

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Természettudományi Kar**

**Szatmáry Zoltán**

**Mérések kiértékelése**

Egyetemi jegyzet

**Budapest, 2010**



# Tartalomjegyzék

Előszó.....	7
Jelölések.....	10
1. Bevezetés.....	11
1.1. A rugalmassági együttható meghatározása (példa).....	11
A probléma megfogalmazása.....	11
Feltevések.....	11
A kísérlet tervezése.....	12
Mérések.....	12
Az adatok értelmezése.....	14
Következtetések levonása.....	14
Egy elrontott mérés elemzése.....	15
1.2. Általános követelmények.....	16
a) A probléma megfogalmazása.....	17
b) Feltevések.....	18
c) Tervezés.....	18
d) A mérések végrehajtása.....	18
e) Kiértékelés.....	19
f) Következtetések.....	19
1.3. Jellegzetes példák mérések kiértékelésére.....	20
Történelmi visszapillantás.....	20
Paraméterbecslés függvényillesztéssel.....	21
Regresszió.....	23
Kiegyenlítés.....	24
Normálás.....	24
Korrekciók.....	26
Simítás.....	27
2. Tételek lineáris algebrából.....	28
2.1. Sajátértékek, sajátvektorok.....	28
2.2. A mátrix rangja.....	29
2.3. Mátrixok invertálása.....	32
A probléma felvetése.....	32
Geometriai szemléltetés.....	34
Rosszul kondicionált mátrixok.....	35
Algoritmus.....	38
Utóiteráció.....	39
2.4. Hipermátrixok.....	40
3. A valószínűség-elmélet alapjai.....	42
3.1. Alapfogalmak.....	42
Esemény és valószínűség.....	42
A valószínűség definíciója.....	42
Független és egymást kizáró események.....	43
Azonos valószínűségű elemi események.....	45
Geometriai valószínűség.....	46
Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény.....	46
Várható érték és szórás.....	49
Magasabb momentumok.....	51
Többváltozós eloszlások.....	52
Együttes eloszlásfüggvény.....	52
Várható érték és szórás.....	53
Kovariancia.....	53
Feltételes sűrűségfüggvény.....	55
Vektori jelölésmód.....	56
Transzformált változók várható értéke és kovarianciája.....	56
3.2. Nevezetes eloszlások.....	57
Egydimenziós eloszlások.....	58

Egyenletes eloszlás .....	58
Binomiális eloszlás .....	58
Poisson-eloszlás .....	60
Gauss-eloszlás .....	60
Többdimenziós Gauss-eloszlás .....	60
3.3. A Gauss-eloszlásból származtatott eloszlások .....	63
$\chi^2$ -eloszlás .....	63
Student-eloszlás .....	64
Fisher-eloszlás .....	64
$\varphi$ -eloszlás .....	64
*3.4. Korrelációs ellipszoid .....	65
4. Segédeszközök Matematikai statisztikából .....	68
4.1. Alapfogalmak .....	68
4.2. Paraméterbecslés .....	69
A becült paraméterek kívánatos tulajdonságai .....	69
Egyetlen paraméter becslése. A Cramér-Rao egyenlőtlenség .....	71
A maximális valószínűség (maximum likelihood) módszere .....	73
Példa nemreguláris becslési problémára .....	76
*Több ismeretlen paraméter esete .....	76
4.3. Hipotézisek vizsgálata .....	81
A maximális valószínűség elvének heurisztikus levezetése .....	83
A maximális valószínűség módszerével kapott becslés tulajdonságai .....	83
*4.4. Konfidenciaellipszoid .....	84
5. Közvetlen mérések .....	85
5.1. Azonos pontosságú közvetlen mérések .....	86
Pontbecslés .....	87
Intervallumbecslés .....	89
Poisson-eloszlású mérések .....	92
Csoportosított mérések .....	93
A végeredmény közzlése .....	95
5.2. Változó pontosságú közvetlen mérések .....	96
A súlyozott átlag optimalizálása .....	98
$\sigma^2$ becslése változó pontosság esetében .....	100
Részecskeszámlálás változó mérési idővel .....	101
*Korrelált mérések .....	102
Mért mennyiségek egyenlősége .....	104
5.3. Korrekciók .....	105
Korrekció .....	106
Nem kézben tartott paraméterek hatása .....	109
Mérési hiba és bizonytalanság .....	111
Mérési hiba .....	111
Mérési bizonytalanság .....	112
5.4. Kerekítés .....	113
Heurisztikus megfontolások .....	114
Valószínűségi megfontolások .....	114
A szórás kerekítése .....	117
A becült paraméter és a szórás együttes kerekítése .....	118
*6. A függvényillesztés elmélete .....	121
*6.1. Bevezető megjegyzések .....	121
*6.2. Normálegyenletek .....	122
*Az egyenletek megoldása iterációval .....	123
*A konvergencia vizsgálata .....	123
*Az iteráció stabilizálása .....	125
*Az iteráció kezdőértéke .....	126
*6.3. A becült paraméterek tulajdonságai .....	127
*Kovarianciamátrix .....	128
*Várható érték (torzítás) .....	129
*A közvetlenül mért adatok várható értékének becslése .....	130
* $Q_{\min}$ statisztikai tulajdonságai .....	131

*Szinguláris R mátrix esete .....	133
* $\sigma^2$ becslése .....	135
*További összefüggések .....	135
*6.4. Konfidenciaintervallumok .....	135
*6.5. Kiegyenlítés .....	138
*Megoldás iterációval .....	138
*A becsült paraméterek és a multiplikátorok statisztikai tulajdonságai .....	140
* $Q_{\min}$ statisztikai tulajdonságai .....	142
*Példa .....	145
*Kiegyenlítés a változók kifejezésével .....	145
*6.6. A linearizálás kérdései .....	148
*Linearizálás transzformációval .....	148
*Linearizálás sorfejtéssel .....	153
*6.7. A súlyozás .....	153
*Poisson-eloszlás .....	153
*Gauss-eloszlás, de $x_i$ is valószínűségi változó .....	155
*Számlálás holtidővel .....	157
*Bomlási korrekció monitorral .....	159
*Binomiális eloszlás .....	163
*Véges szabadsági fokkal becsült szórások .....	164
*6.8. Az illesztés geometriai szemléltetése .....	165
7. Mérések kiértékelése függvényillesztéssel .....	167
7.1. Lineáris regresszió .....	167
Az illesztés végrehajtása .....	167
Galton megfogalmazása .....	169
A lineáris regresszió csapdái .....	173
Ok és okozat .....	173
Az extrapoláció veszélyei .....	173
Kiszóró pontok .....	174
A grafikus ábrázolás haszna .....	174
Nemlineáris problémák linearizálása .....	176
7.2. Polinomillesztés .....	178
Definíciók .....	178
Numerikus problémák .....	179
Ortogonalis polinomok .....	180
Hányadfokú legyen a polinom? .....	183
7.3. Hibaterjedés .....	185
Várható érték .....	185
A kiszámított függvény szórása .....	186
Függvények kovarianciája .....	187
Konfidenciaintervallumok .....	188
7.4. Simitás és differenciálás .....	188
Simitás .....	188
Differenciálás .....	195
A polinomokkal való kiegyenlítés képletei .....	197
7.5. Korrekciók .....	199
Az általános formalizmus .....	199
Független korrekciók kezelése linearizálás esetén .....	200
*Korrelált korrekciók .....	200
7.6. Normálás .....	203
Általános formalizmus .....	203
*Határozatlan illesztőfüggvények .....	204
7.7. Szemelvények a laboratóriumi gyakorlatokból .....	205
Függvény alakjában megfogalmazott fizikai törvény kísérleti igazolása .....	206
Egyenlőség alakjában adott fizikai törvény kísérleti igazolása .....	207
8. kiszóró pontok .....	208
8.1. A probléma felvetése .....	208
8.2. Általánosított Student-próba .....	209
A próba definíciója .....	209

A transzformált Student-törtek tulajdonságai.....	211
*A 8.1. TÉTEL levezetése.....	212
Jelölések.....	212
Segédtelemek.....	214
Végeredmény.....	216
Az általánosított Student-próba használata.....	216
Gauss-próba.....	216
Student-próba.....	217
Általánosított Student-próba.....	218
8.3. A kiszóró pontok megtalálása.....	219
A másodfajú hiba.....	220
Mi legyen a kiszóró pontokkal?.....	223
8.4. Illeszkedési próbák.....	226
Illeszkedési próbákról általában.....	226
Grafikus módszer.....	227
Alkalmazás a $t_i$ törtekre.....	229
*Transzformálás Gauss-eloszlásra.....	229
Alkalmazás a korábban tárgyalt mérésre.....	231
*9. Aszimptotikus tartomány keresése.....	232
*9.1. A probléma felvetése.....	232
*9.2. Definíciók és jelölések.....	234
*9.3. Kovariancia az l-edik és az l'-edik lépés között.....	236
*9.4. $p_0$ becslése.....	238
*9.5. $\chi^2$ - vagy F-próba $H_1$ vizsgálatára.....	240
$\chi^2$ -próba, amikor $\sigma^2$ ismert.....	241
F-próba, amikor $\sigma^2$ nem ismert.....	241
*9.6. Próbák sorozata.....	242
*9.7. $\varphi$ -próba.....	243
*9.8. A másodfajú hiba.....	245
Irodalom.....	248
1. FÜGGELÉK. Metrológiai kifejezések.....	249
F1.1. Metrológiai kisszótár.....	249
F1.2. Metrológia és valószínűség-elmélet.....	251
2. függelék. Statisztikai táblázatok.....	253

# ELŐSZÓ

A mérnök-fizikus hallgatók már a második szemeszterben végeznek laboratóriumi méréseket. Kívánatos, hogy addigra tisztában legyenek a mérések kiértékeléséhez minimálisan szükséges ismeretekkel. Enélkül nem képesek a mérések korrekt elvégzésére, de a laborgyakorlat legfontosabb eredményének, a *mérési jegyzőkönyv*nek az elkészítésére sem. Aki tisztában van a kiértékelés követelményeivel és módszereivel, sokkal mélyebben érti meg a mérés lényegét, mint az, aki ilyesmiről még nem hallott. A gyakorlatvezetők számára pedig felesleges és kellemetlen teher, ha ezeket az ismereteket sietve, a gyakorlat elvégzésére szánt idő rovására kell átadniuk.

Miután a fizikusok kikerülnek az életbe, a mérések kiértékelése területén lényegesen több ismeretre lesz szükségük, mint amit a laborgyakorlatok megkövetelnek. Ezért a későbbi évfolyamokon választhatnak egy jóval nagyobb matematikai felkészültséget és rutint igénylő előadást, amely elmélyíti az alapfokú ismereteket. A két előadás tulajdonképpen ugyanarról szól, de különböző szinten.

Az alapszintű előadásban bizonyos megalkuvásra van szükség, hiszen a második szemeszterben rendelkezésre álló matematikai tudás még hiányos. A témakör megértéséhez szükséges a valószínűség-elmélet ismerete. Azon belül is elengedhetetlenek a matematikai statisztika legfontosabb tételei. Egy fizikusnak ismernie kell a matematika legtöbb területét, de megtanulásuknak követnie kell az anyag belső logikáját. Így a valószínűség-elméletre csak a negyedik szemeszterben kerülhet sor. Emiatt ebben a jegyzetben elkerülhetetlen a legfontosabb ismeretek összegzése olyan szinten, ahogy az első szemeszterben tanult lineáris algebra és analízis alapján lehetséges. A dolog nem megoldhatatlan, de figyelmeztetjük az Olvasót, hogy az itt tanultak a későbbiekben nem mentik fel a valószínűség-elmélet *alapos* elsajátítása alól. Némi biztatást és segítséget jelentett a valószínűség-elmélet két nagy orosz tudósának, Gnyegyenkónak és Hincsinnek az 1950-es években írt könyvecskéje [1], amely ezt a feladatot remekül megoldotta.

A magasabb szintű előadás már épít a fizikusoktól elvárható matematikai ismeretekre, anyaga ezért túlságosan nehéz az elsőéves hallgatók számára. Tulajdonképpen két jegyzetre lenne szükség: az egyik az elsőéves hallgatók, a másik pedig a felsőbbévesek számára. Megpróbáltam mindkettőt megírni. Azt tapasztaltam, hogy az előbbi hemzseg a bizonyítatlan állításoktól, az utóbbi esetében pedig az egyes fejezetek bevezető példái megegyeznek az előbbiben található példákkal. Ezért célszerűbbnek találtam a két jegyzetet egyesíteni, és csillaggal megjelölni azokat a részeket, amelyek elolvasása nem ajánlható az elsőévesek számára. Ez rögtön lehetővé teszi az érdeklődő elsőévesek számára, hogy az anyagban annyira mélyedjenek el, amennyire érdeklődésük szerint kívánnak, és matematikai ismereteik engedik. Így talán sikerült olyan jegyzetet a kezükbe adni, amelyet későbbi tanulmányaik, sőt kutatómunkájuk végzése közben is ki-kinyitnak majd.

A mérések sokfélék, és mindegyik kiértékelésének megvan a saját módja. A mérések kiértékelésével számos könyv [1] foglalkozik, mindegyik tartalmaz képleteket és kidolgozott példákat. A fiatal fizikusok munkájuk során azt fogják tapasztalni, hogy

gyakran nagyon nehezen vagy egyáltalán nem találják meg ezekben a könyvekben az éppen végzett mérés kiértékelésére vonatkozó képleteket. A legbiztosabb és a leggyorsabb ilyen esetekben, ha ezeket saját maguk levezetik. Ezért a mérések kiértékelésével foglalkozó műveknek fontos része a képletek levezetése, mert ennek *módszerét* érdemes megtanulni. Így nem jöhetünk zavarba, ha nem találjuk az éppen keresett formulát. A 6. fejezet (amely főleg a felsőbbévesek számára készült) tartalmaz egy általános formalizmust, amely szerint elegendő az illesztőfüggvényt felírni, a mért értékek szórásait meghatározni, és az általános formalizmusból közvetlenül le lehet vezetni a konkrét probléma megoldását.

Nem ritkán nagy tömegű mérési adatot kell kiértékelnünk. Ez csak számítógép segítségével lehetséges, amihez valamilyen programra van szükségünk. Több ilyen program is létezik, amelyek a mért adatok sokkal mélyebb és alaposabb elemzését teszik lehetővé, mint amit kézzel vagy zsebszámológéppel elvégezhetünk. A jegyzetben igyekeztem ezt a körülményt figyelembe venni: nem csak a kézzel alkalmazható, hanem a számítógépre való algoritmusokat is ismertetem. A tapasztalat azt mutatja, hogy súlyos tévedéseknek van kitéve, aki anélkül alkalmaz mások által írt programokat, hogy azok alapelveivel kellő mértékben tisztában lenne, és alaposan ismerné a programok alapjául szolgáló algoritmusokat.

A jegyzetben számos példa található az előadott módszerek illusztrálására. Ezek egy része nem valóságos mérések eredménye, hanem számítógéppel szimulált "méréseké". Ilyenek kiértékelésekor előny, hogy ismerjük a végeredményt, tehát könnyen ellenőrizhetjük az alkalmazott módszerek helyességét. A szimulált mérésekről is úgy fogok azonban beszélni, mintha tényleges mérések lennének.

Az 1. fejezet általános ismertetés a kísérletezésről, annak szakaszairól, a helyesen elvégzett és kiértékelt mérésekkel szemben támasztott követelményekről. Ez a fejezet lényegesen több problémát említ, mint aminek a kifejtésére egy ilyen jegyzetben lehetőség van. Ha ennek tartalmát a többi fejezet tartalomjegyzékével összevetjük, láthatjuk, mi mindenről lehetne még szó, de különböző megfontolásokból kimaradt.

A jegyzet szerkesztéséből következik, hogy az anyaggal csak most ismerkedő hallgatók folytassák a 2.–4. fejezetekkel, majd folyamatosan olvashatják a szöveget, de a csillaggal megjelölt fejezeteket hagyják ki. A szöveg ugyan hivatkozik olyan képletekre és tételekre, amelyek levezetése csillagos fejezetekben található, a tételek megfogalmazása olyan egyszerű, hogy kezdők is megérthetik.

Az 5. fejezet tartalmazza a legegyszerűbb kísérleti adatok, a közvetlenül mért adatok kiértékelését. Ez az a fejezet, amelyből a legfontosabb fogalmakat meg lehet érteni. A közvetett, vagyis csak függvényillesztéssel kezelhető mérések kiértékelésének általános elmélete a 6. fejezetben olvasható. A felhasznált matematikai apparátusra való tekintettel ez a fejezet csak a felsőbbévesek számára készült. E fejezet egyes lineáris algebrai problémáit vázolja a 2. fejezet. A témakörrel csak most ismerkedők a 2. és 6. fejezetet átugorva a 7. fejezetben folytassák az olvasást. Ez ugyan hivatkozik a 6. fejezet néhány tételére, de lényegében attól függetlenül olvasható. A 7. fejezet első sorban a [9] jegyzetsorozatban leírt mérések igényeit igyekszik kielégíteni, vagyis olyan problémákat tárgyal, amelyek megoldására a hallgatóknak a laboratóriumi gyakorlatok során szükségük lesz. Ami nem kezelhető a 7.1.–7.7. alfejezetek általános fejtegetései alapján, azt a 7.8. alfejezetben külön tárgyalom.

Külön magyarázatot igényel a 8. és 9. fejezet. Az előbbi a mérések kiértékelésének talán leginkább vitatott, de égető problémájával, a kiszóró pontok megtalálásával és kezelésével foglalkozik. Az utóbbi olyan – nem kevésbé nehéz – problémával foglalkozik, amellyel csak az utolsó évfolyamokon vagy a kutatómunka során fognak a



hallgatók találkozni, ha egyáltalán találkoznak. Ezért ezt az egész fejezetet nyugodt szívvel láttam el csillaggal. A probléma nehézségére való tekintettel legszívesebben ezt tettem volna a 8. fejezettel is, de ez lehetetlen: a kiszóró pontokkal már a kezdő kísérletezők is találkoznak, és nem engedhető meg, hogy legalább az alapvető ismeretekkel ne rendelkezzenek. Ezért ennek a fejezetnek azokat részeit a kezdők számára is ajánlom, amelyek nem kaptak csillagot. Senki se számítson azonban könnyű olvasmányra!

Kezdőknek és haladóknak egyaránt figyelmébe ajánlom az 1. függelékét. Tudom, hogy sokan nem örülnek ennek, először magam is így voltam ezzel. Senki sem szereti, ha szabványokkal és tilalmakkal korlátozzák, milyen szavakat használhat és milyeneket nem. Az arányérzék hiányáról tanúskodna azonban, ha ezeket a dolgokat nem vennék komolyan. A szabványok, a fogalmak pontos körülírása, a szavak értelmének szűkítése segít abban, hogy mondataink, gondolatmeneteink mindenki számára érthetőek legyenek, és mindenki ugyanazt értse rajtuk.

Bár a fentiekben többször hangsúlyoztam, hogy ez a jegyzet elsősorban a fizikus hallgatók számára íródott, azt is remélem, hogy kutatók és egyetemi oktatók is haszonnal forgathatják mint olyan művet, amely gyakorlati problémáikat rendszerezett módon, azonos szemlélettel tárgyalja. Pályám kezdetén nekem Linnyik könyve [1] nyújtotta ugyanezt, amelynek megértése lehetetlen lett volna Rózsa Pál kitűnő mátrixelméleti könyve [5] nélkül.

Budapest, 2006. szeptember.

Szatmáry Zoltán

## JELÖLÉSEK

A jegyzet minden fejezetében alkalmazott jelölések:

Jelölés	Magyarázat
$M(\xi)$	A $\xi$ valószínűségi változó várható értéke
$D^2(\xi)$	A $\xi$ valószínűségi változó szórásnégyzete
$P\{\dots\}$	A $\{\dots\}$ relációval definiált esemény valószínűsége
$P(A)$	Az $A$ esemény valószínűsége
$\mathbf{A}_{n,m}$	$n$ sorból és $m$ oszlopból álló mátrix; a sorok és szolopok számát csak akkor jelöljük, ha elhagyásuk félreértést okozhat
$[\mathbf{A}]_{kl}$	Az $\mathbf{A}$ mátrix $(k, l)$ eleme
$\mathbf{A}^T$	Az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja
$\text{rang}(\mathbf{A})$	Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja
$\text{diag}(x)$	Olyan diagonális mátrix, amelynek a főátlójában az $x_i$ mennyiségek vannak
$\mathbf{E}$	Egységmátrix
$f(x, \mathbf{a})$	Illesztőfüggvény, amely az $x$ független változón kívül az ismeretlen $\mathbf{a}$ paramétervektortól függ
$\mathbf{a}$	Paramétervektor, komponensei az $a_1, a_2, \dots, a_m$ paraméterek
$Q$	A legkisebb négyzetek módszerében minimalizálandó négyzetösszeg
$\xi$	A mért értékek vektora, komponensei a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók
$w_i$	A $\xi_i$ mért érték szórásnégyzetét a $D^2(\xi_i) = \sigma^2/w_i$ képlet szerint meghatározó súlyfaktor
$\sigma^2$	(Általában) ismeretlen szorzótényező, amely a súlyokkal együtt megadja a szórásnégyzeteket
$\mathbf{W}_{n,n}$	A $w_i$ súlyfaktorokból képzett diagonális mátrix
$\mathbf{F}_{n,m}$	Az illesztőfüggvénynek az $a_1, a_2, \dots, a_m$ paraméterek szerint vett deriváltjaiból mint sorokból alkotott mátrix
$\mathbf{R}_{m,m}$	$= \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}$
$\tilde{a}_k$	Az $a_k$ paraméter becslt értéke
$\tilde{y}_i$	Az illesztőfüggvény becslt értéke ( $= f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})$ )
$s^2$	Empirikus szórásnégyzet ( $\sigma^2$ becslése)
$\delta \mathbf{a}$	Az $\mathbf{a}$ paramétervektor becslésének a torzítása

# 1. BEVEZETÉS

A kísérletezésnek a modern tudományban kialakult módszertana van, amely az alábbi lépések megtételét igényli:

1. megfogalmazzuk a problémát,
2. kimondjuk a feltevéseket,
3. megtervezzük a kísérletet,
4. megfigyeléseket vagy méréseket végzünk,
5. értelmezzük a kapott adatokat,
6. levonjuk a következtetéseket.

E lépéseket először egy egyszerű, kevés elméleti felkészültséget igénylő kísérletre vonatkozóan beszéljük meg. Remélhetőleg ez meg fogja könnyíteni az általános eszmefuttatások megértését.

## 1.1. A rugalmassági együttható meghatározása (példa)

### A probléma megfogalmazása

Külső erő hatására a szilárd testek alakja megváltozik. Ha az erő nem túlságosan nagy, megszűnté után a test visszanyeri eredeti alakját. Ebben az esetben *rugalmas* alakváltozásról beszélünk. Ilyen esetekben az alakváltozás mértéke arányos a ható erővel. Célunk az arányossági tényező meghatározása egy rúd alakú próbatest esetében.

### Feltevések

Legyen a vizsgált rúd hossza  $l$ , keresztmetszete  $A$ , amelyet a rúd egész hosszában egyenletesnek tételezünk fel. A rudat egyik végén rögzítjük. A másik végén ható  $F$  húzó erő hatására megnyúlik. A mérhető  $\Delta l$  megnyúlás a *feszültséggel*, vagyis a keresztmetszet egységnyi területére ható húzó erővel arányos:

$$\Delta l = \frac{\alpha F}{A},$$

ahol  $\alpha$  valamilyen arányossági tényező. Helyette általában az  $E$  *rugalmassági modulus* vagy *Young-modulust* használjuk:

$$\Delta l = \frac{lF}{EA}. \quad (1.1)$$

Feltételezzük, hogy a kísérletben alkalmazott  $F$  erők nem mennek túl a *rugalmasság határán*, vagyis csak olyan erőket alkalmazunk, amelyekre az (1.1) összefüggés érvényes. Ez azt is jelenti, hogy amikor a megnyúlást egymás után többször megmérjük, a

kapott eredmény független az előző mérések eredményétől.<sup>1</sup> Feltesszük továbbá, hogy mind az erőt, mind a  $\Delta l$  megnyúlást minden mérés esetében állandó bizonytalansággal mérjük. Végül elhanyagoljuk az  $l$  hosszúság és az  $A$  keresztmetszet mérési hibáját. Végeredményben tehát a következő feltevéseket tesszük:

- az (1.1) egyenlet érvényessége;
- az egyes mérések függetlensége;
- $l$  és  $A$  mérési hibájának elhanyagolhatósága;
- a mérési bizonytalanság állandó értéke.

### A kísérlet tervezése

Jóllehet a mérés feladata a rugalmassági modulus értékének *meghatározása*, ajánlatos ezt annak *igazolásával* kiegészíteni, hogy a vizsgált alakváltozások rugalmasak. Ellenkező esetben ugyanis a rugalmassági modulusra torzított értéket fogunk kapni. Az utóbbi, kiegészítő célkitűzésből következik, hogy az  $F$  erő minél több különböző értékénél kell megmérnünk a  $\Delta l$  megnyúlást, hiszen csak így ellenőrizhetjük az (1.1) szerinti lineáris összefüggés fennállását. Ehhez ügyelnünk kell, nehogy az  $F$  erő túlságosan nagy értékei forduljanak elő, különben előfordulhat, hogy tartós alakváltozást idézünk elő a próbatesten. Ebből a szempontból a kísérlet tervezésében nagy segítséget jelenthetnek a korábbi kísérletek eredményei. Ha ilyenek nincsenek, ajánlatos próbaméréseket végezni. Az előbbi, eredeti célkitűzés ugyanakkor azt igényli, hogy az  $F$  erőnek csak olyan értékeit válasszuk ki, amelyek biztosítják, hogy a rugalmassági modulus értékét minél nagyobb pontossággal tudjuk meghatározni. Meg lehet mutatni, hogy ehhez az  $F$  erő lehető legnagyobb értékéig kívánatos elmenni. Látjuk tehát, hogy egymásnak ellentmondó követelményeket kell kielégítenünk.

A használt próbatest kiindulási adatait ( $l$  hosszúság és  $A$  keresztmetszet) általában az a műhely szolgáltatja, ahol a próbatest készült. Ezeket *névleges értékeknek* nevezük, és mérési hibájukat általában elhanyagoljuk, mint a fentiekben is tettük. Ennek ellenére a tervezés során nem kerülhetjük meg az ezzel kapcsolatos elemzéseket. A műhely ugyanis minden esetben megkérdezi, milyen *tűréssel* kívánjuk a próbatestet elkészíttetni. Erre pedig csak akkor tudunk felelni, ha számszerűen elemezzük a tűrésnek a végső mérési pontosságra való hatását. Minél kisebb a tűrés, annál nagyobbak a gyártási költségek, tehát nem biztos, hogy az az optimális, ha a tűrések okozta bizonytalanság elhanyagolhatóan kicsi.

A mérés tervezésének fontos része azoknak a külső körülményeknek a számbavétele, amelyek hatással lehetnek a mérés eredményeire. Az adott mérés esetében ilyen például a laboratórium *hőmérséklete*: jóllehet a rugalmassági modulus nem a hőmérséklet függvényében kívánjuk megmérni, a hőtágulás befolyásolja a  $\Delta l$  megnyúlás mért értékeit. Célszerű tehát a mérést (ismert) állandó hőmérsékleten elvégezni. Ha ez nem lehetséges, ajánlatos a hőmérséklet szintén megmérni, hogy az esetleges korrekciókat el lehessen végezni. Ha az alkalmazott nyúlásmérőt és erőmérőt mi magunk kalibráljuk, az erre vonatkozó méréseket is meg kell terveznünk.

### Mérések

Mihelyt a mérési eljárást a fentiek értelmében meghatároztuk, a mérést a lehető legnagyobb *gondossággal* kell elvégeznünk, ami nemcsak azt jelenti, hogy el kell ke-

---

<sup>1</sup> Más szóval: a korábbi mérések nem okoztak maradandó alakváltozást. A rugalmasság határának túllépése nem mindig okoz maradandó alakváltozást, de ezt – az egyszerűség kedvéért – figyelmen kívül hagyjuk.

rülnünk az esetleges durva hibákat (téves beállítások, téves leolvasások, a leolvasott értékek hibás feljegyzése stb.), hanem azt is, hogy az alapul vett feltevések teljesüljenek. Különösen ügyelnünk kell a mérés olyan külső körülményeire, amelyek ugyan nem képezik a mérés tárgyát, de befolyásolják annak eredményét. Esetünkben ilyen a külső hőmérséklet vagy (esetleg) a mérőberendezések kalibrációja.

A mérés végrehajtásának alapvetően fontos része a mérési eredmények feljegyzése vagy – általánosabban – *dokumentációja*. A kapott eredményeket pontosan úgy kell rögzítenünk, ahogy azok megszülettek. A mérés tervezésekor fel kellett mérnünk, melyek azok a mennyiségek, amelyeket szeretnénk meghatározott értéken tartani, de legalábbis figyelni. Tehát az  $F$  erő és a  $\Delta l$  megnyúlás mért értékei mellett fel kell jegyeznünk a hőmérséklet és a műszerek kalibrációjára vonatkozó adatokat is (ha a kalibrációt mi végeztük).

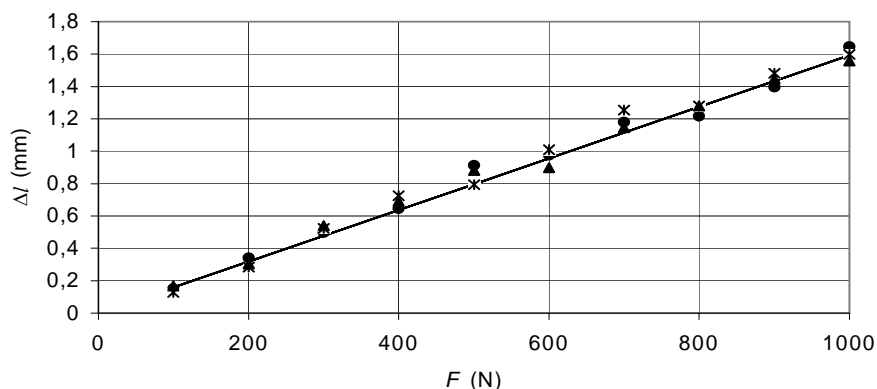
1.1a. táblázat. Rugalmassági együttható mérése (sikeres)

$F$ (N)	$\Delta l$ (mm) (1. sorozat)	$\Delta l$ (mm) (2. sorozat)	$\Delta l$ (mm) (3. sorozat)
100	0,151	0,129	0,169
200	0,341	0,283	0,305
300	0,498	0,522	0,542
400	0,646	0,724	0,690
500	0,912	0,793	0,882
600	0,974	1,008	0,899
700	1,180	1,255	1,147
800	1,217	1,281	1,280
900	1,397	1,482	1,446
1000	1,646	1,599	1,559

Az 1.1a. táblázat egy ilyen mérés eredményét mutatja, amelyet az 1.1.a. ábrán grafikusán ábrázoltunk. A próbatest egy 2 mm átmérőjű, 1 m hosszúságú acél huzal, tehát az (1.1) képlet szerinti mennyiségek:

$$l = 1000 \text{ mm}, \quad A = 3,14 \text{ mm}^2.$$

A rugalmassági modulus értéke  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  (irodalmi adatok alapján). A húzó erő tíz értékénél három sorozatban mértük végig a  $\Delta l$  megnyúlás értékeit. Az ábráról úgy látszik, hogy mindhárom sorozatban a kapott pontok jól illeszkednek az (1.1) képlet szerint várt egyenesre. A későbbi fejezetekben tárgyalt módszerekkel ez a három méréssorozat az  $E$  rugalmassági modulus valóban nagy pontosságú meghatározását teszi lehetővé. Ez tehát *sikeres* mérés.



1.1a. ábra. Rugalmassági együttható mérése (sikeres)

A tapasztalat azt mutatja, hogy célszerű olyan részleteket is feljegyeznünk, amelyeket a mérés végzésekor nem feltétlenül tartunk lényegesnek: a használt műszerek beállítására vonatkozó adatok, a végrehajtás geometriáját jellemző méretek stb. Igaz, ezekre nincs szükség, ha a mérést sikerült rendben végrehajtani, viszont lehetséges, hogy éppen ezek segítenek egy sikertelennek tűnő mérés megmentésében.

### Az adatok értelmezése

A mérési eredmények megszületését követően tudjuk a kitűzött célt elérni: meghatározzuk az  $E$  rugalmassági modulus értékét. Ezt a műveletet a matematikai statisztikában *paraméterbecslés*nek nevezik. Nincs olyan műszer, amely közvetlenül mérné a rugalmassági modulusot, tehát nem tehetünk mást, mint a vele az (1.1) képlet szerint összekapcsolható  $\Delta l$  és  $F$  mennyiségeket mérni, és ezek mért értékeiből *következtetni* a keresett  $E$  mennyiség értékére. Mivel az előbbieket csak adott bizonytalansággal tudjuk mérni, az utóbbit is csak valamilyen bizonytalansággal kaphatjuk meg. Azt, hogy az (1.1) képlet érvényes-e, először célszerű grafikusán ellenőrizni, amint az 1.1a. ábrán tettük. Ugyanerre természetesen más módszereket is fogunk látni.

Tekintve, hogy  $E$  becslésének alapja az (1.1) összefüggés, illetve a többi, fent megfogalmazott feltevés, a kiértékelés fontos része a feltevések teljesülésének ellenőrzése. Ha úgy találjuk, hogy ezek nem teljesülnek maradék nélkül, *korrekciókat* kell alkalmazni. Gyakori, hogy a hőmérséklet megfigyelt értékei ( $T$ ) eltérnek a névleges hőmérséklettől ( $T_0$ ), tehát a hőtágulási együttható ( $c$ ) segítségével a megfigyelt  $\Delta l$  megnyúlásokat vissza kell számolnunk a névleges hőmérsékletre. Matematikailag ezt úgy fejezhetjük ki, hogy  $\Delta l$ -et nem (1.1), hanem a módosított

$$\Delta l = \frac{lF}{EA} + cl(T - T_0) \quad (1.2)$$

képlet adja meg. Az itt szereplő  $c$  együtthatót általában az irodalomból vesszük, vagy – ha irodalmi adat nem áll rendelkezésünkre – nekünk magunknak kell  $c$ -t megmérnünk.<sup>2</sup>

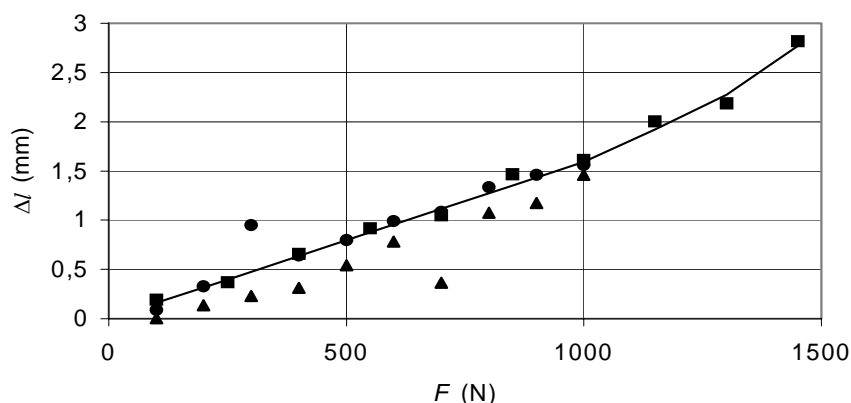
### Következtetések levonása

A fentiekben vázolt eljárás végén a levonható legfontosabb következtetés nyilvánvalóan az  $E$  rugalmassági modulus becsült értéke, ami magában foglalja a bizonytalanság mértékének és természetének a meghatározását is. Ha a mérést valamilyen ipari megrendelésre, szolgáltatásképpen végeztük, egy erről szóló *jegyzőkönyv* tulajdonképpen elégséges (amely természetesen tartalmazza a mérési körülmények és a paraméterbecslés részleteinek a leírását is).

Tudományos célú mérés esetében azonban célszerű az alapfeltevésekre és az alkalmazott mérési módszerre vonatkozóan is következtetéseket levonni, esetleges továbbfejlesztési javaslatokat tenni. Nagyon gyakori következtetés, hogy a kapott mérési pontosság nem elégséges, ezért kívánatos a mérést megismételni. Fel kell ismerünk az “elrontott” méréseket, és vagy elvégezni a korrekciókat, vagy – ha lehetséges – a mérést megismételni és az elrontott mérést csak próbamérésnek tekinteni. Egy ilyen esetet elemzünk az alábbi részben.

---

<sup>2</sup> Szilárd testek hőtágulása kicsi, tehát a korrekciós tag várhatóan elhanyagolhatóan fog bizonyulni a gyakorlatban. Annak, hogy szerepeltetjük, csak módszertani jelentősége van.



1.1b. ábra. Rugalmassági együttható mérése (elrontott)

1.1b. táblázat. Rugalmassági együttható mérése (elrontott)

$F$ (N)	$\Delta l$ (mm) (1. sorozat)	$\Delta l$ (mm) (2. sorozat)	$\Delta l$ (mm) (3. sorozat)
100	0,089		0,0049
200	0,331		0,138
300	0,948		0,228
400	0,641		0,312
500	0,799		0,540
600	0,991		0,781
700	1,087		0,364
800	1,336		1,077
900	1,459		1,172
1000	1,558		1,460
100		0,193	
250		0,370	
400		0,656	
550		0,918	
700		1,049	
850		1,464	
1000		1,614	
1150		2,003	
1300		2,187	
1450		2,815	

### Egy elrontott mérés elemzése

Néha sajnos előfordul, hogy durva hibákat követünk el, és – ami szintén nem ritka – ez csak a kiértékelés során derül ki.<sup>3</sup> Ilyen eset látható az 1.1b. ábrán és az 1.1b. táblázatban. A  $\Delta l = f(F)$  függvény mérésének második sorozatában az  $F$  erő túllépte a rugalmas alakváltozás határát, ami onnan látszik, hogy a kapott pontok eltérnek az (1.1) képlet szerinti egyenestől.<sup>4</sup> Az  $E$  rugalmassági modulus meghatározására csak a görbe egyenes szakasza alkalmas, a többi pontot figyelmen kívül kell hagynunk. A leírt módon torzított méréseket valószínűség-elméleti szigorúsággal kiválasztani a va-

<sup>3</sup> Ha még akkor sem derül ki, az már baj: hibás végeredményt fogunk publikálni, amire az sem mentés, hogy jóhiszeműen tesszük.

<sup>4</sup> A gyakorlatban nem tudjuk az ábrára berajzolni az itt látható folytonos görbét, hiszen ehhez ismerünk kellene a  $\Delta l = f(F)$  függvény elméleti alakját. Az 1.1b. ábrára csak azért rajzoltuk be, hogy világosabban látsszon az egyenestől való eltérés.

lóságban nem egyszerű. A későbbi fejezetekben ezt a kérdést érinteni fogjuk. A problémát magát az *aszimptotikus tartomány keresése* néven szoktuk emlegetni, ugyanis arról van szó, hogy az (1.1) függvény az  $F$  változónak nem minden értékére érvényes, hanem csak a rugalmasság határán belül, aszimptotikusan érvényes. Erről szól a 9. fejezet.

Az elkövetett baklövésnek azonban további következményei is vannak: a mérés után a próbatest hossza maradandóan megváltozott, tehát  $l$  értéke nagyobb lett egy kicsivel. Az adott példában ez a maradandó megnyúlás körülbelül 0,2 mm. A próbatest névleges hossza ezután  $l = 1000,2$  mm, aminek a hatása az (1.1) képletben elhanyagolható. A harmadik sorozat mérésekor azonban egy újabb hiba is történt: ezt a hosszváltozást nem vettük figyelembe a  $\Delta l$  megnyúlások mérésekor. Az *1.1b. ábrán* emiatt kerültek a harmadik sorozatnak megfelelő háromszögek az előbbi két sorozat görbéi alá.

Ha a mérési eredményeket úgy rögzítettük, ahogy megszülettek, tehát világosan látszanak az egyes sorozatok, a kiértékelés keretében esetleg helyrehozhatjuk az elkövetett hibákat. Egyrészt ki kell választanunk az egyenestől elhajló pontokat, és a rugalmassági modulus becslésében csak a többit szabad felhasználnunk. Másrészt a harmadik sorozatban mért megnyúlásokhoz egy  $\Delta l_0$  additív korrekciót kell alkalmaznunk, vagyis (1.2) helyett ezekre a

$$\Delta l = \frac{lF}{EA} + cl(T - T_0) + \Delta l_0 \quad (1.3)$$

képlet érvényes. Mivel a hibát csak utólag vettük észre,  $\Delta l_0$  értékét sem ismerjük. Ez azt jelenti, hogy az eredetileg keresett  $E$  mellett ezt is becsülnünk kell.

Végeredményben tehát az elkövetett hibákat rendbe lehetett tenni, de lássuk be, hogy ennek az volt a feltétele, hogy a feljegyzésekből pontosan látszott, hogyan történt a mérés. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy az eredetileg tett alapfeltevésekhez továbbiak járultak, hiszen csak feltevésünk lehet arról, mi lehetett a mérés során elkövetett hiba jellege. Helyzetünket természetesen könnyíti, ha nem siettünk a mérés nyomainak eltüntetésével. Például hasznos, ha utólag meg lehet vizsgálni a próbatestet, valóban bekövetkezett-e rajta a feltételezett maradandó alakváltozás, és ha igen, akkor az mekkora (vagyis  $\Delta l_0$  értékét utólag meg lehet mérni).

Befejezésül még két hibát kell az *1.1b. ábrán* és az *1.1b. táblázatban* észrevennünk, amelyekhez hasonlók gyakran előfordulnak, ha gondatlanul mérünk és rendetlenül dolgozunk. Az adatoknak a számítógépbe való bevitelekor történt két elírás:

- az első sorozatban az  $F = 300$  N-hoz tartozó megnyúlás valójában 0,448;
- a harmadik sorozatban az  $F = 700$  N-hoz tartozó megnyúlás valójában 0,864.

Ha rendetlenül írunk, a 4-est könnyen olvashatjuk 9-esnek, a 8-ast 3-asnak. Ezeket a hibákat azért csempésztük a szimulált "mérésbe", hogy megvilágíthassuk az ún. *kiszóró pontok* fogalmát. Így nevezzük azokat a mérési adatokat, amelyekre valamilyen durva mérési hiba folytán nem érvényesek az alapfeltevések. Azonosításuk és kezelésük a matematikai statisztika egyik nehéz problémája. Ennek szenteljük a 8. fejezetet.

## 1.2. Általános követelmények

Az 1.1. alfejezetben tárgyalt példa után az alábbiakban általánosan is megfogalmazzuk a mérések végzésével és kiértékelésével szemben támasztott követelményeket. Az egyes szakaszok címe tulajdonképpen azonos az előző alfejezet címeivel. Nehogy ez félreértést okozzon, az alábbiakban a szakaszokat betűjellel látjuk el.



## a) A probléma megfogalmazása

Ne tévesszenek meg bennünket a folyóiratcikkek világos és logikus okfejtései, amelyekkel témájukat bevezetik. Általában rengeteg ötletre és intuícióra volt szükség ahhoz, hogy egyáltalán egy tárgyalható problémát tudjanak megfogalmazni. A közép-szerű és a kiváló tudóst többek között az különbözteti meg egymástól, milyen ötletesen és mekkora képzelőerővel tűzi ki a megoldandó problémát. A probléma kitűzése többnyire már előrevetíti a siker vagy a kudarc lehetőségét. Néhány példa probléma kitűzésére:

- **VALAMILYEN FIZIKAI MENNYISÉG MÉRÉSE.** A keresett mennyiséget néha közvetlenül meg tudjuk mérni: egy rúd hossza, egy edény térfogata stb. A leggyakoribb azonban az, hogy a keresett mennyiség (vagy mennyiségek) helyett másokat tudunk közvetlenül megmérni, amelyek az előbbiekkal ismert kapcsolatban vannak. Ilyen feladat a rugalmassági modulus fentiekben tárgyalt mérése is. Kézenfekvő példa továbbá minden csillagászati mérés: az égitesteknek az égbolton való lát-szólagos helyét vagy mozgását mérjük meg, és geometriai meg égi mechanikai megfontolásokkal tudjuk a közvetlenül mért mennyiségeket az égitestek tényleges helyével vagy mozgásával összekapcsolni.
- **FIZIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA.** Vannak fizikai mennyiségek, amelyeknek valamilyen változótól való függését elméletileg rosszul vagy egyáltalán nem tudjuk megjósolni, így ezt kísérletileg kell meghatározni. Példák: a víz sűrűsége különböző hőmérsékleteken, szilárd testek fahőjének a hőmérséklettől való függése, hatáskeresztmetszetek függése a reakciót kiváltó részecske energiájától, a műszerek kalibrációja stb.
- **ELMÉLETI KIJELENTÉS IGAZOLÁSA.** Az elméleti kijelentés általában egy mennyiség számértéke vagy fizikai mennyiségek közötti függvénykapcsolat alakja. A kísérleti igazolás érdekében megmérjük a megjósolt mennyisége(ke)t, és *ellenőrizzük* azt a *hipotézist*, hogy az elméleti kijelentés helyes. A végső következtetés ekkor a hipotézis elfogadása vagy elvetése. Tekintve, hogy minden mérés eredményét terheli valamilyen bizonytalanság, az ilyen típusú következtetések sohasem lehetnek biztosak. Legfeljebb arról lehet szó, hogy a hipotézis helyes vagy téves voltát valamilyen *valószínűséggel* mondjuk ki.
- **SZÁMÍTÁSI MÓDSZER VALIDÁLÁSA.** A korszerű számítástechnika lehetővé teszi, hogy bonyolult jelenségeket, például egy atomreaktor működését számítógéppel szimuláljuk. A számítógépi program számos közelítést alkalmaz, továbbá nagy számú magfizikai adatot használ. A biztonság érdekében meg kell követelni, hogy a számítási pontosság kielégítő legyen.<sup>5</sup> Ennek az utóbbi követelménynek hatósági érvényű kielégítését *validálásnak* nevezzük, ami azt igényli, hogy a számítások eredményeit kísérleti adatokkal ellenőrizzük. Ha a számítások eredményei a kísérleti adatoknak ellentmondanak, a validálás feladata a *számítási pontosság minősítése* (esetleg *számszerűsítése*) is.
- **MÉRÉSI MÓDSZER BEGYAKORLÁSA.** A hallgatói laboratóriumi gyakorlatok elsődleges célja, hogy a hallgatók kidolgozott méréseken keresztül megtanulják a kísérleti fizikus mesterfogásait. Ez azt jelenti, hogy a gyakorlatot előkészítő tanár az alábbiak nagy részét már megtette. A hallgatók feladata csak a mérés elvégzése és kiértékelése.

---

<sup>5</sup> A mérésekhez hasonlóan, a számítások pontossága is véges – ha másért nem, akkor az általuk felhasznált adatok véges pontossága miatt.

## b) Feltevések

A mérés számára elsőként alapul vett feltevés mindenkor a mérés céljából következik. Ha a cél valamilyen mennyiség meghatározása, fel kell tételeznünk annak az összefüggésnek a helyességét, amely a közvetlenül mért mennyiségeket a keresett mennyiséggel összekapcsolja. Hasonlóan fel kell tennünk az igazolandó elmélet vagy a validálandó számítógépi modell helyességét. Ezt a hozzáállásunkat a kapott eredmények értelmezéséig fenn kell tartanunk. Elvetnünk csak a végső következtetések levonásakor szabad – ha egyáltalán szükséges.

Tekintve, hogy minden mérés eredménye bizonyos mértékig bizonytalan, ennek a bizonytalanságnak a természetére és mértékére szintén kell feltevéseket tennünk. Hogy ez konkrétan mit jelent, arról a későbbi fejezetekben bőven lesz szó.

A mérést befolyásoló külső feltételekre vonatkozóan további feltevések szükségesek. Ezek szabják majd meg az alkalmazandó korrekciókat. Fontosságukat mutatja, hogy nemritkán döntő szerepet játszanak a végső eredmények eredő bizonytalanságában.

## c) Tervezés

A kísérletek tervezése igényli a legtöbb fantáziát, és ez az a terület, amelyről a legkevesebbet lehet általánosságban mondani.

Tegyük fel, hogy elképzeltük a kísérleti berendezést. Méreteit, tűréseit, a műszerezettségére vonatkozó adatokat a kísérletezőnek kell meghatároznia annak érdekében, hogy a megfogalmazott probléma megoldására alkalmas legyen. A döntő természetesen a mérési pontosság kérdése. Erre két példát hozunk. Amikor a kísérlet révén szeretnénk két elméleti jóslat között választani, a mérési bizonytalanságnak nyilvánvalóan sokkal kisebbnek kell lennie, mint a két jóslat közötti eltérés. Számítógépi programok validálásakor pedig a mérési pontosságnak általában jobbnak, de legalábbis közel azonosnak kell lennie, mint a számításoktól elvárt pontosság. Ha ezt nem tudjuk elérni, akkor a kísérletek számának a növelésével tudjuk a mérések pontatlanságát ellensúlyozni. Mind a pontosság javítása, mind a kísérletek számának a növelése többletköltséggel jár. Már a kísérletek tervezésekor meg kell tehát találnunk a legkisebb költségekre vezető optimumot.

Gondosan tervezendő az adatok dokumentálásának a módja. Már a kísérlet megkezdése előtt el kell döntenünk, hogyan fogjuk az adatokat kiértékelni, melyek lesznek azok a külső befolyásoló tényezők, amelyeket kézben tartunk, melyek azok, amelyeket korrekcióba veszünk, és végül melyek azok, amelyek hatását elhanyagoljuk. Terv szükséges a mérőberendezés kalibrálására, helyes működésének ellenőrzésére, ennek módjára és gyakoriságára.

A kísérletek tervezésének általános tárgyalására ebben a jegyzetben nem kerülhet sor. Vannak művek [2], amelyek ezzel a kérdéssel is foglalkoznak. Általánosan alkalmazható receptek nem születtek még. Más szóval: *a kísérletek tervezéséből nem lehet kiiktatni a gondolkodást.*

## d) A mérések végrehajtása

Miután a fentiekben összegzett előkészítés megtörtént, a mérések kivitelezhetők. A legfontosabb követelmény a kísérleti terv lehető legnagyobb gondossággal való végrehajtása. Ezen túlmenően a következőket ajánlatos szem előtt tartani:

- Az esetleges hibákat a legkönnyebben a mérések végzése közben hozhatjuk helyre. A mérések befejezése után már aligha ellenőrizhetjük a leolvasások helyességét, a műszerek beállítását stb. Ezért a kapott eredmények értelmezésével nem

okos dolog megvárni a mérések végét, hanem már a részeredményeket is célszerű elemezni. Az 1.1b. ábrán illusztrált hibák felismerésére és helyrehozására csak a legtapasztaltabb kísérletezők képesek.<sup>6</sup>

- A munka közben készített feljegyzések legyenek részletesek, és tartalmazzanak minden olyan információt, amely segíthet a kiértékelésben. A kísérletezők gyakran esnek abba a hibába, hogy emlékezetüket végtelen hosszúnak tekintik. Arra kell számítanunk, hogy a fontos részletek többségére már egy hét múlva sem fogunk emlékezni.
- Minden kiértékelés feltételezéseken alapul (lásd fentebb), így érvényét veszti, ha ezek a végső következtetések szerint helytelennek bizonyulnak. Ilyen esetekben új feltevéseket kell tenni, és az adatokat újra ki kell értékelni. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha megvannak a *nyers mérési adatok*. Az a korszerű, ha tárolásuk formája valamilyen kiértékelő program által olvasható számítógépes fájl.
- A dokumentáció legyen olyan, hogy mások is át tudják tekinteni. Aki erre nem ügyel, lenézi saját méréseit, hiszen fel sem tételezi, hogy eredményei után mások is érdeklődni fognak. A hallgatók különösen ügyeljenek arra, hogy mérési jegyzőkönyvükön legalább a tanár el tudjon igazodni.

### e) Kiértékelés

A kiértékelés módszereiről és szabályairól a jegyzet többi fejezetében bőségesen lesz szó. Három általános megjegyzést azonban itt is tennünk kell:

- Kiértékeléskor megváltozik a kísérlethez való viszonyunk. Az előkészítésben azal foglalkoztunk, hogyan tudjuk a kísérletet a kitűzött célnak legjobban megfelelő módon elvégezni. Miután a mérés lezajlott, azokra az adatokra kell támaszkodnunk, amelyeket a mérésben megkaptunk. Ezek tartalmazhatnak hibákat, utólag ugyanis rájöhethetünk, hogy valamit másképp kellett volna csinálnunk. Kiértékeléskor mindezen már nem tudunk változtatni: abból az adathalmazból kell a kívánt információt kiszednünk, ami rendelkezésünkre áll.
- A kísérleti adat nagy érték. Ennek megfelelő tisztelettel kell bánnunk vele. Ez különösen a nyers mérési adatokra vonatkozik, ugyanis azok jelentik a *kísérleti tényeket*. Minden *kiértékelt* vagy *korrigált* eredmény már függ a tett feltevésektől, tehát csak akkor kísérleti tény, ha minden feltevés helyes.
- A kiértékelésnek ugyan része az esetleges durva hibák kiszűrése, de ez nem vezethet a mérési adatok önkényes megváltoztatására vagy kihagyására, ahogy mondani szokás, “kozmetikázására”. A kérdéssel a 8. fejezetben foglalkozunk.

### f) Következtetések

Ahhoz képest, amit a végső következtetésekkel kapcsolatban az 1.1. alfejezetben mondtunk, már kevés hozzátennivalónk marad. A legfontosabb, amit az egész műveltsor végén el kell döntenünk, az a következő: *sikerült a megfogalmazott problémát megoldani?* Ha erre a kérdésre igennel felelhetünk, munkánkat elvégeztük, és nem marad más hátra, mint a *kutatási jelentést* vagy a *tudományos cikket* megírni<sup>7</sup>. Ellenkező esetben újabb kísérletet vagy kiértékelést kell javasolnunk.

<sup>6</sup> Más kérdés, hogy azok el sem követik ezeket a baklövéseket.

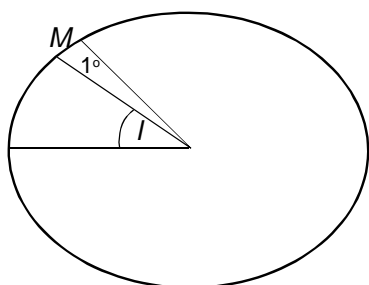
<sup>7</sup> Lelkiismeretes tudósok mindkettőt megírják. A kutatási jelentés tartalmazza a részleteket, amelyek alapján mások megismételhetik a mi kísérletünket. A tudományos cikk a kísérleti eredmények, de főleg a következtetések elegáns, lényegretörő megfogalmazása.

Hallgatói labormérések esetében a legfontosabb “következtetés” a mérési jegyzőkönyv elkészítése, amely nem a tudományos cikk, hanem a kutatási jelentés rokona.

### 1.3. Jellegzetes példák mérések kiértékelésére

#### Történelmi visszapillantás

Abban az értelemben, ahogy azt ma értjük, a 18. század végén merültek fel mérési kiértékelési problémák. Nevezetesen P. S. Laplace számítása (1786), amellyel a Föld alakját meghatározta. Már akkor tudták, hogy a Föld nem gömb alakú, hanem egy forgási ellipszoiddal közelíthető. Az ellipszoid paramétereit mérésrel határozták meg. Tekintsük az 1.2. ábrát. A Föld keresztmetszetét mutatja, amely a feltevés szerint ellipszis. Különböző földrajzi helyeken megmérték a délkör  $1^\circ$  középponti szöghöz tartozó darabjának  $M$  hosszát. A mérés helyét az  $l$  szélességi körrel jellemezték. Geometria megfontolásokkal levezették, hogy  $M$  és  $l$  között az (1.4) képlet szerinti összefüggés áll fenn, ahol  $a$  és  $b$  az ellipszis alakjától függő ismeretlen állandók.<sup>8</sup>



$$M = a + b \sin^2 l = a + bx \quad (1.4)$$

1.2. ábra. A Föld alakja

1.2. táblázat. A Föld alakjára vonatkozó mérések

Földrajzi hely	$l$ ( $^\circ$ )	$x = \sin^2 l$	$M$ (dupla öl)
Peru	0,0	0,0	25538,85
Jóreménység foka	37,0093	0,30156	25666,65
Pennsylvania	43,5556	0,39946	25599,60
Olaszország	47,7963	0,46541	25640,55
Franciaország	51,3327	0,52093	25658,28
Ausztria	53,0926	0,54850	25683,30
Lappföld	73,7037	0,83887	25832,25

1 dupla öl =  $2 \times 1,949$  m

A mérési eredmények az 1.2. táblázatban találhatók.<sup>9</sup> Laplace a következőképpen okoskodott. Tekintve, hogy nem lehet  $a$  és  $b$  értékét úgy megválasztani, hogy az (1.4) képlet minden mérésre pontosan érvényes legyen, a képlet hibáját a lehető legkisebb értékre próbálta leszorítani. Adott  $a$  és  $b$  mellett meghatározta az

$$|M - a - b \sin^2 l|$$

<sup>8</sup>  $a$  és  $b$  nem az ellipszis féltengelyeinek a hossza, de azokkal ismert összefüggésben áll. Ha tehát meghatározzuk  $a$ -t és  $b$ -t, a féltengelyeket is megkapjuk.

<sup>9</sup> A hosszúságot akkoriban “dupla öl” egységekben mérték. Csak az érdekesség kedvéért hagytuk ezt meg. A szöveget azonban átszámoltuk a ma használatos fokokra, jóllehet eredetileg olyan fokban mérték, amely szerint a teljes szög  $400^\circ$ .

hibatagok maximumát, majd megkereste  $a$  és  $b$  olyan értékeit, amelyek mellett ez a maximum a legkisebb. A modern terminológia szerint ezt *minimax becslésnek* nevezük. Laplace eredménye a következő volt:

$$a = 25525,1 \text{ dupla öl} \quad \text{és} \quad b = 308,2 \text{ dupla öl.}$$

Eredetileg A. M. Legendre javasolta a *legkisebb négyzetek módszerét* (1806). Javaslatát az 1.2. táblázatban szereplő adatokra vonatkozóan fogalmazzuk meg. Ha az egyes mérések megkülönböztetésére bevezetjük az  $i$  indexet, akkor szerinte a

$$Q = \sum_{i=1}^7 (M_i - a - bx_i)^2 \quad (1.5)$$

négyzetösszeg minimumát kell keresni. C. F. Gauss csillagászati és geodéziai megfigyelések kiértékelésével foglalkozott. 1809-ben ő vetette meg a legkisebb négyzetek módszerének az alapjait. Lényegében a mai napig használjuk az általa bevezetett fogalmakat és jelöléseket.

Újabb áttörést eredményezett A. Fisher munkássága a 20. század tizes éveiben, akinek a nevéhez fűződik a *maximális valószínűség*<sup>10</sup> ma általánosan alkalmazott módszere. Eszerint a keresett paraméterek becsült értékét úgy választjuk meg, hogy azok mellett a kapott kísérleti eredmény a legvalószínűbb legyen. A módszer előnye, hogy matematikailag jól kezelhető formulákra vezet, továbbá hogy a becslésnek kedvező matematikai statisztikai tulajdonságai vannak.

A hipotézisek vizsgálata elsősorban J. Neyman és K. Pearson munkássága révén fejlődött ki a 20. század 30–40-es éveiben. Számos statisztikai próba született, amelyek közül a legfontosabbakat ebben a jegyzetben is tárgyaljuk.

Az 1980-as évek végére újból előkerültek olyan becslési módszerek, amelyeket a 19. század végén már alkalmaztak, de a maximális valószínűség módszere háttérbe szorította őket. Közéjük tartozik a már említett minimax módszer, továbbá a *legkisebb abszolút értékek* módszere. Az utóbbi szerint a

$$Q_1 = \sum_{i=1}^7 |M_i - a - bx_i| \quad (1.6)$$

összeg minimumát keressük az  $a$  és  $b$  paraméterek függvényében. Matematikai szempontból ez a probléma visszavezethető a gazdasági optimalizálás céljaira kidolgozott *lineáris programozásra*. A módszer akkor jött újra divatba, amikor erre közhasznú programok jelentek meg. A matematikusok ajánlják ennek a használatát is, ugyanis a módszer jelentős előnye, hogy sokkal kevésbé érzékeny a kiszóró pontokra, mint akár a legkisebb négyzetek, akár a maximális valószínűség módszere. Úgy mondjuk, hogy ezek *robustus* becslések. Részletesebb tárgyalásukra sajnos nincs helyünk ebben a jegyzetben.

### Paraméterbecslés függvényillesztéssel

*Függvényillesztésről* beszélünk, amikor a *közvetlenül mért* és a *keresett* mennyiségek között matematikailag megfogalmazható függvénykapcsolat van. Az előbbieket  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -nel, a keresett mennyiségeket pedig  $a_1, a_2, \dots, a_m$ -mel jelöljük. Ekkor a kapcsolatot a következő alakban írhatjuk fel:

<sup>10</sup> Egyes magyar szerzők a módszer eredeti angol neve után *maximum likelihood* módszerről beszélnek. Gyakran – beszédben – ma is ezt a kifejezést használjuk.

$$\xi_i = f(x_i, \mathbf{a}) + \zeta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

ahol  $x_i$  az ún. *független változó*,  $\mathbf{a}$  az ismeretlen mennyiségekből képezett vektor,  $\zeta_i$  a *hibatag*. Az utóbbi azért lép fel, mert – mint már többször hangsúlyoztuk – a mért mennyiségek értéke bizonyos mértékig a véletlentől függ, tehát az elméletileg levezetett összefüggés sohasem teljesül pontosan. A “keresett mennyiségeket” ebben az összefüggésben *paramétereknek* szoktuk nevezni. Nos, a *paraméterbecslés* abban áll, hogy az  $a_1, a_2, \dots, a_m$  mennyiségeket úgy választjuk meg, hogy a hibatagok valamilyen értelemben a lehető legkisebbek legyenek.

Már több, az (1.7) képletnek megfelelő függvénykapcsolatot is felírtunk korábban. Laplace problémájában az (1.7) szerinti függvénykapcsolat a következő [vö. (1.4) képlet]:

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 + a_2 x_i, \quad \xi_i = M_i, \quad x_i = \sin^2 l_i, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b.$$

Az 1.2. táblázatban a mérési pontok száma  $n = 7$ , a keresett paramétereké pedig  $m = 2$ . A rugalmassági modulus mérésekor a függvénykapcsolat alakja attól függ, a felírt képletek melyike alkalmazandó. A legegyszerűbb az (1.1) képletnek megfelelő eset:

$$f(x_i, \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A}, \quad \xi_i = \Delta l_i, \quad x_i = F_i, \quad a_1 = E.$$

Az (1.2) esetben az ismeretlen paraméterek száma továbbra is  $m = 1$ , de a független változók száma most kettő:  $x = F$  és  $y = T$ :

$$f(x_i, y_i; \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A} + cl(y_i - T_0), \quad x_i = F_i, \quad y_i = T_i.$$

Mindkét függvényben  $l, A, c$  és  $T_0$  ismert állandóknak tekintendők. Nem ritka, hogy – a fenti esethez hasonlóan – egy paraméterbecslési problémának egynél több független változója van. Ennek ellenére – az egyszerűség kedvéért – ezt csak akkor jelöljük külön, ha feltétlenül szükséges. Az (1.3) képlet esetében a paraméterbecslés tovább bonyolódik:

$$f(x_i, y_i; \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A} + cl(y_i - T_0) + a_2,$$

ahol

$$a_2 = \begin{cases} 0 & \text{az 1. + 2. sorozatban,} \\ \Delta l_0 & \text{a 3. sorozatban.} \end{cases}$$

A keresett paraméterek száma tehát  $m = 2$ -re nőtt, de az  $a_2$  paramétert csak a 3. sorozatban kell figyelembe venni.<sup>11</sup>

A keresett paraméterekre kapott becslött értékeket az  $f(x_i, \mathbf{a})$  függvénybe visszahelyettesítve olyan értékeket kapunk, amelyek – a választott értelemben – a lehető legközelebb állnak a közvetlenül mért adatokhoz. Ilyenek az 1.1a. ábrára berajzolt egyes pontjai. Így az eljárást *függvényillesztésnek* is nevezzük, hiszen az  $f(x_i, \mathbf{a})$  függ-

<sup>11</sup> Érdemes megjegyezni, hogy ilyen típusú problémákra a közhasznú számítógépi programok többsége nincs felkészülve. A különlegesség abban áll, hogy az  $f(x_i, \mathbf{a})$  függvény *alakja* más az adatok különböző csoportjaira.

vény paramétereit úgy választjuk meg, hogy a függvény görbéje a lehető legközelebb haladjon a mért adatokat ábrázoló pontokhoz. Ebben az összefüggésben az  $f(x_i, \mathbf{a})$  függvényt *illesztőfüggvénynek* nevezzük. Nem túlzás azt állítani, hogy sikeres kiválasztása a mérés kiértékelésének a kulcsa.

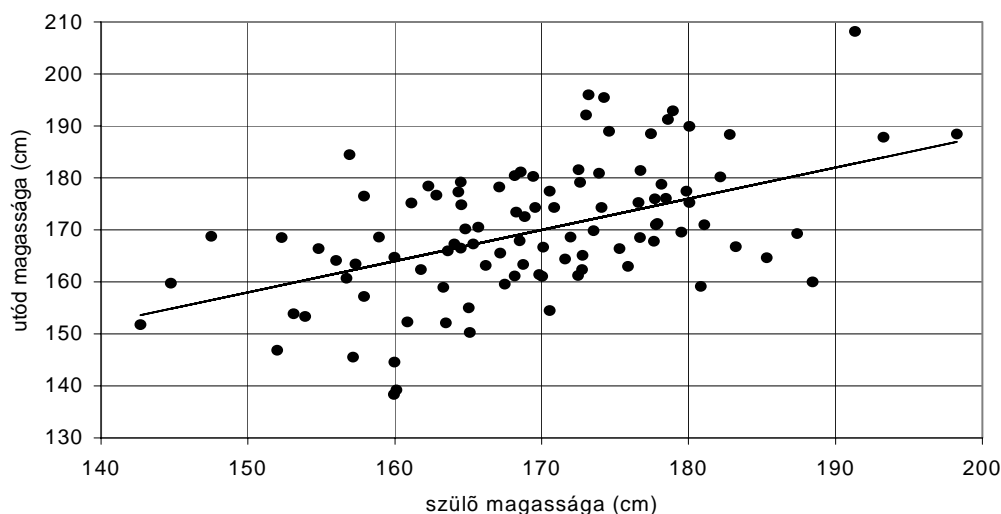
## Regresszió

Számos szerző minden függvényillesztést *regresszió*nak nevez. A legegyszerűbb a *lineáris regresszió*, mert a neki megfelelő illesztőfüggvényt a fentiekben már felírt

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 + a_2 x_i \quad (1.8)$$

képlet adja meg. Az illesztést zsebszámológéppel, sőt grafikusan is végre lehet hajtani. A gyakorlatban a legtöbb illesztési problémát igyekszünk ilyen illesztésre visszavezetni, amit a probléma *linearizálásának* nevezünk. A dologra a későbbi fejezetekben még visszatérünk, mert ez az eljárás nem mentes a csapdáktól (vö. 7.1. alfejezet)

Nem árt tudni, hogy a “regresszió” kifejezés eredetileg sokkal szűkebb dolgot jelentett. A fogalmat Sir Francis Galton vezette be, aki az élőlények egyes mérhető tulajdonságainak az összefüggését vizsgálta a szülők és az utódok között. Vegyünk egy példát. Azt találta, hogy az átlagnál magasabb szülők gyermekei várhatóan szintén magasabbak az átlagnál, de magasságuk a szülők magassága és az átlag közé esik. Analóg kijelentést lehet tenni az átlagnál alacsonyabb szülők utódairól is.



1.3. ábra. A szülők és utódok magassága közötti korreláció

Az ebben a szűkebb értelemben vett regressziót az 1.3. ábrán látható példával illusztráljuk. Általánosságban megmutatjuk, hogy a hasonló grafikonokon a vizsgált mennyiségek között lineáris kapcsolatnak kell lennie, és az egyenes meredeksége felvilágosítást ad a kapcsolat mértékéről, amit ebben az összefüggésben *korreláció*nak nevezünk. Ha egyáltalán nincs korreláció, a meredekség nulla. A dolgot érdemes külön is megvizsgálunk (vö. 7.1. alfejezet), mert az ilyen grafikonok hasznosak, ugyanakkor néha meghökkentő és komikus félreértésekre adnak alapot. Számos ilyen példa kering a matematikai statisztika hasznát kétségbe vonó irodalomban. Az elvi különbség miatt ebben a jegyzetben a regresszió kifejezést csak ebben a szűkített értelemben használjuk.

## Kiegyenlítés

Tegyük fel, hogy megmértük egy háromszög szögeit, és a következő eredményt kaptuk (Linnyik [1]):

$$\alpha = 54^{\circ}5' \quad \beta = 50^{\circ}1' \quad \gamma = 76^{\circ}6'.$$

Összegük  $180^{\circ}12'$ , vagyis  $180^{\circ}$ -tól eltér. Az eltérés oka a mérési hiba. Az adatok nyilván nem maradhatnak így, hiszen a szögekkel csak akkor dolgozhatunk tovább, ha összegük *pontosan*  $180^{\circ}$ . A mért szögekhez tehát alkalmaznunk kell valamilyen korrekciót:

$$\alpha = \alpha_0 + \zeta_1 \quad \beta = \beta_0 + \zeta_2 \quad \gamma = \gamma_0 + \zeta_3,$$

ahol

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 12'. \quad (1.9)$$

A legkisebb négyzetek módszere alapján a korrekciókra a következő feltételt írhatjuk fel:

$$Q = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \text{minimum}. \quad (1.10)$$

Ezt a problémát egyszerű megoldani.  $Q$  ugyanis a következő alakba írható át:

$$Q = \sum_{i=1}^3 (\zeta_i - \bar{\zeta})^2 + 3\bar{\zeta}^2,$$

ahol

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{3} = \frac{12'}{3} = 4'.$$

Látható, hogy  $Q$  akkor veszi fel a minimumát, amikor

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \bar{\zeta} = 4'.$$

A keresett szögek tehát:

$$\alpha_0 = 54^{\circ}1' \quad \beta_0 = 49^{\circ}57' \quad \gamma_0 = 76^{\circ}2'.$$

A most megoldott problémát *kiegyenlítésnek* nevezzük. Általánosabban fogalmazva arról van szó, hogy a függvényillesztés során a keresett paraméterek értékét nem választhatjuk meg szabadon, hanem értéküknek ki kell elégíteniük bizonyos összefüggéseket. A most tárgyalt problémában ez az (1.9) képlet. Néha könnyebb a paraméterek közötti összefüggéseket nem explicit formában felírni, hanem azt megkövetelni, hogy az illesztett függvény görbéje egy vagy több rögzített ponton átmenjen. Egyenes illesztésekor például megkövetelhetjük, hogy az egyenes menjen át az origón.

## Normálás

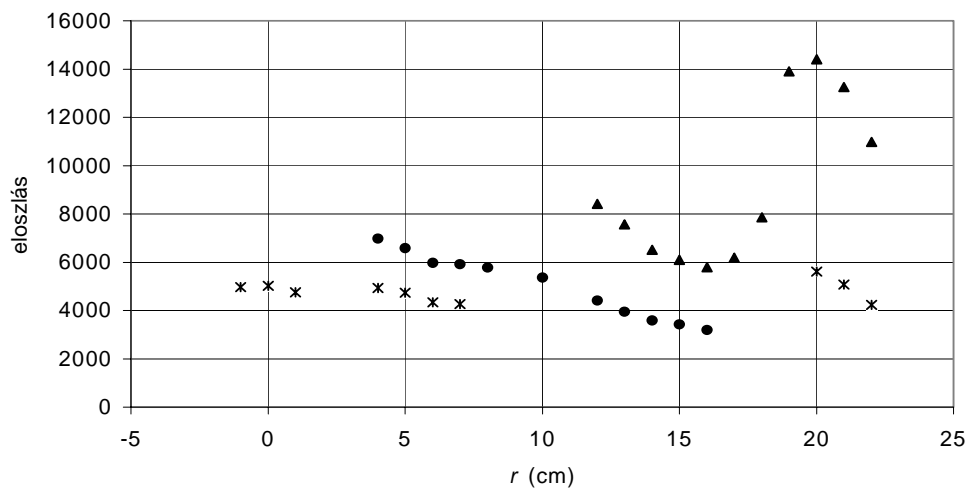
Az 1.3. táblázat egy, az  $r$  változó függvényében mért függvényt mutat, amelyet három részletben mértek ki. A mérés részecskeszámlálóval történt, amelynek az érzékenysége mérésről mérésre változott, így a függvény görbéjének más a *normálása* az egyes mérésekben. Az 1.4a. ábrán együtt mutatjuk a három mérésben kapott görbedarabokat.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Ezek nem szimulált, hanem tényleges mérések.



1.3. táblázat. Eloszlás mérése három részletben

$r$ (cm)	1. mérés	2. mérés	3. mérés
-1	4975		
0	5022		
1	4757		
4	4942	6979	
5	4730	6581	
6	4336	5966	
7	4264	5923	
8		5779	
10		5369	
12		4421	8415
13		3952	7571
14		3591	6506
15		3418	6102
16		3201	5789
17			6184
18			7854
19			13897
20	5606		14399
21	5076		13248
22	4237		10973



1.4a. ábra. Három részletben mért eloszlás

Ahhoz, hogy megkapjuk a keresett  $\psi(r)$  eloszlást, a három görbedarabot *össze kell normálni*. Ezen azt értjük, hogy mindegyik darabhoz keresnünk kell egy *normálási tényezőt*, amellyel azt elosztva olyan értékeket kapunk, mintha a detektor érzékenysége minden mérésben azonos lett volna. Ennek a feladatnak a megoldása egyszerű – legalábbis első látásra. A normálási tényezőt valamelyik mérésre vonatkozóan 1-nek választjuk. Legyen ez a 3. mérés. Az első és második mérés normálási tényezőjét a közös  $r$ -eknél kapott értékek összevetésével kapjuk:

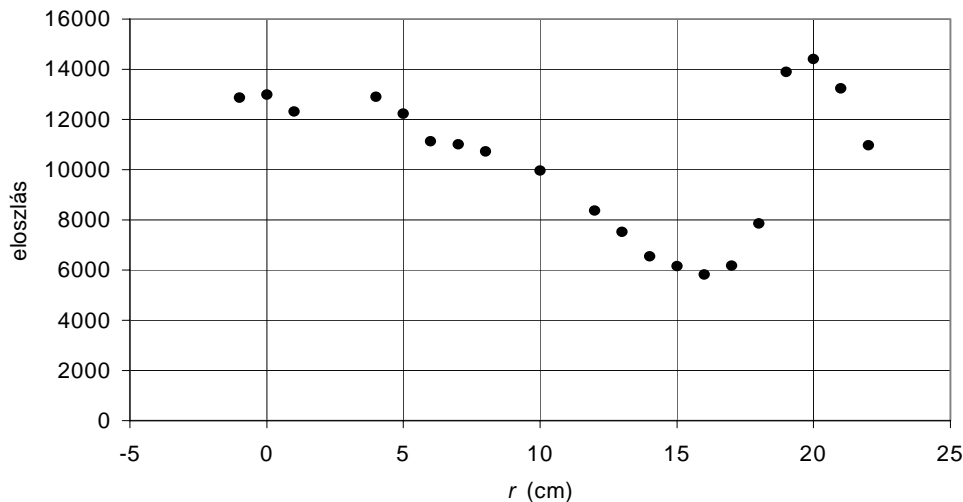
$$a_1 = \frac{5606}{14399} + \frac{5076}{13248} + \frac{4237}{10973} = 0,386;$$

$$a_2 = \frac{\frac{4421}{8415} + \frac{3952}{7571} + \frac{3591}{6506} + \frac{3418}{6102} + \frac{3201}{5789}}{5} = 0,542.$$

Ha nincs megfelelő függvényillesztő program, a fenti megoldás elfogadható, de nem ideális. A normálási problémát meg lehet ugyanis függvényillesztési feladatként is fogalmazni. A  $j$ -edik méréshez tartozó normálási tényezőt  $a_j$ -vel jelöljük ( $j = 1, 2, 3$ ). Ekkor az illesztőfüggvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$f(x, j; \mathbf{a}, \vec{\psi}) = a_j \psi(x), \quad x = r. \quad (1.11)$$

Az 1.3. táblázatban szereplő adatokat most két független változó jellemzi: a mérés sorszáma ( $j$ ) és a mérés helye ( $r$ ). Kétfajta paramétert kell becsülnünk: a normálási tényezőket ( $a_j$ ) és a  $\psi(r)$  eloszlást, amelynek az értékeit a  $\vec{\psi}$  vektor komponenseinek tekintjük. Mivel az 1.3. táblázatban az  $r$  változó 20 különböző értéke szerepel, a “ $\psi$ -típusú” paraméterek száma is ennyi. Mivel a három közül az egyik normálási tényezőt szabadon választhatjuk meg, a becsült paraméterek teljes száma:  $m = 20 + 2 = 22$ .



1.4b. ábra. Az összenormált eloszlás az (1.11) illesztőfüggvény szerint

Ha a 7.7. alfejezetben tárgyalt módszerekkel a függvényillesztést elvégezzük, a végeredmény a következő:

$$a_1 = 0,386 \quad a_2 = 0,539.$$

Ez lényegében ugyanaz, mint a “kézzel” kapott megoldás. Az (1.11) illesztőfüggvény alkalmazásának számos előnye van, amelyekről a későbbi fejezetekben lesz szó. A teljes normált görbe az 1.4b. ábrán látható.

### Korrekciók

Már a rugalmassági modulus becsülésének alapjául szolgáló (1.2) és (1.3) képletekben alkalmaztunk korrekciót a hőtágulásra, illetve a próbatest maradandó megnyúlására vonatkozóan. A gyakorlatban kivételesek az olyan mérések, amelyek kiértékelésében nincs szükség hasonló korrekciókra. Természetesen a korrekció nem mindig egy járulékos tag levonását (vagy hozzáadását) jelenti. Vannak korrekciós osztó- vagy szorzótényezők is, sőt ezek kombinációja is előfordul.

A korrekciók alkalmazása egyszerűnek tűnik. Valóban az is. Nem szabad azonban félvállról venni a dolgot. A korrekciók hatással vannak a végeredmény eredő bizony-

talanságára, aminek a figyelembevétele rejt magában csapdákat. Gyakran nem triviális a korrekciókat pontosan ott és pontosan úgy alkalmazni, ahogy azok a mérési adatokat befolyásolják.

### **Simítás**

Az *1.4b. ábrán* kapott függvénygörbéről elméletileg tudjuk, hogy az  $r$  változó közepes értékeire ( $r < 15$  cm) sima, lassan változó függvény. Ezzel szemben az ábrán látható pontok meglehetősen nagy szórást mutatnak, ami feltehetően a mérési hiba következménye. Ha nem ismerjük az elméleti görbe konkrét alakját, gyakran simítjuk a görbét. Ennek az a matematikai alapja, hogy lassan változó függvények Taylor-sorba fejthetők, tehát a pontokra szakaszonként egymáshoz illeszkedő polinomokat illesztve egy sima, lassan változó függvényt kaphatunk.

A simított görbe jól használható például a mért görbe numerikus deriválására. A görbesimítás másik alkalmazása lehet az interpoláció, amikor a mért függvényre a független változó olyan értékénél van szükségünk, amelyre vonatkozóan nem történt mérés.

## 2. TÉTELEK LINEÁRIS ALGEBRÁBÓL

Mért adatok kezelésében a mátrixok alkalmazása megkönnyíti a dolgunkat. Ebben a függelékben azokat az ismereteket összegezzük, amelyekre a jegyzet többi részében feltétlenül szükség lesz. A vektorok, mátrixok fogalmát, a velük való műveleteket (szorzás, összeadás, állandóval való szorzás, transzponálás, invertálás, diadikus szorzatok), továbbá az ezekre vonatkozó tételeket ismertnek tételezzük fel. A mátrixok méreteit általában nem jelöljük – kivéve azokat az eseteket, amelyekben ez a képletek megértéséhez és helyes használatához elengedhetetlen. A témakörrel kapcsolatban az Olvasó figyelmébe ajánljuk Rózsa Pál kitűnő könyvét [5].

