris omissis; 6. eiusdem antennae articulus ultimus magis ampliatus; 7. pes paris 3<sup>i</sup>; 8. eiusdem tibia, magis ampliata; 9. tibiae 2<sup>i</sup> paris apex, magis ampliatus; 10. tarsi apex et praetarsus: UL unguis laterales, UM unguis medianus, SA tarsi seta apicalis lateralis.

latiore quam longiore, mento brevi, medio profunde diviso, lobis externis quam interni paullum longioribus convergentibus apice pilosulo, cetero setis nonnullis robustis sat longis, brevibus et brevissimis aucto, lobis internis attenuatis apice pilosulo, cetero setis brevibus duabus instructo,

palpo 3-articulato, articulo 2° quam 1<sup>us</sup> brevior, articulo ultimo crassiore subovali sultus papillis 6 subapicalibus latiusculis brevissimis, pilosulis instructo; glossa quam lobi labiales parum brevior est.

*Thorax.* Pronotum transverse subrectangulare parum convexum, setis brevibus, apice inciso, (mm 0,20) et brevioribus (mm. 0,10 vel

minoribus) pernumerosis et squamis parum numerosis praesertim per dimidiam partem posticam dispositis, squamis paullum latioribus quam longioribus radiis plerumque 10, longitudine maiore mm 0,05-0,06; mesonotum quam pronotum paullum latius et longius, setis minus et squamis magis numerosis instructum; metanotum mesonoto simile sed setis parum minus et squamis magis numerosis instruc-

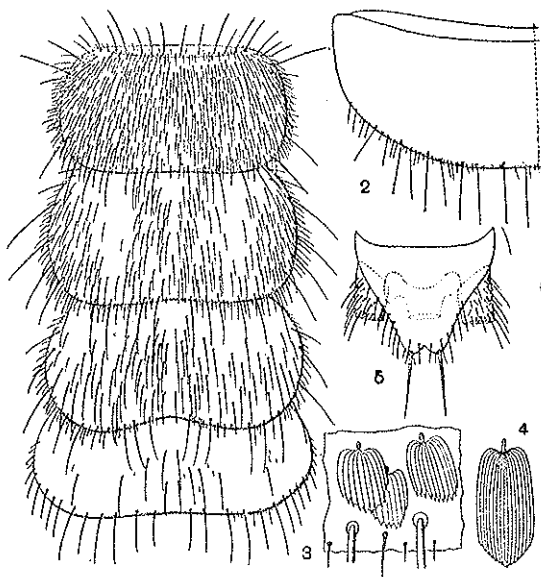


FIG. VII.

*Lepidospora hemitricha*: 1. thorax et urotergitem I<sup>um</sup> prona (squamis omissis); 2. urotergiti 5<sup>i</sup> dimidia pars (squamis omissis); 3. eiusdem particula postica magis ampliata (macrochaetis truncatis); 4. eiusdem squama magis ampliata; 5. urotergitem I<sup>um</sup> cum cercorum lateralium basi.

tum. Prosternum antice setis brevibus et brevioribus numerosis, medium setis 4 robustis brevibus et nonnullis brevioribus, meso- et metasternum setis 2 sat longis submedianis et setis brevioribus et squamis nonnullis anticis instructa.

Pedes sat longi, 3<sup>i</sup> paris subcoxa macrochaetis 4-5 et setis nonnullis brevioribus, coxa superficie infera setis brevibus numerosis et squamis paucis, macrochaetis externis 5, proximalibus inferis 2, pre-

marginalibus internis 2, trocanthero macrochaeta 1 marginali interna, femore macrochaeta proximali marginali interna 1 et macrochaetis distalibus premarginalibus 2, quarum infera brevior est, nec non macrochaeta brevi integra praepicali et 2 apicalibus et per marginem externum setis brevissimis subspiniiformibus nonnullis, tibia macrochaetis 2 marginalibus internis proximalibus, 2 distalibus, singula praemarginali distali externa, calcare subtriangulari longo, acuto et inter calcar et marginem externum setis quam superficiei parum robustioribus 4, tarso quam tibia parum longiore, 4-articulato, articulo 1° quam ceteri singuli longiore et 3° brevior, superficie pilosula margine et setis brevibus, per marginem inferum biseriatas, et articulo ultimo ad apicem ipsum setis 2 brevissimis robustis, plus minusve distincte incisissimis aucto, praetarso unguibus lateralibus integris, attenuatis, parum arcuatis et unguicula mediana quam laterales brevior constituto; pedes 1<sup>i</sup> et 2<sup>i</sup> paris quam tertii gradatim (a 2°) parum brevioribus et 1<sup>i</sup> tibia setis brevioribus marginalibus internis numerosis instructi.

Abdomen partem posticam versus gradatim paululum angustius, tergito 1° praeter marginales setis paucis et squamis numerosis, tergitis sequentibus setis dorsualibus gradatim minus numerosis ita ut tergita a 4° praeter setas marginales setis destituta sint et squamis omnino vestita. Urosternum primum parte mediana triangulari setis brevissimis submedianis 4 submedianis et macrochaetis 2 submarginalibus posticis, subcoxis distinctis late rotundatis, macrochaeta singula submarginali interna ad latera macrochaetarum sterniti instructis. Urosterna 2<sup>um</sup> ad 7<sup>um</sup> superficie squamis vestita, macrochaetis 2 submedianis et 2 posticis et nonnullis lateralibus, vesiculis et stilis brevibus pilosulis, seta apicali brevi, robusta, apice bifurcata, seta subapicali etiam robusta et setis nonnullis aliis instructis.

Urotergitem 10<sup>um</sup> trapezoidale aliquantum ad basim latius quam longius, postice medium sinu parum profundo affectum, angulis rotundatis macrochaeta robusta, longa, urotergiti dimidiam latitudinem basalem aequante, et setis nonnullis brevibus subposticis et marginalibus lateralibus instructum est.

Urosternum 8<sup>um</sup> parte mediana subsemilipitica macrochaetis subposticis 4 et setis brevibus et brevioribus submarginalibus et marginalibus auctum, stilis praecedentibus similibus; urosternum 9<sup>um</sup> parte me-

diana obsoleta ad basim ovipositoris valvarum superarum, subcoxis elongatis parum latis, stilis quam urosterni 8<sup>i</sup> parum longioribus et robustioribus.

Ovipositor longus (mm 3,40) tenuis, pseudarticulatus, valvis inferis quam superae parum longioribus et interne area spinulis brevissimis uncinatis aucta.

Cerci quam corpus 1/4 breviores, 9-articulati, articulis gradatim longioribus, 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> integris, 3<sup>o</sup> parum distincte in articulinis 3, 4<sup>o</sup> in articulinis 4, 5<sup>o</sup> in articulinis 5, 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup> et 8<sup>o</sup> in articulinis 8, 9<sup>o</sup> in articulinis 12, setis et sensillis vide fig. VIII, 5-7.

*Mas.* Antennarum amborum articulus 2<sup>us</sup> parte apicali interna in processum longiusculum, crassum, parum attenuatum, supra setis paucis instructum, apice obtuso, subtus papilla minima setiformi instructo.

Urotergitum 10<sup>um</sup> forma eidem femine sub simile sed macrochaetis po-

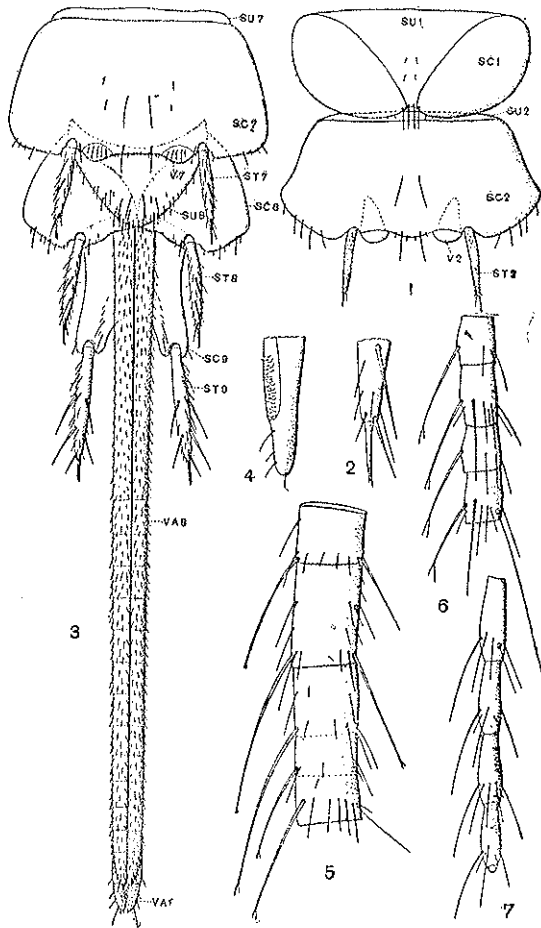


FIG. VIII.

*Lepidospora hemitricha*: 1. urosterna 1um et 2um; 2. stili urosterni 5<sup>i</sup> apex, multo ampliatius; 3. urosterna 7um ad 9um cum ovipositore; 4. valvae ovipositoris segmenti 9<sup>i</sup> pars apicalis subtus inspecta; 5. cerci lateralis laevi pars proximalis; 6. eiusdem articuli 8<sup>i</sup> articulini 1<sup>us</sup> ad 4um; 7. eiusdem cerci articuli 9<sup>i</sup> articulini distales: SC1-g subcoxae segmentorum 1<sup>i</sup>-9<sup>i</sup>, ST2-g stili segmentorum 2<sup>i</sup>-9<sup>i</sup>, SU1-g sterna 1um ad 8um, V2 e V7 vesiculae urosterni 2<sup>i</sup> et 7<sup>i</sup>, VA8 e VA9 valvae ovipositoris segmentorum 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>.

sticis destitutum est et setis submarginalibus et marginalibus brevibus c. 22 instructum, nec non subtus utrimque setis 12 brevissimis robustioribus, cylindraceis subspiniformibus auctum.

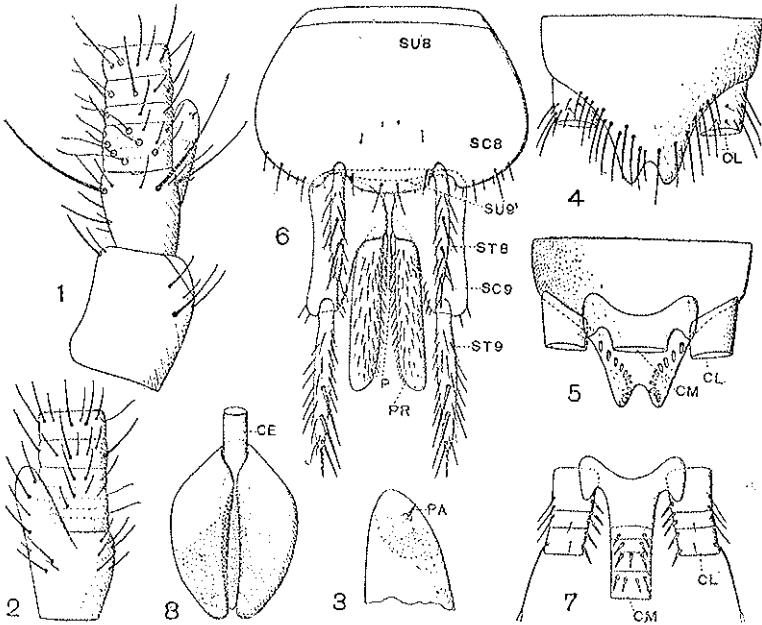


FIG. IX.

*Lepidospora hemitricha*, mas: 1. antennae dexteræ pars proximalis ab articulo 2<sup>o</sup>; 2. eiusdem antennae pars proximalis ab articulo 1<sup>o</sup> supina; 3. antennae articuli 2<sup>i</sup> processu interni apex magis ampliatus; 4. urotergitum 10<sup>um</sup> cum cercorum lateralium basi, pronum; 5. idem supinum; 6. urosterna 8<sup>um</sup> et 9<sup>um</sup> cum peno; 7. cercorum pars proximalis prona; 8. penis: CL cerci laterales, CM cercus medianus, P penis, PA antennae articuli 2<sup>i</sup> processu papilla apicalis, PR paramera, SUS<sup>9</sup> sternæ segmentorum 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>, SC<sup>9</sup> subcoxæ segmentorum 8<sup>i</sup> et 9<sup>i</sup>.

Urosternum 8<sup>um</sup> inter stilos paullum arcuatim productum; penis brevis, paramera cylindracea quam penis 2/3 longiora sunt.

Cercorum lateralium superficies interna et cerci mediani superficies supra externa setis 4-5 brevioribus, robustioribus, spiniformibus armata est.

Mas iuvenis antennis articulo 2<sup>o</sup> et urotergito 10<sup>o</sup> eisdem feminae similibus instructus est.



Corporis longitudo ad mm 8, lat. capitis 1,30, long. antennarum 6,60, pedum paris 3<sup>i</sup> 4,40, stilorum urosterni 5<sup>i</sup> cum seta apicali 0,50, cercorum 6, ovipositoris (a basi) 3,40.

*Habitat.* Yen Bay (Tonkino) exempla typica in nido *Odontotermes* sp., exemplum masculinum ad Phuto (Yen Bay, Indocina), alia pauca in Cina sub saxis ad Ziccavei (Shanghai), Yolushan (Changsha), Wuchang (Hupeh) legi.

*Lepidospora hemitricha* Silv.  
var. *progressa* nov.

Apud Yunnanfu (Yunnan), Peking (Chihli) et Van-Phu (Tonkino) exempla pauca legi, quorum urotergita 4<sup>um</sup> et 5<sup>um</sup> (fig. X) setis 2 sub-

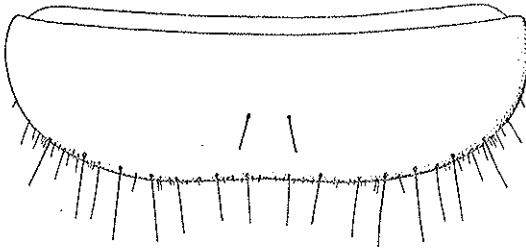


FIG. X.

*Lepidospora hemitricha*, var. *progressa*: urotergitem  
5<sup>um</sup> (squamis omissis).

medianis instructa sunt. Exempla haec pro tempore usque exempla numerosa collecta sint ut varietatem formae typicae considero.

Gen. *Protrinemura* nov.  
(Fig. XI-XII)

Corpus lateribus subparallelis postice paullum convergentibus, antennis et cercis quam corpus brevioribus, setis et macrochaetis apice inciso instructum.

Caput subaeque longum atque (ad mandibularum basim) latum, setis brevioribus parce numerosis et macrochaetis nonnullis; antennae in exemplo typico haud integrae, articulo 1° aliquantum longiore quam

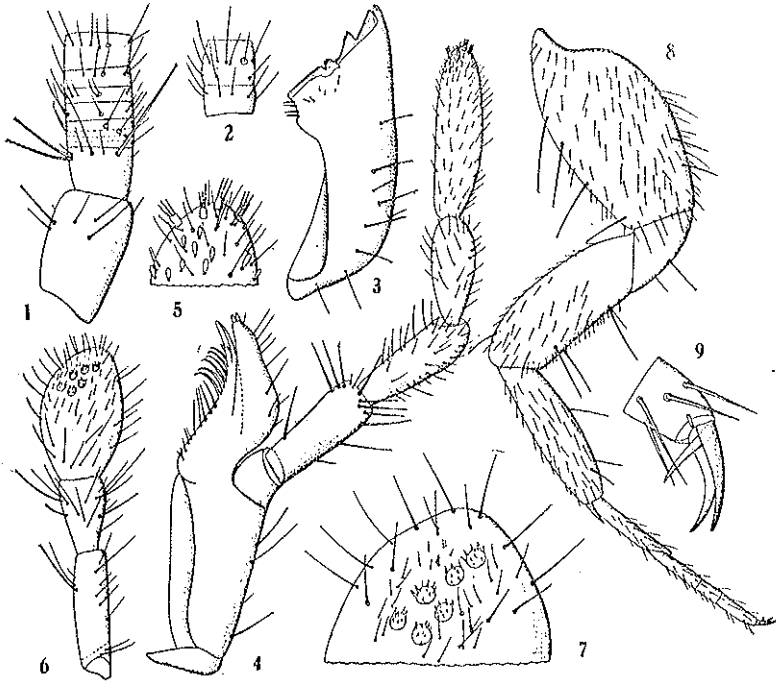


FIG. XI.

*Protrinemura orientalis*: 1. antennae laevae pars proximalis supina; 2. eiusdem antennae articulus decimus primus, supinus; 3. mandibula dextera prona; 4. maxilla 1<sup>i</sup> paris; 5. palpi labialis pars apicalis magis ampliata; 6. palpus labialis supinus; 7. eiusdem pars apicalis magis ampliatus; 8. pes paris 3i; 9. eiusdem tarsi apex et praetarsus.

latiore, 2° brevi, 3° brevi, obsolete in articulis 4° diviso, articulo 4° brevissimo, ceteris gradatim longioribus et a 9° in articulinis duobus divisis, articulo singulo a 3° sensillis unisetis (trichobothriis) duobus instructis; mandibulae parte dentali latiuscula dentibus inaequalibus (fig. XI, 3) et mola sat longa obliqua; maxillae primi paris, galea et lacinia longitudine subaequalibus, prima papillis cylindraccis duabus apicalibus instructa, lacinia apice acuto, dentibus duobus praeapicalibus, appendicibus simplicibus arcuatis 6 et setis brevioribus robustis 3 per

marginem internum armata, palpo articulo 1° brevior, 2° macrochaetis apicalibus c. 10 instructo, 3° longitudine praecedenti subaequali setis brevioribus sat numerosis instructo, 4° quam 3<sup>us</sup> paulum brevior setis etiam brevioribus instructo, ultimo quam 4<sup>us</sup> fere 2/5 longiore setis brevioribus et per partem distalem, sensillis nonnullis foliiformibus minimis nec non sensillis 6 basi cylindracea ramusculos 3 attenuatos gerente aucto; palpo labiali articulo ultimo subelliptico, supra papillis 6 appendiculis microscopicis paucis piliformibus auctis instructo.

Thorax pronoto quam mesonotum paulo minore, metanotum mesonoto aequali, dorso setis brevioribus numerosis et macrochaetis nonnullis (c. 10) lateralibus et posticis instructo; urosternis macrochaetis brevibus submedianis 2 et setis paucis brevibus et brevioribus instructis.

Pedes sat longi, breviter setosi et coxa macrochaetis 5 externis, 2 internis, trochanthere 2, femore macrochaetarum pare proximali et pare distali internis, tibia macrochaeta proximali et macrochaetis 2 distalibus, praetarso unguibus lateralibus et ungue mediano brevior.

Abdomen tergitis setis sat numerosis et macrochaetis subposticis utrimque 3 apice inciso et 5-6 integris instructis; tergito 10° brevi, postice vix convexo et utrimque macrochaetis 2 instructo; sternito 1° stilis

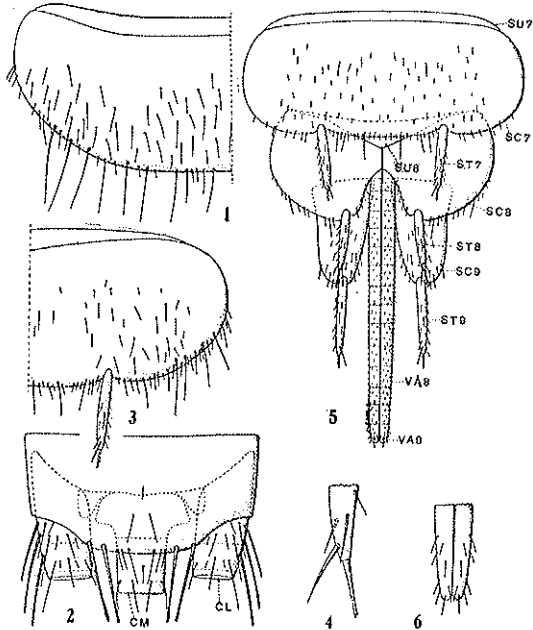


FIG. XII.

*Protrinemura orientalis*: 1. urotergiti 5<sup>i</sup> dimidia pars; 2. urotergite 10<sup>um</sup> cum cercorum parte basali; 3. urosterni 5<sup>i</sup> dimidia pars; 4. stili 5<sup>i</sup> pars apicalis multo ampliata; 5. urosterma 7<sup>um</sup> ad 9<sup>um</sup> cum ovopositore; 6. ovopositoris apex subtus inspectus: litterae ut in fig. VIII.

et vesiculis destituto, sternitis 2-9 stilis instructis, sed vesiculis destitutis.

Uritum 8<sup>um</sup> sterno brevi triangulari, subcoxis magnis, uritum 9<sup>um</sup> sterno obsoleto, subcoxis elongatis; ovipositor sat tenuis, pseudoarticulatus, abdominis apicem superans.

Cerci in exemplo typico haud integri.

Species typica: *Protrinemura orientalis* sp. n.

*Observatio.* Genus hoc a *Nicoletia* urosternis vesiculis destitutis distinctissimum est.

*Protrinemura orientalis* sp. n.

*Femina.* Straminea. long. corporis mm. 5,60, lat. capitis 0,72, long. antennarum?, pedum paris 2: 2,30, cercorum?, ovipositoris a basi 0,90; characteribus ceteris vide generis descriptionem et figuras.

*Habitat.* Exemplum typicum sub saxo in humo infosso in M. Ausu, Foochow (Fukien, Cina), legi.

## INTERPOLAZIONE E MEDIE (\*)

PIETRO MARTINOTTI

SUMMARIVM. — Auctor ostendit quam utile sit omnes interpolationis rationes ad unum reducere, ut ut nihil aliud sint nisi aequalitates inter opportunas medias valorum qui sint reperti et valorum qui computati sint. Ex hoc deducuntur quaedam proprietates mediarum, quae ex interpolatione profluunt, et nonnulla perpenduntur de aptitudine huius rationis mediarum, quae ad elementorum functiones referantur.

1. CLASSIFICAZIONE DEI METODI D'INTERPOLAZIONE. — Esiste una notevole varietà di metodi ed artifici di interpolazione analitica di una prefissata funzione su un dato gruppo di osservazioni, i quali metodi si propongono, come scopo comune e principale, di determinare le equazioni necessarie al calcolo dei parametri di detta funzione. Prevalgono quelli che a tale scopo pervengono quale conseguenza di particolari condizioni imposte ai metodi stessi; altri, invece, si propongono direttamente ed unicamente di dare a quelle equazioni una particolare forma.

Stanno fra i primi, qualificabili come *indiretti*, i metodi:

A) dei minimi quadrati degli scarti fra i valori osservati ed i calcolati <sup>(1)</sup> al quale sono aggregabili, per la consistenza delle effettive operazioni interpolatorie, il metodo di trasformazione della variabile <sup>(2)</sup> e quello dei valori eccedenti <sup>(3)</sup>;

B) dei minimi quadrati degli stessi scarti, ma per unità di valori calcolati <sup>(4)</sup>;

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) A. M. LEGENDRE, *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des Comètes*, Paris, 1806.

