

λ -连通分割和最优区域分并分割算法

陈 溧

(武汉大学计算机科学系, 武汉 430072)

THE λ -CONNECTED SEGMENTATION ALGORITHM AND THE OPTIMAL ALGORITHM FOR SPLIT- AND-MERGE SEGMENTATION

Chen Li

(Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: An $O(m|\Sigma_m|)$ time λ -connected segmentation algorithm is given, here m is the dimension of the discrete space Σ_m . The Length k -limited λ -segmentation is developed and it is proved that, if the connected quantity of the image in Σ_m is not greater than $1/2|\Sigma_m|$ then $O((m-1)\ln n) < k \leq O((m+1)\ln n)$. An $O(|\Sigma_m| \log_2 |\Sigma_m|)$ time algorithm for split-and-merge (quadtree) image segmentation is presented. These two algorithms are compared in theory and applications.

Key Words: λ -connected, split-and-merge, segmentation, algorithm.

摘 要: 本文提出适用于多维灰度图象的 λ -连通分割算法, 其计算时间为 $O(m|\Sigma_m|)$; 这里 m 为空间 Σ_m 的维数。我们对 λ -连通分割作了误差分析, 并利用长度 k -局部受限的概念, 证明当图象在 Σ_m 中的连通量不大于 $\frac{1}{2}|\Sigma_m|$ 时, k 必须大于 $O((m-1)\ln n)$ 且几乎不需要超过 $O((m+1)\ln n)$ 。

我们改进了经典的区域分并(四叉树)分割方法, 得到其时间复杂性为 $O(|\Sigma_m| \cdot \log_2 |\Sigma_m|)$ 的算法, 并从理论和应用两方面对这两种方法作了比较。

关键词: λ -连通, 分并技术, 分割, 算法。

一、引 言

分割是在一幅图像上辨别出观察者看上去均匀的各个区域, 它是图像处理和识别中

本文得到中国科学院青年奖励研究基金资助, 于 1989 年 4 月 25 日收到。作者介绍见本刊第 3 期。

的一类重要方法^[1,2]。最近, Wilson 和 Spann (1988)有专著论述这一专题^[3]。常见的分割方法有: 阈值分割、聚类分割、区域生长分割和边缘检测与跟踪。其中区域生长分割, 特别是四叉树区域生长分割一直为人们所重视^[4,5]。

区域生长分割的思想是 Grimsdale 提出的^[7], 它是在区域中寻求一点然后由这一点根据均匀性的准则生长扩充。四叉树分割是使用二维分裂与合并技术去扩充区域; 在高维时, 这种方法称为区域分并分割, 它被认为是一种高级分割方法^[8]。

本文根据 1984 年我们提出的 λ -连通概念^[9,10], 证明了 λ -连通不仅可以作为一种分类方法, 而且可以是一种分割方法, 称之为 λ -连通分割。我们设计了一个最优算法去实现 λ -连通分割。最近, 我们还扩充了 λ -连通的内涵, 讨论它与智能拟合的关系, 并证明任何一种模式分类都等价于某度量空间上的 λ -连通分割^[11]。

本文改进了经典的分并分割算法, 证明了改进后算法的计算时间为 $O(|\Sigma_m| \log_2 |\Sigma_m|)$, 这一结果达到了最优。最后, 我们比较了 λ -连通分割和区域分并分割, 并综合这两种分割简述了正则 λ -连通分并分割。

二、 λ -连通分割与受限 λ -连通分割

我们先描述阈值分割, 不妨以二值图像为例。设 Σ_m 为 m 维网格空间, $S: \Sigma_m \rightarrow \{0, 1\}$ 是 Σ_m 上的二值图像。如果 x, x' 是 Σ_m 中的两邻点, 当 $S(x) = S(x')$ 时, 称 $p_x = (x, S(x))$ 和 $p_{x'} = (x', S(x'))$ 为连通。根据 Tarjan 的先深(宽)查找算法^[12], 阈值分割算法如下。

算法 A:

Step 1 对 Σ_m 中任一点 x , 在 x 上打 * 标记, 即 $L(x) \leftarrow *$ 。顺序检查 x 的各邻点, 如果有 x' , 使 $|S(x) - S(x')| = 0$, 且 $L(x) \neq *, **$, 则 $x \leftarrow x'$ 。重复 Step 1。