### 2.1. Sajátértékek, sajátvektorok

Összefoglalónkat a sajátértékekkel és sajátvektorokkal kezdjük. Egy tetszőleges négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrix jobb és bal oldali sajátvektorait az

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{v}^T$$

egyenletekkel definiáljuk. A  $\lambda$  sajátértékek a

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = P_n(\lambda) = 0 \quad (2.1)$$

karakterisztikus egyenlet megoldásai. Ha az  $\mathbf{A}$  mátrix  $n \times n$ -es,  $P_n(\lambda)$   $n$ -edfokú polinom, amelynek így  $n$  gyöke van. Bizonyítható az

2.1. TÉTEL (HAMILTON-CALEY):

$$P_n(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Ha a (2.1) karakterisztikus egyenletnek minden gyöke egyszeres,  $P_n(\lambda)$  a legalacsonyabb fokszámú polinom, amelybe az  $\mathbf{A}$  mátrixot helyettesítve a  $\mathbf{0}$  mátrix adódik. Amikor azonban a polinom gyökei többszörösek, létezhet alacsonyabb fokszámú polinom is, amelyre ugyanez érvényes. Tekintsük az  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$  mátrix összes  $(n - 1)$ -edrendű aldeterminánsát. Mindegyikük  $\lambda$ -nak legfeljebb  $(n - 1)$ -edfokú polinomja. Ha  $P_n(\lambda)$ -t elosztjuk legnagyobb közös osztójukkal, akkor a  $\Delta(\lambda)$  *minimálpolinomot* kapjuk. Ez a legalacsonyabb fokszámú polinom, amelybe  $\mathbf{A}$ -t helyettesítve  $\mathbf{0}$ -t kapunk:

$$\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (2.2a)$$

$\Delta(\lambda)$  általában megegyezik a  $P_n(\lambda)$  karakterisztikus polinommal. A definícióból következik, hogy a minimálpolinom és a karakterisztikus polinom gyökei azonosak, legfeljebb multiplicitásuk lehet különböző.

Az  $\mathbf{A}$  mátrix szerkezetére vonatkozóan sokat elmond a minimálpolinom. Jegyzetünkben gyakran alkalmazzuk a következő tételt:

2.2. TÉTEL. Ha a minimálpolinom minden gyöke egyszeres, az  $\mathbf{A}$  mátrix diagonalizálható:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda) \mathbf{V}^T, \quad (2.3)$$

ahol

$$\mathbf{V}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T = \mathbf{E}. \quad (2.3a)$$

$\mathbf{U}$  oszlopai a jobb oldali,  $\mathbf{V}^T$  sorai pedig a bal oldali sajátvektorok. A fenti képletek érvényességéhez fel kellett tennünk, hogy a sajátvektorok normálása olyan, hogy biortonormált rendszert alkossanak:

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}.$$

A mátrix (2.3) alakú előállítását *spektrálfelbontásnak* nevezzük. Vannak esetek, amikor nem szükséges a minimálpolinom gyökeit vizsgálni, ugyanis bizonyítható [5] a

2.3. TÉTEL. Ha egy mátrix felcserélhető az adjungáltjával, akkor az diagonalizálható.

Ilyenek a szimmetrikus mátrixok:  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ . Ekkor  $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ , ahol  $\mathbf{U}$  *unitér mátrix*: inverze megegyezik a transzponáltjával.

A sajátértékekkel kapcsolatban még egy tételre lesz szükségünk, amely szerint felső korlátot kaphatunk a sajátértékek abszolút értékére:

2.4. TÉTEL. Ha az  $\mathbf{A}$  mátrix  $(i, j)$  eleme  $a_{ij}$ , akkor van olyan  $i$ , amelyre mindegyik  $\lambda_k$  sajátérték esetében fennáll, hogy

$$|\lambda_k| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Írjuk fel a  $\lambda_k$  sajátértékhez tartozó sajátérték-egyenletet ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{kj} = \lambda_k u_{ki}.$$

Legyen  $i = i'$  az az index, amelyre  $u_{ki}$  abszolút értéke a legnagyobb. Az erre vonatkozó egyenletet osszuk el  $u_{ki'}$ -vel, majd vegyük mindkét oldal abszolút értékét:

$$|\lambda_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i'j} \frac{u_{kj}}{u_{ki'}} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i'j}| \cdot \left| \frac{u_{kj}}{u_{ki'}} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i'j}|,$$

amint a tétel állítja.

## 2.2. A mátrix rangja

A mátrix fontos tulajdonsága a *rangja*, amelynek több, egymással egyenértékű definíciója van:

2.1. DEFINÍCIÓ. A mátrix rangja  $k$ , ha legfeljebb  $k$  lineárisan független diádra bontható.

Rózsa Pál könyvében [5] található egy algoritmus, amely szerint bármely mátrix egyértelműen felbontható lineárisan független diadikus szorzatok összegére:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T, \quad (2.4)$$

ahol  $k \leq n$ . A *lineáris függetlenség* azt jelenti, hogy a

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}$$

egyenlőségek csak úgy állhatnak fenn, hogy az  $a_i$  és  $b_i$  együtthatók eltűnnek minden  $i$ -re. Nos, az  $\mathbf{A}$  mátrix rangja definíció szerint  $k$ .

2.2. DEFINÍCIÓ. A mátrix rangja a 0-tól különböző  $\lambda_i$  sajátértékek száma.

A (2.3) felbontásból következik, hogy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (2.5)$$

Ha csak a zérustól különböző sajátértékeket vesszük, akkor egy (2.4) alakú diadikus felbontást kapunk. Ha abban a diádok száma  $k$ , bizonyítható, hogy megegyezik a (2.4)-ben szereplő  $k$ -val.

2.3. DEFINÍCIÓ. A mátrix rangja  $k$ , ha van el nem tűnő  $k$ -adrendű aldeterminánsa, de minden magasabb rendű aldetermináns zérus.

Annak bizonyításától is eltekintünk, hogy ez az előbbiekkal ekvivalens. Megjegyezzük, hogy ezt a definíciót ritkán használjuk a jegyzetben. A rangszámmal kapcsolatban gyakran alkalmazzuk viszont a következő tételt:

2.5. TÉTEL. A rang nem növelhető szorzás révén.

Azt kell belátnunk, hogy bármely két mátrixra

$$\text{rang}(\mathbf{AB}) \leq \text{rang}(\mathbf{A}) \quad \text{és} \quad \text{rang}(\mathbf{AB}) \leq \text{rang}(\mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Szorozzuk be jobbról a (2.4) egyenlet mindkét oldalát  $\mathbf{B}$ -vel:

$$\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{z}_i^T,$$

ahol  $\mathbf{z}_i^T = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Ha ezek a vektorok lineárisan függetlenek, akkor az  $\mathbf{AB}$  szorzatmátrix rangja maradt  $k$ . Ha azonban lineárisan függők, akkor az utolsó összegben a lineárisan független diádok száma  $k$ -nál kisebb, így  $\mathbf{AB}$  rangja is kisebb, mint  $\mathbf{A}$ -é. Ezt állítja a tétel. Hasonlóan láthatjuk be a (2.6) képletek közül a másodikat is.

A mátrixok rangjával kapcsolatba hozhatók a kvadratikus formák, amelyeket a következőképpen definiálunk:

2.4. DEFINÍCIÓ. Legyen  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, valós elemű mátrix. Az

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (2.7a)$$

összeget *kvadratikus formának* nevezzük.

Alkalmazzuk a (2.3) alatti felbontást:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2, \quad (2.7b)$$

ahol

$$\mathbf{z} = \mathbf{U} \mathbf{x}.$$

Tudjuk, hogy szimmetrikus, valós elemű mátrixok sajátértékei valósak.<sup>13</sup> Ennek figyelembevételével értelmezhetők a következő definíciók:

- 2.5. DEFINÍCIÓ. A szimmetrikus, valós elemű  $\mathbf{A}$  mátrixot *pozitív definitnek* nevezzük, ha minden sajátértéke pozitív ( $\lambda_i > 0$ ). Ebben az esetben a (2.7) szerinti kvadratikus alak minden nemzérus  $\mathbf{x}$  vektor esetében pozitív.
- 2.6. DEFINÍCIÓ. A szimmetrikus, valós elemű  $\mathbf{A}$  mátrixot *pozitív szemidefinitnek* nevezzük, ha minden sajátértéke nemnegatív ( $\lambda_i \geq 0$ ). Ebben az esetben a (2.7) szerinti kvadratikus alak minden nemzérus  $\mathbf{x}$  vektor esetében pozitív vagy zérus.
- 2.7. DEFINÍCIÓ. A szimmetrikus, valós elemű  $\mathbf{A}$  mátrixot *indefinitnek* nevezzük, ha sajátértékei különböző előjelűek. Ebben az esetben a (2.7) szerinti kvadratikus alak egyaránt felvehet pozitív, negatív és zérus értéket.

Analóg módon definiálható a *negatív definit* és *negatív szemidefinit* mátrix fogalma is. A 2.2. DEFINÍCIÓból következik, hogy a pozitív és negatív *definit* mátrixok rangja megegyezik a mátrix rendjével.

Pozitív definit és pozitív szemidefinit mátrixok esetében általánosíthatjuk a valós számok körében ismert gyökvonás műveletét. Erre vonatkozik az

- 2.6. TÉTEL. Tetszőleges szimmetrikus, valós elemű, pozitív definit vagy pozitív szemidefinit  $\mathbf{A}$  mátrixhoz található olyan valós elemű  $\mathbf{H}$  mátrix, amelyre  $\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ .

Bizonyítás gyanánt felírunk egy ilyen  $\mathbf{H}$  mátrixot:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda})$$

(2.3) alapján egyszerűen beláthatjuk, hogy ez megfelel a tétel kívánalmainak. Megjegyezzük, hogy a  $\mathbf{H}$  mátrix előállításához nem feltétlenül szükséges az  $\mathbf{A}$  mátrix (2.3) szerinti spektrálfelbontását elvégezni, mert vannak gyorsabb algoritmusok is. (Ilyen a *Housholder-algoritmus*, lásd [5].)

<sup>13</sup> Az idézett tétel pontosabban úgy hangzik, hogy hermitikus mátrixok sajátértékei valósak [5]. Hermitikus mátrix: megegyezik komplex konjugáltjának a transzponáltjával.

## 2.3. Mátrixok invertálása

### A probléma felvetése

Mátrixokkal kapcsolatban két művelet igényel különösen gondosan kidolgozott algoritmusokat: a (2.3) szerinti spektrálfelbontás és az invertálás. Mérések kiértékelésekor az előbbi konkrét végrehajtására nincs nagyon szükség. Elméleti levezetésekben persze annál többször alkalmazzuk a 2.2. TÉTELT. Bizonyos mátrixok inverzét azonban minden esetben numerikusan ki kell számítanunk. Erre vonatkozóan Gauss óta kidolgozott algoritmus létezik: *elimináció előre, visszahelyettesítés hátra*. Elérhetőek ezt megvalósító szubrutinok, amelyek feladatukat több-kevesebb sikerrel meg is oldják. Mivel a mátrixok invertálása alapvető szerepet játszik a mérések kiértékelésében, a problémával részletesen foglalkozunk.

Előjáróban megjegyezzük még, hogy az alább tárgyalt algoritmust csak alacsony rendű mátrixok esetében célszerű alkalmazni. Ennek csak egyik oka, hogy a kivonási jegyvesztések problémája a mátrix rendjének ( $n$ ) növekedésével egyre súlyosabbá válik. A másik ok az, hogy a Gauss-féle algoritmus  $n^3$ -nel arányos számú szorzást és osztást igényel, vagyis a szükséges számítási idő a mátrix rendjével rohamosan nő. Ezért nagy mátrixok esetében olyan iterációs algoritmusok kerülnek előtérbe, amelyekben a szorzások és osztások száma csak  $n^2$ -tel arányosan nő. Nehéz általánosságban megadni, hol van a két megközelítés közötti határ. Körülbelül a  $100 \times 100$ -as mátrixok jelentik azt a határt, amely felett fontolóra lehet venni az iterációs eljárásokat. Speciális szerkezetű mátrixok esetében a határ jelentősen kitolható a 2.4. alfejezetben tárgyalt hipermátrixok segítségével.

Jóllehet az említett algoritmus általában ismert, egy példa kapcsán felidézzük a lépéseit. Tekintsük a következő egyszerű egyenletrendszer megoldását:

$$\begin{aligned}1,01x + 2y + 3z &= 1 \\4x + 5y + 6z &= 0 \\7x + 8y + 9z &= 0\end{aligned}\tag{2.8a}$$

Az előre való elimináció első lépéseként az első egyenletet végigosztjuk  $x$  együtthatójával, majd az így kapott egyenletet végigszorozzuk 4-gyel és 7-tel, az eredményt pedig kivonjuk a második, illetve a harmadik egyenletből:

$$\begin{aligned}x + 1,9802y + 2,9703z &= 0,9901 \\-2,9208y - 5,8812z &= -3,9604 \\-5,8614y - 11,7921z &= -6,9307\end{aligned}\tag{2.8b}$$

A későbbi tanulságok levonása érdekében az első osztás eredményét négy tizedesjegyre kerekítettük, és ezt követően végig a kerekített számokkal dolgoztunk, majd az újabb eredményeket szintén négy tizedesjegyre kerekítettük. A későbbi lépésekben is így járunk el. Ezzel illusztráljuk a számítógépek véges számítási pontosságát és annak numerikus következményeit. Az  $x$  ismeretlennek azt az együtthatóját, amellyel először osztottunk, *pivotelemnek* nevezzük. Látható, hogy a kapott egyenletrendszer két utolsó egyenletéből kiküszöböltük (elimináltuk) az  $x$  változót. Ezt követően  $y$ -t küszöböljük ki az utolsó két egyenletből. Pivotelemünk most  $-2,9208$ , vagyis az  $y$  ismeretlennek a második egyenletben szereplő együtthatója. Ezzel végigosztjuk a második egyenletet, majd az eredményt végigszorozzuk az  $y$  ismeretlennek a harmadik egyenletben szereplő együtthatójával,  $-5,8614$ -gyel, és az eredményt kivonjuk a harmadik egyenletből:



$$\begin{aligned}x + 1,9802y + 2,9703z &= 0,9901 \\y + 2,0136z &= 1,3559 \\0,0104z &= 1,0168\end{aligned}\tag{2.8c}$$

Ezzel az algoritmus “elimináció előre” részét végrehajtottuk. Ha több ismeretlenünk és egyenletünk lenne, akkor ezt tovább folytatva küszöbölnénk ki az ismeretleneket. Végeredményben olyan egyenletrendszert kapunk, amelyben az utolsó egyenlet csak egy változót tartalmaz, majd visszafelé haladva mindig eggyel több ismeretlen jelenik meg. Mielőtt továbbmennénk, felhívjuk a figyelmet arra, hogy a harmadik egyenletben a  $z$  együtthatójának a számításakor végzett kivonásban az első három értékes tizedesjegy kiesett (elveszett).

Az algoritmus második része “visszahelyettesítés hátra”. Az utolsó egyenletből (itt: a harmadikból) kifejezzük  $z$ -t, majd visszafelé haladva közvetlenül kiszámítjuk az egyes ismeretleneket:

$$\begin{aligned}x &= 0,9901 - 1,9802 \cdot (-195,512) - 2,9703 \cdot 97,769 = 97,740 \\y &= 1,3559 - 2,0136 \cdot 97,769 = -195,512 \\z &= 1,0168/0,0104 = 97,769\end{aligned}\tag{2.8d}$$

Itt ugyan öt értékes számjegyet írtunk le, de ezek közül legfeljebb az első három lehet értelmes, hiszen a (2.8c)-hez vezető lépésben a harmadik egyenletben  $z$  együtthatóját csak ilyen pontossággal tudtuk megkapni. Az eredeti egyenletrendszert nem nehéz pontosan is megoldani:

$$\begin{aligned}x &= 100 \\y &= -200 \\z &= 100\end{aligned}\tag{2.8e}$$

A (2.8d) szerinti eredmény a vártnál is rosszabb: a véges számítási pontosság okozta hiba miatt már a második számjegy is megbízhatatlan.

A megoldást nyilván nagyobb pontossággal szeretnénk megkapni. A bemutatott példából – reméljük – világos, hogy a probléma gyökere a *kivonási jegyvesztés*, ugyanis ez az a művelet, amelyben értékes számjegyek veszhetnek el, amikor az egymásból kivonandó számok közelítőleg azonosak. Rögtön felmerül két kérdés: Mikor lép fel ez a kellemetlen jelenség? Ha fellép, lehet-e ellene valamit tenni? Az alábbiakban ezekre keressük a választ.

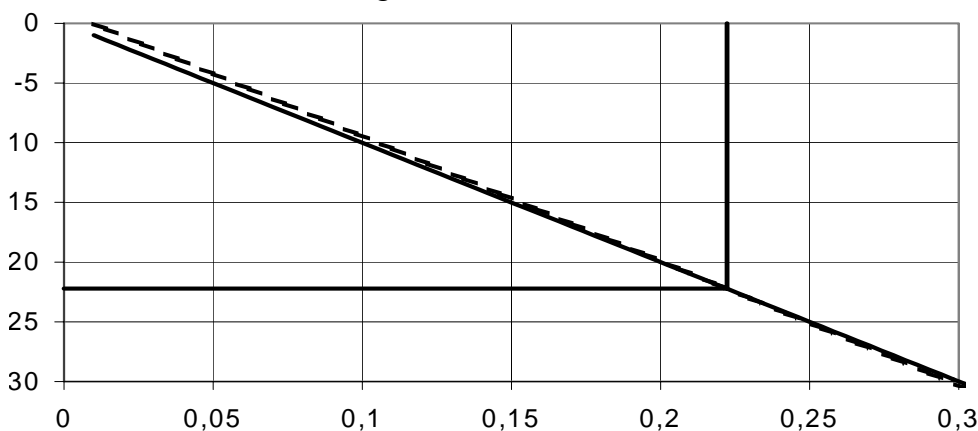
Mielőtt rátérnénk a válaszokra, megjegyezzük, hogy a (2.8a) egyenletrendszer megoldása megadja a mátrix inverzének első oszlopát. A másik két oszlopot úgy kapjuk, hogy a jobb oldalra az eddigi  $[1, 0, 0]$  vektor helyett a  $[0, 1, 0]$ , illetve  $[0, 0, 1]$  vektorokat írjuk. Egy mátrix invertálására tehát ugyanúgy alkalmazhatjuk az “elimináció előre, visszahelyettesítés hátra” algoritmusát. Az is látszik továbbá, hogy a fellépő numerikus problémák elméleti vizsgálatát elég az egyenletrendszerek megoldására korlátozni.

E rész befejezéseként kimondjuk a következő tételt:

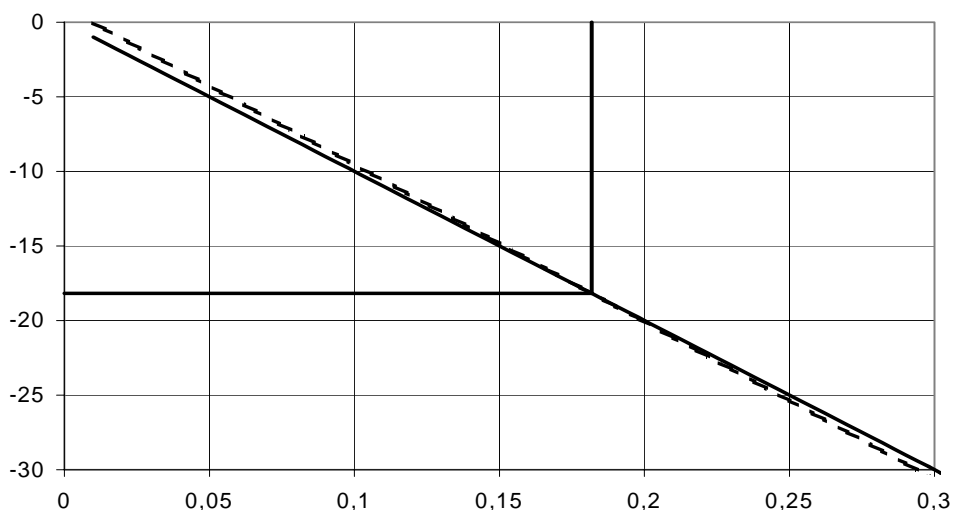
**2.7. TÉTEL.** A pivotelemek szorzata megadja a mátrix determinánsát.

A tétel bizonyítása az ismertett algoritmusból következik, és az Olvasóra bízunk. Útmutatás: amikor valamelyik lépésben a pivotelemmel osztjuk az egyik egyenletet, ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a determinánsból kiemeljük a pivotelemet. Amikor ezt követően az illető sor valahányszorosát kivonjuk a többi sorból, ez nem változtatja

meg a determinánst. Végeredményben egy olyan felső háromszögmátrix determinánshoz jutunk, amelynek a főátlójában minden elem értéke 1. Ez a determináns nyilván 1-gyel egyenlő. Az eredeti determináns így a kiemelt pivotelemek szorzata. Ez a tétel hasznos numerikus módszert szolgáltat determinánsok kiszámítására.



2.1a. ábra. A (2.9) egyenletrendszer grafikus megoldása



2.1b. ábra. A módosított (2.9) egyenletrendszer grafikus megoldása

### Geometriai szemléltetés

A (2.8) képletekben vizsgált harmadrendű mátrix rajzban nehezen szemléltethető. Ezért a probléma lényegét egy kétismeretlenes egyenletrendszer segítségével szemléltetjük:

$$\begin{aligned}
 104,5x + y &= 1 \\
 x + 0,01y &= 0
 \end{aligned}
 \quad \text{pontos megoldása:} \quad
 \begin{aligned}
 x &= 1/(104,5 - 100) = 0,2222 \\
 y &= -100x = -22,22
 \end{aligned}
 \quad (2.9)$$

Ha az egyenletrendszert alkotó egyenleteket az  $(x, y)$  síkon ábrázoljuk, két egyenest kapunk. Metszéspontjuk koordinátái adják az egyenletrendszer megoldását. A 2.1a. ábrán látható, hogy a két egyenes majdnem párhuzamos egymással. Ilyen esetben lépnek fel a kivonási jegyvesztések, mint (2.9) megoldásában:  $104,5 - 100 = 4,5$ . A gyakorlatban ez arra vezet, hogy a megoldás nagyon érzékeny a mátrix elemeire és a jobb oldalon álló ismert vektorra. Változtassuk meg például az első egyenletben  $x$  együtthatóját 104,5-ről 105,5-re! Ekkor a 2.1b. ábrán látható képet kapjuk, amely szerint a megoldás:  $x = 0,1818$  és  $y = -18,18$ . Az együttható 1%-nyi megváltozása a

megoldásban 18% eltérést eredményezett. Az ilyen tulajdonságú egyenletrendszerekről azt mondjuk, hogy *rosszul kondicionáltak*.

### Rosszul kondicionált mátrixok

A (2.8a) egyenletrendszer esetében a megoldást az  $(x, y, z)$  térben felvett síkok metszéspontja adja. Nos, ott a jegyvesztés azzal függ össze, hogy a síkok közel párhuzamosak egymással. A kondicionáltság fokának számszerű jellemzésére a következő geometriai megfontolást alkalmazzuk. A (2.9) egyenletrendszer mátrixának az oszlopvektorai:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 104,5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,01 \end{bmatrix}$$

Az  $(x, y)$  síkon ezek kifeszítenek egy parallelogrammát. Területe a mátrix determinánsának abszolút értéke:  $|\det \mathbf{A}| = 0,045$ . Ez azért kis szám, mert a két oszlopvektor közel párhuzamos egymással. Ha merőlegesek lennének, a parallelogramma téglalap lenne, amelynek a területe

$$|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2| \approx 104,5 \cdot 1 = 104,5.$$

A két terület hányadosa a kondicionáltság számszerű mértékének tekinthető. Általában

$$C_1(\mathbf{A}) = \frac{|\det \mathbf{A}|}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2| \cdot \dots \cdot |\mathbf{a}_n|}, \quad (2.10)$$

ahol a nevezőben az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopvektorainak a hossza szerepel. A (2.8a) és a (2.9) mátrixokra ez rendre  $4,3 \cdot 10^{-4}$  és  $3,4 \cdot 10^{-5}$ .  $\det \mathbf{A}$  kiszámításában támaszkodhatunk a 2.7. TÉTEL-re. A mátrix akkor jól kondicionált, amikor  $C_1(\mathbf{A}) \approx 1$ .

A kondicionáltságra egy másik mérőszámot is levezethetünk. Ehhez szükségünk van a mátrix valamilyen normájára. Először a vektorok normáját kell definiálnunk, majd ahhoz a következő módon kapcsolhatunk a mátrixok számára is normát. Legyen  $\mathbf{x}$  tetszőleges (nemzérus) vektor, és tekintsük az  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  vektorokat. Nos, a mátrix normája a legkisebb olyan  $M$  szám, amelyre fennáll az

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy minden  $\mathbf{x}$  vektorra fennáll:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|. \quad (2.11)$$

A vektorok számára a továbbiakban az  $L_2$  normát használjuk:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2.12)$$

Belátjuk, hogy ehhez a vektornormához tartozó mátrixnorma

$$\|\mathbf{A}\| = \lambda_1, \quad (2.13)$$

ahol  $\lambda_1^2$  az  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  mátrix legnagyobb sajátértéke. Feltesszük, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix szimmetrikus, és így (2.3) szerint faktorizálható.<sup>14</sup> Ha bevezetjük a

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$$

jelölést, akkor

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda)\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \mathbf{u}_i,$$

amelynek a normája

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 z_i^2.$$

Itt kihasználtuk, hogy az  $\mathbf{u}_i$  sajátvektorok 1-re vannak normálva. Tegyük fel, hogy a sajátértékeket csökkenő sorrendben indexeltük, vagyis  $\lambda_1$  a legnagyobb abszolút értékű. Ekkor írhatjuk:

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 \leq \lambda_1^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 = \lambda_1^2 \mathbf{z}^T \mathbf{z} = \lambda_1^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_1^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Ha  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ , akkor itt egyenlőség áll fenn, amivel állításunkat igazoltuk.

Minden normára érvényesek a következő összefüggések. Két mátrix szorzatának a normája nem lehet nagyobb, mint a tényezők normájának a szorzata:

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|. \quad (2.14a)$$

A norma definíciója szerint tetszőleges  $\mathbf{x} \neq 0$  vektorra fennáll, hogy

$$\|\mathbf{ABx}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{Bx}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

tehát  $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$  valóban nem lehet kisebb a szorzat normájánál. Fennállnak továbbá a háromszög-egyenlőtlenségek:

$$\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|. \quad (2.14b)$$

A vektornormára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség szerint tetszőleges  $\mathbf{x} \neq 0$  vektorra fennáll, hogy

$$\|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{Ax}\| + \|\mathbf{Bx}\| \leq (\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|) \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

tehát  $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$  valóban nem lehet kisebb az összeg normájánál. A különbségre vonatkozó egyenlőtlenséget hasonló módon láthatjuk be:

$$\|\mathbf{Ax}\| = \|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} - \mathbf{Bx}\| \leq \|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x}\| + \|\mathbf{Bx}\| \leq (\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| + \|\mathbf{B}\|) \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

amiből következik, hogy

$$\|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \text{vagyis} \quad \|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|.$$

Analóg módon láthatók be a következő egyenlőtlenségek is. Ha  $\|\mathbf{A}\| < 1$ , fennáll, hogy

<sup>14</sup> A mérések kiértékelésénél fellépő mátrixokra ez a feltevés mindig teljesül.

$$\frac{1}{1 + \|\mathbf{A}\|} \leq \|(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}. \quad (2.14c)$$

A fentiek segítségével vizsgáljuk az

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.15)$$

egyenletrendszer megoldásait. Tekintsük először a  $\mathbf{b}$  vektor perturbációit. Ha  $\mathbf{b}$ -t megváltoztatjuk  $\Delta\mathbf{b}$ -vel, akkor a megoldás megváltozása

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{b}.$$

Vegyük mindkét oldal normáját, és alkalmazzuk a fenti egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{Ax}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \\ &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}, \end{aligned}$$

amit a következő alakban is írhatunk:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = C_2(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Itt bevezettük a következő jelölést:

$$C_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|. \quad (2.16)$$

Ez a mennyiség ugyanúgy jellemzi az  $\mathbf{A}$  mátrix kondicionáltságát, mint a (2.10) szerinti  $C_1$ , hiszen megadja, hogy a  $\mathbf{b}$  vektor relatív megváltozása hányszorosan felnagyítva jelentkezik a megoldásban.

Megmutatjuk, hogy ugyanez a  $C_2$  mérvadó magának az  $\mathbf{A}$  mátrixnak a perturbációi szempontjából is. Ha a mátrixot  $\Delta\mathbf{A}$ -val perturbáljuk, akkor a megoldás megváltozását az

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

egyenletrendszer határozza meg. Mivel  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , ebből kapjuk:

$$\Delta\mathbf{x} = -(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1} \Delta\mathbf{Ax} = -(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{Ax}.$$

Vegyük mindkét oldal normáját, majd alkalmazzuk a (2.14) egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{x}\| &\leq \|(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \|(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{A}\|} \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\|} \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Innen a megoldás relatív hibája a következő alakban adódik:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{C_2(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}{1 - C_2(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}.$$

Mindenképpen fennáll tehát, hogy a (2.15) egyenletrendszer akkor rosszul kondicionált, amikor  $C_2$  nagy. Mivel az inverz mátrix sajátértékei az eredeti mátrix sajátértékeinek a reciprokai, egyszerűen belátható, hogy az  $\|\mathbf{A}^{-1}\|$  mátrixnorma nem más, mint  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  legkisebb sajátértékéből vont gyök reciproka. Ezzel tehát

$$C_2(\mathbf{A}) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|. \quad (2.16a)$$

A fenti két példában szereplő mátrixokra ennek értéke:  $2,4 \cdot 10^5$  (2.9)-re és  $1,0 \cdot 10^4$  (2.8a)-ra. Mindkettő meglehetősen nagy érték.

### Algoritmus

Miután számszerűen jellemeztük a mátrixok kondicionáltságát, nézzük, hogyan lehet a numerikus problémákat orvosolni.  $C_2$  definíciójából látszik, hogy nagyon kedvezőtlen, ha a fenti sajátértékek nagyságrendileg eltérnek egymástól. Mérések kiértékelésekor könnyen keletkezhet ilyen mátrix, ha a mért mennyiségek egységeit kedvezőtlenül választjuk meg. A kísérleti fizikusoktól azonban nem várható el, hogy ilyesmire ügyeljenek. Az ebből esetleg keletkező problémákat a mérést kiértékelő programok keretében kell elintézni. Az invertálandó mátrixot célszerű *transzformálni*: jobbról és balról beszorozzuk egy-egy diagonális mátrixszal úgy, hogy a transzformált mátrix sor- és oszlopvektorainak a normája közelítőleg azonos, mondjuk, 1 legyen. Ezzel általában javul a kondicionáltság. Matematikailag tehát arról van szó, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix helyett az

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{S} \quad (2.17a)$$

mátrixot invertáljuk, majd a kapott eredményből az

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{R} \quad (2.17b)$$

képlettel kapjuk meg a keresett inverzet. Példaképpen vegyünk a (2.9)-ben szereplő mátrixot. Könnyen belátható, hogy az

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

választás megfelelő, mert ez az

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1,045 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra vezet, amelyre  $C_2(\mathbf{A}') = 90,9$  adódik, ami lényegesen kedvezőbb, mint korábban ( $2,4 \cdot 10^5$ ). A transzformációk is járnak kerekítéssel, ami természetesen újabb hibaforrás. Ennek kiküszöbölésére egyes programok a transzformáló diagonális mát-

rixokban csak olyan elemeket engednek meg, amelyek 2 vagy 10 egész számú hatványai. Ilyesmire azonban csak végső esetben van szükség.

A következő numerikus fogás a *pivotelem megfelelő megválasztása*. A tapasztalat azt mutatja, hogy a kivonási jegyvesztések akkor a legkisebbek, amikor az előre való kiküszöbölés mindegyik lépésében az éppen kiküszöbölt változó együtthatói közül az abban az egyenletben szereplőt választjuk pivotelemnek, amelyiknek legnagyobb az abszolút értéke.

Amint az algoritmus halad előre, az így kiválasztott pivotelem abszolút értéke egyre kisebb. Ha a mátrix szinguláris vagy olyan rosszul kondicionált, hogy az adott gépi pontosság mellett az inverz mátrix elemeinek egyetlen számjegye sem vehető komolyan, akkor az algoritmust le kell állítani. Ha végtelen pontossággal számolnánk, a szinguláris mátrixok esetében a pivotelem pontosan nullává válna a  $(k + 1)$ -edik lépésben, ahol  $k$  a mátrix rangja. Véges pontosságú számítások esetében azonban ez sohasem következik be. Legfeljebb arról lehet szó, hogy a pivotelem abszolút értéke egy bizonyos toleranciaérték ( $TOL$ ) alá csökken, ami annak a jele, hogy a mátrix szinguláris, vagy legalábbis az adott gépi pontosság mellett annak tekintendő. Tetszőleges mátrixok esetében nem lehet ilyen határt megadni. Az invertálandó mátrix normálása ebből az okból is tanácsos. Normált mátrixok esetében a következő határok szabhatók:  $TOL = 10^{-6}$  a szokásos négybájtos számábrázolás (az ún. *szimpla precízió*), viszont  $TOL = 10^{-13}$  a nyolcbájtos számábrázolás (az ún. *dupla precízió*) esetén.

## Utóiteráció

Vannak esetek, amelyekben a fenti fogások sem segítenek. Ilyen például a (2.8a)-ban szereplő mátrix: az oszlopvektorok normája közel azonos, és a pivotelem optimális megválasztása sem javítja lényegesen az invertálás pontosságát. Az utolsó lehetőség ilyenkor az *utóiteráció*, amellyel szinte “reménytelen” eseteket is meg lehet menteni. Lehet alkalmazni akár az inverz, akár az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenlet közelítő megoldásának a javítására. Tegyük fel, hogy a fenti numerikus eljárásokkal kaptunk egy közelítő  $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}^{-1}$  inverz mátrixot. Az alábbi séma bal oldalán az egyenletrendszerre, a jobb oldaliban pedig az inverzre vonatkozó algoritmust mutatjuk:

$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{B}\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{b} = \mathbf{Z}\mathbf{b}, \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{B}\mathbf{b}_1 = \mathbf{B}\mathbf{Z}\mathbf{b}, \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{Z}, \\ \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}\mathbf{Z}, \end{aligned}$
$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{B}\mathbf{b}_k = \mathbf{B}\mathbf{Z}^k\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_{k+1} &= \mathbf{b}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k = \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{b}_k = \mathbf{Z}^{k+1}\mathbf{b}, \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \mathbf{B}\mathbf{B}_k = \mathbf{B}\mathbf{Z}^k, \\ \mathbf{B}_{k+1} &= \mathbf{B}_k - \mathbf{A}\mathbf{X}_k = \\ &= \mathbf{Z}^k - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{Z}^k = \mathbf{Z}^{k+1}, \end{aligned}$
$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}\mathbf{Z}^k\mathbf{b} = \mathbf{B} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}^k\mathbf{b} = \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}_k &= \mathbf{B} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}^k = \mathbf{B}(\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1} = \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$

Ezek a sorok konvergálnak, ha  $\mathbf{Z}$ -nek nincs 1-nél nagyobb sajátértéke. Erre vonatkozóan jó becslést kaphatunk a 2.4. TÉTEL alapján. Ha például  $\mathbf{B}$  legalább néhány jegyre jó inverz, és  $\mathbf{Z}$ -nek nincs 0,1-nél nagyobb sorösszege, akkor az utóiteráció 10-nél kevesebb lépésben konvergál (10 tizedesjegyre).

Példaként tekintsük a (2.8a) szerinti mátrixot. A (2.8) képletekben alkalmazott algoritmussal, négy tizedes jegyre való kerekítéssel a következő közelítő inverzet kapjuk:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 97,74 & -195,57 & 97,80 \\ -195,51 & 388,22 & -193,62 \\ 97,77 & -192,97 & 96,15 \end{bmatrix}$$

Az iteráció sebességét a

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E} - \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -0,0074 & -0,0043 & 0,012 \\ -0,03 & 0 & 0 \\ -0,03 & -0,04 & 0,01 \end{bmatrix}$$

mátrix határozza meg. A 2.4. TÉTEL szerint ennek legnagyobb abszolút értékű sajátértékére (a harmadik sor alapján) a következő felső becslést kapjuk:  $|\lambda| \leq 0,03 + 0,04 + 0,01 = 0,08$ , ami azt jelenti, hogy minden iterációs lépésben a korrekció – nagyjából – egy nagyságrenddel csökken. Nézzük ezt részleteiben:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{BZ} = \begin{bmatrix} 2,21 & -4,33 & 2,15 \\ -4,39 & 8,59 & -4,28 \\ 2,18 & -4,27 & 2,13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{BZ}^2 = \begin{bmatrix} 0,049 & -0,096 & 0,048 \\ -0,097 & 0,190 & -0,095 \\ 0,048 & -0,095 & 0,047 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{BZ}^3 = \begin{bmatrix} 0,001 & -0,002 & 0,001 \\ -0,002 & 0,004 & -0,003 \\ -0,001 & -0,001 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy már az első iteráció ( $\mathbf{X}_1$ ) elég lenne, ha csak négy értékes számjegyre keresnénk az inverzet. A második iteráció ( $\mathbf{X}_2$ ) azonban a második tizedesjegyre helyesen adja meg az inverzet:

$$\mathbf{A}^{-1} \cong \mathbf{B} + \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 100,00 & -200,00 & 100,00 \\ -200,00 & 397,00 & -198,00 \\ 100,00 & -197,34 & 98,33 \end{bmatrix}$$

Ezzel a pontossággal  $\mathbf{X}_3$  és a további iterációk elhanyagolhatók. Beszorzással ellenőrizhetjük, hogy ez – az adott pontossággal – valóban  $\mathbf{A}$  inverze.

## 2.4. Hipermatrixok

Előfordul, hogy a kezelendő mátrixokat célszerű blokkokra bontani, és az így keletkező almatrixokat egy mátrix elemeinek tekinteni. Így értelmezzük a *hipermatrix*okat. Elméletüket részletesen kidolgozza Rózsa Pál könyve [5]. Jegyeztünkben csak a  $2 \times 2$ -es hipermatrixokra lesz szükségünk:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a szimmetrikus hipermátrix inverze visszavezethető alacsonyabb rendű mátrixok invertálására. A későbbi hivatkozás érdekében ezt egy tétel formájában fogalmazzuk meg:

2.8. TÉTEL. Szimmetrikus hipermátrix inverzét a következő képlet adja meg:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} & -(\mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \\ -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} & \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ez a képlet hasznos, ha a  $\mathbf{B}$  blokk inverzét könnyű kiszámítani: például akkor, amikor  $\mathbf{B}$  diagonális mátrix, vagy amikor  $\mathbf{B}$  alacsony rendű mátrix. Ezekben az esetekben egyszerűsíthető a mátrix négyzetgyöke is. Erre vonatkozik az

2.9. TÉTEL. Szimmetrikus hipermátrix négyzetgyökét a következő képlet adja meg:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_C & \mathbf{H}_B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_C & \mathbf{H}_B \end{bmatrix}.$$

Az egyes blokkok kielégítik az

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_A^T \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_C^T \mathbf{H}_C,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_B,$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_C.$$

Az algoritmust  $\mathbf{B}$  faktorizációjával kezdjük. Ezt követően a harmadik egyenletből kapjuk a  $\mathbf{H}_C$  blokkot, amelyet az első egyenletbe helyettesítve számítjuk ki  $\mathbf{H}_A$ -t. Ez az eljárás főleg akkor kifizetődő, amikor  $\mathbf{B}$  diagonális, és  $\mathbf{A}$  mérete nem túlságosan nagy.

### 3. A VALÓSZÍNŰSÉG-ELMÉLET ALAPJAI

Ebben a fejezetben azokat a valószínűség-elméleti alapfogalmakat foglaljuk össze, amelyekre a mérések kiértékeléséhez szükség van. A 3.1. alfejezet a területen teljesen kezdők számára készült. A későbbiek a területet ismerők számára is hasznos ismétlés lehetnek. Figyelmeztetjük azonban az Olvasót, hogy a rövidség kedvéért itt számos egyszerűsítésre kényszerülünk, tehát ennek a fejezetnek a tanulmányozása nem helyettesíti a valószínűség-elmélet alapos megtanulását. Az irodalom rendkívül gazdag magyar nyelven is [1]. Az irodalomjegyzék csak példaképpen ajánl néhány könyvet.

#### 3.1. Alapfogalmak

##### Esemény és valószínűség

###### A valószínűség definíciója

Amikor *kísérletet* végzünk, annak *kimenetele* legtöbbször nem jósolható meg biztonsággal, mert a *véletlentől* függ. A valószínűség-elmélet tárgya az ilyen kísérletek elemzése. Ha csak egyetlen kísérletet végzünk, annak kimeneteléről alig lehet valamit mondani, viszont az elmélet kijelentései egyre megbízhatóbbá válnak, ahogy egyre többször ismétljük meg a kísérletet. Úgy is fogalmazhatunk, hogy *a valószínűség-elmélet a véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik*.

A kísérlet minden lehetséges kimenetelét *elemi eseménynek* nevezzük. Példák elemi eseményekre:

- két kockával való dobáskor a két kockán kapott számokból alkotott számpár: (2, 3), (5, 1) stb.;
- bridge-osztáskor a négy kézben levő 13–13 lap együttese;
- céllövéskor a golyó becsapódási helyének a céltábla középpontjától való távolsága;
- lottóhúzáskor a kijövő számötös és a héten kitöltött szelvények összessége;
- radioaktív bomláskor az 1 s alatt elbomlott atomok száma.

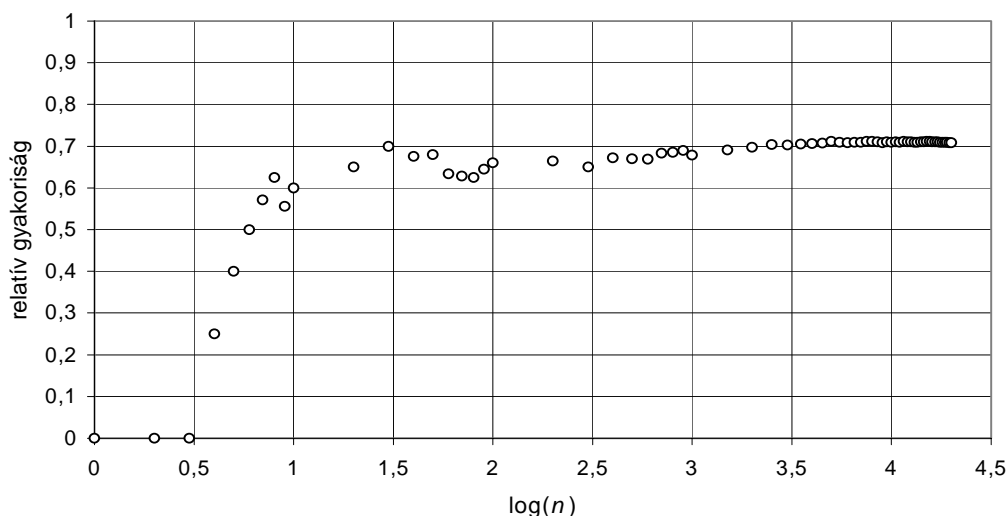
Az összes lehetséges elemi események együttesét tekintjük az  $\Omega$  halmaz elemeinek.  $\Omega$  részhalmazait *eseményeknek* nevezzük. Természetesen minden elemi esemény egyben esemény is. Együttesüket *eseménytérnek* nevezzük. Példák eseményekre:

- két kockával való dobáskor a két kockán kapott szám egymással egyenlő:  $\{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$ ;
- bridge-osztáskor egy kézben van mind a négy ász;
- céllövéskor a 10-es kör, vagyis a golyó becsapódási helyének a céltábla középpontjától való távolsága kisebb, mint a 10-es kör sugara;
- lottóhúzáskor 5 darab négytalálatos szelvény van;
- radioaktív bomláskor az 1 s alatt elbomlott atomok száma kisebb, mint 1000.

A definícióból nyilvánvaló, hogy az  $\Omega$  esemény biztosan bekövetkezik. Ezért ezt *biztos eseménynek* nevezzük.  $\Omega$  valódi részhalmazai a kísérleteknek csak egy részében következnek be. Tegyük fel, hogy  $n$  kísérletet végeztünk, és az  $A$  esemény  $k$ -szor következett be. A  $k/n$  hányadost *relatív gyakoriságnak* nevezzük. Azt tapasztaljuk, hogy erősen ingadozik, amíg  $n$  kicsi, de  $n$  növekedésével stabilizálódik, és egy határértékhez tart. Ezt illusztráljuk a 3.1. ábrán:  $n \geq 5000$ -re a relatív gyakoriság gyakorlatilag stabilizálódik 0,7 közelében. Ezt a határértéket nevezzük *valószínűségnek*:

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}. \quad (3.1)$$

Egy külön fejezetet igényelne a konvergencia természetének elemzése, így ettől el kell tekintenünk. Mindössze annyit jegyünk meg, hogy ezt az összefüggést a *nagy számok törvényének* nevezzük, amelynek több változata létezik.<sup>15</sup>



3.1. ábra. A relatív gyakoriság konvergenciája a valószínűséghez ( $p = 0,7$ )

Azt az eseményt, amelyre a valószínűség vonatkozik, (3.1) mintájára argumentumként jelöljük, ha szükséges. Bonyolultan definiálható események valószínűségét a következőképpen is jelölhetjük:

$$p = P\{r \leq R_{10}\},$$

ahol  $R_{10}$  a 10-es kör és  $r$  a céltáblába fúródó golyó helyének a sugara. Ezzel annak az eseménynek a valószínűségét írtuk fel, hogy a céllövőnek 10-es kört sikerült lőnie.

### Független és egymást kizáró események

Az eseményekkel kapcsolatban meg kell ismerkednünk néhány fogalommal. Ki-mondunk továbbá néhány alapvető tételt – de bizonyítás nélkül.  $A$  és  $B$  egymást kizáró események, ha közös részük az üres halmaz. Más szóval: egyszerre nem következhetnek be. Ha a kockadobásban az egyes kockákon kijött számokat  $i$ -vel és  $j$ -vel jelöljük, akkor a következő két esemény kizárja egymást:

$$A = \{i + j \leq 4\} \quad \text{és} \quad B = \{i + j \geq 10\}.$$

<sup>15</sup> A fent említett egyszerűsítések egyike, hogy így definiáljuk a valószínűséget. A modern valószínűség-elmélet egészen másképp közelíti meg a dolgot. Az alábbiak megértéséhez azonban elegendő lesz a (3.1) képlet szerinti definíció. A konvergencia jellegét a későbbiekben még megvilágítjuk.

Nem zárja ki egymást viszont a következő két esemény:

$$A = \{i + j \leq 4\} \quad \text{és} \quad B = \{i + j = 2k\}, \quad (3.2)$$

ahol  $k$  egész szám. Közös részük ugyanis nem üres:

$$AB = \{(1, 1); (1, 3); (2, 2); (3, 1)\}. \quad (3.2a)$$

Ezek után ki tudjuk mondani a következő tételt:

3.1. TÉTEL. Ha  $A$  és  $B$  egymást kizáró események,

$$p(A + B) = p(A) + p(B). \quad (3.3)$$

Ha nem egymást kizárók, a tétel módosul:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \quad (3.3a)$$

A 3.1. TÉTEL általánosítható tetszőleges számú, egymást páronként kizáró eseményre. Számuk lehet megszámlálhatóan végtelen is.

Azt az eseményt, amelyben  $A$  nem következik be, felülhúzással jelöljük. Mivel az  $A$  esemény vagy bekövetkezik, vagy sem,

$$A + \bar{A} = \Omega,$$

A 3.1. TÉTEL szerint ebből viszont az adódik, hogy

$$p(\bar{A}) = p(\Omega) - p(A) = 1 - p(A). \quad (3.3b)$$

A következő alapvető fogalom az *események függetlensége*:

3.1. DEFINÍCIÓ. Az  $A$  és  $B$  eseményeket akkor mondjuk függetlennek, ha

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \quad (3.4)$$

E definíció szerint tehát független események együttes bekövetkezésének a valószínűségét megkapjuk, ha külön-külön való bekövetkezésük valószínűségét összeszorozzuk. Az események általában nem függetlenek. Ezért szükségünk van a *feltételes valószínűség* fogalmára:

3.2. DEFINÍCIÓ. Az  $A$  eseménynek a  $B$  eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét a következő képlet adja meg:

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \quad (3.5)$$

Az itt szereplő  $p(A|B)$  feltételes valószínűség fogalmát egy példával világítjuk meg. Tekintsük a (3.2) szerint definiált eseményeket. Az együttes bekövetkezésüket jelentő eseményt (3.2a)-ban felírtuk. Nos, a kérdéses feltételes valószínűséget szintén a (3.1) határértékkel definiáljuk, de az ott szereplő  $n$ -be csak azokat a kísérleteket számítjuk bele, amelyekben a  $B$  esemény bekövetkezett.  $k$ -ba természetesen azokat a kísérleteket számoljuk bele, amelyekben az  $A$  esemény *is* bekövetkezett. Nagyon gyakran könnyebb a feltételes valószínűséget kiszámítani, mint az együttes bekövetkezését. Ezért hasznos a (3.5) képlet. Végül megjegyezzük, hogy független eseményekre vonatkozó-

an a feltételes valószínűség a feltétel nélküli valószínűséggel egyezik meg. (3.4) alapján ugyanis írhatjuk:

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} = p(A).$$

### Azonos valószínűségű elemi események

Levezetünk egy hasznos összefüggést, amely akkor érvényes, amikor az elemi események száma véges, és valószínűségük azonos. Ha az  $\Omega$  halmaz elemeinek a száma  $N$ , akkor az egyes elemi események  $p_0$  valószínűségére a 3.1. TÉTEL általánosítása szerint fennáll:

$$Np_0 = p(\Omega) = 1,$$

amiből

$$p_0 = \frac{1}{N}.$$

Ha az  $A$  eseményt alkotó elemi események száma  $K$ , akkor ugyanezzel a megfontolással kapjuk:

$$p(A) = Kp_0 = \frac{K}{N}. \quad (3.6)$$

Szavakban:

3.2. TÉTEL. Ha az elemi események száma véges, és valószínűségük azonos, akkor bármely esemény valószínűségét megadja a kedvező események és az összes események számának (vagyis  $K$ , illetve  $N$ ) hányadosa.

Nézzük például a (3.2) szerint definiált események valószínűségét! Az összes események száma:  $N = 36$ . Az  $A$  eseményt a következő elemi események alkotják:

$$A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (3, 1)\},$$

amelyek száma  $K = 6$ , tehát (3.6) alapján

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Könnyen megszámlálhatjuk, hogy a  $B$  esemény számára kedvező események száma  $K = 18$ , tehát (3.6) alapján

$$p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

A fogalmak jobb megértése céljából megvizsgáljuk, hogyan teljesül a feltételes valószínűség definíciójával szolgáló (3.5) összefüggés. (3.2a) szerint az  $AB$  együttes esemény számára a kedvező esetek száma  $K = 4$ , vagyis

$$p(A|B) = \frac{4/36}{1/2} = \frac{2}{9}.$$

Ugyanezt közvetlenül is megkaphattuk volna. Ha ugyanis  $\Omega$ -t leszűkítjük  $B$ -re, akkor ezen az összes események száma már csak 18. Az ezen a részhalmazon az  $A$  esemény

számára kedvező elemi események száma (3.2a) alapján 4. Így a feltételes valószínűség  $4/18 = 2/9$ .

### Geometriai valószínűség

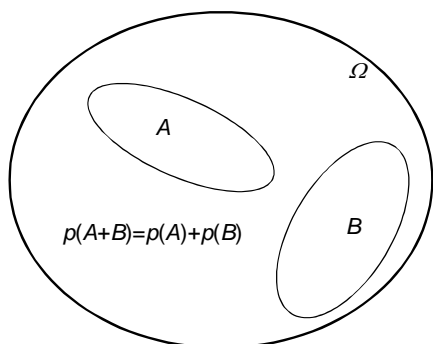
Ha az  $\Omega$  halmaz elemeinek a száma végtelen, az azonos valószínűségű események valószínűsége nem értelmezhető a fenti módon. Ennek jellegzetes példája a geometriai valószínűség. Legyenek az elemi események egy véges  $T$  területű pontthalmaz pontjai.<sup>16</sup> Feltesszük, hogy a kísérletben minden pont azonos valószínűséggel jön ki. Könnyen belátható, hogy minden pont valószínűséggel jön ki a kísérletben, ezért ezt pontosabban is meg kell fogalmaznunk: ha az  $A$  eseménynek megfelelő alakzat területe  $t(A)$ , akkor  $A$  bekövetkezésének a valószínűsége

$$p(A) = \frac{t(A)}{T}. \quad (3.7)$$

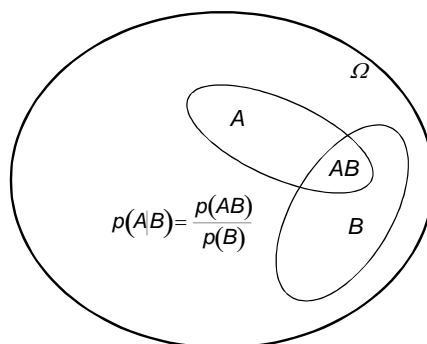
Ez a *geometriai valószínűség* fogalma. Ha kiszemeljük az  $A$  halmaz egy tetszőleges pontját, és a halmazt egyre zsugorítjuk, akkor a pont bekövetkezésének a valószínűsége végig kisebb lesz, mint a  $t(A)$  terület. Így a pont valószínűsége tetszőleges pozitív számnál kisebb, vagyis zérus.

A 3.2a. és 3.2b. ábrák szemléltetik az egymást kizáró eseményeket és a feltételes geometriai valószínűséget. Az előbbi ábráról leolvasható, hogy az  $(A + B)$  pontthalmaz területe a két terület összege, tehát valószínűségük (3.7) szerint összeadódik. Az is látszik az ábráról, hogy események halmazelméleti összeadása a “VAGY” logikai kapcsolatnak felel meg: vagy  $A$ , vagy  $B$  következik be. A másik ábráról viszont az látszik, hogy a halmazelméleti szorzás az “ÉS” logikai kapcsolatot jelenti: mind  $A$ , mind  $B$  bekövetkezik. Az együttes bekövetkezés  $p(AB)$  valószínűsége a két pontthalmaz közös részének a területével arányos. A feltételes valószínűséget így a következőképpen foghatjuk fel: *feltéve*, hogy a kísérlet kimenetele által kiválasztott pont a  $B$  halmazba esik, keressük az  $A$  esemény bekövetkezésének a valószínűségét. Ekkor (3.7)-ben  $T$  szerepét  $t(B)$ , a  $t(A)$  területét pedig  $t(AB)$  játssza. Ezzel adódik (3.5):

$$p(A|B) = \frac{t(AB)}{t(B)} = \frac{t(AB)/T}{t(B)/T} = \frac{p(AB)}{p(B)}.$$



3.2a. ábra. Egymást kizáró események geometriai valószínűsége



3.2b. ábra. Feltételes geometriai valószínűség szemléltetése

<sup>16</sup> Az alábbiak könnyen átvihetők egy- vagy háromdimenziós alakzatokra is. A szemléletesség kedvéért választottuk a síkbeli pontthalmazokat.

Megjegyezzük, hogy a független eseményeket ezen a módon nem tudjuk rajzban szemléltetni.

### Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény

Amikor méréseket végzünk, a kísérlet valamilyen fizikai mennyiség mérését jelenti. A kísérlet kimenetétől függően a mérés eredménye más és más lehet. A mérés minden elemi eseményhez egy vagy több számot rendel hozzá. A mérések kiértékelése szempontjából tehát alapvető ennek a hozzárendelésnek az ismerete. Így jutunk el a *valószínűségi változó* fogalmához, amelyet a mérésekben játszott szerepénél általánosabban határozzunk meg:

3.3. DEFINÍCIÓ. A valószínűségi változó az  $\Omega$  eseménytéren értelmezett mérhető<sup>17</sup> függvény.

A fogalmat két példával világítjuk meg a fentiek közül:

- Amikor két kockával való dobáskor az  $(i, j)$  számpár jön ki, ezek bármilyen függvénye valószínűségi változó, például  $i + j$ ,  $i/j$  stb.
- Céllövés esetében az  $\Omega$  eseményteret a céltábla pontjai alkotják. A céllövő szempontjából a legfontosabb valószínűségi változó a golyó becsapódási pontjának a tábla középpontjától való  $r$  távolsága.

Gyakran beleesünk abba a fogalmazási hibába, hogy nem különböztetjük meg az elemi eseményeket a valószínűségi változó hozzájuk rendelt értékétől. Mérések esetében ez gyakran megbocsátható pongyolaság. Vegyük példának a szoba hőmérsékletének a mérését. Ha a mérést többször megismételjük, általában különböző eredményeket kapunk, tehát a mért hőmérséklet a véletlentől függ. Hajlamosak vagyunk az elemi események  $\Omega$  halmazát a kapott hőmérsékletértékekkel azonosítani. Tudjuk persze, hogy nem erről van szó. Némi gondolkodás után azonban belátjuk, hogy ebben az esetben nem is olyan könnyű az elemi eseményeket definiálni, hiszen azok számos tényező együttesét jelentik – természetesen attól függően, hogyan végeztük a mérést: mikor mértünk, nyitva voltak-e az ablakok, milyen a hőmérő pontossága, volt-e fűtés, stb. Ha ezek a tényezők mind szerepet játszanak a mérés kiértékelésében, ügyelnünk kell az elemi események pontos definíciójára. Ellenkező esetben az említett pongyolaság megbocsátható.

A valószínűségi változók legfontosabb jellemzője az *eloszlásfüggvény*:

3.4. DEFINÍCIÓ. A valószínűségi változó  $F(x)$  eloszlásfüggvénye annak a valószínűség, hogy a változó  $\xi$  értéke kisebb  $x$ -nél:

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \quad (3.8)$$

A kapcsos zárójelen belül szereplő reláció kijelöli az  $\Omega$  eseménytér egy részhalmazát. Ezeket a valószínűségi változó *nívóhalmazainak* nevezzük, amelyek definíció szerint maguk is események. A 3.3. DEFINÍCIÓban szereplő *mérhetőség* azt jelenti, hogy a nívóhalmazokhoz  $x$  minden értékénél kell tudni valószínűséget definiálni. Nagyon nehéz matematikai feladat nem mérhető halmazt konstruálni, így a mérések kiértékelésében mindig feltesszük, hogy a szereplő valószínűségi változók mérhető függvények. Ebben a jegyzetben – kevés kivételtől eltekintve – általában görög betűkkel jelöljük a

<sup>17</sup> A mérhető függvény fogalmát a későbbiekben határozzuk meg.

valószínűségi változókat, az eloszlásfüggvény változóját pedig egy neki megfelelő latin betűvel, mint ezt (3.8)-ban is tettük.

A definícióból következik, hogy egy eloszlásfüggvény mindig monoton növekvő. Ami folytonosságát illeti, ez függ a valószínűségi változó jellegétől. A minket érdeklő esetekben a valószínűségi változók kétféleképpen lehetnek: *diszkrét* és *folytonos* változók.

3.5. DEFINÍCIÓ. A  $\xi$  valószínűségi változó diszkrét, ha értékei csak a megszámlálhatóan sok  $x_k$  szám valamelyike lehet ( $k = 1, 2, \dots$ ).

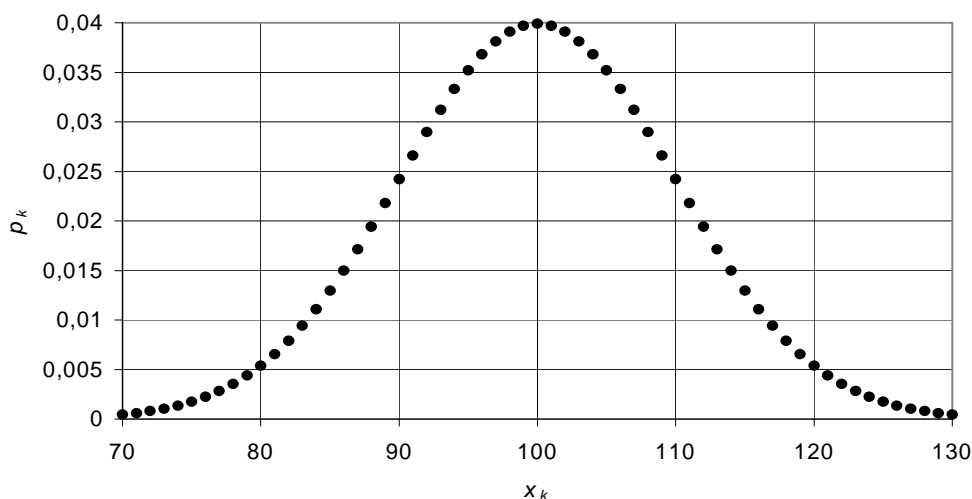
Ebben az esetben az eloszlásfüggvény két szomszédos  $x_k$  közötti intervallumban állandó, de az  $x = x_k$  pontokban ugrása van. Az ugrás nagyságát  $p_k$ -val jelöljük, ami annak a valószínűségét adja meg, hogy a  $\xi = x_k$  esemény bekövetkezzon:

$$p_k = P\{\xi = x_k\}. \quad (3.9a)$$

Diszkrét eloszlások esetében tehát az eloszlásfüggvényt a következőképpen írhatjuk fel:

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k. \quad (3.9b)$$

Be lehet látni, hogy ez függvény *balról folytonos*.



3.3. ábra. Diszkrét eloszlás grafikonja

A folytonos valószínűségi változó fogalmát legegyszerűbb a diszkrét eloszlásokból kiindulva meghatározni. Ebben Gnyegyenko és Hincsin [1] gondolatmenetét követjük.<sup>18</sup> A 3.3. ábrán egy diszkrét eloszlásra ábrázoltuk a  $p_k$  valószínűségeket a változó értékészletét alkotó  $x_k$  értékek függvényében. Az ábrán látható pontok egy folytonos görbévé látszanak összeolvadni. Ezt a következőképpen tudjuk matematikailag is megfogalmazni. Kijelölünk egy  $[x, x+dx)$  intervallumot, és összegezzük az ebbe eső  $x_k$  értékekhez tartozó valószínűségeket. Legyen  $f(x)$  ezek átlagértéke:

$$\sum_{k: x \leq x_k < x+dx} p_k = f(x)dx.$$

Ha az  $x_k$  értékek minden határon túl sűrűsödnek az  $x$ -tengelyen, akkor ezzel eljutunk a folytonos valószínűségi változó fogalmához. Az  $f(x)$  függvény a  $\xi$  valószínűségi vál-

<sup>18</sup> Ez a gondolatmenet azoknak szól elsősorban, akik még nem szereztek kellő jártasságot az integrálok területén.



tozó *sűrűségfüggvénye*. Ha a 3.3. ábrán látható pontokat egy folytonos görbével kötjük össze, akkor az  $F(x)$  eloszlásfüggvény ennek  $-\infty$ -tól  $x$ -ig terjedő része alatt alatti területet adja meg. Így jutunk a következő definícióhoz:

3.6. DEFINÍCIÓ. A  $\xi$  valószínűségi változó folytonos, ha eloszlásfüggvénye felírható az

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (3.10a)$$

integrál alakjában.<sup>19</sup>

Az  $\Omega$  halmaz ekkor vagy egy (véges vagy végtelen) intervallum, vagy ilyenek egyesítése. (3.10a)-ból következik, hogy az  $f(x)$  sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (3.10b)$$

A továbbiakban – hacsak lehet – először a diszkrét változók alapján fogjuk a fogalmakat bevezetni, és csak ezután adjuk meg ezeknek a folytonos eloszlásokra vonatkozó megfelelőit.

A 3.5. és 3.6. DEFINÍCIÓkból következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

hiszen  $F(+\infty)$  annak a valószínűségét jelenti, hogy  $\xi$  egyáltalán felvesz valamilyen valós értéket, ami nyilvánvalóan a biztos eseménnyel azonos. Korábbi összefüggéseink alapján ez a következő is jelenti. Diszkrét valószínűségi változók esetében

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad (3.11a)$$

illetve folytonos valószínűségi változók esetében

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (3.11b)$$

### Várható érték és szórás

Egy *diszkrét* valószínűségi változó értékét  $n$ -szer megmértük. Tegyük fel, hogy az  $x_k$  érték  $l_k$ -szor jött ki. Ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor definíció szerint

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_k}{n}.$$

Vegyük a kapott eredmények átlagát:

<sup>19</sup> A valószínűség-elméletben ennél jóval általánosabban definiálják a folytonos eloszlásokat. Az itt adott definíció valójában a *totál*folytonos valószínűségi változók definíciója. Az Olvasótól elvárt matematikai előismeretekre való tekintettel egyszerűsítettük a definíciót.

$$\bar{\xi} = \frac{\sum l_k x_k}{n}.$$

Az összegzés itt  $k$  minden, a mérésekben előforduló értékére kiterjed. Ennek a mennyiségnek  $n \rightarrow \infty$  mellett vett határértékét nevezzük a  $\xi$  valószínűségi változó *várható értékének*:

$$a = M(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k. \quad (3.12a)$$

Folytonos valószínűségi változó esetében – analóg megfontolásokkal – a következő definíciót kapjuk a várható értékre:

$$a = M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (3.12b)$$

Ezekben a definíciókban természetesen feltételezzük, hogy a végtelen összeg, illetve integrál konvergens. A várható értéket gyakran egyszerűen csak *átlagértéknek* nevezük, hiszen ennek a határértéke. Az  $M(\dots)$  jelölés is erre utal: “mean” angolul átlagot jelent.<sup>20</sup>

Mivel a valószínűségi változónak az egyes kísérletekben kapott értéke az átlagtól eltérhet, szükség van egy olyan jellemzőre is, amely ennek a nagyságát jellemzi. Első ötletként erre kézenfekvő a  $(\xi - a)$  különbség átlagát választani. Mint könnyen belátható, ez minden esetben zérus. Nem zérus azonban a különbség négyzetének az átlaga, amelyet *szórásnégyzetnek* nevezünk:

$$\sigma^2 = D^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - a)^2 p_k, \quad (3.13a)$$

illetve folytonos valószínűségi változók esetében

$$\sigma^2 = D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x) dx. \quad (3.13b)$$

A “szórásnégyzet” mellett használatos még a *variancia* vagy a *diszperzió* kifejezés is.<sup>21</sup> Négyzetgyökét *szórásnak* nevezzük, szokásos jelölése  $\sigma$ . A fenti definíciókban hallgatólagosan ismét feltettük, hogy a fellépő integrálok, illetve összegek konvergenssek. Ha (3.13)-ban a négyzetes tényezőt kifejtjük, egyszerűen levezethetjük a

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 \quad (3.14)$$

összefüggést. Mivel a szórásnégyzet mindig pozitív, azt is kiolvashatjuk ebből a képletből, hogy egy valószínűségi változó négyzetének az átlaga nagyobb, mint a változó átlagának a négyzete.

Egyszerűen beláthatjuk, hogy a várható érték és a szórás arányosan változik, ha a valószínűségi változót egy  $c$  állandóval beszorozzuk:

<sup>20</sup> Számos más nyelven is “m” az első betű: moyenne (francia), Mittelwert (német), medio (spanyol) stb.

<sup>21</sup> Az utóbbira utal a  $D^2(\dots)$  jelölésben a “D” betű.

$$M(c\xi) = cM(\xi) = ca \quad \text{és} \quad D^2(c\xi) = c^2 D^2(\xi) = c^2 \sigma^2.$$

A szórás az eloszlásfüggvény hasznos jellemzője, amelyet meghatározni a mérések kiértékelésének egyik központi feladata. Ebben az alfejezetben csak a *Csebisev-egyenlőtlenséget* idézzük, amely azt fejezi ki, hogy a várható értéktől a szóráshoz képest nagy eltérések nem valószínűek:

3.3. TÉTEL. Ha a  $\xi$  valószínűségi változó várható értéke  $a$ , szórása  $\sigma$ , akkor tetszőleges pozitív  $\lambda$ -ra fennáll, hogy

$$P\{|\xi - a| > \lambda\sigma\} < \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.15)$$

A tételt diszkrét valószínűségi változóra látjuk be, de a bizonyítás egyszerűen átvihető folytonos valószínűségi változók esetében is. (3.13a) alapján írhatjuk:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - a)^2 p_k \geq \sum_{k:|x_k - a| > \lambda\sigma} (x_k - a)^2 p_k > \sum_{k:|x_k - a| > \lambda\sigma} (\lambda\sigma)^2 p_k = \\ &= (\lambda\sigma)^2 P\{|\xi - a| > \lambda\sigma\}. \end{aligned}$$

Ebből egyszerűen következik a bizonyítandó tétel. Ha  $\lambda$ -t úgy választjuk meg, hogy  $\lambda\sigma = \varepsilon$  legyen, akkor az egyenlőtlenség a

$$P\{|\xi - a| > \varepsilon\} < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (3.15a)$$

alakra hozható. Gyakran ebben az alakjában alkalmazzuk.

### Magasabb momentumok

A (3.12) és (3.13) képletekkel definiált várható érték, illetve szórásnégyzet általánosításaként definiálhatunk további momentumokat. Diszkrét valószínűségi változó  $n$ -edik *momentuma*

$$M_n = M(\xi^n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n p_k, \quad (3.16a)$$

ha ez a sor konvergens. A (3.13) képletekkel definiált szórásnégyzet ún. *centrális momentum*, amelynek természetes általánosítása a

$$C_n = M[(\xi - a)^n] = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - a)^n p_k \quad (3.16b)$$

$n$ -edik centrális momentum, ha ez a sor konvergens.

Ugyanezeknek a mennyiségeknek a definícióját könnyen vihetjük át folytonos eloszlásokra is:

$$M_n = M(\xi^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx \quad (3.16c)$$

és

$$C_n = M\left[(\xi - a)^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^n f(x) dx, \quad (3.16d)$$

ha ezek az integrálok léteznek.

## Többváltozós eloszlások<sup>22</sup>

### Együttes eloszlásfüggvény

Az eddigieket általánosíthatjuk több valószínűségi változó esetére. Jelöljük ezeket  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -vel. Az egyszerűség kedvéért mindegyikről feltesszük, hogy folytonosak. Nem okoz nehézséget a diszkrét változók esetére való áttérés. *Együttes eloszlásfüggvényüket* (3.8) mintájára definiáljuk:

3.7. DEFINÍCIÓ. A  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét a következő képlet adja meg:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}. \quad (3.17)$$

Deriváltja az *együttes sűrűségfüggvény* [vö. (3.10b)]:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (3.18)$$

A sűrűségfüggvénynek a következő értelmet lehet adni. Jelöljük ki az  $n$ -dimenziós térben az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pont körül egy  $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  infinitezimális térfogatelemet, és keressük annak a valószínűségét, hogy a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  számok által a térben kijelölt pont ebbe esik. (3.18) szerint ezt első rendben az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) dV = f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

kifejezés adja meg. Amikor a geometriai valószínűséget definiáltuk, feltételeztük, hogy ez a valószínűség független a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ponttól. Ha tehát a rendelkezésre álló térfogat  $V_\Omega$ , akkor (3.7) szerint a geometriai valószínűség  $dV/V_\Omega$ , ami azt jelenti, hogy ekkor az együttes sűrűségfüggvény

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{V_\Omega}.$$

Ezt az eloszlást *egyenletes eloszlásnak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy csak akkor tudjuk értelmezni, amikor  $\Omega$  térfogata véges.

A definícióból következik, hogy az együttes sűrűségfüggvénynek  $\Omega$ -ra vett integrálja 1. Tegyük fel, hogy ismerjük a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét, de egyikük (például  $\xi_1$ ) számunkra érdektelen. Hogyan lehet ebből a maradék  $(n-1)$  valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét kiszámítani? Ha az eloszlásfüggvényben  $x_1$  helyére  $+\infty$ -t helyettesítünk, akkor (3.17) szerint független  $\xi_1$  értékétől, és végeredményben  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  eloszlásfüggvényévé válik. A sűrűségfüggvény tekintetében ez az  $x_1$  változó szerint való integrálást jelent:

<sup>22</sup> Tekintve, hogy ebben a jegyzetben a többváltozós eloszlások közül többnyire csak a Gauss-eloszlásra (lásd alább) van szükség, amely folytonos eloszlás, a fogalmakat folytonos valószínűségi változókra definiáljuk.

$$f_{\text{perem}}(x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 .$$

Az ilyen típusú integrálokat a fennmaradó  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  változók *perem-sűrűségfüggvényének* nevezzük.

Az események függetlenségére vonatkozó definíciót egyszerűen átvihetjük a valószínűségi változókra is:

3.8. DEFINÍCIÓ. A  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változókat függetlennek nevezzük, ha együttes eloszlásfüggvényük a következőképpen bontható tényezőkre:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n). \quad (3.19a)$$

(3.18)-ből következik, hogy ekkor az együttes sűrűségfüggvény is hasonlóképpen bontható tényezőkre:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{dF_1(x_1)}{dx_1} \frac{dF_2(x_2)}{dx_2} \dots \frac{dF_n(x_n)}{dx_n} = \\ &= f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n). \end{aligned} \quad (3.19b)$$

### Várható érték és szórás

Az egyes valószínűségi változók várható értékét és szórását az egyetlen valószínűségi változó esetére használt meghatározások szerint definiálhatjuk. (3.12b) mintájára  $\xi_i$  várható értéke (átlaga):

$$a_i = M(\xi_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (3.20a)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Hasonlóan definiálhatjuk a szórásnégyzetet is:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= D^2(\xi_i) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (3.20b)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Egyszerűen belátható, hogy ez egyben  $\xi_i$  perem-eloszlásának az átlaga, illetve szórásnégyzete is. Ez az észrevétel azt jelenti, hogy egyetlen változó várható értékének és szórásának a meghatározásához elegendő a minket érdeklő változót egyedül megfigyelni, hiszen a többi változó hatása benne van a perem-eloszlásban.

### Kovariancia

Többdimenziós eloszlások esetében fellép a *kovariancia*, amely egyetlen változó esetében – értelemszerűen – nem definiálható.

3.9. DEFINÍCIÓ. A  $\xi_i$  és  $\xi_j$  valószínűségi változók kovarianciáját a

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = M[(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.21)$$

képlet adja meg.

Nyilvánvaló, hogy  $i = j$  esetén a kovariancia azonos a szórásnégyzettel.  $i \neq j$  esetén viszont a kovariancia némi felvilágosítást ad a két változó függetlenségére vonatkozóan. Fennáll ugyanis a

3.4. TÉTEL. Ha a  $\xi_i$  és  $\xi_j$  valószínűségi változók függetlenek, kovarianciájuk eltűnik.

Helyettesítsük (3.19b)-t (3.21)-be:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) f_{ij}(x_i, x_j) dx_i dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) f_i(x_i) f_j(x_j) dx_i dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i) f_i(x_i) dx_i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - a_j) f_j(x_j) dx_j = 0. \end{aligned}$$

*A tétel megfordítása nem érvényes:* két valószínűségi változó kovarianciája úgy is eltűnhet, hogy azok nem függetlenek.

Gyakran alkalmazzuk a következő tételt:

3.5. TÉTEL. Két valószínűségi változó összegének várható értéke a várható értékük összege:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta).$$

Legyen  $\zeta = \xi + \eta$ . Ekkor egyszerű belátni, hogy  $\zeta$  eloszlásfüggvénye

$$F(z) = P\{\zeta < z\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy,$$

vagyis a sűrűségfüggvénye

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx.$$

Ebből kapjuk a

$$M(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} z f(x, z-x) dx$$

várható értéket. Ha itt alkalmazzuk a  $z = x + y$  helyettesítést, akkor kapjuk a tétel állítását:

$$M(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)dx = M(\xi) + M(\eta).$$

Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy a tétel érvényes tetszőleges számú valószínűségi változó összegére is.

A kovariancia nagyságát korlátozza a

3.6. TÉTEL. A  $\xi_i$  és  $\xi_j$  valószínűségi változók kovarianciájának abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint szórásuk szorzata:

$$\left| \text{cov}(\xi_i, \xi_j) \right| \leq \sigma_i \sigma_j. \quad (3.22)$$

Legyen  $\xi = \xi_i - a_i$  és  $\eta = \xi_j - a_j$ . Nyilván ekkor  $M(\eta) = M(\xi) = 0$ .  $\lambda$  tetszőleges valós számértéke mellett fennáll a

$$0 \leq D^2(\xi - \lambda\eta) = D^2(\xi) - 2\lambda M(\eta\xi) + \lambda^2 D^2(\eta),$$

egyenlőtlenség. (Itt mindjárt alkalmaztuk a 3.5. TÉTELT.) E polinom diszkriminánsa nyilván nem negatív, vagyis

$$\left| M(\eta\xi) \right| \leq D(\xi) \cdot D(\eta),$$

amint a tétel állítja. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fent, ha van olyan  $\lambda$ , amelyre

$$\xi - \lambda\eta = \text{konstans}.$$

A most bizonyított tételt *Schwarz-féle egyenlőtlenség*nek nevezzük.<sup>23</sup>

A kovariancia és a szórások

$$r = \frac{\text{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

hányadosát *korrelációs együtthatónak* nevezzük. A 3.6. TÉTEL szerint  $r$  abszolút értéke nem lehet nagyobb 1-nél.

### Feltételes sűrűségfüggvény

(3.5) alapján definiálhatjuk a feltételes sűrűségfüggvényt. Tekintsünk két valószínűségi változót:  $\xi$  és  $\eta$ . Együttes sűrűségfüggvényük  $f(x, y)$ .  $\eta$  *perem-sűrűségfüggvénye*

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

A 3.2. DEFINÍCIÓ alkalmazásához az  $A$  és  $B$  események legyenek a következők:

$$A = \{x \leq \xi < x + dx\} \quad \text{és} \quad B = \{y \leq \eta < y + dy\}.$$

<sup>23</sup> A tételt sok nemzet tekinti magáénak: a franciák Cauchy-ról, az oroszok Bunyakovszkijről nevezték el, ami nem csoda, hiszen levezetése annyira egyszerű, hogy többen is megkaphatták egymástól függetlenül. Így Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenségnek kellene neveznünk. Az egyszerűség kedvéért a legrövidebb nevű szerzőt választottuk.

Definíció szerint

$$P(AB) = \int f(x, y) dx dy \quad \text{és} \quad P(B) = \int f(y) dy .$$

A (3.5) szerinti feltételes valószínűség ezzel így írható:

$$P(A|B) = \frac{\int f(x, y) dx dy}{\int f(y) dy} = \frac{\int f(x, y) dx}{\int f(y) dy} = \int f(x|\eta = y) dx .$$

Ezen alapul a

3.10. DEFINÍCIÓ. A  $\xi$  valószínűségi változónak az  $\eta$  valószínűségi változóra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye

$$f(x|\eta = y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} . \quad (3.23)$$

A feltétel jelölését néha egyszerűsítjük:  $f(x|y)$ . A feltételes eloszláshoz is lehet várható értéket és szórást rendelni:

3.11. DEFINÍCIÓ. A  $\xi$  valószínűségi változónak az  $\eta$  valószínűségi változóra vonatkozó feltételes várható értéke és szórásnégyzete:

$$a' = M(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y) dx ,$$

$$D^2(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a')^2 f(x|y) dx .$$

### Vektori jelölésmód

A többdimenziós eloszlások esetében kényelmes a vektori jelölésmód. A  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  valószínűségi változókat a  $\vec{\xi}$  vektor komponenseinek tekintjük. Hasonlóan az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{a}$  vektorokban egyesítjük az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , illetve az  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  változókat. Ezekkel a jelölésekkel a (3.20a) képletek az egyszerűbb

$$\mathbf{a} = M(\vec{\xi}) = \int \mathbf{x} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.24)$$

alakban írhatók fel. Itt az integrált az  $f(\mathbf{x})$  függvény teljes értelmezési tartományára ki kell terjeszteni. Ha az integrálási tartomány más, akkor azt értelemszerűen jelöljük.

