Kant, Gauß und die Grundlagen der Geometrie

Wer sich die Mühe oder das Vergnügen macht, die Kritik der reinen Vernunft von Kant selbst zu studieren, stellt bald fest: Eine Behauptung der Art, dass die Euklidische Geometrie "notwendig" sei, sucht man da vergeblich – kein Wunder, denn die Behauptung ist ja auch sinnlos. Was man findet ist, dass in der Geometrie der Mathematiker Sätze mit Notwendigkeit behauptet werden, die logisch aus den zugrunde liegenden Begriffen durch "Zergliederung" nicht folgen. "Notwendig" heißt hier, dass so ein Satz, wie dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade verläuft, ausnahmslos und mit absoluter Genauigkeit behauptet wird. Die Behauptung ist ja nicht, dass meistens innerhalb kleiner Fehlergrenzen eine und nur eine solche Gerade existiert. Es liegt Kant fern, etwa philosophische Argumente anzubringen, die Konsequenzen für das Richtige in der Mathematik haben. Im Gegenteil, er erklärt mit der ihm eigenen Drastik, dass solche Übergriffe der Philosophie in das Gebiet der Mathematik nur zu Geschwätz führen (744). (Ich zitiere nach der zweiten Auflage der Originalausgabe, 1787). Die Beispiele, die Kant im Laufe des Werkes für geometrische Sätze bringt, gelten durchweg auch in der hyperbolischen Geometrie, nämlich: Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte (16). Durch 2 Punkte führt nur eine Gerade (erste Aufl., 24). Der Raum ist drei-dimensional (41). Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer als die dritte (39). Zu zwei Strecken, die zusammen größer als eine dritte sind, gibt es ein Dreieck (205). Durch zwei Geraden lässt sich kein Raum einschließen (65). Jedoch durch drei Geraden (65). Drei Punkte liegen in einer Ebene (761). Nur an der oben zitierten Stelle (744) bringt er ein Beispiel der euklidischen Geometrie, Winkelsumme im Dreieck, aber ersichtlich nicht, um eine Aussage philosophisch als denknotwendig zu erheben, sondern um das unterschiedliche Verfahren mathematischer und philosophischer Argumentation zu demonstrieren: der Philosoph kann hier nach Kant nichts herausbringen und beitragen!

Kant lehrt, dass das Einleuchtende und intuitiv Überzeugende der Geometrie dem erkennenden und anschauenden menschlichen Subjekt angehört und dass hier weder Erfahrungstatsachen noch etwa Eigenschaften eines von uns unabhängigen ansich seienden Raumes ausgesprochen werden. Wir können nur vom Standpunkt eines Menschen über den Raum reden (42). Von den Anschauungen anderer denkender Wesen können wir nicht urteilen (43).

Zur Existenz der hyperbolischen Geometrie, die Gauß untersucht hat, steht diese Überzeugung Kants jedenfalls nicht im Widerspruch, auch wenn dies von allerlei Leuten immer wieder behauptet wird, z.B. jüngst von Kehlmann in seinem widrigen Elaborat. Auch viele Mathematiker stellen, was sie für Geschichte halten, gern so dar, dass "die Philosophen" allerlei behauptet haben, aber dann kam Gauß ... Wenn man etwas über Kant behauptet, kann man ja offenbar voraussetzen, dass niemand im Publikum die fraglichen Werke Kants studiert hat, und daher meint der Vortragende, sich auch selbst diese Mühe sparen zu können. Typisch und auch wunderlich genug zitiert Burton (The History of Mathematics, S. 550): “The concept of [Euclidean] space is by no means of empirical origin, but is the inevitable necessity of thought,”... Das entscheidende “Euclidean” hat er selbst eingeschwärzt, aber auch das Ungeklammerte ist nicht als Text von Kant auszumachen, niemals hat Kant das euklidische Parallelenaxiom als denknotwendig bezeichnet, im Gegenteil! Kaufmann-Bühler, in seiner Gauß-Biographie, folgt vertrauensvoll der Sekundärliteratur und gibt als Beleg in vager Allgemeinheit: „In the section Die Transzendentale Aesthetik in Kants Kritik der reinen Vernunft". Dann wundert er sich, dass die unterschiedliche Auffassung Gauß' im Allgemeinen hohe Achtung für Kants Philosophie nicht beeinträchtigt hat.