Step 2 如果关于 x 点没有上述的邻点 x' 存在, 令 $L(x) \leftarrow **$, 找到进入 x 的点 y , 退回 y , 即 $x \leftarrow y$, 返回 Step 1。

显然, 打上标记“**”的点构成图像 S 的一部分。如对算法 A 稍作修改就可以找到 S 的所有部分。

设 S 是 Σ_m 上的灰度图像, $S: \Sigma_m \rightarrow [0, 1]$; 如仍然使用算法 A, 那么划分出的连通块有时会很小时, 而且不能抗干扰。在文献[9,10]中, 我们对两邻点 x, y 定义象点 p_x 和 p_y 的连通度为

$$C(p_x, p_y) = \begin{cases} 1 - \frac{|S(x) - S(y)|}{|S(x) + S(y)|} & S(x) + S(y) \neq 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases} \quad (1)$$

设 π 是一条长度为 k 的路径, 即 $\pi = \pi(x_0, x_k) = x_0 x_1 \cdots x_k$, 其中 x_i, x_{i+1} 是邻接的。在大多情况下要求 π 是简单路径。称

$$CP(\pi) = \min\{C(p_{x_i}, p_{x_{i+1}}) | i = 0, \dots, k-1\} \quad (2)$$

为路径 π 上的连通量。

S 上任两点 p, q 的连通度定义为

$$C(p, q) = \max\{CP(\pi) \mid \pi = \pi(x, y) \text{ 为 } \Sigma_m \text{ 中的路径,} \\ \text{且 } p = (x, S(x)) \text{ 及 } q = (y, S(y))\} \quad (3)$$

定义 1. 称 p, q 为 λ -连通的, 如果 $C(p, q) \geq \lambda, \lambda \in [0, 1]$.

容易证明, 由(1), (2)和(3)确定的连通度在 λ -连通的意义上构成一等价关系, 因而可以用于分类. 然而, 使 λ -连通构成等价关系的连通度函数是很多的, 它只需满足以下三个条件即可: (i) $C(p, q) \leq c, c$ 为一常数; (ii) $C(p, q) = C(q, p)$; (iii) $C(p, q) \geq \min\{C(p, r), C(r, q)\}$.

本文依然讨论由(1), (2)和(3)确定的连通度, 它已成功地用于地球物理数据处理^[10].

不难看出, p 和 q 是 λ -连通的当且仅当存在一路径 $\pi(x_0, x_k) = x_0 x_1 \cdots x_{k-1} x_k$, 这里 $p = (x_0, S(x_0))$ 和 $q = (x_k, S(x_k))$, 使 $\forall_i C((x_i, S(x_i)), (x_{i+1}, S(x_{i+1}))) \geq \lambda$. 这样, 我们仅需稍微修改算法 A, 就可获得 λ -连通分割算法了.

算法 A':

Step 1 对 Σ_m 中任一点 x , 在 x 上打上 * 标记, 即 $L(x) \leftarrow *$, 顺序检查 x 的各邻点. 如果有 x' , 使 $C((x, S(x)), (x', S(x'))) \geq \lambda$ 且 $L(x') \neq *, **$; 则 $x \leftarrow x'$. 重复 Step 1.

Step 2 如果对点 x 没有上述的点 x' 存在, 那么令 $L(p) \leftarrow **, *$, 并找到进入 x 的点 y , 退回 y 即 $x \leftarrow y$. 返回 Step 1.

打上 ** 标记的就是一个 λ -连通部分. 由于 Σ_m 中的一点至多有 $2m$ 个直接邻点, 或至多有 $3^m - 1$ 个任意邻点(在 Σ_r 中为 4-邻接和 8-邻接). 那么有

引理 1. 在一个 $O(m|\Sigma_m|)$ 时间的先深(宽)查找算法完成 λ -连通分割. 如果邻点定义是非直接的, 该算法的计算时间为 $O(3^m|\Sigma_m|)$.

后文主要讨论直接邻接, 任意邻接可类似考虑.