A  $\vec{\xi}$  vektor két komponense között a (3.21)-ben definiált kovarianciát minden lehetséges  $(i, j)$  indexpárra képezzük, és a kapott kovarianciákat a  $\mathbf{B}$  kovarianciamátrix  $(i, j)$  elemének tekintjük:

$$B_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j) . \quad (3.25)$$

Ha szükséges, a kovarianciamátrix  $\mathbf{B}$  jelöléséhez indexben feltüntetjük, melyik véletlen vektorhoz tartozik. A definícióból következik, hogy  $\mathbf{B}$  szimmetrikus. A vektori jelölésmód segítségével megmutatjuk, hogy ennél több is igaz:



3.7. TÉTEL. Minden kovarianciamátrix pozitív szemidefinit, szimmetrikus, vagyis tetszőleges  $\mathbf{z}$  vektorra fennáll, hogy

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} \geq 0. \quad (3.26)$$

(3.21) szerint  $\xi_i$  és  $\xi_j$  kovarianciája a  $(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j)$  szorzat várható értéke. Ez a szorzat azonban tekinthető a  $(\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T$  diád  $(i, j)$  elemének is. Ebből következik, hogy a (3.25) képlet vektori alakja

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \left[ (\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T \right], \quad (3.27)$$

amire sűrűn fogunk ebben a jegyzetben hivatkozni.  $\mathbf{M}(\mathbf{z}^T (\bar{\xi} - \mathbf{a})) = \mathbf{z}^T \mathbf{M}(\bar{\xi} - \mathbf{a})$  a 3.5. TÉTEL szerint. Így a  $\mathbf{z}^T (\bar{\xi} - \mathbf{a})$  skalárszorzat zérus várható értékű valószínűségi változó bármilyen konstans<sup>24</sup>  $\mathbf{z}$  vektor esetében. Négyzetének várható értéke nem lehet negatív:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{M} \left\{ \left[ \mathbf{z}^T (\bar{\xi} - \mathbf{a}) \right]^2 \right\} &= \mathbf{M} \left\{ \mathbf{z}^T (\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T \mathbf{z} \right\} = \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{M} \left\{ (\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T \right\} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

#### Transzformált változók várható értéke és kovarianciája

Mérések kiértékelésekor a közvetlenül mért mennyiségekből további valószínűségi változókat számítunk ki, más szóval *transzformáljuk* őket. Az alábbiakban a *lineáris* transzformációkat tekintjük, vagyis meghatározzuk a transzformált mennyiségek várható értékét és kovarianciamátrixát. Írjuk a transzformációt az

$$\bar{\eta} = \mathbf{A} \bar{\xi}$$

alakba. Várható értékét (3.24)-ből kapjuk:

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}(\bar{\eta}) = \mathbf{M}(\mathbf{A} \bar{\xi}) = \int \mathbf{A} \mathbf{x} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{A} \int \mathbf{x} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{a}. \quad (3.28)$$

Hasonlóan egyszerű kiszámítani a transzformált változók kovarianciamátrixát. (3.27) alapján írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\bar{\eta}} &= \mathbf{M} \left[ \mathbf{A} (\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T \mathbf{A}^T \right] = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{M} \left[ (\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T \right] \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{B}_{\bar{\xi}} \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ha  $\mathbf{A}$  annak az  $\mathbf{U}$  mátrixnak a transzponáltja, amely (2.3) szerint a kovarianciamátrixot diagonálisra transzformálja, akkor az  $\bar{\eta}$  vektor komponensei *korrelálatlanok*. Mint fentebb említettük, ez nem feltétlenül jelent függetlenséget is.

<sup>24</sup> Ebben az összefüggésben a "konstans" azt jelenti, hogy *nem valószínűségi változó*.

Az  $\mathbf{A}$  transzformációs mátrixról nem szükséges kikötnünk, hogy négyzetes legyen. Szélső esetben lehet akár egy vektor is. Az imént kapott képletek alapján fontos tételket bizonyíthatunk be, ha  $\mathbf{A} = \vec{\omega}^T = (1, 1, \dots, 1)$ . Ekkor a transzformáció egyetlen valószínűségi változót eredményez:

$$\eta = \vec{\omega}^T \vec{\xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

A 3.5. TÉTEL, illetve a (3.28) képlet alapján érvényes a

$$M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i) \quad (3.30)$$

képlet. Hasonló összefüggés írható fel  $\eta$  szórásnégyzetére abban az esetben, amikor a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek. (3.29) alapján könnyen beláthatjuk, hogy ekkor fennáll a

3.8. TÉTEL. Független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét tagonként lehet képezni:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i). \quad (3.31)$$

Fontos hangsúlyozni, hogy ez a tétel csak független (pontosabban: korrelálatlan) valószínűségi változókra érvényes.

### 3.2. Nevezetes eloszlások

Ebben az alfejezetben olyan ismert eloszlások sűrűségfüggvényét, továbbá várható értékét és szórást adjuk meg, amelyek a mérések kiértékelésében fontos szerepet játszanak. Először az egydimenziós eloszlásokat tekintjük, majd áttérünk a többdimenziós eloszlásokra. Az utóbbi kört leszűkítjük a többdimenziós Gauss-eloszlásra.

#### Egydimenziós eloszlások

##### Egyenletes eloszlás

A geometriai valószínűséggel kapcsolatban már utaltunk az egyenletes eloszlásra. Akkor mondjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változó egyenletes eloszlású a  $[0, \theta]$  intervallumban, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{ha } x < 0, \text{ vagy } x > \theta. \end{cases} \quad (3.32)$$

Az egyenletes eloszlás gyakrabban fordul elő, mint gondolnánk. Mindenesetre arról nevezetes, hogy a mérések kiértékelésére *általában* kidolgozott módszerek sorra csődöt mondanak, amikor a mért adatok egyenletes eloszlásúak. Ennek oka abban rejlik, hogy a valószínűségi változónak az a tartománya, ahol a sűrűségfüggvény 0-tól különbözik, függ  $\theta$ -tól. Ugyanakkor  $\theta$  általában ismeretlen paraméter, és a mérést gyakran azért végezzük, hogy értékéről felvilágosítást kapjunk.

Tetszőleges  $\xi$  folytonos valószínűségi változót lehet egyenletes eloszlásúvá transzformálni. Érvényes ugyanis a

3.9. TÉTEL. Legyen a  $\xi$  folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $F(x)$ . Ekkor  $F(\xi)$  egyenletes eloszlású valószínűségi változó a  $[0, 1]$  intervallumban.

Jelöljük  $F(\xi)$  eloszlásfüggvényét  $\Phi(x)$ -szel. Ekkor definíció szerint fennáll:

$$\Phi(x) = P\{F(\xi) < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F[F^{-1}(x)] = x,$$

ahol a “-1” felső indexszel az inverz függvényt jelöltük. Ennek alapján  $F(\xi)$  sűrűségfüggvénye azonosan 1. Mivel  $F(\xi)$  felső határa 1, ezzel a tételt bebizonyítottuk. E levezetés mintájára beláthatjuk, hogy a  $\xi = F^{-1}(\eta)$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye  $F(x)$ , ha  $\eta$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumban. Mivel minden számítógépben található egy függvény, amely egy ilyen  $\eta$ -t állít elő,<sup>25</sup> ezen a módon tetszőleges ismert eloszlású véletlen számot lehet generálni.

A (3.12) és (3.13) képletek alapján egyszerűen kapjuk az egyenletes eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét:

$$M(\xi) = \int_0^{\theta} x \frac{dx}{\theta} = \frac{\theta}{2} \quad (3.33a)$$

és

$$D^2(\xi) = \int_0^{\theta} \left(x - \frac{\theta}{2}\right)^2 \frac{dx}{\theta} = \frac{\theta^2}{12}. \quad (3.33b)$$

### Binomiális eloszlás

Legyen  $p$  az  $A$  esemény valószínűsége. A kísérletet  $n$ -szer megismételjük.  $k$ -val jelöljük azoknak a kísérleteknek a számát, amelyekben  $A$  bekövetkezik. A  $k$  valószínűségi változó eloszlása a *binomiális eloszlás*.<sup>26</sup> Egyszerűen kiszámíthatjuk annak  $p_k$  valószínűségét, hogy  $A$  pontosan  $k$ -szor következik be. Ha  $A$   $k$ -szor következett be, akkor  $(n - k)$  esetben *nem* következett be. Egy ilyen kísérletsorozat valószínűsége

$$p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Az elvégzett  $n$  kísérlet eredménye  $k$  darab “igen”-ből és  $(n - k)$  darab “nem”-ből áll aszerint, hogy az  $A$  esemény bekövetkezett-e vagy sem. Mivel a keresett  $p_k$  valószínűség szempontjából közömbös ezek sorrendje, a fenti valószínűséget meg kell szorozni a kedvező kísérletsorozatok számával:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (3.34)$$

A binomiális tételből következik, hogy ezek összege 1. Belátjuk továbbá, hogy  $k$  várható értéke és szórásnégyzete

$$M(k) = np, \quad (3.34a)$$

illetve

<sup>25</sup> A jobb zsebszámológépekben szintén található egy ilyen véletlenszám-generátor.

<sup>26</sup> Ezt gyakran nevezzük *Bernoulli-eloszlásnak* is.

$$D^2(k) = np(1-p). \quad (3.34b)$$

Definíció szerint

$$\begin{aligned} M(k) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np. \end{aligned}$$

Hasonlóan be lehet látni, hogy

$$\begin{aligned} M(k^2) - M(k) &= M[k(k-1)] = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Ebből (3.14) alapján kapjuk a keresett eredményt:

$$D^2(k) = M(k^2) - [M(k)]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2,$$

amint (3.34b)-ben állítjuk.

A binomiális eloszlás alapján meg tudjuk világítani a (3.1) képletben szereplő határérték jellegét. Ott említettük, hogy a valószínűség-elmélet modern megfogalmazásában ez a határérték nem több, mint a valószínűség meghatározására szolgáló “mérési utasítás”. Magát a valószínűséget ettől függetlenül definiálják, de ennek tárgyalása meghaladná jegyzetünk kereteit. Nos, tegyük fel, hogy egy ilyen definíció létezik. A 3.3. TÉTELben kimondott (3.15a) Csebisev-egyenlőtlenség alapján ekkor írhatjuk:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{D^2(k/n)}{\varepsilon^2} = \frac{D^2(k)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Ebből következik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

határérték. Ezt a fajta konvergenciát nevezzük *sztochasztikus konvergenciának*: ahogy a kísérletek  $n$  száma nő, egyre valószínűtlenebbek az olyan “igen-nem” sorozatok, amelyekben a relatív gyakoriság egy előírt  $\varepsilon$ -nál jobban eltér a valószínűségtől.

A binomiális eloszlásnak két közelítő alakja érdemel említést: a *Poisson-eloszlás* és a *Gauss-eloszlás*.

### Poisson-eloszlás

Rögzítjük az  $a = np$  várható értéket, miközben  $n \rightarrow \infty$ . Megmutatjuk, hogy ekkor  $p_k$  határértéke

$$p_k = e^{-a} \frac{a^k}{k!}. \quad (3.35)$$

(3.34)-et a következő alakra hozhatjuk:

$$p_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n.$$

Ezen belül nyilvánvalóak a következő határértékek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} = 1$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

$P_k$  határértéke tehát valóban (3.35). Ezt nevezzük *Poisson-eloszlásnak*. Jellegzetessége, hogy várható értéke és szórásnégyzete azonos:

$$M(k) = D^2(k) = a. \quad (3.35a)$$

### Gauss-eloszlás

A binomiális eloszlás másik határértéke a *Gauss-* vagy *normáloszlás*, amelynek a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3.36)$$

ahol

$$M(\xi) = a \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \sigma^2. \quad (3.36a)$$

Ez az eloszlás a mérések kiértékelésében alapvető szerepet játszik, ezért ebben a jegyzetben sokszor találkozunk vele. A dolog alapja az ún. *centrális határeloszlás-tétel*, amely szerint elegendően nagy számú valószínűségi változó átlaga jó közelítéssel Gauss-eloszlásúnak tekinthető, ha eloszlásfüggvényük bizonyos, gyakran teljesülő feltételeknek eleget tesz.

Megmutatjuk, hogy (3.34)-et valóban lehet a (3.36) képlettel közelíteni. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$x = k, \quad a = np \quad \text{és} \quad \sigma^2 = np(1-p).$$

Alkalmazzuk a Stirling-formulát:

$$n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

A binomiális együtthatót ezzel így közelíthetjük:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

A négyzetgyököt tartalmazó tényező  $k$ -tól gyengén függ, tehát benne elég a  $k \approx np$  közelítést alkalmazni. Ugyanakkor az utolsó tényező, vagyis a tört  $k$ -nak gyorsan vál-

tozó függvénye, amit a későbbiek szerint fogunk közelíteni. Végeredményben tehát a következő közelítést kapjuk:

$$\binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Innentől kezdve  $k$ -t folytonos változónak fogjuk tekinteni. A (3.34) valószínűség logaritmusára előbbi képletünk felhasználásával a

$$\ln\left(p_k \sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \approx n \ln n - k \ln\left(\frac{k}{p}\right) - (n-k) \ln\left(\frac{n-k}{1-p}\right)$$

közelítő formulát kapjuk. Könnyű belátni, hogy ez eltűnik a  $k = np$  helyettesítéskor. Hasonlóan beláthatók a következő egyenlőségek is:

$$\left. \frac{\partial}{\partial k} \ln\left(p_k \sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \right|_{k=np} = -\ln\left(\frac{k}{p}\right) + \ln\left(\frac{n-k}{1-p}\right) \Big|_{k=np} = 0$$

és

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} \ln\left(p_k \sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \right|_{k=np} = -\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k} \Big|_{k=np} = -\frac{1}{np(1-p)} = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Ezzel kapjuk a  $k$  szerinti sorfejtés vezető tagját:

$$\ln\left(p_k \sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \approx -\frac{(k - np)^2}{2\sigma^2} = -\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2},$$

amiből közvetlenül következik (3.36).

### Többdimenziós Gauss-eloszlás

A többdimenziós eloszlások közül csak a többdimenziós Gauss-eloszlással foglalkozunk. Ha a  $\bar{\xi}$  vektor várható értékét, illetve kovarianciamátrixát a

$$\mathbf{M}(\bar{\xi}) = \mathbf{a} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}_{\bar{\xi}} = \mathbf{M}\left[(\bar{\xi} - \mathbf{a})(\bar{\xi} - \mathbf{a})^T\right] \quad (3.37a)$$

képletek szerint jelöljük, akkor a  $\bar{\xi}$  vektor sűrűségfüggvénye

$$f(\mathbf{x}) = C_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right\}, \quad (3.37)$$

ahol

$$C_0 = \frac{[\det(\mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1})]^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{B}_{\bar{\xi}}}}. \quad (3.37b)$$

A sűrűségfüggvény definíciójához fel kell tételeznünk, hogy a kovarianciamátrix invertálható. E szakasz végén visszatérünk a szinguláris kovarianciamátrix esetére.

A 3.9. TÉTEL szerint független valószínűségi változók kovarianciája eltűnik, de ennek a megfordítása nem feltétlenül érvényes. Nos, Gauss-eloszlás esetében a kovariancia eltűnése egyben függetlenséget is jelent. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha a kovarianciák eltűnnek, akkor a  $\mathbf{B}$  kovarianciamátrix diagonális:

$$\mathbf{B}_{\xi} = \text{diag}(\sigma_i^2), \quad \mathbf{B}_{\xi}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right),$$

amit (3.37) képletekbe helyettesítve kapjuk az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\prod_{i=1}^n \sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_i)^2}{\sigma_i^2}\right\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - a_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\} \end{aligned} \quad (3.37c)$$

sűrűségfüggvényt. Az itt szereplő tényezők az egyes valószínűségi változók külön-külön vett sűrűségfüggvényei. A most bizonyított kijelentést tétel formájában is ki-mondjuk:

3.10. TÉTEL. Gauss-eloszlású valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha kovarianciamátrixuk diagonális.

A (3.28) és (3.29) képletek megadják transzformált véletlen vektorok várható értékét, illetve kovarianciamátrixát. Ha a transzformált vektor Gauss-eloszlású, akkor több is igaz, nevezetesen fennáll a következő gyakran használt tétel:

3.11. TÉTEL. Ha a  $\bar{\xi}$  véletlen vektor Gauss-eloszlású, akkor a transzformált  $\bar{\eta} = \mathbf{A}\bar{\xi}$  véletlen vektor szintén Gauss-eloszlású, amelynek várható értékét (3.28), kovarianciamátrixát pedig (3.29) adja meg.

Először belátjuk, hogy ha  $\xi$  Gauss-eloszlású, akkor  $\eta = c\xi$  is az – tetszőleges  $c$  állandó mellett ( $c \neq 0$ ).  $\eta$  eloszlásfüggvénye

$$F(y) = P\{\eta < y\} = P\left\{\xi < \frac{y}{c}\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/c} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx,$$

amiből  $\eta$  sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-ca)^2}{2(c\sigma)^2}\right].$$

Ez egy  $ca$  várhatóértékű és  $c\sigma$  szórású Gauss-eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ezután kiszámítjuk az  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Nyilván elég az  $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$  esetet tekinteni. Ha  $\xi_1$  és  $\xi_2$  kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix},$$

akkor (3.37) szerint  $\xi_1$  és  $\xi_2$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{\sigma_2^2 x_1^2 + \sigma_1^2 x_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right].$$

$\eta$  szórásnégyzete

$$D^2(\xi_1 + \xi_2) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

A (3.8) és (3.10) definíciók szerint felírhatjuk  $\eta$  eloszlásfüggvényét:

$$F(y) = P\{\xi_1 + \xi_2 < y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2) dx_1,$$

illetve  $\eta$  sűrűségfüggvényét:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x_2, x_2) dx_2.$$

Az integrál elemi helyettesítésekkel kiértékelhető, és az eredmény

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)}\right],$$

ami valóban egy Gauss-eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Az eddig bebizonyított két állítás alapján  $\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$  szintén Gauss-eloszlású, ha a  $c_1$  és  $c_2$  állandók közül legalább az egyik zérustól különbözik. Innentől pedig már teljes indukcióval bizonyíthatjuk be a tételt. A bizonyítás részletezését az Olvasóra bízunk.

Befejezésül megbeszéljük, mi a helyzet akkor, amikor a kovarianciamátrix szinguláris. A szingularitás azt jelenti, hogy van olyan nemzérus  $\mathbf{z}$  vektor, amelyre

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} = 0.$$

Mivel a kvadratikus alak  $\mathbf{z}^T \bar{\xi}$  szórásnégyzete, ez csak úgy lehetséges, hogy

$$\mathbf{z}^T \bar{\xi} = \text{konstans},$$

vagyis a valószínűségi változók nem lineárisan függetlenek. Ha a  $\mathbf{B}$  mátrix rangja  $k$ , az ilyen  $\mathbf{z}$  vektorok között  $(n-k)$  darab lineárisan függetlent lehet találni. Írjuk fel ezt általánosan is: létezik egy olyan  $[n \times (n-k)]$  rendű  $\mathbf{Z}_{n,n-k}$  mátrix, amelyre

$$\mathbf{Z}^T \bar{\xi} = \text{konstans},$$

és rangja  $(n-k)$ . A  $\bar{\xi}$  vektor lehetséges értékei tehát nem töltik ki a teljes  $n$ -dimenziós teret, hanem annak csak egy  $(n-k)$ -dimenziós alterét.

Például  $n=3$  és  $k=2$  esetén ez azt jelenti, hogy a  $\bar{\xi}$  vektor nem a teljes térben, hanem csak egy, a  $\mathbf{z}$  vektorra merőleges síkon változhat. Ha az  $f(x_1, x_2, x_3)$  sűrűségfüggvényt ennek ellenére három változó függvényének tekintjük, vagyis háromdimenziós  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  térfogatelemekre vonatkoztatjuk, akkor a sűrűségfüggvény nem értelmezhető. Addig azonosan 0, amíg az  $(x_1, x_2, x_3)$  pont nincs rajta a síkon. Amikor viszont rajta van,  $f(x_1, x_2, x_3)dV$  annak a valószínűségét adja meg, hogy a pont a  $dV$  által



a síkból kimetszett tartományba esik. Ha ezt elosztjuk  $dV$ -vel, akkor a hányados végtelenhez tart, amikor  $dV$  zérushoz tart. Így a sűrűségfüggvény közönséges függvényként nem értelmezhető, hiszen valójában  $\delta$ -függvény, vagyis disztribúció.

Levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy a sűrűségfüggvény *nem definiálható*, amikor  $\mathbf{B}$  szinguláris. Ebben az esetben a  $\bar{\xi}$  vektor komponenseinek a számát csökkentenünk kell. A 2.3. DEFINÍCIÓ szerint  $\mathbf{B}$ -nek van egy nonsinguláris  $k$ -adrendű minora. A  $\bar{\xi}$  vektornak ehhez tartozó komponensei már lineárisan független valószínűségi változók, amelyekre értelmezhető a  $k$ -változós sűrűségfüggvény. A fennmaradó  $(n - k)$  darab valószínűségi változót az előbbiekkal ki lehet fejezni, tehát rájuk vonatkozóan bármilyen mennyiséget (várható értéket, kovarianciát, valószínűségeket stb.) ki lehet számítani. Ennek részleteibe azonban nem megyünk bele.

### 3.3. A Gauss-eloszlásból származtatott eloszlások

A mérések kiértékelésekor több olyan valószínűségi változóval van dolgunk, amelyek a Gauss-eloszlásból származtathatók. A mérésiértékelés irodalmában három eloszlás játszik különösen fontos szerepet:  $\chi^2$ -eloszlás, Student-eloszlás és Fisher-eloszlás. Egy negyedik, a  $\varphi$ -eloszlás jelenik meg a 9. fejezetben tárgyalt pontelhagyásos módszer alkalmazásakor.

#### $\chi^2$ -eloszlás

Ha  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  független Gauss-eloszlású valószínűségi változók, amelyek várható értéke 0, szórása 1, akkor definíció szerint

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (3.38)$$

E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad (3.38a)$$

ahol  $\Gamma(x)$  az ún. gammafüggvény:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (3.39)$$

A (3.38)-ban megjelenő tagok  $n$  számát a  $\chi^2$ -eloszlás *szabadsági fokának* nevezzük.  $\chi^2$  várható értéke és szórásnégyzete:

$$M(\chi^2) = n \quad \text{és} \quad D^2(\chi^2) = 2n. \quad (3.38b)$$

#### Student-eloszlás

Legyen  $\xi$  egy 0 várható értékű és 1 szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó, amely független  $\chi_n^2$ -től. Ekkor a

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}} \quad (3.40)$$

hányadost *Student-törtnek* nevezzük. Sűrűségfüggvénye

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (3.40a)$$

várható értéke és szórása

$$M(t_n) = 0 \quad \text{és} \quad D^2(t_n) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2. \quad (3.40b)$$

A (3.40a) sűrűségfüggvény ugyan értelmezhető  $n = 1$ -re és  $n = 2$ -re is, de ezekben az esetekben nem létezik a szórás.  $n$ -et a Student-eloszlás esetében is a szabadsági fokok számának nevezzük.

### Fisher-eloszlás

A Fisher-eloszlás két, egymástól független  $\chi^2$ -változó hányadosa:

$$F_{mn} = \frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n}. \quad (3.41)$$

Sűrűségfüggvénye

$$f_{mn}(x) = \frac{n}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\left(\frac{nx}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{nx}{m} + 1\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad (3.41a)$$

várható értéke és szórásnégyzete

$$M(F_{mn}) = 1 \quad \text{és} \quad D^2(F_{mn}) = \frac{m+2}{m} \cdot \frac{n^2}{(n-2)(n-4)} - 1. \quad (3.41b)$$

### $\varphi$ -eloszlás

A  $\varphi$ -hányados emlékeztet a Fisher-hányadosra:

$$\varphi_{mn} = \frac{\sqrt{\chi_m^2/m}}{\chi_n^2/n}, \quad (3.42)$$

ahol  $\chi_m^2$  és  $\chi_n^2$  egymástól független  $\chi^2$ -változók. A Fisher-hányadoshoz képest az egyetlen különbség a számlálóban szereplő négyzetgyök. Bonyolultsága miatt nem írjuk fel a sűrűségfüggvényét, sem várható értékét és szórását.

### \*3.4. Korrelációs ellipszoid

A korrelációs ellipszoid hasznos segédeszköz véletlen vektorok összehasonlításában.

3.12. DEFINÍCIÓ. Ha  $M(\vec{\xi}) = \mathbf{a}$ , a  $\vec{\xi}$  véletlen vektor korrelációs ellipszoidját azoknak az  $\mathbf{x}$  vektoroknak a végpontjai alkotják, amelyek kielégítik az

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{B}_{\vec{\xi}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 1 \quad (3.43)$$

egyenletet.

A korrelációs ellipszoid nevezetessége, hogy felületén a Gauss-eloszlás sűrűségfüggvénye állandó, ami közvetlenül belátható a többdimenziós Gauss-eloszlás (3.37) szerinti definíciója alapján.

Legyen  $\vec{\Omega}$  egységvektor, és számítsuk ki az  $\vec{\Omega}^T \vec{\xi}$  valószínűségi változó szórnégyszetét:

$$r^2 = D^2(\vec{\Omega}^T \vec{\xi}) = M\left(\vec{\Omega}^T (\vec{\xi} - \mathbf{a}) (\vec{\xi} - \mathbf{a})^T \vec{\Omega}\right) = \vec{\Omega}^T \mathbf{B}_{\vec{\xi}} \vec{\Omega}. \quad (3.44)$$

Megmutatjuk, hogy a korrelációs ellipszoid tetszőleges  $\mathbf{x}$  pontjához lehet találni olyan  $\vec{\Omega}$  vektort, hogy  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r$ . Megfontolásainkat a 3.4. ábrán lehet nyomon követni, amely két változó ( $n = 2$ ) esetében mutatja az ellipszoidot (az ábrán ellipszist).

Legyen  $\mathbf{U}$  az az unitér mátrix, amely a  $\mathbf{B}_{\vec{\xi}}$  mátrixot főtengetyre transzformálja:

$$\text{diag}(\sigma^2) = \mathbf{B}_{\vec{\eta}} = \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{\vec{\xi}} \mathbf{U}, \quad \mathbf{B}_{\vec{\xi}} = \mathbf{U} \mathbf{B}_{\vec{\eta}} \mathbf{U}^T. \quad (3.45)$$

A  $\mathbf{B}_{\vec{\eta}}$  diagonális mátrix az  $\vec{\eta} = \mathbf{U}^T (\vec{\xi} - \mathbf{a})$  vektor kovarianciamátrixa. A főátlóban levő

$$\sigma_i^2 = D^2(\eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

elemek a  $\mathbf{B}_{\vec{\xi}}$  mátrix sajátértékei. A transzformált koordináta-rendszerben tehát a (3.43) szerinti felület egyenlete

$$\mathbf{y}^T \mathbf{B}_{\vec{\eta}}^{-1} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = 1, \quad (3.46)$$

ahol  $\mathbf{y}$  az eredeti  $\mathbf{x}$  vektor transzformáltja:  $\mathbf{y} = \mathbf{U}^T (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ .

Az  $\mathbf{U}$  mátrix oszlopai  $\mathbf{B}_{\vec{\xi}}$  sajátvektorai, tehát  $\mathbf{y}$  komponensei az  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  vektornak a sajátvektorokra vett vetületei. Először nézzük az  $n = 2$  esetet. A 3.4. ábrán  $\theta$ -val jelöljük az  $\mathbf{u}_1$  sajátvektornak az eredeti  $x_1$  koordinátatengellyel bezárt szögét. Ezzel a jelöléssel az  $\mathbf{U}$  mátrix elemei a következők:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Ha az  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  vektor polárszöge  $\varphi$  (az ábrán nincs jelölve), akkor

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

amivel

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = r \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \theta) \\ \sin(\varphi - \theta) \end{bmatrix}.$$

Az  $\mathbf{u}_1$  és  $\mathbf{u}_2$  vektorok által kifeszített  $(y_1, y_2)$  koordinátarendszer az  $(x_1, x_2)$  eredetihez képest  $\theta$  szöggel van elforgatva az óramutató járásával ellentétes irányban. Utóbbi képletünkéből látszik, hogy  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  és  $\mathbf{y}$  ugyanazt a vektort jelöli, de komponenseik egymáshoz képest elforgatott koordinátarendszerekben vannak kifejezve. Ugyanez a gondolatmenet átvihető  $n$ -dimenziós térbe is.

A (3.46) egyenlet szerint az  $y_i/\sigma_i$  hányadosok egy egységvektor komponensei. Jelöljük ezt  $\vec{\omega}$ -val:  $\omega_i = y_i/\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Az  $\mathbf{y}$  vektor hosszúságának négyzete

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \omega_i^2 = \vec{\omega}^T \mathbf{B}_{\vec{\eta}} \vec{\omega},$$

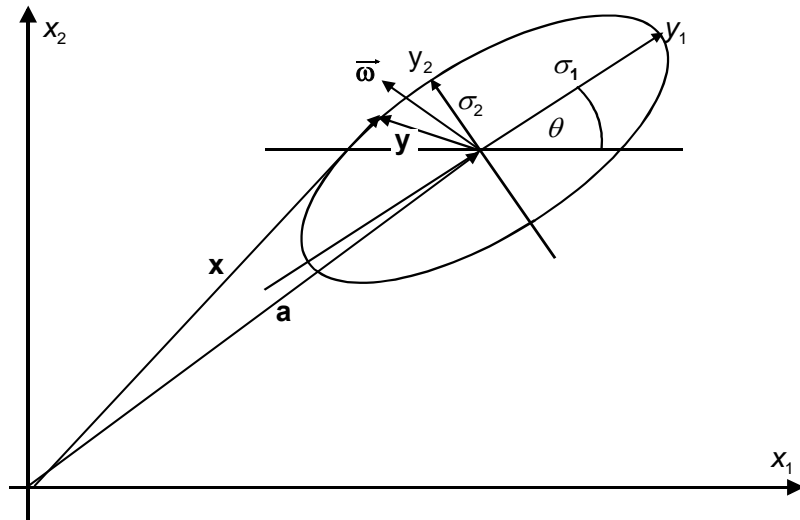
ami – (3.44) analógiájára – az  $\vec{\omega}^T \vec{\eta}$  valószínűségi változó szórásnégyzete. Legyen  $\vec{\Omega} = \mathbf{U} \vec{\omega}$ , illetve  $\vec{\omega} = \mathbf{U}^T \vec{\Omega}$ . A fentiek analógiájára  $\vec{\Omega}$  és  $\vec{\omega}$  ugyanazt a vektort jelölik, de komponenseik egymáshoz képest elforgatott koordinátarendszerekben vannak kifejezve. A korrelációs ellipszoid  $\mathbf{x}$  pontjához rendeljük az  $\vec{\Omega}$  egységvektort. A (3.45) egyenlet alapján

$$r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \vec{\omega}^T \mathbf{B}_{\vec{\eta}} \vec{\omega} = \vec{\Omega}^T \mathbf{U} \mathbf{B}_{\vec{\eta}} \mathbf{U}^T \vec{\Omega} = \vec{\Omega}^T \mathbf{B}_{\vec{\xi}} \vec{\Omega}.$$

Ezzel igazoltuk fenti állításunkat: az ellipszoid  $\mathbf{x}$  pontjához vezető sugár  $r$  hossza megegyezik az  $\vec{\Omega}^T \vec{\xi}$  valószínűségi változó szórásával.

$\vec{\omega}$  (és így  $\vec{\Omega}$ ) iránya – mint a 3.4. ábrán látszik –  $\mathbf{y}$ -hoz képest el van forgatva, ha a  $\sigma_i$  sajátértékek nem mind azonosak. Kivételek a sajátvektorokkal párhuzamos  $\mathbf{y}$  vektorok, mert esetükben  $\vec{\omega} \parallel \mathbf{y}$ . Most bizonyított állításunk alapján megérthetjük, mit jelentenek a  $\mathbf{B}_{\vec{\xi}}$  kovarianciamátrix sajátértékei:  $\sigma_i^2$  az  $\mathbf{u}_i^T \vec{\xi}$  valószínűségi változó szórásnégyzete.

Tekintsünk két azonos dimenziójú véletlen vektort, mondjuk  $\vec{\alpha}$ -t és  $\vec{\beta}$ -t, amelyek várható értéke azonos, és megszerkesztjük korrelációs ellipszoidjukat. Ha azt találjuk, hogy  $\vec{\alpha}$ -é teljes egészében benne van  $\vec{\beta}$ -ében, akkor ez azt jelenti, hogy tetszőleges  $\vec{\Omega}$  egységvektorra vonatkozóan  $\vec{\Omega}^T \vec{\alpha}$  szórása kisebb, mint  $\vec{\Omega}^T \vec{\beta}$ -é. Köznyelven szólva ezt úgy is kifejezhetjük, hogy  $\vec{\alpha}$  mérése minden tekintetben pontosabb, mint  $\vec{\beta}$ -é. Amikor a korrelációs ellipszoidok átmetszik egymást, különböző  $\vec{\Omega}$ -kra  $\vec{\Omega}^T \vec{\alpha}$  és  $\vec{\Omega}^T \vec{\beta}$  szórása közötti relációk egymástól eltérőek lehetnek. A korrelációs ellipszoid további alkalmazását láthatjuk a 4.4. alfejezetben.



3.4. ábra. Korrelációs ellipszis

**Feladat**

Bizonyítsuk be, hogy  $\xi = -6 + \sum_{i=1}^{12} \eta_i$   $N(0, 1)$  változó, ha mindegyik  $\eta_i$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumban.

## 4. SEGÉDESZKÖZÖK MATEMATIKAI STATISZTIKÁBÓL

### 4.1. Alapfogalmak

A matematikai statisztika alapfogalma a *statisztikai minta*, ami nem más, mint mért (vagy megfigyelt) értékek együttese:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Mint a 3. fejezetben tettük, a mérést vagy megfigyelést most is *kísérletnek* fogjuk nevezni. Mivel a kísérletben kapott mennyiségek értéke a kísérlet kimenetelétől függ, a statisztikai minta valószínűségi változók együttese. Jelöljük eloszlásfüggvényüket rendre  $F_1(x)$ -,  $F_2(x)$ -, ...  $F_n(x)$ -szel. A matematikai statisztikában bevett szóhasználat szerint a kísérlet elvégzésével *mintát vettünk ezekből az eloszlásokból*. Ennyiben nevezhetjük a kísérletet *mintavételnek* is.

Ahhoz, hogy a kapott mintából gyakorlati következtetéseket vonhassunk le, ismerünk kell a minta (együttes) eloszlásfüggvényét:  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Fontos speciális esetek a következők. A leggyakoribb, hogy az egyes mintaelemek mérése egymástól független:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i). \quad (4.1a)$$

Ekkor *független mintavételről* beszélünk. Ebben a jegyzetben többnyire ilyen kísérletek kiértékelésével foglalkozunk. A dolog tovább egyszerűsödik, amikor az egyes mintaelemek eloszlásfüggvénye azonos:  $F_i(x) \equiv F(x)$ . Ilyenkor azt mondjuk, hogy a mintavétel ebből a közös eloszlásból történt. A minta eloszlásfüggvénye ezzel tovább egyszerűsödik:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i). \quad (4.1b)$$

A gyakorlatban ritkán tudjuk az eloszlásfüggvényt pontosan megadni. Legtöbbször csak az eloszlásfüggvény *matematikai alakját* tudjuk felírni, és ebben általában szerepelnek ismeretlen paraméterek is ( $a_1, a_2, \dots, a_m$ ). A kísérlet célja éppen ez utóbbiak meghatározása. Ebben a fejezetben ennek matematikai részleteiről lesz szó. Végeredményben a statisztikai minta függvényében kapjuk meg a keresett paraméterek értékét. Ennek hangsúlyozására szoktuk az eloszlásfüggvényt  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m)$  alakban felírni. A rövideg kedvéért általában a vektori írásmódot használjuk:  $F(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ . A levezetésekben többnyire ennek az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változók szerinti deriváltja, a sűrűségfüggvény jelenik meg. A sűrűségfüggvényt a 3. fejezetben – a szokásos módon –  $f$ -fel jelöltük. A mérések kiértékelésében mást jelölünk  $f$ -fel, így helyette az

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) = L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (4.2)$$

jelölést használjuk. Ezt a függvényt *likelihood-függvénynek* nevezzük. Gyakran lehet a *likelihood-függvény* elnevezéssel is találkozni.<sup>27</sup>

A matematikai statisztika másik alapfogalma: a statisztikai minta bármilyen függvényét *statisztikának* nevezzük. Példák:

- mintaátlag:  $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,
- a mintaelemek maximuma:  $\xi_{\max}$ ,
- a mintaelemek minimuma:  $\xi_{\min}$ ,
- a minta terjedelme:  $\xi_{\max} - \xi_{\min}$ ,
- empirikus szórásnégyzet:  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}$ ,

és a sort lehetne folytatni.

A mérések kiértékelése szempontjából a legfontosabbak azok a statisztikák, amelyek az ismeretlen  $a_1, a_2, \dots, a_m$  paraméterek értékét megadják. Az ilyen statisztikákat a *paraméterek becslt értékének* nevezzük, amit a következő alakban írunk fel ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\tilde{a}_k = t_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = t_k(\bar{\xi}). \quad (4.3)$$

Ezek a mennyiségek valószínűségi változók függvényei, így maguk is valószínűségi változók.

## 4.2. Paraméterbecslés

### A becslt paraméterek kívánatos tulajdonságai

Egy becslési eljárástól az alábbi tulajdonságokat várjuk el. Mindenekelőtt megköveteljük, hogy *torzítatlan* legyen, vagyis fennálljanak az

$$M(\tilde{a}_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.4)$$

egyenlőségek. Ez nincs mindig így. Ezért hasznosak a

$$\delta(a_k) = M(\tilde{a}_k) - a_k \quad (4.4a)$$

mennyiségek, amelyeket *torzításnak* nevezzük.

Természetes követelmény, hogy a becslt paraméter szórása a lehető legkisebb, lehetőleg zérushoz közeli szám legyen. Ilyenkor ugyanis a Csebisev-egyenlőtlenségből következik, hogy a paraméter becslt értéke nagy valószínűséggel megegyezik a paraméter valódi értékével [vö. (3.15)]. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a szórás nem csökkenthető minden határon túl. Azt azonban mindenképpen elvárjuk, hogy a paraméterek becslésére használt eljárásunk az alsó határt elérje. Az ilyen becsléseket *hatékony (efficiens)* becsléseknek nevezzük.

<sup>27</sup> A likelihood angol szó jelentése: valószínűség. Az angol név kezdőbetűjéből ered az  $L(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  jelölés. A jelölésen kívül nem lenne más okunk az angol elnevezés megtartására.

További fontos jellemző a *konzisztencia*. Egy becslési eljárást *konzisztensnek* mondunk, ha a mérések  $n$  számának növekedésével a paraméterek becsült értékei a valódi értékekhez tartanak (sztochasztikus értelemben):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{a}_k - a_k| > \varepsilon\} = 0 \quad (4.5)$$

minden  $k$ -ra és tetszőleges pozitív  $\varepsilon$ -ra.

Az első két tulajdonság tetszőleges  $n$ -re vonatkozik, az utóbbi viszont csak az aszimptotikus viselkedést szabja meg abban az esetben, amikor a mérések száma minden határon túl nő. Nagyon gyakori eset, hogy a paraméterek becsült értékeinek a szórása növekvő  $n$ -nel 0-hoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\tilde{a}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.6)$$

Ekkor a (3.15a) Csebisev-egyenlőtlenségből következik a becslés konzisztenciája, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{a}_k - a_k| > \varepsilon\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^2(\tilde{a}_k)}{\varepsilon^2} = 0$$

minden  $k$ -ra. Ilyen esetekben elég azt vizsgálni, hogyan viselkednek a szórárok nagy  $n$ -re. A leggyakrabban  $1/\sqrt{n}$  rendben tartanak 0-hoz, de ennél gyorsabb csökkenésre is látunk majd példát.

A paraméterbecslés alapvető összefüggése a Cramér-Rao egyenlőtlenség<sup>28</sup>, amelynek a megfogalmazásához szükség van a (4.2) képlettel definiált *likelihood-függvényre*. Lássunk erre az eddig említettek köréből példákat! Legyen

$$M(\xi_i) = f_i(a_1, a_2, \dots, a_m) = f_i(\mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7a)$$

továbbá

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{[x_i - f_i(\mathbf{a})]^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.7b)$$

Ha a  $\bar{\xi}$  minta független, *Gauss-eloszlású* valószínűségi változókból áll, a likelihood-függvény (3.37c) alapján

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{\exp(-Q/2)}{\prod_{i=1}^n \sqrt{2\pi\sigma_i^2}}. \quad (4.8)$$

A nukleáris mérés technikában gyakran találkozunk a *Poisson-eloszlással*, amely diszkrét eloszlás. Ekkor (3.35) szerint a likelihood-függvény

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n e^{-f_i(\mathbf{a})} \frac{[f_i(\mathbf{a})]^{x_i}}{x_i!}. \quad (4.9)$$

<sup>28</sup> H. Cramér svéd, C. R. Rao indiai matematikus. Francia szerzők *Fréchet*-nek tulajdonítják az eredményt.



Mutatunk példát a (4.7)-ben definiált függvényre is. Amikor egy radioaktív anyag  $T_{1/2}$  felezési idejét keressük, különböző  $T_1, T_2, \dots, T_n$  időpontokban mérünk beütésszámokat, amelyek várható értékét az

$$f_i(\mathbf{a}) = f_i(a_1, a_2) = a_1 e^{-a_2 T_i} \quad (4.10)$$

függvénnyel írhatjuk le, ahol a keresett felezési időt a

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{a_2}$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Ha (4.10)-et (4.9)-be helyettesítjük, kapjuk a  $(T_1, \xi_1; T_2, \xi_2; \dots; T_n, \xi_n)$  statisztikai minta likelihood-függvényét (azzal a feltételezéssel, hogy a  $T_1, T_2, \dots, T_n$  időpontok nem valószínűségi változók).

Minden, amit a keresett paraméterekről tudunk, az a  $\bar{\xi}$  minta és a likelihood-függvény alakja. Ebből kell a keresett paramétereket a lehető legpontosabban meghatározni. Azt a célt tűzzük ki magunk elé, hogy megkeressük a számunkra legkedvezőbb (4.3) becslési eljárást, amin azt értjük, hogy *a becslt paraméterek szórása legyen a lehető legkisebb*.

Mind (4.8), mind (4.9) esetében feltettük, hogy a statisztikai minta elemei egymástól függetlenek. Ezeknél bonyolultabb alakú likelihood-függvényekre jutunk, ha ezt a feltevést elejtjük. A levezetendő Cramér-Rao egyenlőtlenség azonban ezekben az esetekben is igaz marad. A dolog lényegének a megértését megkönnyíti, ha először azt az esetet tekintjük, amikor csak egyetlen paramétert kell becsülnünk. A több paraméter esetére csak ezt követően térünk át.

### Egyetlen paraméter becslése. A Cramér-Rao egyenlőtlenség

Tegyük fel, hogy a  $\bar{\xi}$  vektor komponensei diszkrét valószínűségi változók. (Folytonos eloszlás esetében a szumma helyett integrál áll. Egyébként az alábbi levezetések azonosak.) Legyen adva egy  $t(\bar{\xi})$  torzítatlan becslési eljárás, tehát

$$M\left[t(\bar{\xi})\right] = \sum_{k=1}^{\infty} t(\mathbf{x}_k) L(\mathbf{x}_k, a) = a. \quad (4.11)$$

A folytonos változók esetére való általánosíthatóság  $p_k$  helyett kedvéért itt a

$$p_k = L(\mathbf{x}_k, a)$$

jelölést használjuk, ami annak a valószínűségét adja meg, hogy  $\xi = x_k$ . Erre az eloszlásra (3.11a) szerint fennáll:

$$\sum_{k=1}^{\infty} L(\mathbf{x}_k, a) = 1. \quad (4.12)$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy mindkét összegzésből kihagytuk azokat a tagokat, amelyekre  $L(\mathbf{x}_k, a) = 0$ . A (4.11) által kifejezett torzítatlanság fontos megszorítás, következményeire még visszatérünk. Feltesszük továbbá, hogy az összegzés (folytonos változó esetében az integrálás) és az  $a$  szerint való differenciálás felcserélhető, továbbá hogy  $a$ -tól független azoknak az  $\mathbf{x}_k$ -értékeknek a halmaza, ame-

lyekre  $L(\mathbf{x}_k, a) \neq 0$ . Ha e feltételek teljesülnek, azt mondjuk, hogy a becslési probléma *reguláris*. Ekkor egyszerűen deriválhatjuk (4.12)-t és (4.11)-et  $a$  szerint:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial L(\mathbf{x}_k, a)}{\partial a} = 0 \quad (4.13a)$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t(\mathbf{x}_k) \frac{\partial L(\mathbf{x}_k, a)}{\partial a} = 1. \quad (4.13b)$$

Az előbbi egyenletet beszorozzuk  $a$ -val, majd az eredményt kivonjuk az utóbbi egyenletből:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} [t(\mathbf{x}_k) - a] \frac{\partial L(\mathbf{x}_k, a)}{\partial a} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [t(\mathbf{x}_k) - a] \left[ \frac{1}{L(\mathbf{x}_k, a)} \frac{\partial L(\mathbf{x}_k, a)}{\partial a} \right] L(\mathbf{x}_k, a) = \\ &= \mathbb{M} \left[ \left( t(\bar{\xi}) - a \right) \left( \frac{1}{L(\bar{\xi}, a)} \frac{\partial L(\bar{\xi}, a)}{\partial a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Az itt szereplő  $(t(\bar{\xi}) - a)$  tényező várható értéke a torzítatlanság miatt zérus [vö. (4.11)]. A másik tényező várható értéke szintén 0 [vö. (4.13a)].<sup>29</sup> (4.14) szerint tehát a két valószínűségi változó kovarianciája 1-gyel egyenlő. Alkalmazzuk a Schwarz-féle egyenlőtlenséget [vö. (3.22)]:

$$D^2[t(\bar{\xi}) - a] \cdot D^2 \left( \frac{1}{L(\bar{\xi}, a)} \frac{\partial L(\bar{\xi}, a)}{\partial a} \right) \geq 1. \quad (4.15)$$

A további képletekben  $t(\dots)$  és  $L(\dots, \dots)$  argumentuma ugyanaz, mint itt, így az egyszerűbb írásmód kedvéért a továbbiakban elhagyjuk, de mindig beleértjük a képletekbe. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a} \right) = - \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial a^2},$$

továbbá, hogy a jobb oldal második tagjának a várható értéke zérus [vö. (4.13a)]. Ezzel

$$D^2 \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a} \right) = \mathbb{M} \left[ \left( \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 \right] = \mathbb{M} \left( - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right).$$

(4.15) szerint azt kaptuk tehát, hogy a becslés szórása alulról korlátos:

<sup>29</sup> A  $t(\bar{\xi})$  és  $L(\bar{\xi}, a)$  mennyiségek azért valószínűségi változók, mert a  $\bar{\xi}$  valószínűségi változótól függenek. Ebben az értelemben beszélhetünk várható értékükről, szórásukról, kovarianciájukról stb.

$$D^2(t-a) = D^2(t) \geq \frac{1}{M\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right)}. \quad (4.16)$$

Ez a *Cramér-Rao egyenlőtlenség* szokásos felírása. Nagy jelentősége van az ismeretlen paraméterek becslése szempontjából. Kimondjuk tétel formájában is:

4.1. TÉTEL. A becült érték szórása – a torzítatlan becslések körében – alulról korlátos. Az alsó korlátot (4.16) adja meg.

Erre való tekintettel (4.16) jobb oldalának a nevezőjében álló mennyiséget *Fisher-féle információ*<sup>30</sup> nevezzük.

Abban az esetben, amikor a becslés torzított, egyenlőtlenségünk módosul. A fenti levezetést megismételve<sup>31</sup> (4.16) helyett a

$$D^2(t) \geq \frac{[1 + \delta'(a)]^2}{M\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}\right)} \quad (4.17)$$

korlátot kapjuk, ahol  $\delta(a)$  a becslés torzítása [vö. (4.4a)]. A torzítástól függően tehát az alsó korlát módosul. A  $\delta'(a) = -1$  szélső esetben az alsó korlát akár el is tűnhet. Erre triviális példa a következő. Tegyük fel, hogy a keresett paraméter a felezési idő, és a következő „becslést” alkalmazzuk:  $\tilde{a} = 30$  s. Tekintve, hogy ez konstans, szórása zérus. Nézzük meg, mit kapunk (4.17) szerint. A becslés torzítása ekkor

$$\delta(a) = 30 \text{ s} - a,$$

amiből

$$\delta'(a) = -1,$$

vagyis az alsó korlát (4.17) szerint szintén eltűnik. Fenti eredményünk tehát érvényben marad. Ezt a szélsőséges példát a torzítatlansági feltétel fontosságának az illusztrálására mutattuk be: a *tetszőlegesen torzított* becslések körében akármilyen kis szórások elképzelhetők, de ezek mint becslési eljárások általában érdektelenek. A gyakorlatban csak a torzítatlan vagy csak elfogadhatóan kis mértékben torzított becslések jönnek szóba. Ezekre pedig a (4.17) egyenlőtlenség nem-zérus alsó korlátot jelent.

### A maximális valószínűség (maximum likelihood) módszere

E kis kitérő után térjünk vissza a torzítatlan becslésekhez. Mikor van (4.16)-ban egyenlőség? Amikor ez fennáll, becslési eljárásunkkal elértük a lehető legkisebb szórást, vagyis becslésünk *hatékony (efficiens)*. A (3.22) Schwarz-féle egyenlőtlenség akkor egyenlőség, amikor a benne szereplő valószínűségi változók egymásnak lineáris függvényei, vagyis esetünkben fennáll a

$$\frac{\partial \ln L(\xi, a)}{\partial a} = K(a)(t(\xi) - a) \quad (4.18)$$

<sup>30</sup> Nem tévesztendő össze a *Shannon-féle információ*val.

<sup>31</sup> Ajánljuk az Olvasónak, hogy – gyakorlásképpen – végezze el a módosított levezetést.

egyenlőség, amelyben  $K$  nem függ  $\bar{\xi}$ -től (de  $a$ -tól még függhet). Mivel a két változó kovarianciája (4.14) szerint pozitív (értéke 1),  $K > 0$ . Levezetéseinkben gondosan ügyeltünk a képletekben szereplő függvények argumentumaira. (4.18) a jobb és a bal oldalon szereplő *valószínűségi változók* között állapít meg összefüggést. Ha bennük a  $\bar{\xi}$  valószínűségi változó helyébe az  $\mathbf{x}$  változót írjuk, az egyenlet két oldalán szereplő függvények *alakjára* kapunk összefüggést:

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, a)}{\partial a} = K(a)(t(\mathbf{x}) - a), \quad (4.18)$$

vagyis

$$\ln L(\mathbf{x}, a) = \varphi_1(a)t(\mathbf{x}) + \varphi_2(a) + \varphi_3(\mathbf{x}) \quad (4.19a)$$

alkalmasan választott  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  és  $\varphi_3$  függvényekkel. Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy a becslés szórása akkor és csak akkor veheti fel a minimumát, ha a likelihood-függvény ilyen alakú. Fenti gondolatmenetünkéből következik, hogy az a becslés pedig, amelyik ezt biztosítja, a likelihood-függvényben fellépő  $t(\bar{\xi})$  függvény:

$$\tilde{a} = t(\bar{\xi}). \quad (4.20)$$

Ha a likelihood-függvény alakja a (4.19a) képlet szerinti, a benne ilyen módon szereplő  $t(\bar{\xi})$ -t *elégséges statisztikának* nevezzük. Az elnevezés értelme az, hogy ez az a statisztika, amely a  $\bar{\xi}$  mintából az  $a$  paraméterre vonatkozóan minden mérési információt magába sűrít.<sup>32</sup> (4.19a) szerint ugyanis a likelihood-függvényt ilyen alakban írhatjuk fel:

$$L(\mathbf{x}, a) = \exp\{\varphi_3(\mathbf{x})\} \cdot \exp\{\varphi_1(a)t(\mathbf{x}) + \varphi_2(a)\}. \quad (4.19b)$$

Következésképpen  $L$  két tényező szorzatára bontható úgy, hogy csak az egyik függ a keresett paramétertől, továbbá ebben a tényezőben az  $\mathbf{x}$  változó csak a  $t(\mathbf{x})$  szerinti kombinációban fordul elő. Ezt jelentette az a fenti kijelentés, hogy  $t(\mathbf{x})$  “az  $a$  paraméterre vonatkozóan minden mérési információt magába sűrít”.

Ha tehát a hatékony becslést (4.20) szolgáltatja, akkor (4.18) szerint ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a becslési eljárás során meg kell keresni a

$$\frac{\partial \ln L(\bar{\xi}, a)}{\partial a} = 0 \quad (4.21)$$

egyenletnek  $a$ -ra vonatkozó megoldását. Mivel az egyenlet bal oldalán szereplő derivált – (4.18) szerint – a megoldástól balra ( $a < t$ ) pozitív, tőle jobbra ( $a > t$ ) negatív, (4.21) megoldása a  $\ln L$  függvény maximumának a keresését jelenti. Erre vezethető vissza a

4.1. DEFINÍCIÓ. A (4.21) egyenletnek a keresett  $a$  paraméterre való megoldását a *maximum likelihood elvnek* (vagy módszernek) nevezzük.

Az elmondottak lényegét pedig tétel formájában is kimondjuk:

<sup>32</sup> Az *elégséges statisztika* a matematikai statisztika egyik legnehezebben érthető fogalma. Ha az Olvasónak első olvasáskor nehézségei vannak a megértéssel, a 4.1. DEFINÍCIÓ után ugorjon a (4.24) képletekhez. A későbbiekben és az eddigi újraolvasásakor azonban el kell jutnia a fogalom megértéséig.

4.2. TÉTEL. A maximum likelihood módszer hatékony becslést ad, amikor létezik elégséges statisztika.

Ha a likelihood-függvény alakja nem felel meg a (4.19b) képletnek (és így nem létezik elégséges statisztika), a maximális valószínűség módszere továbbra is alkalmazható ugyan, de a segítségével kapott becslés nem lesz hatékony, hiszen ebben az esetben nem is létezik hatékony becslés.

A további jelölésekben nem különböztetjük meg a diszkrét és folytonos valószínűségi változók eseteit. Az elégséges statisztikára vonatkozó példaként tekintünk az azonos várható értékű, Gauss-eloszlású változók esetét:

$$M(\xi_i) = a \quad \text{és} \quad D^2(\xi_i) = \sigma_i^2,$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Együttes sűrűségfüggvényük

$$L(\mathbf{x}, a) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}\right\},$$

aminek a logaritmusa a (4.19a) szerinti alakra hozható:

$$\ln L(\mathbf{x}, a) = -\sum_{i=1}^n \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma_i^2} + a \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} - \frac{a^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2},$$

vagyis

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} - a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} - a \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Ez éppen (4.19a) szerinti alakú, és látszik, hogy

$$t(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (4.22)$$

Nyilvánvaló, hogy  $M\left[t\left(\bar{\xi}\right)\right] = a$ , tehát ez torzítatlan becslés. A

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}$$

tényező itt  $a$ -tól függetlennek adódott, de ez nincs mindig így.

Már jóval a maximum likelihood módszer felfedezése előtt ismert volt Gauss-tétele, amely szerint a szórásnégyzetek reciprokával súlyozott (4.22) átlag a közös várható értéknek minimális szórású becslése a *lineáris* becslések között (5.2. alfejezet). Most az is kiderült, hogy ennek szórása *az összes becslések körében is minimális*.

A maximum likelihood módszert Fisher javasolta. A 4.3. alfejezet végén megadjuk az általa követett gondolatmenetet.

### Példa nem-reguláris becslési problémára

Reguláris becslési problémák esetében a szórásnak Cramér-Rao szerinti alsó korlátja általában  $\sqrt{n}$ -nel arányosan csökken. ( $n$  a mérési adatok száma.) A (4.1b) szerinti esetben ugyanis a Cramér-Rao egyenlőtlenség így írható [vö. (4.16)]:

$$D^2(t) \geq \frac{1}{n M \left( -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} \right)}. \quad (4.23)$$

A gyakorlatban nagyon ritka, hogy a likelihood-függvény ilyen alakú legyen. Ennek ellenére az  $1/\sqrt{n}$ -nel arányos csökkenés nagyon jó közelítéssel fenn szokott állni.

Nem-reguláris becslési problémákra általában nem alkalmazható a Cramér-Rao egyenlőtlenség. Nevezetes példa az *egyenletes eloszlás* [vö. (3.32)], amelynek az esetében a becslés azért *nem reguláris*, mert a fenti deriválást nem lehet az integrálással felcserélni. Legyen  $\Theta$  az eloszlás terjedelme, vagyis

$$0 \leq \xi_i \leq \Theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ekkor – például – (4.12)-nek a

$$\int_0^\Theta \int_0^\Theta \dots \int_0^\Theta f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

egyenlet felel meg, ahol  $f(x)$ -et (3.32)-ben írtuk fel. Egyenletünkben az ismeretlen paraméter ( $\Theta$ ) az integrálás felső határában található. Egyébként az  $f(x)$  függvény deriválásával is súlyos matematikai problémák lépnek fel.<sup>33</sup> De még ha ezek nem lépnének fel, a  $\Theta$  szerinti deriválás akkor sem cserélhető fel az integrálással.  $\Theta$  becslésére viszont felhasználható – például – a mintaátlag, amelynek a várható értéke  $\theta/2$ . Egyetlen változó szórása  $\theta^2/12$ , tehát a  $\tilde{\Theta} = 2\bar{\xi}$  becslés szórásnégyzete

$$D^2(2\bar{\xi}) = \frac{\Theta^2}{3n},$$

vagyis ennek a becslésnek a szórása  $1/\sqrt{n}$  rendben csökken, ami megegyezik a (4.23)-ból levont következtetéssel. Megmutatjuk azonban, hogy a maximális minta-emből kiindulva ennél jobb becslést is lehet kapni.  $\xi_{\max}$  sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{nx^{n-1}}{\Theta^n},$$

várható értéke pedig  $M(\xi_{\max}) = \frac{n\Theta}{n+1}$ . Így a  $\tilde{\Theta} = \frac{n+1}{n} \xi_{\max}$  torzítatlan becslés szórásnégyzete

<sup>33</sup> Ezek a problémák csak a disztribúcióelmélet keretében kezelhetők.

$$D^2(\tilde{\Theta}) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D^2(\xi_{\max}) = \frac{\Theta^2}{n(n+2)},$$

vagyis ennek a becslésnek a szórása nagy  $n$ -re  $1/n$  rendben csökken.

Ezzel az ellenpéldával kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy az átlag révén kapott becslés szinte reflexszerűen jut az eszünkbe, hiszen megszoktuk, hogy azonos eloszlású változók esetében az átlag jelenti a legjobb becslést. Ez így is van, amikor a becslési probléma reguláris. Az egyenletes eloszlás példája mutatja, hogy a reflexek nem mindig működnek jól, amivel mindig számolnunk kell, amikor a likelihood-függvény nem reguláris.

### \*Több ismeretlen paraméter esete

Abban az esetben, amikor egyszerre több paramétert kell becsülnünk, az eddigi megfontolások lényege érvényben marad: továbbra is igaz, hogy minden paraméter becsült értékének a szórásnégyzete alulról korlátos. Ennek pontosabb megfogalmazásához bevezetjük a következő jelöléseket.  $\mathbf{I}$ -vel jelöljük az ún. *információs mátrixot*, amelynek  $(k, l)$  eleme

$$I_{kl} = \mathbf{M}\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_k \partial a_l}\right), \quad (4.24a)$$

ahol – mint korábban –  $L(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  a likelihood-függvény. Ezt a következő alakban is felírhatjuk:

$$I_{kl} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a_k} \cdot \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a_l}\right). \quad (4.24b)$$

Számítsuk ki ugyanis a (4.24a)-ban szereplő kétszeres deriváltat:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_k \partial a_l} = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial L}{\partial a_k} \frac{\partial L}{\partial a_l} + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial a_k \partial a_l}.$$

Könnyen belátható, hogy a második tag várható értéke 0:

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial a_k \partial a_l}\right) = \int \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_l} d\mathbf{x} = \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_l} \int L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) d\mathbf{x} = 0,$$

hiszen a kétszer derivált integrál értéke azonosan 1.<sup>34</sup> Ebből viszont következik a (4.24) egyenletek jobb oldalán álló várható értékek azonossága.

Feltesszük, hogy az információs mátrix nem szinguláris.<sup>35</sup> Az  $a_k$  paraméter becslésére szolgáljon a  $t_k(\bar{\xi})$  függvény ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).  $\mathbf{B}_t$  a  $\mathbf{t}(\bar{\xi})$  vektor kovarianciamátrixa. Ezekkel a jelölésekkel a Cramér-Rao-egyenlőtlenség többváltozós alakja a

4.3. TÉTEL. Tetszőleges  $\mathbf{z}$  vektorra igaz, hogy

<sup>34</sup> A változatosság kedvéért a további levezetéseket nem a diszkrét, hanem a folytonos valószínűségi változókra vonatkoztatjuk.

<sup>35</sup> Ha szinguláris lenne, akkor ez azt jelentené, hogy a becsült paraméterek nem lineárisan függetlenek. Ezt az esetet kizárhatjuk, mert ez annak lenne a jele, hogy a paraméterbecslési problémát rosszul foglalmaztuk meg.

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B}_t \mathbf{z} \geq \mathbf{z}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{z} > 0. \quad (4.25a)$$

A bizonyítandó egyenlőtlenséget átírjuk a

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{B}_t - \mathbf{I}^{-1}) \mathbf{z} \geq 0 \quad (4.25b)$$

alakba, ami szerint a zárójelben lévő mátrixról meg kell mutatnunk, hogy pozitív szemidefinit. Képezzük a  $(t_k(\bar{\xi}) - a_k)$  és a  $\partial \ln L(\bar{\xi}, \mathbf{a}) / \partial a_l$  zérus várható értékű valószínűségi változók kovarianciáját ( $k, l = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left[ (t_k(\bar{\xi}) - a_k) \left( \frac{1}{L(\bar{\xi}, \mathbf{a})} \frac{\partial L(\bar{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_l} \right) \right] = \int [t_k(\mathbf{x}) - a_k] \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial a_l} d\mathbf{x} = \\ & = \frac{\partial}{\partial a_l} \int t_k(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) d\mathbf{x} - a_k \int \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial a_l} d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial a_l} \mathbb{M}(t_k(\bar{\xi})) = \frac{\partial a_k}{\partial a_l} = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Így tehát a  $2m$  elemű

$$\left( t_1(\bar{\xi}), t_2(\bar{\xi}), \dots, t_m(\bar{\xi}), \frac{1}{L} \frac{\partial L(\bar{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_1}, \frac{1}{L} \frac{\partial L(\bar{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_2}, \dots, \frac{1}{L} \frac{\partial L(\bar{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_m} \right)$$

vektor kovarianciamátrixa a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

alakban írható, ahol mindegyik blokk  $m \times m$ -es mátrix.<sup>36</sup> (Az egyszerűbb írásmód kedvéért  $\mathbf{B}_t$  mellől elhagytuk a “t” indexet.) A (4.26) mátrixról tudjuk, hogy pozitív szemidefinit, hiszen minden kovarianciamátrix ilyen, vagyis tetszőleges  $\mathbf{z}$  és  $\mathbf{z}_1$  vektorokkal fennáll a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}^T & \mathbf{z}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.27)$$

egyenlőtlenség. Ha a beszorzást elvégezzük, a

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} + \mathbf{z}_1^T \mathbf{I} \mathbf{z}_1 + 2\mathbf{z}^T \mathbf{z}_1 \geq 0 \quad (4.28)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A  $\mathbf{z}_1$  vektort a

$$\mathbf{z}_1 = -\mathbf{I}^{-1} \mathbf{z}$$

egyenlet szerint választjuk meg. Mivel  $\mathbf{I}$  nem szinguláris, tetszőleges  $\mathbf{z}$  mellett létezik ilyen  $\mathbf{z}_1$  vektor. Ekkor a (4.28) egyenlőtlenség átmegy a

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{B} - \mathbf{I}^{-1}) \mathbf{z} \geq 0$$

<sup>36</sup> A hipermátrixokkal a 2.4. alfejezetben foglalkozunk.

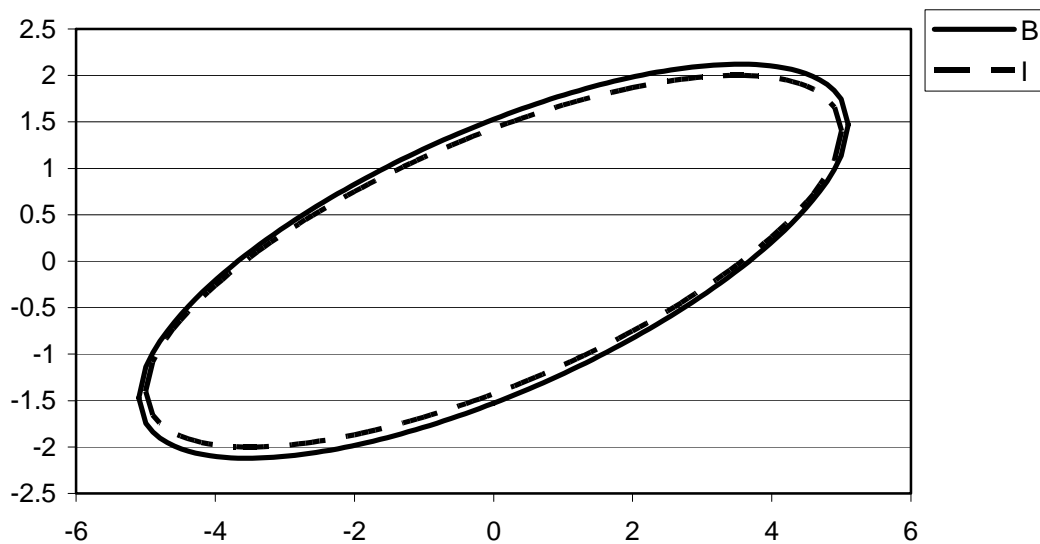


alakba. A (4.25a)-ban levő második egyenlőtlenség abból következik, hogy  $\mathbf{I}$  kovarianciamátrix, amely feltevésünk szerint nem szinguláris, így pozitív definit. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 3.4. alfejezetben írtak alapján beláthatjuk, hogy a (4.25a) egyenlőtlenség bal oldalán éppen a  $\mathbf{z}^T \mathbf{t}(\bar{\xi})$  skalárszorzat szórásnégyzete szerepel. A most bizonyított tétel azt jelenti, hogy az  $\mathbf{I}$  információs mátrixból kiindulva a becsült paraméterek bármilyen lineáris kombinációjának a szórása számára lehet alsó korlátot levezetni. Ennek speciális esete a következő. Legyen  $\mathbf{z}$  az  $\mathbf{e}_k$  egységvektor, amelynek minden eleme zérus, kivéve a  $k$ -adikat, amely 1. Ekkor a (4.25a) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$[\mathbf{B}_t]_{kk} = D^2 \left[ t_k(\bar{\xi}) \right] \geq [\mathbf{I}^{-1}]_{kk}, \quad (4.29)$$

vagyis a  $k$ -edik becsült paraméter szórásnégyzete nem lehet kisebb, mint az információs mátrix inverzének a főátlójában álló  $k$ -edik elem ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Tehát amit egyetlen becsült paraméter esetében találtunk, érvényes több becsült paraméter esetében is, legfeljebb az alsó korlát meghatározása nem egy szám reciprokának, hanem egy mátrix inverzének a kiszámítását igényli.



4.1. ábra. A  $\mathbf{B}_t$  és  $\mathbf{I}^{-1}$  mátrixokhoz tartozó korrelációs ellipszisek összehasonlítása. (Az origót az  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  pontba toltuk el.)

A 4.3. TÉTELT geometriailag is szemléltethetjük a 3.4. alfejezetben bevezetett korrelációs ellipszoid segítségével. Az  $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{t}(\bar{\xi})$  véletlen vektor korrelációs ellipszoidjának az  $m$ -dimenziós térben vett  $\mathbf{x}$  pontjai (3.43) szerint kielégítik az

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{B}_t^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 1$$

egyenletet. Ha  $\mathbf{I}^{-1}$ -et szintén egy véletlen vektor kovarianciamátrixnak tekintjük, akkor ennek a korrelációs ellipszoidját az

$$(\mathbf{x}' - \mathbf{a})^T \mathbf{I} (\mathbf{x}' - \mathbf{a}) = 1$$

egyenlet határozza meg. Kétdimenziós vektorok esetében az ellipszoidok ellipszisek. A 4.1. ábrán ezeket mutatjuk be a következő mátrixok esetében:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 4,5 & 7,5 \\ 7,5 & 26 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy az  $\mathbf{I}^{-1}$ -hez tartozó ellipszis teljes egészében  $\mathbf{t}(\bar{\xi})$  korrelációs ellipszisének a belsejében fekszik. Ez általában is így van, vagyis érvényes a

4.4. TÉTEL. Az  $\mathbf{I}^{-1}$ -hez tartozó korrelációs ellipszoid teljes egészében  $\mathbf{t}(\bar{\xi})$  korrelációs ellipszoidjának a belsejében fekszik.

Legyen  $\bar{\Omega}$  egy tetszőleges egységvektor, amelyet felvesszünk az  $\mathbf{a}$  vektorból (a 4.1. ábrán az origóból) kiindulva. A vektor meghosszabbítása a két ellipszoidot a kiindulási ponttól számított  $r_B$  és  $r_I$  távolságban metszi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r_B \bar{\Omega} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a} + r_I \bar{\Omega}.$$

A tétel bizonyításához be kell látnunk, hogy  $r_B \geq r_I$ . A két mátrix különbségét  $\mathbf{D}$ -vel jelöljük, amely (4.25b) szerint pozitív szemidefinit. Lehet találni olyan pozitív  $\lambda$  számot, hogy a következő sor konvergens legyen:

$$\mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) = (\mathbf{I}^{-1} + \lambda \mathbf{D})^{-1} = (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{I} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{I} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda \mathbf{I} \mathbf{D})^k \mathbf{I}.$$

Ha az  $\mathbf{I} \mathbf{D}$  mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértéke  $\mu$ , akkor minden  $\lambda$  megfelelő, amelyre  $0 < \lambda < 1/|\mu|$ . Az ellipszoidok egyenletéből következik, hogy

$$r_I^2 = \frac{1}{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \bar{\Omega}} \quad \text{és} \quad r_B^2 = \frac{1}{\bar{\Omega}^T \mathbf{B}_t^{-1} \bar{\Omega}}.$$

Az utóbbi nevezőjébe behelyettesítjük a fenti sorfejtést:

$$\bar{\Omega}^T \mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) \bar{\Omega} = \bar{\Omega}^T \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda \mathbf{I} \mathbf{D})^k \mathbf{I} \bar{\Omega}.$$

Ez tehát minden  $\bar{\Omega}$ -ra analitikus és pozitív függvény. Így ennek reciproka, vagyis  $r_B^2$  is a  $\lambda$  változó analitikus függvénye, amelyet Taylor-sorba fejthetünk:

$$r_B^2(\lambda) = \frac{1}{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \bar{\Omega}} + \lambda \frac{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \mathbf{D} \mathbf{I} \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \bar{\Omega}} + o(\lambda^2) = r_I^2 + \lambda \frac{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \mathbf{D} \mathbf{I} \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \bar{\Omega}} + o(\lambda^2).$$

Ebből következik, hogy a  $\lambda = 0$  helyen vett derivált nem-negatív:

$$\left. \frac{dr_B^2(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \mathbf{D} \mathbf{I} \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}^T \mathbf{I} \bar{\Omega}} \geq 0.$$

Legyen ezután  $\lambda$  tetszőleges pozitív szám. Megmutatjuk, hogy  $r_B^2(\lambda)$  monoton növekvő függvény. A  $\mathbf{B}_t(\lambda)$  mátrix  $\lambda$  szerinti deriváltja  $\mathbf{D}$ , hiszen  $\mathbf{B}_t(\lambda) = \mathbf{I}^{-1} + \lambda \mathbf{D}$ . Ebből egyszerűen következik, hogy

$$\frac{d\mathbf{B}_t^{-1}(\lambda)}{d\lambda} = -\mathbf{B}_t^{-1}(\lambda)\mathbf{D}\mathbf{B}_t^{-1}(\lambda),$$

amivel

$$\frac{dr_B^2(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\bar{\Omega}^T \frac{d\mathbf{B}_t^{-1}(\lambda)}{d\lambda} \bar{\Omega}}{\left[\bar{\Omega}^T \mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) \bar{\Omega}\right]^2} = \frac{\bar{\Omega}^T \mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) \mathbf{D} \mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) \bar{\Omega}}{\left[\bar{\Omega}^T \mathbf{B}_t^{-1}(\lambda) \bar{\Omega}\right]^2} \geq 0.$$

Tekintve, hogy  $\mathbf{D}$  pozitív szemidefinit, továbbá  $\mathbf{B}_t^{-1}$  szimmetrikus, ez a derivált nem-negatív. Ezzel

$$r_B^2 = r_B^2(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = r_1^2 + \int_0^1 \frac{dr_B^2(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \geq r_1^2.$$

Ezt kellett belátnunk.

### A maximális valószínűség módszerével kapott becslés tulajdonságai

A maximális valószínűség módszerével kapott becslés tulajdonságait illetően néhány tételt fogalmazunk meg, amelyek mind aszimptotikusan érvényesek  $n \rightarrow \infty$  esetén:

4.5. TÉTEL. A (4.21) egyenlet megoldhatóságának a valószínűsége 1-hez tart, amikor  $n \rightarrow \infty$ .

4.6. TÉTEL. A (4.21) egyenlet megoldása  $n \rightarrow \infty$  esetén 1-hez tartó valószínűséggel a likelihood-függvény maximumát adja.

4.7. TÉTEL. A kapott becslés konzisztens, vagyis  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{a} - a| > \varepsilon\} = 0.$$

4.8. TÉTEL. A (4.21) egyenlet megoldása aszimptotikusan Gauss-eloszlású, amelynek a várható értéke  $a$ .

4.9. TÉTEL. A (4.21) egyenlet megoldása az  $a$  paraméternek aszimptotikusan hatékony becslése.

A felsorolt tételek teljesüléséhez szükséges feltételeket nem adjuk meg, mert az általunk tárgyalt kísérletek esetében mindig teljesülnek. Részletes megfogalmazásuk megtalálható például Linnyik könyvében [1].

Végül megjegyezzük, hogy a kimondott tételek több becslés paraméter esetében is igazak. Ebben a jegyzetben a tételek közül a 4.8. TÉTEL két állítására hivatkozunk a leggyakrabban. Fontos kijelentés ugyanis, hogy a becslés paraméterek általában Gauss-eloszlásúak. Ennek a jelentősége abban áll, hogy a paraméterbecslési eljárások erre az eloszlásra vannak a legjobban kidolgozva. A másik kijelentésnek elsősorban a negatív tartalmára kell felhívni a figyelmet: előfordulhat, hogy a maximális valószínűség módszerével *csak aszimptotikusan* kapunk torzítatlan becslést. Mivel nem végezhetünk végtelen számú kísérletet,  $n$  mindig véges, tehát minden esetben ajánlatos ellen-

örizni a kapott becslések torzítatlanságát. Ha torzítást találunk, ki kell dolgoznunk a megfelelő korrekciót, és a becslést úgy módosítani, hogy végül torzítatlan legyen.

### 4.3. Hipotézisek vizsgálata

Ismeretlen paraméterek becslése mellett a matematikai statisztika másik fő feladata elméleti hipotézisek helyességének kísérleti ellenőrzése. Ennek ugyanolyan részletesen kidolgozott elmélete és módszertana van, mint a paraméterbecslésnek. Nincs lehetőségünk mindennek akár csak vázlatos ismertetésére sem. Ezért csak a jegyzet témája szempontjából legfontosabb dolgok magyarázatára szorítkozunk. Mindenekelőtt néhány példát hozunk hipotézisekre, amelyeknek a vizsgálata a gyakorlatban felmerül:

- Mennyiségek egyenlősége: kísérletileg meghatározzuk egy paraméter értékét, és ezt összehasonlítjuk ugyanennek valamilyen számított értékével. A vizsgálandó hipotézis ekkor a számított paraméterértéknek a mért paraméterérték várható értékével való egyenlősége.
- Illeszkedésvizsgálat: a közvetlenül mért  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mennyiségek eloszlásfüggvényére vonatkozóan szükségünk van valamilyen (többnyire elméleti megfontolásokkal kapott) feltevésre. A vizsgálandó hipotézis ekkor az, hogy tekinthetők-e a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mennyiségek a feltételezett eloszlásból vett mintának.
- Mennyiségek összehasonlítása: tegyük fel, hogy két független mérési módszerrel meghatároztuk ugyanazt mennyiséget, és azt vizsgáljuk, melyik módszer a pontosabb. Ilyenkor a vizsgálandó hipotézis abban áll, hogy az első módszer szórása kisebb, mint a másodiké.

A példák sorát folytathatnánk. Fogalmazzuk meg a problémát általánosan! A vizsgálandó hipotézist  $H_0$ -al jelöljük, és *null-hipotézis*nek nevezzük, amellyel szemben áll a  $H_1$  *alternatív hipotézis*. Az utóbbi lényegében a null-hipotézis tagadása, de nem mindegy, hogyan fogalmazzuk ezt meg. Amikor például a mért és számított paraméterértékek,  $a_m$  és  $a_s$  egyenlőségét vizsgáljuk, ennek ellentettjét több módon is kimondhatjuk:  $a_m \neq a_s$ , vagy  $a_m < a_s$ , vagy  $a_m > a_s$ , és így tovább.  $H_0$  vizsgálata abban áll, hogy a mért értékek  $\bar{\xi}$  vektora számára az  $n$ -dimenziós térben kijelölünk egy ún. *elfogadási tartományt*, és  $H_0$ -at igaznak fogadjuk el, ha  $\bar{\xi}$  ebbe esik. Ellenkező esetben a  $H_1$  *alternatív hipotézis* javára döntünk.

A gyakorlatban természetesen az a legritkább eset, hogy az elfogadási tartományt közvetlenül a  $\bar{\xi}$  vektor számára jelöljük ki az  $n$ -dimenziós térben. Általában redukáljuk a közvetlenül mért mennyiségeket, és az elfogadási tartományt a redukált mennyiségekre adjuk meg. Ennek legközönségesebb módja bizonyos paraméterek becslése. Elővesszük ismét a fenti példánkat. Az  $a_m$  "mért érték" a kérdéses  $a$  paraméter becsült értéke, tehát valószínűségi változó. A  $H_0$  hipotézist ekkor így fogalmazhatjuk:

$$H_0: M(a_m) = a_s. \quad (4.30)$$

Legyen az  $a_m$  becslés szórása  $\sigma$ . Ha igaz a null-hipotézis, a

$$\zeta = \frac{a_m - a_s}{\sigma} \quad (4.31)$$

mennyiség 0 várható értékű, 1 szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó, amelyre vonatkozóan már egyszerűen szerkeszthetünk elfogadási tartományt. Ennek érdekében a következő gondolatmenetet alkalmazzuk. Választunk egy kis  $\varepsilon$  számot úgy,

hogy gyakorlatilag kizártnak tartjuk azokat az eseményeket, amelyek valószínűsége ennél kisebb. ( $\varepsilon$  lehet például 0,01 vagy 0,05.) Keresünk egy olyan  $\gamma$  számot, amelyre fennáll, hogy

$$P\{|\zeta| < \gamma\} = F(\gamma) - F(-\gamma) = 1 - \varepsilon, \quad (4.32)$$

ahol  $F(x)$   $\zeta$  eloszlásfüggvénye. Esetünkben ez a (3.36) sűrűségfüggvény integrálja  $a = 0$  és  $\sigma = 1$  mellett. Mivel a kapcsos zárójelen belül levő esemény – fenti kijelentésünk szerint – gyakorlatilag biztos esemény, ha igaz a null-hipotézis, azt mondhatjuk, hogy a null-hipotézist csak akkor fogadjuk el, ha a kapcsos zárójelen belüli egyenlőtlenség fennáll.  $\zeta$  helyére (4.31) jobb oldalát helyettesítve a

$$-\gamma < \frac{a_m - a_s}{\sigma} < \gamma$$

elfogadási tartomány adódik, vagy átrendezve

$$a_m - \gamma\sigma < a_s < a_m + \gamma\sigma. \quad (4.33)$$

A null-hipotézist tehát akkor fogadjuk el, ha  $a_s$  az itt szereplő két határ közé esik.

Az eddig bevezetett mennyiségeket a matematikai statisztikában a következőképpen nevezzük:

$\varepsilon$ : *konfidencia-valószínűség* vagy *konfidenciaszint*. Az elnevezés logikus: a valószínűségeknek ez az a szintje, amely alatti valószínűségű eseményeket kizártnak tartjuk. A szóhasználat nem egészen egyértelmű, mert hol  $\varepsilon$ -t, hol  $(1 - \varepsilon)$ -t nevezünk konfidenciaszintnek, viszont majdnem mindig százalékban adjuk meg. Az  $\varepsilon = 0,05$  értéket például egyaránt mondjuk 5%-os és 95%-os konfidenciaszintnek. Félreértés ebből nem származhat, ugyanis  $\varepsilon$  ritkán nagyobb 0,1-nél.

$\gamma$ : *kvantilis*. Mindig (4.32) alakú egyenletek megoldásaként számítjuk ki. Értéke függ mindenekelőtt a választott konfidenciaszinttől, de függ attól is, ahogy a  $\zeta$  valószínűségi változót előállítottuk. Ezen keresztül függ a közvetlenül mért adatok  $n$  számától és a paraméterbecslés módjától. A kvantiliseket a leggyakrabban előforduló eloszlásokra (lásd 3.2. alfejezet) a statisztikai szakkönyvek  $n$  és  $\varepsilon$  szerint szerkesztett táblázatokban közlik. Jegyzetünk 2. függeléke tartalmazza a legfontosabb eloszlások kvantiliseit.