(2) R. D'ADDARIO, *Barometro economico*, 1934-xii.

(3) R. D'ADDARIO, « *Annali Ist. Statis. Univ. di Bari* », 1939-xvii.

(4) K. PEARSON, *Philosophical Magazine*, London, 1901.

C) dei minimi quadrati dei medesimi scarti, ma per unità di valori osservati <sup>(1)</sup>;

D) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali <sup>(2)</sup> dei valori predetti;

E) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali dei valori osservati ed i corrispondenti valori della derivata dell'interpolante <sup>(3)</sup>;

F) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali dei valori osservati, ma per unità di questi, ed i corrispondenti valori della derivata del logaritmo dell'interpolante <sup>(4)</sup>;

G) della massima attendibilità <sup>(5)</sup>.

Sono metodi *diretti* quelli:

H) dei momenti <sup>(6)</sup>;

I) delle somme, delle aree <sup>(7)</sup> e delle sintesi <sup>(8)</sup>;

L) delle differenze <sup>(9)</sup> e sue varianti <sup>(10)</sup>.

Da questo elenco rimangono esclusi, perchè sottraentisi alla trattazione che segue, alcuni noti metodi di approssimazioni successive.

Tanta dovizia di mezzi trova motivo, oltre che nell'importanza dello strumento d'indagine statistica che si sta trattando, nella tendenza a viepiù conciliare le opposte esigenze della buona approssimazione con la semplicità dei calcoli. È ciò che va verificandosi pure nei riguardi delle medie, le quali oltre ad essere andate anch'esse, di recente, continuamente moltiplicandosi, si possono oggi abbracciare da un unico punto di vista, non solo, ma di qui si è inoltre riuscito ad

<sup>(1)</sup> F. NEYMANN, *Contribution to the theory of certain test criteria*, Varsavia, 1929.

<sup>(2)</sup> P. MARTINOTTI, « Riv. Int. Sc. Soc. », Milano, 1929-xvii.

<sup>(3)</sup> T. BAGNI, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi*, Firenze, 1915 e P. MARTINOTTI, *loc. cit.*

<sup>(4)</sup> P. MARTINOTTI, *loc. cit.*

<sup>(5)</sup> R. A. FISHER, « Proceedings of the Roy Soc. of London », 1922.

<sup>(6)</sup> K. PEARSON, « Philos. trans. Roy Soc. », London, 1895.

<sup>(7)</sup> R. P. CANTILLI, *Sull'adattamento di curve su una serie di misure o di osservazioni*, Roma, 1905.

<sup>(8)</sup> R. MAGNO, « Metron », 1935-xiii.

<sup>(9)</sup> F. VINCI, « Ann. Ist. Sup. Sc. Econ. Comm. », Bari, 1926-iv.

<sup>(10)</sup> F. SIBIRANI, « Giorn. Ist. Ital. Attuari », Roma, 1934-xii; O. GUALDONI, « Ann. Econ. », Milano, 1889-xvii.

estendere lo sguardo, sino a comprendervi pure l'insieme dei metodi di interpolazione, i quali alle medie sono venuti a trovarsi strettamente legati.

Entrambe le visioni vanno attribuite alla superiore perspicacia di un matematico, al quale, per di più, esse apparivano così semplici e naturali, da limitarsi a lasciarne lieve traccia nella modesta sede di dispense litografate per le nostre Facoltà Economico-Commerciali (1).

Da ciò solo si potrebbe trarre sufficiente motivo di porre in degno rilievo l'importante connubio; altri si aggiungono che di quest'ultimo attestano la promettente fertilità, e precisamente:

la già asserita unificazione dei criteri, ai quali vengono sottoposte le condizioni riguardanti i parametri dell'interpolante:

la forma semplice, evidente e significativa del criterio unico;

la possibilità di un'ampia estensione nel campo della ricerca di nuovi metodi;

L'applicabilità di questi ad una interpolante di forma qualsiasi, cui viene lasciata la piena libertà di scelta, in armonia con l'andamento della successione dei dati.

## 2. TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI IN UGUAGLIANZE FRA MEDIE. —

L'accostamento delle medie alle interpolazioni è il prodotto di due successive considerazioni.

La prima riguarda la comunione di quel particolare loro carattere, per il quale possono essere riferite ad una funzione dei dati avente un'analogia proprietà invariante: per le medie detta funzione non varia quando i dati sono uguagliati alla loro media; per l'interpolazione — come si rende evidente esaminando le equazioni espresse dai metodi diretti, e come per gl'indiretti si vedrà facilmente — quando si sostituiscono i valori osservati con i calcolati.

Dalla seconda considerazione viene prodotta una effettiva fusione dei due enti, dovuta all'identità dei mezzi analitici per dimostrare la nota proprietà della media aritmetica contenuta nel principio dei minimi quadrati, con quelli deducanti dalle condizioni di minimo o di massimo

(1) C. E. BONFERRONI, *Appunti di Statistica generale*, Torino, 1923-vi; *Elementi di Statistica generale*, Torino, 1940-xviii.

dei vari metodi indiretti le rispettive equazioni. Dall'identità di mezzi è da attendersi almeno una certa analogia dei risultati: come dalla media aritmetica vien dato il valore più plausibile di una incerta misura, così una conveniente media delle osservazioni potrà fornire valori meglio approssimati - relativamente a prefissate condizioni - per il calcolo dell'incognita interpolante.

Ciò come giustificazione logica del risultato proposto. Praticamente, a questo si perviene in modo molto semplice, perchè i sistemi di equazioni determinanti i parametri si presentano, anche per tutti i metodi indiretti, sotto forma facilmente traducibile in sistemi di uguaglianze fra medie dei valori osservati, dei calcolati e di loro funzioni: medie uguali per ogni singola equazione, differenti da l'una all'altra equazione di uno stesso sistema, relativo ad ogni singolo metodo, ed ancora variabili da l'uno all'altro metodo.

Siano le  $n+1$  coppie di valori osservati:

$$x_0, y_0 \quad x_1, y_1 \quad x_2, y_2 \quad \dots \quad x_n, y_n$$

da interpolare mediante una prescelta funzione  $f(x)$  contenente gli  $h$  parametri  $a_1, a_2 \dots a_h$ .

Per ognuno dei predotti metodi, si fanno qui seguire: \*

la  $j$ (esima) delle  $h$  equazioni determinanti questi parametri, la sua trasformata secondo il criterio prefissato, la specificazione della corrispondente media.

$$A) \quad \sum_{i=0}^n \{y_i - f(x_i)\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata, con pesi  $\frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$B) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{y_i^2}{f^2(x_i)} - 1 \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i^2}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n \frac{f^2(x_i)}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}}$$

media quadratica ponderata, con pesi  $\frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .



$$C) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{f(x_i)}{y_i} - 1 \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata, con pesi  $\frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

D) Denotati i seguenti rapporti incrementali osservati e calcolati:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \rho(y_i); \quad \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \rho(f_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \rho(y_i) - \rho(f_i) \right\} \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(y_i) \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f_i) \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata dei rapporti incrementali, con pesi  $\frac{\partial \rho(f_i)}{\partial a_j}$ .

$$E) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \rho(y_i) - f'(x_i) \right\} \frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}; \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(y_i) \frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}}$$

medie aritmetiche ponderate dei rapporti incrementati e delle derivate, con pesi  $\frac{\partial f'(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{\rho(y_i)}{y_i} - \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} \right\} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} = 0$$

$$F) \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho(y_i)}{y_i} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}}$$

medie aritmetiche ponderate dei rapporti incrementali dei valori osservati, per unità di questi valori, e dei corrispondenti valori delle derivate dei logaritmi della  $f(x)$ , con pesi  $\frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}$ .

$$G) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{y_i}{f(x_i)} - \lambda \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

medie aritmetiche ponderate dei valori osservati e dei calcolati moltiplicati per il parametro  $\lambda$ , con pesi  $\frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$H) \quad \sum_{i=0}^n y_i x_i^j = \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^j; \quad \frac{\sum_{i=0}^n y_i x_i^j}{\sum_{i=0}^n x_i^j} = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^j}{\sum_{i=0}^n x_i^j}$$

medie aritmetiche ponderate, con pesi  $x_i^j$ .

$$I) \quad \sum_{i=h}^k y_i = \sum_{i=h}^k f(x_i); \quad \frac{\sum_{i=h}^k y_i}{k-h+1} = \frac{\sum_{i=h}^k f(x_i)}{k-h+1}$$

medie aritmetiche semplici

$$L) \quad \sum_{i=0}^n \Delta^j y_i = \sum_{i=1}^n \Delta^j f(x_i); \quad \frac{\sum_{i=0}^n \Delta^j y_i}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta^j f(x_i)}{n}$$

medie aritmetiche delle  $j$ (esime) differenze. <sup>(1)</sup>

3. PROPRIETÀ DI ALTRE MEDIE DERIVANTI DALL'INTERPOLAZIONE. — Alcune relazioni fra somme di valori osservati, calcolati, e di corrispondenti scarti, sinora note soltanto per i più usati metodi, ed in modo speciale per quello dei minimi quadrati (A) possono venire pure tradotte in relazioni fra medie distinte dalle precedenti, compiute da

<sup>(1)</sup> Le varianti al metodo delle differenze (vedi nota 10, pag. 324), le quali tendono a limitare a soli gruppi parziali delle  $n$  differenze le eguaglianze sopra indicate, richiederanno di attribuire il peso 1 alle differenze di quei gruppi, e 0 alle rimanenti.

nuove relazioni simili, ed estese ad un maggior numero di metodi ed a più generiche forme di interpolanti.

A questo scopo si considerino quei metodi, come A, D, E, F che presentano equazioni del tipo:

$$[1] \quad \sum_{i=0}^n \varphi(y_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n \psi(f_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

ove  $\varphi$  e  $\psi$  denotano funzioni distinte per i metodi E, F, ed uguali per A, D. Si supponga, inoltre, che la  $f(x)$  sia funzione omogenea d'ordine  $m$  nei parametri  $a_j$ . È il caso, per  $m=1$ , delle funzioni razionali ed intere rispetto alla variabile  $x$ .

Se si moltiplicano i membri del sistema di  $h$  equazioni, delle quali la precedente è la  $j$ (esima), per i rispettivi parametri, e poi si sommano le equazioni stesse, si ottiene:

$$\sum_{j=0}^h \left\{ a_j \sum_{i=0}^n \varphi(y_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\} = \sum_{j=1}^h \left\{ a_j \sum_{i=0}^n \psi(f_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\}$$

ossia:

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \varphi(y_i) \sum_{j=1}^h a_j \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\} = \sum_{i=0}^n \left\{ \psi(f_i) \sum_{j=1}^h a_j \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\}$$

Ma, per una proprietà fondamentale delle funzioni omogenee, le somme interne di  $h$  termini sono uguali a  $hf(x_i)$ ; di modo che la formula precedente si riduce alla:

$$\sum_{i=0}^n \varphi(y_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \psi(f_i) f(x_i)$$

e dimostra che nell'uguaglianza fra medie ponderate, dalla quale la [1] ha tratto origine, è possibile la sostituzione dei pesi  $f(x_i)$  ai  $\frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

Nel caso A, essendo  $\varphi(y_i)=y_i$ ,  $\psi(f_i)=f(x_i)$ , la relazione precedente diviene:

$$\sum_{i=0}^n y_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n f^2(x_i)$$

ed esprime che:

« Se si interpola con una funzione omogenea rispetto ai parametri, seguendo il metodo dei minimi quadrati, la media quadratica dei valori

calcolati uguaglia la radice quadrata della media aritmetica dei valori stessi, moltiplicati per i corrispondenti valori osservati ».

Ne segue, sempre nelle premesse ipotesi, ed indicando con  $\varepsilon_i$  l' $i$ (esimo) degli scarti fra valori osservati e calcolati, che è:

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i f(x_i) = 0$$

Inoltre, per la minima somma dei quadrati degli scarti stessi, dalla precedente si deducono le altre relazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 &= \sum_{i=0}^n \left\{ \varepsilon_i y_i - \varepsilon_i f(x_i) \right\} = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i y_i = \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ y_i^2 - 2y_i + f^2(x_i) \right\} = \sum_{i=0}^n y_i^2 - \sum_{i=0}^n f^2(x_i) \end{aligned}$$

esprimenti semplici proprietà riguardanti il metodo dei minimi quadrati, in parte noti, ma solo per il caso di una interpolante  $f(x)$  razionale ed intera.

Si vede la possibilità di analoghe deduzioni, per gli altri metodi.

4. INTERPOLAZIONI E MEDIE RIFERITE A FUNZIONI. — Se, nei procedimenti sin qui seguiti, si inserisce il criterio di distinguere le varie medie, come relative a diverse funzioni dei dati, si aprono le nuove vie: di estendere notevolmente e con fine logico, la già ricca disponibilità di metodi interpolatori;

di far rientrare le medie delle funzioni  $\varphi, \psi$ , dianzi considerate, nell'ambito di medie dirette dei dati;

di ridurre anche le medie dei valori calcolati a medie degli argomenti  $x_i$ .

Così facendo, però, le solite equazioni perderanno talvolta il carattere di uguagliare medie del medesimo tipo, perchè quelle dell'un membro potranno essere riferite a funzioni differenti da quelle relative alle medie dell'altro membro.

Si consideri, ad esempio, l'uguaglianza fra medie dedotta per il metodo (A) dei minimi quadrati (n. 1).

Al primo membro trovasi la media  $m_y$  dei valori osservati, relativa alla loro funzione

$$\sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

perchè detta media soddisfa alla condizione:

$$\sum_{i=0}^n m_y \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

Se all'analogia funzione:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

si riferisse la media  $m_f$  espressa dal secondo membro, questo non verificherebbe la condizione:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j} = (n+1) m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j}$$

poichè da questa verrebbe determinata un espressione di  $m_f$  ben diversa da detto membro.

Si è, invece, costretti a considerare quest'ultimo come media degli  $f(x_i)$  rispetto alla loro funzione:

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

vale a dire alla media stessa, essendo verificata la condizione:

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial m_f}{\partial a_j}}$$

perchè entrambi questi rapporti uguagliano  $m_f$ .

Lo stesso secondo membro, quale media  $m_x$  degli argomenti  $x_i$ , va riferita alla funzione di questi.

$$\bar{f}(m_f)$$

ove con  $\bar{f}(y)$  si denoti la funzione inversa alla  $y=f(x)$ .

È infatti:

$$\begin{aligned} m_x = \bar{f}(m_f) &= \bar{f} \left( \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} \right) = \bar{f} \left( \frac{\sum_{i=0}^n f(m_x) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}} \right) = \\ &= \bar{f} \left( \frac{(n+1) f(m_x) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}}{(n+1) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}} \right) = \bar{f} \{ f(m_x) \} = m_x \end{aligned}$$

Similmente, e sotto forma ancor meno semplice, si presentano le funzioni di riferimento delle medie per i successivi sei metodi. Solo per i diretti, come è facile verificare, esiste un'unica funzione relativa tanto alla  $m_y$  come alla  $m_f$ .

All'infuori di questi casi più semplici, si vede che il valido criterio delle medie relative a funzioni trova in questo campo un terreno poco praticabile, specialmente per quanto concerne le medie dei valori calcolati, i quali, anzichè presentarsi come valori effettivamente noti, sono funzioni dei parametri.

È inoltre singolare il fatto che, nell'esempio svolto, il riferimento della media abbia dovuto ricadere su la media stessa; ciò che del resto non può sorprendere, poichè essa si presenta effettivamente come funzione dei dati, con carattere invariante per una sua sostituzione ai dati stessi.

Rimane, ciò non ostante, la fiducia che da quel criterio possano derivare utili servigi anche in questo campo. Non ultimo potrà essere quello di ottenere tali semplificazioni dei calcoli, da concedere una maggiore libertà nella scelta della interpolante. Così, se verranno impiegate medie rispetto a funzioni tali da consentire la presenza di un solo parametro nelle medie stesse, sarà evitato l'uso delle complesse formule risolutive dei sistemi di equazioni, siano pure lineari, e quindi anche la conseguente limitazione nel numero dei parametri.

ORIGINE ED EVOLUZIONE  
DEL NUCLEO ACCESSORIO DEL NERVO ABDUCENTE  
NELL'EMBRIONE DI POLLO (\*)

(Con due tavole)

RITA LEVI-MONTALCINI

**SUMMARY.** — Inquirendo in originem nuclei accessorii nervi abducentis in pullorum foetibus, patuit accessorium nervi VI nucleum ex neuroblastorum migratione constitui, qui iam discreti sint e cellularum agmine (cuius sedes est ubi nucleus principalis erit); accessorii nuclei neuronum migrationem e medio in latum fieri, et incomposite, nec nisi a sexto ad octavum diem; accessorii nuclei neurones, durante migratione, principali nucleo similiores esse, a quo postea ob maiorem longitudinem differant, et ob formam in fusi speciem expressam (quod ideo fit quia dendrites, non ad polum ex quo neurites oritur, sed ad oppositum fasciatim vertuntur).

Il nervo abducente innerva negli uccelli il muscolo retto laterale ed i muscoli della membrana nittitante, rappresentati dal muscolo quadrato e dal muscolo bursale.

VAN GEHUCHTEN ha per primo osservato, studiando l'embrione di pollo, che non tutte le fibre del VI nervo derivano dal nucleo noto da tempo che è situato lateralmente al fascicolo longitudinale mediale, in diretta prossimità del rafe. Egli ha segnalato la presenza di un nucleo accessorio, situato lateralmente e ventralmente al nucleo principale e compreso tra la radice discendente del trigemello e l'oliva superiore. Le cellule del nucleo, a forma allungata, multipolari, inviano, secondo tale Autore, il neurite in direzione latero-ventrale con incli-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Pietro Rondoni nella Tornata del 30 settembre 1942.

nazione obliqua dal basso in alto, verso il nucleo principale, ed insieme escono ventralmente dal nevrasse.

Tale reperto, confermato in seguito da tutti gli Autori, è stato oggetto di un'analisi accurata e completa da parte di TERNI<sup>(1)</sup> (1921) che l'ha esaminato in un gran numero di classi animali (pesci, rettili, uccelli, mammiferi). Questo Autore, integrando le ricerche anatomiche con ricerche fisiologiche, ha posto in luce il significato funzionale della bipartizione del nucleo.

Il nucleo accessorio provvede, secondo TERNI, all'innervazione dei muscoli i quali «direttamente o indirettamente si connettono ai movimenti della terza palpebra»<sup>(2)</sup>. La bipartizione costituirebbe un interessante esempio di spostamento di un nucleo per neurobiotassi (KAPPERS); secondo l'ipotesi di questo Autore un nucleo motore tenderebbe ad avvicinarsi nella filogenesi al sistema dal quale gli perviene la maggior somma di eccitamenti. In questo caso il nucleo accessorio si sposterebbe verso la radice discendente del V, dalla quale appunto perverrebbero in prevalenza al nucleo gli eccitamenti funzionali, della chiusura della membrana nittitante<sup>(3)</sup>. TERNI ha dimostrato infatti che stimolando nei Sauropsidi

(<sup>1</sup>) TERNI, *Ricerche sul nervo abducente e in special modo intorno al significato del suo nucleo accessorio d'origine*. Folia Neuro-Biologica, 1921, 13 ottob., XII, n. 2.

(<sup>2</sup>) In una recente ricerca STEFANELLI (« Boll. Soc. Biol. Sperim. », 1940, Vol. XV, N. 4), ha constatato l'assenza del nucleo accessorio del VI nel *Chamaeleon vulgaris*, nel quale manca una membrana nittitante e i muscoli che l'azionano: bursalis e derivati, e il retractor bulbi, pure innervato nei rettili, secondo TERNI dall'accessorio del VI.

Tale reperto è considerato da STEFANELLI una verifica naturale del significato funzionale del nucleo.

(<sup>3</sup>) KAPPERS nel formulare la sua ben nota, interessante ipotesi della neurobiotassi, prospetta esclusivamente la possibilità che gli eccitamenti funzionali determinino durante la filogenesi uno spostamento dei neuroni.

Non mi risulta che né KAPPERS, né altri, abbiano addotto argomenti in favore di un'azione attuale durante l'ontogenesi.

Dopo che le mie ricerche erano ultimate, ebbi l'opportunità, in grazia alla cortesia del Dr. AMPRINO, di compiere un'osservazione, la quale è in deciso contrasto con la possibilità che gli eccitamenti funzionali determinino uno spostamento di neuroni durante lo sviluppo embrionale.

Infatti in preparati di embrioni di 10-12 giorni, nei quali il Dr. AMPRINO aveva asportato al 3° giorno completamente il ganglio del V, e che perciò erano privi della radice discendente del V, ho potuto osservare che il nucleo accessorio occupava la sua sede abituale, ed era normalmente costituito. Il che è in palese contrasto con la possibilità che la sede laterale del nucleo accessorio del VI sia determinata da eccitamenti funzionali da parte della radice discendente del V i quali agiscano durante lo sviluppo embrionale.



il territorio di distribuzione sensitiva del V (muso o congiuntiva) si determina un rapido movimento di chiusura della nittitante, atto « che riveste tutti i caratteri di un movimento riflesso ».

Oltre a questa prova di carattere funzionale, egli ha invocato un altro dato d'indole anatomica. Egli ha contato in embrioni di *Gongylus* il numero delle cellule del nucleo accessorio e il numero di fibre dell'abducente che si distribuiscono, dopo la biforcazione periferica del nervo, ai muscoli motori della nittitante, e in questo animale anche al muscolo retrattore del bulbo. Il numero di tali fibre, circa una trentina, coincide con molta approssimazione, con quello delle cellule del nucleo accessorio del VI, portando così una nuova prova indiretta della funzione di tale nucleo.

Sulle modalità di formazione e sull'evoluzione del nucleo accessorio nel corso dello sviluppo embrionale, mancano dati nella letteratura.

I vari Autori si limitano a descrivere i caratteri morfologici dei neuroni maturi e la loro sede definitiva.

Nel corso di una ricerca sperimentale che ho intrapresa sulle relazioni tra centri e campo d'innervazione del VI durante lo sviluppo nell'embrione di pollo, sono emersi alcuni dati interessanti la costituzione e l'evoluzione del nucleo, dati che esporrò in questa nota.

Mi sono servita per tale ricerca di embrioni di pollo dal 2° al 16° giorno d'incubazione, tutti ottimamente impregnati secondo il metodo CAJAL-DE CASTRO, e tagliati in serie, in parte trasversalmente, e in parte secondo un piano frontale.