引理 2. 设 p 和 q 是通过长为 k 的路径 λ -连通的, 那么 $S(x_p)/S(x_q)$ 最大可达 $\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)^k$. 这里 $p = (x_p, S(x_p))$ 及 $q = (x_q, S(x_q))$.

证明. 设路径 $\pi = \pi(x_0, x_k) = x_0 x_1 \cdots x_k$ 上的连通量不小于 λ , 这里 $x_0 = x_p, x_k = x_q$. 所以

$$1 - \frac{|S(x_0) - S(x_1)|}{|S(x_0) + S(x_1)|} \geq \lambda$$

不妨设 $S(x_0) \geq S(x_1)$, 那么

$$S(x_0)/S(x_1) \leq (2-\lambda)/\lambda$$

又因为当 $S(x_0) \geq S(x_1) \geq \cdots \geq S(x_k)$ 时达到极大. 所以

$$\frac{S(p)}{S(q)} = \frac{S(x_0)}{S(x_k)} = \frac{S(x_0)}{S(x_1)} \cdot \frac{S(x_1)}{S(x_2)} \cdots \frac{S(x_{k-1})}{S(x_k)} \leq \left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)^k \quad (4)$$

上不等式中“等于”是可能出现的. 证毕.

上述讨论告诉我们, 尽管 λ -连通抗干扰, 并有一快速算法去实现, 但盲目使用将导致较大的误差. 为了保证分割的合理性, 必需限制误差的范围.

定义 2. 称 λ -连通是 k 局部受限的, 如果对任意长度不大于 k 的路径 $\pi(x_p, x_q)$, 当 $CP(\pi(x_p, x_q)) \geq \lambda$ 时, 有 $S(x_p)/S(x_q) \leq 1 + \varepsilon_k, \varepsilon_k \geq 0$.

引理 3. 对于 k 局部受限的 λ -连通, 设 ε_k 给定, 则 λ 可取的最小值为

$$\lambda_{\min} = 2 / (1 + \sqrt[k]{1 + \varepsilon_k}).$$

定理 1. k 局部受限的 λ -连通是一个等价关系, 这里 $\lambda \in [2 / (1 + \sqrt[k]{1 + \varepsilon_k}), 1]$.

证明 只需证明传递性. 设 p 和 q , q 和 r 分别都是 k 局部受限 λ -连通的, 即存在 $\pi(x_p, x_q)$ 和 $\pi(x_q, x_r)$ 使 $CP(\pi(x_p, x_q)) \geq \lambda$ 及 $CP(\pi(x_q, x_r)) \geq \lambda$. 如果 $\pi(x_p, x_q)$ 或 $\pi(x_q, x_r)$ 的长度不大于 k , 那么 $S(x_p)/S(x_q) \leq 1 + \varepsilon_k$ 或 $S(x_q)/S(x_r) \leq 1 + \varepsilon_k$.

设 k_1 为 $\pi(x_p, x_q)$ 的长, k_2 为 $\pi(x_q, x_r)$ 的长. 如果 $k_1 + k_2 > k$, 则 $\pi(x_p, x_r) = x_p \cdots x_q \cdots x_r$, 不在限制范围内, 因而满足条件.

如果 $k_1 + k_2 \leq k$. 由引理 2、3 得

$$S(x_p)/S(x_q) \leq \left(\frac{2 - \lambda}{\lambda} \right)^{k_1}$$

及

$$S(x_q)/S(x_r) \leq \left(\frac{2 - \lambda}{\lambda} \right)^{k_2}$$

推出

$$\begin{aligned} S(x_p)/S(x_r) &\leq (S(x_p)/S(x_q)) \cdot (S(x_q)/S(x_r)) \\ &\leq \left(\frac{2 - \lambda}{\lambda} \right)^{k_1 + k_2} \leq \left(\frac{2 - \lambda}{\lambda} \right)^k \leq 1 + \varepsilon_k. \end{aligned}$$

所以 p, r 是 k 局部受限 λ -连通的. 证毕.

局部受限的 λ -连通分割算法与算法 A' 基本相同, 只要先根据 k 和 ε_k 计算出 λ 的取值范围即可; 其计算时间仍为 $O(m|\Sigma_m|)$.