A (4.33)-ban szereplő  $(a_m - \gamma\sigma, a_m + \gamma\sigma)$  intervallumot *konfidenciaintervallumnak* nevezzük. Kísérletünk alapján tulajdonképpen ez a legtöbb, amit a keresett  $a$  paraméterről mondani tudunk: értéke  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel a konfidenciaintervallum belsejébe esik. Erre való tekintettel ezt *intervallumbecslésnek* is nevezzük – szemben az  $a_m$  *pontbecsléssel*. Az intervallum  $\gamma\sigma$  félszélességét *mérési bizonytalanságnak* nevezzük.

Befejezésül megbeszéljük a hipotézisek vizsgálatában elkövethető kétféle hibát. Előfordulhat, hogy a null-hipotézis valójában igaz, de mi mégis elvetjük. A fenti példában ez akkor következik be, amikor  $\zeta$  abszolút értéke nagyobb, mint  $\gamma$ . Ez az *elsőfajú hiba*. Elkövetésének valószínűsége definíció szerint  $\varepsilon$ . Hiába gondoltuk fentebb, hogy az ennél kisebb valószínűségű eseményeket kizárhatónak tekintjük, a véletlen játéka következtében mégis előfordulhatnak.

Az elsőfajú hiba csökkentése kedvéért az az érdekünk, hogy  $\varepsilon$  értékét minél kisebbre válasszuk. Van azonban más szempont is. Minél kisebb  $\varepsilon$ , annál szélesebb a kon-

fidenciaintervallum, így annál valószínűbb, hogy elkövetjük az ún. *másodfajú hibát*: jóllehet a null-hipotézis nem igaz, mégis elfogadjuk. A fenti példánkban ez azt jelenti, hogy ugyan az  $a$  paraméterre kapott  $a_s$  számított érték rossz, mi mégis a mért értékkel egyezőnek találjuk, tehát a számítási módszert kísérletileg igazoltnak tekintjük. A másodfajú hiba csökkentése érdekében célszerű minél nagyobb  $\varepsilon$ -t választani.

A mi feladatunk a kétfajta hiba csökkentéséből adódó, egymásnak ellentmondó követelmények között az egyensúlyt megtalálni. Elemeznünk kell mindkettő hatását, meg kell határoznunk, melyiket tartjuk veszélyesebbnek, és annak megfelelően kell a konfidenciaszintet megválasztanunk. A másodfajú hiba valószínűsége függ a  $H_1$  alternatív hipotézistől is, tehát ezt is körültekintően kell megfogalmazni.

### A maximális valószínűség elvének heurisztikus levezetése

A maximális valószínűség alapelvét a fentiek alapján az alábbi megfontolással is megvilágíthatjuk. Mivel feltettük, hogy a becslés torzítatlan, a  $t(\bar{\xi})$  statisztika nagy valószínűséggel az  $a$  paraméter valódi értéke közelében lesz. Legyen a (4.16)-ban szereplő szórásnégyzet négyzetgyöke  $\sigma_t$ , és tegyük fel, hogy  $t(\bar{\xi})$  Gauss-eloszlású. Ekkor 95% annak a valószínűsége, hogy

$$a - 2\sigma_t < t(\bar{\xi}) < a + 2\sigma_t \quad (4.34)$$

teljesüljön. Legyen  $\Xi(a)$  a  $\bar{\xi}$  véletlen vektoroknak az  $a$  tartománya, amelyekre a két (4.34) szerinti egyenlőtlenség teljesül. (Ez a tartomány nyilván függ  $a$  értékétől.) Helyettesítsük  $\bar{\xi}$  mért értékét a likelihood-függvénybe, és vizsgáljuk  $L(\bar{\xi}, a)$ -t  $a$  függvényében. Ha  $a$  értéke olyan, hogy  $\bar{\xi}$  kívül esik a  $\Xi(a)$  tartományon, akkor nagyon valószínű, hogy ez az  $a$  érték távol esik a paraméter valószínűségi értékétől, hiszen ebben az esetben a mérés eredménye egy kis valószínűségű tartományba esik. Logikus tehát az ismeretlen paraméter számára olyan értéket választani, amelyre a megfigyelt  $\bar{\xi}$  vektor mellett a (4.34) egyenlőtlenségek kielégülnek. Ennek a valószínűsége akkor a legnagyobb, amikor a likelihood-függvény  $a$  függvényében éppen felveszi a maximumát. Heurisztikus gondolatmenetünk logikája tehát így összegezhető: a keresett paraméter értékét úgy választjuk meg, hogy a kapott  $\bar{\xi}$  mérési eredmény a lehető legvalószínűbb legyen. Ezt a paraméterbecslési alapelvet alaposan megvizsgálták (lásd például [1], Cramér), és azt találták, hogy nagyon kedvező tulajdonságai vannak, amint a 4.5.–4.9. TÉTELEKben felsoroltuk. Ezért terjedt el a gyakorlatban.

### \*4.4. Konfidenciaellipszoid

Amikor csak egy paramétert vizsgálunk, konfidenciaintervallumot jelölünk ki a keresett paraméter valódi értéke számára. Amikor azonban több paraméter *egyszerre* érdekelt bennünket, ez nem elég, mert egy *konfidenciatartományt* kell kijelölnünk. Nos, ezt a 3.4. alfejezetben tárgyalt korrelációs ellipszoid és a  $\chi^2$ -eloszlás segítségével tehetjük meg.

A korrelációs ellipszoidot úgy kaptuk, hogy kerestük azokat az  $\mathbf{x}$  vektorokat, amelyek a (3.43) egyenletet kielégítik. Ha ezt  $\gamma$ -szorosára megnyújtjuk, olyan felületet kapunk, amelynek az egyenlete

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \gamma^2, \quad (4.35)$$

ahol – mint korábban – az  $\mathbf{a}$  vektor  $\bar{\xi}$  várható értéke. Bevezetjük az  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$  jelölést. Tegyük fel a következő kérdést: hogyan kell a  $\gamma$  kvantilist megválasztani, hogy a  $\bar{\xi}$  vektor  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel essen a fentiekben definiált ellipszoid belsejébe? Az így definiált  $\gamma$ -hoz tartozó, a (4.35) egyenlettel definiált felületet nevezzük *konfidenciaellipszoidnak*.

A fenti feltételeknek eleget tevő  $\gamma$  értékét az alábbi egyenletből kaphatjuk meg:

$$P(\gamma) = \int_{\mathbf{x}'^T \mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1} \mathbf{x}' < \gamma^2} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{B}_{\bar{\xi}}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{x}'^T \mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1} \mathbf{x}'\right\} d\mathbf{x}' = 1 - \varepsilon. \quad (4.36)$$

A 3.4. alfejezet mintájára alkalmazzuk a

$$\mathbf{z} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \mathbf{U} \mathbf{x}' \quad (4.37)$$

transzformációt. Könnyű belátni, hogy ennek a Jacobi-determinánsa éppen  $\sqrt{\det \mathbf{B}_{\bar{\xi}}}$ , továbbá

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{B}_{\bar{\xi}}^{-1} \mathbf{x}' = \mathbf{z}^T \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

hiszen a (4.37) transzformáció a  $(\bar{\xi} - \mathbf{a})$  vektort olyan  $\bar{\xi}$  vektorba viszi át, amelynek a komponensei egymástól függetlenek, várható értékük 0, és szórásuk 1. Eszerint a (4.36)-ban szereplő integrál annak a valószínűségét adja meg, hogy

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 = \chi_n^2 < \gamma^2.$$

Ennek megfelelően  $\gamma^2$  az  $n$  szabadsági fokú  $\chi^2$  eloszlás kvantilise.

## 5. KÖZVETLEN MÉRÉSEK

Az  $a$  fizikai mennyiséget  $n$ -szer megmértük, és  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -et kaptunk eredményül. Feltesszük, hogy a mérési eredmények egymástól *függetlenek, torzítatlanok*, vagyis várható értékük  $a$ :

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

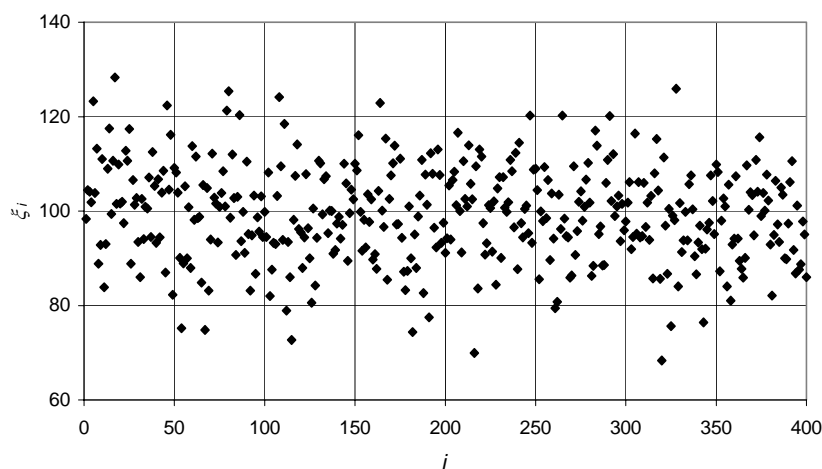
Két esetet vizsgálunk meg: (1) a mérések szórása azonos, (2) a mérések szórása változó. Mindkét esetben feltesszük, hogy a mérések Gauss-eloszlásúak.

### 5.1. Azonos pontosságú közvetlen mérések

Először feltesszük, hogy a mérések szórása azonos:

$$D^2(\xi_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Az 5.1.a. ábrán mutatunk ilyen mérési adatokat, amelyekről tudjuk, hogy várható értékük  $a = 100$  és szórásuk  $\sigma = 10$ .<sup>37</sup>



5.1.a. ábra. Azonos szórású és azonos várható értékű mért adatok

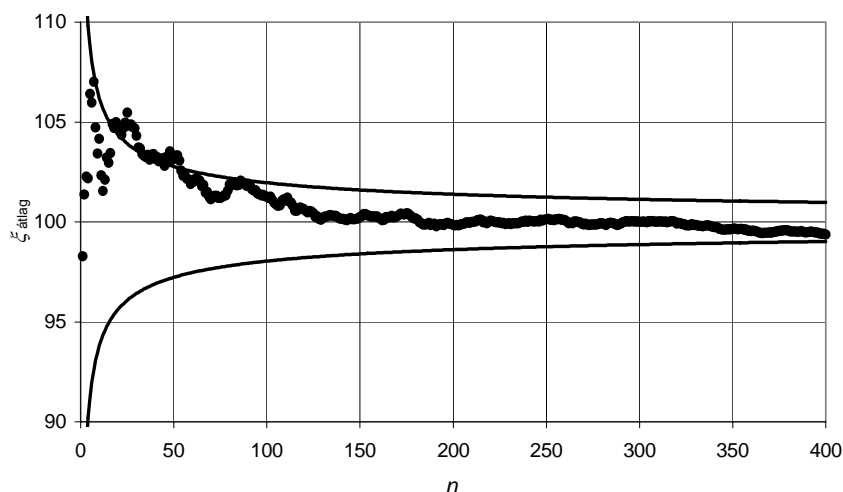
(5.1) szerint ezek bármelyike használható mint az  $a$  várható érték torzítatlan becslése. Nyilván nem azért végeztünk  $n = 400$  független mérést, hogy közülük csak egyet vegyünk figyelembe, és a többit fel se használjuk. Olyan becslési eljárást keresünk, amelyben mindegyik mérés eredménye befolyásolja  $a$  becsült értékét. Ennek kézenfekvő módja az

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \bar{\xi} \quad (5.3)$$

<sup>37</sup> Ezeket onnan ismerjük, hogy az ábra nem ténylegesen mért, hanem számítógéppel generált adatokat mutat.



átlag. Az 5.1.b. ábrán ezt mutatjuk az átlagolásban figyelembe vett adatok számának a függvényében. Az ábrán látható két görbe között van az a terület, amelyen belül az átlagérték 95% valószínűséggel megtalálható. (Ennek pontosabb értelmére az intervallumbecslés tárgyalásakor még visszatérünk.) Az ábra szerint az átlagnak a várható érték körüli ingadozása már  $n$  kis értékeire is gyorsan lecsökken. Ezt követően az átlagértékek ugyan lassan, de végül mégis stabilizálódnak.



5.1.b. ábra. Az (5.3) szerinti mintaátlag az átlagolt adatok  $n$  számának a függvényében

Szemléletesen láttuk tehát, hogy érdemes ugyanazt a mennyiséget többször is megmérni és a mért adatokat átlagolni, mert így jelentősen csökkenthetjük a keresett  $a$  paraméter becslt értékének a szórását. A 4. fejezetben láttuk, hogy a maximum likelihood módszer szolgáltatja a lehető legkisebb szórást. Az alábbiakban megvizsgáljuk, nem lehet-e ezzel a módszerrel még az (5.3) szerinti mintaátlagnál is jobb becslést találni.

### Pontbecslés

A maximum likelihood módszer alkalmazásához mindenképp először fel kell írunk a mért adatok együttes sűrűségfüggvényét [vö. (3.37c)]:

$$L(\mathbf{x}; a, \sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{Q(a)}{2\sigma^2}\right)}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}, \quad (5.4a)$$

ahol

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2. \quad (5.4b)$$

Legyen  $\vec{\xi}$  a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért adatokból alkotott vektor.

A maximum likelihood módszer szerint  $a$  értékét úgy kell megválasztani, hogy  $\mathbf{x} = \vec{\xi}$  helyettesítés mellett  $L$  maximális legyen, amit úgy érhetünk el, hogy megkeressük  $Q$  minimumát. Deriváljuk  $Q$ -t  $a$  szerint:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (\xi_i - a) = 0,$$

aminek a megoldása az (5.3) szerinti *mintaátlag*.

Vizsgáljuk meg a becslés tulajdonságait!  $\tilde{a}$  várható értéke az  $a$  valódi érték, tehát az (5.3) becslés torzítatlan:

$$M(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n M(\xi_i)}{n} = \frac{na}{n} = a,$$

amint ez az (5.1) feltevés alapján belátható. Szórásnégyzetét (5.2) alapján számítjuk ki – kihasználva, hogy a mérések függetlenek:

$$D^2(\tilde{a}) = D^2(\bar{\xi}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (5.5)$$

A becslés szórása tehát a mérések számának a négyzetgyökével fordítva arányosan nullához tart. Ebből következik, hogy  $\tilde{a}$  konzisztens becslés. A következő alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a becslés a lineáris becslések körében *hatékony* is.

$\sigma^2$ -et általában nem tekinthetjük ismertnek, vagyis ezt is becsülnünk kell. Ebben is az (5.4) szerinti eloszlásfüggvényből indulunk ki:  $L$ -nek nem csak  $a$ , hanem  $\sigma^2$  függvényében is keressük a maximumát. Felírjuk tehát a következő egyenletrendszer:

$$\frac{\partial \ln L(\bar{\xi}, a)}{\partial a} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \ln L(\bar{\xi}, a)}{\partial \sigma^2} = 0.$$

Az első egyenlet megoldását (5.3)-ben már felírtuk, a második egyenlet explicit alakja pedig

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[ -\frac{Q}{2\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \right] = \frac{Q}{2\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2} = 0,$$

amiből

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{Q(a)}{n} \Big|_{a=\bar{\xi}}. \quad (5.6)$$

Tudjuk, hogy a maximum likelihood módszer gyakran csak aszimptotikusan, vagyis  $n \rightarrow \infty$  mellett ad torzítatlan becsléseket. Ezért célszerű megvizsgálni az (5.6) szerinti becslés várható értékét. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q(a) &= \sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n [(\xi_i - \bar{\xi}) + (\bar{\xi} - a)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 + 2(\bar{\xi} - a) \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}) + n(\bar{\xi} - a)^2 = Q(\bar{\xi}) + n(\bar{\xi} - a)^2. \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy a kettős szorzatban szereplő összeg (5.3) alapján eltűnik.  $Q(a)$  várható értéke definíció szerint  $n\sigma^2$ , a jobb oldal második tagjáé pedig  $\sigma^2$  [vö. (5.5)]. Így tehát

$$M[Q(\bar{\xi})] = M[Q(a)] - M[n(\bar{\xi} - a)^2] = n\sigma^2 - \sigma^2,$$

vagyis

$$M(\tilde{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Az (5.6) szerinti becslés tehát torzított.

Legutóbbi eredményünkből egyszerűen kaphatunk azonban torzítatlan becslést:

$$s^2 = \frac{Q(\bar{\xi})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}. \quad (5.7)$$

Ezt a mennyiséget *korrigált empirikus szórásnégyzetnek* nevezzük, és szabványos jelölése  $s^2$ . A nevezőben szereplő  $(n-1)$  egy általánosabb tétel következményeként is ki fog adódni a következő fejezetben [vö. (6.22)]. A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – a “korrigált” jelzöt elhagyjuk, és  $s^2$ -et *empirikus szórásnégyzetnek* fogjuk nevezni.

### Intervallumbecslés

Az (5.3) képlet meghatározott számértéket ad meg az  $a$  paraméter keresett értékére. Ezért ezt *pontbecslésnek* nevezzük. Mindig erre van szükség, amikor tovább kell számolnunk a paraméter becsült értékével. Baj azonban, hogy a becsült érték soha nem fog a valódi értékkel egybeesni,<sup>38</sup> továbbá nem ad információt a becsült adat bizonytalanságáról. Erre van szükségünk például akkor, amikor a mérést azért végezzük el, hogy ellenőrizzük egy elméleti jóslat helyességét. Nyilvánvaló, hogy az elméleti jóslat és a pontbecslés mindig tapasztalható eltérése még nem jelenti az elmélet cáfolatát. A becsült adat bizonytalanságán belüli egyezést szívesen tekintenénk az elmélet igazolásának. Ezért vezetünk le az alábbiakban egy *intervallumbecslést* is: keresünk egy olyan intervallumot, amelybe a paraméter valódi értéke adott valószínűséggel esik. Szükségünk lesz két alapvető tételre:

5.1. TÉTEL. A  $\sigma^2$  arányossági tényezőtől eltekintve az (5.4b) szerinti négyzetösszeg  $\chi^2$  eloszlású  $(n-1)$  szabadsági fokkal:

$$Q(\bar{\xi}) = \sigma^2 \chi_{n-1}^2. \quad (5.8)$$

Ez a tétel a legkisebb négyzetek módszerében az egyik legfontosabb, általánosan érvényes tétel speciális esete. Bizonyítása meglehetősen bonyolult az általános esetben, de ebben a speciális esetben egyszerű. Fentebb beláttuk:

$$Q(\bar{\xi}) = Q(a) - n(\bar{\xi} - a)^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 - n(\bar{\xi} - a)^2.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \quad \text{és} \quad \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} = \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma},$$

amivel

<sup>38</sup> Az ilyen kijelentések matematikailag a következőt jelentik: annak a valószínűsége, hogy a két érték különbsége  $\Delta$ -nál kisebb legyen,  $O(\Delta)$  rendben 0-hoz tart.

$$\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - n\bar{\eta}^2. \quad (5.9)$$

A definícióból következik, hogy az  $\eta_i$  valószínűségű változók egymástól függetlenek, várható értékük zérus, szórásnégyzetük 1. Ha tehát (5.9)-ben csak a szumma szerepelne, a jobb oldal  $\chi^2$  lenne  $n$  szabadsági fokkal. A jobb oldal második tagjától egy ortogonális transzformációval szabadulunk meg:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_n = \sqrt{n} \cdot \bar{\eta}, \\ \zeta_2 &= c_{21} \eta_1 + c_{22} \eta_2 + \dots + c_{2n} \eta_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \zeta_n &= c_{n1} \eta_1 + c_{n2} \eta_2 + \dots + c_{nn} \eta_n. \end{aligned}$$

Ilyen ortogonális transzformációt mindig lehet találni: keresünk az első sorban szereplő  $[1, 1, \dots, 1]/\sqrt{n}$  vektorra merőleges altérben  $(n-1)$  egymásra merőleges egységvektort, és ezek komponensei adják meg a transzformáció 2., 3., ...,  $n$ -edik sorait. A transzformáció  $\mathbf{C}$  mátrixára definíció szerint fennáll, hogy  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{E}$ . A transzformált  $\zeta_i$  valószínűségi változók várható értéke nyilván zérus. Az  $\eta_i$  valószínűségi változók függetlenek, és szórásnégyzetük 1. Ugyanez érvényes a  $\zeta_i$ -kre is, hiszen a belőlük alkotott  $\bar{\zeta} = \mathbf{C}\bar{\eta}$  véletlen vektor kovarianciamátrixa

$$\mathbf{M}(\bar{\zeta}\bar{\zeta}^T) = \mathbf{M}(\mathbf{C}\bar{\eta}\bar{\eta}^T\mathbf{C}^T) = \mathbf{C}\mathbf{M}(\bar{\eta}\bar{\eta}^T)\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{E}.$$

A 3.11. TÉTEL szerint  $\bar{\zeta}$  Gauss-eloszlású véletlen vektor. Mivel  $\bar{\eta} = \mathbf{C}^T\bar{\zeta}$ , (5.9) így írható:

$$\begin{aligned} \frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2} &= \bar{\eta}^T \bar{\eta} - n\bar{\eta}^2 = \bar{\zeta}^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T \bar{\zeta} - \zeta_1^2 = \bar{\zeta}^T \bar{\zeta} - \zeta_1^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 - \zeta_1^2 = \sum_{i=2}^n \zeta_i^2 = \chi_{n-1}^2, \end{aligned}$$

amint a tételben állítjuk.

5.2. TÉTEL.  $\bar{\xi}$  független a  $Q(\bar{\xi})$  négyzetösszegtől.

Elég megmutatni, hogy  $\bar{\xi}$  a

$$Q(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

négyzetösszeg mindegyik tagjától külön-külön is független. Gauss-eloszlású változók-ról lévén szó, azt kell megmutatnunk, hogy a szóban forgó valószínűségi változók kovarianciája eltűnik:

$$c = \text{cov}[(\xi_i - \bar{\xi}), \bar{\xi}] = \mathbf{M}[(\xi_i - \bar{\xi})(\bar{\xi} - a)] = 0. \quad (5.10)$$

Ennek belátásához átalakítjuk a várható érték jele alatti kifejezést:

$$\begin{aligned}
c &= M\left\{\left(\xi_i - a\right) - \left(\bar{\xi} - a\right)\right\}\left(\bar{\xi} - a\right) = \\
&= M\left[\left(\xi_i - a\right)\left(\bar{\xi} - a\right)\right] - M\left[\left(\bar{\xi} - a\right)^2\right].
\end{aligned}$$

(5.5) alapján a második tag  $\sigma^2/n$ . Az első tag pedig szintén ennyi:

$$M\left[\left(\xi_i - a\right)\left(\bar{\xi} - a\right)\right] = M\left[\left(\xi_i - a\right) \frac{\sum_{i'=1}^n \left(\xi_{i'} - a\right)}{n}\right] = \frac{M\left[\left(\xi_i - a\right)^2\right]}{n} = \frac{\sigma^2}{n},$$

vagyis az (5.10)-ben szereplő  $c$  kovariancia tényleg eltűnik, amivel a tételt igazoltuk.

Képezzük ezután a

$$t = \frac{\tilde{a} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{\xi} - a}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}}} \quad (5.11)$$

hányadost [vö. (5.7)]. Belátjuk, hogy ez  $(n-1)$  szabadsági fokú Student-tört. (5.5)-ből következik, hogy a

$$g = \frac{\tilde{a} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

hányados Gauss-eloszlású valószínűségi változó, amelynek a várható értéke zérus, szórása pedig 1. Az 5.1. TÉTEL szerint  $Q(\bar{\xi})/\sigma^2$   $\chi^2$ -változó  $(n-1)$  szabadsági fokkal, amely az 5.2. TÉTEL szerint független  $g$ -tól. Így a

$$\frac{g}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2(n-1)}}}$$

hányados Student-tört  $(n-1)$  szabadsági fokkal. Behelyettesítéssel beláthatjuk, hogy ez nem más, mint az (5.11) alatti  $t$  hányados.

Legutóbbi eredményünk alapján már megszerkeszthetjük a keresett intervallumot. Válasszunk egy  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséget, és a Student-eloszlás táblázataiból ki-keressük a következő feltételnek eleget tevő  $\gamma$  kvantilist:

$$P\{|t| < \gamma\} = 1 - \varepsilon. \quad (5.12)$$

(5.11) alapján tehát  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$-\gamma < \frac{\bar{\xi} - a}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}}} < \gamma,$$

amit átrendezve adódik a keresett intervallum:

$$\bar{\xi} - \gamma \sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}} < a < \bar{\xi} + \gamma \sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}} \quad (5.13a)$$

vagy egyszerűbben:

$$\bar{\xi} - \gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + \gamma \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (5.13b)$$

A bal és jobb oldalon szereplő mennyiségekből alkotjuk meg az ún. *konfidenciaintervallumot*:

$$\left( \bar{\xi} - \gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + \gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right). \quad (5.13c)$$

Megjegyezzük, hogy az 5.1.b. ábrán látható burkológörbék lényegében ezzel a képlettel vannak számolva. Annyi az eltérés, hogy az átlag helyett  $a$  áll,  $s$  helyett pedig  $\sigma$ :

$$\left( a - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, a + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$\gamma$  értéke 1,96 (vö. 2. függelék).

### Poisson-eloszlású mérések

A részecskeszámlálók által adott eredmények általában Poisson-eloszlásúak. Ha a beütésszám várható értéke

$$M(\xi) = a, \quad (5.14a)$$

akkor

$$P_{\xi} = e^{-a} \frac{a^{\xi}}{\xi!} \quad (5.15)$$

annak a valószínűsége, hogy pontosan  $\xi$  részecskét számlálunk meg. Ennek az eloszlásnak nevezetes tulajdonsága, hogy a szórásnégyzet megegyezik a várható értékkel:

$$D^2(\xi) = a. \quad (5.14b)$$

Amikor a beütésszám 100-as nagyságrendű vagy nagyobb, a Poisson-eloszlás jól közelíthető Gauss-eloszlással:

$$P_{\xi} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left\{-\frac{(\xi - a)^2}{2a}\right\}.$$

Kisebb beütésszámok esetében azonban ez a közelítés elromlik, így az adatok kiértékelésében célszerű az (5.15) szerinti eloszlással dolgozni.

Mint az eddigiekben, most is  $n$  mérést végeztünk, és  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -et kaptunk eredményül. Együttes valószínűségük

$$L(\bar{\xi}; a) = \prod_{i=1}^n e^{-a} \frac{a^{\xi_i}}{\xi_i!}. \quad (5.16)$$

A maximum likelihood elv alapján  $\ln L$  maximumát kell megkeresnünk  $a$  függvényében:

$$\frac{\partial L(\bar{\xi}; a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -na + \sum_{i=1}^n (\xi_i \ln a - \ln \xi_i!) \right] = -n + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{a} = 0,$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \bar{\xi}. \quad (5.17)$$

Ez pontosan megegyezik az (5.3) szerinti becsléssel.

(5.14a) alapján rögtön látszik, hogy ez torzítatlan becslés. Szórásnégyzetét (5.14b) alapján kapjuk:

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{na}{n^2} \approx \frac{\tilde{a}}{n} = \frac{\bar{\xi}}{n}. \quad (5.18)$$

Itt kihasználtuk, hogy független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege.

Konfidenciaintervallumot úgy kaphatunk a legegyszerűbben, hogy a Poisson-eloszlást Gauss-eloszlással közelítjük. Legyen  $\gamma_G$  a Gauss-eloszlásnak a választott  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséghez tartozó kvantilise. Ekkor (5.18) alapján a konfidenciaintervallum:

$$\left( \bar{\xi} - \gamma_G \sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}}, \bar{\xi} + \gamma_G \sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}} \right). \quad (5.18a)$$

### Csoportosított mérések

A szórásnégyzet becslése javítható, ha ugyanazzal a mérés technikával több különböző mennyiséget is megmérünk. Jelöljük ezeket  $a_1, a_2, \dots, a_m$ -mel. Az  $a_k$ -ra vonatkozó mérések eredményét jelöljük  $\xi_{ki}$ -vel ( $i = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, \dots, m$ ). Mindegyik csoportban más a mérési eredmények várható értéke, de azonos a szórásnégyzete:

$$M(\xi_{ki}) = a_k, \quad \text{de} \quad D^2(\xi_{ki}) \equiv \sigma^2. \quad (5.19)$$

(5.3) alapján a  $k$ -adik csoportban az

$$\tilde{a}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} \xi_{ki}}{n_k} = \bar{\xi}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.20)$$

képlettel becsülhetjük a keresett mennyiségeket. Ha formálisan gondolkozunk, (5.7) szerint csoportonként kaphatunk becslést  $\sigma^2$ -re:

$$s_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} (\xi_{ki} - \bar{\xi}_k)^2}{n_k - 1}, \quad (5.21)$$

ami a fentiek szerint torzítatlan. Ennek alapján mindegyik csoporthoz rendelhetünk konfidenciaintervallumot ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\left( \bar{\xi}_k - \gamma_k \frac{s_k}{\sqrt{n_k}}, \bar{\xi}_k + \gamma_k \frac{s_k}{\sqrt{n_k}} \right), \quad (5.21a)$$

ahol  $\gamma_k$  az  $(n_k - 1)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise.

Ez az eljárás elvileg hibátlan, de nem veszi figyelembe azt a körülményt, hogy a szórásnégyzet mindegyik csoportban ugyanannyi. Ez azért baj, mert lehetne javítani  $\sigma^2$  becslését. Különösen akkor lenne ez fontos, amikor a mérési adatok száma kicsi.  $\sigma^2$ -et becsülhetjük a teljes mérési adathalmaz segítségével is:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} (\xi_{ki} - \bar{\xi}_k)^2}{\sum_{k=1}^m (n_k - 1)} = \frac{\sum_{k=1}^m (n_k - 1) s_k^2}{n - m}, \quad (5.22)$$

ahol

$$n = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Be lehet látni, hogy az 5.2. TÉTEL itt is érvényes:  $s^2$  független az (5.20) szerint kapott becslésektől, tehát a Student-eloszlás alapján szerkeszthetjük meg a konfidenciaintervallumokat ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\left( \bar{\xi}_k - \gamma \frac{s}{\sqrt{n_k}}, \bar{\xi}_k + \gamma \frac{s}{\sqrt{n_k}} \right), \quad (5.22a)$$

ahol  $\gamma$  az  $(n - m)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise.

Illusztrációképpen tekintsük az 5.1. táblázatban látható példát.  $m = 5$  csoportban történt a mérés. Mivel a mérések  $n_k$  száma csoportról csoportra változik, mások a  $\gamma_k$  kvantilisek is (amelyeknek a táblázatban megadott értéke  $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozik). A szóráss meg lehetőségen nagy, amint ez az  $s_k$  empirikus szórásokból látszik.



5.1. táblázat. Példa csoportosított mérésekre

$i \downarrow, k \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	11918	10054	11386	13856	7610
2	13250	6977	11679	15201	6419
3	11951	9985	12145	14274	7581
4	11977	7812	11394	13072	8430
5	10581	8898	13433	14304	6770
6		10718	13838	16031	7966
7		9783		13362	7669
8		9660		13978	
9				13114	
$\tilde{a}_k$	11935,4	9235,9	12312,5	14132,4	7492,1
$s_k$	944	1268	1069	978	687
$\gamma_k$	2,7764	2,3646	2,5706	2,3060	2,4460
$n_k-1$	4	7	5	8	6

Az 5.1. táblázatban szereplő adatok szerint az 5.2. táblázat második oszlopában látható konfidenciaintervallumokat szerkeszthetjük meg. A harmadik oszlopban adjuk meg az intervallumok félszélességét ( $u$ ), amely jellemzi a paraméterek becslt értékének a bizonytalanságát. Mivel a  $\gamma_k / \sqrt{n_k}$  tényező  $n_k$ -nak monoton csökkenő függvénye, azt várná az ember, hogy  $u$  azokra a csoportokra kicsi, amelyekben sok mérés van. Tehát a legkisebb  $u$ -t a 2. és a 4. csoportban várjuk, amiről azonban a táblázatban szó sincs. A jelenség magyarázata abban rejlik, hogy az  $s_k$  empirikus szórások  $\sigma$ -nak meglehetősen bizonytalan becslései, amikor – mint esetünkben is –  $n_k$  kicsi.

A megoldás tehát  $\sigma$  becslését javítani. Ez az (5.22) szerinti becslés szerepe:  $s^2$  segítségével  $\sigma^2$ -et  $n - m = 30$  szabadsági fokkal becsüljük, aminek a bizonytalansága sokkal kisebb. Az adott példában  $\gamma = 2,0423$ , és (5.22) szerint  $s = 1017$ . Az ezekkel (5.22a) szerint számolt konfidenciaintervallumok és bizonytalanságok az 5.2. táblázat negyedik, illetve ötödik oszlopában található. Látható, hogy ezek a számok sokkal inkább megfelelnek a józan várakozásnak.

5.2. táblázat. Konfidenciaintervallumok és bizonytalanságok

Csoport	(5.21a) alapján	$u$	(5.22a) alapján	$u$
1	(10763, 13108)	1172	(10006, 12846)	929
2	(8176, 10296)	1060	(8502, 9970)	734
3	(11191, 13434)	1122	(11465, 14313)	848
4	(13381, 14884)	752	(13440, 14824)	692
5	(6857, 8127)	635	(6707, 8277)	785

### A végeredmény közlése

A fenti példa alapján összefoglaljuk, hogyan kell egy kiértékelt mérés eredményét közölni. A felhasználóknak három adatra van szükségük ahhoz, hogy eredményeinkkel dolgozhassanak: a pontbecslésre, az empirikus szórásra és a szabadsági fokok számára. Ha ugyanis ezeket közöljük, az (5.21a) vagy (5.22a) képletek alapján megszerkeszthetjük az általuk választott  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséghez tartozó konfidenciaintervallumokat. A  $\gamma$  kvantiliseket persze ki kell keresniük a Student-eloszlásra vonatkozó statisztikai táblázatokból.

A közlés formája célszerűen a következő:

$$14132 \pm 326, \quad (5.23a)$$

amint ez – például – az 5.1. táblázat  $k=4$  oszlopában található:  $\tilde{a} = 14132$  és  $s_k/\sqrt{n_k} = 978/\sqrt{9} = 326$ . A  $\pm$  jel arra utal, hogy a konfidenciaintervallum megszerkesztéséhez az empirikus szórás  $\gamma_k$ -szorosát negatív és pozitív előjellel hozzá kell adnunk a pontbecsléshez.<sup>39</sup> Ezt azonban ki kell egészítenünk az  $s^2$  becslésében szereplő szabadsági fokok számával, ami nélkül a felhasználók nem tudnák a  $\gamma_k$  kvantiliseket meghatározni.

Felmerül a kérdés, miért nem olvastjuk  $\gamma_k$ -t az empirikus szórásba, vagyis miért nem az

$$\tilde{a} \pm s_k \gamma_k / \sqrt{n_k} = 14132 \pm 752 \quad (5.23b)$$

formában közöljük eredményünket. A válasz egyszerű:  $\gamma$  függ az  $\varepsilon$  valószínűségtől, amit nem mi, hanem a felhasználók fognak megválasztani. Ha tehát mégis beolvastjuk a végeredmény közlésébe, *korlátozzuk* a felhasználókat. Tételezzük fel például, hogy egy felhasználó  $\varepsilon = 0,01$  mellett kíván intervallumbecslést végezni. Ha (5.23a) szerint közöljük az eredményünket, továbbá megadjuk  $n_k$  értékét, akkor a táblázatokból kikeresheti a  $\gamma_k = 3,3554$  kvantilist, amivel az empirikus szórást beszorozva  $326 \cdot 3,3554 = 1094$  adódik a konfidenciaintervallum félszélességére. (5.23b) esetében viszont csak akkor tudja ezt megcsinálni, ha közöljük  $\varepsilon$  általunk választott értékét is. Ekkor –  $n_k$  ismeretében – ki tudja keresni az általunk használt  $\gamma_k$ -t, a bizonytalanságot ezzel elosztja, és az eredményül adódó szórást beszorozza az általa választott  $\varepsilon$ -hoz tartozó kvantilissel. Nyilvánvaló, hogy ez jelentős és teljesen felesleges többletmunka mind a mi részünkről, mind a felhasználók részéről.

Hasonlóan felesleges és zavaró a *t-faktor* használata, amelynek az lenne a feladata, hogy a felhasználóknak ne kelljen törődniük a véges szabadsági fokokkal, hanem minden esetben a végtelen szabadsági foknak megfelelő Gauss-eloszlással dolgozhasanak. Konkrétan arról van szó, hogy a becsült szórásokat beszorozzuk a  $\gamma_n/\gamma_G$  hányadossal, ahol  $\gamma_n$  és  $\gamma_G$  a véges  $n$ , illetve a végtelen szabadsági fokokhoz tartozó kvantilisek. Tekintve, hogy mindkettő függ a választott  $\varepsilon$ -tól, ismét korlátozzuk a felhasználók jogait, tehát ezt a gyakorlatot sem tudjuk támogatni.

A szórás becslése a mérés kiértékelésének ugyanolyan alapvető eredménye, mint maga a pontbecslés, tehát egyiket sem szabad semmiféle tényezővel beszorozni. *Mindkettőt pontosan úgy kell közölni, ahogy azok kijöttek.* A kísérletezőnek fel kell tételeznie, hogy eredményeit olyanok fogják használni, akik tisztában vannak a matematikai statisztikával, továbbá nem lusták a statisztikai táblázatokat használni. Nem fognak örülni a lustaságuk feltételezéséből kiinduló látszatudvariasságnak.

E szakasz befejezéséként megjegyezzük, hogy ezek a megállapítások nem korlátozódnak az azonos pontosságú közvetlen mérésekre, hanem általánosan is érvényesek.

## 5.2. Változó pontosságú közvetlen mérések

Akkor beszélünk *változó pontosságú* közvetlen mérésekről, amikor az  $a$  fizikai mennyiség  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért értékeinek a szórásnégyzete  $i$ -től függ:

$$D^2(\xi_i) = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.24a)$$

Továbbra is feltesszük, hogy a mérési eredmények *Gauss-eloszlásúak*, egymástól *függetlenek*, *torzítatlanok*, vagyis várható értékük  $a$ :

<sup>39</sup> A pontbecslést kerekítettük. A kerekítés kérdésével az 5.4. alfejezetben külön foglalkozunk.

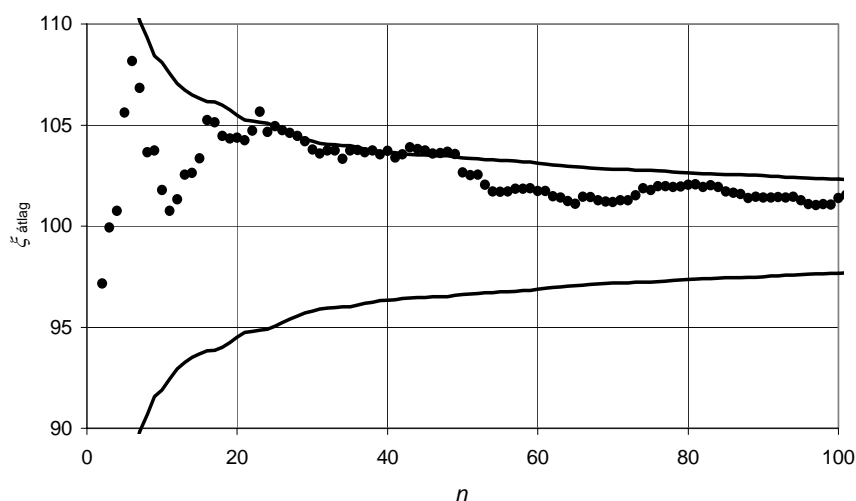
$$M(\xi_i) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.24b)$$

Az (5.3) szerinti súlyozatlan mintaátlag minden esetben az  $a$  várható érték torzítatlan becslése. Kérdés azonban, célszerű-e ezt használni. Könnyű belátni, hogy nem. Számítsuk ki ugyanis az (5.3) mintaátlag szórásnégyzetét:

$$D^2(\bar{\xi}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2}.$$

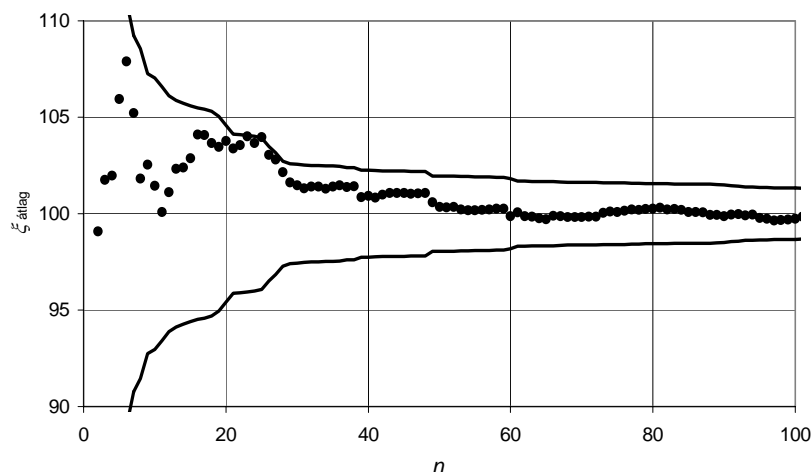
Ez meglehetősen kellemetlen eredmény. Tegyük fel ugyanis, hogy méréseink pontossága nagyon különböző. Az ember azt szeretné, hogy a pontos mérések domináljanak, és a pontatlanok alig játszanak szerepet. A súlyozatlan mintaátlag esetében ennek éppen a fordítottja történik: szórását a legpontatlanabb mérések határozzák meg. Tegyük fel például, hogy  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ , miközben a többi szórás nem változik. Ebben az esetben a mintaátlag szórása átmegy a  $\sigma_1/n$  aszimptotikába, ami ellentmond a józan észnek: hiába végzünk pontos méréseket, a közös várható értéket mégis úgy becsüljük, hogy a becslés szórását a legpontatlanabb mérés határozza meg.

Illusztrációképpen tekintsük az 5.2.a. ábrát, amely az 5.1.b. ábrán látható becslést mutatja, de változó szórású mért adatokra vonatkozóan.<sup>40</sup> Az egyes mérések szórása ugyan nem nő minden határon túl, de a legkisebb és legnagyobb szórás aránya 1:9. A  $\sigma_i$  szórásokat úgy választottuk meg, hogy átlaguk a korábbi  $\sigma = 10$  legyen. Így a mostani mintaátlagok összevethetők az 5.1.b. ábrán láthatókkal. Ha a 95%-os valószínűséghez tartozó burkológörbékét összevetjük az 5.1.b. ábrán láthatókkal, azonnal feltűnik, hogy azok most nem simák. Ennek egyszerű a magyarázata: a változó  $\sigma_i$  szórások az átlag szórásában “szeszélyes” ugrásokat okoznak (legalábbis kis  $n$ -re). Fontosabb dolog is látszik azonban: a 95%-os burkológörbék közötti távolság minden  $n$ -re lényegesen nagyobb most, mint az 5.1.b. ábrán.  $n = 100$ -ra például a távolság a korábbi 3,93-ról 4,66-ra nőtt. Ennek az az oka, hogy a súlyozatlan átlagolás kiemeli a pontatlanabb (nagyobb szórású) mért adatok hatását – ahelyett, hogy éppen csökkenjené.



5.2.a. ábra. Súlyozatlan átlag függése  $n$ -től változó szórású mérések esetében

<sup>40</sup> Magukat a mért adatokat nem mutatjuk, mert az ábra szemre alig különbözne az 5.1.a. ábrától.



5.2.b. ábra. Optimálisan súlyozott átlag függése  $n$ -től változó szórású mérések esetében

Problémánk megoldását az jelentheti, hogy az (5.3) mintaátlag helyett *súlyozott* átlagot használunk alkalmasan megválasztott súlyokkal:

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i, \quad (5.25a)$$

ahol

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (5.25b)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy kedvezően megválasztott súlyokkal lényegesen jobb eredményeket lehet elérni. Ilyen átlagok láthatók az 5.2.b. ábrán. A mintaátlagok ingadozása már  $n$  sokkal kisebb értékeire lecsökken, mint korábban, továbbá a 95%-os határgörbék közötti távolság is sokkal kisebb:  $n = 100$ -ra most 2,66, vagyis a súlyozatlan átlagoláshoz tartozó távolság felénél alig több. Ennek az az oka, hogy az optimálisan súlyozott átlagolás kiemeli a pontosabb (kisebb szórású) mért adatok hatását, és ezáltal a keresett  $a$  paraméter becslt értéke is pontosabb lesz. A metrológiai szóhasználat (vö. 2. függelék) szerint “az ilyen becslés bizonytalansága kisebb”.

### A súlyozott átlag optimalizálása

Mivel a mérések egymástól statisztikailag függetlenek, az (5.25a) szerinti becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2. \quad (5.26)$$

Ennek minimumát keressük a  $w_i$  súlyok függvényében. Alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátorok módszerét:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \left( \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^n w_i + \lambda \right) = 2w_j \sigma_j^2 - \lambda = 0,$$

amiből

$$w_j = \frac{\lambda/2}{\sigma_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.27a)$$

vagyis a megoldást a szórásnégyzetek reciprokával arányos súlyozás adja.  $\lambda/2$  értéke az (5.25b) normálási feltételből számítható ki:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.27b)$$

Könnyen beláthatjuk, hogy a kapott súlyok valóban minimumhoz vezetnek. Ha ugyanis a fentitől eltérő

$$w_i = \frac{\lambda/2}{\sigma_i^2} + \Delta_i$$

súlyokat választjuk, a normálási feltétel miatt

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0.$$

Ezt (5.26)-ba helyettesítve

$$D^2(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^2/4}{\sigma_i^4} + \lambda \frac{\Delta_i}{\sigma_i^2} + \Delta_i^2 \right) \sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} + \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \sigma_i^2$$

adódik, ami akkor minimális, amikor  $\Delta_i \equiv 0$  minden  $i$ -re. Ebből melléktermékként az is kiadódott, hogy a minimális szórásnégyzet

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.28)$$

Az elmondottaknak speciális esetét jelentik az azonos pontosságú mérések:  $\sigma_i^2 \equiv \sigma^2$ . Ekkor (5.25a)-ban az (5.3) szerinti súlyozatlan mintaátlagot kapjuk, amelynek a szórásnégyzetét (5.5) adja meg. A fentiekben azt is beláttuk, hogy azonos pontosságú közvetlen mérések esetében a mintaátlag – az (5.25) alakú lineáris becslések körében – hatékony.

A most kapott eredményt egyes szerzők *Gauss tételeként* emlegetik. Gyakorlati haszna, hogy megmutatja, hogyan kell átlagolni a különböző pontosságú méréseket, és hogyan kell az így kapott átlag szórását becsülni. A továbbiak szempontjából pedig mindez azért érdekes, mert jól illusztrál két dolgot: egyrészt a becslés optimalizálásával *a szórás csökkenthető*, másrészt a szórás *nem csökkenthető minden határon túl*, hiszen a lineáris becslések körében (5.28) alsó korlátot jelent. Felmerül a kérdés: létezik-e olyan *nemlineáris* becslés, amellyel a szórás tovább csökkenthető? A kérdésre a maximum likelihood módszerrel fogunk választ kapni: nem létezik! A Gauss-eloszlás esetében (5.28) a becslések széles osztályában alsó korlát.

## $\sigma^2$ becslése változó pontosság esetében

Változó pontosságú mérések esetében nem mindig sikerül az egyes mérések szórásnégyzetét meghatározni. A leggyakrabban csak ezek *relatív* értékét tudjuk elfogadható módon meghatározni. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a szórásnégyzeteket

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i} \quad (5.29)$$

alakban írjuk fel, ahol  $\sigma^2$  ismeretlen arányossági tényező, a  $w_i$  súlyok pedig ismertek. Az 5.1. alfejezetben is ezt a modellt használtuk a  $w_i \equiv 1$  választással. Az alábbiakban megnézzük, hogyan módosulnak a korábbi képletek a változó súlyok esetében.

A mért adatok együttes sűrűségfüggvénye (5.4) helyett most

$$L(\mathbf{x}; a, \sigma^2) = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n w_i}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{Q(a)}{2\sigma^2}\right), \quad (5.40a)$$

ahol

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - a)^2. \quad (5.40b)$$

A keresett paraméter becslését úgy kapjuk, ide  $\mathbf{x} = \bar{\xi}$ -t helyettesítünk, majd keressük az így adódó  $Q$  minimumát a

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a) = 0$$

egyenlet megoldásával:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (5.41)$$

Könnyű belátni, hogy ez a fent kapott optimális súlyokkal képzett átlag. E becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 D^2(\xi_i)}{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 \frac{\sigma^2}{w_i}}{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (5.42)$$

Ahhoz, hogy ezt használni tudjuk, szükségünk van  $\sigma^2$  becslésére. Az 5.1. TÉTELre adott bizonyítást általánosítva belátjuk, hogy a tétel a mostani esetben is igaz. Az 5.1. alfejezetben alkalmazott levezetést most kis változtatással megismételhetjük:

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n w_i [(\xi_i - \tilde{a}) + (\tilde{a} - a)]^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{a})^2 + 2(\tilde{a} - a) \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{a}) + (\tilde{a} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i = \\
&= Q(\tilde{a}) + (\tilde{a} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i,
\end{aligned}$$

amiből

$$Q(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a)^2 - (\tilde{a} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i.$$

A következő valószínűségi változók várható értéke nulla és szórása 1:

$$\eta_i = \frac{\sqrt{w_i} (\xi_i - a)}{\sigma} \quad \text{és} \quad \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \sqrt{w_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}} = \frac{\tilde{a} - a}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Segítségükkel  $Q$  kifejezhető a

$$\frac{Q(\tilde{a})}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - \bar{\eta}^2 \sum_{i=1}^n w_i$$

alakban [vö. (5.9)]. Innentől kezdve alkalmazhatjuk az 5.1. TÉTEL bizonyítására vonatkozó gondolatmenetünket. A tételből adódik  $\sigma^2$ -re a

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{Q(\tilde{a})}{n-1} \quad (5.43)$$

becslés [vö. (5.7)]. (5.42) alapján vezethetjük le a következő konfidenciaintervallumot:

$$\left( \tilde{a} - \gamma \frac{s}{\sqrt{w}}, \tilde{a} + \gamma \frac{s}{\sqrt{w}} \right), \quad (5.43a)$$

ahol  $\gamma$  az  $(n-1)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise, továbbá

$$w = \sum_{i=1}^n w_i$$

[vö. (5.13a)].

### Részecskeszámlálás változó mérési időkkel

Tegyük fel, hogy egy radioaktív sugárforrás erősségét<sup>41</sup> kell megmérnünk. Az  $i$ -edik mérésben a számlálási idő  $T_i$ . A beütésszám várható értéke ekkor

$$M(\xi_i) = aT_i. \quad (5.44)$$

Célunk az időegység alatt számlált részecskék  $a$  számának becslése. (5.15) mintájára annak a valószínűsége, hogy az  $i$ -edik mérésben  $\xi_i$ -t mérünk:

<sup>41</sup> Forráserősség: 1 s alatt történő bomlások száma.

$$P_{\xi_i} = e^{-aT_i} \frac{(aT_i)^{\xi_i}}{\xi_i!},$$

vagyis a mért adatok együttes valószínűsége:

$$L(\vec{\xi}; a) = \prod_{i=1}^n e^{-aT_i} \frac{(aT_i)^{\xi_i}}{\xi_i!}. \quad (5.45)$$

$a$ -t a maximum likelihood elv alapján becsüljük:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\vec{\xi}; a)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{i=1}^n (-aT_i + \xi_i \ln(aT_i) - \ln \xi_i!) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i}{a} - T_i \right) = 0, \end{aligned}$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sum_{i=1}^n T_i}. \quad (5.46)$$

Azt kaptuk tehát, hogy hiába mértük  $n$  részletben a beütésszámokat,  $a$ -t úgy a legjobb becsülni, hogy a teljes beütésszámot osztjuk a teljes mérési idővel. Szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{\left( \sum_{i=1}^n T_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n aT_i}{\left( \sum_{i=1}^n T_i \right)^2} = \frac{a}{\sum_{i=1}^n T_i}. \quad (5.47)$$

### \*Korrelált mérések

Befejezésül megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár, ha a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért adatok statisztikailag *nem* függetlenek egymástól. Továbbra is feltételezzük, hogy várható értékük (5.1) szerint állandó. Ezt a következőképpen írhatjuk át vektoros alakba:

$$M(\vec{\xi}) = a\mathbf{e}, \quad (5.48)$$

ahol az  $\mathbf{e}$  vektor minden eleme 1-gyel egyenlő, a  $\vec{\xi}$  vektor komponenseit pedig a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért adatok alkotják. Az eddigiektől eltérően megengedjük, hogy a mért adatok kovarianciája ne tűnjön el. A kovarianciamátrix definíciója

$$\mathbf{B} = M \left[ \left( \vec{\xi} - a\mathbf{e} \right) \left( \vec{\xi} - a\mathbf{e} \right)^T \right]. \quad (5.49)$$

A  $\vec{\xi}$  vektor sűrűségfüggvénye



$$L(\mathbf{x}; a) = \frac{\exp\left(-\frac{Q(a)}{2}\right)}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{B}}}, \quad (5.40a)$$

ahol

$$Q(a) = (\mathbf{x} - a\mathbf{e})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - a\mathbf{e}). \quad (5.40b)$$

A maximum likelihood elv szerint ennek a minimumát kell  $a$  függvényében megkeresnünk az  $\mathbf{x} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$  helyettesítéssel:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} - a \mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} = 0,$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{w}. \quad (5.41)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az  $a$  paraméter becslt értéke most is a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért adatok (5.25a) alakú lineáris kombinációja, de a súlyokból alkotott  $\mathbf{w}$  vektor komponenseit most nem az (5.27) képletek adják meg, hanem

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}. \quad (5.42)$$

Nyilvánvaló, hogy ezek a súlyok 1-re vannak normálva:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = 1.$$

Érdeemes megnézni, a  $\mathbf{w}$  súlyok most is minimalizálják-e a becslés szórásnégyzetét, amelyet (5.26) helyett most a következő alakban kell felírunk:

$$D^2(\tilde{a}) = \mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w}.$$

A korábban követett gondolatmenet analógiájára írjuk a súlyvektort a

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} + \bar{\boldsymbol{\Delta}}$$

alakba, ahol

$$\mathbf{e}^T \bar{\boldsymbol{\Delta}} = 0.$$

Ezzel

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} + \frac{\bar{\boldsymbol{\Delta}}^T \mathbf{B} \bar{\boldsymbol{\Delta}}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}},$$

mint ez egyszerűen belátható. Mivel  $\mathbf{B}$  pozitív definit mátrix, ez akkor minimális, amikor  $\bar{\boldsymbol{\Delta}}$  a nullvektor. Melléktermékként azt is beláttuk ezzel, hogy az (5.41) szerinti becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}. \quad (5.43)$$

A legkisebb négyzetek módszere tehát korrelált mérések esetében is jól alkalmazható, csak alkalmas módon kell a súlyfaktorokat megválasztani. Ebben az esetben is érvényes az 5.1. TÉTEL, de ennek bizonyítását későbbre halasztjuk.

### Mért mennyiségek egyenlősége

A konfidenciaintervallumok nem csak elméleti jóslatok kísérleti ellenőrzésére használhatók, hanem egyéb célokra is. Ilyen például két mért mennyiség egyenlőségének a vizsgálata. Mért mennyiségek számértéke természetesen soha nem fog egymással megegyezni, csak annak a vizsgálatáról lehet szó, hogy *várható értékük* megegyezik-e.

Nézzük példaképpen az 5.1. táblázatban szereplő adatokat, és kérdezzük: van-e különbség  $a_3$  és  $a_4$  között? Ennek eldöntésére becsült értékük különbsége adhat választ. Tegyük fel tehát, hogy  $a_3 = a_4$ , vagyis

$$M(\tilde{a}_3) = M(\tilde{a}_4). \quad (5.44)$$

Mivel a két becslés egymástól független, különbségük szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4) = D^2(\tilde{a}_3) + D^2(\tilde{a}_4) = \frac{\sigma^2}{n_3} + \frac{\sigma^2}{n_4}.$$

$\sigma^2$  becslésére az (5.22) képletet használjuk. A korábban mondottak szerint  $s^2$  független a két becsléstől, tehát

$$t = \frac{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{n_3} + \frac{\sigma^2}{n_4} \right)}} = \frac{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4}{\sqrt{\frac{s^2}{n_3} + \frac{s^2}{n_4}}} = \frac{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4}{s \sqrt{\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}}} \quad (5.45)$$

$(n - m)$  szabadsági fokú Student-tört. Értéke

$$t = \frac{12312,5 - 14132,4}{1017 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{9}}} = -3,395.$$

A 30 szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise  $\varepsilon = 0,05$  mellett 2,042 (2. függelék), ami kisebb, mint a fenti  $t$  abszolút értéke. Eszerint 95% konfidenciaszinten elvetjük az (5.44) szerinti hipotézist. Ezt a következtetést úgy szoktuk megfogalmazni, hogy  $a_3$  és  $a_4$  mért értéke között *szignifikáns különbség* van.

Megjegyezzük, hogy az 5.1. táblázatban szereplő  $s_k$  empirikus szórások két okból sem igazán alkalmasak a fenti kérdés eldöntésére. Egyrészt túlságosan alacsony a szabadsági fokok száma, és így a kvantilisek sokkal nagyobbak. Másrészt nem sikerülne olyan világosan kezelhető statisztikát felírni, mint az (5.45) alatti  $t$ . Ugyanis két független Student-tört különbségével kellene dolgoznunk, amire vonatkozóan nincsenek alkalmas statisztikai táblázatok.

A helyzet egyszerűbb, amikor a szabadsági fokok száma elegendően nagy ahhoz, hogy az (5.45) alakú statisztikákhoz használt  $\gamma$  kvantilist a Gauss-eloszlás táblázataiból vehessük. Ilyenkor is ügyelnünk kell azonban arra, hogy az összehasonlított mennyiségek korreláltak is lehetnek. Tekintsünk egy ilyen példát is! Legyen a két mennyiség  $\xi_1$  és  $\xi_2$ , szórásuk rendre  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$ . Azt a hipotézist vizsgáljuk, hogy várható értékük azonos. Az eddigiekkel ellentétben azonban most nem tesszük fel, hogy

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

kovarianciájuk eltűnik. Ezzel

$$D^2(\xi_1 - \xi_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho.$$

A két mért mennyiség várható értékét akkor tekintjük a választott konfidenciaszinten egyenlőnek, ha

$$|\zeta| = \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}} < \gamma_G,$$

ahol  $\gamma_G$  a Gauss-eloszlás kvantilise.

A  $\rho$  korrelációs együttható hatása nagyon jelentős lehet. Vannak esetek,<sup>42</sup> amikor  $\rho \approx 1$ . Ekkor a  $\zeta$  statisztikára a

$$|\zeta| \approx \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{|\sigma_1 - \sigma_2|}$$

közelítő egyenlőség adódik, ami azt jelenti, hogy erősen korrelált mennyiségek esetében már nagyon kis különbségek is szignifikánsak lehetnek, amikor  $\sigma_1 \approx \sigma_2$ .

Ilyesmi akkor fordul elő, amikor ugyanabból az illesztésből származó becsült paramétereket hasonlítunk össze (lásd 7. fejezet). Tekintsük a következő példát:

$$\tilde{a}_1 = 10872 \pm 429, \quad \tilde{a}_2 = 9925 \pm 372, \quad \rho = 0,832.$$

Az egyszerűség kedvéért Gauss-eloszlásúnak tekintjük ezeket a mennyiségeket, és az összehasonlítást 95% konfidenciaszinten végezzük el. Ebben az esetben a 2. függelék szerint az  $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozó kvantilisz  $\gamma_G = 1,96$ . Ha a mennyiségeket függetlennek tekintjük, akkor a

$$\zeta = \frac{10872 - 9925}{\sqrt{429^2 + 372^2}} = 1,668$$

hányadost kell a kvantilissel összevetni, vagyis a próba azt mutatja, hogy  $\tilde{a}_1$  és  $\tilde{a}_2$  között nincs szignifikáns különbség. Más következtetésre jutunk azonban, ha figyelembe vesszük e két mennyiség közötti erős korrelációt:

$$\zeta = \frac{10872 - 9925}{\sqrt{429^2 + 372^2 - 2 \cdot 429 \cdot 372 \cdot 0,832}} = 3,971,$$

ami lényegesen nagyobb a kvantilisnél, tehát  $\tilde{a}_1$  és  $\tilde{a}_2$  között valójában *van* szignifikáns különbség.

### 5.3. Korrekciók

Az 1.3. alfejezetben már volt szó a *korrekciókról*. Mindig fellépnek, amikor a mérési eredményeket befolyásoló paraméterek egyikének-másikának az értéke eltér a névleges értéktől. Az alábbiakban a korrekciók figyelembevételének a módjáról lesz szó. Az 1. függelék szerint egy korrekció mindig additív, vagyis a szisztematikus hiba

<sup>42</sup> Ilyenek lehetnek például az együttesen illesztett paraméterek. Ezekre a későbbi fejezetekben látunk majd példát.

(lásd alább) megszüntetése érdekében valamit hozzáadunk a közvetlenül mért értékhez. Vannak esetek, amikor a szisztematikus hibát egy *korrekciós tényező* segítségével szüntetjük meg. Az alábbiakban csak a korrekciókkal foglalkozunk, de a mondtak kis változtatással átvihetők a korrekciós tényezőkre is.

### Korrekció

Legyen a  $\xi_i$  mérések ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) várható értéke

$$M(\xi_i) = a + c\mu_0. \quad (5.46)$$

Az eddigiekhez képest újdonság, hogy nem úgy sikerült a keresett  $a$  mennyiséget megmérni, ahogy szeretnénk volna, hanem volt egy paraméter (például a laboratórium hőmérséklete), amely a névleges értéktől ( $20^\circ\text{C}$ ) eltért. Az eltérés valódi értéke legyen  $\mu_0$ , amelyre vonatkozóan valamilyen  $\mu$  független mérési adatunk van  $\sigma_\mu$  szórással. A  $c$  tényező  $a$ -nak a  $\mu$  paraméterre való

$$c = \frac{\partial a}{\partial \mu},$$

érzékenysége, amit ismertnek tételezünk fel.<sup>43</sup> Így tehát van két ismeretlen paraméterünk ( $a$  és  $\mu_0$ ), továbbá  $(n + 1)$  mérési adatunk ( $\mu$  és  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ ). Meghatározásukra a maximum likelihood elvet alkalmazzuk. Együttes sűrűségfüggvényük

$$L(\mathbf{x}, \mu, a, \mu_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a - c\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.47)$$

ahol  $\sigma^2$  a  $\xi_i$  mérések közös szórásnégyzete. Ennek kell a maximumát megkeresnünk  $a$  és  $\mu_0$  függvényében az  $\mathbf{x} = \bar{\xi}$  helyettesítéssel:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (\xi_i - a - c\mu_0) = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_0} = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu^2} + \sum_{i=1}^n \frac{c}{\sigma^2} (\xi_i - a - c\mu_0) = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása egyszerűen adódik:

$$\tilde{\mu}_0 = \mu \quad \text{és} \quad \tilde{a} = \bar{\xi} - c\mu. \quad (5.48)$$

Ez a becslés torzítatlan, hiszen

$$M(\tilde{a}) = M(\bar{\xi}) - c M(\mu) = a + c\mu_0 - c\mu_0 = a.$$

A korrigált becslés szórásnégyzetét a következő képlettel becsülhetjük:

<sup>43</sup> Általában elméleti úton kell meghatároznunk.

$$D^2(\tilde{a}) = D^2(\bar{\xi}) + c^2 \sigma_\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + c^2 \sigma_\mu^2 \cong \frac{s^2}{n} + c^2 \sigma_\mu^2, \quad (5.49)$$

ahol  $s^2$  a  $\xi_i$  mérések empirikus szórásnégyzete [vö. (5.7)], vagyis  $\sigma^2$  becslése. Azt kaptuk tehát, hogy az eredetileg mért mennyiségek szórásnégyzetét meg kell növelni a korrekció szórásnégyzetével. Ha nem is mindig ilyen egyszerűen vezethető le, de a korrekciók hatása mindig így vehető figyelembe.

Ha a fentiek szerint járunk el, könnyen elkerülhetjük a tévedéseket. Egyszerű példával illusztráljuk, milyen tévedések fenyegetnek azonban, ha nem a maximum likelihood elvet alkalmazzuk. Csináljuk tehát a dolgot másképpen, és korrigáljuk az egyes mérési eredményeket külön-külön:

$$\xi'_i = \xi_i - c\mu, \quad (5.50)$$

majd vegyük ezek átlagát:

$$\bar{\xi}' = \frac{\sum_{i=1}^n \xi'_i}{n} = \bar{\xi} - c\mu.$$

Ugyanezt kaptuk a maximum likelihood módszerrel, tehát a dolog rendben levőnek tűnik. Szórásnégyzetének becslése érdekében kiszámítjuk a korrigált értékek empirikus szórásnégyzetét [vö. (5.7)]:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\xi'_i - \bar{\xi}')^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n [(\xi_i - c\mu) - (\bar{\xi} - c\mu)]^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1} = s^2,$$

amiből a korrigált értékek átlagának a szórásnégyzetére az  $s^2/n$  becslés adódik. A fentiekből tudjuk, hogy ez nem az  $a$  paraméter becsült értékének a szórásnégyzete, hanem annál  $c^2 \sigma_\mu^2$ -tel kisebb. Hol van tehát a hiba?

A válasz nem triviális, mert a baj ott van, hogy “vakon” alkalmaztuk a képleteket, és nem vettük figyelembe alkalmazhatósági feltételeiket. Esetünkben arról van szó, hogy az (5.7) szerinti  $s^2$  a  $\sigma^2$  szórásnégyzetnek csak akkor torzítatlan becslése, amikor a képletben szereplő mennyiségek egymástól függetlenek. A korrigált mérések azonban nem ilyenek, hiszen mindegyikben a  $\mu$  valószínűségi változónak ugyanaz az értéke szerepel. A jelen szakasz végén megmutatjuk, hogy tényleg erről van szó.

Előbb néhány szót szólunk a konfidenciaintervallumról, amelynek megszerkesztése esetünkben nem egyszerű. Ha a szabadsági fokok  $(n-1)$  száma elég nagy, fel lehet tételezni, hogy  $a$ -nak (5.48) szerinti becslése Gauss-eloszlású. Ekkor a konfidenciaintervallum megszerkesztése nem jelent problémát. Ellenkező esetben azonban problémák merülnek fel. Megvilágításukra vezessük be az alábbi jelölést:

$$S_{n-1}(y) = P\{t < y\},$$

ami az  $(n-1)$  szabadsági fokú Student-eloszlás eloszlásfüggvénye. Ezzel a  $\gamma$  kvantilist a

$$P\{|t| < \gamma\} = S_{n-1}(\gamma) - S_{n-1}(-\gamma) = 1 - \varepsilon$$

egyenletből számítjuk ki. Ha  $\mu = \mu_0$ , érvényes a következő összefüggés:

$$P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a - c\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| < \gamma\right\} = S_{n-1}(\gamma) - S_{n-1}(-\gamma)$$

hiszen  $M(\bar{\xi}) = a + c\mu_0$ . Tekintve, hogy  $\mu_0$ -at kénytelenek vagyunk  $\mu$ -vel becsülni, ez nem alkalmas konfidenciaintervallum konstruálására. Ha  $\mu$ -t rögzítjük, felírhatjuk az alábbi feltételes valószínűséget:

$$\begin{aligned} & P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a - c\mu}{s/\sqrt{n}}\right| < \gamma \mid \mu \text{ adott}\right\} = \\ & = S_{n-1}\left(\gamma - \frac{c(\mu - \mu_0)}{s/\sqrt{n}}\right) - S_{n-1}\left(-\gamma - \frac{c(\mu - \mu_0)}{s/\sqrt{n}}\right) = g(\gamma, \mu), \end{aligned}$$

ahol a további képletek egyszerűsítése érdekében bevezettük a  $g(\gamma, \mu)$  jelölést. Ahhoz, hogy a  $\gamma$  kvantilis helyes értékét kiszámítsuk, ennek  $\mu$  sűrűségfüggvényére vett átlagát kell  $(1 - \varepsilon)$ -nal egyenlővé tenni, és az eredményül kapott egyenletet  $\gamma$ -ra megoldani:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \cdot g(\gamma, \mu) d\mu = 1 - \varepsilon.$$

Ritkán szokták ezt az egyenletet konkrét esetekben felírni és megoldani, pedig a korrekt adatkezeléshez hozzátartozna. A dolog oka a felmerülő matematikai nehézségekben keresendő.

A gyakorlatban a korrekciók kicsik a mért mennyiségekhez képest, így szórásnégyzetük is kicsi a mért mennyiségekéhez képest. Ezért a gyakorlati esetek többségében megelégszünk azzal, hogy hatásukat (vagyis  $c^2\sigma_\mu^2$  értékét) beolvasszjuk a becsült szórásokba, és ezután úgy tekintjük, mintha a korrekció szórása 0 lenne, amivel a képletek egyszerűsödnek.

Befejezésül megmutatjuk, hogyan kellene a korrigált mérési adatokat matematikailag korrektül kezelni.<sup>44</sup> Az eredeti  $\xi_i$  mérések ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) egymástól függetlenek, és szórásuk azonos, tehát kovarianciamátrixuk  $\sigma^2\mathbf{E}$ . Az (5.50) szerinti korrekció mindegyik mérésnél azonos, tehát kovarianciamátrixa olyan  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden eleme a korrekció szórásnégyzete. Ennek megfelelően a korrigált mérések kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{E} + c^2\sigma_\mu^2\mathbf{e}\mathbf{e}^T. \quad (5.51)$$

Az (5.42) képlet alkalmazásához ki kell számítanunk a  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}$  szorzatot. Szerencsénk van, mert

$$\mathbf{B}\mathbf{e} = (\sigma^2 + nc^2\sigma_\mu^2)\mathbf{e},$$

amiből

<sup>44</sup> Ezt csak azoknak javasoljuk elolvasni, akik az 5.2. alfejezet korrelált mérésekről szóló szakaszát áttanulmányozták.

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}}{\sigma^2 + nc^2\sigma_\mu^2}.$$

Így az (5.42) szerinti súlyvektor

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{e}}{n}.$$

Az  $a$  paraméternek a maximum likelihood elv alapján való becslése:

$$\tilde{a} = \bar{\xi}'^T \mathbf{w} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i'}{n} = \bar{\xi}',$$

amint ezt fent heurisztikusan is felírtuk. Az (5.43) képlet viszont a korrekt szórásnégyzetet adja:

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = \frac{\sigma^2 + nc^2\sigma_\mu^2}{n} \cong \frac{s^2}{n} + c^2\sigma_\mu^2.$$

Ezt a levezetést “elrettentésül” hoztuk. Szó sincs arról, hogy bárkit ilyen számításon buzdítanánk. Mindössze azt kívántuk bemutatni, mennyivel egyszerűbben kapjuk meg a helyes eredményt, ha minden esetben a maximum likelihood elvből indulunk ki.

### Nem kézben tartott paraméterek hatása

Tételezzük fel, hogy a mérést befolyásolja a  $\delta$  mennyiség, de az egyes mérésekben felvett értékét nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy  $\delta$  várható értéke 0, szórása  $\sigma_\delta$ . Ha az  $i$ -edik mérésben felvett értéke  $\delta_i$  volt, akkor

$$M(\xi_i | \delta_i) = a + c\delta_i,$$

ahol  $c$  a mért mennyiségek érzékenysége a  $\delta$  paraméterre:  $c = \partial a / \partial \delta$ . Ennek alapján  $\xi_i$  feltételes sűrűségfüggvénye

$$L(x_i | \delta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a - c\delta_i)^2}{2\sigma^2}\right),$$

amiből kapjuk  $\xi_i$  perem-sűrűségfüggvényét:

$$L(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x_i | \delta_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\left(-\frac{\delta_i^2}{2\sigma_\delta^2}\right) d\delta_i.$$

Ezt kiintegrálva az

$$L(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma'^2}\right)$$

sűrűségfüggvény adódik, ahol

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + c^2\sigma_\delta^2.$$

Végeredményben tehát mindegyik mérés szórásnégyzetét meg kell növelni az ismeretlen értékű hatáshoz tartozó  $c^2\sigma_\delta^2$  értékkel. Ezután az ilyen hatások nem különböztethetők meg az eredendően fennálló statisztikus hibáktól.

Az elmondottak azt jelentik, hogy ha az egyes  $\xi_i$  mennyiségek mérését úgy ismétljük meg  $n$ -szer, hogy közben a  $\delta$  paramétert nem ellenőrizzük, a megfigyelt szórás  $\sigma$  helyett  $\sigma'$  lesz. Ez lényeges eltérés a fentiekben vizsgált korrekciók hatása és a  $\delta$  paraméter hatása között. Jóllehet *formálisan* mindkettő tekinthető úgy, mint az eredeti  $\sigma$  szórás meg növelő hatása, statisztikai kezelésük elvileg eltérő: az előbbi esetben előfordulhat, hogy az empirikusan becsült szórás nem tükrözi az alkalmazott korrekció bizonytalanságát, viszont az utóbbi esetében elég az empirikus szórásból kiindulni.

Két esetet érdemes egymástól megkülönböztetni. Az egyik esetben a mérést  $\delta$  azonos, de ismeretlen értékénél végeztük el, és tudjuk, hogy ennek hatása van a mérési eredményre. Ebben az esetben a fenti módon meg kell növelni a szórásnégyzetet. Ha azonban a mérést úgy ismételtük meg  $n$ -szer, hogy közben  $\delta$  változhatott, akkor az (5.7) szerint becsült empirikus szórás ennek hatását tükrözni fogja, tehát nem szükséges a szórásnégyzetet a mondott módon való meg növelni. Erre példa: tegyük fel, hogy a mérést naponta ismételtük, és nem ügyeltünk arra, hogy a hőmérséklet állandó legyen, sőt meg sem mértük<sup>45</sup>. Ilyenkor a hőmérséklet napi változásainak, vagyis  $\delta_i$ -nek a hatása tükröződni fog  $s^2$ -ben. Ha ugyanis  $\delta_i \equiv 0$  lenne, akkor

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}$$

lenne, ami  $\sigma^2$  torzítatlan becslése. Amikor  $\delta_i \neq 0$ , ez a  $\xi'_i = \xi_i - c\delta_i$  változókra érvényes, amelyekről feltehetjük, hogy korrelálatlanok a  $\delta_i$ -kel, vagyis a

$$\sum_{i=1}^n (\xi'_i - \bar{\xi}')(\delta_i - \bar{\delta})$$

összeg közel van 0-hoz. Így a most adódó empirikus szórásnégyzet jó közelítéssel így írható:

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi'_i + c\delta_i - \bar{\xi}' - c\bar{\delta})^2}{n-1} \approx \frac{\sum_{i=1}^n (\xi'_i - \bar{\xi}')^2}{n-1} + c^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta})^2}{n-1},$$

ami  $\sigma'^2 = \sigma^2 + c^2\sigma_\delta^2$  torzítatlan becslése, vagyis  $\delta_i$  hatása tényleg tükröződik  $s^2$ -ben.

$\sigma_\delta$  becslésére többnyire egyszerű megfontolásokat alkalmazunk. Tegyük fel például, hogy  $\delta$  a laboratórium hőmérsékletének a 20 °C névleges hőmérséklettel való eltérése. Erre (és hasonló paraméterekre) vonatkozóan gyakran legfeljebb ilyen kijelentéseket tudunk tenni: “ $\delta$  abszolút értéke nem haladhatta meg a 3 °C-t”. Ilyenkor aligha tudunk okosabbat mondani, mint azt, hogy  $\delta$  a (–3 °C, +3 °C) intervallumban minden értéket egyenlő valószínűséggel vett fel. A  $\Theta$  terjedelmű egyenletes eloszlás szórásnégyzete  $\Theta^2/12$ . Esetünkben  $\Theta = 6$  °C, tehát  $\sigma_\delta^2 = 6^2/12 = 3$  (°C)<sup>2</sup>, vagyis

<sup>45</sup> Ha ugyanis megmértük volna, akkor a hatását korrekcióként tudnánk figyelembe venni.



$$\sigma_{\delta} = \sqrt{3} \text{ }^{\circ}\text{C} \approx 1,7 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

## Mérési hiba és bizonytalanság

A fentiek alapján tudjuk a mérések kiértékelésének két alapvető fogalmát megvilágítani: *mérési hiba* és *bizonytalanság*. Tulajdonképpen mindkettőt lehetne valószínűség-elméleti oldalról is megközelíteni, de az alábbiakban a kísérletezők szempontjából indulunk ki. A mérések módszereivel és kiértékelésével foglalkozó tudományt *metrológiának* nevezzük, amelynek a szóhasználat némi eltér a valószínűség-elmélet terminológiájától. Mindkettőnek megvan a létjogosultsága: az utóbbi az elméleti megfontolások, az előbbi pedig a gyakorlati munka területén használandó. Az 1. függelékben összefoglaljuk a leggyakoribb metrológiai kifejezéseket és jelöléseket, valamint megadjuk néhányuk valószínűség-elméleti megfelelőit. A jelen részben csak kettővel foglalkozunk.

### Mérési hiba

A mérési hiba fogalmát sok szerző a nem választja szét a bizonytalanság különböző mérőszámaitól. A metrológia szerint a  $\zeta$  *mérési hiba a mért mennyiségnek a valódi értékétől való eltérése*:

$$\xi = M(\xi) + \zeta.$$

Metrológiai szóhasználat szerint nem *várható* értékről, hanem *valódi* értékről beszélünk. Mivel ezt nem ismerjük, a mérési hibát sem ismerhetjük. Ezért a gyakran hallható „hibaszámítás” – szigorúan vett metrológiai értelemben – szerencsétlen kifejezés, amelyet jobb kerülni. Ha ugyanis ki tudnánk számítani a hibát, ezt levonnánk a mért értékből, és így megkapnánk a valódi értéket. A hibaszámítás valójában a bizonytalanság becslését jelenti. Ennek ellenére a „hibaszámítás” bevett kifejezésnek számít.

A mérési hibának két fajtája van: véletlen és rendszeres (szisztematikus) hiba:

- A *véletlen hiba* valószínűségi változó, amelynek a várható értéke zérus. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a mérés többször való ismétlésekor váltakozva vesz fel pozitív és negatív értékeket, és az ismétlések számának növelésekor az átlaga nullához tart.<sup>46</sup> Ezt gyakran úgy mondjuk, hogy a „véletlen hiba *kiátlagolódik*”. A véletlen hibának két alfaja van aszerint, hogy mi az eredete. Erről később lesz szó.
- A *rendszeres* vagy *szisztematikus hiba* lehet konstans érték vagy olyan valószínűségi változó, amelynek a várható értéke nem zérus. Ha valószínűségi változó, szintén vehet fel pozitív és negatív értékeket, de ezek átlaga nem tart zérushoz, vagy – ahogy mondani szoktuk – „nem átlagolódnak ki”. Ha mérésünkben ilyen fajta hiba fellép, arra vonatkozóan *minden esetben* kell korrekciót alkalmazni – akármilyen kicsi (és bizonytalan) ez a korrekció. Ennek módjáról a fentiekben volt már szó, és lesz még szó a 7.6. alfejezetben. Ha van szisztematikus hiba, az  $a$  paraméterre az (5.3) vagy (5.25) szerint adott becslés *torzított* lesz, és a torzítás értéke megegyezik a szisztematikus hiba várható értékével. A korrekció célja éppen a torzítás megszüntetése.

Vannak megfigyelések és kísérletek, amelyek lényegéhez tartozik, hogy eredményük valószínűségi változó. Ilyen a szerencsejáték, bizonyos nukleáris jelenségek megfigyelése, a Földet érő meteorok száma, tömege és iránya, földrengések előfordu-

<sup>46</sup> Ezt valószínűségi értelemben kell venni: annak a *valószínűsége* tart 0-hoz, hogy az átlag abszolút értéke egy rögzített, ámde tetszőlegesen kicsiny  $\varepsilon$  számnál nagyobb legyen.

lása stb. Nem lehet például megmondani, hogy egy adott földrajzi helyen mikor lesz földrengés (vagy egyáltalán lesz-e), legfeljebb annak a valószínűségét határozhatjuk meg, hogy valahol egy adott időszakon belül lesz földrengés. A tektonikai jelenségek lényegéhez tartozik, hogy a valószínűségen túlmenően többet nem tudunk mondani.<sup>47</sup> Azt, hogy egy radioaktív atom mikor bomlik el, szintén nem tudjuk előre megmondani, de tudjuk, hogy  $e^{-\lambda t}$  annak a valószínűsége, hogy  $t$  idő alatt ne bomoljon el. A bomlásig eltelt idő várható értéke  $1/\lambda$ , így  $t$  mérésekor  $(t - 1/\lambda)$  a mérési hiba. Vannak szerzők, akik a véletlen hibának ezt a fajtáját *statisztikus hibának* nevezik. Az elnevezésen kívül<sup>48</sup> a dolog logikus, mert – eredetét tekintve – elvileg különbözik a következő fajta véletlen hibától.

