Vorlesung 051209

15 Das d'Alembert-Prinzip

Wir betrachten Systeme aus N Körpern (Mapu) mit den kartesischen Koordinaten $x = x_1 \dots x_{3N}$.

Die eingeprägten Kräfte (z.B. Schwerkraft) seien $F = F_1 \dots F_{3N}$.

Die freie Bewegung der Mapu sei in irgendeiner Form eingeschränkt
(Beispiel: mathematisches Pendel, starrer Körper).

15.1 Formulierungen des d'Alembert-Prinzips

Die Bewegung des mechanischen Systems erfolgt jederzeit so, dass gilt

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) - F_i\right] \delta x_i = 0, \qquad \textbf{d'Alembert-Prinzip} \tag{15.1}$$

Dabei ist $\delta x = \delta x_1 \dots \delta x_{3N}$ eine beliebige **virtuelle Verrückung**, d.h. eine infinitesimale Konfigurationsänderung im Rahmen der momentanen Bewegungsbeschränkungen.

Dies ist ein eigenständiges Axiom, alternativ zu den Newton- oder Lagrange-Gleichungen.

Die eckigen Klammern haben eine klare physikalische Bedeutung.

Sie erzwingen die Einhaltung der Bewegungsbeschränkungen. Man nennt sie

$$\textbf{Zwangskräfte} \qquad Z_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) - F_i. \tag{15.2}$$

$\Rightarrow$ alternative Formulierung des d'Alembert-Prinzips:

Die Gesamtarbeit der Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen verschwindet.

das ist einleuchtend:

Zwangskräfte wirken gegen mögliche Abweichungen von "momentan erlaubten Bewegungsrichtungen", stehen also senkrecht auf diesen, leisten damit keine Arbeit entlang dieser Richtungen.

15.2 Ohne Bewegungsbeschränkungen: Äquivalenz zu Newton II

N.II: $Z_i = 0$. Offentsichtlich ist dann auch (15.1) erfüllt.

umgekehrt: alle δx_i sind unabhängig $\rightarrow$ die Z_i müssen einzeln verschwinden.

15.3 Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem d'Alembert-Prinzip

Wir behandeln hier nur <u>holonome</u> Bewegungsbeschränkungen:[7]

Das System habe $f < 3N$ verallgemeinerte Koordinaten $q = q_1, \dots, q_f$, es gelte also

$$x = x(q, t). \tag{15.3}$$

[7] Für weitere Typen von Bewegungsbeschränkungen siehe Skript von WS 2004 bzw. Lehrbücher, z.B. Nolting.

Virtuelle Verrückungen: $\delta x = \sum_k \frac{\partial x}{\partial q_k} dq_k$ in (15.1) eingesetzt, Summationen vertauscht:

$$0 = \sum_k \left\{ \sum_i \left[\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) - F_i \right] \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right\} \delta q_k$$

die δq_k sind völlig unabhängig, also müssen die geschweiften Klammern einzeln verschwinden!

$$= \sum_i \left[\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) - F_i \right] \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \forall k \tag{15.4}$$

Das sind f Gleichungen, eine je Freiheitsgrad = Rohform der Lagrange-Gleichungen.

Für den Rest der Herleitung brauchen wir einige Hilffsätze.

Hilffsatz 1: $$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{15.5}$$

Beweis: $$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$ rechts taucht $\dot{q}_k$ nur als Faktor nach $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ auf. Das gibt die Behauptung.

Hilfssatz 2: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}. \tag{15.6}$$

Beweis: $$\frac{\partial}{\partial q_k} \dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} (\frac{\partial x_i}{\partial q_k}) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial x_i}{\partial q_k}) = \frac{d}{dt} (\frac{\partial x_i}{\partial q_k})$$ q.e.d.

Hilffsatz 3: Für die kinetische Energie des Systems $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$ gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}. \tag{15.7}$$

Beweis: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \overset{\text{Hilfss. 1}}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \overset{\text{Hilfss. 2}}{=} \sum_i (\frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

$$= \sum_i (\frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$ q.e.d.