三、局部受限的期望值

在上节中, 如果 k 较小, 则分割过粗误差大; 如果 k 较大, 则分割过细, 类别过多. 于是问, k 为何值时合理? 下文根据随机图论的知识来估计 k 的期望值.

设 $G_p = (\Sigma_m, E_p)$ 是随机图, $(a, b) \in E_p$ 当且仅当 (a, b) 在 Σ_m 中邻接且选择 (a, b) 的概率为 p .

引理 4. m 维超立方体中有 $2^{m-i} \binom{m}{i}$ 个 i 维超立方体.

引理 5. m 维超立方体中度为 $m+i$ 的点数为 $(n-2)^i \binom{m}{i} 2^{m-i}$, 其中 n 为超立方体的边点数.

上述两引理的证明从略.

定理 2. 边点数为 n 的 m 维超立方体 Σ_m 中点度数的期望值为 $\left(1 + \frac{n-2}{n}\right) m$.

证明 根据引理 5, 点度数的期望值为

$$E_d = \frac{\sum_{i=0}^m (m+i)(n-2)^i \binom{m}{i} 2^{m-i}}{n^m} = m + \frac{\sum_{i=0}^m i(n-2)^i \binom{m}{i} 2^{m-i}}{n^m}$$

由于 $|\Sigma_m| = n^m = (n-2+2)^m = \sum_{i=0}^m 2^{m-i} \binom{m}{i} (n-2)^i$

考虑 $(x+2)^m = \sum_{i=0}^m 2^{m-i} \binom{m}{i} x^i$, 于是

$$\frac{d(x+2)^m}{dx} = \sum_{i=0}^m i \cdot 2^{m-i} \binom{m}{i} x^{i-1}$$

故

$$\frac{xd(x+2)^m}{dx} \Big|_{x=n-2} = (E_d - m)n^m$$

即

$$E_d = \frac{(n-2)m(n-2+2)^{m-1}}{n^m} + m = \left(1 + \frac{n-2}{n}\right)m. \text{ 证毕.}$$

设 E_k 为 $G_p = (\Sigma_m, E_p)$ 中长度为 k 的路径的个数的期望值, 不难证明.

$$n^m \cdot m^k \cdot p^k \leq E_k < n^m \cdot E_d^k \cdot p^k \quad (5)$$

我们还看到, 如果 $p \cdot E_d > 1$ 即 $p > \left[\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)m\right]^{-1}$, 那么 E_k 是 k 的非减函数.

这将给我们的计算带来困难. 设图象 S 在 Σ_m 中的连通量为:

$$CH(S, \Sigma_m) = \frac{1}{2} \sum_{q,r \in \Sigma_m} C(q, r) \quad (6)$$

假设均匀分布, 即可设 $CH(S, \Sigma_m) = \frac{1}{2} E_d \cdot |\Sigma_m| \cdot p$. 如果 $CH(S, \Sigma_m) \leq \frac{1}{2} |\Sigma_m|$, 则 $p \leq \left[\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)m\right]^{-1}$.

定理 3. 当 $CH(S, \Sigma_m) \leq \frac{1}{2} |\Sigma_m|$ 时, 有

(i) 如果 $k > (m+1)\ln n / -\ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)mp\right]$, 那么几乎所有的 Σ_m 上的图像都没有长度为 k 的路径.

(ii) 如果 $k \leq (m-1)\ln n / -\ln(mp)$, 那么几乎所有的 Σ_m 上的图像都有长度为 k 的路径.

证明 事实上定理 3 的证明等价于证明:

(i) $P(X_k > 0) \rightarrow 0$, 当 $k > (m+1)\ln n / -\ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)mp\right]$ 时,

(ii) $P(X_k > 0) \rightarrow 1$, 当 $k \leq (m-1)\ln n / -\ln(mp)$ 时; X_k 是图上长度为 k 的路径的个数.