Kant hat mit der Frage nach der Berechtigung des Parallelen-Axioms nichts zu schaffen, seine Rolle ist ganz anders, als Mathematiker sie ihm zuteilen möchten. Dem Raum-Denken Newtons und seiner philosophischen Anhänger lag eine scholastische Metaphysik zugrunde: Alles bewegt sich im absoluten, vor Gottes Gegenwart ruhenden euklidischen Raum. Erst durch Kants Umsturz erwachte die Frage, mit der er die Überzeugung von der absoluten Wahrheit der Geometrie, ihre Stellung als Vorbild aller Wissenschaften, erschüttert hat: worüber denn eigentlich der Geometer redet und mit welchem Recht, was und wo ihr Gegenstand, der Raum, ist? Jedenfalls kann man sich nicht auf Empirie berufen, denn die führt weder zu apodiktischen, noch zu vollkommen präzisen Aussagen. Aber auch auf absolut und unabhängig von unserer Erkenntnis Seiendes kann man sich nicht berufen, denn davon können wir nichts wissen und darüber können wir in unserem Gemüt nichts vorschreiben.

Im Denken vor Kant war die Frage nicht, ob sich irgendwelche Wörter logisch konsistent irgendwie verbinden lassen, und auch nicht, was Messungen mit Lichtstrahlen ergeben (man weiß doch, dass sie nicht immer geradeaus gehen . . . !), sondern was die wahre Geometrie ist. Die wahre? Wir Mathematiker glauben, mit unseren Kenntnissen hätten wir alle philosophischen Streitigkeiten über Geometrie im 19. Jahrhundert leicht entscheiden können, aber in Wahrheit verstehen wir die Streitigkeiten nicht mehr. Es ist gegangen, wie es in der Geistesgeschichte immer geht: Streitfragen werden nicht entschieden, sie werden vergessen und werden schließlich unverständlich. Manchmal allerdings erwachen sie nach Jahrhunderte langem Schlaf verwandelt zu neuem Leben.

Die Frage Kants war der eigentliche Umbruch, sie war fortan auch dem Mathematiker bei seinem Tun gestellt. Es ist philosophisch ein viel geringerer Schritt, wenn wir uns wie auch sonst darauf zurückziehen, dass Geometrie wie Mathematik überhaupt im Grunde nur ein Umgang mit willkürlich gewählten Wörtern nach keiner Rechtfertigung bedürftigen Regeln ist. Kant hat über unsere menschliche Anschauung nicht falsch geurteilt, nur weil wir Mathematiker uns nicht mehr damit befassen. Übrigens ist Anschauung etwas anderes als unser Bild, wie es die Netzhaut vermittelt. Das erklärt Kant eingehend, und jedem der wie ich eine Gleitsicht-Brille trägt, wird es leicht deutlich. Ob ein Dachfirst gerade ist oder durchhängt, kann ich nicht mehr nach Augenschein beurteilen, aber das ändert nichts an meiner Anschauung von Geraden, und zwar natürlich im dreidimensionalen Raum, nicht nur in der Ebene.

Meine eigene Ansicht über Kants Frage ist nicht so einheitlich oder einfach: Mir scheint, es ist doch nicht möglich, wie Kant meint, die Struktur der Geometrie, mit der wir die Welt betrachten, ganz dem Subjekt zuzuordnen, das ohne zu denken und zu argumentieren in die Welt hinausschaut, und die Erfahrung nötigt, sich nach der vorgegebenen Geometrie im Gemüt zu ordnen, denn es ist z.B. eine wesentliche Restriktion an die zugrunde liegende Geometrie, dass eine Pflasterung durch quadratische Steine überhaupt realisierbar ist, ja, dass es quadratische Steine gibt, und darüber kann doch die Anschauungsweise des Subjekts nicht verfügen, wenn man wenigstens starre Körper zulässt.

Auf der anderen Seite sind natürlich Punkte, Geraden, Winkel, Parallelen und alles wovon die Geometrie redet, zunächst Sache der Vorstellung und nichts Wirkliches. Bei Plato sitzt man beieinander und zeichnet, ungenau genug, mit einem Stöckchen in den Sand. Alles Wirkliche und Erfahrbare, woraus geometrische Überzeugungen entstehen können, sind Artefakte, hervorgebracht durch die vorgängige geometrische Anschauung.

Auch lässt nur die euklidische Geometrie Ähnlichkeit zu, und das scheint mir ihr für unser Interesse wesentlicher Vorzug zu sein: Von allem Großen oder Kleinen kann man sich ein Bild in genehmer Größe machen, ohne innere Proportionen zu ändern. In der hyperbolischen Geometrie der Ebene kann man den drei Winkeln eines Dreiecks ansehen wie groß es ist. Wenn mir jemand aus der Ferne entgegen kommt, müsste er da immer sein Aussehen und seine Gestalt ändern, wie er sich nähert. Es ist klar, dass eine solche geometrische Struktur der Anschauung des Subjekts nicht zur Orientierung passend wäre. Schon Leibniz hat übrigens vorgeschlagen, die Geometrie auf Ähnlichkeit zu gründen.