È noto che tutti i nuclei dei nervi motori encefalici somatici o viscerali hanno un'origine comune da una colonna che dal mesencefalo si segue sino al midollo, situata in immediato contatto con le fibre del fascicolo longitudinale mediale. Questa colonna si abbozza molto precocemente, secondo TELLO<sup>(1)</sup>, e cioè alla fine della seconda giornata d'incubazione. I miei dati concordano con i suoi.

Da questa colonna i vari nuclei si individualizzano secondo un determinato ordine. Per i dati relativi rimando alla monografia molto completa di TELLO.

Il nucleo dell'abducente risulta nei miei preparati ben delimitato a 72 ore. In sezioni trasverse i neuriti riuniti in un esile tronco nor-

(<sup>1</sup>) TELLO F., *Trabajos*, XXI, 1923.

voso fortemente impregnato, fuoriescono dal nevrasse ventralmente. Le cellule di origine raggruppate in un nucleo in via di formazione, lateralmente al fascicolo longitudinale mediale, sono in prevalenza allo stadio di neuroblasti unipolari.

Sino alla fine del 5° giorno d'incubazione, non vi è alcun cenno alla comparsa di un nucleo accessorio dell'abducente. Il nucleo che topograficamente occupa la posizione che avrà anche in seguito il nucleo principale, aumenta di volume per la differenziazione di nuovi neuroblasti che si vanno addossando ai precedenti in una massa sempre più compatta. In sezioni trasverse si presentano a questo stadio con il maggior asse disposto longitudinalmente. I pirenofori sono in prevalenza provvisti di vari dendriti, e questi si diramano in direzione opposta al neurite, dando alla cellula un carattere affusato.

I neuriti emessi dal polo inferiore della cellula, non decorrono riuniti in fascio, ma in modo piuttosto lasso, riunendosi in un sottile nervo soltanto al punto di emergenza dal bulbo. Appena fuoriuscito, il tronco decorre per un primo tratto orizzontalmente in avanti, con lieve convergenza verso la linea mediana, per poi ripiegare lateralmente e raggiungere la periferia. Qui giunto il nervo si dirama a ventaglio in un blastema retrobulbare nel quale non è ancora possibile riconoscere i vari componenti. A questo periodo (5ª giornata) non si riconoscono in questo blastema in preparati impregnati all'argento, le miofibrille; però la disposizione seriale dei nuclei fa pensare che esse siano già differenziate in buon numero. Le fibre nervose si approfondano per breve tratto nella massa di blastema e vi terminano con espansioni terminali.

Nel corso della 6ª giornata d'incubazione inizia la formazione del nucleo accessorio del VI, e la sua evoluzione procede in modo tumultuario tra la sesta, settima e ottava giornata, alla fine della quale è completamente costituito.

Il nucleo si forma per migrazione di neuroblasti già ben differenziati dal nucleo principale, e le modalità di questo processo meritano di essere accuratamente seguite, trattandosi di un fatto imperfettamente analizzato nell'istogenesi dei centri nervosi.

La migrazione dei neuroblasti costituenti i vari nuclei avviene per lo più in tutto il sistema nervoso ad uno stadio molto arretrato della loro differenziazione, e gli elementi in via di migrazione non pre-

sentano caratteri che permettano di riconoscerli dalle cellule indifferenti che le circondano.

Come esempio di migrazione di neuroblasti già discretamente differenziati, CAJAL cita (<sup>1</sup>) lo spostamento attivo delle cellule simpatiche in fase multipolare lungo le radici motrici midollari e lungo la radice del V nervo. Ma questi dati non sono stati in seguito confermati, ed anzi TELLO nelle sue ricerche più recenti contesta la possibilità di una migrazione di simpatogoni dal midollo. Però nell'istogenesi del sistema nervoso centrale vi sono sicuramente esempi di migrazione di neuroblasti con caratteri specifici (ad es. nel cervelletto).

Nel caso del nucleo accessorio del VI, è possibile seguire le varie tappe di questa migrazione, per un tratto notevolmente lungo, e il processo è così evidente che non può sussistere alcun dubbio sull'interpretazione.

Lo studio è facilitato dalla grande semplicità dei sistemi di nuclei e vie nervose esistenti a questo periodo nel midollo allungato. Ritengo utile descrivere brevemente la topografia dei nuclei della regione del rombencefalo che c'interessa, quale si presenta alla fine del 6° giorno d'incubazione.

A livello dell'abducente, in sezione trasversa, si nota l'ingresso dell'acustico-facciale in corrispondenza dell'angolo dorso-laterale del midollo. Le fibre penetrano nel bulbo dove è già evidente la costituzione dei nuclei del campo acustico, dei quali tuttavia non è ancora possibile distinguere i vari componenti.

Procedendo medialmente si nota la radice discendente del V molto voluminosa e subito medialmente a questa le prime cellule del nucleo accessorio del VI che presentano già il caratteristico orientamento dal basso in alto e da fuori in dentro, che persisterà negli stadi successivi. Medialmente al nucleo appena abbozzato dell'accessorio, si vede il nucleo del facciale; le sue fibre fuoriescono lateralmente descrivendo il caratteristico arco aperto in basso e in fuori.

Disseminate tra questi nuclei si trovano molte cellule intensamente impregnate, di un volume maggiore delle precedenti, multipolari, interpretate da CAJAL come componenti del nucleo magnocellulare disseminato o nucleo tegmentale, secondo la nomenclatura moderna.

Immediatamente lateralmente al fascicolo longitudinale mediale in posizione dorsale, il nucleo principale dell'abducente e sopra questo le vie centrali dell'acustico che incrociando il rafe si portano al lato opposto (fig. 1).

(<sup>1</sup>) CAJAL, *Études sur la neurogenèse de quelques vertébrés*, 1929.

Le cellule costituenti il nucleo principale del VI, hanno perduto verso la fine della 6<sup>a</sup> giornata, il loro orientamento longitudinale caratteristico dei primi stadi, e si presentano meno fittamente addossate che negli stadi precoci. Sono orientate in prevalenza con l'asse maggiore disposto trasversalmente e pur essendo multipolari, presentano a questo stadio un aspetto affusato.

Dal margine laterale del nucleo principale del VI, in quasi tutte le sezioni si vedono uno o più neuroblasti, il cui asse è orientato obliquamente rispetto alle altre cellule del nucleo. Essi tendono a staccarsi dalla massa principale del nucleo, pur rimanendone in rapporto con la loro estremità prossimale, e presentano lo stesso orientamento delle cellule del nucleo accessorio. Il neurite diretto dorso-medialmente verso il nucleo principale, e i dendriti opposti a quello, contribuiscono a fare apparire maggiormente affusata la cellula. Neuroblasti con uguali caratteri si trovano disseminati per tutto il tratto, relativamente lungo, che separa il nucleo principale dal nucleo accessorio del VI, e costituiscono una specie di catena di cellule in certi punti continua, che con tragitto obliquo di dentro in fuori e dall'alto in basso, congiungono il nucleo principale del VI al nucleo accessorio che si va formando (fig. 1-2).

Questi neuroblasti migrano in prevalenza separatamente, a volte però si vedono piccoli raggruppamenti di elementi sorpresi durante la migrazione più o meno vicino all'uno o all'altro nucleo. In determinate sezioni anzi questi raggruppamenti contingenti di elementi in via di migrazione, si presentano costituiti da un numero di cellule anche più numerose di quello ancora esiguo che costituisce il primo abbozzo del nucleo accessorio nella sua sede definitiva.

A questo stadio, come nei successivi, i pirenofori del nucleo accessorio del VI, si presentano più intensamente colorati e più fusiformi e sottili di quelli del nucleo principale i quali tendono ad assumere una forma globosa e pluridentritica. In questi elementi disseminati tra i due nuclei si vedono tutti i gradi di passaggio dall'uno all'altro tipo cellulare.

Qual'è il substrato di tale differenza morfologica? Si deve considerare come esponente di differenze essenziali nei due tipi cellulari?

È noto per le ricerche antecedenti che la forma delle cellule del nucleo accessorio del VI differisce sostanzialmente negli embrioni inoltrati da quella delle cellule del nucleo principale.

In questa ricerca fu dimostrato che questa forma affusata si manifesta già molto precocemente, e cioè all'inizio della migrazione dal nucleo principale verso quello che sarà il nucleo accessorio. Il pirenoforo è piccolo ed a forma globosa negli elementi dei due nuclei; il differente aspetto è determinato dall'orientamento dei dentriti, ramificati in tutte le direzioni e brevi nelle cellule del nucleo principale, dopo il 6° giorno, mentre negli elementi del nucleo accessorio sono raccolti ai due poli opposti della cellula, molto allungati e disposti nella direzione della migrazione delle cellule. Questa forma così caratteristica e che si mantiene invariata in tutti gli stadi successivi, è legata al fatto della migrazione per un tragitto abbastanza lungo, di elementi già differenziati e provvisti di numerosi dentriti, o si deve considerare come predeterminata e indipendente quindi dall'orientamento impresso dalla migrazione?

Accogliendo l'ipotesi di TERNI ispirata alla dottrina della neurobiotassi di KAPPERS, che il nucleo accessorio del VI si sia spostato verso la radice discendente del V, dalla quale riceverebbe la maggior somma di eccitamenti, si potrebbe supporre, che questa forma affusata della cellula ed il suo orientamento parallelo all'asse maggiore della radice stessa, rappresenti la disposizione più favorevole per la trasmissione degli eccitamenti che possono così investirla in tutta la sua lunghezza. Si tratta di un'ipotesi alla quale mancano dati positivi che permettano di esprimersi più esplicitamente.

In embrioni più inoltrati esaminati in sezioni trasversali, già alla fine dell'ottavo giorno, non si sorprendono più elementi migranti. Dal nucleo accessorio in questo stadio e in quelli successivi (fig. 3) emerge un fascio ben riconoscibile di neuriti che raggiunge il nucleo principale seguendo il tragitto prima segnato dalle cellule migranti. Qui giunti i neuriti piegando ad angolo acuto si confondono con quelli del nucleo principale, ed insieme fuoriescono ventralmente dal bulbo. Nel nervo non è possibile distinguere i componenti delle fibre provenienti dai due nuclei. Già alla fine del 6° giorno tuttavia, in corrispondenza del primo abbozzarsi del nucleo accessorio, il nervo arrivato alla massa mesodermica retrobulbare, la quale presenta ormai caratteri chiaramente muscolari, si biforca in due rami, l'uno diretto lateralmente e l'altro medialmente. Quest'ultimo ramo è molto verosimilmente diretto ai mu-

scoli bursale e quadrato che a questo stadio non sono ancora ben riconoscibili.

Gli stadi successivi esaminati in sezioni trasverse non presentano fatti di particolare interesse, e le mie osservazioni concordano completamente con quelle degli altri Autori. Si accentua sempre più la forma globosa e pluridentrica delle cellule del nucleo principale, il cui asse maggiore è disposto orizzontalmente, e le cellule del nucleo accessorio conservano i caratteri e l'orientamento descritti.

In sezioni frontali di embrioni alla fine del 6° giorno, il nucleo accessorio del VI costituito da poche cellule non è ancora facilmente identificabile. I molti elementi in via di migrazione tra i due nuclei contribuiscono a rendere meno facile lo studio del nucleo in via di formazione. Molto interessante è invece l'aspetto del nucleo alla fine della 7ª giornata. Si nota a questo stadio il nucleo molto sviluppato in senso frontale. Le cellule intensamente impregnate si presentano anche più affusate che in sezione trasversa. Al polo opposto a quello da cui origina il neurite, si distacca dalla cellula un esile gruppo di dentriti, conglobati in un fascio, che raggiunge il margine laterale del bulbo, misurando complessivamente in alcuni casi 65-70  $\mu$ .

Alla fine dell'8° giorno, sempre in sezioni frontali, sono completamente scomparsi gli elementi in via di migrazione, e la colonna dell'accessorio, pur occupando ancora una zona molto estesa in senso longitudinale, non si presenta più costituita da elementi sparsi disordinatamente. Le cellule si sono raccolte in 6-7 gruppi per lato separati l'uno dall'altro da brevi intervalli. Da ogni gruppetto di neuroni del nucleo accessorio del VI, i neuriti partono riuniti, e separatamente i vari gruppi raggiungono la colonna del nucleo principale (fig. 4-5).

Nei giorni successivi il nucleo accessorio va soggetto a ulteriori rimaneggiamenti che consistono essenzialmente nel ravvicinarsi dei vari gruppi cellulari in una colonna unica, la quale tuttavia presenta ancora qualche discontinuità. Al 15° giorno, in sezioni rigorosamente frontali come le precedenti, il nucleo si è molto appiattito in senso verticale, ed ha mutato la propria fisionomia. Il nucleo principale non presenta invece mutamenti sensibili, e risulta come negli stadi precoci, costituito da una lunga colonna continua di piccole cellule globose pluridendritiche.

Una misurazione della lunghezza dei due nuclei ai varî stadi dà i seguenti dati:

Sezione frontale	Nucleo Principale	Nucleo accessorio VI
7 giorni	324 $\mu$	324 $\mu$
8 »	378 »	324 »
11 »	378 »	270 »
15 »	480 »	215 »

Risulta dai dati esposti che il nucleo principale aumenta in altezza per l'incremento di volume delle singole cellule e per l'allontanarsi l'una dall'altra, come sempre si verifica durante la maturazione dei nuclei dei nervi cranici, mentre il nucleo accessorio diminuisce considerevolmente in altezza nel corso dello sviluppo. Tale diminuzione è compensata da un aumento del diametro trasversale. Un conteggio delle cellule dimostra infatti che il numero già fissato all'8° giorno (periodo nel quale è cessata la migrazione) si mantiene pressochè uguale nei periodi successivi aggirandosi sui 155-165 elementi.

Ritengo di un certo interesse il fatto che a 7 giorni, quando cioè il nucleo accessorio appare ben delimitato in sezione frontale in forma di colonna di elementi disseminati, le due colonne, principale e accessoria, presentino un'altezza assolutamente uguale.

Infatti se pure i preparati dimostrano con ogni evidenza che i neuroni del nucleo accessorio emigrano in direzione laterale già differenziati, si potrebbe sempre obiettare che almeno un certo numero si differenzi a spese di elementi migrati in fase antecedente a quella neuroblastica; si sa infatti che in tutto il nevrasso la maggior parte di neuroni emigra dallo strato germinativo verso la superficie molto prima di essersi trasformati in neuroblasti.

Se i neuroni della colonna accessoria fossero migrati, sia pure in parte, in periodo antecedente alla loro differenziazione neuroblastica, per la tendenza dei varî elementi ad avvicinarsi gli uni agli altri una volta raggiunta la sede definitiva, la colonna del nucleo accessorio, risulterebbe sin dalla sua prima comparsa meno sviluppata in altezza della principale. In realtà ho constatato che a 7 giorni, quando il

nucleo accessorio è completamente costituito, esso presenta la stessa altezza del nucleo principale, e che soltanto nel corso successivo dello sviluppo, il nucleo principale aumenta in altezza, mentre il nucleo accessorio si riduce. Dato questo comportamento inverso delle due colonne, la loro altezza non può coincidere che nel breve periodo immediatamente successivo alla costituzione del nucleo accessorio a spese del nucleo principale.



## SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I e II

FIG. 1. — Embrione di pollo di 6 giorni 7 ore. Sezione trasversa.

Metodo Cajal-De Castro.

- a) nucleo principale del VI,
- b) vari neuroni in procinto di migrare verso il nucleo accessorio,
- c) nucleo accessorio in formazione,
- d) radice discendente del V,
- e) elementi attribuiti al nucleo tegmentale (Ingr. 130 ×).

FIG. 2. — Lo stesso embrione della fig. 1. Sezione trasversa.

I neuroblasti sorpresi nell'atto di abbandonare il nucleo principale presentano già la caratteristica forma affusata degli elementi del nucleo accessorio (Ingr. 600 ×).

FIG. 3. — Embrione di pollo di 11 giorni d'incubazione. Sezione trasversa.

- a) nucleo principale del VI,
- b) nucleo accessorio del VI. Questo si presenta ormai completamente costituito. Dal suo margine mediale emergono i neuriti che seguendo il tragitto prima segnato dalle cellule in via di migrazione, raggiungono ad angolo acuto il nucleo principale (Ingr. 85 ×).

FIG. 4. — Embrione di pollo di 8 giorni d'incubazione. Sezione frontale.

- a) colonna cellulare del nucleo principale del VI,
- b) nucleo del VII,
- c) nucleo masticatore del V.

Lateralmente al rafe, tra questo e il nucleo principale del VI, fibre del fascicolo longitudinale mediale.

Lateralmente sotto l'ingresso delle fibre radicolari del V, fibre della sua radice discendente (Ingr. 40 ×).

FIG. 5. — Embrione di pollo di 8 giorni d'incubazione. Sezione frontale.

La sezione cade a un livello un po' anteriore rispetto a quella della fig. 4. Non appare più il nucleo principale.

- a) nucleo accessorio del VI costituito a questo stadio da neuroni raccolti in gruppi sovrapposti, intensamente imprugnati.
- b) nucleo del VII,
- c) nucleo masticatore del V (Ingr. 40 ×).

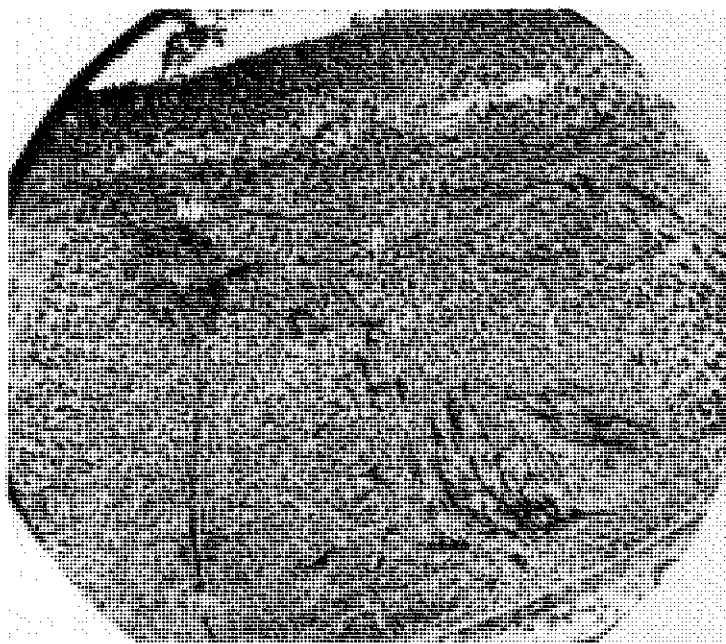


FIG. 1.

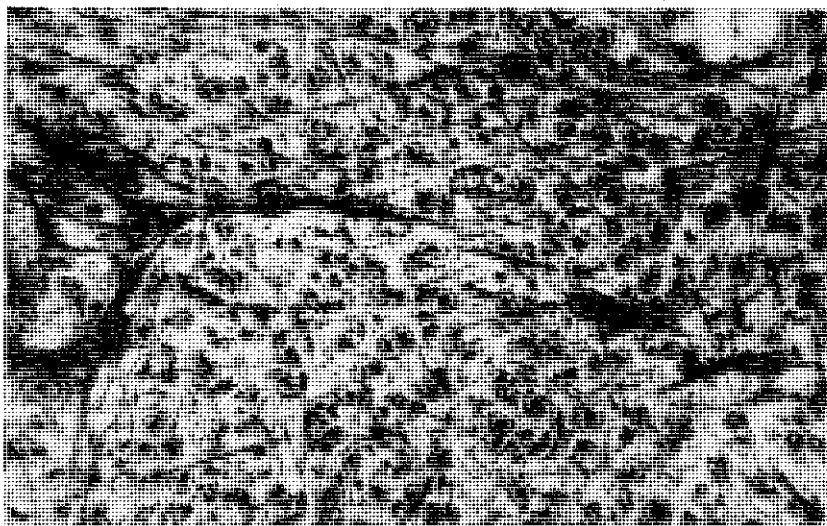


FIG. 2.

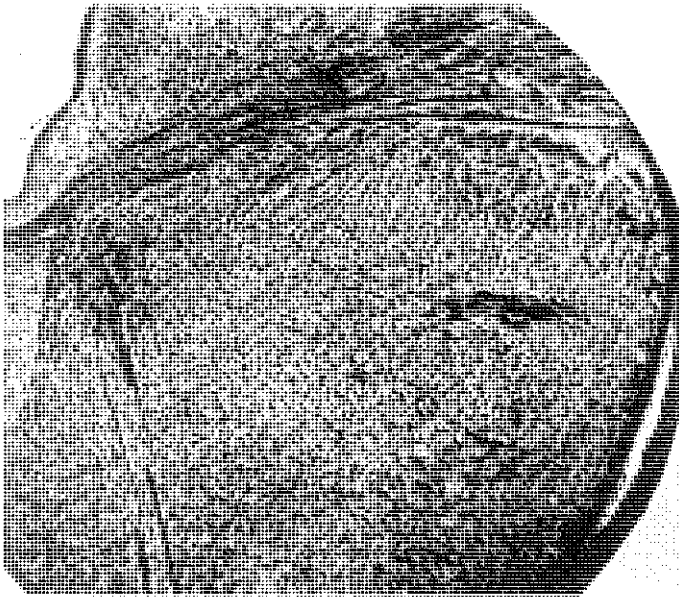


FIG. 3.



FIG. 4.



FIG. 5.

TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI  
CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE  
(IL PROBLEMA DEI MARGINI DI SICUREZZA) (\*)

*(Con quattro figure ed una tavola fuori testo)*

GUSTAVO COLONNETTI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARIUM. — Auctor, qui iam tribus notis in his Actis de securitatis marginibus, quos vocant, disseruerat, peculiarem ostendit applicationem rationum, quibus ii margines determinari possunt; ex quo novam rationem deducit, qua supputentur trabes, quarum futurae antea tensae sint.

In una delle Note pubblicate sotto questo medesimo titolo <sup>(1)</sup>, io ho indicato un procedimento grafico che, nell'ipotesi della sezione parzializzata, permette di determinare, per ciascun valore del momento flettente, la posizione dell'asse neutro - o asse di separazione della sezione reagente - e di tracciare in conseguenza il diagramma delle tensioni interne.

Osservavo in quella occasione che, per quanto tale ipotesi nella nuova tecnica del cemento armato sia da considerarsi come non tollerabile in condizioni normali di esercizio, il calcolo delle tensioni a cui essa dà luogo può presentare qualche interesse ai fini della determinazione dei margini di sicurezza.

---

(\*) Nota presentata il 7 ottobre 1942.

(<sup>1</sup>) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata)*. Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. IV, 1940.

Ma il problema dei margini di sicurezza è in realtà assai più complesso di quel che generalmente si creda; ed io mi propongo di ritornar qui sull'argomento onde approfondirne lo studio alla luce delle norme generali recentemente stabilite per tutte le strutture iperstatiche in stato di coazione (<sup>1</sup>).