令 $n^m \left[\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)mp\right]^d = 1$, 即

$$d = m \ln n / -\ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n} \right) mp \right] \quad (7)$$

若 $k > d$, 不妨设 $k \geq d + r$, 根据(5)有

$$\begin{aligned} E_k &< n^m \left[\left(1 + \frac{n-2}{n} \right) mp \right]^{d+r} \\ &< e^{r \ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n} \right) mp \right]} \end{aligned}$$

如果 $r = -\ln n / \ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n} \right) mp \right]$, 则

$$E_k < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (8)$$

故有 $P(X_k > 0) \rightarrow 0$, 所以(i)成立. 事实上只要

$$r = -\ln f(n) / \ln \left[\left(1 + \frac{n-2}{n} \right) mp \right], \quad f(n) \rightarrow \infty \text{ 即可.}$$

现在我们来证明(ii). 已知

$$P(X_k = 0) \leq \sigma_k^2 / E_k^2, \quad \sigma_k^2 \text{ 为 } X_k \text{ 的方差.}$$

显然, 如果 $P(X_k = 0) \rightarrow 0$, 则 $P(X_k > 0) \rightarrow 1$. 因为 $P(X_k \geq 0) = 1$, 而 $P(X_k > 0) = P(X_k \geq 0) - P(X_k = 0)$. 设 E_k^2 为 X_k 的二阶原点矩, 则

$$\frac{\sigma_k^2}{E_k^2} = \frac{E_k^2 - 1}{E_k^2} \quad (9)$$

我们知道, 如果 $\mathcal{A}(G)$ 是某一类 $\Psi = \{F_1, F_2, \dots\}$ 中 G 的导出子图的数目^[3], 有

$$E(\mathcal{A}^i(G)) = \sum_{(F, F') \in \Psi} P(G \text{ 包含 } F \text{ 和 } F') \quad (10)$$

本文中的 E_k^2 意指恰有长度为 l ($l = 0, 1, \dots, k$) 的路径对之和, 即

$$\begin{aligned} E_k^2 &\leq E_k \cdot E_k + E_k \sum_{i=1}^k (k-i)(E_{sp})^{k-i} \\ &\leq E_k + E_k \cdot \frac{E_{sp}[1 - (k-1)(E_{sp})^{k-1}]}{1 - E_{sp}} \\ P(X_k = 0) &\leq \frac{\sigma_k^2}{E_k^2} \leq \frac{E_{sp}[1 - (k-1)(E_{sp})^{k-1}]}{E_k(1 - E_{sp})} \end{aligned}$$

由(5)得

$$P(X_k = 0) \leq \frac{E_{sp}}{n^m m^k p^k (1 - E_{sp})}$$

设 $n^m m^k p^k = f(n)$, $f(n) \rightarrow \infty$, 有

$$d = [m \ln n - \ln f(n)] / -\ln(mp) \quad (11)$$

当 $k \leq d$ 时, $P(X_k = 0) \rightarrow 0$. 特别地, 当 $f(n) = n$ 时, 我们有 $d = (m-1) \ln n / -\ln(mp)$. (ii) 得证. 证毕.

如果图像的连通量 $CH(S, \Sigma_m) > \frac{1}{2} |\Sigma_m|$, 上述证明的某些过程不收敛, 也就是 k 与 $|\Sigma_m|$ 成正比.

四、改进的二维图像二叉树分割

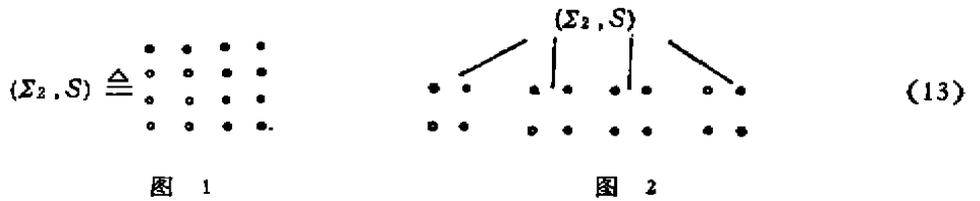
区域生长分割常常用平均亮度作为均匀性准则^[4]。这一准则不能保证分割结果构成数学上的分类,这样连通性算法将不能使用。解决这个问题有两种方法,其一是针对性的给出启发函数^[5]。其二就是采用二叉树区域分割方法。如果图像不是二维的,二叉树分割称作区域分并分割^[4,3,6]。它使用分并 (divide-and-conquer) 策略,以小区域代替像素去生长,主要优点是降低了对噪声的灵敏度。