Es ist also ganz angemessen zu denken, dass – jedenfalls in einer Vorstellung mittlerer Größe – unsere menschliche Deutung des Augenscheins euklidisch sein wird und die euklidische geometrische Struktur unmittelbar einleuchtet. Doch muss die Erfahrung, die der Mensch mit diesem vorgegebenen Ansatz zur Deutung des Augenscheins macht, dem Modell, das er a priori vorgibt, auch in mittlerer Größe tatsächlich gut entsprechen, damit sich die Wahrnehmung nicht in optischem Vexierspiel verwirrt. In mittlerer Größe, in menschlichen Maßen, kann man ja von geometrischen Elementen wie Punkten, Geraden und Ebenen (z.B. nach Leibniz als Rotationsachse bzw. Fixraum einer Isometrie die drei nicht kollineare Punkte festlässt, oder auch aufgrund von Homogenitätsprinzipien nach Lorenzen) durchaus auch empirisch reden, wenn man mit starren Körpern umgeht. Eine Erfahrung, die sich dreidimensional angemessen ordnen und darstellen lässt, lässt sich z.B. auch nicht ebenso wohl zwei- oder vierdimensional ordnen. Aber dieses Einleuchten und Passen im mittleren Bereich nötigt uns nicht, die euklidische Geometrie im Denken über die physische Welt im sehr Großen oder im sehr Kleinen – darauf hat Riemann eindringlich hingewiesen – anzunehmen, was Kant auch nie behauptet hat. Vorstellen, Anschauen im Sinne, den Kant meint, ist etwas anderes als Denken: Man kann sich den flachen dreidimensionalen Torus als Raum eigener Anschauung in diesem Sinne nicht vorstellen, so leicht der Mathematiker (und ich freilich auch) ihn denken kann.

In der axiomatischen Ausbildung der Geometrie kommt zu dem unmittelbar Angeschauten und Einleuchtenden noch Diskursives hinzu, die Verfolgung von Operationen bis zur äußersten Konsequenz. So war das erste schwere Problem, das die griechische Geometrie umgetrieben hat, das der irrationalen Verhältnisse. Doch der

Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Proportionen ist der Anschauung so wenig wie dem Messen zugänglich.

Ich meine also, man muss beides beachten und auch hinreichend unterscheiden: Die Anschauung des Menschen, das heißt die Geometrie, in der er in seinem Gemüt das, was er sieht und sich geometrisch vorstellt, räumlich ordnet und visuell darstellt, auf der einen Seite, und das Ergebnis von Messungen und Handlungen mit starren Körpern, Lichtstrahlen und dergleichen und das Denken darüber auf der anderen Seite. Heute neigen Mathematiker übrigens dazu, überhaupt zu leugnen, dass ihnen die euklidische Geometrie einleuchte, aber das dient doch wohl nur dazu, sich einer Verlegenheit zu entziehen.

Die Untersuchungen von Gauß zur Geometrie bezeichnen einen Wendepunkt in der Auffassung der Mathematiker von Geometrie. Auch Gauß selbst hat sich erst langsam dazu durchgearbeitet. Auch er hat zunächst wohl versucht, das Parallelenaxiom zu beweisen. Am Ende steht die heutige Auffassung, dass die Geometrie eine formale axiomatische Theorie ist, als solche rein analytisch, und dass die Frage nach der Berechtigung der Axiome nicht der Mathematik angehört, oder gröber gesagt, mathematisch sinnlos ist.

Zu dem, wonach Kant fragt, nimmt Gauß damit eigentlich nicht Stellung. Zu recht kritisiert er aber die unklare Unterscheidung Kants zwischen analytischen und synthetischen Urteilen. Der Mangel entsteht daraus, dass Kant einen ungenügenden Begriff von Logik hatte, wie die Philosophie seiner Zeit überhaupt. In der Geschichte der Logik nimmt Kant keinen ruhmvollen Platz ein.