\* \* \*

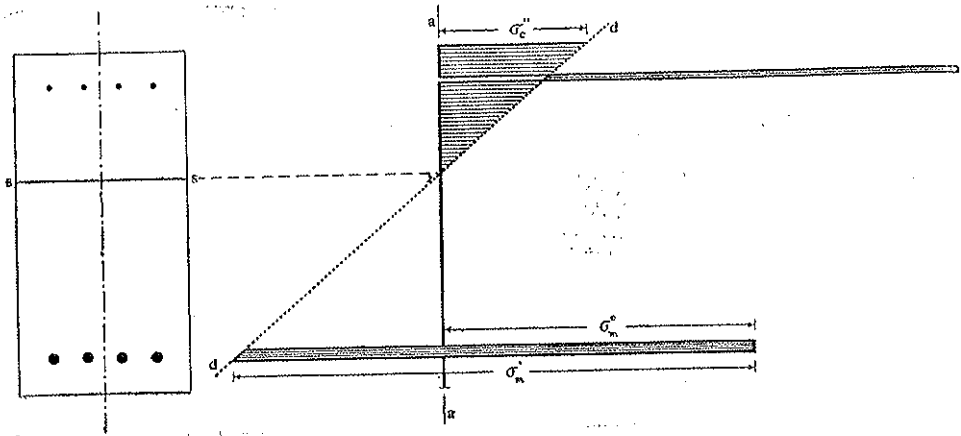


FIG. 1.

Supporrò che una sezione di trave, del tipo di quella rappresentata in figura 1, sia pervenuta, col crescere del momento flettente, al limite della sua resistenza; più precisamente supporrò che nella zona tesa, ormai ridotta alla sola sezione metallica, stia per essere raggiunto il limite di elasticità  $\sigma'_m$  dell'acciaio, e che, contemporaneamente, sul bordo della zona compressa stia per essere raggiunto il carico di rottura  $\sigma_c''$  del calcestruzzo alla compressione.

Osserviamo - prima di inoltrarci nella discussione del problema - che, a questo stato limite, si arriva con un processo che interessa in diverso modo le diverse parti dell'armatura.

(<sup>1</sup>) G. COLONNETTI, *Il problema dei margini di sicurezza nelle strutture iperstatiche in stato di coazione*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1942.

Al crescere del momento flettente, la sollecitazione va infatti continuamente crescendo nelle armature che si trovano nella zona tesa della sezione; va invece continuamente diminuendo in quelle che si trovano nella zona compressa.

Perciò è consigliabile che il dimensionamento delle armature venga eseguito tenendo presente, per l'armatura della zona compressa, il dia-

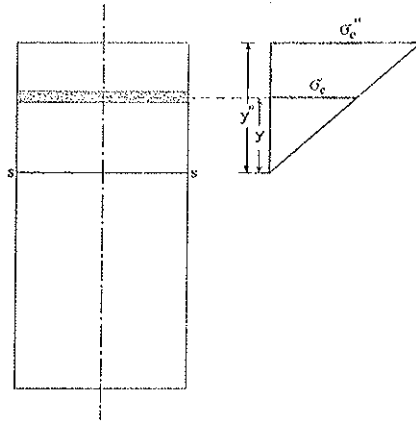


FIG. 2.

gramma delle deformazioni impresse ( $\sigma$ , ciò che fa lo stesso, delle tensioni applicate al momento del getto); per l'armatura della zona tesa, il diagramma delle tensioni determinate invece da quello che noi chiameremo, per intenderci, il momento flettente limite.

E si otterrà una utilizzazione integrale delle caratteristiche di resistenza dell'acciaio impiegato nelle due armature se dimensionamento e messa in tensione preventiva saranno stati previsti per modo che il limite di elasticità dell'acciaio venga raggiunto, nella prima, al momento del getto, nell'altra, sotto l'azione del momento flettente limite.

Così stando le cose, il sistema delle tensioni interne che fa equilibrio alla sollecitazione esterna, al limite di resistenza sopra accennato, si può idealmente immaginare scomposto in due parti costituite: l'una dalle tensioni *positive* nelle armature, supposte tutte tese al limite di elasticità; l'altra dalle tensioni *negative* della sola zona compressa,

calcolate come se nessuna tensione preventiva fosse intervenuta, epperò senza esclusione delle armature in essa zona incluse e con essa impiegate in compressione.

Queste tensioni *negative* dovendo, pel principio della conservazione delle sezioni piane, variare proporzionalmente alla distanza dall'asse di separazione  $ss$  (fig. 2), e proporzionalmente al modulo di elasticità del materiale, si potranno facilmente calcolare sotto forma di momenti statici delle aree elementari (ridotte al modulo base) per rapporto all'asse di separazione.

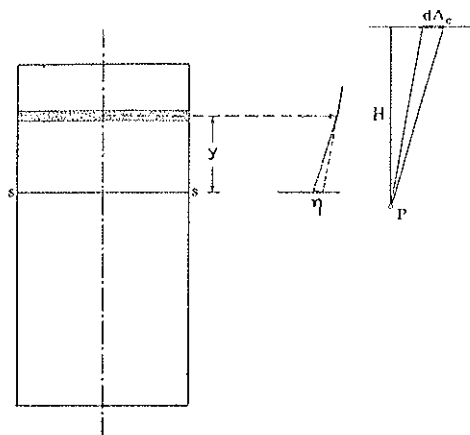


FIG. 3.

È perchè la sollecitazione si riduca, come noi vogliamo, ad una flessione semplice, occorre e basta che la risultante di queste tensioni *negative* sia eguale, in valore assoluto, alla risultante delle predette tensioni *positive* nelle armature, vale a dire al prodotto della sezione metallica  $A_m$  per il limite di elasticità  $\sigma'_m$  del relativo materiale.

Divisa pertanto la sezione in striscie elementari mediante corde parallele all'asse di separazione, e rappresentate idealmente queste striscie con forze fittizie misuranti le relative aree  $dA_c$  ridotte al modulo base (fig. 3), si collegheranno queste forze con un poligono funicolare di distanza polare arbitraria  $H$ .

Questo poligono, coi suoi successivi lati, dovrà intercettare sull'asse di separazione segmenti proporzionali ai momenti statici delle

aree, e quindi anche alle tensioni  $\sigma_c dA_c$  che su di esse aree si esercitano.

Si ha infatti dalle figure 2 e 3

$$\frac{\sigma_c}{y} = \frac{\sigma_c''}{y''} \quad \text{ed} \quad \frac{\eta}{y} = \frac{dA_c}{H}$$

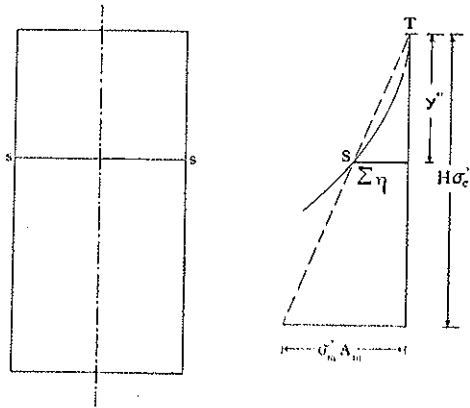


FIG. 4.

Da queste due relazioni si ricava

$$\eta = \frac{y dA_c}{H} = \frac{\sigma_c dA_c}{H \frac{\sigma_c''}{y''}}$$

e per l'intera sezione reagente

$$\Sigma \eta = \frac{\Sigma \sigma_c dA_c}{H \frac{\sigma_c''}{y''}} = \frac{\sigma'_m A_m}{H \frac{\sigma_c''}{y''}}$$

ovvero

$$\frac{\Sigma \eta}{y''} = \frac{\sigma'_m A_m}{H \sigma_c''}$$



La distanza  $y''$  tra l'asse di separazione e la parallela ad esso, tangente al contorno della sezione, può quindi venir determinata molto semplicemente nel modo indicato in figura 4.

Basta infatti costruire, coi dati del problema che sono a nostra disposizione, un triangolo di base  $\sigma'_m A_m$  e di altezza  $H\sigma_c''$  tale che:

la base abbia la direzione dell'asse di separazione,

il vertice opposto coincida col punto T in cui il poligono funicolare (di cui si è parlato poc'anzi) incontra la tangente al bordo compresso della sezione,

uno dei lati uscenti da tale vertice coincida col primo lato di detto poligono.

Il terzo lato del triangolo intersecherà ulteriormente il poligono in un punto S dell'asse di separazione.

Determinata così la posizione di quest'asse, siccome è nota l'ordinata estrema  $\sigma_c''$  del diagramma delle tensioni, questo potrà venire senz'altro tracciato.

Resteranno così immediatamente individuate (per differenza rispetto a  $\sigma'_m$ ) le tensioni  $\sigma_m^0$  che, al momento del getto, dovranno venire attribuite alle armature situate nella zona tesa della sezione.

Queste tensioni saranno sempre minori di quelle che si possono attribuire alle armature situate nella zona compressa; ciò che contrasta coll'uso ormai invalso di ripartire uniformemente sulla sezione metallica le tensioni e quindi anche le deformazioni impresse, uso a cui io stesso mi ero attenuto nei precedenti miei scritti sull'argomento.

La nuova ripartizione, non uniforme, delle deformazioni impresse, a cui ci ha condotti l'assunto di una integrale utilizzazione delle caratteristiche resistenti del materiale, implica, a pari margini di sicurezza, una ulteriore economia di acciaio.

Ferma restando la posizione della risultante delle tensioni al momento del getto, la maggiore tensione unitaria che spetta ora all'armatura della zona compressa (per rapporto a quella dell'armatura della zona tesa) ci condurrà infatti ad attribuire alla prima una sezione minore di quella che si sarebbe dovuto attribuirle nella ipotesi di una tensione preventiva uniformemente ripartita.

Ne segue che, pur volendo che la risultante delle tensioni al momento del getto cada nell'interno od al più sul contorno del nocciolo

centrale della sezione - come è necessario che avvenga perchè, in condizioni di normale esercizio, sia evitata ogni sollecitazione a trazione del calcestruzzo <sup>(1)</sup> - il baricentro della sezione metallica potrà anche trovarsi fuori del nocciolo.

\* \* \*

Nella tavola allegata questo nuovissimo procedimento di calcolo è stato applicato, a titolo di esempio, al caso della solita trave a sezione rettangolare di centimetri 15 di larghezza e 30 di altezza, che supporremo armata superiormente con quattro tondi da 4 mm. di diametro, ed inferiormente con quattro tondi da 9 mm. di diametro, simmetricamente disposti rispetto alla mediana verticale (asse delle  $y$ ).

Si ha così una sezione metallica

$$A_m = 3 \text{ cm.}^2$$

pari al 0,67 % della sezione della trave <sup>(2)</sup>.

Per

$$E_m = 2000 \text{ t./cm.}^2$$

ed

$$E_c = 250 \text{ t./cm.}^2$$

quindi

$$\frac{E_m}{E_c} = 8$$

si trova per l'area, ridotta al modulo del calcestruzzo, il valore

$$\alpha = 474 \text{ cm.}^2$$

<sup>(1)</sup> G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il proporzionamento dell'armatura)*. Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. IV, 1940.

<sup>(2)</sup> Il baricentro della sezione metallica cade nel punto B dell'asse verticale di simmetria, che dista cm. 7 dal bordo inferiore della sezione.

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle  $x$ ) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a cm. 14,6.

In conseguenza

$$J_x = 37118 \text{ cm.}^4$$

Supponiamo di impiegare nella costruzione delle armature un acciaio con limite elastico

$$\sigma'_m = 9 \text{ t./cm.}^2$$

e che il calcestruzzo presenti un carico di rottura alla compressione

$$\sigma_c'' = 0,32 \text{ t./cm.}^2$$

Assunta come distanza polare

$$H = 200 \text{ cm.}^2$$

si è trovato

$$y'' = 11,3 \text{ cm.}$$

Il diagramma delle deformazioni si presenta come in disegno con fondamentale di riferimento  $dd$ ; e può al solito venire interpretato come diagramma delle tensioni, così nel calcestruzzo come nelle armature, purchè si abbia l'avvertenza di servirsi all'uopo di nuove scale in relazione coi rispettivi valori del modulo.

Il momento flettente limite che queste tensioni equilibrano è

$$M_{\text{lim.}} = 531 \text{ t. cm.}$$

Le ordinate del diagramma relative alle armature, lette a partire dalla fondamentale  $aa$  ci daranno poi i valori delle deformazioni impresse (o rispettivamente delle tensioni che devono venire applicate al momento del getto).

Si trova così:

$$\begin{array}{l} \text{per l'armatura superiore} \quad \bar{\varepsilon}_z = - \frac{4,5}{1000} \\ \text{per l'armatura inferiore} \quad \bar{\varepsilon}_z = - \frac{2,7}{1000} \end{array}$$

cui corrispondono rispettivamente tensioni unitarie pari a 9000 ed a 5400 kg/cm<sup>2</sup> (1).

In base a questi valori si può senz'altro procedere al calcolo delle caratteristiche dello stato di coazione (2).

Si ha subito

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\epsilon}_z dA = - \frac{72}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\epsilon}_z y dA = - \frac{403}{1000}$$

e per conseguenza

$$\bar{\lambda} = - \frac{0,152}{1000}$$

$$\bar{\mu} = - \frac{0,01087}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$

In assenza di sollecitazioni esterne, lo stato di coazione viene pertanto caratterizzato dai seguenti valori delle tensioni unitarie:

<i>Tensioni unitarie <math>\sigma_z</math> in kg/cm<sup>2</sup></i>	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	+ 3	+ 8960
al bordo inferiore della sezione	- 78	+ 4880

Questo stato di coazione si può al solito rappresentare graficamente riferendo il nostro disegno ad una nuova fondamentale  $bb$  la cui posizione, per rapporto ad  $aa$ , sia definita precisamente dalle costanti  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ .

(1) La risultante delle tensioni al momento del getto è di 18 t. ed è applicata nel punto D dell'asse verticale di simmetria, che dista cm. 9 dal bordo inferiore della sezione.

(2) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il caso della presso flessione)*. Pontificia Academia Scientiarum « Acta », vol. IV, 1940.

Immaginiamo ora che, in condizioni di normale esercizio, si voglia poter contare su di un margine di sicurezza eguale a *tre*; e che perciò la trave possa venir sollecitata da un momento flettente massimo

$$\mathcal{M}_x = \frac{531}{3} = 177 \text{ t.cm.}$$

Questo darà origine ad una distribuzione di tensioni

$$\sigma_x = \frac{\mathcal{M}_x y}{\mathcal{J}_x}$$

le quali si sovrapporranno alle tensioni dovute allo stato di coazione. La distribuzione di tensioni risultante è la seguente:

<i>Tensioni unitarie <math>\sigma_x</math> in kg/cm<sup>2</sup></i>	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	— 70	+ 8540
al bordo inferiore della sezione	— 8	+ 5280

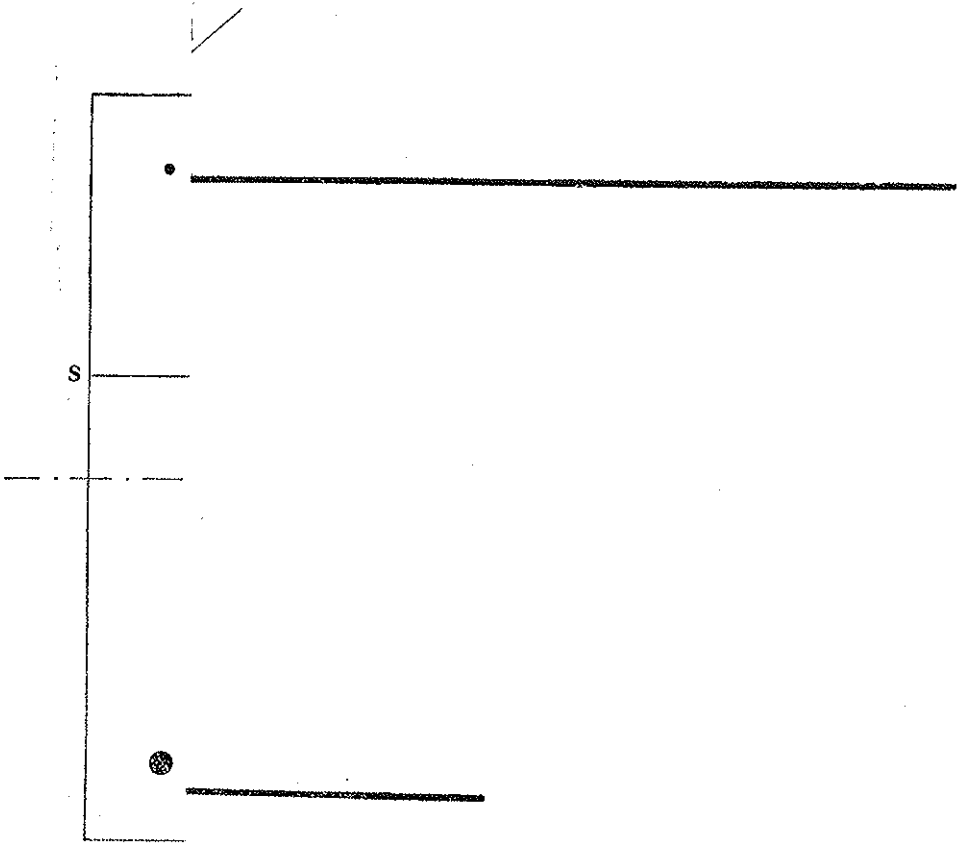
Graficamente il nuovo stato di equilibrio si può rappresentare immaginando il solito diagramma delle deformazioni riferito ad una nuova fondamentale *cc* ruotata rispetto a *bb* di

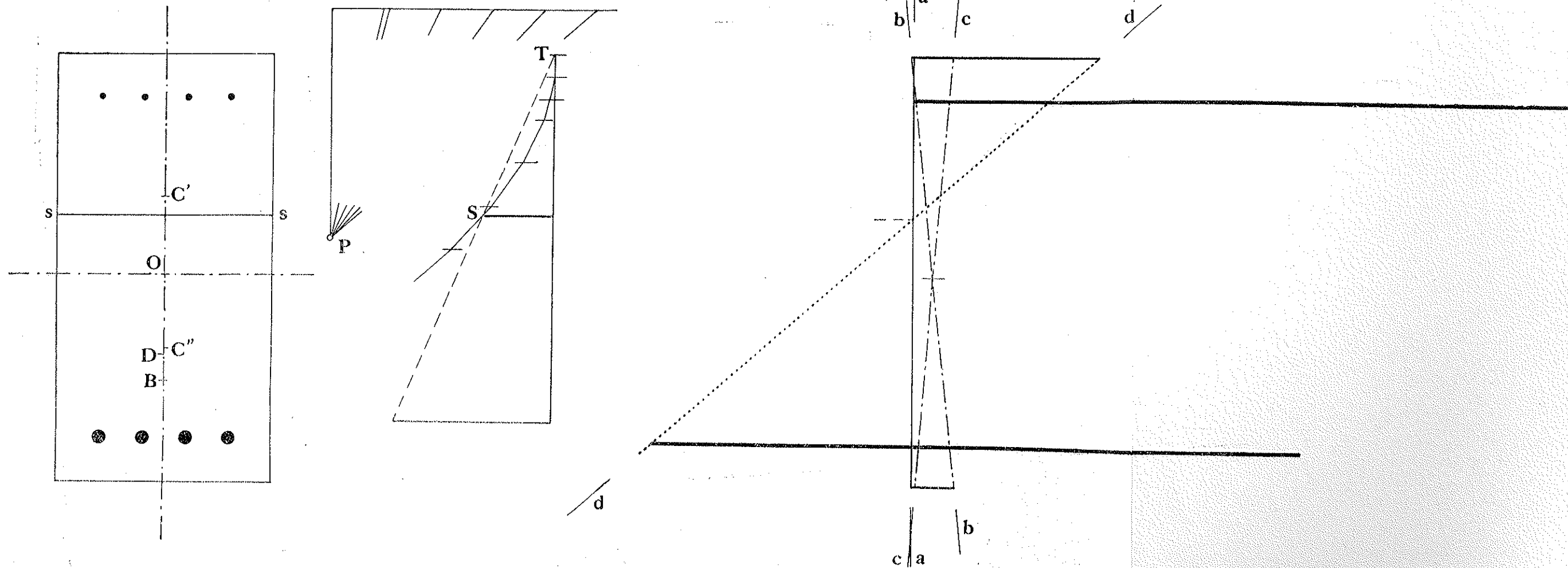
$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c \mathcal{J}_x} = + \frac{0,01907}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$

e la cui posizione, per rapporto alla fondamentale primitiva *aa*, sarà perciò definita dai valori

$$\lambda = \bar{\lambda} = - \frac{0,152}{1000}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{M}_x}{E_c \mathcal{J}_x} + \bar{\mu} = + \frac{0,00820}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$





Resterebbe solo più a vedersi quel che può accadere al crescere ulteriore della sollecitazione; e, in particolare, per qual valore del momento flettente si determinerà la parzializzazione della sezione. Ma questi son problemi la cui risoluzione non presenta ormai più alcuna difficoltà (1).

Quel che questo semplicissimo esempio vuole ben chiaramente e definitivamente dimostrare si è che, nei problemi di questo genere, il margine di sicurezza, non può *neppure approssimativamente*, venire assicurato imponendo i soliti valori massimi alle sollecitazioni cui vengono sottoposti, in servizio, i singoli materiali; ma deve essere determinato in base ad una indagine diretta delle condizioni di carico per cui i rispettivi limiti di elasticità o di resistenza potrebbero essere effettivamente raggiunti.

---

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata)*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1940; *Elasticità e resistenza di travi con armature preventivamente tese*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1940.



## SUL PRODOTTO DEI POLINOMI DI LAGUERRE (\*)

ERVIN FELDHEIM

SUMMARY. — Auctor determinat quasdam evolutiones producti  $L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x)$  in seriebus polynomiorum specialium LAGUERRE, et evolutiones inversas; ac praesertim evolutionem producti praecedentis in seriebus productuum  $L_{\Delta}^{(\gamma)}(x) L_{\Delta}^{(\delta)}(x)$  cum  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .

1. — Abbiamo dimostrato in lavori precedenti (1) le relazioni, fra loro inverse,

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x), \\ (-1)^n \binom{2n}{n} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \{L_k^{(\alpha)}(x)\}^2 \end{array} \right.$$

che possono essere condensate nell'unica formula

$$[2] \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) \quad (|t| < 1).$$

Si possono indicare ancora due altre relazioni della stessa natura, che si ricavano facilmente da [1]:

$$[3] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = e^t \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x),$$

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi, nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) E. FELDHEIM, *Relations entre les polynomes Jacobi, Laguerre et d'Hermite*, e *Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, II. (In corso di stampa).

e, per  $|t| < 1$ ,

$$[4] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x).$$

Tenendo conto della nota formula di HILLE-HARDY, la [4] conduce ad una nuova funzione generatrice per i polinomi di LAGUERRE:

$$[5] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = e^{-2tx} \left(\frac{tx^2}{1+t}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}(2x\sqrt{t(1+t)}) \left(t > -\frac{1}{2}\right)$$

D'altra parte W. N. BAILEY ha stabilito lo sviluppo <sup>(1)</sup>

$$[6] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1+\alpha+\beta}{2} + r, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r, -n+r; 1 \\ 1+\alpha+r, 1+\beta+r \end{matrix} \right) L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x)$$

ove  $(a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}$ ,  $(a)_0 = 1$ . Il caso particolare  $\alpha = \beta$  di [6], precedentemente trovato da W. T. HOWELL <sup>(2)</sup>, è:

$$[7] \quad \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{2n} n!} \sum_{r=0}^n \frac{(2n-2r)! (2r)!}{\Gamma(\alpha+r+1) [(n-r)!]^2 r!} L_{2r}^{(2\alpha)}(2x).$$

Da questa formula si ricava subito, per  $|t| < 1$ , la relazione analoga a [4]:

$$[8] \quad \sum_{r=0}^n \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = \sqrt{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2$$

e il valore comune delle due serie infinite è ancora dato dalla formula citata di HILLE-HARDY. Si ha dunque un'altra funzione generatrice dei polinomi di LAGUERRE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(x) = \frac{(tx^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{2tx}{1-t}} I_{\alpha} \left( \frac{x\sqrt{t}}{1-t} \right) \quad (|t| < 1).$$

<sup>(1)</sup> W. N. BAILEY, *On the product of two Laguerre polynomials*, « Quart. Journ. of Math. », vol. 10, (1939), pag. 60-66.

<sup>(2)</sup> W. T. HOWELL, *On some operational Representations of Products of Parabolic Cylinder Functions*. « Philos. Magazine », vol. 7 (24), (1937), pag. 1082-1093.

Ma il risultato [8] ha una più grande importanza in quanto fornisce l'inversione di [7], sotto la forma

$$[9] \quad L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = - \frac{n! \Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!} \sum_{r=0}^n \frac{2^{2r} (2n-2r)! r!}{(2n-2r-1)! \Gamma(r+\alpha+1) [(n-r)!]^2} \{L_r^{(\alpha)}(x)\}^2.$$

Osserviamo che il valore  $\beta = \alpha + 1$  conduce, secondo la [6], a una formula di coefficienti uguali a quelli di [7]; la sua inversa ha gli stessi coefficienti che [9]. Queste formule possono essere condensate, per  $|t| < 1$ , nella

$$[10] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha+1)}(2x) = \sqrt{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x)$$

Lo scopo del presente articolo è di generalizzare le relazioni [1] e [9], cioè di trovare l'inversione di [6]. Applicheremo poi i risultati ottenuti per stabilire altri interessanti sviluppi del prodotto di due polinomi di LAGUERRE.

2. - Il punto di partenza di queste ricerche è la relazione

$$[11] \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n L_{2n}^{(\alpha-n)}(x), \quad (|t| < 1)$$

equivalente agli sviluppi inversi:

$$[12] \quad L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n+\alpha}{n-s} L_{2s}^{(2\alpha)}(x),$$

$$[13] \quad L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = \sum_{s=0}^n 2^{2s} \binom{n+\alpha}{n-s} L_{2s}^{(\alpha-n)}(x).$$

Si può indicare anche una formula analoga a [11], equivalente a [12] e [13]:

$$[11'] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(2\alpha)}(2x) = e^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4t)^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x).$$

Scrivendo, nella [13],  $\alpha + \beta$  in luogo di  $2\alpha$ , e sostituendo l'espressione corrispondente di  $L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  nella formula [6], viene

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{1+\alpha+\beta}{2} + r, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r, -n+r; 1 \\ 1+\alpha+r, 1+\beta+r \end{matrix} ; 1 \right) \times \\ &\quad \times \sum_{s=0}^r 2^{2s} \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x). \end{aligned}$$

Sviluppando qui la funzione  ${}_3F_2$ , e cambiando l'ordine delle somme (il che è lecito), si ottiene

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^r \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2} + r\right)_k \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + r\right)_k \cdot 2^{2s} \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x)}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_r (n-r)! (1+\alpha+r)_k (1+\beta+r)_k k! \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} = \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\alpha)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{2^{2s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s} \left\{ \sum_{r=s}^n \sum_{k=0}^{n-r} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r \left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_{k+r} \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+1} (-1)^k}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_r (1+\alpha)_{k+r} (1+\beta)_{k+r} (n-k-r)! k! (r-s)!} \right\} L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x) \end{aligned}$$

Per calcolare la somma doppia di quest'ultima formula, poniamo  $k+r=p$ , e  $r=s+q$  con che si ha

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s} \sum_{p=s}^n \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_p \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_p (-1)^{p-s}}{(1+\alpha)_p (1+\beta)_p (p-s)! (n-p)!} \sum_{q=0}^{p-s} \frac{\left(\frac{1}{2}+s\right)_q (-p+r)_q}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}+s\right)_q q!}.$$

La seconda somma è nota per una formula di GAUSS (funzione ipergeometrica di variabile uguale a 1); il risultato cercato sarà:

$$\begin{aligned} [14] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{(2s)!}{(1+\alpha)_s (1+\beta)_s (n-s)! s!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \frac{\alpha+\beta}{2}, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix} ; 1 \right) L_{2s}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-s\right)}(x). \end{aligned}$$

Questa è la generalizzazione della prima formula [1]; e per  $\alpha = \beta$  la [14] si riduce proprio alla [1].

3. - Un'altra espressione del prodotto  $L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x)$ , sotto forma di sviluppo di serie di  $\{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2$ , sarà dedotta in modo analogo dagli sviluppi [6] e [9]. Da quest'ultima si ha:

$$L_{2r}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r}{\left(\frac{1}{2}\right)_r} \sum_{s=0}^r \frac{s! \left(-\frac{1}{2}\right)_{r-s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} \{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2.$$

Sostituendo nelle [6], e effettuando i calcoli analoghi a quelli fatti nel n. 2, si avrà la relazione seguente:

$$[15] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n (n-s)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix} \right) \{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2.$$

Per  $\alpha = \beta$ ,  ${}_3F_2$  non differisce da 0 che per  $s = n$  e [15] si riduce ad una identità.

4. - Secondo la formula [10], si ha ancora

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s! \left(-\frac{1}{2}\right)_{n-s}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} L_s^{(\frac{\alpha+\beta+1}{2})}(x) L_s^{(\frac{\alpha+\beta-1}{2})}(x),$$

e questa relazione può essere scritta anche come segue

$$L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) = \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} \times \\ \times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta-1}{2} + s, -n+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2} + s, 1 + \frac{\alpha+\beta}{2} + s \end{matrix} \right) L_s^{(\frac{\alpha+\beta+1}{2})}(x) L_s^{(\frac{\alpha+\beta-1}{2})}(x)$$

Se ne conclude che la formula generale dovrà aver l'espressione:

$$\begin{aligned}
 [16] \quad L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(2x) &= \frac{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (n-s)!} \times \\
 &\quad \times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x),
 \end{aligned}$$

che si verifica con la sostituzione nella [6]. I calcoli danno luogo ad una identità. La formula [16] è l'inversione cercata dello sviluppo [6] del BAILEY. Se  $\alpha = \beta$ , o  $\alpha + 1 = \beta$ , si ritrovano i casi particolari sopra menzionati.

5. - I polinomi di HERMITE  $H_n(x)$  sono legati, come è noto<sup>(1)</sup>, a quelli di LAGUERRE per mezzo della formula limite

$$H_n(x) = 2^n n! \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-n} L_n \left( \frac{\omega^2}{2} \right)^{+k} \left( \frac{\omega^2}{2} - \omega x \right) \quad (k \text{ arbitrario})$$

Applicando questa relazione alla formula [8], se ne ricava

$$[17] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} H_n^2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\frac{2tx^2}{1+t}} \quad (|t| < 1)$$

Si può verificare che [17] si deduce anche dalla nota formula di MEHLER<sup>(2)</sup>. Da [17], si avrà per esempio

$$[18] \quad H_{2n}(x\sqrt{2}) = -n! \sum_{k=0}^n \frac{2^k (2n-2k)!}{(2n-2k-1) k! [(n-k)!]^2} H_k^2(x).$$

(1) L. TOSCANO, *Formule limiti sui polinomi di Laguerre*. « Boll. Un. Mat. Ital. » (II), vol. 1, (1939), pag. 337-339 (con altre notazioni).

(2) « Journal de Crelle », vol. 66, (1866), pag. 161.

Questa relazione, la sua inversa (che si deduce anche da [17]), come anche altri risultati più generali, sono stati stabiliti con altro metodo, in uno dei nostri lavori precedenti (<sup>1</sup>).

Tenendo conto dell'altro legame ben noto fra polinomi di LAGUERRE e di HERMITE, attribuito al SZEGÖ, si avrà, ponendo nel [10],  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = +\frac{1}{2}$ ,

$$[19] \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) H_{2n+1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_{2n}(2x^2) \quad (|t| < 1)$$

donde

$$[20] \quad 2x L_{2n}(2x^2) = \sum_{s=0}^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_{n-s}}{(2s)! (n-s)! 2^{2s}} H_{2s}(x) H_{2s+1}(x),$$

e la sua inversa che si deduce da [19] sviluppando il secondo membro in serie di potenze di  $t$ .

Per gli stessi valori di  $\alpha$  e  $\beta$  (cioè  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = +\frac{1}{2}$ ), la formula [15] dà lo sviluppo del prodotto  $H_{2n}(x) H_{2n+1}(x)$  in serie di  $\{L_s(x^2)\}^2$  e si avrà anche lo sviluppo inverso.

Osserviamo che l'applicazione della formula limite di TOSCANO alle relazioni [1] dà luogo a noti risultati sui polinomi di HERMITE; gli sviluppi generali di quest'ultimo tipo sono stati dedotti con questo metodo dai risultati stabiliti nel nostro secondo lavoro, citato a pag. 359, nota (<sup>1</sup>).

6. - Continuiamo adesso con l'inversione di [15]. Scrivendo [7] sotto la forma

$$\{L_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x)\}^2 = \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}}{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)_k (n-k)!} L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x),$$

(<sup>1</sup>) E. FELDHEIM, *Développements en série de polynome d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel*, I-III. « Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. », vol. 43, (1940), pag. 224-248, 379-386.

e sostituendo per  $L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  l'espressione ricavata da [16], mediante calcoli analoghi a quelli precedenti, si ottiene il risultato

$$[19] \quad \{L_n^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2 = \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n\right]^2}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left[\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s\right]^2 (n-s)!} \times \\ \times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$$

Per  $\alpha > \beta$  la [19] si riduce ad una identità.

7. - Le formule [15] e [19] permettono di stabilire una relazione più generale che contiene anche le due relazioni particolari. Scrivendo la [19] con i parametri  $\gamma$  e  $\delta$  tali che  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ , e sostituendo l'espressione ottenuta di  $\{L_s^{(\frac{\alpha+\beta}{2})}(x)\}^2$  nella [15], dopo alcune trasformazioni, viene

$$L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \sum_{s=0}^k \sum_{q=0}^{k-s} \frac{(-1)^{p+q} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+p} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{k+p} s! (1+\gamma)_{s+q} (1+\delta)_{s+q} L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\alpha)_{k+p} (1+\beta)_{k+p} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+q} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+q} (1+\gamma)_s (1+\delta)_s p! q! (n-k-p)! (k-p)!}$$

Poniamo qui  $k+p=i$ ,  $s+q=j$ :

$$L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \sum_{i=s}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^{i-k+j-s} \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_i \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_i (1+\gamma)_j (1+\delta)_j s! L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\alpha)_i (1+\beta)_i \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_j \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_j (1+\gamma)_s (1+\delta)_s (n-i)! (i-k)! (k-j)! (j-k)!}$$

Effettuando la somma rispetto a  $k$ , si vede che la somma precedente non sarà differente da 0 che per  $k=j=i$ . Si avrà dunque il risultato notevole:

$$[20] \quad L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \\ = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{(1+\alpha)_s (1+\beta)_s (n-s)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1+\gamma+s, 1+\delta+s, -n+s; 1 \\ 1+\alpha+s, 1+\beta+s \end{matrix} \right) L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)$$

valido per  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ .



Come una conseguenza di [20], sia menzionata l'identità:

$$(1+\gamma)_n(1+\delta)_n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s s! L_s^{(\gamma)}(x) L_s^{(\delta)}(x)}{(1+\gamma)_s(1+\delta)_s(n-s)!} \equiv (1+\alpha)_n(1+\beta)_n \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s s! L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)}{(1+\alpha)_s(1+\beta)_s(n-s)!}$$

valida per  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$ , e  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

8. - Resta ancora da generalizzare la seconda delle formule [1], cioè da stabilire lo sviluppo di  $L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x)$  in serie di  $L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$ , nel caso  $\alpha \neq \beta$ . Dalle [1] e [19] si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^n \binom{2n}{n} L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}{n-r} \frac{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r}{r!} \times \\ &\times \sum_{s=0}^r \frac{s!}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s (r-s)!} {}_2F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -r+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x) = \\ &= \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n \sum_{r=0}^r \sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{r-s} \frac{(-1)^r \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_r s! (1+\alpha+s)_k (1+\beta+s)_k (-r+s)_k L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s\right)_k \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s\right)_k (n-r)! r! (r-s)! k!} = \\ &= \frac{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n}{n!} \sum_{s=0}^n \sum_{k=0}^{n-s} \frac{(-1)^s s! (1+\alpha+s)_k (1+\beta+s)_k \left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{n-s-k}}{(n-s-k)! \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_{s+k} k!} L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \end{aligned}$$

Finalmente, per  $\alpha \neq \beta$ ,

$$[21] \left\{ \begin{aligned} L_{2n}^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)}(x) &= \frac{(-1)^n \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n \left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_n n!}{(2n)!} \sum_{s=0}^n \frac{s!}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)_s \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}-n\right)_s (n-s)!} \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s; 1 \\ 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}-n+s \end{matrix}\right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x) \end{aligned} \right.$$

9. - Tutti gli sviluppi stabiliti sono invarianti per la trasformazione di HANKEL, cioè se si moltiplicano i due membri per  $J_{\alpha+\beta}(2\sqrt{xy}) e^{-\alpha} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} dx$ , e se si integra rispetto ad  $x$  da 0 a  $\infty$ , questi sviluppi saranno ritrovati, per mezzo di noti risultati sulla trasformata di HANKEL di prodotti di polinomi di LAGUERRE<sup>(1)</sup>. Osserviamo qui che questa proprietà mostra già la possibilità di tali sviluppi come abbiamo indicato nel lavoro citato a pag. 365, nota 1, per le formule [1], [14], [16] e [21], senza determinare i coefficienti.

D'altra parte abbiamo dimostrato con lo stesso metodo l'impossibilità dello sviluppo di  $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$  in serie dei prodotti  $L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x)$ . Si verifica, al contrario, che la funzione  $\frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x)$  può essere sviluppata, e i coefficienti possono essere calcolati facilmente, mediante i risultati precedenti.

Utilizzando la formula di moltiplicazione ben nota<sup>(2)</sup> dei polinomi di LAGUERRE, noi avremo subito

$$[22] \quad \frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x) = \frac{2}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+\alpha+\beta}{2n-2k} L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x),$$

e occorre sostituire qui a  $L_{2k}^{(\alpha+\beta)}(2x)$  l'espressione [16]:

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)} = \frac{2(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(2n-2k)! (2k)!} \sum_{s=0}^k \frac{s! 2^{2s}}{(1+\alpha+\beta)_{2s} (k-s)!} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -k+s; 1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2} +s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2} +s \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x).$$

<sup>(1)</sup> Questi risultati sono riassunti, per esempio nel § 1, del lavoro citato a pag. 365, nota 1.

<sup>(2)</sup> Vedi per esempio il § 1, del lavoro citato a pag. 365, nota 1.

Si può invertire l'ordine delle sommatorie, in modo da effettuare la prima sommatoria rispetto a  $k$ . Viene

$$[23] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + L_{2n}^{(\alpha+\beta)}(x) &= \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{(2n)!} \sum_{s=0}^n \frac{s!(2n-s-1)!}{(1+\alpha+\beta)_{2s}(2n-2s)!} \times \\ &\times {}_4F_3 \left( \begin{matrix} 1+\alpha+s, 1+\beta+s, -n+s, \frac{1}{2}-n+s; -1 \\ \frac{1+\alpha+\beta}{2}+s, 1+\frac{\alpha+\beta}{2}+s, -2n+s+1 \end{matrix} \right) L_s^{(\alpha)}(x) L_s^{(\beta)}(x). \end{aligned} \right.$$

Per  $\alpha=\beta$ , la funzione  ${}_4F_3$  si riduce a una  ${}_3F_2$ .

Il numero di tali formule può essere evidentemente esteso in diverse maniere. Noi ci limitiamo qui a quelle date nei passaggi precedenti, indicando per finire il modo della loro generalizzazione.

10. - Riprendiamo il risultato (1)

$$[24] \quad L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{m+n} c_s L_s^{(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{m+n} b_s \frac{x^s}{s!};$$

con

$$c_s = (-1)^{m+n+s} \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \binom{m+\alpha}{n-s+r} \binom{n+\beta}{m-r},$$

e

$$b_s(m, n; \alpha, \beta) = (-1)^{m+n} c_s(m, n; \beta-m+n, \alpha+m-n).$$

Da [24] si ricava, in primo luogo, l'inversione di [23]. Tenendo poi conto della formula

$$L_s^{(\alpha+\beta)}(x) = \frac{1}{2^s} \sum_{k=0}^s \binom{s+\alpha+\beta}{s-k} L_k^{\alpha+\beta}(2x),$$

(1) E. FELDHEIM, *Expansion and integral-Transforms for Products of Laguerre and Hermite Polynomials*. « Quarterly Journ. of Math. », vol. 11, (1940), pag. 18-29.

e sostituendo nella [24], si avrà

$$L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{2^s} \left\{ \sum_{r=0}^{m+n-k} \frac{c_{k+r}(1+\alpha+\beta+k)_r}{2^r r!} \right\} L_k^{(\alpha+\beta)}(2x).$$

Si possono stabilire in tal modo delle generalizzazioni per le formule [1]; e relazioni di questa natura sono state già trovate con altro metodo nel nostro lavoro citato, a pag. 359, nota 1.

## SU ALCUNE FORMULE DI VALUTAZIONE NEL CALCOLO OPERATORIO FUNZIONALE (\*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARIVM — Auctor disserit de quibusdam formulis quibus valutatio operatorum typi  $\frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^N}$  vel similium fieri potest, ostenditque earum applicationem ad simplicem quemdam casum.

1. — È notoriamente di grande utilità, nella trasformazione o semplificazione delle espressioni simboliche del calcolo operatorio funzionale, in vista della loro valutazione, il così detto « teorema di trasposizione », espresso dalla relazione:

$$[1] \quad f(\Delta + a) V(t) = e^{-at} f(\Delta) \cdot e^{at} V(t)$$

Supponiamo che occorra di valutare un operatore del tipo  $\frac{f(\Delta)}{\Delta + a}$ , nel caso che sia nota la funzione generatrice  $G(t)$  di  $f(\Delta)$ . Può scriversi allora, per la [1]:

$$\frac{f(\Delta)}{\Delta + a} Fu(t) = \frac{f(\Delta + a - a)}{\Delta + a} Fu(t) = e^{-at} \frac{f(\Delta - a)}{\Delta} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t [f(\Delta - a) Fu(t)] dt$$

e tenendo conto di nuovo della [1]:

$$[2] \quad \frac{f(\Delta)}{\Delta + a} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t e^{at} G(t) dt$$

formula che permette di ricavare subito la valutazione cercata.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, il 1° settembre 1942.

Applicando reiteratamente la [2], possono scriversi le seguenti altre relazioni, pure suscettibili di utile impiego nei casi pratici:

$$[3] \quad \frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^2} \mathbb{F}u(t) = e^{-at} \int_0^t dx \int_0^x e^{ax} \cdot G(y) dy$$

$$[4] \quad \frac{f(\Delta)}{\Delta^2 - a^2} \mathbb{F}u(t) = e^{-at} \int_0^t e^{2ax} dx \int_0^x e^{-ax} \cdot G(y) dy$$

$$[5] \quad \frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^N} \mathbb{F}u(t) = e^{-at} \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-1}} e^{ax_N} \cdot G(x_N) dx_N$$

(N = intero > 2)

ed altre analoghe se ne possono pure agevolmente ottenere.

2. - Per mostrare un'applicazione facile e rapidamente verificabile, consideriamo il seguente caso pratico. Sia un circuito contenente in serie una resistenza R ed una induttanza L, alimentato a partire dall'istante  $t=0$  da una f.e.m.  $V(t)$  di andamento a «denti di sega», come nell'unita figura, di periodo T e di valor massimo eguale a 1 volt. Si tratta di trovare l'andamento della corrente  $I(t)$  nel fenomeno di inserzione, per un numero qualunque di periodi.

Si ha:

$$I(t) = \frac{1}{L} \frac{1}{\Delta + \rho} V(t)$$

essendo  $\rho = \frac{R}{L}$ .