Egy mért mennyiség más okból is lehet valószínűségi változó: lehetnek olyan nem kézben tartott paraméterek, amelyek értéke maga is valószínűségi változó, viszont befolyásolja a mérés eredményét. Az előbb említett szerzők az ilyen eredetű hibákra korlátozzák a véletlen hiba fogalmát. Nem kívánunk mély filozófiai elemzésekbe bocsátkozni, mert ez messze vezetne jegyzetünk témájától. Az 1930-as években a fizikában lezajlott egy vita, a fenti értelemben vett statisztikus hiba visszavezethető-e rejtett paraméterek hatására, vagy valóban a jelenség lényegéhez tartozik-e a véletlenszerűség. Például Albert Einstein élete végéig sem tudta az utóbbi álláspontot elfogadni. Számunkra csak az fontos, hogy a két fajta véletlen hiba matematikai kezelése formálisan azonos. Ezért nem fogjuk erőltetni a két fajta hiba közötti különbségtevést. Az 1. függelékben olvasható definíciók szerint a metrológia sem különbözteti meg ezeket egymástól. Ugyanakkor azonban hangsúlyozzuk: az egyes hibák hatása nagyon különböző lehet, amint azt az előző szakasz végén a labor hőmérsékletével kapcsolatban megbeszéltük.

### Mérési bizonytalanság

A mérési hibát elvileg nem ismerjük, de léteznek mérőszámok, amelyek mutatják annak valószínű nagyságát. Gyűjtőnevük: *mérési bizonytalanság*. A legfontosabb ilyen mérőszám a *szórás*. Ismert tételek (például a Csebisev-egyenlőtlenség) segítségével felső becslést kaphatunk a véletlen hiba nagyságára. A szóráson alapul az intervallumbecslés, vagyis a konfidenciaintervallum megszerkesztése. Mivel az intervallum hossza mindenképpen mértéke az  $a$  paraméter keresett értékére vonatkozó tudásunknak (vagy inkább: tudatlanságunknak), az intervallum félhosszát szintén szoktuk mérési bizonytalanságnak nevezni. Mikor azonban ezt használjuk, pontosan meg kell mondanunk a konfidenciaszintet és a szabadsági fokok számát.

A bizonytalanság becslésére a metrológia két módszert különböztet meg: *A-típusú* és *B-típusú* becslés. Az előbbi az (5.7) képlettel (vagy rokon képletekkel) becsült *empirikus szórás*. Ha ezt alkalmazzuk, akkor a szórás becsült értékét  $s$ -sel jelöljük. Elméleti megfontolásokban általában a  $\sigma$  jelölést használjuk a szórásra, de ennek A-típusú becslésére a szabványos jelölés  $s$ . Az angol irodalom a szórást “standard deviation”-nek nevezi.<sup>49</sup> Ha ebből (5.5) szerint kiszámítjuk az átlag  $s/\sqrt{n}$  szórását, akkor ennek angol neve: “standard error”. Feltehetően ebből ered a magyarban is elő-előforduló

<sup>47</sup> Természetesen csak a földtudományok mai fejlettségi szintjén.

<sup>48</sup> A legtöbb nyelven írt valószínűség-elméletben a “véletlen” és a “statisztikus” szavak egymás szinonimái, vagy csak az egyiket használják. Ha már megkülönböztetjük a két fajta hibát, az elnevezés éppen fordítva lenne logikus: a jelenségek valódi véletlenszerűségéből eredő hibát kellene inkább véletlen hibának nevezni.

<sup>49</sup> Vannak, akik a magyarban is “standard deviáció”-ról beszélnek.

“standard hiba”. Mind ez, mind az idézett angol kifejezés elavult és kerülendő, sőt a metrológiai szabványok egyenesen tiltják az utóbbi használatát.

A bizonytalanság B-típusú becslésére az előző szakaszban láttunk példát: a szórás nem empirikusan, hanem valamilyen fizikai vagy mérés technikai megfontolásból vezetjük le. Az így kapott bizonytalanság szabványos jele az angol “uncertainty” (= bizonytalanság) kifejezésből:  $u$ . Ha a végeredmény bizonytalanságát A- és B-típusú becslések kombinációjával kaptuk, a szabványos jelölés:  $u_c$ .<sup>50</sup>

Bármilyen szisztematikus hibáról van tudomásunk, azt feltétlenül korrekcióba kell vennünk. Ezzel kapcsolatban egy rendkívül súlyos tévedésre kell a figyelmet felhívni. *A szisztematikus hibát nem szabad a véletlen hibával összevonni!* Tekintsünk egy egyszerű példát: megmértük egy rúd hosszát:  $l = 2534,5 \pm 2,4$  mm, amelyhez a mérőeszköz hibás kalibrálása miatt korrekciót kell alkalmaznunk, amelyet csak elég nagy bizonytalansággal tudtuk meghatározni:  $\Delta l = 0,6 \pm 1,3$  mm. A korrigált mérési eredmény nyilván

$$l_{\text{kor}} = l + \Delta l = 2534,5 + 0,6 = 2535,1 \text{ mm.}$$

Ennek a szórását a szórásnégyzetek összeadási szabálya [vö. (3.31)] alapján kapjuk:

$$D^2(l_{\text{kor}}) = 2,4^2 + 1,3^2 = 7,45 \text{ mm}^2 = 2,7^2 \text{ mm}^2.$$

A korrigált hosszúság tehát  $l_{\text{kor}} = 2535,1 \pm 2,7$  mm. Ez lenne a helyes eljárás. Sajnos, két típushibával is lehet találkozni. Mindkettőben közös, hogy nem törődnek a korrekció szórásával, viszont a korrekciót összekeverik a mért mennyiség szórásával:

- 1) A mért mennyiség szórásához hozzáadják a szisztematikus hibát, vagyis a korrigált eredményt az  $l = 2534,5 \pm 3,0$  mm alakban publikálják. Ebben az eljárásban több hiba van, mint amennyi szó szükséges a leírásához. Csak egyet említünk: a szórás a mért adat bizonytalanságát jellemzi, a korrekció pedig a torzítását. A kettőnek egymáshoz semmi köze.
- 2) A mért mennyiség szórását és a szisztematikus hibát úgy vonják össze, mintha mindkettő szórás lenne. Először tehát kiszámítják a

$$2,4^2 + 0,6^2 = 6,12 \text{ mm}^2 = 2,47^2 \text{ mm}^2 \approx 2,5^2 \text{ mm}^2$$

mennyiséget, majd a korrigált eredményt az  $l = 2534,5 \pm 2,5$  mm alakban publikálják. Ez a dolog már egyenesen komikus, de sajnos előfordul.

Befejezésül megjegyezzük, hogy azt a “szisztematikus hibát”, amelynek a várható értéke zérus, a fentiekben “nem kézben tartott paraméterek” címszó alatt tárgyaltuk. Ezt is figyelembe vesszük azáltal, hogy a “korrigált” érték szórását az ott mutatott módon megnöveljük.

#### 5.4. Kerekítés

A becsült paraméterekre vonatkozó intervallumbecslésben a szórás becslése éppen olyan fontos, mint magáé a paraméteré. Ennek ellenére előfordul, hogy a szórás csak egyetlen értékes számjegyre adják meg, továbbá a becsült értéket a szórás nagyságrendjének megfelelő számjegyre kerekítik – mondván, hogy “a mérési bizonytalanságon belül úgysem érdekesek a számjegyek”. Például,

$$58,72 \pm 9,63 \quad \text{helyett} \quad 60 \pm 10,$$

<sup>50</sup> A “c” index az angol “combined” melléknév rövidítése.

vagy

$58,72 \pm 1,52$  helyett  $59 \pm 2$ .

Amióta számítógépekkel dolgozunk, erre különösebb ok nincs (hiszen a számítógépnek mindegy, hány számjegyre adjuk meg az input adatokat), mégis lehet a dologgal találkozni. Az ilyen jellegű “nagyvonalúságnak” nagyon kellemetlen következményei lehetnek. A „kellemetlen” jelző azért helyénvaló, mert a kerekítési hiba többnyire nem a kísérletezőnél okoz bajt, hanem azoknál, akik a kísérleti eredményeket használják, viszont az okozott baj általában nem tudatosul sem a kísérletezőben, sem az eredmények felhasználóiban. Állításunk igazolására először néhány triviális érvet hozunk fel, majd ezeket statisztikai megfontolásokkal is alátámasztjuk.

### Heurisztikus megfontolások

Tekintsük az alábbi szélsőséges (ámde tanulságos) példát. Két mérés ( $\xi_1 = 1,02$  és  $\xi_2 = 3,14$ ) szórása legyen rendre

$$\sigma_1 = 1,49 \quad \text{és} \quad \sigma_2 = 1,51.$$

Az 5.2. alfejezet végén mutatott módszerrel könnyű belátni, hogy ezek között a mért értékek között nincs szignifikáns különbség. Közös várható értékük becslésére tehát vehetjük súlyozott átlagukat:  $2,06 \pm 1,06$ . Kerekítsük most a szórásokat egyetlen értékesséjegyre:

$$\sigma'_1 = 1 \quad \text{és} \quad \sigma'_2 = 2.$$

Ha ezeket használjuk a súlyozott átlagolásra, akkor az eredetileg majdnem egyenlő súlyok aránya a kerekítés után 1:4. A velük képzett súlyozott átlag:  $1,44 \pm 1,12$ . A két átlag eltérése ugyan nem haladja meg a szórás értékét, de azzal azonos nagyságrendű. Ezt az eltérést teljesen feleslegesen okoztuk egy egyszerű kerekítéssel. Jóllehet a kerekítés hatása nem mindig ilyen mértékű, általában érezhetően eltorzítja a súlyokat és az átlagokat.

Még szembeűnőbb a kerekítés hatása az intervallumbecslésre. Gauss-eloszlás esetében a 95% konfidenciaszinthez tartozó kvantilis  $\gamma_G = 1,96$  ( $\approx 2$ ).  $\sigma_1 = 1,49$  esetében tehát az intervallum szélessége körülbelül 3, viszont a kerekítés után adódó  $\sigma'_1 = 1$ -re körülbelül 2. A konfidenciaintervallum szélességét tehát önkényesen lecsökkentettük. Ha ezt visszszámoljuk az eredeti  $\sigma_1$  szórásra, a kerekítés egyenértékű azzal, hogy a kvantilist a szórások arányában lecsökkentettük a

$$\gamma = 1,96 \cdot 2/3 = 1,33$$

értékre, ami 82% konfidenciaszintnek felel meg (Gauss-eloszlás esetében). A kerekítés tehát jelentősen eltorzítja a statisztikai próbát: szándékunk szerint 95%, de a kerekítés miatt ténylegesen csak 82% konfidenciaszinttel dolgozunk, ami jelentős különbség. Ha tehát durván kerekítjük a szórást, akkor nemcsak a súlyozást változtatjuk meg feleslegesen, hanem a kvantiliseket is.

### Valószínűségi megfontolások

A fentieket érdemes részletesebben is megvizsgálni. Először azt nézzük meg, milyen pontosan célszerű megadni a becsült paramétereket. Később rátérünk a szórás kerekítésére is. Egyelőre azt számítjuk ki, hogy a kerekítés hogyan torzítja a statisztikai próbákat és az intervallumbecsléseket. Legyen  $\xi$  a tekintett paraméternek a várható értékétől való eltérése, szórása pedig  $\sigma$ . A statisztikai próbák esetében a

$$P\{|\xi| < \gamma\sigma\} = 1 - \varepsilon \quad (5.52)$$

egyenlettel definiált  $\gamma$  kvantilissal arányosan szerkesztjük a konfidenciaintervallumot. Ha a paramétert kerekítjük, akkor ezt úgy is felfoghatjuk, hogy  $\xi$ -hez hozzáadunk egy egyenletes eloszlású  $r$  valószínűségi változót. Ekkor tehát a kvantilist a

$$P\{\xi + r < \gamma\sigma\} = 1 - \varepsilon \quad (5.53)$$

egyenletből kell kiszámolni.<sup>51</sup> Vezessük be a

$$\Phi(x) = P\{\xi < x\}$$

jelölést, amivel

$$P\{|\xi| < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x).$$

Hasonlóan, legyen

$$F(\gamma) = P\{\xi + r < \gamma\sigma\},$$

amivel

$$P\{\xi + r < \gamma\sigma\} = F(\gamma) - F(-\gamma).$$

Ha  $r$  egyenletes eloszlásának a terjedelme  $\theta$ , akkor

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= \int_{-\theta/2}^{\theta/2} P\{\xi + r < \gamma\sigma \mid r\} \frac{dr}{\theta} = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \Phi(\gamma\sigma - r) \frac{dr}{\theta} = \\ &= \int_{\gamma\sigma - \theta/2}^{\gamma\sigma + \theta/2} \Phi(r) \frac{dr}{\theta}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

A példa kedvéért tekintsük  $\xi$ -t Gauss-eloszlású változónak. Ekkor

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

ahol

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\{\xi + r < \gamma\sigma\} &= \\ &= \frac{\gamma\sigma + \theta/2}{\theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma\sigma + \theta/2}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{2\sigma}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\gamma\sigma + \theta/2)^2}{2\sigma^2}\right] - \\ &- \frac{\gamma\sigma - \theta/2}{\theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma\sigma - \theta/2}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{2\sigma}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\gamma\sigma - \theta/2)^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Látható, hogy ( $\gamma$ -n kívül) ez csak a  $\theta/\sigma$  hányadostól függ. A kapott formula kétféle módon használható:

<sup>51</sup> A kerekítésnek ezt a modelljét a véletlen folyamatok kvantálásának az elméletéből kölcsönöztük. Végső eredményeink tájékoztató jellegűnek tekintendők, mert ez a modell közelítő.

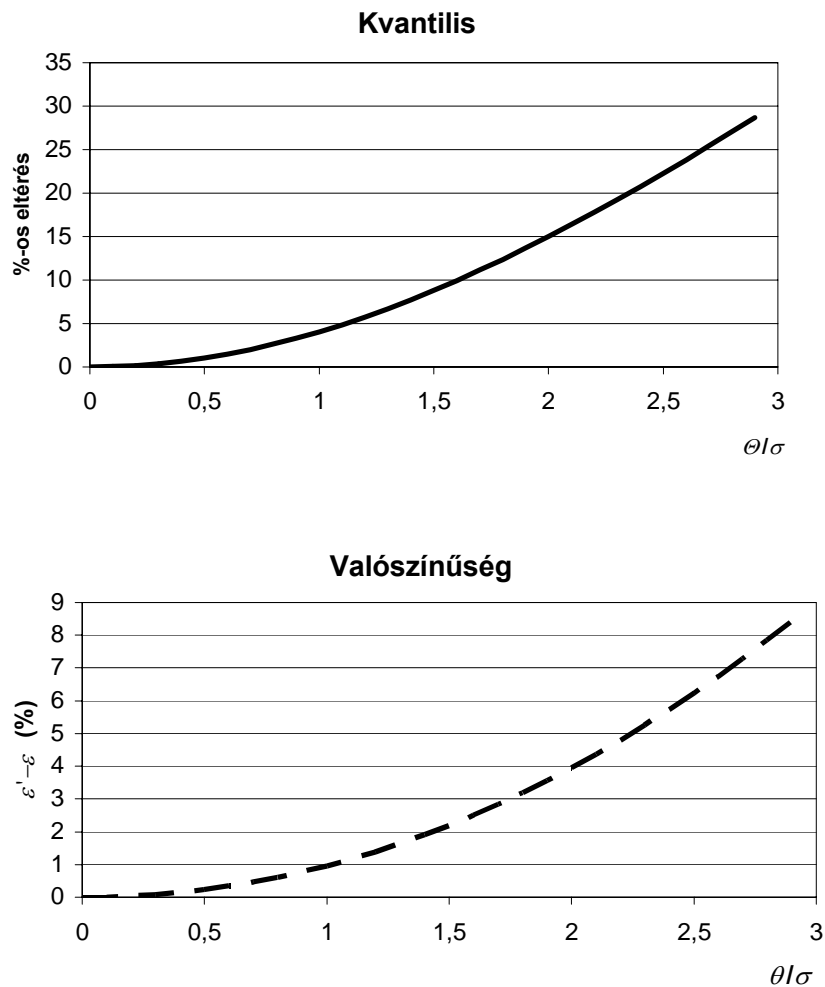
1. A

$$P\{|\xi + r| < \gamma_G \sigma\} = 1 - \varepsilon'$$

képlettel kiszámíthatjuk belőle, hogy a Gauss-eloszláshoz tartozó  $\gamma_G$  kvantilis az adott esetben valójában milyen  $\varepsilon'$  konfidencia-valószínűséghez tartozik.

2. Az (5.53) egyenletnek  $\gamma$ -ra való megoldásával meghatározhatjuk, hogy – tudva a kerekítés tényéről – az adott konfidencia-valószínűséghez mekkora (természetesen megnövelt,  $\gamma > \gamma_G$ ) kvantilist kell használnunk.

Az 5.3. ábrán a  $\theta/\sigma$  hányados függvényében megadjuk mindkét mennyiségnek a kerekítés nélkül érvényes értékétől való eltérését 5% ( $\varepsilon = 0,05$ ) konfidencia-valószínűség mellett. A kerekítés nélküli kvantilis  $\gamma_G = 1,96$ . Látható, hogy  $\theta = \sigma$  esetében a kvantilis eltérése már 4,05%, továbbá a látszólagos konfidencia-valószínűség eltérése 0,96% (azaz  $\varepsilon' = 0,0596 \approx 0,06$ ). Eszerint a kerekítés tényét figyelmen kívül hagyó konfidenciaintervallum nem 95%-hoz, hanem 94%-hoz tartozik. Viszont  $\theta = \sigma/10$ -nél a megfelelő számok 0,04% a kvantilisre és 0,0095%  $\varepsilon$ -ra, vagyis elhanyagolhatók. Levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy *a mért érték kerekítésekor  $\theta$ -nak a szórásnál legalább egy nagyságrenddel kisebbnek kell lennie.*



5.3. ábra.  $\gamma$  és  $\gamma_G$  százalékos eltérése a kerekítés miatt, valamint  $(\varepsilon' - \varepsilon)$  (amikor  $\varepsilon = 0,05$ )

Az első értékes számjegyre való kerekítés  $\theta \approx \sigma$ -nak felel meg, ami a fentiek szerint túlságosan durva. Amikor tehát  $\sigma = 5,63$ , konklúzióink szerint legfeljebb  $\theta \approx 0,6$  fogadható el. Mivel kerekítéskor  $\theta$  csak 10 egész kitevőjű hatványa lehet, ez azt jelenti, hogy a megfelelő választás  $\theta \approx 0,1$ , vagyis egy tizedesre kívánatos kerekíteni:  $58,72 \pm 5,63$ -ban a mért értéket  $58,7$ -re kerekítjük.

Fontos dolog, hogy a "0" számjegyet is megadjuk, ha éppen az lett a kerekítés eredménye. Ha például a kerekítendő szám  $58,99$ , akkor ennek a tizedespont utáni számjegyre való kerekítése  $59,0$  és nem  $59$ . A "0" számjegy elhagyása ugyanis azt sugallná, hogy a kerekítés a tizedesvessző előtti számjegyre történt, ami félreértést okozhat. Az adatok további értelmezése szempontjából tehát  $59$  és  $59,0$  nem ugyanazt jelenti!

A fentiek helyett egy egyszerűbb gondolatmenetet is alkalmazhatunk. Amikor a becsült paramétert kerekítjük, a kerekített érték szórásnégyzete

$$\sigma'^2 = D^2(\xi + r) = \sigma^2 + \frac{\theta^2}{12} = \sigma^2 \left( 1 + \frac{(\theta/\sigma)^2}{12} \right). \quad (5.56)$$

Az eredő szórás ennek négyzetgyöke.  $\theta = \sigma$  esetén  $\sigma' = 1,0408\sigma$ . A konfidenciaintervallum szélességét ennyiszerezésre kell megnövelni. Mivel a szórást – a kerekítést leszámítva – nem változtatjuk meg, ezt a növekedést a kvantilisre kell áthárítanunk, ami  $4,08\%$  növekedés. Az 5.3. ábráról leolvasható pontos érték  $4,05\%$ , tehát ez az egyszerű képlet jó közelítés.

### A szórás kerekítése

Ezután rátérünk a szórás kerekítésére. A fenti példában logikus, hogy a szórást is ugyanúgy kerekítsük, mint a paraméter becsült értékét, vagyis a végeredmény javasolt megadása

$$58,7 \pm 5,6.$$

Valójában a szórás kerekítésére még szigorúbb feltétel vonatkozik. Az (5.53) egyenlet helyett ekkor ugyanis a következőből kell kiindulnunk:

$$P\{|\xi| < \gamma(\sigma + r)\} = 1 - \varepsilon.$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy az (5.54)-ben adott  $F(\gamma)$  helyett most a következő függvényt kell használnunk  $\gamma$  kiszámítására:

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \int_{-\theta/2}^{\theta/2} P\{\xi < \gamma(\sigma + r) \mid r\} \frac{dr}{\theta} = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \Phi(\gamma\sigma + r\gamma) \frac{dr}{\theta} = \\ &= \int_{\gamma\sigma - \gamma\theta/2}^{\gamma\sigma + \gamma\theta/2} \Phi(r') \frac{dr'}{\gamma\theta}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ez ugyanaz, mint (5.54), ha benne  $\theta$  helyére  $\gamma\theta$ -t helyettesítünk. Tehát a becsült paraméterek esetében kapott  $\theta < \sigma/10$  követelmény helyett most a szigorúbb  $\theta < \sigma/(10\gamma)$  követelmény adódik. A korábbi  $\theta \approx 0,6$  kerekítés helyett most  $\theta \approx 0,3$  alkalmazandó. Végeredményben a szórásra is azt kaptuk, hogy az adott példában legfeljebb a tizedespont utáni jegyre szabad kerekíteni.

Amikor  $\sigma$  végigfut egy nagyságrenden, a  $\theta$ -ra vonatkozó felső határ is egy nagyságrendet változik. A példa kedvéért ez a nagyságrend legyen  $10 < \sigma < 100$ . Ekkor a fenti megfontolásokból ( $\gamma \approx 2$  esetén) következik, hogy  $0,5 < \theta_{\max} < 5$ , ami azt jelenti,

hogy  $\sigma$ -t a tizedespont előtti utolsó számjegyre (vagyis az egyes nagyságrendre) cél-szerű kerekíteni. Mivel maga a szórás tizes nagyságrendű, eszerint *meg kell tartani legalább két értékes számjegyet*. Nyilvánvalóan analóg következtetésre jutunk, ha egy másik nagyságrendet tekintünk (például  $1000 < \sigma < 10000$ ).

A kerekítés kényes kérdés, amikor  $\sigma$  közel van 10 valamelyik egész kitevőjű hatványa-hoz. Vegyük példaképpen a  $\sigma \approx 10$  esetet, amikor  $\theta$  felső határa körülbelül 0,5 ( $\gamma \approx 2$  esetén). Ha most szigorúan a fentiekhez tartjuk magunkat, vagyis két jegyre ke-rekítünk, akkor ez gyenge pontosságot eredményez. 99,73% konfidenciaszinten a Ga-uss-kvantilis  $\gamma_G = 3$ .<sup>52</sup> Ezzel már  $\theta_{\max} < 0,33$ -ra jutunk, vagyis inkább 0,1-re kellene kerekíteni. Például a  $\sigma = 10,452$  értéket jobb 10,5-re kerekíteni, mint 10-re. Ezen túl-menően nyomósabb érv a következő. A szórás becslésének statisztikai bizonytalansá-gát figyelembe véve egy másik érték, mondjuk,  $\sigma = 9,752$  ugyanilyen valószínű lenne, mint az előbbi. Ennek két értékes jegyre való kerekítése 9,8, vagyis ennek a számnak az esetében 0,1-re kerekítünk. Ha azt akarjuk, hogy  $\sigma \approx 10$  esetén az utolsó értékes jegy ugyanaz legyen  $\sigma < 10$ -re, mint  $\sigma > 10$ -re, akkor mindkét esetben 0,1-re kell ke-rekítünk. Ha viszont ortodox módon ragaszkodunk a két értékes jegyre való kerekí-téshez, a kerekítés pontossága egy nagyságrendet ugrik, amikor  $\sigma$  átlépi a 10-et. A 10,5 számot legjobb úgy tekinteni, hogy nem három, hanem csak két értékes szám-jegyre van megadva. Ökölszabályként ezért azt javasoljuk, hogy általában két jegyre, de a  $10 < \sigma < 20$  intervallumban inkább három értékes jegyre kerekítsük a szórásokat.

### A becsült paraméter és a szórás együttes kerekítése

Nem vizsgáltuk még az általános esetet, amikor mind a becsült paramétereket, mind a szórásokat kerekítjük. Ekkor a

$$P\{|\xi + r_1| < \gamma(\sigma + r_2)\} = 1 - \varepsilon$$

képletből kell kiindulnunk, ahol  $r_1$  és  $r_2$  statisztikailag független, a  $(-\theta/2, \theta/2)$  interval-lumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók.<sup>53</sup> A matematikai bonyodalmak miatt nem megyünk bele e kerekítési probléma statisztikai elemzésébe. A részletes vizsgálat helyett a fent már alkalmazott és elég pontosnak talált egyszerűbb megfonto-lást fejlesztjük tovább. (5.56)-hoz képest még figyelembe vesszük a szórás kerekíté-sének a hatását is. Mivel konfidenciaintervallum szerkesztésekor a szórást a kvantilis-sel szorozzuk, az eredő szórásnégyzet

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + \frac{\theta^2}{12} + \gamma^2 \frac{\theta^2}{12} = \sigma^2 \left[ 1 + \left( \frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \frac{1 + \gamma^2}{12} \right]. \quad (5.57)$$

$\theta = \sigma$  esetén  $\sigma' = 1,185\sigma$ . Ha tehát egy jegyre kerekítenénk, a kvantilist 18,5%-kal kellene megnövelnünk. Az ilyen kerekítés tehát óriási torzítás! Amikor azonban a fen-ti ajánlás szerint  $\theta = \sigma/10$ , az (5.57) képlet szerint  $\sigma' = 1,0020\sigma$ , vagyis a kvantilist csak 0,2%-kal kellene megnövelnünk, ami elhanyagolható.

Az elmondottak értékeléséhez tekintsük az alábbi példát. A mérés eredménye – sok jegyre kiírva – legyen

$$156,745 \pm 7,072.$$

<sup>52</sup> Ez vezet a „3 $\sigma$  hibahatárhoz”, ahogy gyakran hallható.

<sup>53</sup> Javaslatunk szerint a becsült paraméter és a szórás kerekítése ugyanarra tizedesjegyre történik. Ezért azonos  $r_1$  és  $r_2$  terjedelme ( $\theta$ ). Sok szerző nem ehhez az elvhez tartja magát (lásd alább).



95%-os konfidenciaszinten a megfelelő intervallumbecslés ugyanilyen sok jegyre

$$(142,884; 170,606),$$

illetve kerekítve

$$(142,9; 170,6). \quad (5.58a)$$

Ha a pontbecslést és a szórást az általunk javasolt módon kerekítjük, a mérési eredmény

$$156,7 \pm 7,1$$

lesz. Itt tehát  $\theta = 0,1$ , vagyis  $\theta/\sigma = 0,014$ . A kvantilis emiatt fellépő megnövekedése az 5.3. ábra szerint elhanyagolható, tehát az intervallumbecslés

$$(142,8; 170,6),$$

aminek (5.58a)-tól való eltérése mindössze az utolsó számjegyben jelentkező egy egység.

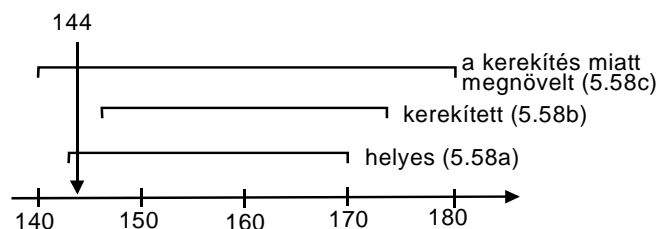
Nézzük meg ezután, mivel jár, ha a kerekítésben tovább megyünk. A szórást egy jegyre kerekítve  $\sigma = 7$  adódik. A kerekítés elszánt hívei azt mondják, hogy ez már majdnem 10, tehát a becslt érték utolsó számjegye értéktelen, és ezért ezt a tizesekre kerekítik. Végeredményben a mérés eredményét

$$160 \pm 7$$

alakban adják meg. A fenti jelölésekkel  $\theta = 10$  a becslt paraméterre és  $\theta = 1$  a szórásra. Ha továbbra is az előbbi kvantilist ( $\gamma = 1,96$ ) használjuk, a konfidenciaintervallum

$$(146,3; 173,7). \quad (5.58b)$$

Az (5.58a) intervallumbecsléshez képest ez az intervallum a nagyobb értékek felé tolódott el. Mivel a becslt paraméter kerekítése egy nagyságrenddel durvább, mint a szórásé, az utóbbit elhanyagolhatjuk, vagyis érvényesnek tekinthetjük az 5.3. ábrát. Eszerint ez valójában nem 95%, hanem 92,9% konfidencia-valószínűséghez tartozik. Ne vegyük a dolgot félvállról! Ha például az elméleti jóslat 144, a helyes intervallumbecsléssel ezt 95% konfidenciaszinten elfogadjuk, viszont a kerekítés után elvetjük. Ennek persze a fordítottja is megtörténhetett volna. Az adatkezelésben tett meggondolatlan lépés tehát a végkövetkeztetést drámaian befolyásolhatja. A tévedést elkerülhetjük, ha nem vagyunk lusták két számjeggyel többet leírni.



5.4. ábra. A konfidenciaintervallumok változása kerekítés miatt

Ha a kerekítés hatását korrektül figyelembe vesszük, szélesebb konfidenciaintervallumot kell megadnunk. A konfidenciaszint legyen továbbra is 95%. Az (5.57) képlet értelemszerű alkalmazásával a kvantilist 46%-kal kell megnövelnünk,  $\gamma_G = 1,96$  helyett tehát  $\gamma = 2,85$ -öt kell használnunk. Az így számolt intervallumbecslés

$$(140; 180), \quad (5.58c)$$

ami – természetesen – tartalmazza az (5.58a) intervallumot. Ha ehhez viszonyítjuk az elméleti jóslatot (144), akkor igaznak találjuk az elméletet. Vegyük azonban észre, hogy a mérési bizonytalanság 20-ra nőtt a korábbi  $(170,6-142,9)/2 = 13,9$  helyett. Ezt a három intervallumbecslést az 5.4. ábrán ábrázoljuk.

A bemutatott számpélda tanulságait a következőkben összegezzük:

- A kerekítés utáni konfidenciaintervallum általában eltolódik, és szélessége megváltozik a helyes intervallumbecsléshez képest. Emiatt a közölt kísérleti eredmény alapján a felhasználók könnyen juthatnak téves következtetésre.
- A következtetés csak akkor lenne helyes, ha a kerekítés tényét figyelembe véve megnövelnénk a konfidenciaintervallum szélességét. Ezt azonban a kísérletező sohasem teszi meg. Aki ugyanis kerekít, ezt abban a hiszemben teszi, hogy a kerekített értékek egyenértékűek a sok jegyre megadott számokkal, amit a felhasználó jóhiszeműen elfogad. Erre gondoltunk, amikor fent azt állítottuk, hogy „a kerekítés okozta baj általában nem tudatosul sem a kísérletezőben, sem az eredmények felhasználóiban”.
- Ha a felhasználó felismeri a kerekítés tényét,<sup>54</sup> akkor a konfidenciaintervallum hosszát megnövelve korrigálhatja a kísérletező által megadott intervallumbecslést. Tudnunk kell azonban, hogy a megnövelt mérési bizonytalanság miatt csökken a mérési eredmény információtartalma.
- További gond, hogy a számítógép kerekítési hibái elhanyagolhatók a fentiekben kritizált kerekítési hibákhoz képest. Emiatt állandóan problémákba ütközünk, amikor keverjük a gépi és kézi számításokat.
- Mindezeket a bonyodalmakat és gondokat elkerülhetjük, ha a fenti javaslatok szerint kerekítünk.

---

<sup>54</sup> Például annak alapján, hogy a kísérletező közli ezt.

## \*6. A FÜGGVÉNYILLESZTÉS ELMÉLETE

Az előző fejezetben a *közvetlen mérések* kiértékelésével foglalkoztunk, amelyek esetében közvetlenül azt a paramétert (vagy azokat a paramétereket) mérjük, amelyek minket érdekelnek. Ritkán van azonban ilyen “szerencsénk”, mert az a gyakoribb, hogy csak *közvetett méréseket* tudunk végezni: amit közvetlenül mérni tudunk, csak alkalmas elméleti megfontolásokkal hozható kapcsolatba a minket érdeklő mennyiségekkel.

A függvényillesztés formalizmusát nagy általánosságban is meg lehet megfogalmazni, amelyet aztán egyszerűen lehet az egyes konkrét mérésekre alkalmazni. A jelen fejezetben ezt az általános formalizmust ismertetjük, és az alkalmazásokat a 7. fejezetre halasztjuk. Nehézsége miatt a jelen fejezet tanulmányozását viszont csak a matematikában jártas olvasók számára ajánljuk.

A mondottak értelmében feltesszük, hogy méréseink közvetlenül a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mennyiségeket adták eredményül, és elméleti megfontolásokból ismerjük várható értéküket:

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

ahol  $\mathbf{a}$  az ismeretlen paraméterek vektora:  $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ . A mérés célja ezek meghatározása. Az  $f(x_i, \mathbf{a})$  függvényt *illesztőfüggvénynek* nevezzük.  $x_i$  argumentuma a *független változó*, amelynek értékeit adottnak tételezzük fel. A fejezet végén megvizsgáljuk annak a következményeit, hogy  $x_i$  is valószínűségi változó, de egyelőre legyen konstans. Feltesszük, hogy a mérési eredmények egymástól *függetlenek, torzítatlanok*, vagyis várható értéküket a (6.1) egyenlet adná meg, ha benne  $\mathbf{a}$  helyére a paraméterek valódi értékét helyettesítenénk.<sup>55</sup> Az egyes mérések szórásnégyzetét a

$$D^2(\xi_i) = \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

alakban írjuk fel, ahol  $\sigma^2$  ismeretlen arányossági tényező, a  $w_i$  súlyok pedig ismertek [vö. (5.29)]. Feltesszük továbbá, hogy a mérések Gauss-eloszlásúak, vagyis a maximális valószínűségek módszere átmegy a legkisebb négyzetek módszerébe. Később megszabadulunk ettől a feltevéstől is: a 6.7 alfejezetben belátjuk, hogy a gyakorlatban fontos valószínűség-eloszlások esetében a maximális valószínűség módszere – formálisan legalábbis – szintén átmegy a legkisebb négyzetek módszerébe.

### \*6.1. Bevezető megjegyzések

A függvényillesztés módszerét mindegyik, az 1. fejezetben példaként felhozott probléma és további problémák esetében külön-külön ki lehetne dolgozni. Ennek eredményeképpen megkapnánk a keresett paraméterek becsült értékét. Ehhez elég megadni a (6.1) szerinti illesztőfüggvényt és (6.2) szerinti súlyokat. A dolog azonban

<sup>55</sup> Erről csak feltételes módban beszélhetünk, mivel a paraméterek valódi értékét nem ismerhetjük.

nem ilyen egyszerű. Az adatkezelésnek *minden esetben* meg kell határozni a következő mennyiségeket:

- várható érték, illetve torzítás,
- a becsült paraméterek kovarianciamátrixa,
- konfidenciaintervallumok a becsült paraméterek számára.

Ezeken túlmenően ellenőrizni kell a kiindulási feltételeket, meg kell vizsgálni az esetleges kiszóró pontokat, stb.

A tapasztalat azt mutatja, hogy mindennek a meghatározása, illetve végrehajtása előbb-utóbb matematikai nehézségekbe ütközik. Leküzdésükhöz szükségünk van bizonyos elméleti ismeretekre, amelyek függetlenek a konkrét illesztési problémától. Ezért ebben a fejezetben az illesztési problémát *általánosságban* oldjuk meg, amit aztán konkrét problémákra specializálhatunk. Az általános formalizmust elég egyszer beprogramozni, majd ezt követően csak az illesztőfüggvény alakját és a  $w_i$  súlyokat kell megadni ahhoz, hogy egy konkrét probléma kezelését megoldjuk.

Ez az általános elmélet sok matematikai segédeszközt használ fel, de ettől függetlenül is meglehetősen bonyolult. Ezért áttanulmányozását nem ajánljuk kezdőknek. A laboratóriumi gyakorlatokban előforduló tipikus adatkezelési módszereket a 7. fejezetben tárgyaljuk az elsőévesek számára is követhető módon. A jelen fejezetből ott csak néhány tételre hivatkozunk, amelyeket minden fizikusnak már tanulmányai kezdetén is ismernie kell.

## \*6.2. Normálegyenletek

A (6.1) és (6.2) kiindulási feltevésekkel a közvetlenül mért mennyiségek együttes sűrűségfüggvénye

$$L(\mathbf{x}, \bar{\xi}, \mathbf{a}) = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n w_i}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{Q(\mathbf{a})}{2\sigma^2}\right), \quad (6.3)$$

ahol

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})]^2. \quad (6.4)$$

Fontos, hogy a  $w_i$  súly a négyzetre emelt [...] különbség szórásnégyzetével fordítva arányos legyen.

A maximális valószínűség elve (6.3) esetében a  $Q$  négyzetösszeg minimumának a keresését igényli. Deriváljuk  $Q$ -t mindegyik paraméter szerint, és az eredményt tegyük nullával egyenlővé:

$$G_k(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})] \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0, \quad (6.5)$$

$k = 1, 2, \dots, m$ . Ezeket az egyenleteket *normálegyenleteknek* nevezzük. Megoldásuk adja a paraméterek becsült értékét.

## \*Az egyenletek megoldása iterációval

A (6.5) alatt definiált  $G_k$  deriváltakból mint komponensekből megalkotjuk a  $\mathbf{G}$  vektort ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). A normálegyenleteket ezzel átírhatjuk a

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0} \quad (6.5a)$$

vektoros alakba. Mint a korábbi fejezetben tettük, a normálegyenletek megoldásaként adódó becsléseket a betűjel fölé írt  $\sim$  jellel jelöljük. Vannak illesztőfüggvények, amelyek esetében a normálegyenletek egyszerű lineáris egyenletrendszeret alkotnak. Az esetek többségében azonban transzcendens egyenletekkel találkozunk, amelyek csak iterációval oldhatók meg. Először az iteráció módszereit tárgyaljuk. A későbbiekben aztán szót ejtünk a gyakran alkalmazott *linearizáció* problémáiról is (6.6. alfejezet).

Tegyük fel, hogy már  $l$  iterációs lépést tettünk. Ekkor az  $(l+1)$ -edik lépésben a következő sorfejtést alkalmazzuk:

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{D}(\mathbf{a}_l)(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_l) + \dots,$$

ahol a  $\mathbf{D}$  mátrix elemei

$$D_{kk'}(\mathbf{a}_l) = \frac{\partial G_k(\mathbf{a}_l)}{\partial a_{k'}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\mathbf{a}_l)}{\partial a_k \partial a_{k'}} = D_{k'k}(\mathbf{a}_l).$$

Mivel a deriválások sorrendje felcserélhető, a mátrix szimmetrikus. Ha a fenti vektor-egyenletet beszorozzuk a  $\mathbf{D}$  mátrix inverzével, akkor a következő iterációs formulát kapjuk:

$$\mathbf{a}_{l+1} = \mathbf{a}_l - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{a}_l)\mathbf{G}(\mathbf{a}_l). \quad (6.6)$$

Ezt az iterációt *Newton-iterációnak* nevezzük. Alkalmazásához szükség van az  $l=0$ -nak megfelelő paraméterértékekre, amelyeket a továbbiakban *kezdőértékeknek* fogunk nevezni.

A (6.6) képlet emlékeztet függvények gyökhelyének a keresésére. Tegyük fel ugyanis, hogy a  $G(x) = 0$  egyenletet kell megoldanunk. Az iteráció  $l$ -edik lépésében az

$$x_{l+1} = x_l - \frac{G(x_l)}{G'(x_l)}$$

képletet alkalmazzuk. A  $\mathbf{D}$  mátrix inverze a  $G'$  derivált reciprokának felel meg. Emiatt az analógia miatt nevezzük (6.6)-ot is Newton-iterációnak.

### \*A konvergencia vizsgálata

A (6.6) iterációs formula alkalmazásakor felléphetnek hamis konvergenciák, ha rosszak a kezdőértékek. Például tekintsük a következő illesztőfüggvényt, amely első látásra egyszerűnek tűnik:

$$f(x, \mathbf{a}) = a_1 \cos[a_2(x - a_3)].$$

Ha az  $a_3$  paraméter kezdőértékét elrontjuk, könnyen kijöhet az alábbi “megoldás”:

$$a_1 = \bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \text{akármilyen}$$

Ez kifogástalan megoldás, ha az illesztőfüggvény

$$f(x, \mathbf{a}) = a_1$$

lenne. Mi azonban nem egy állandó, hanem egy koszinusz alakú függvényt kívánunk illeszteni, tehát az efféle álmegoldás elfogadhatatlan. Ezen túlmenően nyilván csak olyan megoldásnak van értelme, amelynél mindegyik illesztett paraméter függ a mért adatoktól.

Az ilyen álkonvergenciák elkerülésére a legjobb módszer a megoldáshoz lehetőleg közeli kezdőérték megkeresése. Ez azonban nem mindig sikerül, így sok múlik az iterációs mátrixon. Ha a kezdőérték jó, kétségtelenül a leggyorsabb konvergenciát a (6.6) Newton-iteráció biztosítja. Általában azonban nem ez az egyetlen szempont: a gyakorlatban elfogadhatóbb egy olyan iterációs séma, amely ugyan lassabban konvergál, de a konvergencia a kezdőértékek szélesebb tartományában következik be. Egy ilyen séma megkeresésének az érdekében írjuk az iterációt a következő, általános alakban:

$$\mathbf{a}_{l+1} = \mathbf{a}_l + \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{a}_l)\mathbf{G}(\mathbf{a}_l), \quad (6.7)$$

ahol az  $\mathbf{R}$  iterációs mátrixot az alábbi megfontolások alapján választjuk meg. Mindenesetre feltételezzük, hogy ( $\mathbf{D}$ -hez hasonlóan) *szimmetrikus*.

Nyilván azt tekintjük jó iterációnak, amely minden lépésben csökkenti  $Q$  értékét. Fejtsük Taylor-sorba  $Q$ -nak az  $l$ -edik iterációs lépéshez tartozó megváltozását:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a}_{l+1}) - Q(\mathbf{a}_l) &= \\ &= -2\mathbf{G}^T(\mathbf{a}_l)(\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l) - (\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l)^T \mathbf{D}(\mathbf{a}_l)(\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l) + \dots \end{aligned}$$

Ebben és a további képletekben mindegyik mátrixot és vektort az  $\mathbf{a}_l$  helyen kell kiszámítani, ezért az egyszerűség kedvéért ezt nem tüntetjük fel. Az iterációs képlet alapján

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a}_{l+1}) - Q(\mathbf{a}_l) &= -2\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} + \dots = \\ &= -\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} + \dots = \\ &= -\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{D}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} + \dots \end{aligned}$$

A kapott eredmény első tagja biztosan negatív, ha az iterációs mátrix *pozitív definit*. A második tagról ilyen kijelentést nem lehet tenni, mert a  $\mathbf{D}$  mátrix lehet indefinit is. Következésképpen célszerű  $\mathbf{R}$ -et úgy megválasztani, hogy ez a második tag minél kisebb legyen. Végeredményben tehát olyan iterációs mátrixot keresünk, amely pozitív definit és  $\mathbf{R} \approx -\mathbf{D}$ , mert ekkor

$$Q(\mathbf{a}_{l+1}) - Q(\mathbf{a}_l) < 0,$$

vagyis az iteráció  $Q$  minimuma felé halad. Ha  $\mathbf{R} = -\mathbf{D}$ , akkor

$$Q(\mathbf{a}_{l+1}) - Q(\mathbf{a}_l) = \mathbf{G}^T(\mathbf{a}_l) \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{a}_l) \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) + \dots$$

Az itt szereplő  $\mathbf{D}^{-1}$  mátrix csak a megoldás közelében negatív definit, ugyanis

$$D_{kk'}(\mathbf{a}_l) = -\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_{k'}} + \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}_l)] \frac{\partial^2 f}{\partial a_k \partial a_{k'}}.$$

A következő alfejezetben belátjuk, hogy az első tag negatív definit mátrixot ad, a második indefinit, de várható értéke a megoldás közelében zérus. Ezért a keresett mátrix

$$R_{kk'}(\mathbf{a}_l) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a}_l)}{\partial a_k} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a}_l)}{\partial a_{k'}}, \quad (6.8)$$

( $k, k' = 1, 2, \dots, m$ ). Ennek **D**-hez képest további előnye, hogy nem kell az illesztőfüggvény második deriváltjait kiszámítani.

Az iteráció konvergenciájának a kritériuma

$$\text{CONV} = \max_k \left| \frac{a_{l+1,k} - a_{l,k}}{\Delta a_k} \right| \leq 10^{-5},$$

ahol általában  $\Delta a_k \approx a_k/100$ . Az iteráció ezzel csak azután áll le, miután mindegyik paraméter 7 értékes számjegyre konvergált.

### \*Az iteráció stabilizálása

Vannak esetek, amelyekben az iterációs mátrix gondos megválasztása sem segít: az iterált paraméterek “vadul” oszcillálnak a megoldás körül. Amikor ez fellép, az oszcilláció egyre nagyobb mértékűvé szokott válni, ami előbb-utóbb a számítógépben túlsorduláshoz vezet. Ennek megakadályozására több módszer is van. Az egyik az *alulrelaxálás*: az egymást követő iterációs lépésekben a (6.7) képlet által szolgáltatott iteráltak helyett a régi és az új iterált valamilyen átlagát vesszük. A legegyszerűbb a

$$\mathbf{a}_{l+1} = (\mathbf{a}'_{l+1} + \mathbf{a}_l)/2$$

számtani közepet venni, ahol vesszővel jelöltük a (6.7) képlet által szolgáltatott iteráltat. A tapasztalat azt mutatja, hogy eléggé korlátozott azoknak az eseteknek a száma, amelyekben ez biztonságos megoldást jelent. Az alulrelaxálás viszont a konvergencia jelentős gyorsulását eredményezi olyan (egyébként konvergens) esetekben, amelyekben az iteráció oszcillál. Ez az utóbbi elég gyakori eset. Hogyan lehet ezt felismerni? Nagyon egyszerűen. Normális (tehát nem oszcilláló) esetben az iteráció 10-nél kevesebb lépésben konvergál. Általában ugyanennyi lépés elegendő annak felismeréséhez, hogy növekvő amplitúdójú oszcillációval állunk szemben. Ha sem ez, sem az nem következik be, nagyon valószínű, hogy lassan, de oszcillálva konvergáló iterációval állunk szemben. Ilyenkor segít az alulrelaxálás, amelyet – mondjuk – a 25. lépéstől kezdve mindenképpen érdemes alkalmazni. A következő iterációs sémát célszerű beprogramozni:

- (1) Kezdetben alkalmazzuk a (6.7) iterációt minden változtatás nélkül.
- (2) Minden lépésben meghatározzuk CONV és  $Q$  addig legkisebb értékét.
- (3) Ha valamelyik lépésben az addigi legkisebb érték 100-szorosa lép fel CONV vagy  $Q$  értékében, az iterációt divergensnek minősítjük, és leállítjuk. (Lásd az alábbi megjegyzést.)
- (4) Ha az iterációk száma elérte a 25-öt, áttérünk az alulrelaxálásra. A tapasztalat szerint az ezt követő 2–3 lépésben bekövetkezik a konvergencia.

A (3) ajánlással kapcsolatban megjegyezzük, hogy még gyorsan konvergáló iteráció esetében is az első lépésekben felléphetnek nagyságrendi változások CONV és  $Q$  értékében. Ezért célszerű itt nagyon laza feltételt szabni. Valami ilyen feltétel azonban elkerülhetetlen. Általában ugyanis nagy számú illesztési problémát sorozatban oldunk

meg. Ha ezek közé egy divergens iteráció keveredik, akkor az emiatt fellépő gépi túlcsoordulás az egész sorozatot félbeszakítja. Érdekünk tehát az ilyesminek még a túlcsoordulást megelőző fázisban való felismerése.

Mi a teendő, ha a fenti séma szerint az iteráció divergens? Két dolgot tehetünk: vagy keresünk *jobb kezdőértékeket*, vagy *stabilizáljuk* az iterációt. Az előbbi út sok emberi munkát igényel. Általában egyszerűbb az iterációt olyan mértékben stabilizálni, hogy elviselje a rossz kezdőértékeket is. Legyen a  $p_k$  mennyiség körülbelül akkora, amekkora változást várunk az iteráció során az  $a_k$  paraméterben ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).<sup>56</sup> Az alábbiakban ismertetünk egy olyan iterációs sémát, amely nem engedi, hogy az iteráció a  $p_k$  mennyiségekhez képest lényegesen nagyobb változásokat eredményezzen. Eszerint  $Q$  helyett az alábbi funkcionál minimumát keressük:

$$Q(\mathbf{a}_{l+1}) + c(\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l)^T \mathbf{P}(\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l) = \text{minimum},$$

ahol  $\mathbf{P}$  az  $1/p_k^2$ -ekből alkotott diagonális mátrix. Így elérjük, hogy az  $a_k$  paraméterben  $p_k$ -nál lényegesen nagyobb eltérés ne lépjen fel. Ezt a megszorítást természetesen fokozatosan fel kell oldani, miközben az iteráció a konvergencia felé tart, aminek érdekében a  $c$  együttható értékét annak mértékében csökkentjük, ahogy a konvergencia halad előre. Mivel a megoldásnál a  $\mathbf{G}$  vektor minden komponense eltűnik, célszerű a  $c$  együtthatót a  $\mathbf{G}$  vektor valamilyen normájával arányosan megválasztani. Hogy esetleges, nehezen kézben tartható arányossági tényezők hatását kikapcsoljuk, célszerű nem közvetlenül a  $\mathbf{G}$  vektort alapul venni, hanem a normáját  $Q$ -val elosztani. A numerikus vizsgálatok szerint a következő algoritmus válik be a gyakorlatban:

$$c = 2c_0 \|\mathbf{G}'\|/Q, \quad G'_k = p_k G_k;$$

$c_0 = 1$ , ha  $\text{CONV} > 1$  és  $c_0 = 10$ , ha  $\text{CONV} < 1$ .

Az ennek megfelelő iterációs formula

$$\mathbf{a}_{l+1} = \mathbf{a}_l + [\mathbf{R}(\mathbf{a}_l) + c\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{a}_l).$$

Ahogy a konvergencia halad előre,  $c \rightarrow 0$ , vagyis az iteráció átmegy az eredetibe, viszont az elején még nem enged meg nagy ingadozásokat. E jegyzet szerzője több évtizedes munkája során nem találkozott olyan (megoldható) illesztési problémával, amelyre ez az iterációs eljárás ne adott volna megoldást.

### \*Az iteráció kezdőértéke

Az iteráció kezdőértékének a meghatározása döntő hatással lehet a konvergenciára. Erről általánosságban alig lehet valamit mondani. Két speciális esetben azonban lehet eljárást javasolni:

1. Az illesztett paraméterekben lineáris függvények (például polinomillesztés) esetében közömbös a kezdőértékek megválasztása. Ilyenkor ugyanis az első lépés azonnal a keresett megoldást adja, bárhogy választjuk meg a kezdőértékeket.
2. Linearizálható problémák esetében (lásd a 6.6. alfejezetben) a linearizált illesztés eredménye kitűnő kezdőértéket szolgáltat. Ebből kiindulva az iteráció néhány lépésben be szokott konvergálni.

<sup>56</sup> Ha erre sem tudunk értelmes becslést adni, esetünk reménytelen: adjuk fel az illesztési probléma megoldását.



Egyéb esetekben valamilyen ötlet szükséges. A normálási probléma esetében a 7.7. alfejezetben szerepel egy ilyen ötlet. Általában a grafikus módszerek bizonyulnak a leghatékonyabbnak.

Egy jól kidolgozott illesztőprogram minden illesztett függvényre vonatkozóan tartalmaz eljárást a kezdőértékek meghatározására. Ez különösen olyan programok esetében fontos, amelyeket sok mérés sorozatban való kiértékelésére használunk. Jó példa erre a  $\gamma$ -spektrumok kiértékelése, ami sok nukleáris mérésben előfordul. Nagyon időrabló, ha minden spektrumot fel kell rajzolni, és arról le kell olvasni az egyes vonalak helyét, szélességét és maximumát. A mért  $\gamma$ -spektrum általában megjelenik az analizátor képernyőjén, és a kiértékelő program automatikusan meghatározza az egyes  $\gamma$ -vonalakhoz tartozó paraméterek kezdőértékét, vagy legalábbis lehetővé teszi, hogy a grafikusan meghatározott értékeket kezdőértékként írassuk elő.

### \*6.3. A becsült paraméterek tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a függvényillesztés eredményeképpen kapott paraméterértékek statisztikai tulajdonságait fogjuk megvizsgálni. Bevezetjük a következő jelöléseket. Az illesztőfüggvénynek az illesztett paraméterek szerinti deriváltjaiból megalkotjuk az  $n \times m$ -es  $\mathbf{F}$  mátrixot:

$$[\mathbf{F}]_{ik} = F_{ik} = \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k}, \quad (6.9a)$$

$i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$ . A  $w_i$  súlyokat a diagonális  $\mathbf{W}$  mátrix elemeinek tekintjük:

$$[\mathbf{W}]_{ij} = W_{ij} = w_i \delta_{ij},$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ . A (6.8) képlettel definiált  $\mathbf{R}$  mátrix kifejezhető ezek segítségével:

$$R_{kk'} = \sum_{i=1}^n w_i F_{ik} F_{ik'} = [\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}]_{kk'},$$

$k, k' = 1, 2, \dots, m$ , vagyis

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}. \quad (6.9b)$$

6.1. TÉTEL. Az  $\mathbf{R}$  mátrix pozitív szemidefinit.

Tetszőleges  $\mathbf{z}$  vektorra igaz, hogy

$$\mathbf{z}^T \mathbf{R} \mathbf{z} = (\mathbf{F} \mathbf{z})^T \mathbf{W} (\mathbf{F} \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n w_i \{[\mathbf{F} \mathbf{z}]_i\}^2 \geq 0,$$

amivel a tételt igazoltuk. A 6.2. TÉTEL bizonyításának a keretében megvizsgáljuk, milyen feltételekkel lehet az  $\mathbf{R}$  mátrix szinguláris, illetve hogyan lehet a szingularitást megszüntetni. Ennélfogva feltehetjük, hogy az egyenlőség jele nem lehet érvényes, vagyis a mátrix valóban pozitív definit, és ennélfogva létezik az inverze. Ha ez nem így lenne, akkor az iterációt nem is lehetne végrehajtani, vagyis a (6.5) normálegyenletek sem lennének megoldhatók.

### \*Kovarianciamátrix

A (6.2) feltevésből és a mérési adatok függetlenségéből következik, hogy kovarianciamátrixuk

$$\mathbf{M}(\Delta\bar{\xi}\Delta\bar{\xi}^T) = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1}, \quad (6.10)$$

ahol

$$\begin{aligned} \Delta\xi_i &= \xi_i - f(x_i, \mathbf{a}) = \xi_i - y_i = \left[ \Delta\bar{\xi} \right]_i, \\ y_i &= f(x_i, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

A  $\mathbf{W}$  mátrix diagonális, ha a  $\xi_i$  mért értékek függetlenek különböző  $i$ -re. Az alábbi képletek általánosíthatók nemdiagonális mátrixra, de az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy  $\mathbf{W}$  diagonális. Ekkor a becsült paraméterek a (6.5) egyenletrendszer megoldásai, amelyet most a következő alakban írunk fel:

$$G_k(\bar{\xi}, \tilde{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} (\xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})) = 0,$$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Alkalmazzuk itt a következő sorfejtést:

$$\begin{aligned} \xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) &= \xi_i - y_i - \sum_{k'=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_{k'}} (\tilde{a}_{k'} - a_{k'}) + \dots = \\ &= \Delta\xi_i - \sum_{k'=1}^m F_{ik'} \Delta a_{k'} + \dots, \end{aligned} \quad (6.11)$$

ahol  $\Delta a_k = \tilde{a}_k - a_k$ . Írjuk ezt vissza az előbbi egyenletbe, és alkalmazzuk a fenti mátrixjelöléseket:

$$\begin{aligned} 0 &= G_k(\bar{\xi}, \tilde{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^n W_{ii} F_{ik} \Delta\xi_i - \sum_{i=1}^n W_{ii} F_{ik} \sum_{k'=1}^m F_{ik'} \Delta a_{k'} + \dots = \\ &= \left[ \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta\bar{\xi} \right]_k - \sum_{k'=1}^m R_{kk'} \Delta a_{k'} + \dots \end{aligned}$$

Végeredményben tehát a következő vektoregyenletet kaptuk:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta\bar{\xi} - \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} + \dots = 0, \quad (6.12a)$$

amiből

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta\bar{\xi}. \quad (6.12b)$$

A sorfejtésben elhanyagolt tagok miatt ez csak első közelítés.

A (6.12b) összefüggés több későbbi levezetés alapja. A becsült paraméterek kovarianciamátrixát ezzel már könnyen megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{M}(\Delta \mathbf{a} \Delta \mathbf{a}^T) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{M}(\Delta\bar{\xi} \Delta\bar{\xi}^T) \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} = \\ &= \sigma^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} = \sigma^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \sigma^2 \mathbf{R}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

A kovarianciamátrix főátlójában található a becsült paraméterek szórásnégyzete:

$$D^2(\tilde{a}_k) = \sigma^2 [\mathbf{R}^{-1}]_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.14)$$

Ahhoz, hogy ezt használhassuk, ismernünk kell  $\sigma^2$ -et, amelynek a becslésével később foglalkozunk.

A (6.14) egyenlettel kapcsolatban megjegyezzük: lényeges, hogy a  $w_i$  súlyok a mért értékek szórásnégyzetével fordítottan arányosak legyenek. Most tudjuk először megmutatni ennek a kikötésnek az értelmét. Tegyük fel, hogy (6.10) nem érvényes:

$$\mathbf{M}(\Delta \bar{\xi} \Delta \bar{\xi}^T) = \mathbf{X} \neq \sigma^2 \mathbf{W}^{-1},$$

amit (6.13)-ba helyettesítve a

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}(\Delta \mathbf{a} \Delta \mathbf{a}^T) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \neq \sigma^2 \mathbf{R}^{-1}$$

végeredményt kapjuk. A megszokott és minden függvényillesztő program által használt képlet tehát érvényét veszti. Ez önmagában még nem baj, csak kellemetlen, hiszen helyette egy ugyan jóval bonyolultabb, de mégis alkalmazható képletet lehetett felírni. Az viszont baj, hogy minden alábbi tételünk érvényét veszti, mert emiatt egyetlen adatkezelési módszerünk sem lesz alkalmazható, az egész kiértékelés komolytalanná válik.

#### \*Várható érték (torzítás)

Ha a (6.11) képletben a pontokkal jelölt a másod- és magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, a paraméterek becslése torzítatlan, hiszen ekkor

$$\mathbf{M}(\Delta \mathbf{a}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{M}(\Delta \bar{\xi}) = 0. \quad (6.15)$$

A becslés tehát első rendben torzítatlan, ha minden  $i$ -re  $\mathbf{M}(\Delta \xi_i) = 0$ . Az elhanyagolt tagok nagyságrendjének a becslésére a (6.11) egyenletben megtartjuk a másodrendű tagot is:

$$\begin{aligned} \xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) &= \Delta \xi_i - \sum_{k'=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_{k'}} \Delta a_{k'} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^m \sum_{k''=1}^m \frac{\partial^2 f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_{k'} \partial a_{k''}} \Delta a_{k'} \Delta a_{k''} + \dots \end{aligned}$$

Bevezetjük a következő jelölést:

$$[\mathbf{H}_k]_{k'k''} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial^2 f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_{k'} \partial a_{k''}}.$$

Ezzel fenti egyenletünk magasabb rendű közelítése

$$\mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\xi} - \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{h} + \dots = 0,$$

ahol

$$[\mathbf{h}]_k = h_k = \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{a},$$

vagyis

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \left( \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \mathbf{h} \right) + \dots \quad (6.16)$$

Ekkor a becslés torzított, és torzítása

$$\delta \mathbf{a} = \mathbf{M}(\Delta \mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{h}).$$

Belátható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(h_k) &= \delta \mathbf{a}^T \mathbf{H}_k \delta \mathbf{a} + \sum_{k'=1}^m \sum_{k''=1}^m B_{k'k''} [\mathbf{H}_k]_{k'k''} = \\ &= \delta \mathbf{a}^T \mathbf{H}_k \delta \mathbf{a} + \sigma^2 \sum_{k'=1}^m [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_k]_{k'k'} = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{H}_k \delta \mathbf{a} + \sigma^2 d_k. \end{aligned}$$

A  $\delta \mathbf{a}$  torzításvektor tehát (6.16) szerint kielégíti az alábbi (nem lineáris, tehát iterációval megoldandó) egyenletrendszert ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$[\mathbf{R} \delta \mathbf{a}]_k = -\frac{1}{2} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{H}_k \delta \mathbf{a} - \frac{1}{2} \sigma^2 d_k, \quad (6.17)$$

amelynek a megoldása első közelítésben

$$\delta \mathbf{a} \approx -\frac{1}{2} \sigma^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}. \quad (6.18)$$

A torzítás a mérések pontosságának javulásával ( $\sigma^2 \rightarrow 0$ ) csökken.<sup>57</sup> Tekintve, hogy a szórás  $\sigma$ -val arányos, a torzítás pedig  $\sigma^2$ -tel, a torzítás/szórás hányados a pontosság javulásával csökken. A tapasztalat szerint a torzítás csak nagyon pontatlan mérések esetében számottevő, általában a becslés torzítatlannak tekinthető. Ezért az alábbiakban elhanyagoljuk  $\delta \mathbf{a}$ -t.

### \*A közvetlenül mért adatok várható értékének becslése

A közvetlenül mért adatok  $y_i = f(x_i, \mathbf{a})$  várható értékét úgy tudjuk becsülni, hogy az  $\mathbf{a}$  paramétervektor helyére a becsült paraméterekből képzett vektort helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) = f(x_i, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \Delta a_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \frac{\partial^2 f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_{k'}} \Delta a_k \Delta a_{k'} + \dots \end{aligned}$$

Ez a becslés láthatóan torzított, hiszen

$$\delta \tilde{y}_i = \mathbf{M}(\tilde{y}) - f(x_i, \mathbf{a}) =$$

<sup>57</sup> Ez a kijelentés nem nyilvánvaló, hiszen (6.2)-ben választhatunk  $\sigma^2 = 1$ -et is, ha biztosak vagyunk abban, hogy a  $w_i$  súlyok a szórásnégyzetek reciprocai. A fenti kijelentés akkor válik érthetővé, ha a súlyok normálása rögzített, például összegük mindenkor 1-gyel egyenlő. Ebben az esetben az egyes mérések szórásnégyzetének a csökkenése (vagyis a pontosság javulása)  $\sigma^2$  csökkenésével egyenértékű.

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \frac{\partial^2 f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_{k'}} B_{kk'} + \dots,$$

ahol  $B_{kk'}$  a (6.13) képletben adott  $\mathbf{B}$  kovarianciamátrix  $(k, k')$  eleme. Ez  $\sigma^2$  nagyságrendű torzítás, amelyre egyszerűen lehet korrekciót alkalmazni: a

$$y_i^* = f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \delta a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m \frac{\partial^2 f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_{k'}} B_{kk'} + \dots$$

mennyiség várható értéke már csak  $\sigma^4$  nagyságrendben tér el a valódi  $y_i$  várható értéktől. Az itt szereplő korrekció általában elhanyagolható, ezért legtöbbször az egyszerűbb

$$\tilde{y}_i = f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})$$

becslést alkalmazzuk.

Az  $\tilde{y}_i$  becslés kovarianciamátrixa az alábbi módon számítható ki. Legyen

$$\Delta \tilde{y}_i = \tilde{y}_i - f(x_i, \mathbf{a}) = [\mathbf{F} \Delta \mathbf{a}]_i, \quad (6.19a)$$

amelynek a kovarianciamátrixa

$$\mathbf{M}(\Delta \tilde{\mathbf{y}} \Delta \tilde{\mathbf{y}}^T) = \mathbf{F} \mathbf{M}(\Delta \mathbf{a} \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{F}^T = \sigma^2 \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T.$$

Ebből kapjuk az  $\tilde{y}_i$  becslés szórásnégyzetét:

$$\sigma_i^{*2} = \sigma^2 [\mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T]_{ii}. \quad (6.19b)$$

### \* $\mathbf{Q}_{\min}$ statisztikai tulajdonságai

Bebizonyítjuk a következő nevezetes tételt:

6.2. TÉTEL. Ha az illesztést végre lehet hajtani, akkor a  $Q$  funkcionál minimuma arányos egy  $(n - m)$  szabadsági fokú  $\chi^2$  változóval:

$$Q_{\min} = \sigma^2 \chi_{n-m}^2, \quad (6.20)$$

ami az 5.1. TÉTEL általánosításának is felfogható. A  $Q$  négyzetösszeg minimumát definíció szerint a következő alakban írhatjuk fel:

$$Q_{\min} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 = (\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\mathbf{y}})^T \mathbf{W} (\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\mathbf{y}}).$$

(6.19a) és (6.12) alapján ezt a

$$Q_{\min} = \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T (\mathbf{E} - \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T) \mathbf{W} (\mathbf{E} - \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W}) \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}}$$

képlet kapcsolja össze a közvetlenül mért mennyiségek  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}}$  hibájával.

Általában a mérések függetlenek, vagyis  $\mathbf{W}$  diagonális. Így lehet beszélni a négyzetgyökekről. A 6.2. TÉTEL korrelált mérésekre is igaz, mivel ekkor is létezik egy olyan  $\mathbf{V}$  mátrix, amelyre fennáll:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^T \mathbf{V}.$$

Ha a súlyok mátrixa diagonális,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T = \mathbf{W}^{1/2}$ , ahol az utóbbiban a  $w_i$  súlyok négyzetgyökei állnak. Ezzel

$$Q_{\min} = (\mathbf{V} \Delta \bar{\xi})^T (\mathbf{E} - \mathbf{VFR}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T)^2 (\mathbf{V} \Delta \bar{\xi}). \quad (6.21a)$$

Bevezetjük az

$$\mathbf{A} = \mathbf{VFR}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T \quad (6.21b)$$

jelölést, és belátjuk, hogy

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = m,$$

ha

$$\text{rang}(\mathbf{F}) = \text{rang}(\mathbf{VF}) = m.$$

(Erre a feltételre még visszatérünk.) Szorzással a rangszám nem növekedhet, tehát a definíció alapján

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \text{rang}(\mathbf{VF}) = m.$$

Másrészt

$$\mathbf{F}^T \mathbf{V}^T \mathbf{A} = \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T \mathbf{VFR}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{RR}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{V}^T,$$

vagyis

$$m = \text{rang}(\mathbf{F}^T \mathbf{V}^T) \leq \text{rang}(\mathbf{A}).$$

Ez a két egyenlőtlenség csak úgy lehet egyszerre igaz, ha az  $\mathbf{A}$  mátrix rangja  $m$ .

Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \quad \text{és így} \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^2 = \mathbf{E} - \mathbf{A}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix kielégíti a következő egyenletet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 0,$$

vagyis az  $\mathbf{A}$  mátrix minimál-polinomja  $\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ . A sajátértékek tehát többszörösek, és értékük vagy 1 vagy 0. Mivel az  $\mathbf{A}$  mátrix rangja  $m$ , az 1 sajátérték  $m$ -szeres, a 0 sajátérték pedig  $(n - m)$ -szeres. A mátrix tehát diagonalizálható:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{U},$$

ahol  $\mathbf{\Lambda}$  olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában  $m$  darab 1 és  $(n - m)$  darab 0 van. Rendezzük a mátrixot úgy, hogy az 1-esek az utolsó  $m$  helyre kerüljenek. Legyen

$$\bar{\zeta} = \mathbf{UV} \Delta \bar{\xi},$$

aminek a kovarianciamátrixa

$$\mathbf{M}(\bar{\zeta} \bar{\zeta}^T) = \mathbf{UV} \mathbf{M}(\Delta \bar{\xi} \Delta \bar{\xi}^T) \mathbf{V}^T \mathbf{U}^T = \sigma^2 \mathbf{UVW}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{U}^T = \sigma^2 \mathbf{E},$$

tehát a  $\bar{\zeta}$  vektor komponensei független, azonos  $\sigma$  szórású valószínűségi változók. Helyettesítsük ezt (6.21a)-ba:

$$\begin{aligned}
Q_{\min} &= (\mathbf{V}\Delta\vec{\xi})^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{V}\Delta\vec{\xi}) = (\mathbf{V}\Delta\vec{\xi})^T (\mathbf{U}^T\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{V}\Delta\vec{\xi}) = \\
&= (\mathbf{U}\mathbf{V}\Delta\vec{\xi})^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{U}\mathbf{V}\Delta\vec{\xi}) = \vec{\zeta}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})\vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{n-m} \zeta_i^2 = \sigma^2 \chi_{n-m}^2.
\end{aligned}$$

Éppen ezt állítjuk (6.20)-ban.

Már csak a  $\text{rang}(\mathbf{F}) < m$  vagy  $\text{rang}(\mathbf{V}\mathbf{F}) < m$  eseteket kell megvizsgálnunk. Mivel

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{W}\mathbf{F} = (\mathbf{V}\mathbf{F})^T (\mathbf{V}\mathbf{F}),$$

ebből az következik, hogy

$$\text{rang}(\mathbf{R}) \leq \text{rang}(\mathbf{V}\mathbf{F}) < m,$$

tehát az  $\mathbf{R}$  mátrix szinguláris. Ekkor az illesztést nem lehet végrehajtani. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

### \*Szinguláris $\mathbf{R}$ mátrix esete

Külön figyelmet igényel az az eset, amikor  $\text{rang}(\mathbf{F}) < m$ . Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{F}$  mátrix oszlopai nem lineárisan függetlenek, vagyis létezik olyan nem zérus  $\mathbf{z}$  vektor, hogy

$$\mathbf{F}\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Ha csak egy ilyen vektor létezik, akkor  $\text{rang}(\mathbf{F}) = m - 1$ , ha viszont több is, akkor a rang annyival kisebb  $m$ -nél, ahány ezek között lineárisan független. Ilyenkor az  $\mathbf{R}$  mátrix szinguláris. Ezért fontos, hogy az illesztőprogramban olyan mátrixinvertáló eljárást használjunk, amely visszajelzi, ha a mátrix a gépi pontosságon belül szinguláris. Ha ez bekövetkezik, ennek általában két oka lehet: egyrészt következhet ez az illesztőfüggvény szerkezetéből, másrészt előállhat a paraméterértékeknek valamilyen szerecsétlen kombinációja. Az előbbi esetben a szingularitás a paraméterek minden értékénél fellép. Az utóbbi esetre a következő egyszerű példát hozhatjuk. Az

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 \exp\{a_2 x_i\} + a_3$$

illesztőfüggvény deriváltjai  $a_2 = 0$  esetén

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_3} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = x_i a_1,$$

ami azt jelenti, hogy a  $\mathbf{z}^T = [1 \quad 0 \quad -1]$  vektor kielégíti az  $\mathbf{F}\mathbf{z} = \mathbf{0}$  feltételt. Természetesen nem szükséges, hogy  $a_2$  pontosan egyenlő legyen zérussal, elég, ha megfelelően közel kerül hozzá. Túlságosan rossz kezdőértékekből kiindulva az iteráció vezethet erre. Ilyen esetben a kezdőértékek megváltoztatása segíthet a problémán.

Lényegesen bonyolultabb az az eset, amikor az  $\mathbf{F}\mathbf{z} = \mathbf{0}$  feltétel az illesztett paraméterek minden értékénél teljesül. Erre példa az

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 \exp\{(a_2 + a_3)x_i\} + a_4 a_5$$

illesztőfüggvény. Mivel

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{\partial f}{\partial a_3}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{\partial f}{\partial a_4} = a_5, \quad \frac{\partial f}{\partial a_5} = a_4,$$

két lineárisan független vektor létezik:

$$\mathbf{z}_1^T = [0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0] \quad \text{és} \quad \mathbf{z}_2^T = [0 \ 0 \ 0 \ a_4 \ -a_5],$$

vagyis  $\text{rang}(\mathbf{F}) = m - 2 = 3$ . Itt nyilván az a baj, hogy feleslegesen sok paramétert használunk, hiszen  $a_1$  mellett elég lenne az  $a'_2 = a_2 + a_3$  és  $a'_3 = a_4 a_5$  paramétereket használni. Ezzel az illesztőfüggvény az

$$f(x_i, a_1, a'_2, a'_3) = a_1 \exp\{a'_2 x_i\} + a'_3$$

alakba megy át, amelyre vonatkozóan az illesztés végrehajtható. A kapott paramétereiből tetszőleges  $a_2$  és  $a_4$  mellett kaphatunk becslést a másik két paraméterre:

$$a_3 = a'_2 - a_2, \quad \text{illetve} \quad a_5 = a'_3 / a_4.$$

Az illesztőfüggvény tehát *határozatlan*, ami azt jelenti, hogy benne néhány paraméter szabadon választható. Példánkban két szabadon választható paraméter van.

Ezt a példát egyszerűen általánosíthatjuk. Ha kiindulunk valamilyen  $\mathbf{a}_0$  paramétervektorból, akkor az  $\mathbf{Fz} = \mathbf{0}$  feltétel azt jelenti, hogy az illesztőfüggvénynek ebben a pontban vett iránymenti deriváltja eltűnik:

$$\left. \frac{df(x_i, \mathbf{a}_0 + \mathbf{z}t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k} z_k = \sum_{k=1}^m F_{ik} z_k = [\mathbf{Fz}]_i = 0.$$

Eszerint az illesztőfüggvény a  $\mathbf{z}$  irány mentén nem változik. A  $\mathbf{z}$  vektor nyilván függhet attól, hogy milyen paraméterértékekből indulunk ki, vagyis függ  $t$ -től. Ennek megfelelően megszerkeszthetjük az

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \int_0^t \mathbf{z}(t') dt'$$

térgörbét. ( $t$  értéke  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig változhat.) A térgörbe az  $m$ -dimenziós paramétertérnek abban az alterében halad, amelynek megfelelő  $z_k$  komponensek zérustól különböznek. A térgörbe mentén az illesztőfüggvény nem változik:

$$f(x_i, \mathbf{a}(t)) = c_1 = \text{konstans}.$$

Az előző példában két ilyen térgörbét is találtunk: az egyik az  $(a_2, a_3)$  síkban haladó  $a_2 + a_3 = a'_2$  egyenes, a másik pedig az  $(a_4, a_5)$  síkban haladó  $a_4 a_5 = a'_3$  hiperbola. Az illesztés tulajdonképpen az egyenes és a hiperbola megfelelő helyzetének a megkereséséből állt. Az általános esetben a térgörbe helyzetét meghatározó  $c_1$  paraméter értékét kell illeszteni. Amikor ez megtörtént, a térgörbe mentén változó paraméterek egyikét szabadon megválasztjuk, és ezzel meghatároztuk a többi paraméter értékét is.

A mérések kiértékelésében jártas kísérletezők eleve nem írják fel a fenti példában szereplő függvényalakot, hanem az illesztőfüggvényt rögtön az

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 \exp\{a_2 x_i\} + a_3$$



alakban írják fel, és akkor az  $\mathbf{R}$  mátrix szingularitásának a problémája fel sem merül. A gyakorlatban nem mindig sikerül az illesztőfüggvényt ennek megfelelően átírni. Ekkor a legegyszerűbb annyi számú paramétert rögzíteni, amennyi térgörbe adódik, és a többi paramétert illeszteni. A fenti példában a legegyszerűbb választás:  $a_2 = 0$  és  $a_4 = 1$ . Ezután már csak az  $a_1$ ,  $a_3$  és  $a_5$  paramétereket illesztjük, vagyis a tényleges illesztőfüggvény:

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 \exp\{(a_2 + a_3)x_i\} + a_4 a_5 \Big|_{a_2=0, a_4=1} = a_1 \exp\{a_3 x_i\} + a_5.$$

Jellegzetesen ilyen eset a 7.7. alfejezetben tárgyalt normálás, amelyben az egyetlen járható út egy vagy több normálási paraméter rögzítése.

Egy vagy több paraméter rögzítése a *kiegyenlítés* témakörébe tartozik, amelyet a 6.5. alfejezetben tárgyalunk részletesen. Az ott írtak szerint két módszer is alkalmazható, amikor az  $\mathbf{R}$  mátrix nem szinguláris, viszont csak a paraméterek kifejezése jön szóba, amikor azért rögzítünk bizonyos paramétereket, hogy az  $\mathbf{R}$  mátrix szingularitását megszüntessük.

### \* $\sigma^2$ becslése

A szórásnégyzetek és kovarianciamátrixok számítására szolgáló képletekben előforduló  $\sigma^2$  paraméter becslését a  $Q_{\min}$  segítségével kapjuk. A (6.3)-ban felírt sűrűségfüggvényre alkalmazzuk a maximális valószínűség módszerét:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{Q(\tilde{\mathbf{a}})}{2\sigma^4} = 0,$$

amiből

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{Q(\tilde{\mathbf{a}})}{n} = \frac{Q_{\min}}{n}.$$

Ez torzított becslés, hiszen a 6.2. TÉTEL alapján

$$M\left(\frac{Q_{\min}}{n}\right) = M\left(\frac{\sigma^2 \chi_{n-m}^2}{n}\right) = \sigma^2 \frac{n-m}{n}.$$

$n \rightarrow \infty$  esetén ez aszimptotikusan torzítatlan, de véges  $n$ -re jobb a korigált

$$s^2 = \frac{Q_{\min}}{n-m} \tag{6.22}$$

becslés, mert ez torzítatlan.

### \*További összefüggések

A paraméterekre vonatkozó intervallumbecslés megszerkesztéséhez szükségünk van az 5.2. TÉTEL általánosítására:

6.3. TÉTEL. Az  $\tilde{\mathbf{a}}$  paraméterbecslés független a  $Q_{\min}$  négyzetösszegtől.

Mivel

$$Q_{\min} = \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})]^2 = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2,$$

elég megmutatni, hogy a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbségek függetlenek mindegyik paraméter becslt értékétől. Mivel Gauss-eloszlású valószínűségi változókról van szó, azt kell belátnunk, hogy kovarianciájuk zérus. (6.19a) és (6.12) alapján írhatjuk:

$$\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}} = \Delta\bar{\xi} - \mathbf{F}\Delta\mathbf{a} = (\mathbf{E} - \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W})\Delta\bar{\xi}. \quad (6.23a)$$

Ennek a becslt paraméterekkel való kovarianciája eltűnik:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left[(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})\Delta\mathbf{a}^T\right] &= (\mathbf{E} - \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W})\mathbf{M}(\Delta\bar{\xi}\Delta\bar{\xi}^T)\mathbf{WFR}^{-1} = \\ &= \sigma^2\mathbf{FR}^{-1} - \sigma^2\mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{WFR}^{-1} = 0, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a (6.9b) összefüggést. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A későbbiekben szükségünk lesz a  $(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})$  különbség kovarianciamátrixára. Ezt (6.23a) alapján számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left[(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})^T\right] &= \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W})\mathbf{M}(\Delta\bar{\xi}\Delta\bar{\xi}^T)(\mathbf{E} - \mathbf{WFR}^{-1}\mathbf{F}^T) = \\ &= \sigma^2(\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T)(\mathbf{E} - \mathbf{WFR}^{-1}\mathbf{F}^T) = \sigma^2(\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T). \end{aligned}$$

Az  $i$ -edik mért értékre vonatkozóan ez azt jelenti, hogy

$$D^2(\xi_i - \tilde{y}_i) = D^2(\xi_i) - D^2(\tilde{y}_i). \quad (6.23b)$$

A szórásnégyzeteket – független valószínűségi változók esetében – össze kell adni, de itt olyan erős a korreláció, hogy a különbség szerepel. A két változó korrelációs együtthatója:

$$r(\xi_i, \tilde{y}_i) = \frac{D(\tilde{y}_i)}{D(\xi_i)}.$$

Ez általában kicsi, tehát a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbség szórásnégyzete általában alig kisebb, mint  $D^2(\xi_i)$ , de a különbség ritkán hanyagolható el.