设 Σ_2 的边长为 n , $n = 2^l$ 。对于某确定的 ϵ , 如果区域 $A \subset \Sigma_2$ 满足:

$$\forall x \in A \left(\left| S(x) - \frac{1}{|A|} \sum_{y \in A} S(y) \right| \leq \epsilon \right) \tag{12}$$

那么称 A 是均衡的,也可以把 $(A, S(A))$ 作为一连通部分或一块。

我们先从一个简单的例子来看区域生长分割。设图 1 所示的图像 $S: \Sigma_1 \rightarrow \{0, 0\}$



Σ_2 是非均匀的,我们分上式图 1 为四份,见图 2。
然后看其第一儿子结点见图 3。

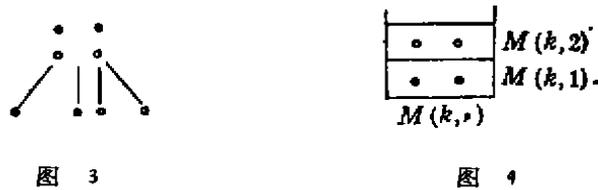


图 3 第一子均衡,进栈 $M(k, 1)$, 第二子进栈 $M(k + 1, 1), \dots$; 直到四子均进栈。然后合并,见图 4。

其余 $M(k + 1, \bullet), \dots$ 清零待用。类推,我们得到四个栈的内容见图 5。



合并这四个栈(横放)见图 6。

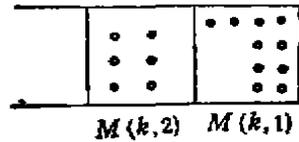


图 6

可见,一个栈是某次分解的结果。上述过程的时间复杂性为:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot U\left(\frac{n}{2}\right) \quad (14)$$

式(14)中 $U\left(\frac{n}{2}\right)$ 为合并所需时间, c 为常数。

合并即是在两个栈中检查有无两相邻且均衡的块。由于每个栈可能有 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 个元,那么邻元检查时间一般估计为 $O\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$,由(14)得

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n^2 = O(n^2) = O(|\Sigma_2|^2) \quad (15)$$

上述分析表明减小整个算法的时间关键在减小合并时间。下文讨论这个问题。

首先对栈中内容作些加强,称被用于划分的区域为基区域,一个栈对应一个基区域。不妨用 $M(k), k=1,2,\dots$, 表示各个栈,用 $M(k,l), l=1,2,\dots,B(k)$ 表示第 k 栈中的第 l 块, $M(k,l,i)$ 表示第 k 栈中,第 l 块的第 i 个元素,令

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{x \in M(k,l)} S(x) \\ n &= |M(k,l)| \\ \min &= \min_{x \in M(k,l)} S(x), \max = \max_{x \in M(k,l)} S(x) \\ PR(k,l) &= (\sigma, n, \min, \max) \end{aligned}$$

显然, $\left| \min - \frac{\sigma}{n} \right| \leq \varepsilon$ & $\left| \max - \frac{\sigma}{n} \right| \leq \varepsilon$ 也是均衡的充要条件,并设

$$\begin{cases} f(k,l,i) = M(k,l,i+1) \\ g(k,l,i) = M(k,l,i-1) \\ f(k,l,n) = * \\ g(k,l,1) = * \end{cases} \quad (16)$$