Nun zurück zu (15.4). Den ersten Term rechts können wir durch Hilfssatz 3 substituieren, was gibt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = K_k. \quad \text{Dabei ist } K_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{15.8}$$

die "Projektion der eingeprägten Kräfte auf den Freiheitsgrad k".

Das sind die Lagrange-Gleichungen für beliebige eingeprägte Kräfte.

Wenn die Kräfte ein Potential besitzen, $F_i(x,t) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}$, dann wird daraus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = 0, \tag{15.9}$$

wenn man $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$ beachtet.

Das entspricht vollständig den Lagrange-Gleichungen mit der Lagrange-Funktion $L = T - U$.

16 Das Hamilton-Prinzip

= Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\textbf{Wirkung } S \stackrel{def}{=} \int_{t_A}^{t_B} L(q(t), \dot{q}(t), t)\ dt \quad \begin{cases} \text{- hängt ab von } t_A \text{ und } t_B \\ \text{- aber auch vom Verlauf von } q(t) \text{ dazwischen} \\ \text{- man nennt das ein Funktional von } q \end{cases} \tag{16.1}$$

<u>Grobform Hamilton-Prinzip:</u> die Systembewegung minimiert S.

nun etwas präziser.

gegeben sei mechanisches System mit verallgemeinerten Koordinaten $q = q_1 \dots q_f$

die Lagrange-Funktion sei $L(q, \dot{q}, t)$

die Positionen zu zwei Zeiten t und t_B seien q_A bzw. q_B[8]

$$\textbf{Hamilton-Prinzip}: \quad \begin{array}{l} \text{das mechanische System bewegt sich so,} \\ \text{dass die Wirkung (16.1) stationär wird.} \\ \text{(in der Regel minimal)} \end{array} \tag{16.2}$$

der Begriff "stationär" wird beim folgenden Beweis klar.

Behauptung: das Hamilton-Prinzip ist äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen.

Beweis a): Lagrange-Gleichungen $\Longrightarrow$ Wirkung stationär

Sei $q(t)$ die Lösung der L-Gleichungen mit $q(t_A) = q_A$ und $q(t_B) = q_B$[9]

Sei weiter $\delta(t)$ eine beliebige (2 mal diffbare) Funktion mit $\delta(t_A) = \delta(t_B) = 0$

und $q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon\delta(t)$ eine benachbarte potentielle Bahnkurve.

wir betrachten nun $S(\varepsilon) = \int_{t_A}^{t_B} L(q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t), t)\ dt$ als Funktion von ε.

$$\text{für } \varepsilon \to 0 \text{ gilt } S(\varepsilon) \quad = \quad S(0) + \varepsilon \left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{16.3}$$

Zu beweisen ist: der in ε lineare Term verschwindet für alle $\delta(t)$ (Stationarität der Wirkung).

Nun der Beweis:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\delta(t)\frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\delta}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] dt \quad \text{hier nun partielle Integration des } \dot{\delta}\text{-Terms ausnutzend } \delta(t_A) = \delta(t_B) = 0\text{:} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \delta(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] dt \\ &= 0 \qquad \text{weil die L-Gleichungen gelten. q.e.d.} \end{aligned} \tag{16.4}$$

[8] die Indizes A und B bezeichnen hier die Zeitpunkte, nicht bestimmte Koordinaten. q_A ist also der vollständige Koordinatensatz zur Zeit t_A. q_B analog.

[9] die L-Gleichungen sind ein System von f Diffgleichungen 2. Ordnung für die f Funktionen $q(t)$ und haben genau eine Lösung zu diesen Rand-Bedingungen.

Beweis b): Hamilton-Prinzip $\Longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen

Nehmen wir an, bei irgendeinem t zwischen t_A und t_B gelte die L-Gleichung nicht.

die eckige Klammer in (16.4) habe also einen Wert $a \neq 0$.

sie hat dann in einem hinreichend kleinen Intervall um t das gleiche Vorzeichen.

wählt man $\delta(t)$ nichtverschwindend (o.B.d.A. positiv) nur in diesem Intervall,

so kann das Integral nicht null werden.

das wäre ein Widerspruch zum Hamilton-Prinzip

also folgen aus diesem die Langrange-Gleichungen. q.e.d.