L'operatore  $\varphi(\Delta)$  la cui funzione generatrice integrale o caratteristica ha lo stesso andamento, sopra accennato, della  $V(t)$  è noto, e vale

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{T\Delta} - \frac{1}{2} \text{Coth} \frac{T\Delta}{2}$$

Si può dunque porre, essendo  $V(t) = \varphi(\Delta) 1(t)$ :

$$I(t) = \frac{1}{L(\Delta + \rho)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{T\Delta} - \frac{1}{2} \text{Coth} \frac{T\Delta}{2} \right] 1(t)$$

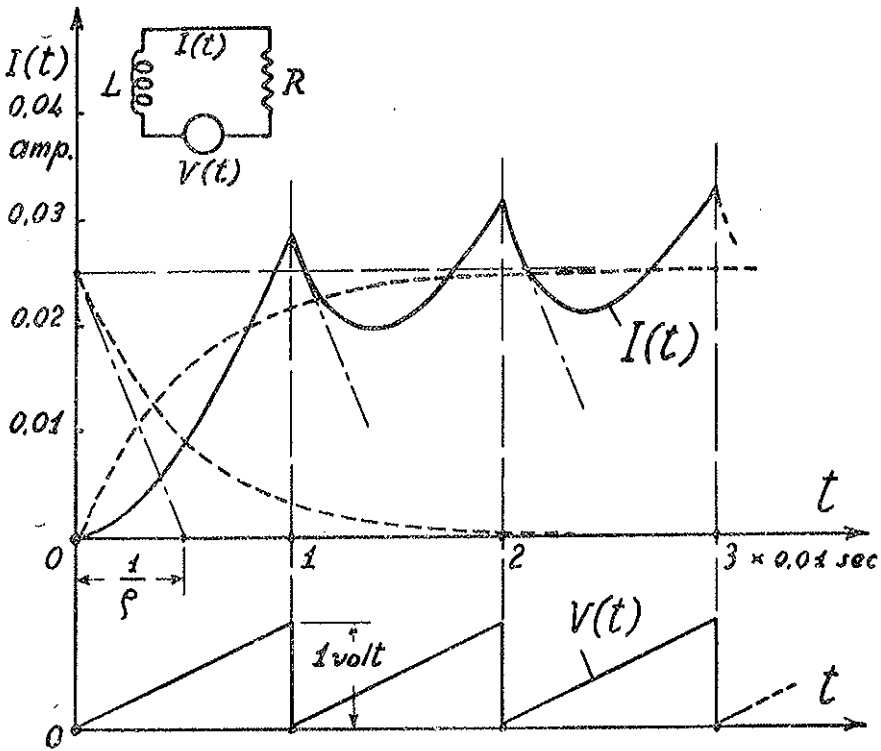


FIG. 1.

cioè:

$$[6] \quad I(t) = \left[ \frac{1}{2L(\Delta + \rho)} + \frac{1}{TL\Delta(\Delta + \rho)} - \frac{\text{Coth} \frac{T\Delta}{2}}{2L(\Delta + \rho)} \right] 1(t)$$

Dei tre operatori che compaiono nella parentesi quadra, i primi due sono di immediata valutazione, essendo:

$$[7] \quad \frac{1}{2L(\Delta + \rho)} 1(t) = \frac{1}{2L\rho} (1 - e^{-\rho t})$$

$$[8] \quad \frac{1}{TL\Delta(\Delta + \rho)} 1(t) = \frac{1}{TL\rho} \left( t - \frac{1}{\rho} + \frac{e^{-\rho t}}{\rho} \right)$$

Per valutare il terzo può appunto applicarsi la regola [2], partendo dalla valutazione, ben nota, dell'operatore  $\text{Coth} \frac{T\Delta}{2}$ :

$$\text{Coth} \frac{T\Delta}{2} Fu(t) = G(t) = Fu(t) + 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} Fu(t - rT)$$

Applicando l'anzidetta regola, e poi integrando ancora, si ottiene:

$$[9] \quad \frac{\text{Coth} \frac{T\Delta}{2}}{\Delta + \rho} 1(t) = \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho t}) + \frac{2}{\rho} \sum_{r=1}^{r=\infty} [1 - e^{-\rho(t-rT)}] \cdot 1(t - rT)$$

Dalla [6], allora, mediante le [7], [8], [9], si ricava l'espressione cercata di  $I(t)$ :

$$I(t) = \frac{1}{TL\rho} \left( t - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho t} \right) - \frac{1}{\rho L} \sum_{r=1}^{r=\infty} [1 - e^{-\rho(t-rT)}] \cdot 1(t - rT)$$

cioè un andamento come indicato nella figura, per il seguente caso particolare:  $R = 20$  ohm;  $L = 0,1$  henry;  $\rho = 200$   $1/\text{sec}$ ;  $T = 0,01$  sec;  $V_{\text{max}} = 1$  volt. Si noti, a modo di verifica, che la curva ondulata tende ad oscillare attorno al valor medio della corrente, che, come è immediatamente ricavabile, dev'essere eguale a  $0,025$  amp.



## SULLE FUNZIONI DELLE MATRICI (\*)

XENIA COLOMBO

SUMMARY. — Computantur formulae explicitae functionum matricis tertii ordinis, cum saecularis aequationis radices cognoscuntur.

Exponitur praeterea ratio, qua computari possunt potentiae alicuius matricis, sine praevia solutione saecularis aequationis.

Qua ratione, quod ad matrices secundi ordinis, inveniri possunt formulae aliter notae; quod vero ad matrices tertii ordinis attinet, formulae quaedam inveniuntur antea forsitan ignotae.

1. INTRODUZIONE. — Sia  $\Phi$  una matrice di ordine  $h$ ,  $a_{rs}$  un suo elemento generico,  $f(z)$  una funzione analitica a un sol valore della variabile  $z$ . La definizione generale del simbolo  $f(\Phi)$  cioè di funzione di una matrice è stata posta nel 1928 da S. E. G. GIORGI<sup>(1)</sup> ed è, in sostanza, la seguente.

Si suppongono le radici  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$  dell'equazione secolare, della  $\Phi$ , tutte distinte e non nulle. Potremo scrivere, come è noto:

$$\Phi = \Psi \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \rho_{h-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \rho_h \end{vmatrix} \Psi^{-1}$$

essendo  $\Psi$  una opportuna matrice,  $\Psi^{-1}$  la sua inversa.

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VII, 1928<sub>1</sub>, pagg. 178-184; *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici*, idem, serie VI, vol. VIII, 1928<sub>2</sub>, pagg. 1-8.

Il GIORGI pone come definizione di  $f(\Phi)$ :

$$f(\Phi) = \Psi \begin{vmatrix} f(\rho_1) & \dots & 0 \\ 0 & f(\rho_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\rho_{h-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f(\rho_h) \end{vmatrix} \Psi^{-1}$$

Tale definizione è stata estesa, nelle note citate, al caso in cui le  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$  abbiano valori nulli o uguali tra loro.

In seguito ai lavori del GIORGI sono apparse numerose ricerche sulle funzioni delle matrici. In una nota di grande interesse il Professor FANTAPPIÈ<sup>(1)</sup>, facendo uso della sua teoria dei funzionali analitici, è giunto alla seguente formula per il termine generico  $f_{rs}$ , di  $f(\Phi)$

$$f_{rs} = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{sr}(z)}{D(z)} f(z) dz$$

dove

$$D(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} - z \end{vmatrix}$$

e  $D_{sr}(z)$  è il complemento algebrico del determinante  $D(z)$  rispetto all'elemento della riga  $s$ -esima e della colonna  $r$ -esima,  $c$  una curva (di cui supponiamo l'esistenza) che contiene nel suo interno le radici di  $D(z)$  e all'esterno i punti singolari di  $f(z)$ .

Le formule del FANTAPPIÈ possono compendiarsi nella seguente formula del CARTAN<sup>(2)</sup>:

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - \Phi} dz$$

(<sup>1</sup>) L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « Comptes Rendu de l'Academie des Sciences », t. 186, I semestre, 1928, pagg. 619-621.

(<sup>2</sup>) Cfr. la pag. 7 della seconda nota del GIORGI già citata.

Le formule del FANTAPPIÈ e del CARTAN, equivalenti, salvo casi eccezionali, a quelle del GIORGI, possono in molti casi agevolare il calcolo di  $f(\Phi)$ .

Ricordiamo poi un'altra notevole memoria del CIPOLLA<sup>(1)</sup> che ha studiato a fondo anche il caso, escluso in questa nota, di  $f(z)$  a più valori.

In altri interessanti lavori si ricerca la forma esplicita della matrice  $f(\Phi)$ . Il problema è stato sufficientemente risolto per le matrici del secondo ordine in seguito a lavori di M. BOTTASSO<sup>(2)</sup> E. PORCU-TORRINI<sup>(3)</sup>, S. MARTIS in BIDDAU<sup>(4)</sup>.

In questa nota intendiamo svolgere analoghi studi per le matrici del terzo ordine la cui importanza, geometrica e meccanica è ben nota.

Partendo dalle formule del FANTAPPIÈ noi calcoleremo la  $f(\Phi)$  comunque siano le radici di  $D(z) = 0$ . Si otterranno però formule, in cui appaiono le radici dell'equazione secolare di  $\Phi$ .

Ora il GIORGI ha proposto, almeno per  $\Phi^n$ , di stabilire espressioni che non richiedano la soluzione dell'equazione  $D(z) = 0$ .

Abbiamo perciò sviluppato un metodo atto a questo scopo. Esso consiste sostanzialmente nell'osservare che  $f_{rs}$  vale il residuo rispetto al punto all'infinito di  $z^n \frac{D_{sr}(z)}{D(z)}$ , e nel calcolare tale residuo in un modo opportuno che esporremo a suo luogo. Otterremo così, per le matrici del secondo ordine, le formule di E. PORCU-TORRINI, che però verranno da noi dedotte per tutt'altra via; per quelle del terzo ordine formule che riteniamo nuove. Il nostro metodo potrebbe estendersi a matrici di qualunque ordine, ma i calcoli sarebbero assai complicati.

(1) M. CIPOLLA, *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. LVI, 1932, pp. 144-154.

(2) M. BOTTASSO, *Omografie vettoriali del piano*. « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. XXXV, 1913, pagg. 1-46.

(3) E. PORCU-TORRINI, *Sulle potenze delle matrici del secondo ordine*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze — I Nuovi Lincei », vol. LXXX, pagg. 150-153, 1927; *Calcolo delle potenze delle matrici del secondo ordine*, idem, pagg. 277-281; *Terzo procedimento per il calcolo delle matrici del secondo ordine*, idem, pagg. 348-353; *Calcolo delle funzioni qualunque delle matrici del secondo ordine*, « Rend. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VII, 1928<sub>1</sub>, pagg. 206-208.

(4) SILVIA MARTIS in BIDDAU, *Ricerche di una espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine*, « Rend. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VIII, 1928<sub>2</sub>, pagg. 130-133.

2. CALCOLO DI  $f(\Phi)$  PER MATRICI DEL TERZO ORDINE MEDIANTE LE RADICI DELL'EQUAZIONE SECOLARE. — Sia:

$$[1] \quad \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

una matrice del terzo ordine.

Poniamo:

$$[2] \quad D(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - z \end{vmatrix}$$

Indichiamo con  $f_{rs}$  il termine generico di  $f(\Phi)$ , avremo:

$$[3] \quad f_{rs} = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{D(z)} D_{rs}(z) dz$$

dove i significati di  $D_{rs}$  e  $c$  sono stati indicati nell'introduzione.

Se ora indichiamo con  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  le radici di  $z$ , sarà

$$D(z) = -(z - \rho_1)(z - \rho_2)(z - \rho_3)$$

Se  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  sono distinte, il calcolo di  $f_{rs}$  applicando una formula già data dai FANTAPPÌE<sup>(1)</sup> è immediato. Infatti, poichè è:

$$D'(\rho_1) = -(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3); \quad D'(\rho_2) = -(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3); \quad D'(\rho_3) = -(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$$

(1) Si allude alla formula

$$f_{rs} = -\sum_i^n \frac{D_{rs}(\rho_i) f(\rho_i)}{D'(\rho_i)}$$

dove  $\rho_i$  sono le radici di  $D(z)$ .

Si ha:

$$f_{rs} = \frac{D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} f(\rho_1) + \frac{D_{s,r}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)} f(\rho_2) + \frac{D_{s,r}(\rho_3)}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)} f(\rho_3)$$

Passiamo ora al caso di due radici coincidenti, sia ad esempio  $\rho_1 = \rho_3$ . Si deve allora valutare l'integrale:

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - \rho_1)^2 (z - \rho_2)} D_{sr}(z) dz$$

che si scinde nei due residui  $R_1, R_2$  della funzione integranda intorno a  $\rho_2$  e intorno a  $\rho_1$ . Ora è facile vedere che

$$R_1 = \frac{f(\rho_2) D_{sr}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}$$

Si ha poi per le formule note<sup>(1)</sup>

$$R_2 = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]'}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{f(\rho_1) D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)^2}$$

Quindi

$$f_{rs} = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]'}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{f(\rho_2) D_{sr}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)^2} - \frac{f(\rho_1) D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}$$

Se le tre radici sono coincidenti si ha:

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) D_{sr}(z)}{(z - \rho_1)^3} dz$$

(1) Cfr. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*. Bologna, Zanichelli, 1923, cap. VII, § 104, formula (6). Per applicare questa formula al nostro caso occorre porre:

$$f(z) = \frac{1}{(z - \rho_1)^3} \quad g(z) = \frac{f(z) D_{rs}(z)}{z - \rho_2}$$

e per la formula già citata,

$$f_{rs} = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]''}{2}$$

3. CALCOLO DI  $\Phi$  INDIPENDENTEMENTE DALLA RISOLUZIONE DELLA EQUAZIONE SECOLARE, CASO DELLE MATRICI DEL SECONDO ORDINE. — Consideriamo una matrice del secondo ordine

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Applicando le formule del FANTAPPIÈ, si ottiene subito

$$\Phi^n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(z - a_{22}) z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{a_{12} z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{a_{21} z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(z - a_{11}) z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz \end{vmatrix}$$

dove:

$$z^2 - \alpha z - \beta = D(z) = (a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12} a_{21}$$

Ossia:

$$\alpha = a_{11} + a_{22} \quad \beta = a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}$$

Orbene vogliamo valutare gli integrali che compaiono nella espressione di  $\Phi^n$  evitando il metodo dei residui e perciò la soluzione dell'equazione secolare.

Cominciamo a valutare  $f_{11}$ , chè per gli altri integrali si può usare un procedimento analogo.

Poichè (c) deve soddisfare soltanto alla proprietà di contenere nel suo interno le radici di  $D(z) = 0$ , potremo prendere per (c) un cerchio, di raggio  $r$  arbitrario purchè maggiore della più grande

radice di  $D(z)$ . Noi sceglieremo inoltre  $\rho$  in modo che su  $c$  sia  $\left| \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} \right| \leq \kappa < 1$ . Ciò permette di scrivere:

$$\frac{1}{z^2 - \alpha z - \beta} = \frac{1}{z^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{z} - \frac{\beta}{z^2} \right)} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^2} \left( \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} \right)^m$$

e la serie al secondo membro è assolutamente e uniformemente convergente su tutta  $(c)$ .

Si ha allora:

$$f_{11} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left( \alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m dz - a_{22} \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-2}}{z^m} \left( \alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m dz$$

Osserviamo ora che gli integrandi dei vari termini della sommatoria sono somme di potenze di  $z$ .

Allora ricordando che se  $k$  è intero:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c z^k dz \text{ vale } 1, \text{ per } k = -1; 0, \text{ per } k \neq -1$$

potremo limitarci a considerare i termini degli integrandi che contengono  $z$  alla potenza  $-1$ .

Ciò posto, consideriamo la prima sommatoria della  $f_{11}$ . Un termine generico dell'integrando corrispondente all'indice  $m$  vale, sviluppando il binomio

$$\binom{m}{\tau} \alpha^{\tau} \beta^{m-\tau} z^{n-2m+\tau-1}$$

Ora affinché questo termine sia di grado  $-1$  deve essere

$$[10] \quad \tau = 2m - n$$

D'altra parte deve essere

$$0 \leq \tau \leq m$$

Quindi sarà:

$$m \geq \frac{n}{2} \quad m \leq n$$

Concludiamo intanto che è possibile limitare la nostra sommatoria ai valori di  $m$  compresi fra il minimo intero uguale o superiore a  $\frac{n}{2}$  (numero che indicheremo con  $N_1$ ) ed  $n$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right)^m = \sum_{N_1}^n \binom{m}{2m-n} \alpha^{2m-n} \beta^{n-m}$$

o anche prendendo come indice per la sommatoria  $p = n - m$  e ricordando che

$$\binom{m}{2m-n} = \binom{m}{n-m} = \binom{n-p}{p}$$

si ha:

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right)^m = \sum_0^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p$$

dove  $N'$  è il massimo intero inferiore o uguale a  $\frac{n}{2}$ .

Per ottenere l'altra sommatoria che compare in  $f_{11}$  basta porre in luogo di  $n$ ,  $n-1$ , e perciò in luogo di  $N'$ ,  $N''$  massimo numero intero, inferiore o uguale a  $\frac{n-1}{2}$ . Si ha così:

$$\left\{ \begin{aligned} f_{11} &= \sum_0^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p - a_{22} \sum_0^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{12} &= a_{12} \sum_0^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{21} &= a_{21} \sum_0^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{22} &= \sum_0^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p - a_{11} \sum_0^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \end{aligned} \right.$$

Formule, in sostanza, identiche a quelle trovate da E. PORCU-TORTRINI nella prima delle note citate.



4. CALCOLO DI  $\Phi^n$  INDIPENDENTEMENTE DALLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CUBICA, CASO DELLE MATRICI DEL TERZO ORDINE. — Dalla nostra definizione abbiamo:

$$\Phi^n = - \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{11}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{21}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{31}(z) z^n}{D(z)} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{12}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{22}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{32}(z) z^n}{D(z)} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{13}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{23}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{33}(z) z^n}{D(z)} dz \end{array} \right\|$$

Come sappiamo  $-D(z)$  è un polinomio di terzo grado che ci conviene mettere nella forma:

$$-D(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono termini di facile calcolo mediante le  $a_{rs}$ . In particolare  $\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ , verrà detto invariante primo di  $\Phi$ . Orbene noi possiamo sempre per il calcolo di  $\Phi^n$  ridurci al caso in cui sia  $\alpha = 0$ .

Ciò perchè una matrice ad invariante primo non nullo può mettersi sempre come somma di potenza di matrici con invariante primo nullo e della matrice unità. Allora, sempre in base alle notazioni del GIORGI, che identifica la matrice unitaria con l'unità ordinaria:

$$\Phi = \left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{\alpha}{3}$$

Ora l'invariante primo di  $\left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right)$  è nullo, come risulta subito da un facile calcolo. Si ha poi

$$\begin{aligned} \Phi^n = \left[ \left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{\alpha}{3} \right]^n &= \binom{n}{1} \frac{\alpha}{3} \left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^{n-1} + \binom{n}{2} \left( \frac{\alpha}{3} \right)^2 \left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^{n-2} + \\ &+ \dots + \binom{n}{r} \left( \frac{\alpha}{3} \right)^{n-r} \left( \Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^r + \dots + \left( \frac{\alpha}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Quindi senza togliere nulla alla generalità della questione potremo supporre  $\alpha = 0$ .

Per calcolare  $\Phi^n$  dovremo perciò calcolare i seguenti integrali:

$$f_{rr} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n D_{rr}(z)}{z^3 - \beta z - \gamma} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n (z^2 + b_{rr} z + d_{rr})}{z^3 - \beta z - \gamma} dz$$

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n D_{rs}(z)}{z^3 - \beta z - \gamma} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n (v_{rs} z + w_{rs})}{z^3 - \beta z - \gamma} dz$$

con ovvio significato dei simboli  $b_{rr}$ ,  $d_{rr}$ ,  $v_{rs}$ ,  $w_{rs}$ .

È facile vedere allora che il nostro problema si riduce al calcolo di integrali del tipo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{t+3}}{z^3 - \beta z - \gamma} dz \equiv I$$

dove  $t+3$  può valere  $n+2$ ,  $n+1$ ,  $n$ .

Perciò osserviamo intanto che

$$I \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^t}{1 - \left( \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z^3} \right)} dz$$

Ora, come nel caso delle matrici del secondo ordine, potremo prendere per (c) un cerchio di raggio così grande che, su esso, sia

$$\left| \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z^3} \right| \leq \kappa < 1.$$

Si ha così:

$$I \equiv \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c z^{t-2m} \left( \beta + \frac{\gamma}{z} \right)^m dz$$

Ma gli unici termini dello sviluppo che danno risultato non nullo sono quelli in  $z^{-1}$ . Per calcolarli osserviamo che:

$$z^{t-2m} \left( \beta + \frac{\gamma}{z} \right)^m = z^{t-2m} \sum_0^m \binom{m}{\tau} \beta^\tau \left( \frac{\gamma}{z} \right)^{m-\tau}$$

Quindi il valore di  $\tau$  che corrisponde al termine in  $z^{-t}$  deve essere tale che

$$t - 2m - m + \tau = -1$$

Cioè

$$\tau = 3m - t - 1$$

Ma deve essere

$$\tau \geq 0; \quad \tau \leq m$$

Quindi

$$m \geq \frac{t+1}{3}; \quad m \leq \frac{t+1}{2}$$

Dunque  $m$  può variare solo fra il minimo intero superiore od uguale a  $\frac{t+1}{3}$  e  $\frac{t+1}{2}$  se  $t$  è dispari; fra il minimo intero superiore od uguale a  $\frac{t+1}{3}$  e il massimo intero inferiore a  $\frac{t+1}{2}$  se  $t$  è pari. Si ha allora, convenendo che  $\frac{t+1}{3}$  sia il numero intero superiore od uguale a  $\frac{t+1}{3}$  e  $\frac{t+1}{2}$  il numero intero inferiore o uguale a  $\frac{t+1}{2}$ , ricordando che  $\binom{m}{3m-t-1} = \binom{m}{t+1-2m}$

$$I \equiv \sum_{\frac{t+1}{3}}^{\frac{t+1}{2}} \binom{m}{t+1-2m} \beta^{3m-t-1} \gamma^{t+1-2m}$$

Possiamo sommare invece che rispetto ad  $m$  rispetto a  $p = t+1-2m$ ;  $p$  allora varierà per numeri pari se  $t+1$  è pari, per numeri dispari se  $t+1$  è dispari, fra zero<sup>(1)</sup> e il massimo intero inferiore od uguale a  $\frac{t+1}{3}$  che indicheremo con  $N\left(\frac{t+1}{3}\right)$ ; perciò:

$$I \equiv \sum_0^N \binom{\frac{t+1}{3}}{p} \binom{\frac{1}{2}(t+1-2p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(t+1-3p)} \gamma^p$$

(1) Lo zero va considerato come numero pari.

e il simbolo  $\Sigma'$  indica che la somma è fatta solo per valori pari o dispari di  $p$ .

Con questa formula ponendo al posto di  $t$  i suoi valori in funzione di  $n$  si trova il valore dei nove integrali. Possiamo così scrivere esplicitamente  $\Phi^n$  i cui termini assumono la seguente espressione:

$$f_{rr} = \sum_0^{\Sigma' \left( \frac{n}{3} \right)} \binom{\frac{1}{2}(n-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(n-3p)} \gamma^p + b_{rr} \sum_0^{\Sigma' \left( \frac{n-1}{3} \right)} \binom{\frac{1}{2}(n-1-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(n-1-3p)} \gamma^p +$$

$$+ d_{rr} \sum_0^{\Sigma' \left( \frac{n-2}{3} \right)} \binom{\frac{1}{2}(n-2-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(n-2-3p)} \gamma^p$$

$$f_{rs} = v_{rs} \sum_0^{\Sigma' \left( \frac{n-1}{3} \right)} \binom{\frac{1}{2}(n-1-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(n-1-3p)} \gamma^p + w_{rs} \sum_0^{\Sigma' \left( \frac{n-2}{3} \right)} \binom{\frac{1}{2}(n-2-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(n-2-3p)} \gamma^p$$

SOPRA  
UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI  
DELLA MECCANICA CELESTE  
DI CUI L'INTEGRALE GENERALE TENDE A ZERO(\*)

(NOTA PRIMA)

GIUSEPPE ARMELLINI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Auctor, investigationibus a se ipso peractis circa aequationem differentialem motuum elasticorum (virium revocationis) innixus, proprietates quas invenerat extendit ad generalem casum motus alicuius puncti, quod attrahatur iuxta legem e distantia et tempore pondentem. Ex quo differentialium aequationum classem conficit, cuius generale integrale ad limitem nullum tendit, cum tempus ad infinitum augetur; quae proprietas maximi est momenti quod ad mechanicorum factorum studium.

