ALGEBRAI TOPOLÓGIA – 26. TÉTEL

NASZÓDI MÁRTON

Kérdés 0.1. *Hogyan látjuk be két topológikus térről, hogy* nem *homeomorfak?*

Válasz 0.2. *Keresünk egy topológikus invariánst, ami a két térre különböző.*

Példa 0.3.

- Összefüggőségi komponensek száma: Π_0
- Fundamentális csoport: Π_1
- Magasabb homotópikus csoportok: $\Pi_2, \Pi_3, ...$
- (Ko-)Homológiák (ezekről a kötelező órákon nem volt szó):$H_1, H_2, ... \quad H^1, H^2, ...$

Összefüggőségi komponensek száma:Π_0
Fundamentális csoport:Π_1
Magasabb homotópikus csoportok:$\Pi_2, \Pi_3, ...$
(Ko-)Homológiák (ezekről a kötelező órákon nem volt szó): $H_1, H_2, ... \quad (H^1, H^2, ...)$

A továbbiakban $I := [0, 1]$.

Definíció 0.4. *X, Y topológikus terek, $f, g : X \longrightarrow Y$ folytonos függvények. Ekkor f és g homotópok, ha $\exists H : X \times I \longrightarrow Y$ folytonos függvény, amire: $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x) \quad (\forall x \in X)$*

Megjegyzés 0.5. Ez egy ekvivalenciareláció.

Megjegyzés 0.6. A homotópia egy út a $C(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \text{ folytonos függvény}\}$ térben, ha azt megfelelő topológiával látjuk el (*:kompakt-nyílt topológia[1]).

Definíció 0.7. *Ha $A \subseteq X$, akkor az elegánsan úgy is mondható, hogy van egy (X, A) térpárunk. Két térpár közötti folytonos leképezések: $C((X, A), (Y, B)) := \{f : X \longrightarrow Y \text{ folytonos függvény}, f(A) \subseteq B\}$. Egy ilyen leképezést inkább így jelölünk: $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$.*

Definíció 0.8. *$A \subseteq X$. Ekkor a fenti H homotópia A-n kötött, ha $H(x, t) = H(x, 0) \quad (\forall x \in A \forall t \in I)$*

[1]* jelentése: nem kell tudni.

1. A fundamentális csoport definíciója

$$\Omega(X,x_0) := \{\alpha : I \longrightarrow X \textit{ folytonos} | \alpha(0)=\alpha(1)=x_0\}$$

az x_0-beli hurkok halmaza. Ezen egy művelet: $\alpha \cdot \beta$ legyen az a hurok, ami először bejárja α-t, aztán β-t, azaz:

$$(\alpha \cdot \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \textit{, ha } 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & \textit{, ha } 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

Legyen $\cong$ az x_0-ban kötött hototópia, mint ekvivalencia reláció $\Omega(X,x_0)$-on. α hurok ekvivalenciaosztálya: $[\alpha]$.

$$\Pi_1(X,x_0) := \Omega(X,x_0)/\cong$$

Az X tér (x_0-beli) fundamentális csoportja.

Megjegyzés 1.1. A szorzás Π_1-en: Két ekvivalenciaosztály szorzata két tetszőleges reprezentáns horok szorzatának ekvivalenciaosztálya:$[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha\cdot\beta]$. Ez jóldefiniált. A művelettel Π_1 egy *nem* feltétlenül Ábal csoport.

2. A fundamentális csoport tulajdonságai

Megjegyzés 2.1. Ha $f : X \longrightarrow Y$ folytonos függvény, $f(x_0) = y_0$, akkor ez indukál egy

$$f_* : \begin{array}{rcl} \Pi_1(X,x_0) & \to & \Pi_1(Y,y_0) \\ [\alpha] & \mapsto & [f\circ\alpha] \end{array}$$

homomorfizmust.