#### \*6.4. Konfidenciaintervallumok

A (6.22) képlet felhasználásával a becslt paraméterek kovarianciamátrixát a

$$\mathbf{B} = s^2\mathbf{R}^{-1} = \frac{Q_{\min}}{n-m}\mathbf{R}^{-1}$$

képlettel becsüljük. Tehát az egyes paraméterek szórása

$$D(\tilde{a}_k) = \sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m}[\mathbf{R}^{-1}]_{kk}}, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Ennek alapján a következőképpen szerkeszthetjük meg a becslt paraméterekre vonatkozó konfidenciaintervallumokat.

Belátjuk, hogy a

$$t_k = \frac{\tilde{a}_k - a_k}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m} [\mathbf{R}^{-1}]_{kk}}}$$

mennyiség  $(n-m)$  szabadsági fokú Student-eloszlást követ. Ennek érdekében elvégezzük a

$$t_k = \frac{\tilde{a}_k - a_k}{\sigma \sqrt{[\mathbf{R}^{-1}]_{kk}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{\sigma^2(n-m)}}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\chi_{n-m}^2}{n-m}}}$$

átalakítást, ahol kihasználtuk a (6.20) összefüggést, továbbá bevezettük a

$$\zeta = \frac{\tilde{a}_k - a_k}{\sigma \sqrt{[\mathbf{R}^{-1}]_{kk}}}$$

jelölést. A  $\zeta$  valószínűségi változóról tudjuk, hogy

- várható értéke 0, mert az  $\tilde{a}_k$  becslés torzítatlan,
- szórásnégyzete 1, mert a nevező a számláló szórása,
- független a nevezőtől, mert a becsült paraméterek függetlenek  $Q_{\min}$ -től (a 6.3. TÉTEL szerint).

Emiatt a felírt tört valóban Student-tört, hiszen a számláló független a nevezőtől. Definiáljuk a  $\gamma$  kvantilist:

$$P\{|t_k| < \gamma\} = 1 - \varepsilon,$$

ahol  $\varepsilon$  a konfidencia-valószínűség. Így a paraméter valódi értéke  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel az alábbi intervallumba esik:

$$\tilde{a}_k - \gamma D(\tilde{a}_k) < a_k < \tilde{a}_k + \gamma D(\tilde{a}_k).$$

Az 5.1. alfejezet végén foglalkozunk a mérések végeredményének a közlésével. Az ott mondottak érvényesek a paraméterek becsült értékére is. Általában egynél több paramétert kell egyszerre becsülnünk. Felmerül a kérdés, hogyan lehet a becsült paraméterek *együttesére* vagy *egy részére* olyan tartományt kijelölni, amelybe azok adott valószínűséggel esnek. A 4.4. alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a tartomány a

$$(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T \mathbf{B}^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) = \gamma^2,$$

egyenlettel definiált konfidenciaellipszoid belseje, ahol  $\gamma$  a  $\chi_m^2$ -eloszlás kvantilise:

$$P\{\chi_m^2 < \gamma\} = 1 - \varepsilon.$$

A konfidenciaellipszoid úgy értendő, hogy a paraméterek  $\mathbf{a}$  valódi értéke  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel esik az  $\tilde{\mathbf{a}}$  becslés körül mint középpont körül felvett ellipszoid belsejébe.

### \*6.5. Kiegyenlítés

Gyakran fordul elő, hogy az illesztett paraméterek értékét nem választhatjuk meg szabadon, hanem közöttük bizonyos összefüggéseknek kell fennállniuk. Erre példa az 1. fejezetben említett és a 7.6. alfejezetben tárgyalt normálási probléma. Ebben az alfejezetben a probléma matematikai aspektusait tárgyaljuk. Arról van tehát szó, hogy a (6.4)-ben felírt négyzetösszeg minimumát mellékfeltételekkel keressük, amelyeket a következő alakban írjuk fel:

$$\Psi_j(\mathbf{a}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (6.24)$$

A korábbiakon túlmenően bevezetjük a következő jelöléseket. A feltételekben szereplő függvényeknek az illesztett paraméterek szerinti deriváltját a  $\mathbf{C}$  mátrix elemének tekintjük:

$$C_{jk} = \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{a})}{\partial a_k}. \quad (6.25)$$

Gyakran azt követeljük meg, hogy az illesztett  $f(x, \mathbf{a})$  függvény átmenjen bizonyos  $(x_j, f_j)$  pontokon. Ekkor

$$\Psi_j(\mathbf{a}) = f(x_j, \mathbf{a}) - f_j.$$

Egyes paraméterek rögzítése szintén kiegyenlítésnek minősül. Ha például az  $a_1$  paramétert az  $a_{10}$  értékre rögzítjük, a mellékfeltétel így írható:

$$\Psi_1(\mathbf{a}) = a_1 - a_{10} = 0, \quad C_{1k} = \delta_{1k}.$$

A  $\mathbf{C}$  mátrixnak  $J$  sora és  $m$  oszlopa van. A feladat nyilván csak akkor függvényillesztés, ha  $J < m$ . Az általánosság megszorítása nélkül kiköthetjük, hogy a feltételek egymástól lineárisan függetlenek, vagyis  $\text{rang}(\mathbf{C}) = J$ . Ellenkező esetben ugyanis a (6.24) feltételek  $J$  számát addig csökkenthetnénk, amíg a rang meg nem egyezik a feltételek számával. A feltételes szélsőérték-problémát a Lagrange-multiplikátorok módszerével oldjuk meg, vagyis a (6.5) normálegyenletek helyett a

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left( Q(\tilde{\mathbf{a}}) - 2 \sum_{j=1}^J \lambda_j \Psi_j(\tilde{\mathbf{a}}) \right) = 0 \quad (6.26a)$$

egyenletek megoldását keressük ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Ez  $m$  egyenlet ( $m + J$ ) ismeretlenre. A  $\lambda_j$  multiplikátorok kiszámítására szolgál a  $J$  számú (6.24) feltétel.

### \*Megoldás iterációval

A (6.26a) egyenletrendszer iterációval oldjuk meg, ha vagy az illesztőfüggvény, vagy a (6.24) feltételek a paramétereknek nem lineáris függvényei. Feltételezzük, hogy az  $\mathbf{R}$  mátrix invertálható. A deriválást végrehajtva a

$$G_k(\tilde{\mathbf{a}}) + \sum_{j=1}^J \lambda_j \frac{\partial \Psi_j(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial a_k} = G_k(\tilde{\mathbf{a}}) + \sum_{j=1}^J C_{jk} \lambda_j = 0$$

egyenletek adódnak, ahol a  $G_k$  függvényt (6.5)-ben írtuk fel. A (6.25)-ben definiált  $\mathbf{C}$  mátrix segítségével a kapott egyenletrendszer átírhatjuk vektoros alakba:

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (6.26b)$$

ahol  $\bar{\lambda}$  a  $\lambda_j$  multiplikátorokból mint komponensekből alkotott vektor. Tételezzük fel, hogy már  $l$  iterációs lépést végrehajtottunk, és  $\mathbf{a}_l$ -et kaptunk eredményül. A 6.2. alfejezetben alkalmazott gondolatmenet mintájára a  $\mathbf{G}$  vektort sorba fejtjük az  $l$ -edik iterről körül:

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{D}(\mathbf{a}_l)(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_l) + \dots \approx \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) - \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_l) + \dots,$$

ahol  $\mathbf{D}$  a 6.2. alfejezetben definiált deriváltmátrix, amelyet a (6.8) képlettel adott  $\mathbf{R}$  mátrix negatívjával közelítünk. Ha ezt (6.26b)-be helyettesítjük, a következő összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}_l) - \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_l) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_l)^T \bar{\lambda}_l = \mathbf{0},$$

amelyből az

$$\mathbf{a}_{l+1} = \mathbf{a}_l + \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)^{-1} \left( \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_l)^T \bar{\lambda}_l \right) \quad (6.27a)$$

iterációs képletet vezethetjük le. A (6.24) feltételekben is ugyanezt a sorfejtést alkalmazzuk. Az eredmény vektori alakja

$$\bar{\Psi}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_l)(\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l) = \mathbf{0},$$

ahol  $\bar{\Psi}$  a  $\Psi_j$  függvényekből mint komponensekből képzett vektor. (6.27a)-ból kifejezzük az

$$\mathbf{a}_{l+1} - \mathbf{a}_l = \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)^{-1} \left( \bar{\Psi}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_l)^T \bar{\lambda}_l \right)$$

különbséget, amelyet az előbbi egyenletbe helyettesítve – némi számolás után – kapjuk a  $\bar{\lambda}_l$ -re vonatkozó iterációs képletet:

$$\bar{\lambda}_l = -\mathbf{N}(\mathbf{a}_l)^{-1} \left( \bar{\Psi}(\mathbf{a}_l) + \mathbf{C}(\mathbf{a}_l) \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{a}_l) \right). \quad (6.27b)$$

Itt bevezettük az

$$\mathbf{N}(\mathbf{a}_l) = \mathbf{C}(\mathbf{a}_l) \mathbf{R}(\mathbf{a}_l)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{a}_l)^T \quad (6.27c)$$

jelölést. A következőkben elhagyjuk az  $\mathbf{a}_l$  argumentumot. Megfelelő kezdőértékekkel indítva ez az iteráció ugyanúgy konvergál, mint a kiegyenlítés nélküli iteráció (vö. 6.2. alfejezet). Ezt az állítást a 6.8. TÉTEL alapján fogjuk megindokolni. Most azonban be kell látnunk, hogy  $\mathbf{N}$  invertálható. Mivel  $J \times J$  méretű mátrix, ehhez elég bebizonyítani a következő tételt:

6.4. TÉTEL. A (6.27c) képletben definiált  $\mathbf{N}$  mátrix rangja  $J$ , ha a  $\mathbf{C}$  mátrix rangja is  $J$ .

A  $\text{rang}(\mathbf{C}) = J$  kiindulási feltétel azt jelenti, hogy  $\mathbf{C}$  sor- és oszlopvektorai lineárisan függetlenek, vagyis a

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{C}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{z}_1^T = \mathbf{z}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

egyenlőségek csak akkor állhatnak fenn, ha  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Ennek alapján belátjuk, hogy  $\mathbf{N}$  pozitív definit. Legyen  $\mathbf{z}$  tetszőleges  $J$  elemű vektor, amelynek van zérustól különböző eleme. Ekkor

$$\mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{z} = \mathbf{z}_1^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}_1 > 0,$$

hiszen az  $\mathbf{R}$  mátrixról tudjuk, hogy pozitív definit, és – az imént mondottak szerint – a  $\mathbf{z}_1$  vektor nem tűnhet el. Ez pedig azt jelenti, hogy az  $\mathbf{N}$  mátrix pozitív definit, vagyis minden sajátértéke pozitív, amivel a tételt bebizonyítottuk.

### \*A becsült paraméterek és a multiplikátorok statisztikai tulajdonságai

A becsült paraméterek és a multiplikátorok statisztikai tulajdonságait a 6.3. alfejezetben alkalmazott módszerekkel fogjuk tanulmányozni. Legyen most is

$$\Delta \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$$

a becsült és a valódi paraméterértékek különbsége. Mivel

$$\Psi_j(\mathbf{a}) = \Psi_j(\tilde{\mathbf{a}}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

a (6.24) feltételek – első rendben – a következő módon írhatók át vektoros alakba:

$$\sum_{k=1}^m C_{jk} \Delta a_k = [\mathbf{C} \Delta \mathbf{a}]_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (6.28)$$

A (6.12a) képletben kiszámítottuk, hogy ugyanebben a lineáris közelítésben

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{a}}) \cong \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{R} \Delta \mathbf{a},$$

ahol a szereplő mennyiségek jelentését a 6.3. alfejezetben megadtuk. Ezzel a (6.26b) vektoregyenlet sorfejtése a következő:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} + \mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (6.29a)$$

amiből

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (6.29b)$$

Ha ezt (6.28)-ba helyettesítjük, a

$$\mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

egyenlet adódik. Megoldjuk  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ -ra:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (6.30a)$$

majd (6.29b)-be helyettesítjük:

$$\Delta \mathbf{a} = \left( \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \right) \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \tilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (6.30b)$$

Az itt szereplő  $\mathbf{N}$  mátrixot (6.27c)-ben definiáltuk.

A kapott összefüggésekből egyszerűen kapjuk a szereplő mennyiségek statisztikai tulajdonságait, amelyeket a következő két tétel segítségével fogalmazzuk meg. A tételek értelmezésére később még visszatérünk.

6.5. TÉTEL. A  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  vektor komponensei zérus várható értékű Gauss-eloszlású valószínűségi változók, amelyek kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = \sigma^2 \mathbf{N}^{-1} = \sigma^2 \left( \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \right)^{-1}. \quad (6.31)$$

E mátrix rangja  $J$ .

A  $\vec{\lambda}$  vektor várható értéke (6.30a) alapján

$$\mathbf{M}(\vec{\lambda}) = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}\mathbf{M}(\Delta\vec{\xi}) = 0,$$

hiszen a  $\Delta\vec{\xi}$  vektor várható értéke zérus. A kovarianciamátrixot így (6.30a) alapján a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\lambda &= \mathbf{M}(\vec{\lambda}\vec{\lambda}^T) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}\mathbf{M}(\Delta\vec{\xi}\Delta\vec{\xi}^T)\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1} = \\ &= \sigma^2\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1} = \\ &= \sigma^2\mathbf{N}^{-1} = \sigma^2(\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1},\end{aligned}$$

amint egyszerű mátrixalgebrával beláthatjuk, ha a (6.27c), (6.10) és (6.9b) képleteket is figyelembe vesszük. A kovarianciamátrix rangjára vonatkozó állítás következik a 6.4. TÉTELből.

6.6. TÉTEL. Az illesztett paraméterek kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B}_a = \sigma^2(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}). \quad (6.32)$$

E mátrix rangja  $(m - J)$ .

A kovarianciamátrixot (6.30b) alapján a következőképpen számítjuk ki:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_a &= \mathbf{M}(\Delta\mathbf{a}\Delta\mathbf{a}^T) = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}) \bullet \\ &\bullet \mathbf{M}(\Delta\vec{\xi}\Delta\vec{\xi}^T)(\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}).\end{aligned}$$

(6.10) alapján ez a következőképpen írható:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_a &= \sigma^2(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T) \bullet \\ &\bullet (\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}).\end{aligned}$$

Ha a második zárójelből kiemeljük a  $\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}$  szorzatot, és beszorozzuk vele az első zárójelben található két tagot, a (6.9b) képlet többszöri alkalmazásával az egyszerűbb

$$\mathbf{B}_a = \sigma^2(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1})(\mathbf{E} - \mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1})$$

alakra jutunk. Beszorzás után egyszerűen kapjuk a tétel állítását, ha figyelembe vesszük a (6.27c) képletet is.

A kovarianciamátrix rangjának a meghatározása érdekében az  $\mathbf{R}$  mátrixot tényezőkre bontjuk:  $\mathbf{R} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$ . Mivel  $\mathbf{R}$  pozitív definit szimmetrikus mátrix, a 2.6. tételből következik, hogy ilyen felbontás lehetséges. Ezzel a kovarianciamátrix így írható:

$$\mathbf{B}_a = \sigma^2\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{K})(\mathbf{U}^T)^{-1}, \quad (6.33a)$$

ahol  $\mathbf{K}$  a következő  $m \times m$ -es mátrix:

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{U}^T\right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{U}^{-1} = \left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}. \quad (6.33b)$$

(6.27c) figyelembevételével egyszerű belátni, hogy

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K},$$

vagyis  $\mathbf{K}$  sajátértékei vagy 1-gyel, vagy 0-val egyenlők. (Lásd a 6.2. TÉTEL bizonyítását.) Az egyesek száma egyenlő  $\mathbf{K}$  rangjával. Mivel a (6.33b) képletben  $\mathbf{K}$  egyik tényezője  $\mathbf{N}^{-1}$ , amelynek a rangja  $J$  (6.4. TÉTEL), a 2.5. TÉTELBŐL következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{K}) \leq J$ . (6.27c) alapján egyszerű belátni, hogy

$$\mathbf{K} \left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{U}^{-1} \left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T.$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\left(\mathbf{C} \mathbf{U}^{-1}\right)^T$  mátrix oszlopai  $\mathbf{K}$ -nak sajátvektorai, és a megfelelő sajátértékek mind 1-gyel egyenlők. Mivel ezek az oszlopvektorok lineárisan függetlenek,<sup>58</sup> ebből az következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{K}) \geq J$ . A két egyenlőtlenség egyszerre csak úgy teljesülhet, hogy  $\text{rang}(\mathbf{K}) = J$ . Azt találtuk tehát, hogy  $\mathbf{K}$ -nak  $J$  darab sajátértéke 1-gyel,  $(m - J)$  darab pedig 0-val egyenlő. Mivel  $\mathbf{K}$  minden sajátvektora az  $\mathbf{E}$  egységmátrixnak is sajátvektora, az  $(\mathbf{E} - \mathbf{K})$  mátrixról az előbbinek éppen a fordítottját mondhatjuk ki:  $J$  darab sajátértéke 0-val,  $(m - J)$  darab pedig 1-gyel egyenlő. Ebből következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{E} - \mathbf{K}) = m - J$ .

(6.33a) alapján a 2.5. TÉTEL szerint  $\text{rang}(\mathbf{B}_a) \leq \text{rang}(\mathbf{E} - \mathbf{K}) = m - J$ . Ha a kovarianciamátrixot balról  $\mathbf{U}$ -val, jobbról  $\mathbf{U}^T$ -vel beszorozzuk, akkor az

$$\mathbf{U} \mathbf{B}_a \mathbf{U}^T = \sigma^2 (\mathbf{E} - \mathbf{K})$$

egyenlőséget kapjuk, amiből – ismét a 2.5. TÉTEL szerint – következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{B}_a) \geq \text{rang}(\mathbf{E} - \mathbf{K}) = m - J$ . E két egyenlőtlenség egyszerre csak úgy teljesülhet, hogy  $\text{rang}(\mathbf{B}_a) = m - J$ , amint a tétel állítja.

### \* $Q_{\min}$ statisztikai tulajdonságai

A kiegyenlítés nélküli esetben  $Q_{\min}$  statisztikai viselkedését a 6.2. TÉTEL szabja meg. Ennek általánosítása a

6.7. TÉTEL. Ha az illesztést végre lehet hajtani, akkor a  $Q$  funkcionál minimuma arányos egy  $(n - m + J)$  szabadsági fokú  $\chi^2$  változóval:

$$Q_{\min} = \sigma^2 \chi_{n-m+J}^2. \quad (6.34)$$

A bizonyítás a 6.2. TÉTEL bizonyításának a menetét követi. A vizsgált négyzetösszeget a

$$Q_{\min} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 = \left(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}}\right)^T \mathbf{W} \left(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}}\right)$$

alakban írjuk fel, ami (6.19a) alapján átmegy a következőbe:

<sup>58</sup> Ha az oszlopvektorok nem lennének lineárisan függetlenek, az  $\mathbf{N}$  mátrix rangja  $J$ -nél kisebb lenne.



$$Q_{\min} = (\Delta\bar{\xi} - F\Delta\mathbf{a})^T \mathbf{W} (\Delta\bar{\xi} - F\Delta\mathbf{a}).$$

$\Delta\mathbf{a}$  értékét a (6.30b) képletből vesszük. Mint a 6.2. TÉTEL bizonyításakor, a  $\mathbf{W}$  mátrixot most is tényezőkre bontjuk:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^T \mathbf{V}.$$

Ezzel

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\Delta\bar{\xi} - F\Delta\mathbf{a}) &= \mathbf{V}\Delta\bar{\xi} - (\mathbf{VFR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W} - \mathbf{VFR}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{CR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W})\Delta\bar{\xi} = \\ &= \left[ \mathbf{E} - (\mathbf{VFR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{V}^T - \mathbf{VFR}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{CR}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{V}^T) \right] (\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}) = \\ &= [\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{A}] (\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}), \end{aligned}$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{VF}(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{CR}^{-1})\mathbf{F}^T\mathbf{V}^T. \quad (6.35)$$

$\mathbf{A}$  szimmetrikus,  $n \times n$  méretű mátrix. A későbbiek kedvéért feltüntettük, hogy a képletben szereplő egységmátrix mérete  $n \times n$ . Ezzel

$$Q_{\min} = (\mathbf{V}\Delta\bar{\xi})^T (\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{A})^2 (\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}).$$

Vegyük észre, hogy ez formálisan megegyezik a (6.21a) képlettel. Mindössze annyi az eltérés, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrixot most nem (6.21b), hanem (6.35) adja meg.

Némi mátrixalgebrával meg lehet mutatni, hogy  $\mathbf{A}$  projektor, vagyis

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \quad (6.36)$$

tehát a sajátértékei vagy 1-gyel, vagy 0-val egyenlők. Az egyesek száma a mátrix rangjával egyenlő. Megmutatjuk, hogy ez  $(m - J)$ . Mivel  $\mathbf{R}$  pozitív definit és szimmetrikus, a 2.5. TÉTEL szerint lehet találni olyan  $\mathbf{U}$  mátrixot, hogy

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}.$$

Ezzel  $\mathbf{A}$  a következő alakra hozható:

$$\mathbf{A} = \mathbf{VFU}^{-1}(\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S})(\mathbf{VFU}^{-1})^T. \quad (6.37)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az itt szereplő egységmátrix mérete  $m \times m$ . Ilyen méretű az

$$\mathbf{S} = (\mathbf{CU}^{-1})^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{CU}^{-1}$$

mátrix is. Pontosan  $J$  darab olyan sajátvektora van, amelynek megfelelő sajátértékek 1-gyel egyenlők. A sajátvektorok  $\mathbf{CU}^{-1}$  transzponáltjának az oszlopai:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{CU}^{-1})^T &= (\mathbf{CU}^{-1})^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{CU}^{-1} (\mathbf{CU}^{-1})^T = \\ &= (\mathbf{CU}^{-1})^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} = (\mathbf{CU}^{-1})^T. \end{aligned}$$

Mivel a  $\mathbf{C}$  mátrix rangja  $J$ , így ezek lineárisan független sajátvektorok, amiből következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{S}) \geq J$ . Mivel  $\mathbf{S}$ -et úgy kaptuk, hogy  $\mathbf{C}$ -t bizonyos mátrixokkal szoroztuk,  $\text{rang}(\mathbf{S}) \leq \text{rang}(\mathbf{C}) = J$ . A két egyenlőtlenség csak úgy lehet egyszerre igaz, hogy  $\text{rang}(\mathbf{S}) = J$ . Eszerint  $\mathbf{S}$  nemzérus sajátértékei mind 1-gyel egyenlők.

Mivel  $\mathbf{S}$  minden sajátvektora az  $\mathbf{E}_{mm}$  egységmátrixnak is sajátvektora, az  $\mathbf{A}$  mátrix (6.37) szerinti felírásában szereplő  $(\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S})$  sajátértékei a következők:  $J$  darab 0 és  $(m - J)$  darab 1. Ezért  $\text{rang}(\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S}) = m - J$ . Szorzással a rangszám nem növekedhet, így (6.37)-ből következik, hogy

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \text{rang}(\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S}) = m - J .$$

Némi mátrixalgebrával szintén (6.37)-ből következik, hogy

$$\left(\mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\right)^{\text{T}} \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S} ,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \geq \text{rang}(\mathbf{E}_{mm} - \mathbf{S}) = m - J .$$

A két utóbbi egyenlőtlenség egyszerre csak úgy teljesülhet, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix rangja  $(m - J)$ , amint állítottuk.

(6.36) alapján belátható, hogy  $(\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A})$  is projektor:

$$(\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A})^2 = \mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A} ,$$

amivel

$$Q_{\min} = \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right)^{\text{T}} (\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A}) \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right) . \quad (6.38)$$

A 2.5. TÉTEL szerint az  $(\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A})$  projektor felírható az

$$\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A} = \mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}$$

szorzat alakjában, ahol  $\mathbf{\Lambda}$  olyan  $n \times n$  méretű diagonális mátrix, amelynek a főátlójában annyi darab 1 van, amennyi az  $(\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A})$  mátrix rangja.  $\mathbf{L}$  unitér mátrix, vagyis  $\mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{L} = \mathbf{L} \mathbf{L}^{\text{T}} = \mathbf{E}_{nn}$ . Nem részletezzük, de a fentiek mintájára belátható, hogy

$$\text{rang}(\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A}) = n - m + J .$$

A  $\mathbf{\Lambda}$  mátrixot úgy rendezzük, hogy az 1-esek az első  $(n - m + J)$  helyre kerüljenek. Legyen

$$\bar{\zeta} = \mathbf{L}\mathbf{V}\Delta\bar{\xi} ,$$

aminek a kovarianciamátrixa

$$\mathbf{M}\left(\bar{\zeta}\bar{\zeta}^{\text{T}}\right) = \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{M}\left(\Delta\bar{\xi}\Delta\bar{\xi}^{\text{T}}\right)\mathbf{V}^{\text{T}}\mathbf{L}^{\text{T}} = \sigma^2\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^{\text{T}}\mathbf{L}^{\text{T}} = \sigma^2\mathbf{E}_{nn} ,$$

tehát a  $\bar{\zeta}$  vektor komponensei független, azonos  $\sigma$  szórású valószínűségi változók. Helyettesítsük ezt a (6.38) képletbe:

$$Q_{\min} = \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right)^{\text{T}} (\mathbf{E}_{nn} - \mathbf{A}) \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right) = \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right)^{\text{T}} \left(\mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{L} - \mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}\right) \left(\mathbf{V}\Delta\bar{\xi}\right) =$$

$$= (\mathbf{LV}\Delta\bar{\xi})^T (\mathbf{E} - \mathbf{\Lambda})(\mathbf{LV}\Delta\bar{\xi}) = \bar{\xi}^T (\mathbf{E} - \mathbf{\Lambda})\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{n-m+J} \zeta_i^2 = \sigma^2 \chi_{n-m+J}^2.$$

Éppen ezt állítja a tétel.

A későbbiekben heurisztikusan is megvilágítjuk, hogy a most bizonyított 6.6. és 6.7. TÉTELEK plauzibilisek.

### \*Példa

Példaképpen tekintsük az 1. fejezetben már részben megoldott kiegyenlítési problémát. Az ottani jelölések helyett írjuk át a mérést a jelen fejezet jelöléseivel:

$$\xi_1 = 54^\circ 5', \quad \xi_2 = 50^\circ 1', \quad \xi_3 = 76^\circ 6',$$

amelyek várható értéke rendre  $a_1$ ,  $a_2$  és  $a_3$ . Ezek az illesztendő paraméterek, és ki kell elégíteniük a

$$\Psi_1(\mathbf{a}) = a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ = 0$$

mellékfeltételt. A (6.26) szerinti normálegyenletek most a következők:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left[ \sum_{i=1}^3 (\xi_i - a_i)^2 - 2\lambda(a_1 + a_2 + a_3 - 180^\circ) \right] = \xi_k - a_k + \lambda = 0,$$

( $k = 1, 2, 3$ ). A paraméterek becsült értéke tehát

$$\tilde{a}_k = \xi_k + \lambda, \quad k = 1, 2, 3.$$

$\lambda$  értékét a (6.24a) mellékfeltétel alapján kapjuk meg, vagyis

$$3\lambda + 12' = 0, \quad \lambda = -4'.$$

Ha ezeket (6.24b)-be helyettesítjük, ugyanazt kapjuk, mint az 1. fejezetben.

A jelen fejezetben azonban már képesek vagyunk a kovarianciamátrixokat is becsülni. Egyszerűen belátható, hogy most

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 1].$$

(6.9b) szerint ekkor  $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ , amivel (6.27c)-ből adódik, hogy  $\mathbf{N}$  skalár, és értéke 3. A  $\lambda$  multiplikátor szórásnégyzete ekkor (vö. (6.31))

$$D^2(\lambda) = \frac{\sigma^2}{3},$$

a háromszög szögeinek a kovarianciamátrixa pedig (vö. (6.32)):

$$\mathbf{B}_a = \sigma^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\sigma^2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a determinánsa zérus<sup>59</sup>, viszont van zérustól különböző másodrendű aldeteminánsa, vagyis a rangja 2, ahogy fent állítjuk. Hátravan még  $\sigma^2$  becslése. Mivel most  $n - m + J = 3 - 3 + 1 = 1$ , az alább bizonyított 6.7. TÉTEL szerint ez

$$s^2 = Q_{\min} = \sum_{i=1}^3 (\xi_i - \tilde{a}_i)^2 = 3\lambda^2 = 3 \cdot (4')^2,$$

amivel a paraméterek szórása  $\sqrt{2} \cdot 4' = 5,6'$ . Végeredményben a háromszög szögeinek kiegyenlített becslése

$$\tilde{a}_1 = 54^\circ 1' \pm 5,6', \quad \tilde{a}_2 = 49^\circ 57' \pm 5,6', \quad \tilde{a}_3 = 76^\circ 2' \pm 5,6'.$$

Ha konfidenciaintervallumot kívánunk szerkeszteni, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a szabadsági fokok száma most 1 (tehát szokatlanul kicsi).

### \*Kiegyenlítés a változók kifejezésével

Ugyan kevésbé elegáns, de mutatunk egy másik módszert is: a (6.24) feltételi egyenletekből  $J$  darab paraméter kifejezhető a többivel, vagyis: ha  $(m - J)$  paraméter értékét ismerjük, akkor a feltételi egyenletek meghatározzák a maradék  $J$  paraméterét. Elég tehát az illesztést az előbbi  $(m - J)$  paraméterre vonatkozóan végrehajtani. Amikor az  $\mathbf{R}$  mátrix szinguláris, csak ez a módszer használható. Mielőtt általában tárgyalnánk, az előző példán megmutatjuk, miről van szó.

Ha a feltételi egyenletből  $a_3$ -at a másik kettővel kifejezzük, akkor a következő két-paraméteres illesztésre jutunk:

$$Q = (\xi_1 - a_1)^2 + (\xi_2 - a_2)^2 + (\xi_3 - 180 + a_1 + a_2)^2 = \text{minimum}.$$

A normálegyenleteket a keresett paraméterek szerinti deriválással kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \xi_1 + \xi_3 - 180 + a_2 = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} &= \xi_2 + \xi_3 - 180 + a_1 = 0, \end{aligned}$$

aminek a megoldása

$$\tilde{a}_1 = 54^\circ 1', \quad \tilde{a}_2 = 49^\circ 57', \quad \tilde{a}_3 = 76^\circ 2'.$$

Ez ugyanaz, mint a Langrange-multiplikátorral kapott eredmény. Egyszerűen be lehet látni a következőket:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$Q_{\min} = 3 \cdot (4')^2,$$

amivel

<sup>59</sup> Például azért, mert sorainak összege zérus.

$$\mathbf{B}_a = (4')^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ezzel  $\tilde{a}_1$  és  $\tilde{a}_2$  szórása egyaránt  $\sqrt{2} \cdot 4' = 5,6'$ .  $\tilde{a}_3$  szórását a feltételből kapjuk:

$$D^2(\tilde{a}_3) = D^2(180 - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2) = D^2(\tilde{a}_1) + D^2(\tilde{a}_2) + 2 \operatorname{cov}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = 2 \cdot (4')^2.$$

Látható, hogy a két módszerrel kapott eredmények azonosak.

Megmutatjuk, hogy ez általában is így van. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a  $k \leq m - J$  sorszámú paramétereket illesztjük, és ezek illesztett értékével kifejezzük a  $k > m - J$  sorszámúakat.

Az alábbi megfontolásokban feltesszük, hogy a (6.24) feltételi egyenletek lineariálhatók. Ekkor az említett paramétereknek a többivel való kifejezése a következőt jelenti:

$$\Delta a_{k'} = \sum_{k=1}^{m-J} H_{k'k} \Delta a_k, \quad k' > m - J. \quad (6.39a)$$

Ha a mellékfeltételeket így írjuk fel, a (6.25)-ben definiált  $\mathbf{C}$  mátrixot blokkokra bonthatjuk a

$$\mathbf{C}_{J,m} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{J,m-J} & \mathbf{E}_{J,J} \end{bmatrix} \quad (6.39b)$$

alakban. Az alábbi megfontolások világosabbá tétele érdekében jelöljük a mátrixok sorainak és oszlopainak a számát.<sup>60</sup>

A deriváltak  $\mathbf{F}$  mátrixából [vö. (6.9a)] most el kell hagynunk a nem illesztett paraméterekhez tartozó oszlopokat, a többit meg módosítanunk kell, hiszen az illesztőfüggvény most két módon függ az illesztett,  $k \leq m - J$  sorszámú paraméterektől: egyrészt közvetlenül, másrészt a (6.39a) képletben kifejezett paramétereken keresztül:

$$F'_{ik} = \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} + \sum_{k'=m-J+1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_{k'}} H_{k'k}, \quad k \leq m - J.$$

Végeredményben az eredeti  $\mathbf{F}_{n,m}$  mátrix helyett az illesztésben az

$$\mathbf{F}'_{n,m-J} = \mathbf{F}_{n,m} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m-J,m-J} \\ \mathbf{H}_{J,m-J} \end{bmatrix}$$

mátrixot használjuk. Így az eredetileg  $m$  oszlopú  $\mathbf{F}$  mátrix az  $(m - J)$  oszlopú  $\mathbf{F}'$  mátrixszá transzformálódik. Erre változatlanul alkalmazhatjuk a 6.3. és 6.4. alfejezetekben szereplő képleteket és tételeket. Ha iterálni kell, az  $\mathbf{F}$  mátrix transzformációját minden lépésben el kell végezni. Mint már említettük, a két módszer egyenértékű, amikor mindkét módszer alkalmazható (vagyis az  $\mathbf{R}$  mátrix nem szinguláris), legfeljebb csak az illesztés matematikai formalizmusa különböző, vagyis bebizonyítjuk a következő tételt:

**6.8. TÉTEL.** A Lagrange-multiplikátorok, illetve egyes paraméterek kifejezésével történő kiegyenlítés azonos eredményeket ad, amennyiben érvényes a feltételi egyenletek és az illesztés lineáris közelítése.

<sup>60</sup> Az itt szereplő  $\mathbf{H}$  mátrix nem tévesztendő össze a (6.17)-ben szereplő  $\mathbf{H}$  mátrixszal.

Legyen  $\Delta \mathbf{a}'$  a teljes  $\Delta \mathbf{a}$  vektor első  $(m - J)$  komponenséből képzett vektor. Ekkor (6.39a) alapján írhatjuk:

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m-J, m-J} \\ \mathbf{H}_{J, m-J} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{a}' .$$

A (6.9b)-ben definiált  $\mathbf{R}$  mátrix helyett most az

$$\mathbf{R}'_{m-J, m-J} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m-J, m-J} & \mathbf{H}_{J, m-J}^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_{m, m} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m-J, m-J} \\ \mathbf{H}_{J, m-J} \end{bmatrix}$$

mátrixszal dolgozunk. A (6.12a) képlet átmegy az

$$\mathbf{F}'^T \mathbf{W} \Delta \bar{\xi} - \mathbf{R}' \Delta \mathbf{a}' = \mathbf{0} \quad (6.40a)$$

egyenletbe.<sup>61</sup> Ebből kifejezzük  $\Delta \mathbf{a}'$ -t, majd ezt (6.39a)-ba helyettesítve kapjuk a  $\Delta \mathbf{a}$  vektor többi komponensét. Ez az utóbbi lépés azt jelenti, hogy  $\Delta \mathbf{a}$  kielégíti a

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (6.40b)$$

egyenletet. Ezen a módon tehát – (6.12b) analógiájára – a  $\Delta \mathbf{a}$  vektort kifejeztük a  $\Delta \bar{\xi}$  vektorral. A tétel bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy a Lagrange-multiplikátoros eljárással kapott  $\Delta \mathbf{a}$  kielégíti a (6.40) egyenleteket.

A (6.40b) egyenletet nyilvánvalóan kielégíti, hiszen a Lagrange-multiplikátoros eljárásban a (6.28) egyenletből indultunk ki, amely azonos (6.40b)-vel. Fenti képleteink alapján (6.40a) részletes alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\xi} - \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

A Lagrange-multiplikátoros módszer szerint ugyanezt a szerepet játsszák a (6.29) egyenletek. A két módszer egyenértékűségének bizonyításához tehát elég belátni, hogy a (6.29a) egyenlet ugyanezt az összefüggést jelenti a  $\Delta \mathbf{a}$  és  $\Delta \bar{\xi}$  vektorok között. (6.29a)-t balról beszorozzuk az  $\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix}$  mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\xi} - \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \Delta \bar{\lambda} = \mathbf{0} .$$

Ez akkor azonos (6.40b)-vel, ha utóbbi egyenletünk bal oldalán eltűnik az utolsó tag. Ez pedig fennáll, hiszen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{H}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^T \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = -\mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T = \mathbf{0} .$$

Beláttuk tehát, hogy  $\Delta \mathbf{a}$  kielégíti a (6.40b) egyenletet is, amivel a tételt bebizonyítottuk.

A most bizonyított tétel érthetővé teszi korábbi tételeinket. A (6.24) feltételi egyenletek csökkentik az illesztendő paraméterek számát: látszólag  $m$  paramétert illesztünk, de valójában csak  $(m - J)$  függetlenül választható paramétert. Ha ennek figyelembevételével alkalmazzuk a 6.2. TÉTELT, belátjuk, hogy  $Q_{\min}$  szabadsági fokainak a száma nem  $n - m$ , hanem  $n - (m - J) = n - m + J$ . Az illesztett (és kifejezett) paraméterek

<sup>61</sup> A mátrixok sorainak és oszlopainak a számát a továbbiakban nem jelöljük, mert az eddigiekből világos.

kovarianciamátrixának ugyanebből az okból csökken le a rangja a ténylegesen illesztett paraméterek számára.

A Lagrange-multiplikátorokkal végzett iteráció a 6.8. TÉTEL szerint megfelel egy kevesebb paraméterre vonatkozó közönséges iterációnak. Tehát az utóbbi konvergenciájára vonatkozó megállapításaink (vö. 6.2. alfejezet) átvihetők a kiegyenlítéses iterációra is.

Az előbbieken tárgyalt példának a változók kifejezésével való megoldása a 7.6. alfejezetben található.

### \*6.6. A linearizálás kérdései

Több helyen említettük, hogy az illesztést lehet az illesztőfüggvény linearizálása útján is végrehajtani. Nos, az alábbiakban az ezzel összefüggő problémákat fogjuk megbeszélni.

#### \*Linearizálás transzformációval

Az illesztést egyszerűsíthetjük, amikor van olyan  $h(t)$  transzformációs függvény, hogy az illesztőfüggvény a

$$h[f(x_i, \mathbf{a})] = b_1 + b_2 x_i$$

alakra hozható, ahol  $b_1$  és  $b_2$  lineáris regresszióval becsülhető együtthatók. Példák a  $h(t)$  függvényre:

$$h(t) = \ln t, \quad h(t) = \arccos t, \quad h(t) = 1/\sqrt{t}$$

és így tovább. Az általuk linearizálható illesztőfüggvények rendre

$$\begin{aligned} a_1 e^{-a_2 x_i}, \quad b_1 &= \ln a_1, \quad b_2 = -a_2, \\ a_1 \cos[a_2(x_i - a_3)], \quad b_1 &= -a_2 a_3, \quad b_2 = a_2, \\ \frac{a_1}{(x_i + a_2)^2}, \quad b_1 &= \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}. \end{aligned}$$

A  $h(t)$  transzformációt persze nem az illesztőfüggvényen hajtjuk végre, hanem a közvetlenül mért adatokon. Ez azt jelenti, hogy a

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i [h(\xi_i) - b_1 - b_2 x_i]^2 \quad (6.41)$$

funkcionálnak keressük a minimumát  $b_1$  és  $b_2$  függvényében. A  $p_i$  súlyokat a (6.2) képlet szerint határozzuk meg. A 6.3. alfejezethez hasonlóan legyen

$$y_i = M(\xi_i) \quad \text{és} \quad \Delta \xi_i = \xi_i - y_i.$$

Fejtsük a transzformációs függvényt a várható érték körül Taylor-sorba:

$$h(\xi_i) = h(y_i) + h'(y_i) \Delta \xi_i + \frac{1}{2} h''(y_i) (\Delta \xi_i)^2 + \dots$$

(6.2) szellemében a súlyok fordítva arányosak a transzformált mennyiségek szórásnegyzetével. Célszerű megtartani a  $\xi_i$  mennyiségekhez tartozó eredeti arányossági tényezőt ( $\sigma^2$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{p_i} &= D^2[h(\xi_i)] = M\left\{[h(\xi_i) - h(y_i)]^2\right\} = \\ &= [h'(y_i)]^2 D^2(\xi_i) + \dots = \frac{\sigma^2}{w_i} [h'(y_i)]^2 + \dots\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a súlyokat a

$$p_i = \frac{w_i}{[h'(y_i)]^2} \quad (6.42)$$

képlet szerint kell megválasztanunk, ha azt akarjuk, hogy a  $b_1$  és  $b_2$  paraméterek kovarianciamátrixára használható legyen a (6.13) alatt kapott képlet.<sup>62</sup>

A linearizálás helyessége attól függ, mennyire érvényes a (6.1) képlet a transzformált mennyiségekre. (6.1) akkor lenne érvényes, ha minden  $i$ -re fennállna, hogy

$$M[h(\xi_i)] = h[M(\xi_i)].$$

Ez pedig csak akkor lehet igaz, amikor  $h(t)$  lineáris függvény, márpedig a linearizálásra csak akkor van szükség, amikor  $h(t)$  *nem* lineáris. A transzformált mennyiségekkel végzett illesztés tehát torzított becslést ad a  $b_1$  és  $b_2$  paraméterekre, amire a transzformált mennyiségeket korrigálni kell. Ha az eredeti  $\xi_i$  adatok torzítatlanok, a sorfejtés lineáris tagjának várható értéke zérus, de a kvadratikus tagé nem. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned}M[h(\xi_i)] &= h(y_i) + \frac{1}{2} h''(y_i) D^2(\xi_i) + \dots = \\ &= h(y_i) + \frac{1}{2} h''(y_i) \frac{\sigma^2}{w_i} + \dots,\end{aligned}$$

[vö. (6.2)], vagyis (6.41) helyett a

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i \left[ h(\xi_i) - \frac{1}{2} h''(y_i) \frac{\sigma^2}{w_i} - b_1 - b_2 x_i \right]^2$$

funkcionál minimumát kell keresnünk.

A 7.1. alfejezetben tárgyaljuk a lineáris regressziót. Az ott kapott (7.3) normálegyenletet az itteni esetre alkalmazva a következőt kapjuk, ha a korrekciót *nem* hajtjuk végre:

$$\mathbf{Rb} = \mathbf{g}, \quad (6.43)$$

ahol  $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2)$ ,

$$R_{11} = \sum_{i=1}^n p_i, \quad R_{12} = R_{21} = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad R_{22} = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2,$$

<sup>62</sup> A (6.41) funkcionál minimalizálása révén a  $b_1$  és  $b_2$  paraméterekre kapott becslés torzított vagy torzítatlan volta nem függ a  $p_i$  súlyok megválasztásától. Viszont a kovarianciamátrixra megadott (6.13) képlet csak a (6.42) szerinti súlyok mellett lesz érvényes. Ha mégis más súlyokat használunk, ezt a képletet módosítani kell, amit a (6.14) képletet követően mondottak értelmében tanácsos elkerülni.



továbbá

$$g_1 = \sum_{i=1}^n p_i h(\xi_i), \quad g_2 = \sum_{i=1}^n p_i h(\xi_i) x_i.$$

A (6.43) egyenletrendszer megoldását a

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g} \quad (6.44)$$

képlet adja meg. A  $h(t)$  függvény nemlineáris voltára úgy korrigálhatunk, hogy a  $\mathbf{g}$  vektorból levonjuk a  $\mathbf{g}^c$  vektort, amelynek a következők az összetevői:

$$g_1^c = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{h''(y_i)}{w_i}, \quad g_2^c = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{h''(y_i)}{w_i} x_i.$$

Ezzel a paraméterek korrigált becslése

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{g}^c).$$

Vegyük észre, hogy a korrekció ugyanúgy  $\sigma^2$ -tel arányos, mint a (6.18) szerint számolt torzítás. Ha a súlyokat (6.42)-ből helyettesítjük, a korrekció

$$g_1^c = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{h''(y_i)}{[h'(y_i)]^2} \approx \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{h''(\xi_i)}{[h'(\xi_i)]^2},$$

$$g_2^c = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{h''(y_i)}{[h'(y_i)]^2} \approx \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{h''(\xi_i)}{[h'(\xi_i)]^2}.$$

A kapott eredmények értékeléséhez nézzünk egy példát! Legyen  $h(t)$  az exponenciális illesztőfüggvényekhez gyakran alkalmazott  $\ln t$  függvény. Ekkor

$$h(t) = \ln t, \quad h'(t) = 1/t, \quad h''(t) = -1/t^2.$$

A mérési adatok a 6.1. táblázatban találhatóak, amelyek Poisson-eloszlású valószínűségi változók, tehát

$$w_i = \frac{1}{y_i},$$

[vö. (6.44), 6.7. alfejezet]. Ezzel (6.42) alapján

$$p_i = y_i \approx \xi_i.$$

Mivel az eredeti  $w_i$  súlyok egyenlők a szórásnégyzetek reciprokával, feltehetjük, hogy  $\sigma^2 = 1$ .

Az eredeti illesztőfüggvényre iterációval elvégzett illesztés eredménye:

$$\tilde{a}_1 = 9912,2 \pm 71,8 \quad \tilde{a}_2 = 0,2000 \pm 0,0011.$$

E becslések torzítása (6.18) szerint:

$$\delta a_1 = -0,647 \quad \text{és} \quad \delta a_2 = -1,56 \cdot 10^{-5},$$

ami gyakorlatilag elhanyagolható. A szabadsági fokok száma  $n - m = 18$ . A Student-eloszlásnak ehhez  $\varepsilon = 0,05$  mellett tartozó kvantilise 2,1009, vagyis a konfidenciaintervallumok:

$$(9761,4; 10063,0) \quad (0,1977; 0,2023).$$

Megjegyezzük, hogy a 6.1. táblázat generálásakor felvett paraméterek valódi értéke:  $a_1 = 10000$  és  $a_2 = 0,2$ . Ezek benne vannak a kapott intervallumokban.  $Q_{\min} = 16,33$ , ami megfelel egy 18 szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlásnak.

6.1. táblázat. Exponenciális illesztés linearizálással

$x_i$	$\xi_i$	$\ln \xi_i$	korrekció
1	8118	9,0018	-0,00006
2	6700	8,8099	-0,00007
3	5474	8,6078	-0,00009
4	4471	8,4054	-0,00011
5	3649	8,2022	-0,00014
6	2916	7,9780	-0,00017
7	2466	7,8104	-0,00020
8	1985	7,5934	-0,00025
9	1595	7,3746	-0,00031
10	1323	7,1877	-0,00038
11	1104	7,0067	-0,00045
12	912	6,8156	-0,00055
13	728	6,5903	-0,00069
14	597	6,3919	-0,00084
15	505	6,2246	-0,00099
16	418	6,0355	-0,00120
17	349	5,8551	-0,00143
18	238	5,4723	-0,00210
19	237	5,4681	-0,00211
20	213	5,3613	-0,00235

A 6.1. táblázat harmadik oszlopában levő transzformált mennyiségekre (6.44) alapján a

$$\tilde{b}_1 = 9,2013 \pm 0,0076 \quad \tilde{b}_2 = -0,1997 \pm 0,0011$$

becsléseket kapjuk. Ha ezeket az eredeti paraméterekre számoljuk át, akkor az

$$\tilde{a}_1 = e^{\tilde{b}_1} = 9910,0 \pm 75,3 \quad \tilde{a}_2 = -\tilde{b}_2 = 0,1997 \pm 0,0011.$$

eredményeket kapjuk. Ezek a becslések nyilvánvalóan ekvivalensek az iterációval kapott illesztés eredményeivel. Még a  $Q_{\min} = 16,53$  négyzetösszeg is gyakorlatilag azonos.  $\tilde{a}_1$  szórását  $\tilde{b}_1$  szórása segítségével kapjuk:

$$D(\tilde{a}_1) = e^{\tilde{b}_1} D(\tilde{b}_1) = 9910,0 \cdot 0,0076 = 75,3.$$

Erre a dologra a hibaterjedéssel foglalkozó 7.5. alfejezetben térünk vissza részletesen.

Befejezésül nézzük meg a korrekciót. Ha a megadott képletek alapján kiszámítjuk a  $\mathbf{g}^c$  vektort, a következő korrekciók adódnak:

$$\delta b_1 = 1,3 \cdot 10^{-4} \quad \text{és} \quad \delta b_2 = -7 \cdot 10^{-5},$$

amit az eredeti paraméterekre átszámolva a

$$\delta a_1 = 1,29 \quad \text{és} \quad \delta a_2 = 7 \cdot 10^{-5}$$

korrekciókat kapjuk, amelyek közelítőleg megegyeznek a közvetlen illesztés torzításával. A fentiek és a hibaterjedés szabályai szerint ugyanis

$$\delta a_1 = e^{\tilde{\delta}_1} \delta b_1 = 9910,0 \cdot 1,3 \cdot 10^{-4} = 1,29 \quad \delta a_2 = -\delta b_2.$$

Végeredményben azt látjuk, hogy a linearizálás után kapott paraméterbecslések *egyenértékűek* az eredeti illesztőfüggvénnyel és iterációval adódó eredményekkel, ha a transzformációt kellő gondossággal hajtjuk végre, például kiszámítjuk a  $p_i$  súlyokat. Mégsem lenne szerencsés, ha méréseink kiértékelésében erre a módszerre próbálnánk berendezkedni. Ennek pedig nem elvi, hanem gyakorlati okai vannak:

1. Az illesztőfüggvények nagy része nem linearizálható. Ezért nem kerülhetjük meg a normálegyenletek iterációval való megoldását.
2. Ha a linearizálást korrektül hajtjuk végre, annyi mellékszámításra van szükség, hogy végeredményben több munkát végzünk, mintha végrehajtanánk az iterációt. A tapasztalat egyébként azt mutatja, hogy linearizálható illesztőfüggvények esetében három-négy lépésben konvergál az iteráció.
3. A mérési adatok kiértékelésében a jövő útja jól kidolgozott számítógépi programok használata. Ilyenek nélkül kísérleti fizikus manapság aligha dolgozhat. A közhasznú programok azonban csak az iteráció kezdőértékének becslésére használják a linearizációt.

### \*Linearizálás sorfejtéssel

Az illesztőfüggvény linearizálásának általánosan alkalmazható módja a függvény sorfejtése:

$$f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) = f(x_i, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} (\tilde{a}_k - a_k) = f(x_i, \mathbf{a}) + [\mathbf{F}\Delta\mathbf{a}]_i$$

[vö. (6.45)]. Ebben a közelítésben a  $\Delta\mathbf{a}$  vektor komponenseit tekintjük illesztendő paramétereknek. Mivel az illesztőfüggvény ezekben lineáris, ezt a módszert is nevezhetjük *linearizálásnak*. Tulajdonképpen a teljes 6.3. alfejezetben ezt a módszert alkalmaztuk.

A legtöbb kézikönyv szintén ebben a felfogásban tárgyalja a függvényillesztést. Nem mindegy azonban, milyen paraméterértékek mellett számítjuk ki az elméletben szereplő mátrixokat ( $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{R}$  stb.). Fenti levezetéseinkből következik, hogy ez nem lehet más, mint a (6.5) normálegyenletek megoldása, de legalábbis valami ehhez közeli paramétervektor. Emiatt nem lehet megkerülni a 6.2. alfejezetben tárgyalt iterációt.

A linearizálás hibája a (6.17) és (6.18) egyenletben kiszámított  $\delta\mathbf{a}$  torzítás. Megbeszéltük, hogy ez általában elhanyagolható, de ennek ellenére célszerű becsülni annak érdekében, hogy erről meggyőződjünk.

### \*6.7. A súlyozás

A fentiekben a legkisebb négyzetek módszerét használtuk, ami akkor felel meg a maximális valószínűség elvének, amikor a közvetlenül mért  $\xi_i$  mennyiségek Gauss-eloszlásúak. A gyakorlatban előforduló mérések esetében szereplő valószínűségi eloszlások azonban más típusúak is lehetnek. A maximális valószínűség elve – érdekes módon – formálisan ekkor is a legkisebb négyzetek módszerének megfelelő egyenle-

tekre vezet, ha a  $w_i$  súlyokat alkalmasan választjuk meg. Ebben az alfejezetben ezt fogjuk tárgyalni néhány nevezetes eloszlásra vonatkozóan.

### \*Poisson-eloszlás

Poisson-eloszlás esetében a közvetlenül mért  $\xi_i$  mennyiségek együttes eloszlásfüggvénye

$$L(\mathbf{x}, \vec{\xi}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n e^{-f(x_i, \mathbf{a})} \frac{[f(x_i, \mathbf{a})]^{\xi_i}}{\xi_i!}.$$

A maximális valószínűség elve szerint a paraméterek becült értékét a következő egyenletrendszer megoldása adja ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \vec{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_k} &= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} + \frac{\xi_i}{f(x_i, \mathbf{a})} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})}{f(x_i, \mathbf{a})} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

ami ugyanolyan alakú, mint a (6.5) alatti normálegyenletek, ha a súlyokat a

$$w_i = \frac{1}{f(x_i, \mathbf{a})} \approx \frac{1}{\xi_i} \quad (6.46a)$$

képlet szerint választjuk meg. Vegyük észre, hogy ez éppen a szórásnégyzet reciprokaival való súlyozás, hiszen Poisson-eloszlás esetében

$$D^2(\xi_i) = M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}) \approx \xi_i. \quad (6.46b)$$

Ezért lehet a Poisson-eloszlást Gauss-eloszlással közelíteni.

Könnyű belátni, hogy a (6.45) normálegyenleteket úgy is megkaphatjuk, hogy a

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{[\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})]^2}{f(x_i, \mathbf{a})} \approx \sum_{i=1}^n \frac{[\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})]^2}{\xi_i}$$

funkcionál minimumát keressük, de deriválásakor a súlyfüggvényt nem deriváljuk.

Előbbi képleteinkben a súly kiszámításakor az illesztőfüggvényt  $\xi_i$ -vel közelítettük. Mindkét súlyozás problémás, mert torzítást okozhat. Példaként az  $f(x, \mathbf{a}) = a$  illesztőfüggvényt tekintjük. Ekkor a (6.45) normálegyenletek megoldása

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \xi_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i}} = \frac{1}{1/\bar{\xi}}.$$

Belátható (lásd alább), hogy

$$M(\tilde{a}) \approx a - 1 - 1/a,$$

ami kis beütésszámok esetében jelentős torzítás. Erősen nem lineáris illesztő függvények esetében pedig a  $w = 1/f(x, \mathbf{a})$  súlyozás okoz torzítást: hajlamos a nagy beütésszámokhoz túlságosan kis súlyokat rendelni. Például a 6.6. alfejezetben tárgyalt exponenciális illesztőfüggvény ( $a_1 e^{-a_2 x_i}$ ) esetében az  $a_1$  paraméter értéke a nagyobb értékek felé tolódik el, hiszen  $Q$  értéke nem csak akkor csökken, ha a  $[\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})]$  eltérések csökkennek, hanem akkor is, amikor a súlyok lecsökkennek. Ennek egyszerű módja pedig  $a_1$  növelése. Emiatt  $a_2$ -re is nagyobb becslést kapunk, ami torzított becslést jelent. A legjobb megoldás a méréseket úgy tervezni, hogy a beütésszámok nagyok legyenek, mert akkor az  $1/\xi_i$ -vel való súlyozás kifogástalan.

Befejezésül belátjuk legutóbbi képletünket. Amikor  $\xi$  Poisson-eloszlású,

$$M\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k \cdot k!}.$$

Ezt az összeget a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a} \left[ \frac{a^k}{(k+1)!} + \frac{a^k}{k \cdot (k+1)!} \right] = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{a} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{(k-1) \cdot k!} \approx \frac{1}{a} + \frac{1}{a} M\left(\frac{1}{\xi-1}\right). \end{aligned}$$

Az  $e^{-a}$ -rendű tagokat elhanyagoltuk. Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{\xi-1}\right) &= \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{(k-1) \cdot k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k \cdot k!} + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k(k-1) \cdot k!} \approx \\ &\approx M\left(\frac{1}{\xi}\right) + M\left(\frac{1}{\xi(\xi-1)}\right) \approx M\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{a^2} + O\left(\frac{1}{a^3}\right), \end{aligned}$$

amit előbbi egyenletünkbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$M\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1/a + 1/a^3}{1 - 1/a} = \frac{1 + 1/a^2}{a - 1},$$

vagyis

$$\frac{1}{M\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \frac{a-1}{1 + \frac{1}{a^2}} = a - 1 - \frac{1}{a} + O\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

Megjegyezzük, hogy ez a sorfejtés  $a$  egészen kis értékeire ( $a < 5$ ) tovább finomítandó lenne (az  $e^{-a}$ -rendű tagok elhanyagolása miatt).

### \*Gauss-eloszlás, de $x_i$ is valószínűségi változó

Az illesztőfüggvény  $x_i$  független változóját általában konstansnak tételezzük fel. Vannak azonban esetek, amikor  $x_i$  is valószínűségi változó. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ezek is visszavezethetők a konstans  $x_i$  esetre, ha a súlyokat alkalmasan választjuk meg. Feltesszük, hogy mind  $x_i$ , mind  $\xi_i$  Gauss-eloszlású. Az utóbbiak

együttes sűrűségfüggvényét (6.3)-ban felírtuk. Ezt ki kell egészítenünk az  $x_i$  változókéval:

$$L_i(x_i, x_{i0}) = \frac{1}{\sigma_{xi} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - x_{i0})^2}{2\sigma_{xi}^2} \right\},$$

ahol

$$x_{i0} = M(x_i), \quad \sigma_{xi}^2 = D^2(x_i).$$

A későbbiekben szükségünk lesz még a

$$\sigma_{\xi i}^2 = D^2(\xi_i)$$

jelölésre. Az  $x_i$  és  $\xi_i$  változók együttes sűrűségfüggvénye

$$L(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{a}) = L_0(\mathbf{x}_0, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{a}) \prod_{i=1}^n L_i(x_i, x_{i0}).$$

Ezek deriváltját kell zérussal egyenlővé tenni  $k = 1, 2, \dots, m$ -re:

$$G_k(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{a})}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - f(x_{i0}, \mathbf{a})}{\sigma_{\xi i}^2} \frac{\partial f(x_{i0}, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0, \quad (6.47a)$$

illetve  $i = 1, 2, \dots, n$ -re:

$$g_i(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \ln L}{\partial x_{i0}} = \frac{\xi_i - f(x_{i0}, \mathbf{a})}{\sigma_{\xi i}^2} \frac{\partial f(x_{i0}, \mathbf{a})}{\partial x_{i0}} + \frac{x_i - x_{i0}}{\sigma_{xi}^2} = 0. \quad (6.47b)$$

Ezekből az egyenletekből kiküszöböljük az  $x_{i0}$ -akat, hogy bennük csak a mért mennyiségek, az  $x_i$ -k maradjanak. Ebből a célból  $f(\dots)$ -et sorba fejtsük:

$$f(x_{i0}, \mathbf{a}) = f(x_i, \mathbf{a}) - (x_i - x_{i0}) \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i},$$

amivel

$$\xi_i - f(x_{i0}, \mathbf{a}) = \xi_i - f(x_i, \mathbf{a}) + (x_i - x_{i0}) \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i}.$$

Ha alkalmazzuk a  $\frac{\partial f(x_{i0}, \mathbf{a})}{\partial x_{i0}} \approx \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i}$  közelítést, ezt (6.47b)-be helyettesítve írhatjuk:

$$x_i - \tilde{x}_{i0} = -\frac{[\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})] \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i}}{\left[ \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2 + \frac{\sigma_{\xi i}^2}{\sigma_{xi}^2}},$$

vagyis

$$\xi_i - f(\tilde{x}_{i0}, \mathbf{a}) = [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})] \frac{\sigma_{\xi_i}^2}{\sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{xi}^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2}.$$

Ezzel  $x_{i0}$ -at kiküszöböltük, így az  $a_k$  paraméterekre vonatkozó normálegyenletek

$$G_k(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{x}}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})}{\sigma_i^2} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0 \quad (6.48a)$$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ), ahol

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{xi}^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2 = \frac{\sigma^2}{w_i} \quad (6.48b)$$

Ez nem más, mint a  $[\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})]$  különbség szórásnégyzete. Ezután úgy is vehetjük, mintha  $x_i$  állandó lenne, de  $\xi_i$  szórásnégyzetét (6.48b) szerint nagyobbak kell vennünk.

Ha az illesztőfüggvénynek több független változója van:  $f(x, t, z, \dots, \mathbf{a})$ , akkor a fentiek mintájára könnyen belátható, hogy a helyes súlyozás

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = & \sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{xi}^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, t_i, z_i, \dots, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2 + \\ & + \sigma_{ti}^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, t_i, z_i, \dots, \mathbf{a})}{\partial t_i} \right]^2 + \sigma_{zi}^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, t_i, z_i, \dots, \mathbf{a})}{\partial z_i} \right]^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.46c)$$

Tegyük fel például, hogy a  $\xi_i$  mennyiségek aktivációs fóliák mért aktivitásai, és az  $x_i$  változók a fóliák helyét adják meg a reaktorban. Az  $f(x_i, \mathbf{a})$  illesztő függvény most nem adja meg a  $\xi_i$  mennyiségek várható értékét, mert két korrekciót kell alkalmazni. Egyrészt figyelembe kell venni a laboratórium háttérét, vagyis azt az aktivitást, amelyet a fóliák nélkül mérnénk. A  $\xi_i$  mérése közben ezt  $h_i$ -vel jelöljük. Másrészt a fóliák különbözőek, tehát kalibrálni kell őket. A kalibrációs tényező az  $i$ -edik mérésre vonatkozóan legyen  $c_i$ . Így tehát  $\xi_i$  várható értékét (6.1) helyett az

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}) = c_i f(x_i, \mathbf{a}) + h_i$$

képlet adja meg. Ha az itt megjelent  $c_i$  és  $h_i$  mennyiségek valószínűségi változók, akkor (6.46c) szerint a súlyozásra a következő eredő szórásnégyzeteket kell használni:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{xi}^2 c_i^2 \left[ \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2 + \sigma_{ci}^2 [f(x_i, \mathbf{a})]^2 + \sigma_{hi}^2.$$

Ez a képlet akkor érvényes, ha a  $c_i$  és  $h_i$  mennyiségeket minden  $i$ -re külön mérjük. Ha bizonyos  $i$ -kre ugyanazt a mért értéket használjuk, akkor az itt mutatott módszer már nem alkalmazható. A maximum likelihood módszer szerint korrekt eljárást arra az esetre vázoljuk, amikor a  $h$  háttérét egyszer mértük meg, és minden  $i$ -re ugyanazt az értéket használjuk. Ekkor a likelihood-függvény felírásában szükségünk lesz  $c_i$  és  $h$  likelihood-függvényére:

$$L_i^c(c_i, c_{i0}) = \frac{1}{\sigma_{c_i} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(c_i - c_{i0})^2}{2\sigma_{c_i}^2}\right\}$$

és

$$L^h(h, h_0) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(h - h_0)^2}{2\sigma_h^2}\right\},$$

továbbá (6.4)-et módosítanunk kell:

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - c_{i0} f(x_{i0}, \mathbf{a}) - h_0]^2.$$

Ezzel a mérés teljes likelihood-függvénye

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{c}, h, \bar{\xi}, \mathbf{a}) = L_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, h_0, \bar{\xi}, \mathbf{a}) L^h(h, h_0) \prod_{i=1}^n L_i^x(x_i, x_{i0}) L_i^c(c_i, c_{i0}).$$

A levezetések ezután a fentiek mintájára folytatódnak. A részletek kidolgozását az Olvasóra bízunk.

### \*Számlálás holtidővel

Ha nem minden  $i$ -re azonos a számlálási idő, akkor az illesztőfüggvényt a következő alakúra célszerű választani:

$$M(\xi_i) = T_i f(x_i, \mathbf{a}).$$

$f(x_i, \mathbf{a})$  most az *időegységre eső beütésszám* várható értékét adja meg. Minden számlálónak van holtideje, ami azt jelenti, hogy egy részecske megszámlálását követően egy bizonyos  $\tau$  ideig nem képes továbbiakat fogadni. Emiatt számlálási veszteségek lépnek fel, amelyek figyelembevételére szolgál a *holtidő-korrektíós tényező*:

$$\nu_i = \frac{T_i}{T_i - \xi_i \tau},$$

ami azt jelenti, hogy a megszámlált részecskék  $\xi_i$  számának várható értéke

$$M(\xi_i | \tau) = \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{\nu_i}.$$

Ha előbbi képletünkben ezt helyettesítjük  $\xi_i$  helyére, a következőt kapjuk:

$$\nu_i \approx \frac{T_i}{T_i - \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{\nu_i} \tau} = \frac{1}{1 - \frac{f(x_i, \mathbf{a})}{\nu_i} \tau},$$

amit átrendezve a

$$\nu_i \approx 1 + f(x_i, \mathbf{a}) \tau$$

összefüggés adódik. Ezzel a mért beütésszám várható értéke így is írható:



$$M(\xi_i|\tau) \approx \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{1 + f(x_i, \mathbf{a})\tau}.$$

Nézzük meg, mit ad a maximális valószínűség módszere ebben az esetben.  $\tau \neq 0$  holtidő esetén  $\xi_i$  nem Poisson-eloszlású. Ismeretes ([1], Jánossy), hogy a mérési eredmények együttes valószínűsége

$$L(\mathbf{x}, \bar{\xi}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n \exp[-T_i^{\text{eff}} f(x_i, \mathbf{a})] \frac{[T_i^{\text{eff}} f(x_i, \mathbf{a})]^{\xi_i}}{\xi_i!}, \quad (6.49)$$

ahol

$$T_i^{\text{eff}} = T_i - (\xi_i - 1)\tau \approx T_i - \xi_i\tau$$

az *effektív számlálási idő*. A kieső idő – pontosan számolva – azért  $(\xi_i - 1)\tau$ , mert a számláló indítását követően az első részecskét még korlátozás nélkül számlálhatjuk meg, viszont mindegyik megszámlált részecske  $\tau$  időre blokkolja a számlálót.<sup>63</sup> Így tehát a másodiktól kezdve mindegyik részecske érkezése előtt  $\tau$  idő kiesik. A holtidő-korrektíós tényezőt az effektív számlálási idővel is kifejezhetjük:

$$\nu_i = \frac{T_i}{T_i^{\text{eff}}}.$$

A maximális valószínűség módszere a következő normálegyenletekre vezet:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - T_i f(x_i, \mathbf{a})/\nu_i}{T_i f(x_i, \mathbf{a})/\nu_i} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{T_i}{\nu_i} = 0,$$

ami ugyanaz, mint a legkisebb négyzetek módszere, ha

$$w_i = \frac{1}{T_i f(x_i, \mathbf{a})/\nu_i}. \quad (6.50)$$

Ez látszólag a következő funkcionál deriváltja:

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n w_i \left[ \xi_i - \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{\nu_i} \right]^2,$$

ha a súlyok deriváltját elhagyjuk. (6.49) alapján meg lehet mutatni, hogy a szögletes zárójelben álló mennyiség éppen  $\xi_i$  várható értéke, ahogy fentebb már heurisztikusan felírtuk:

$$M(\xi_i) \approx \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{\nu_i}.$$

A (6.50) szerinti súlyozás nem megfelelő, mert a súlyok nem arányosak  $\xi_i$  szórásnégyzetének a reciprokával. A (6.49) eloszlásfüggvény alapján meg lehet mutatni, hogy

<sup>63</sup> Ez az állítás csak közelítőleg igaz, ugyanis a számlálóberendezést egy részecske attól függetlenül blokkolja, hogy megszámláljuk-e vagy sem. Tehát előfordulhat, hogy a számlálás kezdete éppen egy blokkolt,  $\tau$  hosszúságú intervallumra esik. Ennek a valószínűsége azonban kicsi, hacsak a részecskék nem érkeznek túlságosan sűrűn. Ez utóbbi esetben azonban az egész alábbi elmélet már érvényét veszti.

$$D^2(\xi_i) = \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{v_i^3} \approx \frac{\xi_i}{v_i^2}.$$

A helyes egyenletek tehát:

$$G_k(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n w_i \left[ \xi_i - \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{v_i} \right] \frac{\partial T_i f(x_i, \mathbf{a})}{v_i \partial a_k} = 0,$$

ahol

$$\frac{\sigma^2}{w_i} = \frac{T_i f(x_i, \mathbf{a})}{v_i^3} + \sigma_{xi}^2 \left[ \frac{T_i}{v_i} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2 \approx \frac{\xi_i + \sigma_{xi}^2 \left[ \frac{T_i \partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial x_i} \right]^2}{v_i^2}.$$

A holtidő-korrekciónélkül becsült szórásnégyzeteket tehát a holtidő-korrekción tényező négyzetével kell osztani. Az így kapott becslés nem felel meg szigorúan a maximális valószínűség elvének, de  $Q$  szempontjából megfelelő, amin azt értjük, hogy érvényes marad a 6.2. TÉTEL. Érdemes még megjegyezni, hogy a holtidőre korrigált  $\xi'_i = v_i \xi_i$  beütésszám nem tekinthető Poisson-eloszlásúnak. Szórásnégyzete ugyanis nem egyenlő a várható értékével:

$$D^2(\xi'_i) = v_i^2 D^2(\xi_i) \approx v_i^2 \frac{\xi_i}{v_i^2} = \xi_i \neq \xi'_i.$$

### \*Bomlási korrekció monitorral

A Dy-huzallal végzett eloszlásmérés esetében az aktivitás lebomlását úgy vesszük korrekcióba, hogy a mérési időt egy külön besugárzott Dy-fólia aktivitásának a mérése révén határozzuk meg. A mérésben tehát két számlálót használunk: a huzal aktivitását az *effektusszámlálóval*, a Dy-fólia aktivitását pedig a *monitorszámlálóval* mérjük. Az utóbbin beállítunk egy  $K$  beütésszámot (értéke 10 és 40 ezer között szokott változni), és a huzal kiszemelt pontján addig mérjük a huzal aktivitását, ameddig a monitorszámlálóban össze nem gyűlik pontosan  $K$  számú beütés. Az  $K$ -adik beütés érkezésének pillanatában az effektusszámláló automatikusan leáll. Jelöljük  $T$ -vel azt az időt, amely alatt a monitorszámlálóban  $K$  beütés összegyűlik. Arról van tehát szó, hogy az effektusszámláló ezt a  $T$  mérési idejét a monitorszámláló méri. Mivel a radioaktív bomlás miatt a  $T$  időtartam a Dy bomlásának mértékében egyre hosszabb, heurisztikusan azt lehet várni, hogy ezen a módon automatikusan megtörténik a huzal aktivitásának a bomlására vonatkozó korrekció. Ezzel kapcsolatban két kérdést vizsgálunk meg: egyrészt valóban így van-e ez, másrészt hogyan kell az így mért huzalaktivitásokat kiértékelni? Amilyen egyszerűnek tűnik ez a mérés, olyan fáradságos lesz az elméleti tárgyalása.

Az effektusszámlálóban 1 s alatt mérhető beütésszám várható értéke a  $t = 0$  időpillanatban éppen az illesztőfüggvény:  $f(x, \mathbf{a})$ . Egy  $t > 0$  időpillanatban ez az  $e^{-\lambda t}$  tényezővel csökken, ahol  $\lambda$  a Dy bomlási állandója. A  $(t, t+T)$  intervallumban mért  $N$  beütésszám várható értéke:

$$M(N) = \int_t^{t+T} f(x, \mathbf{a}) e^{-\lambda t'} dt' = f(x, \mathbf{a}) e^{-\lambda t} s(T),$$

ahol

$$s(T) = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

A továbbiakban bevezetjük az

$$f_0 = f(x, \mathbf{a}) \quad \text{és} \quad f = f_0 e^{-\lambda t}$$

jelöléseket. Ha a monitorfólia aktivitása a  $t = 0$  időpillanatban  $\mu_0$ , egy  $t > 0$  időpillanatban  $\mu = \mu_0 e^{-\lambda t}$ .  $T$ -re a következő közelítő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\mu \cdot s(T) \approx K,$$

amiből

$$M(N) = f \cdot s(T) \approx \frac{fK}{\mu} = \frac{f_0 K}{\mu_0}.$$

Ez független  $t$ -től, tehát – heurisztikusan gondolkodva – a bomláskorrekció tényleg megtörténik. Az alábbiakban ezt pontosan is levezetjük.

Ha a  $T$  számlálási idő rögzített, az  $N$  beütésszámok a Poisson-eloszlást követik, tehát feltételes eloszlásuk

$$P(N|T) = \frac{[f \cdot s(T)]^N}{N!} e^{-f \cdot s(T)}. \quad (6.51)$$

A  $T$  időpont sűrűségfüggvényét szintén a Poisson-eloszlás alapján írhatjuk fel. Annak a valószínűsége, hogy a  $K$ -adik monitorbeütés a  $(T, T+dT)$  intervallumban érkezik, két tényező szorzata: egyrészt annak a valószínűsége, hogy a  $[0, T]$  időintervallumban a monitorszámláló  $(K - 1)$  beütést mérjen, vagyis

$$\frac{[\mu \cdot s(T)]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s(T)},$$

másrészt

$$\mu e^{-\lambda T} dT = \mu s'(T) dT,$$

ami pedig annak a valószínűsége, hogy a  $(T, T+dT)$  intervallumban egy további beütés (a  $K$ -adik) érkezzon. Ezzel a keresett valószínűség

$$P_K(T) dT = \frac{[\mu \cdot s(T)]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s(T)} \mu s'(T) dT. \quad (6.52)$$

Így annak a valószínűsége, hogy az effektusszámláló  $N$  beütésszámot regisztráljon, mialatt a monitorszámlálóban  $K$  beütésszám gyűlik össze:

$$P(N, K) = \int_0^{\infty} P(N|T) \cdot P_K(T) dT. \quad (6.53)$$

Fontos megjegyezni, hogy ezek a képletek (és az alábbiak is) csak akkor érvényesek, amikor mind a holtidő, mind a háttér elhanyagolható.

A (6.53) alatti integrál jó közelítéssel analitikusan is kiszámítható:

$$\begin{aligned} P(N, K) &= \int_0^{\infty} \frac{[f \cdot s(T)]^N}{N!} e^{-f \cdot s(T)} \frac{[\mu \cdot s(T)]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s(T)} \mu s'(T) dT = \\ &= \int_0^{1/\lambda} \frac{[f \cdot s]^N}{N!} e^{-f \cdot s} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu ds \end{aligned}$$

$K$ -t általában úgy választjuk meg, hogy a monitorfólia aktivitása csak kissé csökkenjen, mialatt  $K$  beütésszám összegyűlik. Így minden esetben  $\lambda T \ll 1$ , tehát számottevő valószínűséggel csak az  $s \ll 1/\lambda$  értékek valósulnak meg, ami azt jelenti, hogy az  $s$  szerinti integrálban az integrandus a felső határ közelében elhanyagolhatóan kicsi. Mivel az integrandus itt monoton csökken, az integrált jó közelítéssel kiterjeszthetjük  $+\infty$ -ig. Ezzel az integrál analitikusan kiértékelhetővé válik. Elemi számítással kapjuk a

$$\begin{aligned} P(N, K) &\approx \int_0^{\infty} \frac{[f \cdot s]^N}{N!} e^{-f \cdot s} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu ds = \\ &= \frac{f^N \mu^K}{(f + \mu)^{N+K}} \frac{(N + K - 1)!}{N!(K-1)!} \end{aligned}$$

végeredményt, amely az előbb tárgyalt feltétellel jó közelítés. Ez a képlet még tartalmazza az  $e^{-\lambda t}$  tényezőt, hiszen  $f$  és  $\mu$  szerepelnek benne. Nyilvánvaló azonban, hogy lehet vele egyszerűsíteni, amivel a keresett valószínűség

$$P(N, K) = \frac{f_0^N \mu_0^K}{(f_0 + \mu_0)^{N+K}} \frac{(N + K - 1)!}{N!(K-1)!}. \quad (6.54)$$

Egyszerűen be lehet látni, hogy ennek az összege 1, vagyis ez valóban az  $N$  beütésszámok eloszlása. Ehhez nem a legutóbbi alakból, hanem a korábbi integrálból indulunk ki:

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} P(N, K) &= \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[f \cdot s]^N}{N!} e^{-f \cdot s} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu ds = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu ds = \int_0^{\infty} \frac{x^{K-1}}{(K-1)!} e^{-x} dx = 1. \end{aligned}$$

Nézzük most meg, mit ad e mérés esetében a maximum likelihood módszer. A mérési eredmények együttes valószínűsége így írható:<sup>64</sup>

$$L(\mathbf{N}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n P(N_i, K),$$

<sup>64</sup> A jegyzet más részeiben a mért értékeket  $\xi_i$ -vel jelöljük. Itt – kivételesen – az  $N_i$  jelölést alkalmazzuk ugyanerre.

amely  $f_0$ -on keresztül függ az illesztett paramétereiktől (**a**). Mivel ebben a szorzatban mindegyik tényező azonos alakú, elég az egyiknek a deriváltjait kiszámítani. Egyszerűség kedvéért az  $i$  indexet egyelőre elhagyjuk:

$$\frac{\partial \ln P(N, K)}{\partial a_k} = \frac{\partial \ln P(N, K)}{\partial f_0} \frac{\partial f_0}{\partial a_k}.$$

(6.54)-ből levezethetjük, hogy

$$\frac{\partial \ln P(N, K)}{\partial f_0} = \frac{N}{f_0} - \frac{N + K}{f_0 + \mu_0} = \frac{\mu_0}{f_0(f_0 + \mu_0)} \left( N - \frac{Kf_0}{\mu_0} \right),$$

vagyis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P(N, K)}{\partial a_k} &= \frac{\mu_0}{f_0(f_0 + \mu_0)} \left( N - \frac{Kf_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial f_0}{\partial a_k} = \\ &= w \left( N - \frac{Kf_0}{\mu_0} \right) \frac{K}{\mu_0} \frac{\partial f_0}{\partial a_k}, \end{aligned}$$

ahol

$$w = \frac{1}{\frac{Kf_0}{\mu_0} \left( 1 + \frac{f_0}{\mu_0} \right)}. \quad (6.55)$$

A normálegyenletek tehát így írhatók ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\sum_{i=1}^n w_i \left( N_i - \frac{Kf(x_i, \mathbf{a})}{\mu_0} \right) \frac{K}{\mu_0} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0. \quad (6.56)$$

Mivel  $\mu_0$ -at nem ismerjük, a  $K/\mu_0$  tényezőt beolvasztjuk az illesztőfüggvénybe, vagy – ha ez nem lehetséges – külön illesztendő paraméternek tekintjük.

Ahhoz, hogy eredményeinket értelmezni tudjuk, meg kell adnunk a (6.56) alatti szumma zárójelében szereplő mennyiség, valamint a  $w_i$  súly jelentését. Megmutatjuk, hogy az előbbi  $N_i$  várható értéke, az utóbbi pedig  $N_i$  szórásnégyzetének a reciproka. A (6.54) szerinti valószínűség esetében  $N$  várható értéke a következőképpen írható:

$$M(N) = \sum_{N=1}^{\infty} N \cdot P(N, K) = \frac{Kf_0}{\mu_0},$$

amint némi számítással levezethetjük. Ez nem más, mint a (6.56) alatti zárójelben szereplő kifejezés. Egyébként visszakaptuk ezzel a fentiekben heurisztikusan levezetett eredményt. Hasonló módon kapjuk  $N$  szórásnégyzetét:

$$D^2(N) = \frac{Kf_0}{\mu_0} \left( 1 + \frac{f_0}{\mu_0} \right) = M(N) \left( 1 + \frac{M(N)}{K} \right) \approx N \left( 1 + \frac{N}{K} \right), \quad (6.57)$$

ami nem más, mint a (6.55) szerinti  $w$  reciproka. Végeredményben tehát ismét azt kaptuk, hogy a normálegyenletek ugyanolyan alakúak, mint a Gauss-eloszlás esetében, ha a súlyokat megfelelően választjuk.