1. — In una nota, pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei<sup>(1)</sup> a Roma, io ho considerata nel campo reale l'equazione differenziale

$$[1] \quad x'' + x M(t) = 0$$

dove, al solito, gli apici indicano le derivate fatte rispetto al tempo  $t$  ed ho dimostrato che, se  $M$  è funzione positiva, sempre crescente (od almeno mai decrescente) del tempo  $t$  e  $\text{Log } M(t)$  tende regolarmente all'infinito con  $t$ , allora l'integrale generale della [1] tende certamente a zero per  $t$  tendente all'infinito.

(\*) Nota presentata il 25 luglio 1942.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra una equazione differenziale della Dinamica*, in Rend. R. Acc. dei Lincei, 1935, sem. I.

Come è noto, la [1] è l'equazione del moto di un punto, sollecitato da una forza di richiamo (e cioè da una forza proporzionale alla distanza) variabile col tempo, ed ha perciò notevole importanza nella Meccanica Superiore e Celeste.

Ora io ho trovato che la proprietà accennata può estendersi al caso di forze attrattive molto più generali, dando così origine dal lato analitico ad una classe di equazioni differenziali del secondo ordine il cui integrale generale, nel campo reale, tende a zero. Di esse mi occuperò nella presente nota ed in altre successive.

2. - Consideriamo un punto mobile P di massa unitaria, attratta da un'origine fissa Q ed indichiamo con  $r$  la distanza PQ. Supponiamo che la forza di attrazione F sia data da  $f(r)M(t)$ , formula che comprende come casi particolari un gran numero di problemi di Meccanica, e studiamo il moto di P.

In proposito, sappiamo dai fondamenti della Dinamica, che tale moto sarà piano, che avrà luogo con la legge delle aree e che  $r$  sarà legata a  $t$  dall'equazione differenziale:

$$[2] \quad r'' = \frac{c^2}{r^3} - F(r, t) = \frac{c^2}{r^3} - f(r)M(t)$$

dove  $c$  indica la costante delle aree, che supporremo diversa da zero.

Ora, sopra le funzioni  $f$  ed  $M$ , io farò le seguenti ipotesi:

I) La  $f$  sia funzione positiva, finita e non nulla per i valori positivi di  $r$ . Inoltre, salvo a togliere queste limitazioni in una nota successiva, supponiamo per ora che  $f$  non divenga infinita per  $r=0$  e non tenda a zero per  $r$  tendente all'infinito.

II) La  $M$  sia positiva, finita, non nulla, sempre crescente (od almeno mai decrescente) per  $t$  positivo. In conseguenza, per  $t$  tendente ad  $\infty$ , essa tenderà ad un limite positivo  $A$ , oppure all'infinito.

Ciò posto, voglio qui dimostrare i seguenti teoremi preliminari:

3. - **TEOREMA I.** *Supponiamo che  $M$  tenda ad un limite finito  $A$  per  $t$  tendente ad  $\infty$ , e consideriamo un'integrale della [2] definito dai valori*

iniziali  $a$  e  $b$  di  $r$  e di  $r'$  per  $t=0$ , dove questi valori siano ambedue reali ed il primo positivo e non nullo. Dico che l'integrale  $r$  della [2], comunque si scelgano questi valori iniziali, gode delle seguenti proprietà:

1) Esso non può annullarsi per qualsiasi valore positivo del tempo, né può tendere a zero quando il tempo cresce all'infinito. In conseguenza, crescendo il tempo,  $r$  tenderà ad un limite  $\lambda$  diverso da zero, oppure sarà funzione sempre oscillante senza tender ad alcun limite;

2) Se, tendendo  $t$  all'infinito, la  $r$  tende ad un limite  $\lambda$ , questo sarà radice dell'equazione:

$$[3] \quad c^2 - A\lambda^3 f(\lambda) = 0$$

3. - Se invece  $r$  è funzione sempre oscillante tra infiniti massimi (apastri, in linguaggio astronomico) ed infiniti minimi, (periastris) la successione dei massimi e quella dei minimi saranno ambedue decrescenti (od almeno non crescenti) ed avranno quindi due limiti  $L$  ed  $l$ , tali che si abbia  $L > \lambda > l$ , essendo  $\lambda$  radice della [3].

4. - DIMOSTRAZIONE. Vediamo anzi tutto che  $r$  non può annullarsi per qualsiasi valore positivo  $t^*$  del tempo. Infatti, se ciò fosse, la [2] mostra che crescendo  $t$  da 0 verso  $t^*$ , la  $r''$  diverrebbe da un certo istante in poi necessariamente positiva e tenderebbe ad  $\infty$ , onde la derivata prima  $r'$  diverrebbe necessariamente positiva prima dell'istante  $t^*$  e quindi  $r$  non potrebbe annullarsi in quell'istante. Ne segue che  $r$ , essendo inizialmente positiva, conserverà sempre questo segno in accordo con l'interpretazione meccanica della [2].

Inoltre è chiaro che  $r$  non può, da un certo istante in poi, essere sempre crescente e tendere all'infinito per  $t$  tendente all'infinito. Infatti, per le ipotesi fatte sopra la  $F$ , la [2] mostra che  $r''$  sarebbe da un certo istante in poi sempre negativa e non tenderebbe a zero. In conseguenza, la derivata prima  $r'$  diverrebbe dopo un certo tempo necessariamente negativa e quindi  $r$  cesserebbe di crescere.

Ciò posto, possiamo fare soltanto due ipotesi e cioè:

1) O crescendo il tempo,  $r$  tende verso un limite finito  $\lambda$ .

2) Oppure essa oscilla perpetuamente tra infiniti massimi e minimi, senza tendere a nessun limite.

Con linguaggio della Meccanica Celeste, si hanno nel primo caso le orbite *spirali*, nel secondo quelle *periplegmatiche*.

5. - Cominciamo ad occuparci del primo caso.

È facile anzi tutto vedere che  $\lambda$  è sempre diverso da zero. Infatti, se  $r$  tendesse a zero quando  $t$  cresce all'infinito, la [2] mostra - per le ipotesi fatte sopra la  $f$  e tendendo  $M$  ad un limite finito  $A$  - che  $r''$  diverrebbe da un certo istante in poi sempre positiva e crescerebbe all'infinito; il che esclude che  $r$  tenda a zero.

Ciò posto, poichè si suppone che  $r$  tenda verso un limite finito  $\lambda$ , è chiaro che, crescendo  $t$  all'infinito, la derivata seconda o non tenderà verso nessun limite oppure tenderà a zero. Ma  $\lambda$ , come abbiamo ora visto, è diversa da zero; dunque il secondo membro della [2] tende certamente verso un limite determinato, quindi  $r''$  deve tendere a zero.

Annullando il secondo membro della [2] e ricordandoci che  $M(t)$  tende verso  $A$ , si ottiene allora immediatamente la [3].

In proposito, osserviamo che - poichè  $f$  non si annulla all'infinito - il primo membro della [3] varia dal valore positivo  $c^2$  al valore negativo  $-\infty$  quando  $\lambda$  varia da zero ad  $\infty$ ; in conseguenza, se  $f$  si suppone funzione continua, la [3] avrà un *numero dispari* di radici positive, che si ridurranno ad una sola se  $f$  si supponesse anche funzione crescente, od almeno non decrescente.

In questa ipotesi dunque l'orbita di  $P$  tenderà ad un cerchio di raggio  $\lambda$  avente per centro l'origine  $Q$ ; in conformità al linguaggio della Meccanica Celeste, lo chiameremo *cerchio asintotico*, poichè l'orbita vi tende asintoticamente quando il tempo cresce all'infinito.

Come abbiamo visto, i cerchi asintotici, se  $f$  è continua, sono in numero dispari; e si riducono ad uno solo se  $f$  è funzione non decrescente.

6. - Passiamo ora a considerare il caso di  $r$  sempre oscillante tra infiniti massimi e minimi, senza tendere ad alcun limite; e cioè il caso delle orbite periplegmatiche della Meccanica Celeste.



Moltiplicando ambo i membri della [2] per  $2r'$  ed integrando, abbiamo:

$$[4] \quad r'^2 + \frac{c^2}{r^2} = \beta - 2 \int_0^t F r' dt$$

dove, tenendo presente la legge delle aree, sarebbe facile dimostrare che il primo membro rappresenta il quadrato della velocità del punto P nel suo moto intorno a Q, mentre  $\beta$  è una costante necessariamente positiva e non nulla (essendo  $c$  diverso da zero).

Supponiamo ora che, partendo dall'istante  $t=0$ , la  $r$  passi per un primo massimo  $R_1$  nell'istante  $T_1$ ; dico che dopo  $T_1$  la  $r$  si manterrà sempre inferiore, od al più eguale, ad  $R_1$ .

Per dimostrarlo, notiamo che nell'istante  $T_1$ , essendo nulla la derivata prima, la [4] diviene:

$$[5] \quad \frac{c^2}{R_1^2} = \beta - 2 \int_0^{T_1} F r' dt$$

Ciò posto, dopo  $T_1$  la  $r$  diminuirà fino a raggiungere un minimo  $r_1$  nell'istante  $t_1$  e quindi tornerà di nuovo ad aumentare. Supponiamo, se è possibile, che raggiunga di nuovo il valore  $R_1$  nell'istante  $p$  ( $T_1 < t_1 < p$ ).

Si ha allora da [4]

$$[6] \quad r'^2 + \frac{c^2}{R_1^2} = \beta - 2 \int_0^p F r' dt$$

e quindi sottraendo [5] da [6] abbiamo:

$$[7] \quad r'^2 = -2 \int_{T_1}^p F r' dt$$

Ora tale equazione può scriversi più semplicemente nella forma:

$$[8] \quad r'^2 = -2 \int_{R_1}^{r_1} F dr - 2 \int_{r_1}^{R_1} F dr$$

dove nel primo integrale  $dr$  è sempre negativo e nel secondo sempre positivo; inoltre, nel secondo integrale, in corrispondenza ad eguali valori di  $r$ , la  $F$  è maggiore, essendo maggiori i valori del tempo, rispetto a quelli che compaiono nel primo integrale.

Ne segue che il secondo integrale supererà il primo, onde il secondo membro della [8] sarà negativo; e ciò è impossibile, essendo il primo membro positivo o nullo. Ne segue che l'ipotesi fatta, cioè che  $r$  raggiunga di nuovo il  $R_1$ , è assurda.

Notiamo in proposito che, soltanto nel caso in cui, durante tutto l'intervallo di tempo considerato, la  $M$  non crescesse, i due integrali sarebbero eguali e di segno contrario, onde il secondo membro della [8] si annullerebbe. In tal caso, nell'istante  $p$  dovrebbe quindi aversi  $r'=0$ , onde la  $r$  si troverebbe ancora in un massimo che sarebbe eguale ad  $R_1$ .

Segue da ciò che la successione dei massimi:

$$[9] \quad R_1 R_2 R_3 \dots R_n \dots$$

è *decescente*, od almeno mai crescente. In conseguenza, essendo composta di termini tutti positivi, tenderà certamente ad un limite positivo  $L$ .

Con analoghi ragionamenti si può provare che la successione dei minimi:

$$[10] \quad r_1 r_2 r_3 \dots r_n \dots$$

è anche essa *decescente*, od almeno mai crescente. In conseguenza tenderà pure ad un limite positivo  $l$ .

In questa ipotesi dunque, l'orbita resta compresa dentro una corona circolare i cui cerchi estremi hanno raggi che, col crescere del tempo, tendono ai valori limiti  $L$  ed  $l$ .

Poichè la derivata prima si annulla agli estremi (massimi e minimi) e poichè, per il teorema di ROLLE, tra due radici della derivata prima deve trovarsi almeno una radice della derivata seconda, è chiaro che tra  $L$  ed  $l$  dovrà essere compresa una radice  $\lambda$  della [3].

7. - TEOREMA II. *Supponiamo ora che la funzione  $M$ , ferme restando le altre ipotesi già fatte, tenda all'infinito quando il tempo cresce all'in-*

finito, e cioè che  $A = \infty$ . In tal caso l'integrale  $r$  della [2] gode delle seguenti proprietà:

1) La  $r$  non può annullarsi per qualsiasi valore positivo del tempo, nè può tendere all'infinito quando il tempo cresce all'infinito.

2) Il raggio del cerchio asintotico è nullo, onde se crescendo il tempo all'infinito,  $r$  tende ad un limite, tale limite è sempre eguale a zero. In conseguenza,  $r$  non può essere sempre crescente ed inoltre, se da un certo istante in poi,  $r$  è funzione decrescente del tempo, essa tende a zero.

3) Se  $r$  si mantiene funzione oscillante, senza tendere a nessun limite, il limite  $l$  della successione dei minimi (periastri) è sempre eguale a zero.

8. - DIMOSTRAZIONE. La prima parte del teorema si dimostra come per il teorema precedente. Soltanto si vede che  $r$  può tendere a zero quando  $t$  cresce all'infinito, giacchè in tal caso (contrariamente a quanto avveniva per il teorema I) il secondo membro della [2] non tende necessariamente a  $-\infty$ , quando  $r$  tende a zero e  $t$  tende ad  $\infty$ .

Anzi, osservando che ora si ha  $A = \infty$ , si vede che la [3] ha come unica radice  $\lambda = 0$ ; in conseguenza, se  $r$  tende ad un limite, tale limite è necessariamente eguale a zero. D'altra parte tendendo  $t$  ad  $\infty$ , il valore di  $r$  per cui si annulla  $r''$  tende a  $\lambda$  e cioè a 0, onde  $l = 0$ ; cioè la distanza dei periastri da Q tende a zero.

Meccanicamente, vediamo quindi che in ogni caso l'orbita di P viene a passare sempre più vicina a Q; onde se questi ha dimensioni finite, l'urto dei due corpi è inevitabile.

Osserviamo però che non può dirsi che  $r$  abbia sempre per limite zero; infatti, se esso oscilla tra infiniti massimi e minimi, la successione dei massimi può avere un limite L maggiore di zero.

9. - *Orbite osculatrici.* Tornando al caso generale del moto piano, supponiamo che la M sia derivabile, e poniamo:

$$[11] \quad \int_a^r f(r) dr = \Phi(r)$$

dove  $a$  indica il valore iniziale di  $r$  per  $t=0$ . Integrando per parti la [4] e prendendo  $M$  come fattore costante, si ha subito:

$$[12] \quad r'^2 + \frac{c^2}{r^3} + 2M(t)\Phi(r) = \beta + 2 \int_0^t \Phi(r) \frac{dM}{dt} dt = H(t)$$

dove  $H(t)$  indica l'energia totale del punto  $P$ , come è facile vedere dalla Meccanica. Se  $M$  è costante, anche  $H$  rimane costante e si ritrova il teorema della conservazione dell'energia.

Ciò posto, in conformità al linguaggio astronomico, chiameremo *orbita osculatrice* di  $P$  nell'istante  $T$ , l'orbita che esso descriverebbe da  $T$  in poi se, da quel momento, la  $M$  rimanesse costante e cioè sempre eguale ad  $M(T)$ . L'equazione dell'orbita osculatrice è quindi:

$$[13] \quad r'^2 + \frac{c^2}{r^3} + 2M(T)\Phi(r) - H(T) = 0$$

la cui integrazione, essendo  $T$  costante, si riduce alle quadrature. È facile vedere che questa orbita passa per la posizione occupata da  $P$  nell'istante  $T$  ed è in essa tangente alla traiettoria effettiva descritta da  $P$  intorno a  $Q$ .

Indicando con  $\rho$  un raggio estremo (massimo, o minimo) dell'orbita osculatrice, vediamo quindi che  $\rho$  soddisfa all'equazione:

$$[14] \quad \frac{c^2}{\rho^3} + 2M(T)\Phi(\rho) - H(T) = 0$$

onde, se questa non ha radici reali positive, l'orbita stessa non può presentare nè massimi nè minimi.

Passiamo ora ai massimi e minimi dell'orbita osculatrice relativa all'istante  $T + dT$  e cioè deriviamo la [14] rispetto a  $T$ . Si ha per la [11]:

$$[15] \quad \left[ -\frac{2c^2}{\rho^3} + 2M(T)f(\rho) \right] \frac{d\rho}{dT} + 2\Phi(\rho) \frac{dM}{dT} - \frac{dH}{dT} = 0$$

od anche, tenendo presente la [2] e la [12]:

$$[16] \quad -2r'' \frac{d\rho}{dT} + 2[\Phi(\rho) - \Phi(r)] \left( \frac{dM}{dt} \right)_{t=T} = 0$$

dove  $\frac{dM}{dt}$ , per le ipotesi fatte, è sempre positivo o nullo e dove  $r$  indica il raggio vettore PQ nell'istante  $T$ , distinto naturalmente (tranne se in quell'istante avvenisse un periastro od un apastro) dai massimi e minimi dell'orbita osculatrice. Notiamo ancora che, essendo per ipotesi  $f$  sempre positiva, la  $\Phi$  è funzione crescente.

Ciò posto, se  $\rho$  indica un massimo, il termine dentro parentesi quadre nella [16] sarà certamente positivo o nullo; ma allora  $-2r''$  è positiva, dunque  $\frac{d\rho}{dT}$  sarà negativo o nullo. Se invece  $\rho$  indica un minimo, il termine dentro parentesi quadre è negativo o nullo; ma allora  $-2r''$  è negativa, dunque  $\frac{d\rho}{dT}$  sarà ancora negativo o nullo.

Vediamo così che i massimi ed i minimi di un'orbita osculatrice, sono inferiori, od al più eguali, a quelli dell'orbita osculatrice precedente. Tale teorema può considerarsi come un'estensione di quello, già dato, sugli apastri e periastris dell'orbita effettiva.

Osserviamo in proposito che, se  $M$  non si conserva costante, il punto  $P$  non descrive l'orbita osculatrice, ma soltanto un tratto infinitesimo di essa, per passare poi all'orbita osculatrice successiva. Soltanto se, nella sua orbita effettiva, il punto  $P$  si trova in un apastro, o periastro, esso coincide col massimo o col minimo dell'orbita osculatrice in quell'istante.

In conseguenza, se per esempio nell'istante  $T_1$  il punto  $P$  si trova nell'apastro  $R_1$  e nell'istante  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) nell'apastro successivo  $R_2$ , avremo:

$$[17] \quad R_2 - R_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\rho}{dT} dT$$

da cui, essendo  $\frac{d\rho}{dT}$  sempre negativa o nulla, risulterà  $R_2 \leq R_1$ . Analogo ragionamento può farsi per i minimi.

Ritroviamo dunque il teorema già dato sullo orbite effettive, come caso particolare di questa proprietà delle orbite osculatrici.

10. - Termineremo con un'osservazione. Poichè  $L$  può essere diversa da zero, affinchè  $r$  tenda a zero, non basta che  $M$  tenda all'infinito ma è necessario come dimostreremo, che - qualunque sia  $T$  - da  $T$  in poi gli incrementi *non* avvengano soltanto nell'intorno dell'apastro. E ciò si riconnette con la *regolare* tendenza delle funzioni ad  $\infty$ , nel senso da noi dato nella citata nota ai Lincei. Ma su ciò torneremo meglio in altro lavoro, dove esamineremo pure il caso che  $f(r)$  si annulli per  $r = \infty$ .

SULLA VELOCITÀ DI LAVORAZIONE  
NELL'ESTRAZIONE DI SOSTANZE  
MEDIANTE SOLVENTE (\*)

PIETRO TEOFILATO

SUMMARIVM. — Auctor ostendit viam quamdam analytico-geometricam, qua perpendi potest quamam velocitate utiles materiae, solventibus adhibitis, e certis communioribus mineralibus extrahi possint.

1. — Allorchè si tratta di estrarre da minerali largamente diffusi un dato materiale utile, mediante l'azione di un solvente, si presenta, come elemento indispensabile, la preventiva conoscenza della velocità di lavorazione.

Poichè, in un caso, ho avuto incarico di occuparmi della questione, ritengo opportuno dar conto nella presente nota del contributo da me dato a riguardo.

Detta velocità dipende evidentemente dal metodo che viene impiegato: si può difatti adottare una lavorazione per gradi (discontinua) la quale si svolge trattenendo in agitazione, per ciascun grado, minerale, preventivamente sempre più depauperato, con solvente preventivamente sempre più arricchito, fino a quando non sia raggiunto (o quasi) l'equilibrio di soluzione; e si può invece eseguire una lavorazione continua, facendo cadere una pioggia continua di pezzi di minerale in una colonna nella quale il solvente entra puro dalla base inferiore, per sboccare dall'alto, arricchito della sostanza utile, a spese del minerale che lo ha attraversato.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

2. — Incominciamo dal primo metodo. Sia  $w_0$  il volume di minerale grezzo, ossia prima di qualunque trattamento con solvente, il quale corrisponda al peso di un chilogrammo. Detto volume è facilmente determinabile e noi lo ammetteremo conosciuto, come pure ammetteremo conosciuto, mediante analisi preventiva, il tasso  $v_0$  in sostanza utile contenuta in un chilogramma di minerale grezzo, e noti inoltre i pesi specifici  $p_u$  della sostanza utile e  $p_L$  del solvente.

Sarà:

$$v_0 : p_u = v_0$$

il volume dei meati occupati (in media) dalla sostanza utile entro un chilogramma di minerale grezzo.

Faremo l'ulteriore ipotesi che i volumi  $w_0, v_0$  rimangano inalterati durante il trattamento.

Detto poi  $p_s$  il peso specifico di una soluzione (solvente più sostanza utile) al titolo  $s$ , avremo:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{s}{p_u} + \frac{1-s}{p_L},$$

la quale, quando si ponga:

$$[1] \quad \sigma = \frac{1}{p_u} - \frac{1}{p_L}, \quad \tau = \frac{1}{p_L},$$

diventa:

$$[2] \quad \frac{1}{p_s} = \sigma s + \tau.$$

Si consideri la quantità di minerale già trattato che proviene precisamente dalla lavorazione di  $R_0$  chilogrammi iniziali di materiale grezzo e sia  $s'$  il titolo della soluzione che riempie i meati. Si mescoli ora questa quantità di minerale già trattato con  $S''$  chilogrammi di soluzione al titolo  $s''$ ; si può allora facilmente determinare il tasso  $s$  della soluzione finale, ad equilibrio stabilito. Infatti, sarà  $v_0 p_{s'}$ , il peso



della soluzione contenuta nei meati di volume  $v_0$  e  $v_0 p_{s'} s'$  il peso di sostanza utile ivi disciolta.

Avremo allora

$$[3] \quad s = \frac{R_0 v_0 p_{s'} s' + S'' s''}{R_0 v_0 p_{s'} + S''}.$$

Se gli  $S''$  Kg. di soluzione provengono da  $S_0$  Kg. di solvente puro, man mano arricchitosi, e non vi sono perdite di liquido, il volume iniziale di solvente, cioè  $S_0 : p_L$ , deve essere eguale al volume degli  $S''$  Kg., in quanto che, per ogni elemento di volume di soluzione più povera che si infila nei meati, altrettanto volume di soluzione più ricca ne esce.