Megjegyzés 2.2 (Annak aki szereti a kategóriaelméletet). Így Π_1 egy $\mathcal{TOP} \longrightarrow \mathcal{GR}$ funktor, ahol $\mathcal{TOP}$ a topológikus terek, $\mathcal{GR}$ a csoportok kategóriája, előbbiben a folytonos leképezések, utóbbiban a homomorfizmusok a morfizmusok.

Megjegyzés 2.3. Ha X útösszefüggő, akkor $\Pi_1(X,x_0) \simeq \Pi_1(X,x_0')$ minden $x_0, x_0' \in X$ pontra.

Definició 2.4. *Ha X útösszefüggő, és $\Pi_1(X) = \{1\}$, akkor X egyszeresen összefüggő.*

Hogyan számolható ki Π_1? Az egyik legfontosabb eszköz a fedő leképezés.

Definició 2.5. *A $p : (X,x_0) \longrightarrow (B,b_0)$ folytonos térpárleképezés fedő leképezés, ha $\forall b \in B \ \ \exists U_b$ környezete B-nek, amire $p^{-1}(U_b) = \coprod V_\alpha$,ahol $\coprod$ a távoli uniót jelenti, és $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U_b$ homeomorfizmus.*

Tétel 2.6. *Legyen* $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, n_0)$ *fedőleképezés.*
Ekkor
Ha u *egy* b_0*-ban kezdődő út* B*-ben, akkor egyértelműen felemelhető* X*-ba, azaz egyértelműen létezik* $\bar{u}$ x_0*-ban kezdődő út* X*-ben, amire* $u = p \circ u$.
Ha pedig két út B*-ben homotóp, akkor a felemeltjeik is homotópok* X*-ben.*

Következmény 2.7. *Ha* $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ *fedő leképezés, akkor* $p_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(B, b_0)$ *monomorfizmus.*

Következmény 2.8. $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$,
$\Pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ *,ha* $n > 2$

Egy másik módszert ad Π_1 kiszámítására a Van Kampen tétele, amit Seifert bizonyított:

Tétel 2.9 (Van Kampen)**.** *Tegyük fel, hogy* $X = X_1 \cup X_2$*, ahol* $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ *útösszefüggőek,*X_1, X_2 *nyíltak* X*-ben,* $x_0 \in X_1 \cap X_2$, $\Pi_1(X_1, x_0)$ *egy prezentációja:* $\Pi_1(X_1, x_0) = F(G_1)/ < R_1 >$ *,ahol tehát* G_1 *egy generátorrendszer a csoportban,* R_1 *pedig a relációk,* $<>$ *a generált normálosztó;* $\Pi_1(X_2, x_0) = F(G_2)/ < R_2 >$ *pedig* $\Pi_1(X_2, x_0)$ *prezentációja hasonlóan, persze* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
Ekkor

$$\Pi_1(X, x_0) = F(G_1 \cup G_2)/ < R_1 \cup R_2 \cup R_{12} >$$

,ahol $R_{12} := \{i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\beta) | \forall \alpha \in \Pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}$ *,ahol* $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ *és* $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$.

Ez nem olyan ijesztő, mint ahogy kinéz, egyszerűen azt mondja, hogy vedd itt is a generátorokat, ott is és persze a relációkat itt is, ott is. Majdnem készen lennénk, de így kétszer vennénk a metszetbeli hurkokat, ami nem OK. Erre való R_{12}.

3. A fundamentális csoport alkalmazása

Definició 3.1. X *topológikus tér,* $A \subseteq X$ *az* X *retraktuma, ha* $\exists r : X \longrightarrow A$ *folytonos leképezés, amire* $r|A = id_A$

Tétel 3.2 (Borsuk)**.** S^1 nem *retraktuma* D^2*-nek.*

Bizonyítás. Ha lenne $r : S^1 \longrightarrow D^2$ retrakció, akkor a

$$\Pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(D^2) \xrightarrow{r_*} \Pi_1(S_1)$$

kompozíció $id_{\mathbb{Z}}$ kellene legyen, de olyan nincs, mert ez:

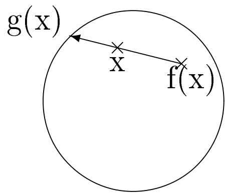
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \{1\} \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

Ami ellentmondás. Persze itt $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ tartalmazás. □

Tétel 3.3 (Brouwer-féle fixpont tétel)**.**

$$f : D^2 \longrightarrow D^2 \mathit{folytonos} \Longrightarrow \exists x \in D^2 : f(x) = x$$

Bizonyítás. Ha nem lenne fixpont, akkkor lenne ilyen g leképezés:



Ami egy $g : D^2 \longrightarrow S^1$ retrakció lenne. □

Tétel 3.4 (Sündisznó)**.** *Nincs S^2-n folytonos érintő vektormező, amely sehol sem nulla, azaz*

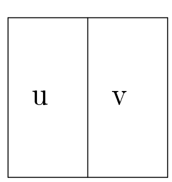
$$\nexists f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ folytonos leképezés} : \forall u \in S^2 f(u) \perp u, f(u) \neq 0$$

Tétel 3.5. *Mindig van a Földön két olyan pont, ahol ugyanannyi a hömérséklet és a nyomás is, azaz:*
Ha $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos leképezés, akkor van $u \in S^2 : f(u) = f(-u)$.

4. Magasabb homotópikus csoportok

$\Omega_n(X, x_0) := \{u : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)\}$ a szferoidok.
$\Pi_n(X, x_0) := \Omega_n(X, x_0)/$a kocka peremén kötött homotópia az X topológikus tér x_0 pontbeli n. homotópikus csoportja.
Az összeadás: $u, v \in \Omega_n(X, x_0)$

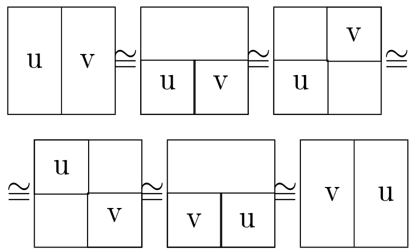
$$(u+v)(t_1, ..., t_n) := \begin{cases} u(2t_1, t_2, ..., t_n) & ,\text{ha } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ v(2t-1, t_2, ..., t_n) & ,\text{ha } 1/2 < t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Azaz: 

Persze a rajzon a vonalak mind x_0-ba mennek.

Megjegyzés 4.1. A művelet most is Π_n-re faktorizálható, és így az egy csoport.

Megjegyzés 4.2. Π_n Ábel csoport, ha $1 < n$. Ennek igazolása a következő ábrasorozattal illusztrálható:



Az üres részek az ábrán mind x_0-ba mennek.

Megjegyzés 4.3. Ha $\Pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$, akkor fontos, hogy a homotópia kötött.

Tétel 4.4.

$$\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

Ennek bizonyításához szükség van a fokszámra, aminek definiálásához szükséges a következő fejezet.

5. Egy kis differenciáltopológia

Kulcsszavak 5.1. [2] *Topológikus sokaság, sima sokaság, térkép (egy nyílt halmaz, ami homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel, és mellé a homeomorfizmus), atlasz (sok térkép, amik lefedik a sokaságot), sima atlasz (ha a térképek közötti áttérés függvények sima $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezések), érintőtér, érintőleképezés ($f : M \longrightarrow N$ esetén egy $p \in M$ pontban: $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ lineáris leképezés ...), zárt sokaság (kompakt, perem nélküli).*

Definició 5.2. *Egy sima sokaság irányított, ha adott egy olyan atlasza $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$, hogy az áttérésfüggvényekre igaz, hogy:*

$$\det J(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) > 0$$

minden pontban. Itt J a Jacobi mátrixsza egy $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezésnek.