Aber ein erster Keim einer neuen Auffassung von Mathematik ist noch weit von der Vollendung. Weder Gauß, noch Bolyai oder Lobatschewski haben ihre geometrischen Untersuchungen von aus der Anschauung entnommenen Schlüssen frei halten können. Erst durch Dedekind war wieder ein Begriff von Größen für die Geometrie verfügbar, der dem logischen Anspruch des Eudoxos in der Platonischen Akademie entsprach. Erst Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie von 1882 hat die Schlüsse der Anordnung formalisiert, erst Beltrami (1868) und Poincaré (1882) haben Modelle der hyperbolischen Geometrie zureichend explizit angegeben. Den Abschluss und Grabstein dieser Entwicklung setzt Hilberts Buch über die Grundlagen der Geometrie an der Wende zum 20. Jahrhundert. Das 19. Jahrhundert war nicht nur eines der größten der Mathematik, sondern es war auch die Zeit des Historismus, und die Untersuchungen zu Euklids Schulbuch, das seit der Antike bis in die neuste Zeit benutzt wurde, diente sehr wesentlich auch diesem Interesse, der Darstellung einer verbesserten Antike.

Und was ist das Ergebnis? Nichts hindert uns, willkürlich zwei Mengen festzusetzen, deren Elemente wir „Punkte“ und „Geraden“ nennen, sowie Relationen die „inzident“ und „zwischen“ heißen, und für diese Forderungen zu stellen oder nicht zu stellen wie wir wollen. Was lehrt das? Wenn wir dies und das fordern, erhalten wir eine andere Beschreibung des zweidimensionalen affinen euklidischen Raumes, die Krönung des Unternehmens. Nun und? Warum sagt man das nicht gleich und beginnt mit diesem euklidischen Raum? Man erhält noch etwas, wenn man das Parallelen-

Axiom durch eine abweichende Aussage ersetzt, aber auch an vielen anderen Stellen kann man Abwandlungen vornehmen: Es gibt endliche, nicht geordnete, nicht archimedisch geordnete und was sonst für Geometrien; warum nicht, wenn es gefällt? Das und nur das ist die heutige Grundlagen-Auffassung von Mathematik überhaupt. Die nicht-euklidische Geometrie, die Mathematikern und Philosophen aus der Ferne wie ein verheißenes Land zur Erklärung der Struktur der Welt oder des Geistes erschien, hat sich aus der Nähe betrachtet zu einem Wortkram verflüchtigt.

Wenn man der heutigen Auffassung von den Grundlagen der Mathematik folgen wollte, ginge es uns etwas wie in der Malerei: Die Mathematik ist autonom geworden, sie schafft keine Porträts oder Landschaften mehr. Aber dafür weiß sie auch zu vielem, was einmal Gegenstand von heftigen, auch theologisch fundierten Kontroversen war, nichts mehr zu sagen. Gibt es den Raum an sich und ist die Welt im leeren Raum entstanden oder geschaffen? Oder ist Raum nur da, wo etwas ist, als Grenze von etwas, gibt es keinen leeren Raum, wie Aristoteles meint? Ist der Raum unendlich, ruht er, oder kann man sinnvoll sagen, dass er sich im Ganzen bewegt; ist Raum nur insofern er messbar ist, als Beziehung von Sachen darin? – Gegenstand eines kontroversen Briefwechsels (1715/16) zwischen Leibniz, der eher wie Aristoteles denkt, und Clarke, einem Metaphysiker aus dem Anhang Newtons. Ist die Welt irgendwann in der Zeit geschaffen – und warum gerade dann – oder beginnt die Zeit mit der Existenz der Gegenstände, wie Augustin (jedenfalls in seinen früheren Schriften) meint? Das alles haben wir nicht endgültig geklärt, sondern es ist nicht mehr Sache der Mathematik, es ist sinnlos geworden. Was die Mathematik eigentlich bedeutet, das ahnen wir wohl und reden darüber auch, aber nur vertraulich und unverbindlich.

Die hyperbolische Geometrie ist von fundamentaler Bedeutung, eine wunderbare und reichhaltige Entdeckung, aber nicht, weil ihre Existenz etwas über unser Erkenntnisvermögen oder die Wirklichkeit lehrt, sondern durch ihre Stellung in der Funktionentheorie, als universelle Überlagerung der meisten Riemannschen Flächen (recht gezählt), und von da aus in der niederdimensionalen Topologie.

Ich fasse zusammen: Mathematiker, wenn sie über Kant, Gauß und die Grundlagen der Geometrie reden, lassen es an der Klarheit und Logik fehlen, die man von ihnen erwarten sollte. Der Tenor ist: Kant hat die euklidische Geometrie für notwendig wenn nicht gar denknotwendig erklärt, aber Gauß, Bolyai, … haben gezeigt, dass sie nicht notwendig ist. Zum ersten: Was heißt hier „notwendig“? Es steht nichts bei Kant, was zu so einer Aussage passen will. Und zum zweiten: Was ist denn dem Philosophen damit erkannt und gesagt, dass man irgendwelche Wörter durch irgendwelche Axiome widerspruchslos verbinden kann, zumal solange man sich nichts dabei vorstellen muss oder gar darf?