(6.57) szerint tehát a monitorral mért  $T$  idő alatt kapott beütésszám szórása a Poisson-eloszlás szórásához képest nagyobb. A dolog mélyebb megértése érdekében be-

látjuk, hogy ez annak a következménye, hogy a mérési idő most valószínűségi változó. A (6.52) egyenlet alapján levezethetjük  $T$  várható értékét:

$$\begin{aligned} M(T) &= \int_0^{\infty} \frac{[\mu \cdot s(T)]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s(T)} \mu s'(T) T dT = \\ &= \int_0^{1/\lambda} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu T(s) ds. \end{aligned}$$

Az itt szereplő  $T(s)$  függvény az  $s(T)$  függvény inverze:

$$T(s) = -\frac{\ln(1 - \lambda s)}{\lambda} \approx s,$$

amivel

$$M(T) \approx \int_0^{\infty} \frac{[\mu \cdot s]^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\mu \cdot s} \mu s ds = \frac{K}{\mu} = \frac{K}{\mu_0} e^{\lambda t}.$$

Hasonlóan kapjuk:

$$D^2(T) = \frac{K}{\mu^2}.$$

$N$  feltételes várható értéke a (6.51) egyenlet alapján

$$M(N|T) = f \cdot s(T) \approx f \cdot T,$$

tehát  $N$ -nek a  $T$  változásából eredő szórásnégyzete

$$D_1^2(N) \approx f^2 \cdot D^2(T) = \frac{f^2 K}{\mu^2} = \frac{M(N)^2}{K} \approx \frac{N^2}{K}.$$

Ez éppen  $N$  (6.57) alatt kapott teljes szórásnégyzetének második tagja.

### \*Binomiális eloszlás

A binomiális eloszlást (3.34)-ben írtuk fel. Tegyük fel, hogy  $\xi_i$  ilyen eloszlású, ahol a  $p$  valószínűség függ az illesztőfüggvényről:  $p[f(x_i, \mathbf{a})]$ . Erre a következő példát idézzük. Egy időben gyorsan változó függvényt *időanalizátorral* szoktunk megmérni.<sup>65</sup> Ez olyan berendezés, amely az  $[(i-1)\theta, i\theta]$  időintervallumban megméri az  $f(x_i, \mathbf{a})$  mennyiséget. Ezt az intervallumot az időanalizátor  $i$ -edik csatornájának nevezzük. Ebben a függvényben az  $x$  változó az idő, amelynek értékei:  $x_i = i\theta$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Amikor a berendezésnek holtideje van, gyorsan változó illesztőfüggvény esetében nagyon bonyolult lenne a megfelelő korrekciós képletet megadni. Ezért ilyen esetekben az analízátort úgy működtetik, hogy nem az egyes csatornában regisztrált jeleket számlálják meg, hanem 1-et van 0-t regisztrálnak attól függően, hogy érkezett jel vagy sem. Annak a valószínűsége, hogy az  $i$ -edik csatornában ne érkezzon jel:  $\exp\{-f(x_i, \mathbf{a})\}$ . Annak a valószínűsége pedig, hogy érkezzon jel,

$$p[f(x_i, \mathbf{a})] = 1 - \exp\{-f(x_i, \mathbf{a})\}.$$

<sup>65</sup> Az időanalízátort sokan *multiscalernek* nevezik.

Ha az analizátor  $N$ -szer futott végig minden csatornán, akkor annak a valószínűségét, hogy az  $i$ -edik csatornában  $\xi_i$ -t regisztrál, a binomiális eloszlás adja meg. Eszerint a likelihood-függvény

$$L(\vec{\xi}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n \binom{N}{\xi_i} p^{\xi_i} (1-p)^{N-\xi_i}.$$

A normálegyenletek a

$$\frac{\partial \ln L(\vec{\xi}, \mathbf{a})}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\xi_i}{p} - \frac{N - \xi_i}{1-p} \right) \frac{\partial p}{\partial a_k} \right] = 0$$

alakban adódnak ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Ha itt  $N$ -nel bővítünk, a következő alakot kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{Np(1-p)} \left[ (\xi_i - Np) \frac{\partial(Np)}{\partial a_k} \right] = 0.$$

Az (3.34) képletekből látható, hogy  $Np = M(\xi_i)$  és  $Np(1-p) = D^2(\xi_i)$ , tehát az itt kapott normálegyenletek megfelelnek (6.5)-nek. Ebben az esetben a tulajdonképpeni illesztőfüggvény

$$f_1(x_i, \mathbf{a}) = Np[f(x_i, \mathbf{a})].$$

Ezzel és az

$$\frac{1}{w_i} = Np[f(x_i, \mathbf{a})](1 - p[f(x_i, \mathbf{a})])$$

súlyozással összes korábbi képletünk érvényben marad.

### \*Véges szabadsági fokkal becsült szórások

Több helyen hangsúlyozzuk, hogy a  $w_i$  súlyoknak a mért mennyiségek szórásnégyzetével fordítva arányosnak kell lenniük. Gyakran előfordul, hogy másodlagos illesztést kell végrehajtanunk, vagyis a  $\xi_i$  mennyiségek nem valóságosan mért adatok, hanem korábbi paraméterbecslések eredményei. Ilyenkor ezek szórásnégyzetét mindig csak véges számú szabadsági fok mellett tudjuk becsülni. Az alábbiakban megnézzük, van-e ennek a körülménynek hatása az illesztésben alkalmazandó képletekre.

A véges szabadsági fok azt jelenti, hogy a

$$t_i = \frac{\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})}{s_i}$$

tört  $n_i$  szabadsági fokú Student-tört, ahol  $s_i$  a  $\sigma_i$  szórásnak a (6.22) képlet szerint becsült értéke.<sup>66</sup> (3.40a) szerint ekkor a valószínűség-függvényt a következő alakban írhatjuk fel:

<sup>66</sup> Ami (6.22)-ben  $n-m$ , azt jelöljük most  $n_i$ -vel.

$$L(\bar{\xi}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n_i \pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} \left(1 + \frac{t_i^2}{n_i}\right)^{-\frac{n_i+1}{2}}.$$

Némi számolás után a következő normálegyenleteket kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i+1}{n_i} \cdot \frac{\xi_i - f(x_i, \mathbf{a})}{s_i^2 + \frac{(\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}))^2}{n_i}} \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0,$$

amelyek akkor felelnek meg (6.5)-nek, ha

$$w_i = \frac{n_i+1}{n_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 + \frac{(\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}))^2}{n_i}}.$$

A nevezőben levő különbség négyzetének a várható értéke éppen  $\sigma_i^2$ , amit  $s_i^2$ -tel közelíthetünk, vagyis a súlyokat a

$$w_i = \frac{n_i+1}{n_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 + \frac{s_i^2}{n_i}} = \frac{1}{s_i^2}$$

képlet szerint kell megválasztanunk. Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy a véges szabadsági fokokkal becsült szórásokat – másodlagos illesztésben – ugyanúgy tekinthetjük, mintha pontosan ismert szórások lennének. Mivel a súlyozott átlagolást is lehet illesztésként megfogalmazni (vö. 5.2. alfejezet), ezek a súlyok minden további nélkül használhatók súlyozásra.

### \*6.8. Az illesztés geometriai szemléltetése

A függvényillesztést a következő módon tudjuk geometriailag is szemléltetni. A közvetlenül mért  $\bar{\xi}$  vektornak a várható értékétől való eltérését két részre bonthatjuk:

$$\bar{\xi} - \mathbf{y} = (\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}}) + (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

ahol a használt jelöléseket a 6.3. alfejezetben definiáltuk. A 6.3. TÉTEL bizonyításából következik, hogy az itt szereplő két különbségvektor kovarianciája eltűnik. Gauss-eloszlás esetében ez függetlenséget is jelent. Az alábbiakban ezt fogjuk feltételezni.

Az első vektor hosszáról a 6.2. TÉTEL szerint tudjuk, hogy

$$(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})^T \mathbf{W}(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}}) = Q_{\min} = \sigma^2 \chi_{n-m}^2. \quad (6.58a)$$

A második vektort (6.47) szerint az

$$\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} = \mathbf{F}\Delta\mathbf{a} \quad (6.59)$$

képlettel helyettesíthetjük, ahol  $\Delta\mathbf{a}$ -t (6.12b)-ben írtuk fel. Ennek a hossza:



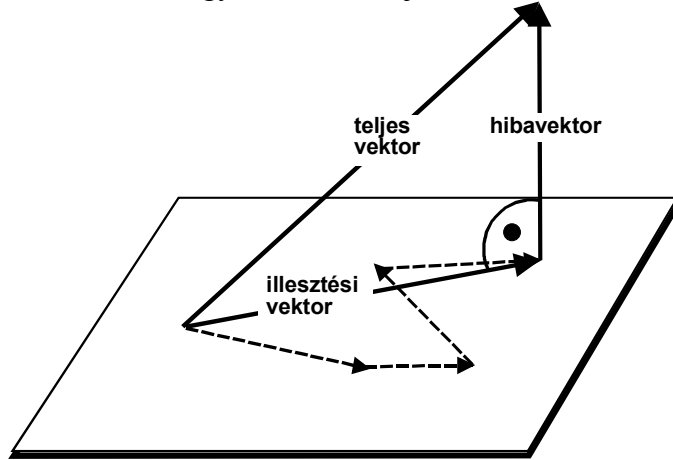
$$\begin{aligned}
q &= (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F} \Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} = \\
&= \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}} = \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}} = \sigma^2 \chi_m^2. \quad (6.58b)
\end{aligned}$$

A 6.2. TÉTEL bizonyításában használt jelölésekkel  $q$ -t a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}
q &= (\mathbf{V} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}})^T \mathbf{A} (\mathbf{V} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}) = (\mathbf{V} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}})^T \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U} (\mathbf{V} \Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}) = \\
&= \bar{\boldsymbol{\zeta}}^T \boldsymbol{\Lambda} \bar{\boldsymbol{\zeta}} = \sum_{i=1}^m \zeta_i^2 = \sigma^2 \chi_m^2.
\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy a  $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$  vektor komponensei zérus várhatóértékű és 1 szórású független valószínűségi változók, továbbá hogy a  $\boldsymbol{\Lambda}$  mátrix főátlójában  $m$  darab 1 áll, és a többi elem zérus.

(6.59) szerint az  $\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$  illesztési vektor az  $n$ -dimenziós térnek azt az  $m$ -dimenziós alterét tölti ki, amelyet az  $\mathbf{F}$  mátrix  $m$  darab oszlopvektora kifeszít. A teljes  $\bar{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{y}$  eltérésvektort úgy kapjuk, hogy ehhez hozzáadjuk a  $\bar{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\mathbf{y}}$  vektort, amely megadja a közvetlenül mért  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  vektor és az illesztésből kapott  $\tilde{\mathbf{y}}$  vektor eltérését, ezért ezt az illesztés hibavektorának nevezzük. Mivel korrelálatlan a  $\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$  vektorral, a hibavektort az utóbbi által kifeszített alterre merőlegesen képzelhetjük el. Így kapjuk a 6.1. ábrát, amelyen az  $m$ -dimenziós alteret egy síknak mutatjuk be.



6.1. ábra. Függvényillesztés geometriai szemléltetése

A hibavektor nagyságát jellemzi  $Q_{\min}$ , amelyet az illesztésből meg is kapunk. Az illesztési vektort azonban nem tudjuk kiszámítani, hiszen nem ismerjük a  $\Delta \bar{\boldsymbol{\xi}}$  vektort. Becslést azonban adhatunk rá. A (6.58) képletek értelmében az

$$F_{m,n-m} = \frac{q/m}{Q_{\min}/(n-m)} = \frac{\chi_m^2/m}{\chi_{n-m}^2/(n-m)}$$

egy Fisher-hányados [vö. (3.41)], amelyre a 2. függelék táblázatai alapján kvantilist lehet találni. Választunk egy  $\varepsilon$  konfidenciaszintet, és megkeressük azt a  $\gamma_F$  értéket, amelyre

$$\mathbf{P}\{F_{m,n-m} < \gamma_{\mathbf{F}}\} = 1 - \varepsilon.$$

Ennek alapján  $(1 - \varepsilon)$  valószínűséggel fennáll a

$$q < \frac{m}{n-m} Q_{\min} \gamma_{\mathbf{F}}$$

egyenlőtlenség.

## 7. MÉRÉSEK KIÉRTÉKELÉSE FÜGGVÉNYILLESZTÉSSEL

Ebben a fejezetben konkrét mérések kiértékelését mutatjuk be, köztük azokét is, amelyeket az 1. fejezetben leírtunk. A kiértékelés módszerét tulajdonképpen levezethetjük a 6. fejezetben kifejtett általános elméletből. Az egyes mérések esetében így elég lenne az illesztőfüggvényt felírni, és a  $w_i$  súlyokat megválasztani. Tekintve azonban, hogy ez a jegyzet kezdők számára is készült, akik a 6. fejezetet nem olvasták, néhány egyszerűbb esetben attól függetlenül adjuk meg a teljes megoldást.

### 7.1. Lineáris regresszió

Mivel a laborgyakorlatok keretében legtöbbször lineáris regressziót kell csinálnunk, illetve méréseinket erre vezetjük vissza, először ennek a részleteivel foglalkozunk.

#### Az illesztés végrehajtása

Akkor beszélünk *lineáris regresszióról*, amikor

$$M(\xi_i) = a_1 + a_2 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

A legkisebb négyzetek módszere szerint a keresett paraméterek függvényében meg kell keresnünk a

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a_1 - a_2 x_i)^2 \quad (7.2)$$

funkcionál minimumát. Ez a következő két egyenletből álló egyenletrendszer megoldását igényli:

$$G_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a_1 - a_2 x_i) = 0,$$
$$G_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^n w_i x_i (\xi_i - a_1 - a_2 x_i) = 0.$$

Ez  $a_1$ -re és  $a_2$ -re lineáris egyenletrendszer, amelyet a következő vektoros alakra hozhatunk:

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{g}, \quad (7.3)$$

ahol

$$R_{11} = \sum_{i=1}^n w_i, \quad R_{12} = R_{21} = \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad R_{22} = \sum_{i=1}^n w_i x_i^2, \quad (7.4a)$$

továbbá

$$g_1 = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i, \quad g_2 = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i x_i. \quad (7.4b)$$

A  $w_i$  súlyokat a (6.2) képlet szerint kell megválasztani. A (7.3) egyenletrendszert az  $\mathbf{R}$  mátrix invertálásával oldjuk meg:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}. \quad (7.5)$$

A keresett paraméterek becült értékeit a paraméter jele fölé tett spanyol ékezettel ( $\tilde{\phantom{a}}$ ) jelöljük. A (7.3) egyenletrendszert közvetlenül meg tudjuk oldani. Az  $\mathbf{R}$  mátrix inverze

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} \begin{bmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{12} & R_{11} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Megjegyezzük, hogy a nevező az  $\mathbf{R}$  mátrix determinánsa. (7.5) alapján adódnak a becült paraméterek:

$$\tilde{a}_1 = \frac{g_1 R_{22} - g_2 R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} \quad \text{és} \quad \tilde{a}_2 = \frac{g_2 R_{11} - g_1 R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2}. \quad (7.7)$$

A 6. fejezetben általában tárgyaljuk ezek statisztikai tulajdonságait. A (6.14) képlet szerint szórásnégyzetüket a

$$D^2(\tilde{a}_1) = \sigma^2 \frac{R_{22}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} \quad \text{és} \quad D^2(\tilde{a}_2) = \sigma^2 \frac{R_{11}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2} \quad (7.8)$$

képletek adják meg. Kovarianciájuk pedig

$$\text{cov}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \sigma^2 \frac{-R_{12}}{R_{11}R_{22} - R_{12}^2}. \quad (7.9)$$

Két utóbbi képletünkből kapjuk a becült paraméterek korrelációs együtthatóját:

$$\rho_{12} = \frac{-R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}. \quad (7.10)$$

A  $\sigma^2$  együtthatót

$$Q_{\min} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 x_i)^2$$

segítségével becsüljük, ami úgy adódik, hogy a becült paramétereket (7.2)-be helyettesítjük. A 6.2. TÉTEL szerint ez  $(n-2)$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -változóval arányos, és  $\sigma^2$  becslésére az

$$s^2 = \frac{Q_{\min}}{n-2} \quad (7.11)$$

empirikus szórásnégyzetet használjuk [vö. (5.7)]. Ezt kell a (7.8) és (7.9) képletekbe helyettesíteni.

Gyakorlásképpen javasoljuk, hogy az Olvasó mutassa meg, hogy a (7.7) alatti becslések torzítatlanok.<sup>67</sup> Befejezésül megadjuk a keresett paraméterekre vonatkozó konfidenciaintervallumot:

$$\tilde{a}_1 - \gamma D(\tilde{a}_1) \leq a_1 \leq \tilde{a}_1 + \gamma D(\tilde{a}_1) \quad (7.12a)$$

és

$$\tilde{a}_2 - \gamma D(\tilde{a}_2) \leq a_2 \leq \tilde{a}_2 + \gamma D(\tilde{a}_2), \quad (7.12b)$$

ahol  $\gamma$  az  $(n-2)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise, a szórásokat pedig (7.8) és (7.11) szerint számítjuk ki.

A (7.1) és (7.2) szerinti lineáris regresszió természetes általánosítása a polinomillesztés, amit a 7.2. alfejezetben tárgyalunk.

### Galton megfogalmazása

Galton az utódok és a szülők magassága ( $\xi_1$ , illetve  $\xi_2$ ) közötti összefüggést kereste, és azt találta, hogy közöttük pozitív korreláció van. Vizsgáljuk meg ezt most matematikailag. Kovarianciamátrixuk

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

aminek az inverze

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}.$$

A változók várható értéke

$$M(\xi_1) = b_1, \quad M(\xi_2) = b_2.$$

Ezekkel a jelölésekkel a két változó együttes eloszlásfüggvénye (3.37) alapján

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{q}{2}\right\},$$

ahol

$$q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[ \frac{(z_1 - b_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z_2 - b_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(z_1 - b_1)(z_2 - b_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right].$$

Közvetlenül felírhatjuk  $\xi_2$  perem-sűrűségfüggvényét:

<sup>67</sup> Útmutatás: írjuk fel először  $g_1$  és  $g_2$  várható értékét, és ezt helyettesítsük (7.7)-be. Például

$$M(g_1) = \sum_{i=1}^n w_i (a_1 + a_2 x_i).$$

$$f(z_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z_2 - b_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

E két sűrűségfüggvény hányadosa  $\xi_1$  feltételes sűrűségfüggvénye

$$f(z_1|z_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{q'}{2}\right\},$$

[vö. (3.23)], ahol

$$q' = \frac{1}{1-\rho^2} \left[ \frac{z_1 - b_1}{\sigma_1} - \frac{\rho(z_2 - b_2)}{\sigma_2} \right]^2 = \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[ z - b_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(z_2 - b_2) \right]^2,$$

amint ez egyszerűen belátható. A feltételes sűrűségfüggvényt át lehet írni az

$$f(z_1|z_2) = \frac{1}{\sigma_1' \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z_1 - b_1')^2}{2\sigma_1'^2}\right\} \quad (7.13)$$

alakba, ahol

$$b_1' = M(\xi_1|\xi_2) = b_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(\xi_2 - b_2) \quad (7.13a)$$

$\xi_1$  feltételes várható értéke, továbbá

$$\sigma_1'^2 = D^2(\xi_1|\xi_2) = \sigma_1^2(1-\rho^2) \quad (7.13b)$$

$\xi_1$  feltételes szórásnégyzete.

Galton esetében mindkét valószínűségi változó ugyanabból az eloszlásból vett minta, tehát  $b_1 = b_2 = b$  és  $\sigma_1 = \sigma_2$ , vagyis az utód magasságának a várható értéke

$$M(\xi_1|\xi_2) = b + \rho(\xi_2 - b)$$

feltéve, hogy a szülő magassága  $\xi_2$ . Erről a képletről leolvasható Galton következtetése. Ha  $\xi_2 > b$  (vagyis a szülő az átlagnál magasabb), várhatóan az utód magassága is nagyobb lesz az átlagnál. Mivel a  $\rho$  korrelációs együttható 1-nél kisebb, az utód magassága kevesebbel múlja felül az átlagot, mint a szülőé. Ezt a jelenséget nevezte el "visszatérésnek", latin eredetű szóval *regresszió*nak. Analóg következtetéseket lehet levonni  $\xi_2 < b$  esetén is.

Az általánosságra visszatérve tegyük fel, hogy  $n$  számú független megfigyelést végeztünk, és a  $(\xi_{i1}, \xi_{i2})$  értékpárokat ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) kaptuk eredményül. Az alábbiakban azt keressük, hogyan lehet együttes eloszlásuk paramétereit becsülni. Mivel azonos pontosságú megfigyelésekről van szó, alkalmazhatjuk a (5.4) és (5.7) képleteket:

$$\tilde{b}_1 = \bar{\xi}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_{i1}}{n}, \quad s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)^2}{n-1}$$

és

$$\tilde{b}_2 = \bar{\xi}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_{i2}}{n}, \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)^2}{n-1}.$$

A  $\rho$  korrelációs együttható meghatározása céljából a maximális valószínűség elvét alkalmazzuk. A valószínűség-függvényt a (7.13) képletek segítségével írjuk fel. Ehhez bevezetjük a vektori jelölésmódot. A  $\xi_{i1}$  megfigyeléseket a  $\bar{\xi}_1$ , a  $\xi_{i2}$  megfigyeléseket pedig a  $\bar{\xi}_2$  vektor komponenseinek tekintjük. (7.13) alapján az előbbi vektornak az utóbbira vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye

$$f(\bar{\xi}_1 | \bar{\xi}_2) = \frac{1}{[2\pi(1-\rho^2)\sigma_1^2]^{n/2}} \exp\left\{-\frac{Q}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\},$$

ahol

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[ \xi_{i1} - b_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} (\xi_{i2} - b_2) \right]^2.$$

A maximális valószínűség elvének közvetlen alkalmazhatósága kedvéért rögtön behelyettesítettük a valószínűségi változók megfigyelt értékeit. A keresett paraméterek becsléséhez meg kell keresnünk  $Q$  minimumát. Ha bevezetjük az

$$a_1 = b_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2} b_2, \quad a_2 = \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}$$

jelöléseket,  $Q$ -t (7.2) szerinti alakra hozhatjuk:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - a_1 - a_2 \xi_{i2})^2.$$

Látható, hogy most  $w_i \equiv 1$ ,  $x_i$  szerepét pedig  $\xi_{i2}$  játssza. A (7.1) alakú illesztőfüggvénnyel való illesztést eredetileg ezért nevezték el lineáris regressziónak. A (7.4) egyenletek alapján ekkor tehát

$$R_{11} = n, \quad R_{12} = R_{21} = \sum_{i=1}^n \xi_{i2} = n\bar{\xi}_2, \quad R_{22} = \sum_{i=1}^n \xi_{i2}^2 = n\overline{\xi_2^2},$$

$$g_1 = \sum_{i=1}^n \xi_{i1} = n\bar{\xi}_1, \quad g_2 = \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \xi_{i2} = n\overline{\xi_1 \xi_2}.$$

Némi számolással beláthatjuk, hogy

$$R_{11}R_{22} - R_{12}^2 = n^2(\overline{\xi_2^2} - \bar{\xi}_2^2) = n(n-1)s_2^2.$$

(7.7) felhasználásával és hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\tilde{a}_2 = \frac{n(\overline{\xi_1 \xi_2} - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2)}{(n-1)s_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)(\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)}{(n-1)s_2^2},$$

amivel

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= \frac{s_2 \tilde{a}_2}{s_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)(\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)}{(n-1)s_1 s_2} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)(\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)^2 \times \sum_{i=1}^n (\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)^2}}.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Vegyük észre, hogy az itt szereplő összeg használható  $\xi_1$  és  $\xi_2$  kovarianciájának a becslésére:

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_{i1} - \bar{\xi}_1)(\xi_{i2} - \bar{\xi}_2)}{(n-1)}. \tag{7.15}$$

Gyakran felmerül az a kérdés, hogy a megfigyelt valószínűségi változók korreláltak-e sem. Ennek eldöntésére szükségünk van a  $\rho$  együtthatóra vonatkozó konfidenciaintervallumra. Amikor  $x_i$  nem valószínűségi változó, ez nem jelent problémát, hiszen a (7.12b)-ben felírt konfidenciaintervallum választ ad a kérdésre: ha ez tartalmazza a nullát, akkor  $a_2$ -t (az adott konfidenciaszinten) 0-nak vehetjük. A (7.14) szerinti korrelációs együttható esetében azonban nem ilyen egyszerű a kérdés, ugyanis  $\tilde{\rho}$  sűrűségfüggvénye bonyolult az általános esetben. Reimann József könyve [1] idézi a következő tételt: amikor  $\rho = 0$ , a

$$t = \sqrt{n-2} \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}}$$

mennyiség Student-eloszlású valószínűségi változó  $(n-2)$  szabadsági fokkal. Így tehát a korrelációt akkor tekinthetjük zérusnak, amikor

$$\left| \sqrt{n-2} \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2}} \right| < \gamma, \tag{7.16}$$

ahol  $\gamma$  az  $(n-2)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise.

Az 1.3. ábrán mutatott adatok esetében a következő eredmények jönnek ki a lineáris regresszióból:

$$\tilde{\rho} = 0,5234; \quad t = 6,081; \quad n = 100.$$

A 2. függelék táblázatai szerint a kvantilis értéke

$$\gamma = \begin{cases} 1,985 & \varepsilon = 0,05 \\ 2,627 & \varepsilon = 0,01 \end{cases}$$

vagyis a korreláció mind 95%, mind 99% konfidenciaszinten szignifikáns.

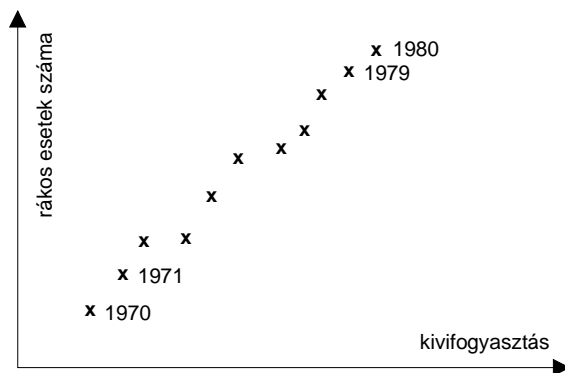


## A lineáris regresszió csapdái

A lineáris regresszió hasznos segédeszköz különböző mennyiségek közötti kapcsolatok felismerésére. Fölrajzoljuk az egyik változót a másik függvényében, és kapcsolatot vélünk felfedezni, ha a pontok emelkedő vagy csökkenő tendenciát mutatnak, vagy – ha előnyben részesítjük a számszerű vizsgálatot – a (7.14) képlettel becsüljük a korrelációs együtthatót, és a két mennyiség között kapcsolatot látunk, ha ez szignifikánsan különbözik zérustól. Ez a megközelítés így önmagában veszélyes, mert számos csapdát rejt magában. A felismert összefüggés látszólagos lehet, ha az analízis mögött nem állnak elméleti megfontolások.

### Ok és okozat

Saville és Wood könyvéből [1] vettük az alábbi példát. A 7.1. ábra az Egyesült Államokban megfigyelt rákos esetek számát mutatja a kivifogyasztás függvényében. Mivel 1970 és 1980 között mindkét mennyiség növekedett, ezek évente megfigyelt értékei *korreláltak*. Jóllehet ez matematikai bizonyosság, mégsem állíthatjuk, hogy a rákos esetek számának a növekedését az *okozta*, hogy az emberek több kivit ettek. A ténylegesen talált (és statisztikailag bizonyított) korrelációt csak akkor szabad *ok-okozati* kapcsolatnak tekinteni, ha erre *elméleti indok* van.



7.1. ábra. Kapcsolat az Egyesült Államokban megfigyelt rákos esetek száma és a kivifogyasztás között

Hasonló példákat lehet az élet legkülönbözőbb területén találni. Például határozottan pozitív korreláció van a Duna vízállása és a BME területén tartózkodó hallgatók száma között. Nyilván épeszű ember nem tételez fel ezek között ok-okozati kapcsolatot. A matematikai statisztika, vagy inkább az azt rosszul alkalmazó áltudomány iránt bizalmatlan emberek gyakran köszörülnek szellemességüket az ilyen korrelációkon. Akkor mire vezethetők vissza ezek a látszólagos összefüggések? A válasz egyszerű. Az ilyen példákban általában lehet találni egy közvetítő mennyiséget, ami legtöbbször az idő. Mikor magas ugyanis a Duna vízszintje? Koratavasszal és késő ősszel. Éppen ezek az időszakok előzik meg a vizsgaidőszakokat, amikor a hallgatók a legszorgalmasabban járnak az egyetemre. Hasonlóan az idő a közvetítő a 7.1. ábrán mutatott példában is.

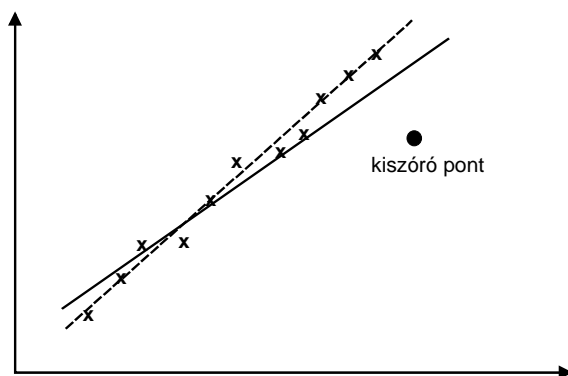
### Az extrapoláció veszélyei

Nem csak a lineáris regresszióban, hanem – általánosabban – a polinomillesztésben (vö. 7.2. alfejezet) is nagyon veszélyes az illesztésben kapott függvényt a vizsgált valószínűségi változók mérési tartományán túl extrapolálni. Súlyos tévedések forrása az ilyesmi. A probléma hangsúlyozottan főleg a polinomillesztésnél merül fel, ugyanis

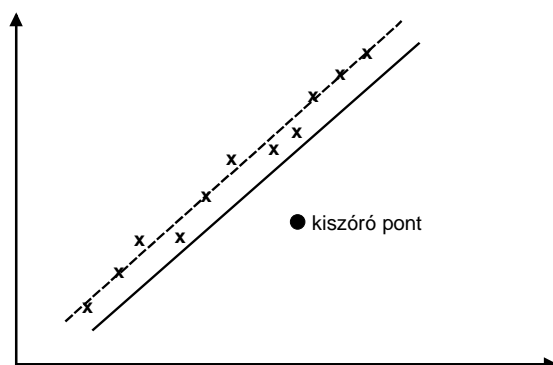
többnyire akkor fordulunk ehhez az eszközhöz, amikor semmi más ötletünk nincs az illesztőfüggvényre vonatkozóan.

### Kiszóró pontok

Ha a kiértékelt adathalmaz tartalmaz kiszóró pontokat, akkor a regressziós egyenes teljesen hibás lehet. Erre mutatnak példát a 7.2a. és 7.2b. ábrák, amelyeket a 7.1. ábrából kiindulva szerkesztettünk. Láthatóan a kiszóró pont elhúzza maga felé a regressziós egyenest. A torzítás módja a kiszóró pont elhelyezkedésétől függ.



7.2a. ábra. Aszimmetrikusan elhelyezkedő kiszóró pont



7.2b. ábra. Központosan elhelyezkedő kiszóró pont

A kiszóró pontok felismerésével a 8. fejezetben foglalkozunk részletesen. Természetesen nem csak az okoz problémát, ha az adatok között kiszóró pont van. Elképzelhető az is, hogy a két vizsgált mennyiség között nem lineáris, hanem másfajta a kapcsolat. Ilyenkor – jobb híján – egy legalább másodfokú polinommal célszerű próbálkozni.

### A grafikus ábrázolás haszna

A fentiekben vázolt problémák felismeréséhez nagyon hasznos a vizsgált adatokat grafikusán is ábrázolni. Erre példaként a 7.1. táblázatban négy adatsor található, amelyet F. J. Anscombe ötlete<sup>68</sup> alapján konstruáltunk. Az adatokat a 7.3a.–7.3d. ábrák mutatják. Mindegyik illesztésben azonos nemcsak a paraméterek

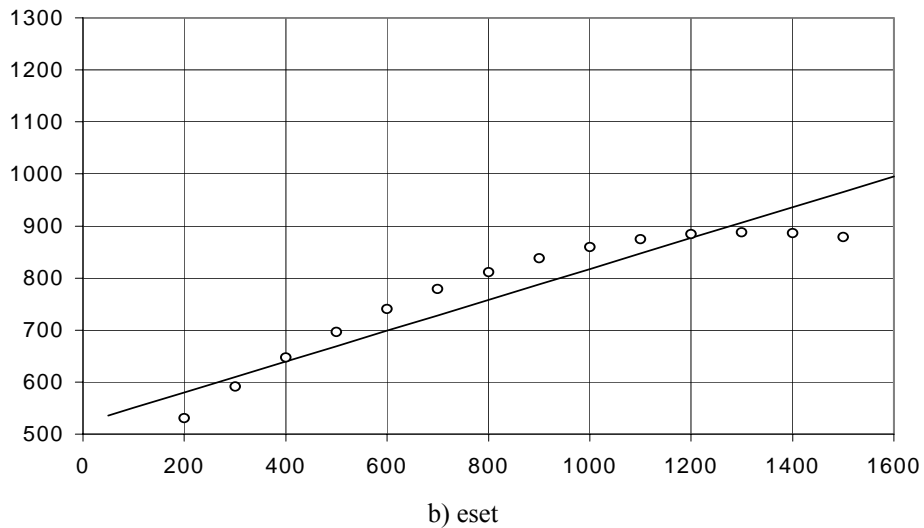
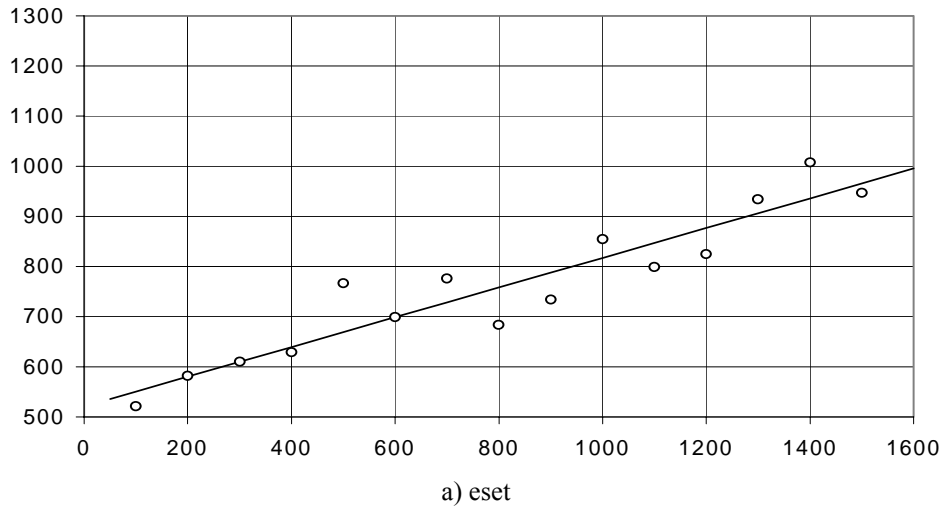
$$\tilde{a}_1 = 520,91 \pm 27,63 \quad \tilde{a}_2 = 0,2965 \pm 0,0304$$

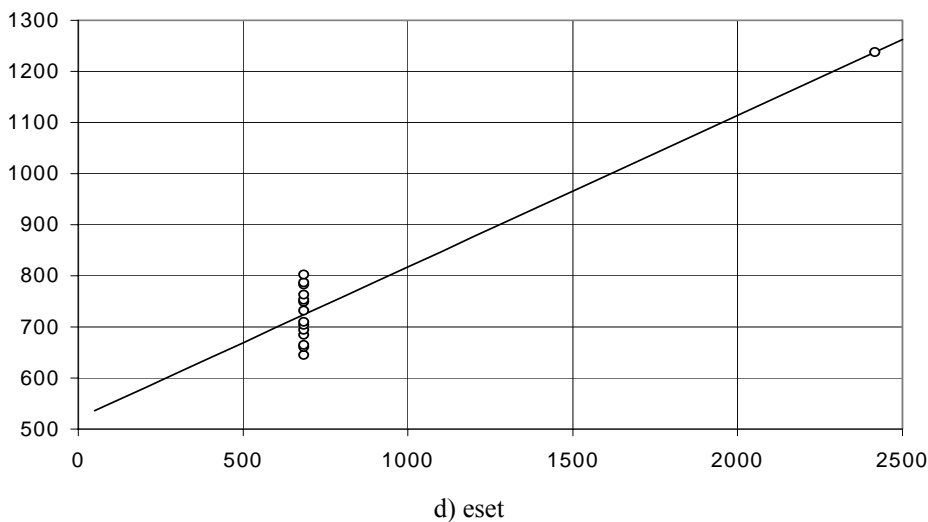
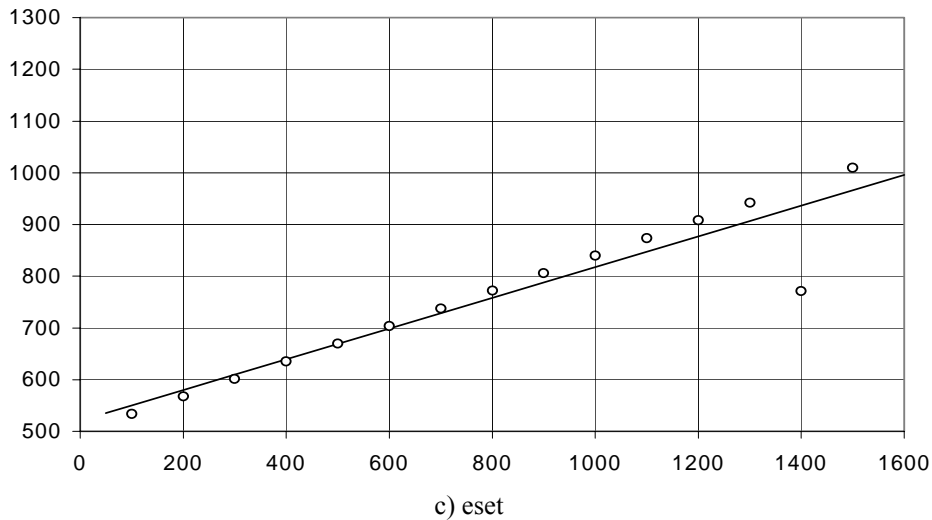
illesztett értéke, hanem kovarianciamátrixuk is ugyanaz mind a négy illesztésben. A  $Q_{\min}$ -ra kapott értékek már a negyedik tizedes jegyben egy egységgel eltérnek, de ennek oka, hogy a 7.1. táblázatban kerekített értékek találhatók.

<sup>68</sup> F. J. Anscombe, Graphs in Statistical Analysis, The American Statistician 27, pp. 17–21 (1973).

7.1. táblázat. Adatok a lineáris regresszió csapdáinak illusztrálására

$x$	a) eset	b) eset	c) eset	$x$	d) eset
100	521,4	464,0	533,5	684,53	645,0
200	582,3	530,7	567,6	684,53	660,8
300	610,4	591,8	601,6	684,53	664,7
400	629,4	647,1	635,6	684,53	684,4
500	766,4	696,8	669,7	684,53	694,3
600	699,2	740,7	703,7	684,53	704,2
700	776,1	778,9	737,7	684,53	709,9
800	684,1	811,4	771,8	684,53	731,9
900	734,2	838,2	805,8	684,53	749,6
1000	854,8	859,3	839,8	684,53	753,5
1100	799,5	874,7	873,9	684,53	763,4
1200	824,9	884,4	907,9	684,53	783,1
1300	934,6	888,3	941,9	684,53	787,0
1400	1007,5	886,6	771,6	684,53	802,8
1500	947,1	879,1	1010,0	2416,58	1237,5





7.3. ábra. A 7.1. táblázatban mutatott adatokra végzett illesztés eredményei

A bemutatott esetek egyikében sem vennénk észre, hogy az adatokkal baj lehet, ha nem vizsgáljuk meg a róluk készült ábrákat. Az a) eset kifogástalan lineáris regressziót mutat. Nagyjából ilyennek kell lenniük az illesztett egyenest és a mért adatokat együtt mutató ábráknak. A b) esetben nyilvánvaló, hogy a mért adatok nem lineárisan, hanem (legalább) kvadratikusan függenek  $x$ -től, tehát az illesztést meg kell ismételnünk egy magasabb fokszámú polinommal. A c) esetben  $x = 1400$ -nál nyilvánvalóan fellépett egy kiszóró pont, ami valószínűleg téves adatbevitel következménye. Hasonló oka lehet a d) esetnek, de itt az  $x$  változó értékei vannak hibásan megadva.

### Nemlineáris problémák linearizálása

Az előző szakaszban tárgyalt illesztési problémák közös jellemzője, hogy az illesztőfüggvény lineáris a keresett paraméterekben. Ilyen esetekben az illesztés a (7.3) lineáris egyenletrendszerre vezethető vissza. Számos illesztési probléma van azonban, amelyekben az illesztőfüggvény a keresett paraméterekben nem lineáris. Ennek legegyszerűbb példája az exponenciális illesztés:

$$M(\xi_i) = a_1 e^{-a_2 x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.17)$$

Ebben az esetben a minimalizálandó funkcionál a

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a_1 e^{-a_2 x_i})^2 \quad (7.18)$$

alakban írható fel. Ha ennek az  $a_1$ -re és  $a_2$ -re vonatkozó deriváltjait nullával tesszük egyenlővé, egyenletrendszer kapunk  $a_1$ -re és  $a_2$ -re vonatkozóan. Az adódó egyenletek transzcendensek, tehát csak iterációval oldhatók meg, aminek az elkerülése érdekében szokás az illesztési problémát *linearizálni*: vesszük a (7.17) egyenlet logaritmusát. (7.17) szerint a közvetlenül mért  $\xi_i$  mennyiségek logaritmusa a keresett paraméterek lineáris függvénye:

$$\ln \xi_i \approx \ln a_1 - a_2 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.19)$$

Ha tehát  $\ln \xi_i$  értékeire egy (7.1) szerinti lineáris regressziót alkalmazunk, a kapott eredményekből a keresett paraméterek meghatározhatók.

Hasonló linearizálást alkalmazhatunk egy sor egyéb illesztési probléma megoldásában is. Két példát mutatunk még. Amikor a sugárdózist mérjük a távolság függvényében, az illesztőfüggvény

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}) = \frac{a_1}{(x_i - a_2)^2} \quad (7.20a)$$

alakú. Ez a probléma úgy linearizálható, hogy vesszük a mért dózisok négyzetgyökének a reciprokát:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \approx \frac{x_i - a_2}{\sqrt{a_1}} = a'_1 + a'_2 x_i, \quad \text{ahol} \quad a_1 = \frac{1}{a_1'^2}, \quad a_2 = -\frac{a_2'}{a_1'}. \quad (7.20b)$$

A vesszős paraméterek a (7.1) szerinti lineáris regresszióval becsülhetők, majd belőlük az eredeti paramétereket a (7.20b) alatti képletekkel kapjuk meg.

A másik példa a reaktorban mért axiális eloszlás, amelyre vonatkozóan az illesztőfüggvény

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 \cos[a_2(x_i - a_3)] \quad (7.21a)$$

alakú. Ez a probléma akkor linearizálható, ha ismerjük  $a_1$  értékét. Ha a mért értékeket  $x_i$  függvényében felrajzoljuk, a maximális érték  $a_1$  jó becslése. Ezután a linearizálás már elvégezhető az arccos függvény segítségével:

$$\arccos \frac{\xi_i}{a_1} = a_2(x_i - a_3) = a'_1 + a'_2 x_i, \quad \text{ahol} \quad a_2 = a_1', \quad a_3 = -\frac{a_2'}{a_1'}. \quad (7.21b)$$

A vesszős paraméterek a (7.1) szerinti lineáris regresszióval becsülhetők, majd belőlük az eredeti paramétereket a (7.21b) alatti képletekkel kapjuk meg. Ha szükséges,  $a_1$  becslését javíthatjuk: a lineáris regressziót  $a_1$  különböző értékei mellett végezzük el, és végül azt választjuk, amelyre a (7.2) szerinti  $Q$  a legkisebb.

A példák sorát folytathatnánk. Mindegyik lényege, hogy a mért adatokat valamilyen alkalmasan választott függvény szerint transzformáljuk úgy, hogy a transzformált mennyiségek várható értéke egy kétparaméteres lineáris függvénnyel legyen közelíthető. A módszer legfőbb előnye, hogy az így transzformált mennyiségeket  $x_i$  függvényében ábrázolva egyszerű grafikus becslést kaphatunk a keresett paraméterekre. Az

ilyen módon végzett illesztés elméleti kérdéseinek egy külön részt szentelünk (6.6. alfejezet).

## 7.2. Polinomillesztés

### Definíciók

A 7.3.b). ábrán látható pontok nyilvánvalóan nem írhatók le egy lineáris függvény-nyel. Ilyen esetekben próbálkozhatunk egy magasabb fokszámú polinommal:

$$M(\xi_i) = \sum_{k=1}^m a_k x_i^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.22)$$

A minimalizálandó funkcionál ekkor

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i \left( \xi_i - \sum_{k=1}^m a_k x_i^{k-1} \right)^2. \quad (7.23)$$

Az illesztés végrehajtása a 7.1. alfejezetben tárgyalt lineáris regresszió mintájára történik, ezért csak röviden ismertetjük a módszert. Ha  $Q$ -t a keresett paraméterek szerint deriváljuk, és a deriváltakat nullával tesszük egyenlővé, a következő egyenletrendszert kapjuk  $k = 1, 2, \dots, m$ -re:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n w_i x_i^{k-1} \left( \xi_i - \sum_{k'=1}^m a_{k'} x_i^{k'-1} \right) = g_k - \sum_{k'=1}^m R_{kk'} a_{k'} = 0,$$

ahol bevezettük az

$$R_{kk'} = \sum_{i=1}^n w_i x_i^{k+k'-2} \quad (7.24a)$$

és

$$g_k = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i x_i^{k-1}, \quad k, k' = 1, 2, \dots, m \quad (7.24b)$$

jelöléseket [vö. (7.4a) és (7.4b)]. Végeredményben ismét a (7.3) lineáris egyenletrendszert kapjuk, ahol (7.3)-at ebben az esetben megoldva (7.5) szerint kapjuk a paraméterek becslést értékeit. Kovarianciamátrixukat pedig a

$$\mathbf{B} = \sigma^2 \mathbf{R}^{-1} \quad (7.25)$$

képlet adja meg, ahol  $\sigma^2$  becslése

$$s^2 = \frac{Q_{\min}}{n - m}, \quad (7.26)$$

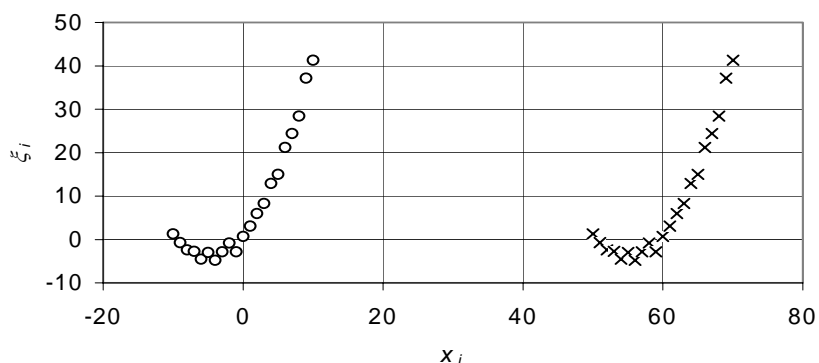
[vö. (7.11)]. A  $k$ -adik paraméter szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}_k) = s^2 \left[ \mathbf{R}^{-1} \right]_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.27)$$

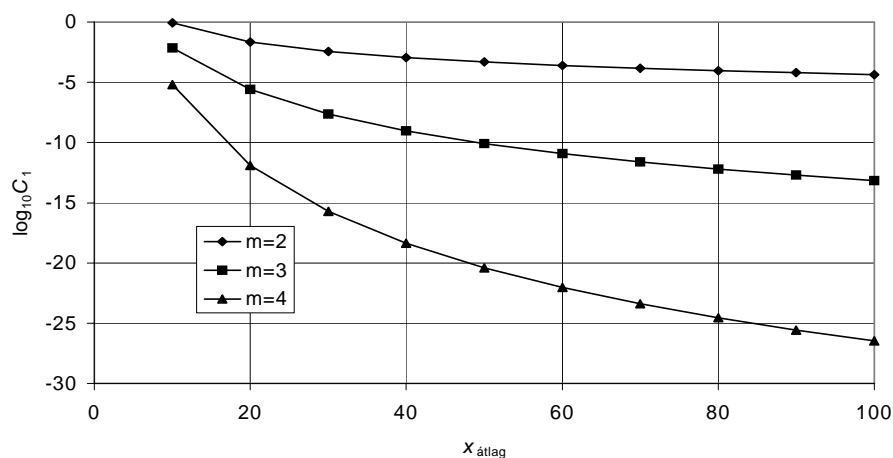
továbbá a megfelelő konfidenciaintervallum

$$\tilde{a}_k - \gamma D(\tilde{a}_k) \leq a_k \leq \tilde{a}_k + \gamma D(\tilde{a}_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.28)$$

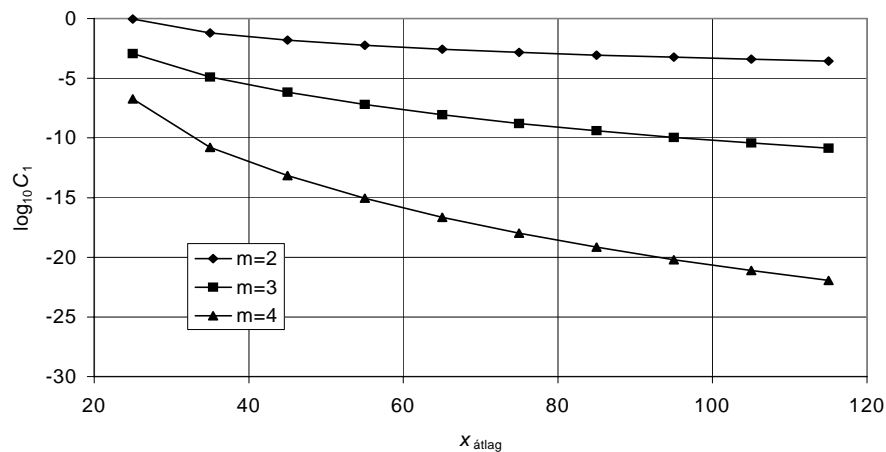
[vö. (7.12)].  $\gamma$  az  $(n - m)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise (vö. 2. függelék).



7.4. ábra. Egymáshoz képest eltoló parabolák



7.5a. ábra. A  $C_1(\mathbf{R})$  paraméter függése  $\bar{x}$ -től ( $n = 20$ )



7.5b. ábra. A  $C_1(\mathbf{R})$  paraméter függése  $\bar{x}$ -től ( $n = 50$ )

### Numerikus problémák

A polinomillesztés a legegyszerűbb függvényillesztési feladatok közé tartozik, mert (7.22) a keresett *paraméterekben* lineáris függvény.<sup>69</sup> Emiatt nincs szükség a 6.2.

<sup>69</sup> Ez nem tévesztendő össze a lineáris regresszióval, ahol a “lineáris” jelző arra utal, hogy az illesztő-függvény az  $x_i$  változóban lineáris. Más kérdés, hogy a (7.1) függvény éppen a paraméterekben is lineáris.

alfejezetben tárgyalt iterációra. Az ehhez hasonló előnyök mellett azonban a polinomillesztés numerikusan a legkellemetlenebb feladatok közé tartozik. Illusztrációképpen tekintsük a 7.4. ábrát, amely két, egymáshoz képest eltolt parabolát mutat: az első az  $x_i$  értékek az origó körül, a második az  $x = 60$  érték körül csoportosulnak. Az előbbi esetben numerikus problémák nem jelentkeznek, viszont az utóbbiban nem egyszerű az  $\mathbf{R}$  mátrixot invertálni.

A 2.3. alfejezetben foglalkozunk a mátrixok invertálásának a problémáival. A (2.10) képletben definiálunk egy  $C_1$  mérőszámot, amely megmutatja, milyen mértékben rosszul kondicionált az invertálandó mátrix.<sup>70</sup> Kiszámoltuk  $m = 2$ -,  $3$ - és  $4$ -edfokú polinomokra ezt a mutatót az  $x_i$  értékek átlagának a függvényében. A 7.5a. ábrán mutatjuk be az eredményt arra az esetre vonatkozóan, amikor az illesztendő pontok száma  $n = 20$ . Látható, hogy  $C_1$  rohamosan csökken, és harmadfokú polinom ( $m = 4$ ) esetében már  $10^{-27}$  nagyságrendű érték. Ekkor az invertáláskor már  $8$ – $9$  értékes számjegy elvész, tehát az inverzet dupla pontosságú számítással is csak körülbelül négy tizedesjegy pontossággal lehet megkapni. Amint a 2.3. alfejezetben megmutatjuk, az inverzet utóiterációval javítani lehet.  $m = 5$  esetében azonban már elképzelhető, hogy a számítógépi pontosságon belül az inverzet nem lehet kiszámítani. A probléma mértéke függ a pontok számától: a 7.5b. ábrán ugyanezt bemutatjuk  $n = 50$  esetében is. A helyzet némileg javult, de nem sokkal.

## Ortogonalis polinomok

Az imént bemutatott numerikus problémák kezelésére szolgálnak az *ortogonalis polinomok*.<sup>71</sup> A 7.5a. és 7.5b. ábrákról látszik, hogy a polinomillesztés akkor a legkedvezőbb, amikor az  $x_i$  értékek átlaga az origó körül van. Ha történetesen nem ilyenek, akkor ilyenné lehet transzformálni, vagyis a (7.22) illesztőfüggvény helyett egy transzformált polinomot használunk:

$$f'(x_i, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^m c_k (x_i - x_0)^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ahol  $x_0$  egy alkalmasan megválasztott állandó. A fentiekből következik, hogy célszerű az  $x_i$  értékek átlagával egyenlőnek választani. Az illesztésből adódó  $c_1, c_2, \dots, c_m$  együtthatókból az eredeti együtthatókat egyszerűen kiszámíthatjuk.

Ezt az ötletet továbbfejleszthetjük, ha az előbbi transzformáció helyett az általánosabb

$$f'(x_i, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.29)$$

képletet írjuk, ahol  $\varphi_k(x)$  egy  $(k-1)$ -edfokú polinom. A mátrixinverzió numerikus problémáit úgy tudjuk a legjobban kiküszöbölni, hogy az  $\mathbf{R}$  mátrixot diagonálissá tesszük. Ehhez az szükséges, hogy a (7.29)-ben szereplő polinomok ortogonalisak legyenek:

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_k(x_i) \varphi_{k'}(x_i) = \delta_{kk'} \sum_{i=1}^n w_i [\varphi_k(x_i)]^2. \quad (7.30)$$

<sup>70</sup> Minél kisebb  $C_1$ , annál nehezebb az inverzet kiszámítani.

<sup>71</sup> Elméletüket eredetileg Csebisev dolgozta ki.



Itt  $\delta_{kk'}$  a Kronecker-delta. Ezeket a polinomokat rekurzióval építjük fel. Az elsőt azonosan 1-gyel tesszük egyenlővé:

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \quad (7.31a)$$

és a többi

$$\varphi_k(x) = x^{k-1} + \sum_{l=1}^{k-1} d_{kl} \varphi_l(x) \quad (7.31b)$$

alakban keressük. A definícióból következik, hogy  $d_{kk} = 0$ . A (7.30) ortogonalitási feltételből számolható az itt szereplő többi együttható:

$$d_{kl} = -\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^{k-1} \varphi_l(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i [\varphi_l(x_i)]^2}, \quad l = 1, 2, \dots, k-1; \quad d_{kk} = 0. \quad (7.31c)$$

Ezekkel a polinomokkal (7.23) helyett a

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i \left( \xi_i - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x_i) \right)^2 \quad (7.32a)$$

funkcionál minimumát keressük a  $c_k$  paraméterek függvényében. Ez most is a (7.3) alakú

$$\mathbf{R}'\mathbf{c} = \mathbf{g}' \quad (7.32b)$$

egyenletrendszerre vezet, ahol az  $\mathbf{R}'$  mátrix és  $\mathbf{g}'$  vektor elemei (7.24) analógiájára

$$R'_{kk'} = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_k(x_i) \varphi_{k'}(x_i) = \delta_{kk'} \sum_{i=1}^n w_i [\varphi_k(x_i)]^2 \quad (7.32c)$$

és

$$g'_k = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i \varphi_k(x_i), \quad (7.32d)$$

( $k, k' = 1, 2, \dots, m$ ). Az  $\mathbf{R}'$  mátrix invertálása nem okoz semmiféle numerikus problémát, hiszen most

$$\tilde{c}_k = \frac{g'_k}{\sum_{i=1}^n w_i [\varphi_k(x_i)]^2}. \quad (7.33)$$

A (7.25) képlet alapján ezek a paraméterek egymástól függetlenek, és szórásnégyzetük

$$D^2(\tilde{c}_k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i [\varphi_k(x_i)]^2} = \frac{1}{R'_{kk}}. \quad (7.34)$$

Mind az ortogonális polinomok megszerkesztéséhez, mind az eredeti paraméterek rekonstruálásához szükség van a polinomok együtthatóira. Keressük tehát a polinomokat

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^k b_{kl} x^{l-1} \quad (7.35a)$$

alakban. (7.31)-ből következik, hogy

$$b_{kk} \equiv 1, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.35b)$$

(7.31b) szerint pedig

$$b_{kl} = \sum_{l'=l}^{k-1} d_{kl'} b_{l'l}, \quad l = 1, 2, \dots, k-1, \quad (7.35c)$$

aminek a levezetését az Olvasóra bízjuk.

Az imént kapott algoritmus megvilágítása érdekében kiszámítjuk az első néhány ortogonális polinomot. (7.31)-ből következik, hogy  $d_{11} = 0$ ,  $b_{11} = 1$ . Helyettesítsük ezt (7.35b)-be és (7.35c)-be  $k = 2$  mellett:

$$b_{22} = 1, \quad b_{21} = d_{21} b_{11} = d_{21}.$$

(7.31c) alapján

$$d_{21} = -\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i \varphi_1(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i [\varphi_1(x_i)]^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = -\bar{x},$$

vagyis

$$\varphi_2(x) = x - \bar{x}.$$

Ez eddig ugyanaz, mint amit a 7.5. ábrák alapján heurisztikusan sejtettünk. Alkalmazzuk ismét (7.31c)-t:

$$d_{31} = -\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n w_i} = -\overline{x^2}, \quad d_{32} = -\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2 (x_i - b_{21})}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - b_{21})^2}, \quad d_{33} = 0.$$

(7.35b)-ből és (7.35c)-ből

$$b_{33} = 1, \quad b_{32} = d_{32} b_{22} = d_{32}, \quad b_{31} = d_{31} b_{11} + d_{32} b_{21}.$$

Ezt tovább folytatva felépíthetjük a  $\varphi_4(x)$ ,  $\varphi_5(x)$  stb. polinomokat. Amikor programot készítünk, a polinomok helyettesítési értékeinek a kiszámítására célszerű a *Horner-elrendezést* alkalmazni, vagyis a (7.35a) képlet helyett a következő sémát beprogramozni:

$$\varphi_k(x) = b_{k1} + x \left( b_{k2} + x \left( b_{k3} + \dots + x \left( b_{k,k-1} + x b_{kk} \right) \right) \right).$$

Így tudjuk nem csak a szorzások és összeadások számát, hanem a kivonási jegyvesztéseket is a minimumra lehet csökkenteni.

Az eredeti polinom együtthatóit a következő azonosságból kapjuk meg:

$$\sum_{k=1}^m a_k x^{k-1} \equiv \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x).$$

Könnyű belátni, hogy ez az azonosság akkor teljesül, amikor

$$a_k = \sum_{l=k}^m c_l b_{lk}. \quad (7.36a)$$

Ennek a képletnek az alkalmazásakor is léphetnek fel kikerülhetetlen kivonási jegyvesztések, de ezek általában sokkal kisebb hibát okoznak, mint azok, amelyek a mátrixinvertálás során fellépnek. Ha bevezetjük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

jelölést, akkor (7.36a)-t átírhatjuk vektori alakba:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{c}}. \quad (7.36b)$$

(3.29) alapján adódik ebből az eredeti paraméterek kovarianciamátrixa:

$$\mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{c}}} \mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{A}^T \mathbf{R}'^{-1} \mathbf{A}. \quad (7.37)$$

Vegyük észre, hogy (7.35b)-re való tekintettel mindig

$$\tilde{a}_m = \tilde{c}_m. \quad (7.36c)$$

### Hányadfokú legyen a polinom?

Gyakran kérdezzük, hányadfokú polinomot célszerű választani. Nyilván minél magasabb a polinom fokszáma, annál jobban fogja az illesztőfüggvény a mérési eredményeket közelíteni. Mivel az  $\tilde{\mathbf{a}}$  becslt paraméterek szórása viszont rohamosan nő a fokszámmal, igyekszünk minél alacsonyabb fokszámú polinomot illeszteni. Szélső esetben  $n$  pontra egzaktul lehet egy  $(n-1)$ -edfokú polinomot illeszteni ( $m=n$ ), de ennek aligha van valami fizikai értelme. Az ortogonális polinomok segítségével megtalálhatjuk e két ellentmondó szempont között a középutat.

Írjunk fel ugyanis konfidenciaintervallumot a  $c_k$  együtthatókra. Ha  $\gamma$  az  $(n-m)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise, akkor (7.28) mintájára a következő intervallumot szerkeszthetjük meg:

$$\tilde{c}_k - \gamma D(\tilde{c}_k) \leq c_k \leq \tilde{c}_k + \gamma D(\tilde{c}_k), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.38)$$

ahol a szórásokat (7.34) alapján becsüljük. Mivel ezek az együtthatók egymástól függetlenek, azokat el lehet vetni, amelyek nem különböznek szignifikánsan 0-tól, vagyis amelyekre a (7.38) intervallum tartalmazza a 0-t.  $m$  megfelelő értéke tehát az a legnagyobb  $k$ , amelynél nagyobb indexekre ez teljesül.

Az elmondottakat a 7.2. táblázatban mutatott adatokkal illusztráljuk.<sup>72</sup> Harmadfokú polinomot illesztettünk rájuk, és 99% konfidenciaszinten a következő intervallumok adódtak (7.38) és a 2. függelék szerint:

$$351,56 \leq c_1 \leq 352,26; \quad 0,4149 \leq c_2 \leq 0,4376;$$

$$1,778 \cdot 10^{-3} \leq c_3 \leq 2,507 \cdot 10^{-3}; \quad -1,142 \cdot 10^{-5} \leq c_4 \leq 1,312 \cdot 10^{-5}.$$

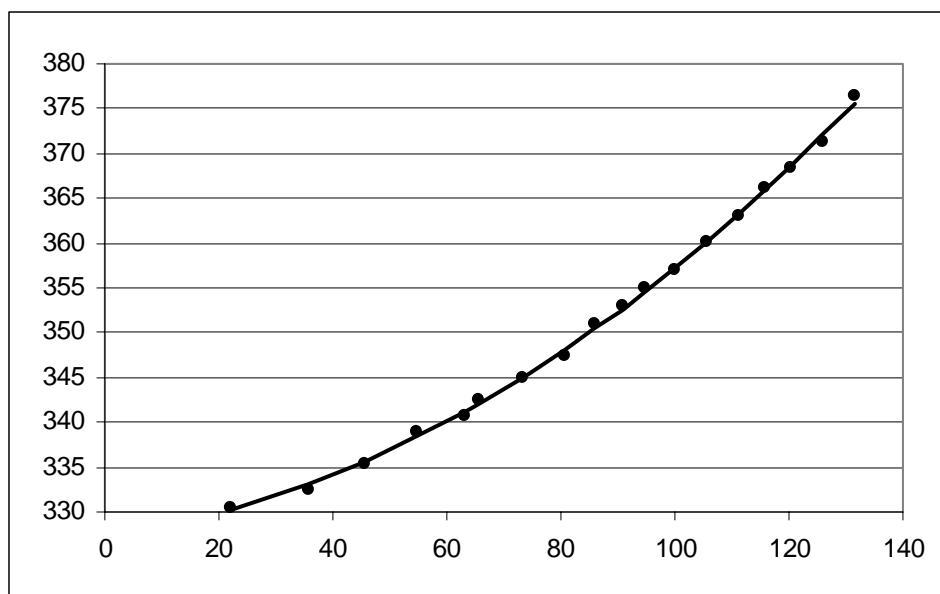
Látható, hogy  $c_4$  nem különbözik szignifikánsan 0-tól, tehát  $m$  megfelelő értéke 3, vagyis az adatok leírhatók egy másodfokú polinommal. Amikor ilyen következtetésre jutunk, érdemes az illesztést az alacsonyabb fokszámmal is megismételni. Ha akkor a fentitől lényegesen eltérő konfidenciaintervallumok jönnek ki, akkor ez azt jelenti, hogy a polinomillesztéssel nincs minden rendben. Nézzük meg ezért, mi jön ki  $Q_{\min}$ -ra a két illesztésben:

$$Q_{\min} = 3,553 \quad m = 4 - \text{re} \quad \text{és} \quad Q_{\min} = 3,564 \quad m = 3 - \text{ra}.$$

A két érték gyakorlatilag megegyezik egymással, tehát teljesen elegendő másodfokú polinomot illeszteni. Ezt illusztrálja a 7.6. ábra, amelyen a 7.2. táblázatban található adatokat és az illesztett függvényt ábrázoljuk.

7.2. táblázat. Példa polinomillesztésre

$x_i$	$\xi_i$	$x_i$	$\xi_i$
22,00	330,38	90,73	353,02
35,90	332,55	94,70	355,00
45,61	335,45	100,00	357,03
54,85	338,95	105,61	360,03
63,30	340,80	111,30	362,96
65,68	342,52	115,70	366,08
73,38	345,02	120,40	368,45
80,67	347,42	126,10	371,40
85,99	351,00	131,44	376,33



7.6. ábra. A 7.2. táblázatban található adatok és az illesztett másodfokú polinom

<sup>72</sup> Ezek valóságosan mért adatok: egy reaktor magasságát ( $\xi_i$ ) mutatja a hőmérséklet ( $x_i$ ) függvényében.

Elvileg ugyan lehetséges, hogy egy  $c_k$  együtthatót ilyen alapon 0-nak veszünk, és egy másik, magasabb fokszámú  $\varphi_k(x)$  polinomé meg szignifikánsan különbözik 0-tól, de ez nem szokott a gyakorlatban előfordulni. Ha ugyanis a mérések leírhatók egy  $k$ -adfokú polinommal, akkor a (7.30) szerinti ortogonalitás miatt  $k' > k$ -ra mindegyik  $\tilde{c}_{k'}$  várható értéke zérus. Ez is az ortogonális polinomok előnye, mert az  $a_k$  együtthatókkal könnyen megtörténhet, hogy  $\tilde{a}_k$  nem különbözik szignifikánsan 0-tól, de  $k' > k$ -ra  $\tilde{a}_{k'}$  igen. Természetesen az ortogonális polinomokkal sem árt a körültekintés.

### 7.3. Hibaterjedés

Gyakran fordul elő, hogy valamilyen mennyiséget közvetlen mérésből vagy illesztésből származó valószínűségi változók függvényében számítjuk ki. Az eredmény szintén valószínűség változó. Ahhoz, hogy vele tovább tudjunk dolgozni, ismernünk kell várható értékét és szórását. Több mennyiség számítása esetében szükség lehet a kovariancia kiszámítására is.

Az eddigi alfejezetekben tekintett illesztésekben tulajdonképpen már ezt tettük, hiszen a közvetlenül mért  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mennyiségek függvényében becsültük a keresett  $a_1, a_2, \dots$  paramétereket, és határoztuk meg rájuk vonatkozóan a várható értéket, szórás és kovarianciát. Azt is mondhatnánk tehát, hogy a vizsgálandó függvénykapcsolatot illesztőfüggvénynek tekintve közvetlenül alkalmazhatjuk korábbi képleteinket. Ilyesmit mégsem mondunk, mert szeretnénk a gyakorlatban közvetlenül használható módszereket és képleteket levezetni. Vizsgálni fogjuk tehát az

$$\eta_k = g_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = g_k(\vec{\xi}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7.39)$$

alakú függvényeket. Többnyire csak az  $m = 1$  esettel foglalkozunk. Ilyenkor elhagyjuk a  $k$  indexet.

#### Várható érték

Legyen először  $n = 1$ . Fejtsük a  $g$ -függvényt az  $y = M(\xi)$  várható érték körül Taylor-sorba:

$$g(\xi) = g(y) + g'(y)(\xi - y) + \frac{1}{2} g''(y)(\xi - y)^2 + \dots \quad (7.40a)$$

Itt a páratlan kitevőjű tagok várható értéke eltűnik, vagyis

$$M[g(\xi)] = g(y) + \frac{1}{2} g''(y) D^2(\xi) + \dots, \quad (7.40b)$$

ahol a ki nem írt tagok közül az első a  $g$ -függvény negyedik deriváltjával és negyedik centrális momentumával arányos (vö. 3.1. alfejezet).

Amikor a  $g(\xi)$  függvényt kiszámítjuk, a  $g(y)$  mennyiségre szeretnénk becslést kapni. Látható, hogy ez csak akkor torzítatlan, amikor a (7.40b)-ben kiírt második tag az első mellett elhanyagolható. Az alábbiakban ezt mindig fel fogjuk tételezni. Ekkor azonban a Csebisev-egyenlőtlenségből (3.3. TÉTEL) következik, hogy a (7.40a) sorfejtésben a négyzetes tag nagy valószínűséggel elhanyagolható. Más szóval: a  $g(\xi)$  függvény linearizálható. A továbbiakban tehát a

$$\Delta g = g(\xi) - g(y) \cong g'(y)(\xi - y) \quad (7.41a)$$

közelítést alkalmazzuk. Ha nem egy, hanem több valószínűségi változó szerepel, akkor ennek az analogonja a

$$\Delta g = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - g(y_1, y_2, \dots, y_n) \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \xi_i} (\xi_i - y_i) \quad (7.41b)$$

képlet. Könnyű ezt átvinni az  $m > 1$  esetre is.

A jobb oldalon szereplő  $(\xi_i - y_i)$  különbségek az egyes valószínűségi változók mérési (illesztési) hibái. A (7.41) képletek megadják, hogy ezek hatása hogyan terjed át a kiszámítandó függvényre. Ezért szoktunk *hibaterjedésről* beszélni. Mivel azonban a hibákat nem ismerhetjük, csak arra van lehetőségünk, hogy ezek legfőbb jellemzőjét, a szórást kiszámítsuk a közvetlenül mért mennyiségek szórásának a függvényében.

### A kiszámított függvény szórása

Tegyük fel először, hogy a  $\xi_i$  valószínűségi változók *függetlenek*. Ekkor az 3.8. TÉTELT alkalmazhatjuk. Az eredmény annyira fontos, hogy tétel formájában mondjuk ki:

7.1. TÉTEL. Ha a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) és  $g$  a valószínűségi változók olyan függvénye, amelyre alkalmazható a (7.41b) közelítés, a függvény helyettesítési értékének szórásnégyzete

$$D^2[g(\bar{\xi})] = M[(\Delta g)^2] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right)^2 D^2(\xi_i). \quad (7.42)$$

Ez az általánosan használt hibaterjedési képlet.

Példaképpen tekintjük a (7.20b) képletben szereplő  $a_2$  paramétert. A linearizált illesztésből kapjuk az  $a'_1$  és  $a'_2$  paramétereket, amelyekből az

$$\tilde{a}_2 = g(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2) = -\frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{a}'_1}$$

képlet alapján kapjuk a keresett paramétert. Feltesszük egyelőre, hogy a vesszős paraméterek közötti kovariancia elhanyagolható. (7.42) szerint ennek a szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}_2) = \left( \frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{a}'_1} \right)^2 D^2(\tilde{a}'_1) + \left( \frac{1}{\tilde{a}'_1} \right)^2 D^2(\tilde{a}'_2).$$

A hasonló szorzat, illetve hányados alakú függvények esetében egyszerűbb, ha vesszük a  $g$ -függvény logaritmusát:

$$\ln|\tilde{a}_2| = \ln|\tilde{a}'_2| - \ln|\tilde{a}'_1|,$$

majd ennek vesszük a differenciálját:

$$\frac{\Delta|\tilde{a}_2|}{|\tilde{a}_2|} = \frac{\Delta|\tilde{a}'_2|}{|\tilde{a}'_2|} - \frac{\Delta|\tilde{a}'_1|}{|\tilde{a}'_1|},$$

és alkalmazzuk a szórásnégyzetek összeadási törvényét:

$$\frac{D^2(\tilde{a}_2)}{\tilde{a}_2^2} = \frac{D^2(\tilde{a}'_1)}{\tilde{a}'_1{}^2} + \frac{D^2(\tilde{a}'_2)}{\tilde{a}'_2{}^2},$$

amiből

$$D^2(\tilde{a}_2) = \tilde{a}_2^2 \left[ \frac{D^2(\tilde{a}'_1)}{\tilde{a}'_1{}^2} + \frac{D^2(\tilde{a}'_2)}{\tilde{a}'_2{}^2} \right] = \left( \frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{a}'_1} \right)^2 \left[ \frac{D^2(\tilde{a}'_1)}{\tilde{a}'_1{}^2} + \frac{D^2(\tilde{a}'_2)}{\tilde{a}'_2{}^2} \right].$$

Könnyű belátni, hogy ez azonos a (7.42) képlet közvetlen alkalmazásával kapott eredménnyel. Két változó esetében talán bonyolultabbnak tűnik a logaritmuson alapuló számítás, de sok tényező esetében, főleg ha gyökök és hatványok is előfordulnak, a logaritmus képzése mindig egyszerűsítést jelent.

A (7.42) képlet nem érvényes, amikor a szereplő valószínűségi változók korreláltak. Egyszerűen bizonyítható a

7.2. TÉTEL. Ha  $g$  a  $\xi_i$  valószínűségi változók ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) változók olyan függvénye, amelyre alkalmazható a (7.41b) közelítés, a függvény helyettesítési értékének szórásnégyzete

$$D^2 \left[ g(\bar{\xi}) \right] = M \left[ (\Delta g)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j). \quad (7.43)$$

Ennek a tételnek az alkalmazása elsősorban akkor jön szóba, amikor a szereplő valószínűségi változók illesztett paraméterek. Térjünk vissza a fenti példához, és ne hanyagoljuk el az illesztett paraméterek közötti kovarianciát! A (7.43) képlet ekkor a

$$D^2(\tilde{a}_2) = \left( \frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{a}'_1} \right)^2 D^2(\tilde{a}'_1) + \left( \frac{1}{\tilde{a}'_1} \right)^2 D^2(\tilde{a}'_2) - 2 \frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{a}'_1{}^3} \text{cov}(\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2).$$

Megjegyzendő, hogy itt is alkalmazható a logaritmálás, de nagyon kell vigyázni az előjelekre. Aki nem jártas a dologban, jobban teszi, ha a rögzösebb, de egyenes utat választja, vagyis közvetlenül a (7.43) képletet alkalmazza.

### Függvények kovarianciája

Amikor (7.39) szerint egynél több függvényt számítunk ki ( $m > 1$ ), a kiszámított függvényértékek korreláltak lesznek, hiszen ugyanazoktól a valószínűségi változóktól függnek. Ebben az esetben érdekes a különböző  $k$  indexekhez tartozó függvényértékek közötti kovariancia. Ezt (7.41b) alapján írhatjuk fel. Rögtön az általános esetet tekintjük, vagyis nem tételezzük fel, hogy a közvetlenül mért (illesztett) valószínűségi változók függetlenek. Egyszerűen bizonyítható a

7.3. TÉTEL. Ha a  $g_k$  függvények ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) a  $\xi_i$  valószínűségi változók ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) változók olyan függvényei, amelyekre alkalmazható a (7.41b) közelítés, a függvények helyettesítési értékének a kovarianciája

$$\text{cov} \left[ g_k(\bar{\xi}), g_{k'}(\bar{\xi}) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial g_{k'}}{\partial \xi_j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j). \quad (7.44)$$

E képletet a fent tekintett linearizált illesztés eredményeire alkalmazzuk. Kiszámítjuk a (7.20b)-ben szereplő  $a_1$  és  $a_2$  paraméterek kovarianciáját:

$$\text{cov}[a_1, a_2] = -\frac{2\tilde{a}_2'}{\tilde{a}_1'^4} D^2(\tilde{a}_1') + \frac{2}{\tilde{a}_1'^3} \text{cov}(\tilde{a}_1', \tilde{a}_2').$$

Mint a kovarianciák esetében általában, itt is ügyelni kell az egyes tagok előjelére.

### Konfidenciintervallumok

Amikor a közvetlenül mért (illesztett) valószínűségi változók mind Gauss-eloszlásúak, a vizsgált függvények helyettesítési értékéről ugyanezt lehet mondani. Ebben az esetben tehát nem okoz problémát a konfidenciintervallumok megszerkesztése.

Az illesztett paraméterek esetében azonban a szórások mindig csak véges szabadsági fokkal becsülhetők. Ilyenkor bonyolultabb feladattal állunk szemben, de – bonyolultsága miatt – ennek részleteibe nem megyünk bele.

### 7.4. Simítás és differenciálás

Gyakran előfordul, hogy egy ismeretlen függvényt kísérletileg meghatározunk, és szeretnénk becslést adni magára a függvényre. Ezt nevezzük *simítás*nak. Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan alkalmazható erre a polinomillesztés. A simítás azon alapul, hogy tetszőleges, nem nagyon gyorsan változó (ún. sima) függvényt egy elegendően szűk intervallumban Taylor-sorba lehet fejteni és a sort  $x$  hatványai szerinti polinomba lehet átrendezni:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = \\ &= \left[ f(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) x_0^2 \right] + [f'(x_0) - f''(x_0) x_0] x + \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} f''(x_0) \right] x^2 + \dots = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots \end{aligned}$$

Más szóval: az ismeretlen függvényt egy alkalmas fokszámú polinommal közelítjük. A 7.6. ábrán látható görbe esetében elég volt egyetlen polinomot illeszteni, de nem ez az általános eset, mert általában alkalmasan választott szakaszonként különböző polinomokat kell illeszteni. Természetesen nem csak polinommal, hanem más illeszthető függvényekkel is lehet simítani.

Ha az illesztett polinomot (polinomokat) differenciáljuk, akkor az ismeretlen függvény deriváltjára is kaphatunk becslést.

### Simítás

A 7.2. alfejezetben felírtuk a polinomillesztés végrehajtásához szükséges képleteket. A simítás végrehajtásának részeként azonban ezen túlmenően még ki kell számítanunk a becsült függvény értékeinek a szórását és a különböző  $x$  értékekhez tartozó függvényértékek kovarianciáját is. Ehhez a 7.3. alfejezetben tárgyalt hibaterjedés képleteit használhatjuk. Tegyük fel, hogy a görbe valamelyik szakaszán egy másodfokú görbét illesztettünk, és eredményül az  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_2$  és  $\tilde{a}_3$  paramétereket kaptuk, amelyek kovarianciamátrixa  $\mathbf{B}_a$ . Ekkor a keresett függvényt az  $x = x_i$  mérési pontban az

$$\tilde{y}_i = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 x_i + \tilde{a}_3 x_i^2 \quad (7.45a)$$

képlettel becsüljük. A (7.43) képlet szerint ennek a szórásnégyzete:



$$D^2(\tilde{y}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m [\mathbf{B}_a]_{kl} x_i^{k+l-2}. \quad (7.45b)$$

A (7.44) képlet alapján kapjuk az  $x = x_i$  és  $x = x_j$  pontokhoz tartozó értékek kovarianciáját:

$$\text{cov}(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m [\mathbf{B}_a]_{kl} x_i^{k-1} x_j^{l-1}. \quad (7.45c)$$

Az eljárás számítógépre való programozásához hasznos ezeket a képleteket vektoros alakba is átírni. Jelöljük az illesztőfüggvénynek az illesztett paraméterek szerinti deriváltjait  $F_{ik}$ -val:

$$F_{ik} = \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ebből képezzük az  $n \times m$  méretű  $\mathbf{F}$  mátrixot. Polinomillesztés esetében

$$[\mathbf{F}]_{ik} = F_{ik} = x_i^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.46a)$$

A  $w_i$  súlyokból képezzük a diagonális  $\mathbf{W}$  mátrixot. Ekkor a (7.24) képleteket a következőképpen írhatjuk át vektori alakba:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}, \quad (7.46b)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \vec{\xi}, \quad (7.46c)$$

ahol  $\vec{\xi}$  a mért  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mennyiségekből képezett ( $n$ -elemű) vektor.