而对于任一点 x , 令 $k(x) = k, l(x) = l$ 和 $i(x) = i$ 即是 $M(k(x), l(x), i(x)) = x$ 。

设有边长为 ε 的四个待合并的基区域(如图7)合并算法见算法B。

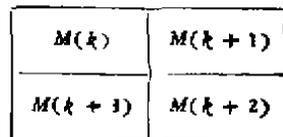


图 7

算法B: 分并分割的合并算法

```

begin
  for  $K := k$  to  $k + 3$  do begin
    for  $L := 1$  to  $B(K)$  do begin
       $Star(M(K, L)) := **$ ;  $i := 1$ ;  $p := M(K, L, i)$ 
1:   if ( $p$  在合并的边界上) then begin
      while ( $p'$  是  $p$  的外邻点) do begin
        if ( $Star(M(k(p'), i(p')) \neq **$ ) then
          begin
            if ( $|MIN(\min, \min') - \frac{\sigma + \sigma'}{n + n'}| \leq s$  &  $|MAX(\max, \max') - \frac{\sigma + \sigma'}{n + n'}| \leq s$ ) then
              begin
                 $p$  的后点  $f(p)$  进栈 Stack, 以便把新链插入老链
                根据  $g(p'), \dots, g^{n-1}(p')$  找到  $g^n(p') = *$ ,
                 $f(p) := g^{n-1}(p')$ , 即把原链解开接在新链之后
                 $p := g^{n-1}(p')$ ;  $Star(M(k(p), i(p))) = **$ 
                goto 1
              end;
            else
              if ( $f(p) = *$ ) then
                if (Stack =  $\phi$ ) goto 2
              else
                 $f(p) := Stack\ Top$  (栈顶送  $f(p)$ )
            end;
          end;
        end;
         $p := f(p)$ 
        goto 1
      end;
2:   end;
    end;
  end

```

最后根据 f 和 g 把所有块存入一个栈。

我们看到,合并总是要通过边界的,而边界点只有 $O(\epsilon)$ 个,也就是说仅有 $O(\epsilon)$ 个部分合并在一起。在算法 B 中区域内每点至多经过两次,而边界点也只经过常数(邻点个数)次。因此

引理 6. 算法 B 的计算时间为 $O(\epsilon^2)$ 。

定理 4. 二维图像的区域分并分割的时间复杂性为 $O(|\Sigma_2| \log_2 |\Sigma_2|)$ 。

证明 由引理 6 和(14)有

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 4T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 = O(n^2 \log_2 n) \\
 &= O(|\Sigma_2| \log_2 |\Sigma_2|). \text{ 证毕.}
 \end{aligned}$$

五、多维图像的区域分并生长分割

上节中的算法 B, 可以推广到三维乃至多维图像。由于维数增加, 基区域和合并边界数随之增加。

定理 5. 多维灰度图像的区域分并分割的计算时间为 $O(|\Sigma_m| \log_2 |\Sigma_m|)$ 。

略证 由于一个基区域被分开成 2^m 个基区域, 这样合并边界就有 $m \cdot 2^{m-1}$ 个。这时算法 B 的时间复杂性为 $O(m \cdot 2^{m-1} \cdot t^m) = O(m2^m t^m)$, 所以

$$T(2t) = 2^m T(t) + m \cdot m2^m t^m$$

$$T(n) = O(mn^m \log_2 n) = O(|\Sigma_m| \log_2 |\Sigma_m|)$$

证毕。

由于分并方法导致 2^m -树有 m 层, 这样所得到的 $O(|\Sigma_m| \log_2 |\Sigma_m|)$ 达到了最优。除非不用分并技术。

六、两种分割方法的比较

λ -连通分割与区域分并分割相比, 具有节省时空, 编程简单的优点; 然而后者较前者稳定, 不会出现大的误差。在国家七·五攻关项目(75-54-02-08-12)“物探资料灰色识别方法研究”和地矿部七五项目“三维地层层位的拓扑识别”中, 我们用这两种方法分别对塔里木北部某工区和川中某工区作实际处理, 获得了满意的结果, 正确划分出地层层位。图 8 是用 λ -连通分割在某测线上作出的速度层位划分, 图 9 是用区域分并分割的结果。