Definició 5.3. *M^m, N^n sima sokaságok, $f : M \longrightarrow N$ sima leképezés. $x \in M$ kritikus pontja f-nek, ha $rang(df(x)) < n$, az $y \in N$ kritikus értéke f-nek, ha $\exists x \in f^{-1}(y)$ kritikus pont. $y \in N$ reguláris érték, ha nem kritikus érték.*

Definició 5.4. *M^m sokaság, $N \subseteq M$. Ekkor N részsokaság, ha M-nek van olyan atlasza, amelyen N minden térképen $\mathbb{R}^m$ egy alterére képződik le.*

Ez az algebrai topológia kurzus három tételt használ a sima sokaságok elméletéből:

[2] Ezeket ismerni kell, de nem definiálom.

Tétel 5.5. *M^m, N^n zárt sima sokaságok, $f : M \longrightarrow N$ folytonos leképezés.*
Ekkor f approximálható simával.

Megjegyzés 5.6. Ez itt egyenletes approximáció, azaz vegyünk egy metrikát N-en, adott $\varepsilon > 0$. Ekkor $\exists g : M \longrightarrow N$ sima leképezés, amire $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$, minden $x \in M$ pontra.

Bizonyítás. Sima Uriszon lemma, Analízis:konvolúció egy simítófüggvénnyel. □

Tétel 5.7. *Reguláris érték őse részsokaság.*

Bizonyítás. Analízis: Ez az implicit függvény tétel. □

Tétel 5.8. *Majdnem minden érték reguláris.*

Bizonyítás. Sard-lemma:M, N zárt sima sokaságok, $f : M \longrightarrow N$ sima leképezés.
Ekkor a kritikus értékek halmaza zárt, sehol sem sűrű N-ben. □

Már ezek segítségével is belátható néhány nemtriviális topológiai állítás:

Állítás 5.9. *$f : S^m \longrightarrow S^n$ folytonos, $m < n$.*
Ekkor f nullhomotóp

Bizonyítás. Approximáljuk simával. Annak a dimenziók miatt minden értéke kritikus érték. De a kritikus értékek halmaza nullmértékű, azaz van olyan érték, ami kimarad. Azaz a leképezés valójában $S^n \setminus \{pont\}$-ba megy, de az homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel, ott viszont minden nullhomotóp. □

Ennek az egyszerű állításnak több következménye is van:

Következmény 5.10. *S^m nem homeomorf S^n-mel, ha $n \neq m$.*

Következmény 5.11 (Dimenzióinvariancia)**.** *$\mathbb{R}^m$ nem homeomorf $\mathbb{R}^n$-mel, ha $n \neq m$.*

Az állításhoz hasonlóan bizonyítható:

Tétel 5.12 (Általános Borsuk tétel)**.** *M kompakt peremes sima sokaság.*
Ekkor nem létezik $r : M \longrightarrow \partial M$ retrakció.

Következmény 5.13 (Brouwer fixpont tétele)**.** *$f : D^n \longrightarrow D^n$ folytonos leképezés.*
Ekkor van $x \in D^n : f(x) = x$

6. Fokszám

M^n, N^n zárt sima sokaságok, $f : M \to N$ sima. $y \in N$ reguláris érték.
A mod 2 fokszám: $deg_2 fy := |f^{-1}(y)|$.
Ha M, N irányítottak is, akkor beszélhetünk egy $x \in M, f(x) = y$ pont előjeléről: x reguláris pont, ezért a környezetében f "olyan, mintha egy teljesrangú $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$" leképezés lenne. Van tehát Jacobi mátrixa, és azt lehet mondani, hogy:
Ha $det(Jf) > 0$, akkor x pozitív, ha $det(Jf) < 0$, akkor x negatív. Tehát előjelesen is osszesszámolhatók: $degfy := \#_{alg} f^{-1}(y)$.

Az "olyan mintha ..." érvelés persze azt jelenti, hogy itt is ott is térképeken nézzük f-et. A térképváltásnál pontt azért nem változik a determináns előjele, mert M, N irányíthatóak. Persze a determináns értéke nem jól definiált, térképfüggő.

Megjegyzés 6.1.
- Ha $f \cong g$, akkor $deg_{(2)} fy = deg_{(2)} gy$, feltéve, hogy y közös reguláris érték.
- $y, z \in N$ reguláris értéke f-nek. Ekkor $deg_{(2)} fy = deg_{(2)} fz$.