Avremo quindi:

$$S_0 : p_L = S'' : p_{s''},$$

ovvero:

$$S'' = \frac{S_0}{p_L} \cdot p_{s''}$$

per modo che la [3] diventa:

$$s = \frac{R_0 v_0 p_{s'} s' + \frac{S_0}{p_L} p_{s''} s''}{R_0 v_0 p_{s'} + \frac{S_0}{p_L} p_{s''}}$$

e per la [2]:

$$[4] \quad s = \frac{R_0 v_0 \frac{s'}{\sigma s' + \tau} + \frac{S_0}{p_L} \frac{s''}{\sigma s'' + \tau}}{R_0 v_0 \frac{1}{\sigma s' + \tau} + \frac{S_0}{p_L} \frac{1}{\sigma s'' + \tau}}$$

3. - Consideriamo ora una colonna cilindrica di base  $\Omega$ , divisa in tanti scompartimenti eguali che indicheremo con  $G_1, G_2 \dots G_n$ , procedendo dall'alto verso il basso. Nel gradino  $G_k$  cadrà il minerale che proviene dal trattamento degli  $R_0$  Kg. di minerale grezzo attra-

verso i soprastanti gradini  $G_1 G_2 \dots G_{k-1}$ . Contemporaneamente in  $G_k$  ascenderà la soluzione proveniente dal sottostante gradino  $G_{k+1}$  e sia  $s_k$  il titolo della soluzione che si trova in  $G_k$ , ad equilibrio raggiunto. Nel primo gradino sarà  $s_1 = 1 - \varepsilon$ ; nell'ultimo sarà  $s_n = \eta$  dove  $\varepsilon$  ed  $\eta$  sono quantità positive minori dell'unità e *prefissate*, perchè  $s_1$  è il titolo stabilito per la soluzione che dopo aver asportato la sostanza utile, sbocca in alto, oltre  $G_1$  ed  $s_n$  è il titolo ammesso per la tolleranza del minerale eliminato alla uscita dello sbocco inferiore di  $G_n$ .

Dovremo sostituire allora nella [3] i titoli come segue:

$$s' = s_{k-1}, \quad s = s_k, \quad s'' = s_{k+1};$$

e porremo:

$$\frac{S_0}{R_0 v_0 p_L} = q;$$

e allora dalla [4] dedurremo l'equazione ricorrente:

$$[5] \quad s_{k+1} = \frac{\tau s_{k-1} - (\tau(1+q) + \sigma q s_{k-1}) s_k}{-(\tau q + \sigma(1+q) s_{k-1}) + \sigma s_k}$$

Da questa, assunti come valori di partenza:  $s_0 = 1$  (titolo dei meati appena si versa il minerale nella colonna) ed  $s_1 = 1 - \varepsilon$  si ricava, per un valore di  $q$  prefissato, qual'è il valore di  $s_n$  che più si approssima al valore  $\eta$  e si avrà così il numero dei gradini occorrenti alla lavorazione. Se il numero dei gradini è eccessivo occorrerà modificare  $q$  e ripetere il calcolo.

Il volume di ogni gradino sarà:

$$R_0 w_0 + \frac{S_0}{p_L}$$

e la sua altezza  $\Delta z$  si otterrà dividendo la precedente somma per  $\Omega$ , area della base della colonna di lavorazione.

4. - Per quanto concerne il tempo di lavorazione ammetteremo che la quantità di materiale utile asportata, per secondo, da una soluzione messa in comunicazione con un'altra soluzione, sia proporzionale alla differenza dei titoli delle due soluzioni, fino a quando non si raggiunga l'equilibrio. L'ipotesi è alquanto semplicista, ma d'altra parte bisogna osservare che la turbolenza del movimento fluido, a causa dell'agitazione che viene appositamente provocata, finisce per eliminare ogni influsso locale e direzionale nella velocità di variazione dei concentramenti e permette di presumere che la velocità di trasporto dipenda solo dagli elementi che esprimono in modo riassuntivo lo stato delle soluzioni, e cioè dai titoli di queste. Detta  $y$  la quantità di materiale asportata fino all'istante  $t$ , avremo allora:

$$\frac{dy}{dt} = G(\bar{s} - s)$$

dove  $\bar{s}$  ed  $s$  sono i titoli *attuali* delle due soluzioni e  $G$  un coefficiente di proporzionalità dipendente, oltre che dalla natura delle soluzioni, anche dal modo come viene stabilita la comunicazione fra loro.

Indicati con  $s'$  ed  $s''$  i tassi *iniziali* e con  $l'$   $l''$  i pesi iniziali delle soluzioni, inoltre, supposto  $s' > s''$ , avremo:

$$\frac{dy}{dt} = G \left[ \frac{l' s' - y}{l' - y} - \frac{l'' s'' + y}{l'' + y} \right],$$

equazione che, quando si ponga:

$$c' = 1 - s', \quad c'' = 1 - s'',$$

$$A = l' c' + l'' c'', \quad B = l''^2 c'' - l'^2 c', \quad E = l' l'' c' c'' (l' + l'')^2,$$

diventa:

$$t = \frac{1}{GA^2} \int [Ay + B + E(-Ay + l' l'' (c'' - c'))^{-1}] dy,$$

dove  $A$  e  $c'' - c'$  sono entrambi positive.

I limiti dell'integrale devono estendersi da  $y=0$  fino al valore di  $y_0$  della  $y$  che corrisponde al tasso di equilibrio; ma questo valore è

appunto quello che annulla il denominatore del terzo termine della funzione integranda, cioè:

$$y_0 = \frac{1}{A} l' l'' (c'' - c'),$$

il quale rende  $t$  teoricamente infinito.

Praticamente però basta assumere come limite superiore quello che corrisponde ad un tasso il quale differisca per un centesimo del suo valore dal tasso di equilibrio per ottenere un tempo ben limitato.

Allora tenuto conto che nel  $k$ -esimo gradino è:

$$c' = 1 - s_{k-1}, \quad c'' = 1 - s_{k+1},$$

$$l' = v_0 R_0 p_{s_{k-1}}, \quad l'' = \frac{S_0}{p_r} p_{s_{k+1}},$$

possiamo scrivere:

$$t_k \approx \frac{1}{A^2 G} \left[ \frac{A y_0^2}{2} + B y_0 + \frac{E}{A} \log_e 100 \right],$$

ovvero:

$$t_k = \frac{l' l''}{A^3 G} \left[ \frac{1}{2} l' l'' (c'' - c')^2 + B (c'' - c) + c' c'' (l' + l'')^2 \cdot 4,61 \right],$$

mentre la velocità di estrazione della sostanza utile sarà in virtù della [1]:

$$\frac{S_0}{p_r} \frac{s_1}{\sigma s_1 + \tau} : \Sigma t_k$$

espressa in Kg. al secondo in confronto di:

$$R_0 : \Sigma t_k$$

Kg. di minerale introdotti al secondo.

5. - L'equazione ricorrente [5] dà luogo ad una equazione delle differenze finite del secondo ordine, la quale, quando il numero dei gradini sia molto grande, si può anche confondere, ma senza vantaggio, con un'equazione differenziale del secondo ordine non lineare.

Giova invece far ricorso ad una costruzione geometrica che, se in principio ha bisogno di un grafico preparatorio, permette in seguito di procedere, di gradino in gradino, alla determinazione dei titoli  $s_k$ , molto rapidamente.

Prima di tutto si disegnino due rette perpendicolari, l'una  $u$ , orizzontale, l'altra  $v$ , verticale, e si individui la proiettività  $\pi_1$ , che fa corrispondere le due punteggiate, una formata dai punti della retta  $u$  con le ascisse  $x$  contate a partire da  $O$ , incrocio di  $u$  con  $v$ , l'altra formata dai punti della retta  $v$ , aventi ascissa:

$$[6] \quad y = \frac{1}{\sigma x + \tau},$$

contata sempre a partire da  $O$ , verso l'alto.

Si individui poi l'altra proiettività  $\pi_2$  tra i punti  $y$  e i punti della retta  $v$  aventi ascissa:

$$[7] \quad z = -qy.$$

Si conducano poi due verticali arbitrarie  $c$ ,  $d$  e siano  $C$ ,  $D$  le rispettive intersezioni con la  $u$ .

Ciò fatto, vediamo come si possa procedere per ricavare  $s_{k+1}$  quando siano noti  $s_{k-1}$  ed  $s_k$ .

Tra i punti  $x$  della retta  $u$  assumiamo i punti  $x = s_{k-1}$  ed  $x = s_k$ ; e si conduca poi per  $s_{k-1}$  la verticale  $b$ . Si trovi sulla retta  $v$  il punto  $y = y_1$  corrispondente di  $x = s_{k-1}$  secondo la proiettività  $\pi_1$  definita dalla [6], e si conduca per  $y_1$  l'orizzontale  $a$ . Il fascio improprio delle verticali proietta la punteggiata della  $u$  in una punteggiata della  $a$ , in modo che ai punti  $CDE$  corrispondono  $C'D'E'$ . Il fascio di centro  $s_k$ , a sua volta, proietta la punteggiata di  $a$  sulla retta  $b$  in modo che i punti  $C'D'E'_\infty$  corrisponderanno ai punti  $C''D''E''$ , dove  $E''$  coincide con  $s_{k-1}$ , incrocio di  $b$  con  $u$ .

Siano  $C'''D'''E'''$  i punti della  $v$  corrispondenti a  $CDE$  nel prodotto delle due proiettività  $\pi_1$ , definita dalla [6], e  $\pi_2$  definita dalla [7], e siano inoltre  $C^{IV}D^{IV}E^{IV}$  i punti della retta  $b$  che il fascio di orizzontali fa corrispondere a  $C'''D'''E'''$ .

Le due punteggiate  $C''D''E''$ ,  $C^{IV}D^{IV}E^{IV}$  sono proiettive ed hanno il punto unito  $E''$ . L'altro punto unito  $F''$  (non disegnato) che si può trovare mediante costruzione con la sola riga, unito con  $s_k$ , darà sulla  $a$

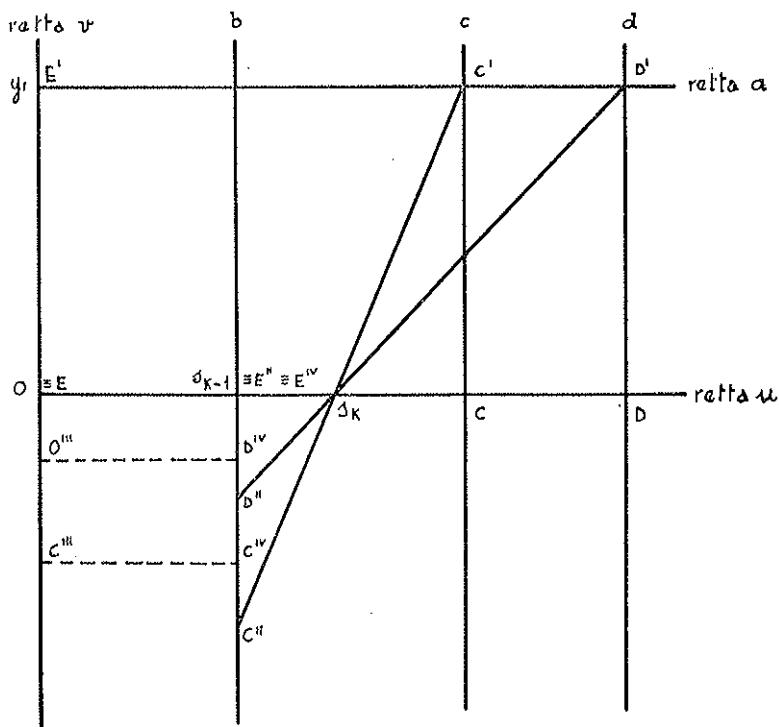


FIG. 1.

il punto  $F''$  e corrispondentemente sulla  $u$  il punto  $F'$  proiezione di  $F''$ . Sarà  $s_{k+1}$  l'ascissa del punto  $F'$ . Infatti l'obliqua condotta per  $s_k$  e per il secondo punto unito determina in  $s_k$  il baricentro dei due vettori verticali:

$$\frac{1}{\sigma s_{k-1} + \tau}, \quad \frac{q}{\sigma s_{k+1} + \tau},$$

pensati come applicati rispettivamente in  $s_{k-1}$  e in  $s_{k+1}$ ; precisamente a norma di quanto indica la formula [4].

Trovato così  $s_{k+1}$  si ripeterà l'operazione cercando, prima nella proiettività  $\pi_1$  il punto  $y_1$  corrispondente di  $x = s_k$  ed assumendo come nuova retta  $a$  l'orizzontale condotta per il nuovo punto  $y_1$  e come nuovi punti C'D' le intersezioni di  $c, d$  con detta orizzontale, infine come nuova retta  $b$  la verticale  $s_k$ . E così via.

6. - Passiamo adesso a considerare una lavorazione continua ottenuta conferendo al liquido ascendente una velocità costante  $V$  e alle breccie di minerale che piovono dall'alto una erogazione di  $n$  breccie al secondo. Poichè si tratta di piccole velocità si può ammettere che le breccie incontrino una resistenza viscosa e quindi una velocità di caduta, in seno al liquido, quando questo fosse immobile, espressa da:

$$[8] \quad K : p\bar{s}$$

dove  $K$  è una costante ed  $\bar{s}$  il titolo della soluzione. Siccome invece incontrano un liquido in movimento, la velocità di regime relativa al liquido sarà:

$$[9] \quad \bar{V} = V + \frac{K}{P_{s(z)}}$$

avendo messo in evidenza la dipendenza del titolo  $\bar{s}$  della soluzione ascendente dalla quota  $z$  da essa raggiunta.

La [8] rappresenterà poi la velocità delle breccie rispetto alle pareti della colonna.

Incidentalmente avvertiamo che  $\bar{s}(z)$  non è da confondere col titolo  $s(z)$  della soluzione che riempie i meati delle breccie attraversanti quello stesso strato, durante la loro caduta.

Siano ora  $\Delta R_0$  il peso di minerale grezzo erogato al secondo in cima alla colonna di lavorazione e  $\Delta S_0$  il peso di solvente puro immesso al secondo nella base inferiore.

In regime *stazionario* il volume di liquido che sbocca dall'alto, sarà  $\Delta S_0 : p_1$ , come pure sarà  $w_0 \cdot \Delta R_0$  il volume di minerale eliminato dalla bocca inferiore mentre, detto  $e$  il volume medio di una breccia risulterà:

$$w_0 \cdot \Delta R_0 = n e .$$

Una breccia in un tempo  $\Delta t$  attraversa l'altezza  $\bar{V} \cdot \Delta t$  di liquido  $\bar{s}(z)$ , pensato in quiete, perchè  $\bar{V}$  è appunto la velocità relativa data dalla [9].

Nel tempo  $\Delta t$ , la breccia che ha i meati al titolo  $s(z)$ , cede al liquido attraversato una certa quantità di materiale utile che indicheremo con:

$$[10] \quad x \frac{v_0}{w_0} e \cdot \Delta t,$$

perchè proporzionale al volume dei meati della breccia ed al tempo.

La cessione al liquido riduce il titolo della breccia da  $s(z)$  ad  $s - ds$ , tale che:

$$[11] \quad s - ds = \frac{\frac{v_0}{w_0} e p_s s - x \frac{v_0}{w_0} e \Delta t}{\frac{v_0}{w_0} e (p_s - dp_s)}.$$

D'altra parte, il liquido attraversato, pensato come fermo, ha il volume:

$$[12] \quad \Omega \bar{V} \cdot \Delta t - ne \cdot \Delta t,$$

perchè nel tempo  $\Delta t$  l'attraversano  $ne \cdot \Delta t$  breccie. Esso passerà dal titolo  $\bar{s}(z)$  al titolo  $\bar{s} + d\bar{s}$  per il fatto che acquista da ogni breccia la quantità [10] e per tutte le breccie che l'attraversano durante quel tempo:

$$x \frac{v_0}{w_0} e \cdot \Delta t \cdot n \cdot \Delta t.$$

Segue:

$$s + d\bar{s} = \frac{(\Omega \bar{V} \Delta t - ne \Delta t) p_s \bar{s} + x \frac{v_0}{w_0} en \Delta t^2}{(\Omega \bar{V} \Delta t - ne \Delta t) (p_s + dp_s)}.$$

Si deduce:

$$[13] \quad ds = x \frac{dt}{p_s} - s \frac{dp_s}{p_s}, \quad d\bar{s} = \frac{x v_0 \Delta R_0 dt}{w_0 (\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0) p_s} - \bar{s} \frac{dp_s}{p_s}.$$



Il liquido, come abbiamo detto, sale con velocità  $V$  e perciò, nel tempo  $dt$  la quota di uno strato è aumentata di  $dz$  dove:

$$[14] \quad dz = V dt,$$

equazione che ci permette di eliminare il tempo nelle equazioni differenziali [13].

Quanto ad  $x$ , che rappresenta la quantità di materiale utile asportato ad ogni unità di volume nell'unità di tempo, abbiamo ammesso al paragrafo 4, che essa sia proporzionale alla differenza fra i due titoli, cioè:

$$x = G(\bar{s} - s)$$

talchè le [13] diverranno:

$$[15] \quad ds = G \frac{\bar{s} - s}{p_s} \cdot \frac{dz}{V} - s \frac{dp_s}{p_s}$$

$$d\bar{s} = \frac{G(\bar{s} - s)v_0 \Delta R_0}{w_0(\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0)p_{\bar{s}}} \cdot \frac{dz}{V} - \bar{s} \frac{dp_{\bar{s}}}{p_{\bar{s}}}.$$

Nell'ipotesi che il peso specifico della soluzione subisca variazioni così piccole da potersene trascurare l'effetto nei riguardi della resistenza, come accade quando i pesi specifici del solvente e della materia utile sono poco diversi, allora  $\bar{V}$  è costante e le ultime due equazioni, tenuto conto della [2], si possono integrare.

Le [15] possono scriversi difatti:

$$[16] \quad \frac{ds}{dz} = H(\bar{s} - s)(\sigma s + \tau) + \frac{\sigma s}{\sigma s + \tau} \cdot \frac{ds}{dz}$$

$$\frac{d\bar{s}}{dz} = \bar{H}(\bar{s} - s)(\sigma \bar{s} + \tau) + \frac{\sigma \bar{s}}{\sigma \bar{s} + \tau} \cdot \frac{d\bar{s}}{dz},$$

dove si è posto:

$$[17] \quad H = \frac{G}{V}, \quad \bar{H} = \frac{G}{V} \cdot \frac{v_0 \Delta R_0}{w_0(\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0)}.$$

Ponendo ancora:

$$[18] \quad \sigma s + \tau = u^{-1}, \quad \sigma \bar{s} + \tau = \bar{u}^{-1}$$

si ottiene:

$$\frac{\tau}{\sigma} \frac{du}{dz} = -\frac{H}{\sigma} (\bar{u}^{-1} - u^{-1})$$

[19]

$$\frac{\tau}{\sigma} \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{\bar{H}}{\sigma} (\bar{u}^{-1} - u^{-1})$$

e dividendo membro a membro:

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{\bar{H}}{H},$$

ossia:

$$[20] \quad \bar{u} = \frac{\bar{H}}{H} u + C;$$

e perciò sostituendo nella seconda delle [19]:

$$\frac{\tau}{\sigma} \frac{du}{dz} = -\frac{H}{\sigma} \left( \frac{1}{\frac{\bar{H}}{H} u + C} - \frac{1}{u} \right);$$

donde:

$$z = -\frac{\tau}{H} \int \frac{u \left( u \frac{\bar{H}}{H} + C \right)}{u \left( 1 - \frac{\bar{H}}{H} \right) - C} du,$$

e finalmente:

[21]

$$z = -\frac{\tau}{H(H-\bar{H})} \left\{ \frac{\bar{H}}{2(\sigma s + \tau)^2} - \frac{CH}{\sigma s + \tau} + \frac{C^2 H}{H} \log \left( \frac{1}{\sigma s + \tau} - \frac{CH}{H - \bar{H}} \right) \right\} + C_1,$$

la quale fornisce  $s(z)$  per poi dedurre dalla [20]:

$$[22] \quad \bar{s}(z) = \frac{1}{\sigma \left( \frac{\bar{H}}{H} \frac{1}{\sigma s + \tau} + C \right)} - \frac{\tau}{\sigma}.$$

I valori dei parametri  $H$  ed  $\bar{H}$  possono variarsi a piacere in quanto essi dipendono da  $V, \Omega, \Delta R_0$ , quantità delle quali possiamo disporre a nostro arbitrio. Essi però dipendono anche da altre grandezze come  $G v_0 \sigma \tau$  le quali sono però fissate dalla natura delle sostanze in giuoco.

Le costanti arbitrarie  $C$  e  $C_1$  si possono determinare facilmente, quando siano dati  $V, \Omega, \Delta R_0$ , e si prefissino i valori iniziali di  $s(z)$  e di  $\bar{s}(z)$  alla bocca inferiore della colonna, e cioè:

$$\bar{s} = 1, \quad s = \eta, \quad \text{per } z = 0.$$

Anzitutto dalla [22] si dedurrà immediatamente la costante  $C$ ; la si sostituirà poi nella [21], fattovi  $z=0$ , e si ricaverà subito  $C_1$ .

Conosciuto  $C$  e  $C_1$ , la [21] fornirà direttamente l'altezza  $z=h$  che si deve attribuire alla colonna affinché, all'imbocco superiore di questa si ottenga il titolo  $s=1$  per il minerale che s'introduce.

Se con questo la colonna riesce troppo alta, ovvero il titolo  $s(h)$  del liquido che esce dallo sbocco superiore (titolo che si valuta mediante la [22], fattovi  $s=1$ ) riesce troppo basso, occorrerà modificare uno dei parametri  $V, \Omega, \Delta R_0$ , oppure  $\Delta S_0$ , in quanto  $\Delta S_0$  è legato ai precedenti dalla relazione tra volumi:

$$\frac{\Delta S_0}{p_t} = \Omega V - n e \frac{V}{V_0} = \Omega V - \Delta R_0 \frac{V}{V_0},$$

dove  $\bar{V}_0$  è la velocità relativa della breccia rispetto al liquido, valutata alla base superiore della colonna, se la [8] si considerasse nella sua effettiva variabilità.

Dalla bocca superiore esce ancora il volume  $\frac{\Delta S_0}{p_L}$  di liquido, ma al titolo  $\bar{s}(h)$ , quindi il peso sarà:

$$\frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot p_{\bar{s}(h)},$$

e il peso di materiale utile ricavato per secondo:

$$\frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot p_{\bar{s}(h)} \cdot \bar{s}(h) = \frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot \frac{\bar{s}(h)}{\sigma \bar{s}(h) + \tau}$$

Roma, 11 Dicembre 1941.