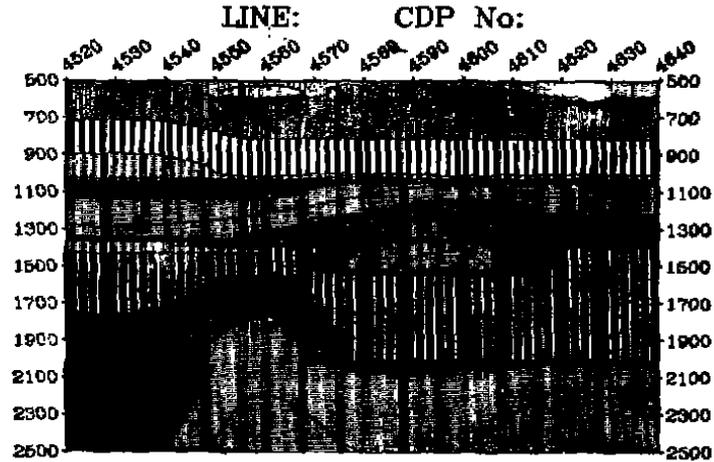


图 8

在地球物理资料处理中, 我们发现区域分并分割不如 λ -连通分割适用。原因是, 地球物理数据大多呈渐变特征, λ -连通正好予以刻画, 而区域分并用平均亮度准则就不合适了。

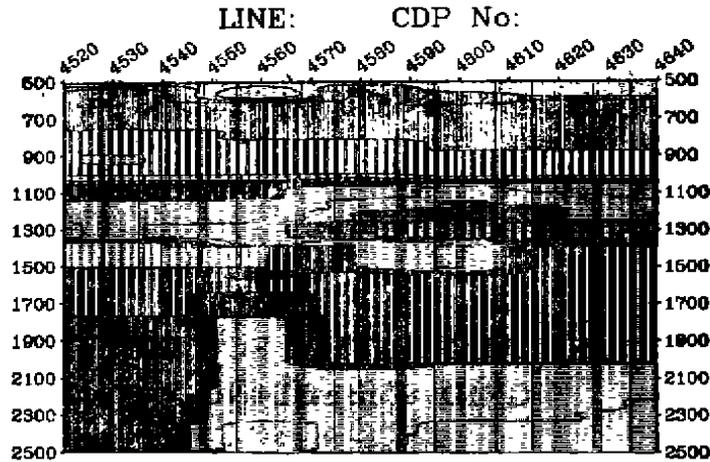


图 9

对于一集合,如果其中每一点都与其在集合中的邻点 λ -连通,这个集合叫做正则 λ -连通集,它的特例是渐变曲面或渐变流形^[14,15]。正则 λ -连通不构成等价关系,用于分割只能采用分并策略。合并过程的平均亮度准则修改为邻点的 λ -连通准则。这就是四叉树正则 λ -连通分割或区域分并 λ -连通分割。

张 兰、周东兵、刘 岱、尹云峰和王长春等同志参加了这方面的工作并使之用于实际资料处理,地矿部石油物探研究所提供宝贵的资料。一并致谢。

参 考 文 献

- [1] T. Pavlidis, Algorithms for Graphics and Image Processing, Computer Science Press, Inc., 1982.
- [2] A. Rosenfeld, Three-dimensional digital topology, *Information and Control*, 50: 2(1981), 119—127.
- [3] R. Wilson and M. Spann, Image Segmentation and Uncertainty, John Wiley & Sons Inc., 1988.
- [4] S. W. Zucker, Region growing: childhood and adolescence, *Comput. Graphics Image Processing*, 5: 4 (1976), 382—399.
- [5] O. Monga, A new segmentation method and its application to stereo vision, Proc. International Workshop on Industrial Application of Machine Vision and Machine Intelligence, 1987, 176—181.
- [6] M. Spann and R. Wilson, A quadtree approach to image segmentation that combines statistical and spatial information, *Pattern Recognition*, 18: 3(1985), 257—259.
- [7] A. Rosenfeld and A. C. Kak, Digital Picture Processing, Academic Press, 1982.
- [8] 边肇祺等,模式识别,清华大学出版社,1988.
- [9] 陈 深,三维数字拓扑与曲面识别,石油物探译丛,6(1984).
- [10] 陈 深等,三维 Fuzzy 数字拓扑及应用 (I,II,III),石油物探,24: 2(1985),26; 2(1987),29; 3(1990).
- [11] 陈 深,数据智能拟合,模式分类和 λ -连通分割,中国人工智能年会文集,武汉大学出版社,1989.
- [12] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.
- [13] B. Bollobas, Random Graphs, Academic Press, 1985.
- [14] 陈 深,渐变填充的充要条件和有效算法,科学通报,34: 20(1989).
- [15] 陈 深,渐变填充的性质和算法,计算机学报,见本刊本期.