Azaz $deg_{(2)}$ csak f homotópiaosztályától függ.

7. Alkalmazás

Tétel 7.1 (Sündisznó)**.** *A* $2n$*-dimenziós sündisznó nem fésülhető meg, azaz nincs* S^{2n}*-en folytonos sehol sem* 0 *érintő vektormező.*

Tétel 7.2 (Borsuk-Ulam)**.** $f : S^m \to \mathbb{R}^m$ *folytonos.*
Ekkor van $x \in S^m$*, amire* $f(x) = f(-x)$*.*

8. Poincarè-Hopf tétel

Definició 8.1. *Egy* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *tartomány, melyre* $\partial\Omega$ *sima hiperfelület Gauss-leképezése:*

$$\beta : \begin{array}{rcl} \partial\Omega & \to & S^{n-1} \\ x & \mapsto & \nu(x) \end{array}$$

,ahol $\nu(x)$ *az* x*-beli külső normálvektor.*

Definició 8.2. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *tartomány,* $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *sima lek.,* p *izolált null-hellyel. Indexe:* $ind_v(p) := deg(\frac{v}{\|v\|} : S^\varepsilon \to S^{n-1})$

Tétel 8.3 (Hopf)**.** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *tartomány, melyre* $\partial\Omega$ *sima hiperfelület,* $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *véges sok null-hellyel:* $p_1, ..., p_k$ *egyik sem a peremen.*
Ekkor $\sum ind_v(p_i) = deg($*Gauss-leképezés a peremen*$)$*.*

Tétel 8.4 (Poincarè-Hopf). *M zárt sima sokaság, v érintő vektormező véges sok nullhellyel:* $p_1, ..., p_k$.
Ekkor $\sum ind_v(p_i) = \chi(M)$

Definició 8.5. *Véges CW-komplexus Euler-karakterisztikája:*

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^1 c_i$$

,ahol c_i *az i-dimenziós lapok száma.*

Hogyan van vektormezőnek indexe?
Lokálisan M homeomorf $\mathbb{R}^n$-nel, mondható tehát, hogy lokálisan a vektormező egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés.

9. Felületek

Felület: kompakt perem nélküli zárt sokaság.
Szimpliciális komplexus: Véges sok szimplex összeragasztva úgy, hogy bármeéy kettő metszete, ha nem üres, akkor lapja mindkettőnel.
Egy X topológikus tér triangulációja: egy homeomorfizmus egy szimpliciális komplexussal.

Állítás 9.1. *Minden felület triangulálható.*

A trianguláció ad egy sokszögcsaládot: véges sok sokszöget összesen páros sok oldallal, az oldalak párokba rendezve, a párokra pedig meg van adva, hogy milyen irányban kell összeragasztani őket.
A sokszögcsaládból egy sokszöget lehet összeragasztani, ha a felület összefüggő. Majd ezt a sokszöget ügyesen felvágva, ujra összeragasztva, véges sok ilyen transzformációt végezve eljutunk a kanonikus felületekhez.

Mik a kanonikus felületek?

Vegyünk egy $4p$ szöget és írjuk az oldalaira sorba az $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, a_2^{-1}, b_2^{-1}, ...$ kifejezéseket. Az azonos betűvel jelölteket kell összeragasztani, de mint azt a kitevő jelzi az egyiken óramutató ellen menve a másikon óraszerint haladunk. Az összeragasztás után kapott irányítható felület jele: A_p.
A_0 a gömb
A_k a k-személyes úszógumi.

A másik típus: Vegyünk egy $2q$ szöget és írjuk az oldalaira sorba az $a_1, a_1, a_2, a_2, ...$ kifejezéseket. Az azonos betűvel jelölteket kell összeragasztani, most azonos irányban. Az összeragasztás után kapott nem irányítható felület jele: A'_q.
A_1 a projektív sík.