Mint mondtuk, a simítás abból áll, hogy a paraméterek becsült értékét behelyettesítjük az illesztőfüggvénybe:

$$\tilde{y}_i = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_k x_i^{k-1} = \sum_{k=1}^m F_{ik} \tilde{a}_k, \quad (7.47a)$$

amit az alábbi módon írhatunk át vektori alakba:

$$\vec{y} = \mathbf{F} \vec{a} = \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \vec{\xi}. \quad (7.47b)$$

E vektor kovarianciamátrixának a kiszámításakor abból indulunk ki, hogy a  $w_i$  súlyok fordítva arányosak a mért mennyiségek szórásnégyzetével:

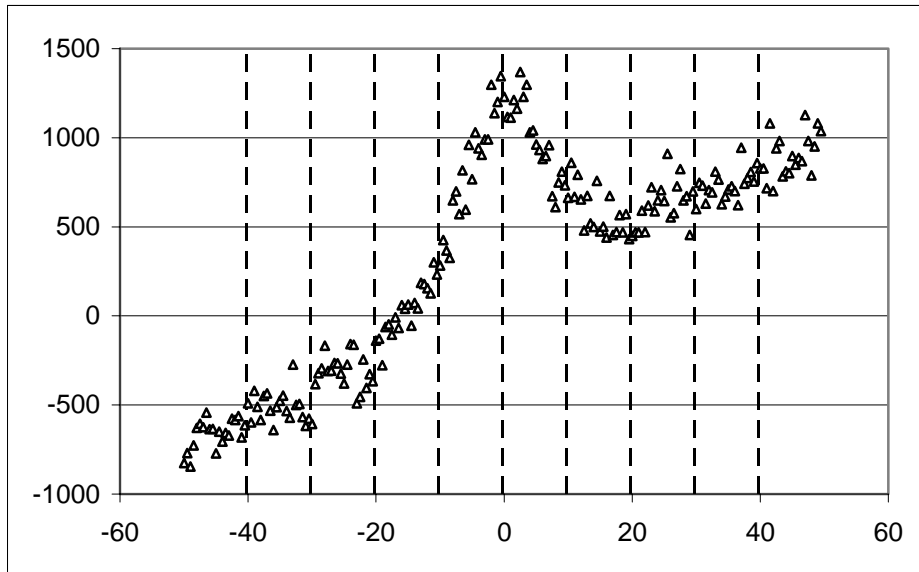
$$\mathbf{B}_{\vec{\xi}} = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1}.$$

A keresett kovarianciamátrixot a (3.29) képlet alapján kapjuk:

$$\mathbf{B}_{\vec{y}} = \sigma^2 \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T = \sigma^2 \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T. \quad (7.48)$$

Ezt az összefüggést a következő, általánosabban használható alakban is felírjuk [vö. (7.25)]:

$$\mathbf{B}_{\vec{y}} = \mathbf{F} \mathbf{B}_a \mathbf{F}^T. \quad (7.49)$$



7.7. ábra. A simítandó görbe pontjait a szaggatott vonalak szerint részhalmozokra bontjuk

A 7.2. táblázatban szereplő adatokra sikeresen illesztettünk egy másodfokú polinomot, sőt arról is meggyőződünk, hogy nincs szükség magasabb fokszámú polinomra. Nem minden eset ilyen egyszerű azonban. Az alábbiakban egy bonyolultabb esetet elemzünk. A 7.7. ábra egy ilyen esetet mutat. A pontok úgy keletkeztek, hogy egy koszinuszfüggvény és egy exponenciális függvény összegéhez hozzáadtunk  $\sigma = 100$  szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó számítógéppel generált értékeit. Nyilvánvaló, hogy rendkívül magas fokszámú polinomra lenne szükség, ha ezt a „mért” görbét egyetlen polinommal próbálnánk simítani. Ezért a pontokat az ábrán bejelölt helyeken részhalmozokra osztottuk, és az így kapott (20-elemű) csoportokra külön próbálunk meg polinomokat illeszteni. Így összesen tíz különálló polinomot kapunk. Együtthatóikat a következőképpen jelöljük:

$$\text{az első szakaszon: } a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2,$$

$$\text{a második szakaszon: } a_4 + a_5x_i + a_6x_i^2,$$

$$\text{a harmadik szakaszon: } a_7 + a_8x_i + a_9x_i^2$$

és így tovább az utolsó szakaszig:

$$\text{a tizedik szakaszon: } a_{28} + a_{29}x_i + a_{30}x_i^2.$$

Végeredményben tehát összesen 30 paramétert illesztettünk, de ezek hármásával egymástól független csoportokat alkotnak. Harmadfokú polinomok esetében az illesztett paraméterek jelölése a következő:

$$\text{az első szakaszon: } a_1 + a_2x_i + a_3x_i^2 + a_4x_i^3,$$

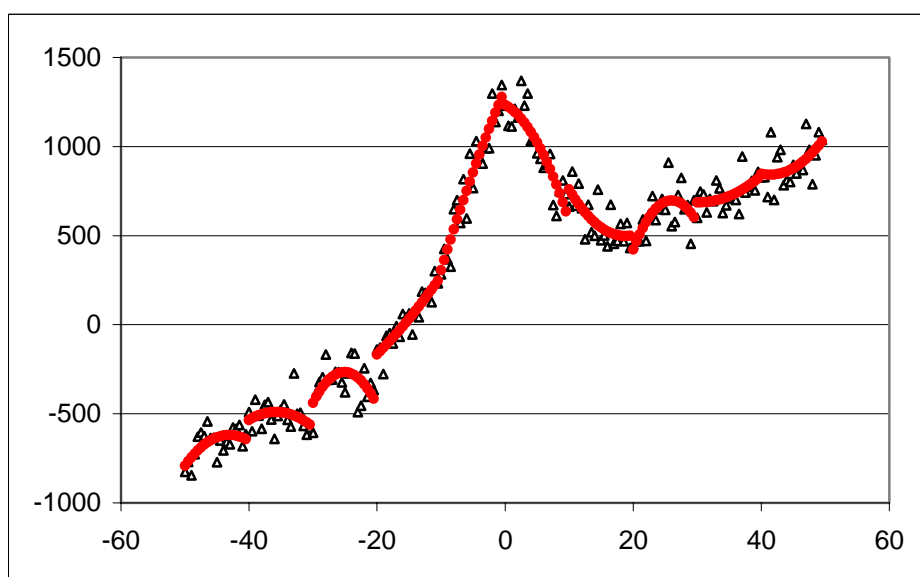
$$\text{a második szakaszon: } a_5 + a_6x_i + a_7x_i^2 + a_8x_i^3,$$

$$\text{a harmadik szakaszon: } a_9 + a_{10}x_i + a_{11}x_i^2 + a_{12}x_i^3$$

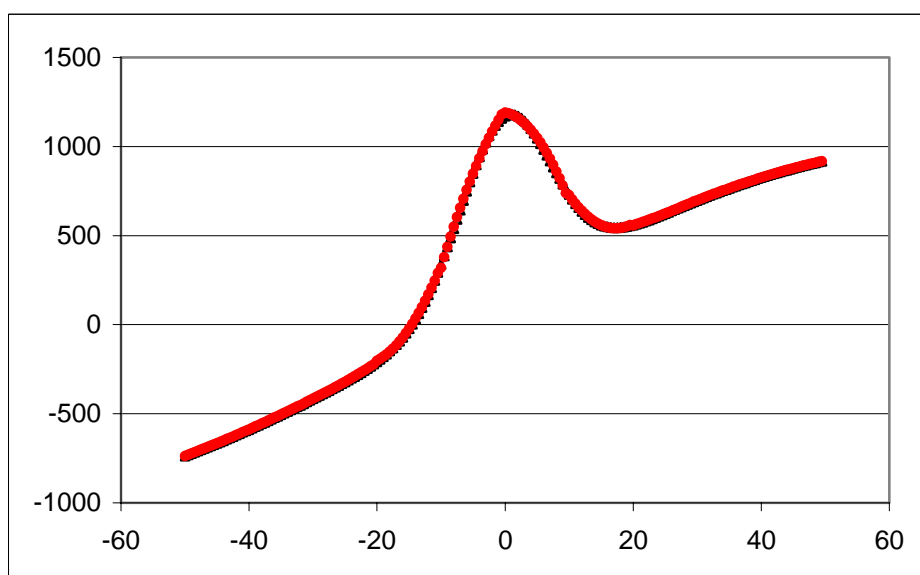
és így tovább az utolsó szakaszig:

$$\text{a tizedik szakaszon: } a_{37} + a_{38}x_i + a_{39}x_i^2 + a_{40}x_i^3.$$

Magasabb fokszámú polinomok esetében a polinomok felírása analóg.



7.8a. ábra. A 7.7. ábrán definiált csoportokra külön illesztett másodfokú polinomok ( $m = 3$ )



7.8b. ábra. A 7.8a. ábrán látható, de nulla szórású pontokra illesztett másodfokú polinomok ( $m = 3$ )

Az illesztett másodfokú polinomok ( $m = 3$ ) a 7.8a. ábrán láthatók. Látható, hogy a simítás nem sikerült valami különösen jól: az egyes darabok nem csatlakoznak egymáshoz, inkább a pontoknak az adott csoporton belüli flutuációt követik, mint a feltételezett sima görbe menetét. Jóllehet a gyakorlatban nem tehetjük meg, a 7.8b. ábrán mégis megmutatjuk, hogyan viselkednek az illesztett polinomok  $\sigma = 0$  szórás esetén. Az eredeti és az illesztett görbe szinte meg sem különböztethető egymástól. Ez azt jelenti, hogy nem a polinomok fokszámával van a baj, hanem azzal, hogy az illesztett tíz polinomdarab nem ad kellően jó simítást. Két dolgot tehetünk: egyrészt áttérhetünk nagyobb csoportokra (például a tíz 20-elemű csoport helyett vehetünk öt 40-elemű csoportot), másrészt előírhatjuk, hogy az egyes polinomdarabok folytonosan illeszkedjenek egymáshoz. Az előbbi megoldás csak elodázza problémát: tíz rosszul illesz-

kedő polinomdarab helyett öt rosszul illeszkedő polinomdarabbal kell bajlódunk. Tehát nem kerülhetjük el a polinomdarabok folytonos illeszkedésének az előírását.

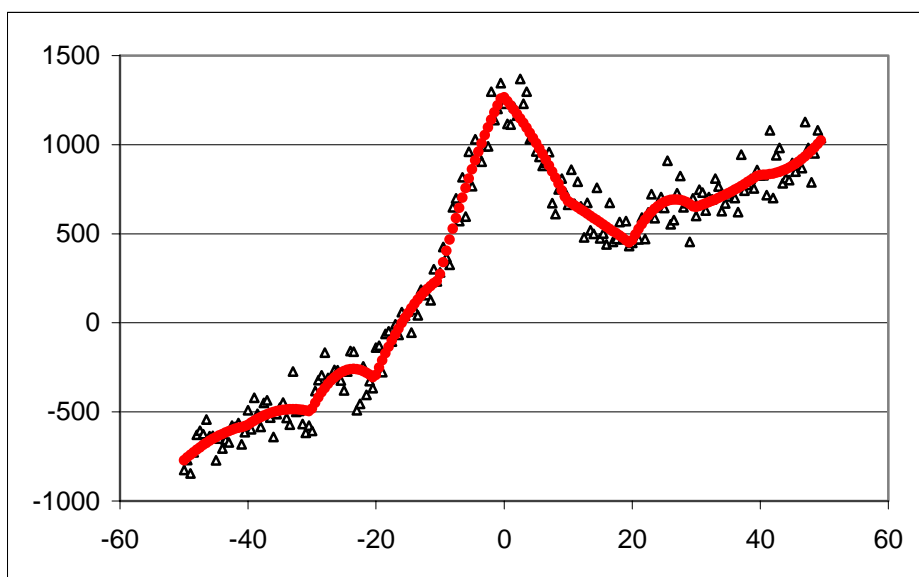
Ha 7.7. ábrán megjelölt szakaszhatárokat  $z_1, z_2, \dots, z_9$ -cel jelöljük, akkor ez azt jelenti, hogy ezeken a helyeken a következő mellékfeltételek teljesülését követeljük meg (másodfokú polinomok illesztése esetén):

$$a_1 + a_2 z_1 + a_3 z_1^2 = a_4 + a_5 z_1 + a_6 z_1^2, \quad (7.50a)$$

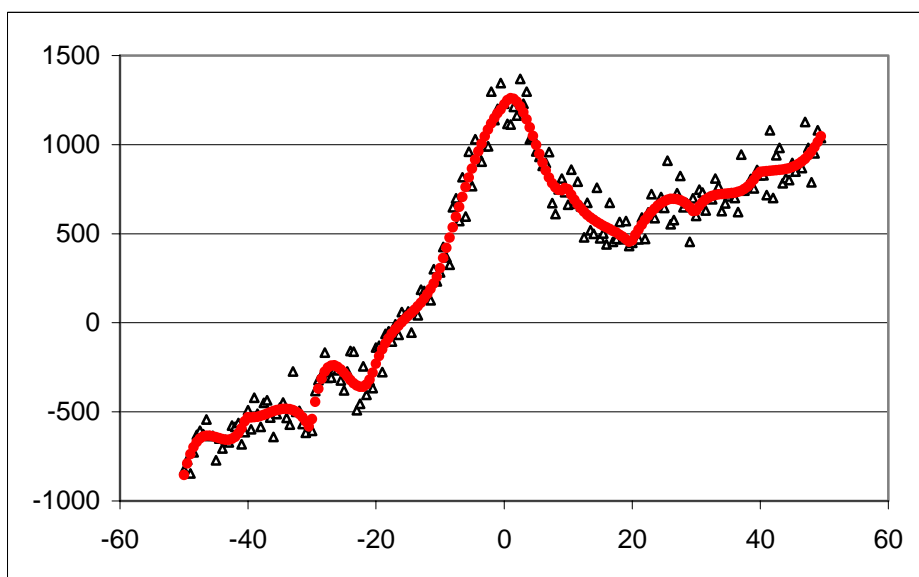
$$a_4 + a_5 z_2 + a_6 z_2^2 = a_7 + a_8 z_2 + a_9 z_2^2 \quad (7.50b)$$

és így tovább az utolsó elválasztó pontig:

$$a_{25} + a_{26} z_9 + a_{27} z_9^2 = a_{28} + a_{29} z_9 + a_{30} z_9^2. \quad (7.50c)$$



7.8c. ábra. A 7.8a. ábrán látható pontok simítása a (7.50) mellékfeltételekkel ( $m = 3$ )



7.8d. ábra. A 7.8a. ábrán látható pontok simítása a (7.50) mellékfeltételekkel ( $m = 4$ )

Ez kilenc mellékfeltételt jelent, vagyis az illesztett 30 paraméter nem független egymástól, hiszen közülük kilencet ki lehet fejezni a maradék 21-gyel. Az ilyen fajta függvényillesztést *kiegyenlítésnek* nevezzük. Általános elméletét a 6.5. alfejezetben olvashatjuk. Ez az elmélet jóval egyszerűbben alkalmazható polinomillesztés esetében. A részletek kidolgozását a jelen alfejezt végére halasztjuk. Egyelőre tegyük fel, hogy ezt a (7.50) mellékfelelet szerint végrehajtottuk. Az eredményt a 7.8c. ábrán mutatjuk be. A szakadások megszűntek, de a simítás szemmel láthatóan még mindig nem kielégítő. Ha a polinom fokszámát harmadfokúra növeljük ( $m = 4$ ), a (7.50) mellékfeltételeket módosítani kell. A (7.50) feltételek helyett a következőket kell figyelembe venni:

$$a_1 + a_2 z_1 + a_3 z_1^2 + a_4 z_1^3 = a_5 + a_6 z_1 + a_7 z_1^2 + a_8 z_1^3, \quad (7.51a)$$

$$a_5 + a_6 z_2 + a_7 z_2^2 + a_8 z_2^3 = a_9 + a_{10} z_2 + a_{11} z_2^2 + a_{12} z_2^3 \quad (7.51b)$$

és így tovább az utolsóig:

$$a_{33} + a_{34} z_9 + a_{35} z_9^2 + a_{36} z_9^3 = a_{37} + a_{38} z_9 + a_{39} z_9^2 + a_{40} z_9^3. \quad (7.51c)$$

Mivel most egy polinomnak négy paramétere van, összesen 40 paramétert illesztünk kilenc mellékfeltétellel. A helyzetben a harmadfokú polinomok nem javítanak semmit, sőt talán még rontanak is, amint ezt a 7.8d. ábra mutatja. A magyarázat egyszerű: a harmadfokú polinom jobban követi a fluktuációkat, és így nem javítja a simítást.

A kiutat csak további mellékfeltételek jelenthetik. A következőkben azt is előírjuk, hogy ne csak a polinomok maguk, hanem első deriváltjuk is folytonosan illeszkedjen egymáshoz. Ez nyilvánvalóan további kilenc mellékfeltétel előírását jelenti másodfokú polinomok esetében ( $m = 3$ ):

$$a_2 + 2a_3 z_1 = a_5 + 2a_6 z_1, \quad (7.52a)$$

$$a_5 + a_6 z_2 = a_8 + a_9 z_2 \quad (7.52b)$$

és így tovább az utolsó elválasztó pontig:

$$a_{26} + a_{27} z_9 = a_{29} + a_{30} z_9. \quad (7.52c)$$

Ezzel tehát összesen 18 mellékfeltételünk van a 30 illesztett paraméterre. Az így elvégzett illesztés eredményét a 7.8e. ábrán mutatjuk be. A helyzet ényegesen javult, simított görbe már nagyon közel van a 7.8b. ábrán látható pontos görbéhez. További javulást csak további mellékfeltételekkel érhetünk el. Ez nyilván nem lehet más, mint a polinomok második deriváltjának a folytonossága. Ha ezt is előírjuk, akkor már összesen  $3 \times 9 = 27$  mellékfeltételünk lesz, vagyis másodfokú polinomok esetén csak  $30 - 27 = 3$  szabad paraméterünk marad, ami azt jelenti, hogy gyakorlatilag egyetlen közös parabolát illesztünk a pontokra. Ez nyilván értelmetlen, ezért ezt az illesztést csak harmadfokú polinomokkal szabad elvégezni ( $m = 4$ ). A megfelelő mellékfeltételek a következők:

$$a_2 + 2a_3 z_1 + 3a_4 z_1^2 = a_6 + 2a_7 z_1 + 3a_8 z_1^2, \quad (7.53a)$$

$$a_6 + 2a_7 z_2 + 3a_8 z_2^2 = a_{10} + 2a_{11} z_2 + 3a_{12} z_2^2 \quad (7.53b)$$

és így tovább az utolsóig:

$$a_{34} + 2a_{35} z_9 + 3a_{36} z_9^2 = a_{38} + 2a_{39} z_9 + 3a_{40} z_9^2, \quad (7.53c)$$

illetve

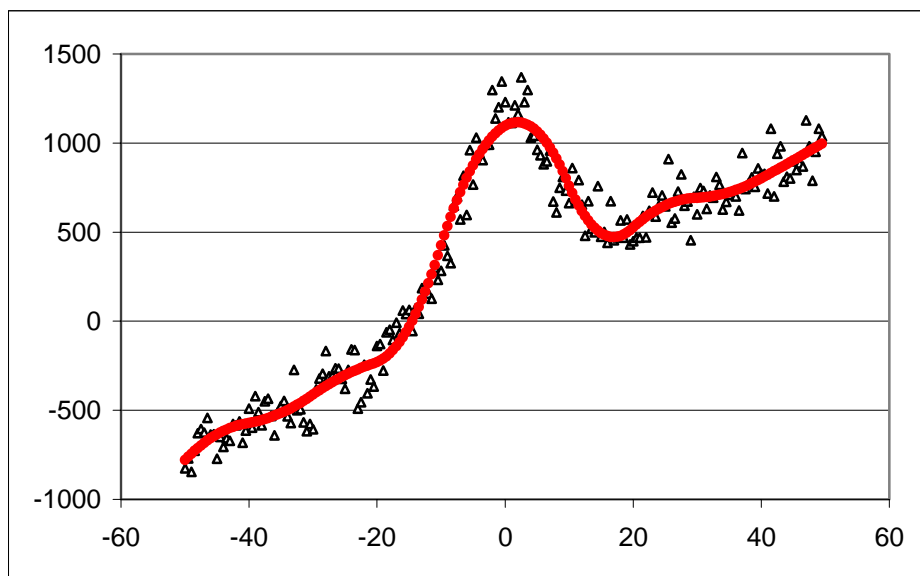
$$2a_3 + 6a_4z_1 = 2a_7 + 6a_8z_1, \quad (7.54a)$$

$$2a_7 + 6a_8z_2 = 2a_{11} + 6a_{12}z_2 \quad (7.54b)$$

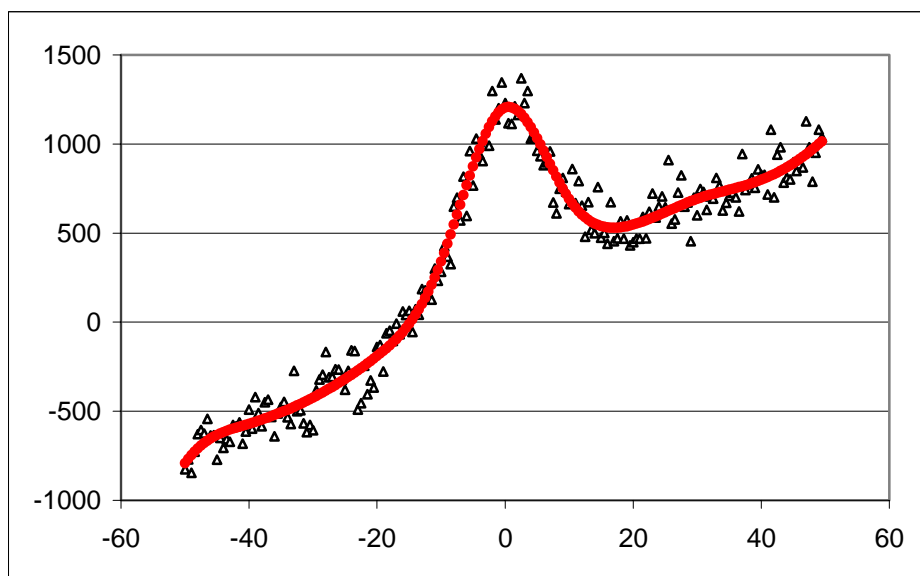
és így tovább az utolsóig:

$$2a_{35} + 6a_{36}z_9 = 2a_{39} + 6a_{40}z_9, \quad (7.54c)$$

Ekkor  $40 - 27 = 13$  szabad paraméterünk marad, ami éppen elegendő a megfelelő simításhoz. Az eredményt a 7.8f. ábrán láthatjuk.



7.8e. ábra. A 7.8a. ábrán látható pontok simítása a (7.50) és (7.52) mellékfeltételekkel ( $m = 3$ )



7.8f. ábra. A 7.8a. ábrán látható pontok simítása a második feriváltig folytonosan illeszkedő harmadfokú polinomokkal ( $m = 4$ )

## Differenciálás

A simítás eredményeképpen kapott polinom használható a mért (és ezért hibával terhelt) függvénykapcsolat differenciálására. Nem kell mást tennünk, mint a (7.47a) szerint simított függvényt deriválni:

$$\partial \tilde{y}_i = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_k (k-1) x_i^{k-2} = \sum_{k=1}^m (k-1) F_{ik} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^m \partial F_{ik} \tilde{a}_k. \quad (7.55a)$$

Azt, hogy valamilyen, a derivált függvényhez tartozó mennyiségről van szó, egy elé írt  $\partial$  jellel tüntetjük fel. (7.47b) mintájára ezt átírjuk vektori alakba  $\square$

$$\partial \tilde{\mathbf{y}} = \partial \mathbf{F} \tilde{\mathbf{a}} = \partial \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (7.55b)$$

ahol

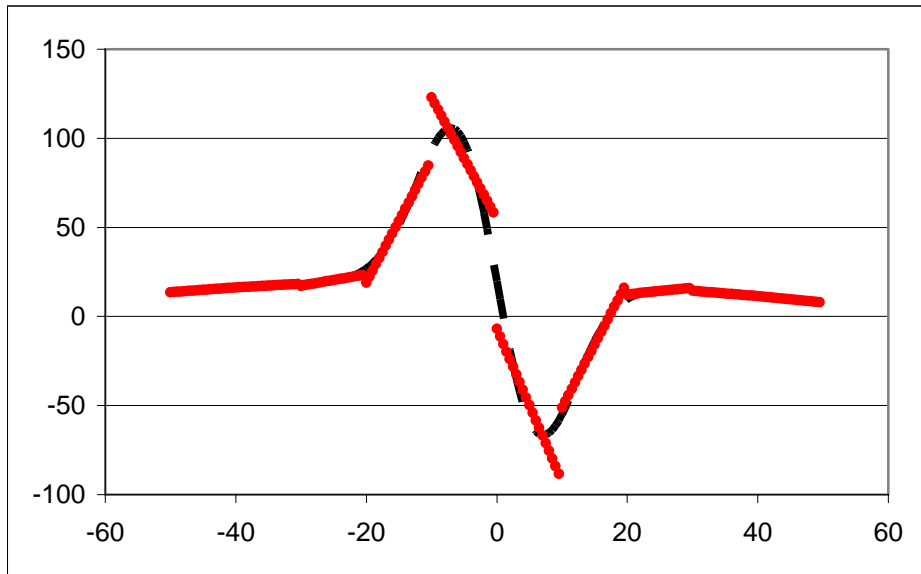
$$\partial F_{ik} = (k-1) F_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.55c)$$

A (3.29) képlet alapján kapjuk a deriváltak kovarianciamátrixát [vö. (7.48)]:

$$\mathbf{B}_{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \sigma^2 \partial \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} (\partial \mathbf{F})^T = \sigma^2 \partial \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} (\partial \mathbf{F})^T. \quad (7.56)$$

(7.49) mintájára ennek is felírjuk az általánosabb alakját:

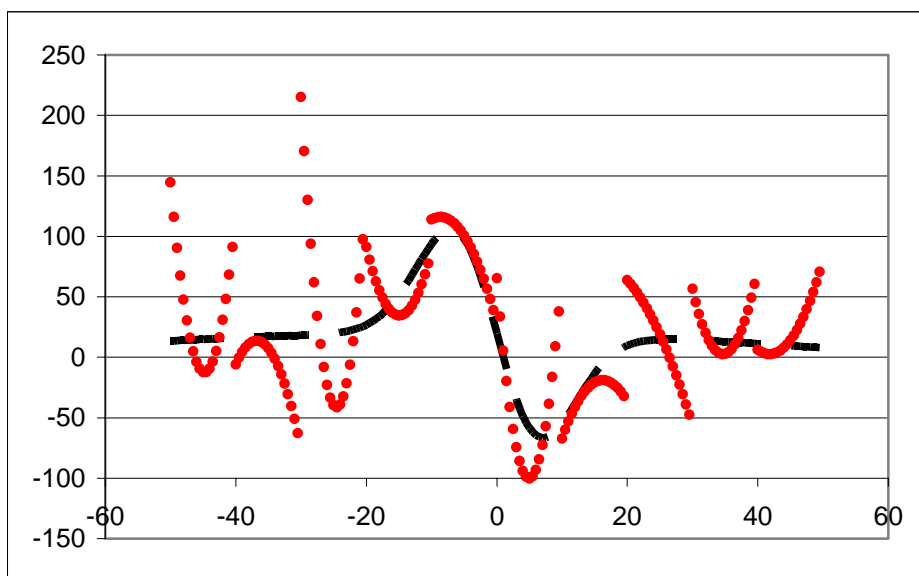
$$\mathbf{B}_{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \partial \mathbf{F} \mathbf{B}_a (\partial \mathbf{F})^T. \quad (7.57)$$



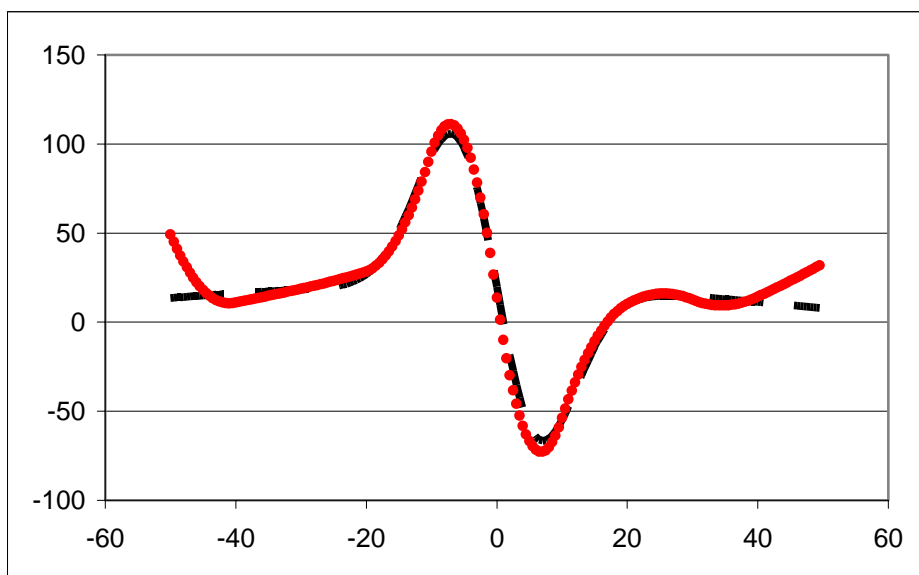
7.9a. ábra. A 7.8b. ábrán látható simított polinomok deriváltja ( $m = 3$ )

A módszer alkalmazását az előző szakaszban vizsgált példával illusztráljuk. Nyilvánvaló, hogy realiztikus deriváltat csak olyan polinomokból kiindulva kaphatunk, amelyek már kielégítő simításra vezettek. Ennél azonban több kell: másodfokú polinomok deriváltja elsőfokú, vagyis az ilyen simítás révén a deriváltat egyenes szakaszokkal közelítjük. Hogy ez mennyire nem kielégítő, azt a 7.8b. ábrán látható, mérési hibáktól mentes esetre illesztett másodfokú polinomok deriváltja mutatja a legjobban (7.9a. ábra). Az ábra szerint a kapott derivált nyilvánvalóan messze van a kívánatos-tól. Eből következik, hogy deriválni csak legalább harmadfokú polinommal célszerű. Ilyen simítás látható a 7.8d. ábrán, amelynek a deriváltját a 7.9b. ábrán mutatjuk. Ez

még rosszabb. A probléma gyökere nyilvánvalóan ott van, hogy ennél a simításnál csak a polinomok folytonos illeszkedését írtuk elő. A deriváltaknak ezért van jelentős szakadásuk mindegyik illeszkedési ponton. Az ábráról tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy mind az első, mind a második deriváltak folytonos illeszkedését elő kell írunk. Ilyen simítás látható a 7.8f. ábrán. Az ennek megfelelő deriváltat a 7.9c. ábra mutatja. A derivált ezen az ábrán már kellően sima. A jobb tájékozódás kedvéért szaggatott vonallal berajzoltuk az egzakt deriváltat. Látható, hogy a kapott görbe meglehetősen közel van ehhez. Említésre méltó eltérés csak a görbe eljén és végén van, aminek az az oka, hogy itt – értelemszerűen – nem írhattunk elő mellékfeltételt.



7.9b. ábra. A 7.8d. ábrán látható simított polinomok deriváltja ( $m = 4$ )



7.9c. ábra. A 7.8f. ábrán látható simított polinomok deriváltja ( $m = 4$ )

Összefoglalásul a következőt állapíthatjuk meg:

- Simításra és deriválásra a lehető legalacsonyabb fokszámú polinomokat célszerű használni. A magasabb fokú polinomok csak a fluktuációkat emelik ki.



- Jó eredményt csak olyan mellékfeltételek figyelembevételével remélhetünk, amelyek biztosítják a polinomok és legalább első deriváltjuk folytonos illeszkedését.
- Ha a deriváltat is becsülni akarjuk, akkor a második deriváltak folytonosságát is elő kell írni.

### A polinomokkal való kiegyenlítés képletei

A fentiekben a kiegyenlítés módszerét alkalmaztuk a simítás és differenciálás javítására. Az alábbiakban ennek a képleteit ismertetjük.

A mellékfeltételeket a következő  $C$  mátrix segítségével írhatjuk fel általános alakban:

$$\sum_{k'=1}^M C_{jk'} a_{k'} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (7.58a)$$

vagy vektoros alakban

$$Ca = 0, \quad (7.58b)$$

ahol  $a$  az  $a_k$  paraméterekből alkotott vektor ( $k = 1, 2, \dots, M$ ). Itt  $M$  az illesztett paraméterek teljes száma. Mivel minden polinomdarab paramétereinek a számát az előbbiekben  $m$ -mel jelöltük,  $M = (J + 1)m$ .  $m$  értéke 3 vagy 4 volt, a polinomdarabok száma pedig  $J + 1 = 10$ , így  $M$  értéke a fenti példákban 30, illetve 40. Példaképpen megadjuk a  $C$  mátrix első öt sorának első 15 oszlopát a (7.50) feltételek szerint:

1	$z_1$	$z_1^2$	-1	$-z_1$	$-z_1^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	$z_2$	$z_2^2$	-1	$-z_2$	$-z_2^2$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	$z_3$	$z_3^2$	-1	$-z_3$	$-z_3^2$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$z_4$	$z_4^2$	-1	$-z_4$	$-z_4^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$z_5$	$z_5^2$

A teljes mátrixnak kilenc sora és 30 oszlopa van. Ha hozzávesszük a (7.52) feltételeket is, akkor a mátrix további kilenc sorral bővül. Az ennek megfelelő első 5 sor első 15 oszlopa a következő:

0	1	$2z_1$	0	-1	$-2z_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	$2z_2$	0	-1	$-2z_2$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	$2z_3$	0	-1	$-2z_3$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$2z_4$	0	-1	$-2z_4$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$2z_5$

Ennek mintájára a (7.50) – (7.54) feltételek mindegyikéhez meg tudjuk szerkeszteni a  $C$  mátrixot.

Polinomillesztéskor a (7.23) képlettel definiált  $Q$  négyzetösszeg minimumát kell keresnünk, vagyis a paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy  $Q$  deriváltjai eltűnjenek. Mivel most darabonként illesztjük a polinomokat, a négyzetösszeget más alakban kell felírni. Legyen a  $j$ -edik darab első és utolsó indexe rendre  $i_{j1}$  és  $i_{j2}$ , a megfelelő polinom paramétereit pedig jelöljük  $a_k$ -val ( $k = (j-1)m+1, (j-1)m+2, \dots, jm$ ). Ezekkel a jelölésekkel

$$Q = \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{i=i_{j1}}^{i_{j2}} w_i \left( \xi_i - \sum_{k'=1}^m a_{(j-1)m+k'} x_i^{k'-1} \right)^2.$$

A (7.58) mellékfeltételeket úgy vesszük figyelembe, hogy nem ennek, hanem a

$$Q' = \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{i=i_{j1}}^{i_{j2}} w_i \left( \xi_i - \sum_{k'=1}^m a_{(j-1)m+k'} x_i^{k'-1} \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^J \lambda_j \sum_{k'=1}^M C_{jk'} a_{k'}$$

funkcionálnak a deriváltjait tesszük zérussal egyenlővé:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q'}{\partial a_k} = \sum_{i=i_{j1}}^{i_{j2}} w_i x_i^{k-(j-1)m-1} \left( \xi_i - \sum_{k'=1}^m a_{(j-1)m+k'} x_i^{k'-1} \right) + \sum_{j=1}^J \lambda_j C_{jk} =$$

ahol  $j$  az az index, amelyre a  $(j-1)m < k \leq jm$  egyenlőtlenségek teljesülnek. A (7.24) képletek mintájára bevezetjük az  $R_{kk'}$  és  $g_k$  jelöléseket:

$$g_k = \sum_{i=i_{j1}}^{i_{j2}} w_i \xi_i x_i^{k-(j-1)m-1}, \quad (j-1)m < k \leq jm, \quad (7.59a)$$

$$R_{kk'} = \begin{cases} \sum_{i=i_{j1}}^{i_{j2}} w_i x_i^{k+k'-2(j-1)m-2} & \text{ha } (j-1)m < k, k' \leq jm, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (7.59b)$$

( $k, k' = 1, 2, \dots, M$ ). Ezekkel előbbi egyenletünk így írható:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q'}{\partial a_k} = g_k - \sum_{k'=1}^M R_{kk'} a_{k'} + \sum_{j=1}^J \lambda_j C_{jk} = 0, \quad (7.60a)$$

Ez  $M$  egyenlet ( $M+J$ ) ismeretlenre. A hiányzó  $J$  egyenletet a (7.58a) mellékfeltételek szolgáltatják. A (7.60a) egyenletrendszer egyszerűen átírható vektoros alakba:

$$\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{C}^T \vec{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (7.60b)$$

ahol  $\vec{\lambda}$  a  $\lambda_j$  Langrange-multiplikátorokból alkotott  $J$ -elemű vektor. A (7.60b) egyenletből kifejezhetjük a paramétereket:

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{g} + \mathbf{C}^T \vec{\lambda}), \quad (7.61a)$$

amit (7.58b)-be helyettesítve kapjuk a multiplikátorokra vonatkozó egyenletrendszer:

$$\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{g} + \mathbf{C}^T \vec{\lambda}) = \mathbf{0}.$$

Ebből

$$\vec{\lambda} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}, \quad (7.61b)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T. \quad (7.61c)$$

Először tehát  $\bar{\lambda}$ -t számítjuk ki (7.61b)-ből, majd ezt (7.61a)-ba helyettesítve kapjuk a paraméterek becsült értékét. Érdeemes megjegyezni, hogy az  $\mathbf{N}$  mátrix szerkezete kedvező, invertálása különösebb numerikus problémákat nem vet fel. Hasonlót mondhatunk az  $\mathbf{R}$  mátrixról is. A (7.59b) definíció szerint ugyanis  $m \times m$ -es blokkokra bontható, amelyek közül csak a főátlóban levő blokkok különböznek zérustól. Ezek pedig az  $(m-1)$  fokszámú polinomillesztéshez a (7.24a) képlet szerint tartozó mátrixok, amelyek a polinom alacsony fokszáma miatt könnyen invertálhatók. Erre való tekintettel nem szükséges olyan eszközöket alkalmazni, mint például az ortogonális polinomok módszere.

A 6.5. alfejezetben írtak szerint a (7.61a) képletből kapott paraméterek kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B}_a = \sigma^2 (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{R}^{-1})$$

[vö. (6.32)].  $\sigma^2$ -et a szokásos módon becsülhetjük:

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{Q_{\min}}{n - M + J},$$

ahol figyelembe vettük, hogy a szabadon illesztett paraméterek száma most  $(M - J)$ . Ezt a kovarianciamátrixot kell a (7.49) és (7.57) képletekbe helyettesíteni.

## 7.5. Korrekciók

Az 5.3. alfejezetben tárgyaljuk a közvetlen mérésekhez alkalmazandó korrekciók figyelembevételének a módját. Ugyanezt áttekintjük függvényillesztés esetében is.

### Az általános formalizmus

Leggyakrabban két fajta korrekcióval találkozunk: *additív* korrekciókkal és korrekciós *tényezőkkel*. Ez azt jelenti, hogy a közvetlenül mért mennyiségek várható értékét nem maga a korrekciók nélküli esetben használandó  $f(x, \mathbf{a})$  illesztőfüggvény adja meg, hanem

$$M(\xi_i) = \mu_i f(x_i, \mathbf{a}) + \alpha_i. \quad (7.62)$$

Általában a  $\mu_i$  tényező és az  $\alpha_i$  korrekció mért adat, tehát maga is valószínűségi változó. Példák korrekcióra: a laboratórium háttérsugárzása, a hőmérséklet hatása stb. Példák korrekciós tényezőre: radioaktív bomlás, műszerek kalibrációs tényezője stb. Úgy képzeljük el, hogy  $\mu_i$  az összes korrekciós tényezők szorzata,  $\alpha_i$  pedig az összes korrekciók összege.

A maximális valószínűség elve alapján a

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \mu_i f(x_i, \mathbf{a}) - \alpha_i)^2 \quad (7.63)$$

négyzetösszeg minimumát kell keresnünk az  $\mathbf{a}$  paramétervektor függvényében. Ha a korrekciók is valószínűségi változók, akkor a (6.46c) képlet alapján a súlyokat a

$$\frac{\sigma^2}{w_i} = \sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{\mu_i}^2 [f(x_i, \mathbf{a})]^2 + \sigma_{\alpha_i}^2 \quad (7.64)$$

képlettel kell kiszámítanunk. Vegyük észre, hogy ez éppen a (7.63) alatti összegben a  $(\dots)^2$  tag zárójelében levő különbség szórásnégyzete. Ezzel a 6. fejezetben kimondott tételek érvényben maradnak. Ennek alapján méréseink kiértékelése a korábbiak alapján minden további alapján végrehajtható, ha az illesztőfüggvényt (7.62), a súlyokat pedig (7.64) szerint választjuk meg.

Az eddigi mondottak akkor érvényesek, amikor az  $i$  index különböző értékeihez tartozó korrekciók egymástól statisztikailag függetlenek, illetve amikor szórásuk elhanyagolható. Korrelált korrekciók esetében az eljárás lényegesen bonyolultabb. A kérdésre a jelen alfejezet végén térünk vissza.

### Független korrekciók kezelése linearizálás esetén

Labormérések esetében – elsősorban az idő rövidege miatt – az  $f(x, \mathbf{a})$  illesztőfüggvény linearizálására kényszerülünk. Ez azonban nem lehetséges, ha fenntartjuk a minimalizálandó  $Q$  funkcionál (7.63) szerinti alakját. Ezért egy közelítő eljárást alkalmazunk: a korrekciókat nem az illesztőfüggvényhez, hanem a mért mennyiségekhez kapcsoljuk. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak közelítő szükségmegoldás.

Arról van szó, hogy az illesztést a

$$\xi_i^c = \frac{\xi_i - \alpha_i}{\mu_i} \quad (7.65a)$$

korrigált mérésekre vonatkoztatjuk:

$$Q^c = \sum_{i=1}^n w_i^c \left( \xi_i^c - f(x_i, \mathbf{a}) \right)^2. \quad (7.65b)$$

A súlyokat ebben az esetben a (7.42) hibaterjedési képlet alapján kell kiszámítanunk:

$$\frac{\sigma^2}{w_i^c} = \frac{\sigma_{\xi_i}^2 + \sigma_{\alpha_i}^2}{\mu_i^2} + \frac{\sigma_{\mu_i}^2}{\mu_i^2} \left[ \frac{\xi_i - \alpha_i}{\mu_i} \right]^2. \quad (7.65c)$$

Ezekkel a képletekkel a korrigált mennyiségekre vonatkozóan már alkalmazható a linearizált illesztés módszere. Mindennek természetesen feltétele, hogy az  $f(x, \mathbf{a})$  illesztőfüggvény linearizálható legyen. Mivel ez csak az illesztőfüggvényeknek egy speciális osztályára alkalmazható módszer, célszerű az általános eljárást beprogramozni, ha illesztő programot írunk.

Jól látható, hogy az adatoknak a (7.65) képletek szerinti korrekciója meglehetősen sok előkészítő számítást igényel – különösen akkor, amikor a korrekciók nem egyszerűek, hanem több tényező vagy tag szorzatai, illetve összegei. Semmiképpen nem ajánlhatjuk, hogy ezt bárki kézzel végezze el, mert méréseinek kiértékelése hibakereséssé degradálódik: a fizikai jelenségek megértése helyett az időt annak ellenőrzésével fogja tölteni, melyik  $i$ -re rontotta el a korrekció számítását és alkalmazását.

### \*Korrelált korrekciók

Ha akár a korrekció, akár a korrekciós tényezők különböző  $i$ -hez tartozó értékei korreláltak, a korrekt adatkezelés nagyon elbonyolódik. Nem való ebbe a jegyzetbe a kérdés átfogó tárgyalása. A szokástól eltérően most nem tudunk olyan irodalmi hivatkozást megadni, ahol ez megtalálható. A dolog oka abban rejlik, hogy egyrészt különös *elvi* problémát nem jelent, így a matematikusok nem érzik szükségét tárgyalni, másrészt súlyosan elbonyolítja az adatkezelés *formalizmusát*, így a fizikusok – akik-

nek pedig dolguk lenne mindezt korrektül kidolgozni – jobbnak látják a közelítő megoldásokat. A [3] riportok ugyan hozzálátnak a probléma tárgyalásához, de megállnak annál a közelítésnél, amely akkor érvényes, amikor a korrekciók mérési pontossága sokkal jobb, mint a  $\xi_i$  valószínűségi változóké. Az általánosan alkalmazható eljárást egy közönséges példával illusztráljuk: gyakran előfordul, hogy az  $\alpha_i$  korrekciókra egyetlen mérési adatunk van, vagyis minden  $i$ -re ugyanazt a számot kell levonnunk (7.65a)-ban vagy (7.63)-ban.

Feltesszük tehát, hogy

$$\alpha_i \equiv \alpha \quad \text{és} \quad M(\alpha) = a_0. \quad (7.66)$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy  $\mu_i \equiv 1$ , vagyis nincs korrekciós tényező. Ennek a mérésnek a valószínűségi függvényét egyszerűen felírhatjuk az 5.3. alfejezetben követett gondolatmenet általánosításaként:

$$L(\mathbf{x}; \mathbf{a}, a_0) = \frac{\sqrt{w_0 \prod_{i=1}^n w_i}}{(2\pi\sigma^2)^{(n+1)/2}} \exp\left(-\frac{Q}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left[-\frac{w_0(\alpha - a_0)^2}{2\sigma^2}\right],$$

ahol

$$Q = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}) - a_0)^2$$

és

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\sigma^2}{w_0}.$$

A maximális valószínűségek elve alapján  $\ln L$  deriváltjait kell zérussal egyenlővé tenni egyrészt az  $\mathbf{a}$  paramétervektor  $m$  komponense szerint, másrészt  $a_0$  szerint. Az előbbieket

$$G_k(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q(\mathbf{a})}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}) - a_0] \frac{\partial f(x_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} = 0 \quad (7.67a)$$

normálegyenletekre vezetnek ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Az utóbbi pedig egy további,  $(m + 1)$ -edik egyenletre vezet:

$$G_0(\mathbf{a}) = \frac{\partial \ln L}{\partial a_0} = w_0(\alpha - a_0) + \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \mathbf{a}) - a_0] = 0. \quad (7.67b)$$

Így tehát nem  $m$ , hanem  $(m + 1)$  paramétert kell becsülnünk.

Az additív korrekcióhoz tartozó,  $(m + 1)$ -edik paramétert természetesen ki lehet küszöbölni a (7.67) egyenletekből, és így azokat – formálisan legalábbis – vissza lehet vezetni  $m$  számú egyenletből álló egyenletrendszerre. (7.67b)-ből ugyanis kifejezhetjük az  $a_0$  paramétert:

$$\tilde{a}_0 = \frac{w_0 \alpha + \sum_{i=1}^n w_i [\xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})]}{w_0 + \sum_{i=1}^n w_i}, \quad (7.67c)$$

amit (7.67a)-ba helyettesítve egy  $m$ -ismeretlenes egyenletrendszer kapunk az eredeti  $\mathbf{a}$  paramétervektorra. Tekintve, hogy  $a_0$  becült értéke függ ennek az utóbbi egyenletrendszernek a megoldásától, itt valójában egy iterációs eljárást definiáltunk.

Ezzel megtaláltuk annak a módját, hogy egy fajta korrelált korrekciót a legegyszerűbben figyelembe vegyünk. Az alábbiakban megnézzük, hogyan hat ez az eredetileg keresett paraméterek kovarianciájára. Áttérünk a 6.3. alfejezetben használt mátrixos formalizmusra, mert ez általánosítható bonyolultabban korrelált korrekciók kezelésére is. A (6.9a) képlettel definiált  $\mathbf{F}$  mátrix most kibővül az  $a_0$  paraméternek megfelelő oszloppal, illetve az  $\alpha$  mért adatnak megfelelő sorral. Mivel az  $i = 1, 2, \dots, n$  mérési adatokra (7.62) alapján úgy képzelhetjük, hogy az illesztőfüggvény

$$M(\xi_i) = f(x_i, \mathbf{a}) + a_0,$$

az  $\mathbf{F}$  mátrix  $(m+1)$ -edik oszlopa az  $a_0$  paraméter szerinti deriváltakat, vagyis csupa 1-eseket tartalmaz. Az  $(n+1)$ -edik mérési adat  $\alpha$ , amelyre az illesztőfüggvény  $a_0$ , tehát  $\mathbf{F}$ -nek ez a sora csupa 0-kat tartalmaz az első  $m$  oszlopban, viszont az  $(m+1)$ -edik elem itt ismét 1. Legyen  $\mathbf{e}$  egy olyan  $n$ -elemű vektor, amelynek minden eleme 1. Ezzel az  $\mathbf{F}$  mátrix így írható:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.68a)$$

ahol  $\mathbf{F}_a$  az eredeti, az additív korrekció nélküli illesztéshez tartozó  $\mathbf{F}$  mátrix. Hasonló megfontolásokkal kapjuk a  $\mathbf{W}$  mátrixot is:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & w_0 \end{bmatrix}. \quad (7.68b)$$

(6.9) szerint az  $\mathbf{R}$  mátrixot az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{F}_a & \mathbf{F}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{W}_a \mathbf{F}_a & \mathbf{e}^T \mathbf{W}_a \mathbf{e} + w_0 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

alakban kapjuk. Látható, hogy a bal felső blokk éppen  $\mathbf{R}_a$ , vagyis az eredeti, az additív korrekció nélküli illesztéshez tartozó  $\mathbf{R}$  mátrix. (6.13) szerint az illesztett  $(m+1)$  paraméter kovarianciamátrixát a (7.69) szerinti, teljes  $\mathbf{R}$  mátrix inverze adja, viszont az eredetileg keresett  $\mathbf{a}$  paramétervektor kovarianciamátrixa az  $\mathbf{R}^{-1}$  inverz bal felső blokkja alapján számítható. A 2.8. TÉTEL alapján ezt közvetlenül felírhatjuk. Esetünkben könnyebbés, hogy a tételben szereplő  $\mathbf{B}$  blokk most egy skalár, tehát inverze egyszerűen a (7.69) mátrix jobb alsó elemének a reciproka. Így tehát az  $\tilde{\mathbf{a}}$  becslés kovarianciamátrixa

$$M(\Delta \mathbf{a} \Delta \mathbf{a}^T) = \sigma^2 \left( \mathbf{F}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{F}_a - \frac{\mathbf{F}_a^T \mathbf{W}_a \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{W}_a \mathbf{F}_a}{\mathbf{e}^T \mathbf{W}_a \mathbf{e} + w_0} \right)^{-1}. \quad (7.70)$$

Ennek a képletnek az elemzését az Olvasóra bizzuk. Mindössze annyit jegyzünk meg, hogy az elhanyagolható hibával mért korrekciónak a  $w_0 \rightarrow \infty$  határeset felel meg.

Ez a korrelált korrekciók legegyszerűbb esete. Bonyolultabb esetekben ugyanezzel a módszerrel mindig levezethetjük az adekvát képleteket. Ezek gyakran olyan bonyolultak, hogy nagyon nehezen programozhatók. Amikor a korrekciók lényegesen pontatlanabbak, mint a  $\xi_i$  mérések, nincs más lehetőség. Szerencsére általában nem ez az eset fordul elő, így elég a korrekciók hatását (7.64) szerint a súlyokban figyelembe venni, ami első közelítésnek tekinthető, ugyanis elhanyagolja a korrekciók közötti korrelációt.

## 7.6. Normálás

### Általános formalizmus

Az 1.3. alfejezetben említett *normálás* jó példa a 7.5. alfejezetben tárgyalt korrekciók alkalmazására. Tekintve, hogy ez semmilyen transzformációval sem vezethető vissza kétparaméteres lineáris regresszióra, jó példa arra is, hogyan lehet ilyen méréseket kezelni. A megfelelő illesztőfüggvényt (1.11)-ben írtuk fel. Az illesztés érdekében célszerű egy kicsit átalakítani. A mérés különböző ismétléseiben előforduló  $x_i$  koordináták értékeit egy közös halmazban összesítjük. Ebben ugyanazok az  $x_i$  értékek többször is előfordulhatnak. Nos, a különböző értékeket valahogy számozzuk meg:  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Bármelyik  $\xi_i$  mért értéket tekintjük, mindig található egy olyan  $I_i$  index, amelyre

$$x_i = X_{I_i}.$$

Az eloszlásnak az  $X_{I_i}$  koordinátához tartozó értékét jelöljük  $\psi_{I_i}$ -vel. Ezzel az (1.11) illesztőfüggvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$f(x_i, j; \mathbf{a}, \vec{\psi}) = a_j \psi_{I_i}. \quad (7.71)$$

A fenti jelölésekkel a legkisebb négyzetek módszere a

$$Q = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} w_{ji} (\xi_{ji} - \mu_{ji} a_j \psi_{I_i} - \alpha_{ji})^2 \quad (7.72)$$

négyzetösszeg minimumának a keresését jelenti, ha figyelembe vesszük a (7.62) szerinti korrekciókat is.  $n_j$  a  $j$ -edik ismétlésben mért értékek száma. Feltesszük, hogy a korrekciók függetlenek, vagyis mérési hibájuk (7.64) szerint figyelembe van véve a súlyokban. Deriváljuk  $Q$ -t mindkét fajta paraméter szerint:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_j} &= \sum_{i=1}^{n_j} w_{ji} \mu_{ji} \psi_{I_i} (\xi_{ji} - \mu_{ji} a_j \psi_{I_i} - \alpha_{ji}) = 0, \quad j=1, 2, \dots, J, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \psi_I} &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=I} w_{ji} \mu_{ji} a_j (\xi_{ji} - \mu_{ji} a_j \psi_I - \alpha_{ji}) = 0, \quad I=1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek azonnal felírhatjuk a megoldását:

$$\tilde{a}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} w_{ji} \mu_{ji} \tilde{\psi}_{I_i} (\xi_{ji} - \alpha_{ji})}{\sum_{i=1}^{n_j} w_{ji} \mu_{ji}^2 \tilde{\psi}_{I_i}^2}, \quad (7.73a)$$

$$\tilde{\psi}_I = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{I_i=I} w_{ji} \mu_{ji} \tilde{a}_j (\xi_{ji} - \alpha_{ji})}{\sum_{j=1}^J \sum_{I_i=I} w_{ji} \mu_{ji}^2 \tilde{a}_j^2} = 0. \quad (7.73b)$$

A (7.73) képletek jól használhatók iterációra. Kezdetben felvehetjük például a  $\psi_I \equiv 1$  eloszlást, amivel (7.73a) szerint becsülhetjük az  $a_j$  normálási tényezőket, majd (7.73b) segítségével javíthatjuk a  $\psi_I$  eloszlást, és így tovább, amíg az eljárás nem konvergál. Az 1.3. alfejezetben adott megoldást ezzel a módszerrel kaptuk – természetesen  $\mu_{ji} \equiv 1$  és  $\alpha_{ji} \equiv 0$  mellett.

A (7.73) iterációs képletek lassan konvergáló iterációra vezetnek. Különösen lassú az iteráció, amikor a  $j=1, 2, \dots, J$  ismétlésekhez tartozó  $x_i$  pozíciók között kevés átfedés van. Szerencsétlen esetben 300–400 iterációs lépésre is szükség lehet. A probléma abban rejlik, hogy ez nem Newton-iteráció. Definiálhatunk a (7.71) illesztőfüggvényre is Newton-iterációt, de ennek részleteibe nem megyünk bele.

A normálásnak az eredeti rendeltetésen kívül további alkalmazásai is vannak. Közülük kettőt említünk meg:

- Amikor az  $a_j$  normálási paraméterek mindegyikét rögzítjük, az illesztésben nem történik más, mint az azonos  $x_i$  pozíciókhoz tartozó mért értékek átlagolása.
- Amikor vannak korrekciók, és az  $a_j$  normálási paraméterek mindegyikét rögzítjük, az azonos pozíciókhoz tartozó mérési adatok *korrigált* értékét átlagoljuk.

Mindkét alkalmazásban a (6.22) képlettel becsült  $s^2$  empirikus szórásnégyzet megfelel annak, amit az 5.1. alfejezetben a “Csoportosított mérések” című részben ajánlunk: a szabadsági fokok száma nagy, és ezért az átlagolt értékek szórására nagyon megbízható becsléseket kapunk. Ez különösen előnyös az adatok statisztikai analízise szempontjából (vö. például 8. fejezet).

### \*Határozatlan illesztőfüggvények

A (7.71) illesztőfüggvény az ún. *határozatlan* illesztőfüggvények típusába tartozik, amelyekkel a 6.3. alfejezet végén is foglalkozunk. Tekintve, hogy gyakran fordulnak elő hasonló illesztési problémák, érdemes a kérdést közelebbről is megvizsgálnunk.

Az illesztőfüggvény alakjából következik, hogy ha az illesztendő paramétereknek egy  $a_1, a_2, \dots, a_J$  és  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$  együttese megoldása az illesztési problémának, akkor ezekkel – tetszőleges valós  $\lambda$  mellett – minden tekintetben egyenértékűek a  $\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_J$ , illetve  $\psi_1/\lambda, \psi_2/\lambda, \dots, \psi_N/\lambda$  paraméterek. Ezt értjük az illesztőfüggvény határozatlanságán. A (7.73) képletekkel definiált iteráció ettől függetlenül konvergál, de határértéke függ a kezdőértékektől. Ez természetesen nem baj, hiszen az illesztőfüggvény határozatlan.

Problémát okoz azonban a végeredményül kapott paraméterek kovarianciamátrixának a becslése. Az illesztett paraméterek száma  $m = J + N$ , viszont az illesztés



minden lényeges tulajdonságát meghatározó, a 6.3. alfejezetben definiált  $\mathbf{F}$  mátrix rangja csak  $(m - 1)$ . Emiatt a (6.9) egyenlettel definiált  $\mathbf{R}$  mátrix szinguláris, tehát a 6. fejezet egyetlen tétele sem alkalmazható. Két kérdést kell tehát tisztáznunk: mi okozza  $\mathbf{F}$  rangjának a csökkenését? mit lehet tenni a probléma orvoslására?

Az  $\mathbf{F}$  mátrixnak két fajta oszlopa van, aszerint, hogy milyen fajta illesztett paraméter szerinti deriváltakat tartalmaznak. Az  $a_j$  normálási paraméterek szerinti deriváltak

$$F_{ij} = \mu_{ji} \psi_{li}, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

illetve a  $\psi_I$  szerintiek

$$F_{iI} = \mu_{ji,I} a_{ji}, \quad I = 1, 2, \dots, N.$$

Bármely  $i$ -re érvényes a következő egyenlőség:

$$\sum_{j=1}^J a_j F_{ij} = \sum_{I=1}^N \psi_I F_{iI},$$

vagyis az  $\mathbf{F}$  mátrix oszlopai nem lineárisan függetlenek, köztük (legalább) egy lineáris kapcsolat van. A felírt összefüggés belátásához elég abból kiindulni, hogy bármely  $i$ -re csak egyetlen el nem tűnő  $F_{ij}$  és  $F_{iI}$  van, amelyekre (7.71) szerint fennáll a felírt egyenlőség. Így tehát  $\text{rang}(\mathbf{F}) \leq m - 1$ , amiből következik, hogy  $\text{rang}(\mathbf{R}) \leq m - 1$ .

A [3] riportokban megtalálható annak a bizonyítása, hogy ez a fajta szingularitás megszüntethető, ha az illesztett paraméterek közül az egyiket rögzítjük.<sup>73</sup> Legegyszerűbb, ha ez az  $a_1$  normálási paraméter. Értékét úgy szoktuk megválasztani, hogy a  $\psi_I$  eloszlás normálása megfeleljen a céljainknak, például összehasonlítható legyen egy számított eloszlással. A [3] riportokból kiderül, hogy elsősorban az egyik paraméter rögzítése okozza a konvergencia lassulását.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az ilyen fajta illesztésből kapott eloszlás komponensei között általában kicsi a korrelációs együttható. Ez azért jelentős, mert az így kapott  $\psi_I$  értékek jó közelítéssel úgy használhatók további illesztések bemenő adataiként, hogy statisztikailag függetlennek tekintjük őket.

### 7.7. Szemelvények a laboratóriumi gyakorlatokból

A [9] jegyzetsorozat a legtöbb laboratóriumi mérés kiértékelését lineáris regresszióra vezeti vissza. Ennek a törekvésnek az a logikája, hogy olyan kiértékelést javasol a hallgatóknak, ami egy labormérés szűkre szabott időkeretében végrehajtható. Ez pedig a fizikai megfontolásokból levezethető illesztőfüggvény linearizálása. Van persze olyan mérés is, amelyben az illesztőfüggvény eleve lineáris. Ilyen például a rugalmassági együttható mérése (1.1. alfejezet). Néhány példa linearizálásra:

- Állóhullámok vizsgálatában a rezgő húrt megfeszítő  $T$  erő és a hosszegységre jutó  $\mu$  tömeg a

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.74a)$$

<sup>73</sup> A bizonyításban feltételként van kikötve, hogy a  $j = 1, 2, \dots, J$  ismétlésekhez tartozó  $x_i$  értékek halmazai nem csoportosíthatók olyan részhalmazokba, amelyekben az  $X_I$  pozíciók különböző értékei fordulnak elő.

képlet szerinti kapcsolatban van a hullámnak a húrban való  $c$  terjedési sebességével. Ekkor mind a  $c(T)$ , mind  $c(\mu)$  függvénykapcsolat négyzetre emeléssel tehető lineárisá.

- Torziós asztalhoz rögzített tárcsa rezgésének periódusidejét a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D^*}} \quad (7.74b)$$

képlet adja meg. Mivel a  $\theta$  tehetetlenségi nyomaték a tárcsa középpontjának az asztal tengelyétől való  $r$  távolságától egy  $\theta = \theta_0 + Cr^2$  alakú függvény szerint függ, a  $T^2 = f(r^2)$  összefüggés lineáris.

- A dózisintenzitásnak a sugárforrás és a detektor közötti  $r$  távolságtól való függése  $\dot{D} = \text{konst}/(r - r_0)^2$  alakú függvény. Így az  $1/\sqrt{\dot{D}}$  mennyiség  $r$ -nek lineáris függvénye.

A linearizálás elméletét a 6.6. alfejezetben tárgyaljuk. Bár ezt csillaggal láttuk el, az elsőéves hallgatók is megérthetik a lényegét, ami abban összegezhető, hogy a linearizált illesztésben a  $p_i$  súlyokat a (6.42) képlettel kell az eredeti illesztéshez tartozó  $w_i$  súlyokból kiszámítani. Ez azt jelenti, hogy a linearizált illesztés akkor is súlyozott illesztéssé válhat, amikor az eredeti illesztés súlyozatlan lett volna ( $w_i \equiv 1$ ). Ha a független változó (a fenti példákban:  $\mu$ ,  $r$  stb.) mért értékeinek a szórása nem hanyagolható el, akkor a súlyokban ezt is figyelembe kell venni [vö. (6.46c) képlet]. Annak érdekében, hogy a linearizált illesztést az eredetitől megkülönböztessük, megtartjuk a súlyok  $p_i$  jelölését, vagyis a

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i (h(\xi_i) - b_1 - b_2 x_i)^2 \quad (7.75)$$

négyzetösszeg minimumát keressük a  $b_1$  és  $b_2$  paraméterek függvényében. A  $h(y)$  az a transzformációs függvény, amely az eredeti illesztőfüggvényt lineárisra transzformálja:

$$h[f(x_i, \mathbf{a})] = b_1 + b_2 x_i. \quad (7.76)$$

Az is előfordul, hogy az eredeti  $x_i$  független változót is transzformálni kell, de ennek részleteibe nem megyünk bele.

### Függvény alakjában megfogalmazott fizikai törvény kísérleti igazolása

Egy lineárisra transzformált fizikai törvény kísérleti igazolása minden esetben a kapott eredmények grafikus ábrázolásával kezdődik. Ha a kapott grafikonon látható pontok szemre egy egyenes körül szórnak, érdemes a méréssel komolyabban is foglalkozni, vagyis a törvény igazolását matematikai statisztikai kritériumok formájában is megfogalmazni.

A (7.75) illesztésben szereplő súlyok minden esetben a transzformált mért értékek szórásnégyzetével vannak kapcsolatban:

$$D^2[h(\xi_i)] = \frac{\sigma^2}{p_i}. \quad (7.77)$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk: (1)  $\sigma^2$  ismert és (2)  $\sigma^2$  nem ismert, vagyis becsülni kell [vö. (6.22)]:

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{Q_{\min}}{n-2}. \quad (7.78)$$

Az előbbi esetben a fizikai törvény igazolása egyszerű, ugyanis a 6.2. TÉTELből tudjuk, hogy

$$Q_{\min} = \sigma^2 \chi_{n-2}^2. \quad (7.79)$$

Ennek alapján a fizikai törvény igazolása egy  $\chi^2$ -próba segítségével lehetséges. Választunk egy  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséget, és a 2. függelék táblázatából kikeressük a

$$P\{\chi_{n-2}^2 < \gamma\} = 1 - \varepsilon$$

egyenletet kielégítő  $\gamma$  kvantilist, majd a fizikai törvényt akkor tekintjük igazoltnak, amikor

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n}.$$

A másik esetben ilyen statisztikai próbát nem végezhetünk, mert  $Q_{\min}$  értékét (7.78)-ban felhasználjuk  $\sigma^2$  becslésére. A fizikai törvény igazolása érdekében tehát egy újabb próbát kell keresnünk. Ez pedig nem lehet más, mint a 8.4. alfejezetben tárgyalt illeszkedési próbák egyike. A dolog lényege a következő. Kiszámítjuk az

$$(\xi_i - \bar{\xi}) \quad (7.80)$$

különbségeket, ahol a  $\sim$  jellel a paraméterek illesztett (becsült) értékét jelöljük. Ha méréseink igazolják a fizikai törvényt, akkor a (7.80) szerinti különbségek zérus várható értékű Gauss-eloszlást követnek. Nos az említett illeszkedési próbák ennek a vizsgálatára szolgálnak. A felmerülő matematikai problémák miatt ennek részleteibe a jelen alfejezetben nem mehetünk bele.

### Egyenlőség alakjában adott fizikai törvény kísérleti igazolása

Vegyük példaképpen a Kirchoff-törvények csomópointi törvényét, amely szerint egy csomópointba befolyó és onnan kifolyó áramok összege egymással egyenlő. Két mért mennyiség egyenlőségének a vizsgálatát az 5.2. alfejezet megfelelő szakaszában elemezzük. Az ott megfogalmazott módszerek általánosan alkalmazhatók. Célszerű azonban figyelembe venni a következő megjegyzést.

A mért értékek szórása mérésről mérésre változhat, de gyakran az a jellemző, hogy a relatív hiba többé-kevésbé állandó. Ha ez így van, akkor vigyázni kell arra, nehogy nagy abszolút értékű mért értékek egyenlőségét kelljen vizsgálnunk. Ilyenkor ugyanis ezek kis abszolút értékű különbségének az abszolút mérési hibája kellemetlenül nagy lehet, vagyis az alkalmazott matematikai statisztikai próba csak egészen szélsőséges esetekben vezethet negatív következtetésre. A kísérleti fizikában emiatt dolgozták ki a *differenciális méréseket*, amelyek a különbséget közvetlenül szolgáltatják, a statisztikai döntés által megkövetelt kellően kis mérési hibával.

## 8. KISZÓRÓ PONTOK

### 8.1. A probléma felvetése

Az 1. fejezetben röviden, a 7.1. alfejezetben pedig részletesebben is beszéltünk a *kiszóró pontokról*. A jelen fejezetben megtárgyaljuk azonosításuk módszereit, továbbá az akkor követendő eljárást, amikor mérési adataink között kiszóró pontokat találtunk. Mindenekelőtt megadjuk definíciójukat:

8.1. DEFINÍCIÓ. Egy  $\xi_i$  mért értéket kiszóró pontnak nevezünk, ha várható értéke – valamilyen ismeretlen okból – nem egyezik meg az illesztőfüggvénnyel:

$$M(\xi_i) \neq f(x_i, \mathbf{a}). \quad (8.1)$$

Itt fontos kitétel az *ismeretlen okra* való utalás, ugyanis a (8.1) reláció *ismert* okból való fennállását külön, a 9. fejezetben vizsgáljuk. Az ismert ok többnyire abban kerekesendő, hogy az illesztőfüggvényt szeretnénk egyszerűsíteni, és ennek érdekében vállaljuk, hogy (8.1) az  $x_i$  változó bizonyos tartományaiban fennálljon. Ezzel szemben a kiszóró pontok rendszertelen és izolált pontokban jelennek meg.

Komoly érdekünk fűződik a kiszóró pontok megtalálásához és kihagyásához. Ha ugyanis bennmaradnak a kiértékelt adatok között, a keresett paraméterekre torzított becslést kapunk, akármilyen módszerrel hajtjuk is végre az illesztést. Van azonban egy ezzel ellentétes érdek is: nem szabad olyan mérési adatot kihagynunk, amely nem kiszóró pont. Ha ugyanis ilyeneket nagy számban elhagyunk, az empirikus szórásokra túlságosan kis értékek jönnek ki, vagyis a mérésünk pontosabbnak fog látszani, mint amilyen a valóságban. Meg kell találnunk a két szempont között az optimális egyensúlyt.

Egy kiszóró pont megjelenésének több oka lehet: a műszerek hibás beállítása, rossz kalibráció, a mért adatok hibás regisztrációja, az illesztő programba táplált bemenő adatok hibás volta stb. A tapasztalat azt mutatja, hogy az alább ismertetett módszerrel azonosított kiszóró pontok eredetét nagyon gyakran utólag meg tudjuk találni, és az adatokat ennek megfelelően ki tudjuk javítani. Az igazi probléma akkor merül fel, amikor ez nem sikerül. Ilyenkor kerül a kísérlet kiértékelője nehéz döntés elé: mit tegyen az ismeretlen eredetű kiszóró ponttal vagy pontokkal?

Nyilván a kiszóró pontok azonosítása csak valamilyen statisztikai próbával lehetséges (vö. 4.3. alfejezet), tehát a fent említett döntéseket csak valamilyen konfidencia-szinten lehet meghozni. Látni fogjuk, hogy két független próbára van szükség: az elsővel azonosítjuk a kiszóró pontokat, a másikkal pedig eldöntjük, hogy ezek valóban kiszóró pontok-e vagy sem.

A (8.1) reláció fennállását úgy tudjuk ellenőrizni, hogy összehasonlítjuk a mért  $\xi_i$  értéket az

$$\tilde{y}_i = f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) \quad (8.2)$$

illesztett értékkel. Tulajdonképpen ezt tesszük a 7.2. ábrákon, amelyeken a mért pontokra rárajzoltuk a lineáris regresszióval kapott egyenest. Nyilván azok a pontok lehetnek (esetleg) kiszóró pontok, amelyekre a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbségek túlságosan nagyok. A matematikai statisztikában a “nagy” vagy “kicsi” jelzőknek csak akkor van értelmük, ha ezeket a különbségeket a szórásukhoz viszonyítjuk. Ezt fogjuk tenni a következő alfejezetben.

## 8.2. Általánosított Student-próba

### A próba definíciója

Bevezetünk néhány jelölést. A  $\xi_i$  mért érték szórásnégyzete

$$D^2(\xi_i) = \sigma_{\xi_i}^2 = \sigma^2 [\mathbf{W}^{-1}]_{ii}. \quad (8.3a)$$

Az illesztett érték szórásnégyzete (6.19b) szerint

$$D^2(\tilde{y}_i) = \sigma_i^{*2} = \sigma^2 [\mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T]_{ii}. \quad (8.3b)$$

A  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{R}$  mátrixokat a (6.9) és (6.10) képletekben definiáltuk. Az illesztett és a mért érték között erős korreláció van, ezért különbségük szórásnégyzete szórásnégyzeteik különbségével egyenlő [vö. (6.23b)], ha a szóban forgó mért értéket az illesztésben felhasználtuk. Ellenkező esetben a  $\xi_i$  mért érték és illesztett értéke statisztikailag független, tehát különbségük szórásnégyzete szórásnégyzeteik összegével egyenlő. Ezt a két esetet a

$$D^2(\xi_i - \tilde{y}_i) = \sigma_{\xi_i}^2 \pm \sigma_i^{*2} \quad (8.3c)$$

képletben foglaljuk össze. Rövidesen érthetővé válik, miért hagyhatunk ki egy  $\xi_i$  mért értéket az illesztésből. Mindenesetre bevezetjük a következő elnevezéseket:

- *külső pont*: olyan  $\xi_i$  mért érték, amely nincs figyelembe véve az illesztésben;
- *belső pont*: olyan  $\xi_i$  mért érték, amely figyelembe van véve az illesztésben.

Ezekkel az elnevezésekkel a (8.3c) képletben a + előjel külső pontnak, a – előjel pedig belső pontnak felel meg. Ezek után definiáljuk a

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - \tilde{y}_i}{\sqrt{\sigma_{\xi_i}^2 \pm \sigma_i^{*2}}} \quad (8.4)$$

Gauss-eloszlású valószínűségi változót, amelyre nyilván fennállnak az

$$M(\zeta_i) = 0 \quad \text{és} \quad D^2(\zeta_i) = 1$$

összefüggések, ha az  $i$  index *nem* kiszóró pontnak felel meg. Ha  $\sigma^2$ -et a (6.22) képletrel becsüljük, akkor

$$t_i = \frac{\xi_i - \tilde{y}_i}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m} [\mathbf{W}^{-1} \pm \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T]_{ii}}} \quad (8.5)$$

$(n - m)$  szabadsági fokú Student-eloszlást követ a külső pontokra, ami nem áll a belső pontokra, hiszen ezekre a nevező nem független a számlálótól.

Az  $(n - m)$  szabadsági fokú Student-eloszlásra a következő kvantilist definiáljuk:

$$P\{|t_i| < \gamma\} = 1 - \varepsilon. \quad (8.6)$$

Ha valamelyik külső pontra  $|t_i| > \gamma$ , akkor  $\xi_i$  kiszóró pontnak minősül  $\varepsilon$  konfidencia-szinten. Ezzel kitűzött célunkat elértük – legalábbis a külső pontok esetében. De mi legyen a belső pontokkal? Ezek esetében ugyanis a (8.5) szerint definiált  $t_i$  nem Student-tört.

A belső pontokra úgy írhatunk fel statisztikai próbát, hogy külső ponttá alakítjuk, vagyis

- kihagyjuk az  $i$ -edik belső pontot az illesztésből; így ez külső ponttá válik;
- (8.5) szerint képezzük rá vonatkozóan a Student-törtet (+ előjellel!), amelyet  $t'_i$ -vel jelölünk;
- ha  $|t'_i| > \gamma$ , akkor  $\xi_i$  kiszóró pont  $\varepsilon$  konfidenciaszinten.  $\gamma$  most az  $(n - m - 1)$  szabadsági fokhoz tartozik, hiszen a pontok száma 1-gyel csökkent.

Ez azt jelenti, hogy a kiszóró pontok keresése érdekében annyiszor kellene az illesztést megismételni, ahány belső pont van, tehát  $n$ -szer. A valóságban nem ilyen rossz a helyzet: elegendő az illesztést egyszer megcsinálni *minden* pont figyelembevételével. Ugyanis a belső pontként számított  $t_i$  mennyiségekből kiszámítható a fent definiált Student-tört, mivel érvényes a

8.1. TÉTEL. Ha mind a teljes, mind az  $i$ -edik pont kihagyásával történő illesztés végrehajtható, továbbá az illesztés linearizálható, végül az  $i$ -edik ponttól eltekintve más kiszóró pont nincs, a  $t'_i$  Student-tört kiszámítható a

$$t'_i = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{t_i^2 - 1}{n - m - 1}}} \quad (8.7)$$

képlettel.

A tétel bizonyítását későbbre halasztjuk, mert áttanulmányozását csak azoknak javasoljuk, akik a 6. fejezetet elolvasták.

A megadott feltételek közül kiemeljük az utolsót: (8.7) akkor igaz az  $i$ -edik pontra, ha az  $i$ -edik ponton kívül nincs más kiszóró pont. Ez azt is jelenti, hogy *nem igaz a többi pontra, ha az  $i$ -edik pont kiszóró pont.* (8.7) alapján nyerhetünk  $t_i$ -re is kvantilist:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{n - m}}}. \quad (8.8)$$

Eszerint a belső pont akkor kiszóró pont  $\varepsilon$  konfidenciaszinten, ha  $|t_i| > \gamma'$ , ami ugyanazt jelenti, mint  $|t'_i| > \gamma$ .

A fentiekben definiált statisztikai tesztet *általánosított Student-próbának* nevezzük. Külső pontokra a szokásos Student-próbával azonos, viszont a belső pontokban attól

némileg eltér.  $(n - m) \rightarrow \infty$  esetén az általánosított próba átmegy a megszokott Student-próbába. A szükséges kvantilisok a 2. függelékben találhatóak.

### A transzformált Student-törtek tulajdonságai

Ha a (8.7) képletet megfordítjuk, a

$$t_i = \frac{t'_i}{\sqrt{1 + \frac{t'^2_i - 1}{n - m}}} \quad (8.9)$$

képletet kapjuk, amelyben  $t'_i$  Student-tört. Ebből leolvashatjuk a  $t_i$  transzformált Student-tört tulajdonságait. Mindenekelőtt látszik, hogy korlátos. Amikor  $t'_i \rightarrow \pm\infty$ ,  $t_i$  határértéke  $\pm\sqrt{n - m}$ . Mivel szigorúan monoton növekvő függvény, ebből következik, hogy

$$|t_i| < \sqrt{n - m}. \quad (8.10)$$

$t_i$  sűrűségfüggvényét a (3.40a) sűrűségfüggvényből tudjuk levezetni. Jelöljük az  $n$  szabadsági fokú Student-tört eloszlásfüggvényét  $S_n(x)$ -szel:

$$S_n(x) = \int_{-\infty}^x s_n(x') dx'.$$

Ebből kapjuk a  $t_i$  transzformált változó eloszlásfüggvényét:

$$\begin{aligned} S_{n-m}^*(x) &= P\{t_i < x\} = P\left\{t'_i < \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2 - 1}{n - m - 1}}}\right\} = \\ &= S_{n-m-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2 - 1}{n - m - 1}}}\right), \end{aligned}$$

hiszen a  $t'_i$  Student-tört szabadsági fokainak a száma  $(n - m - 1)$ . Ezt  $x$  szerint deriválva – elemi számítások után – kapjuk  $t_i$  sűrűségfüggvényét:

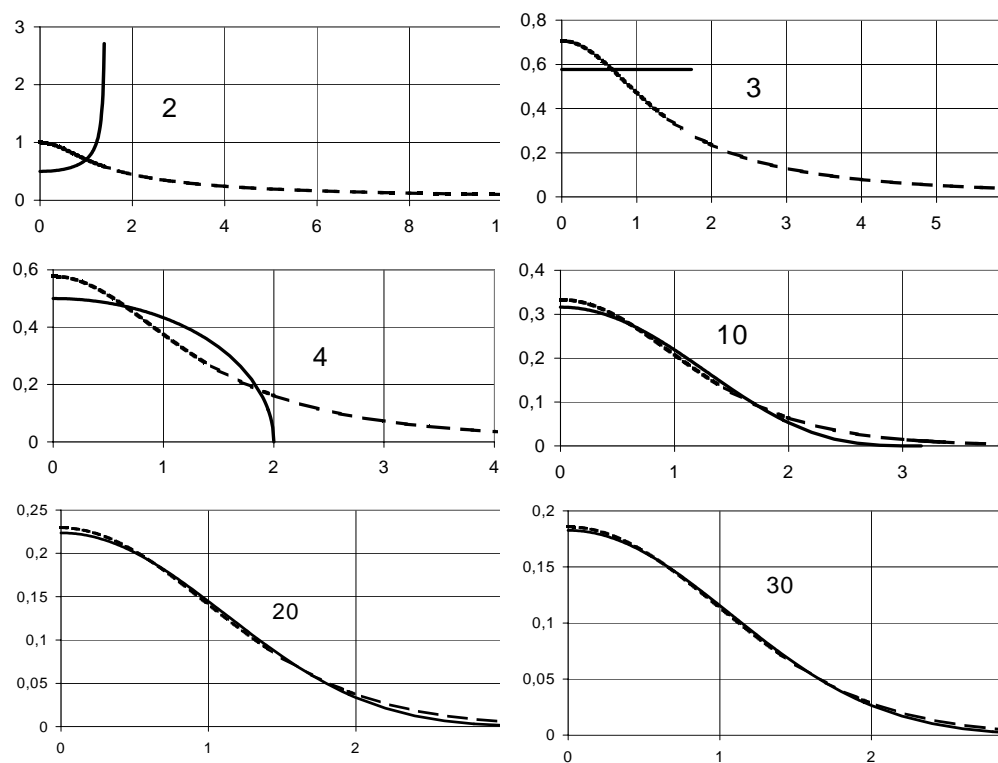
$$s_{n-m}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(n - m)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n - m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n - m - 1}{2}\right)} \left(1 - \frac{x^2}{n - m}\right)^{\frac{n - m - 3}{2}}. \quad (8.11)$$

Érdekes, hogy ennek az eloszlásnak a szórásnégyzete a szabadsági fokok számától függetlenül 1:

$$M(t_i) = 0 \quad \text{és} \quad D^2(t_i) = 1, \quad n - m > 1.$$

A bizonyítást az Olvasóra bízjuk.<sup>74</sup>

Az összetartozó Student- és módosított Student-eloszlásokat a 8.1. ábrán összehasonlítjuk ( $n - m$ ) néhány értékére. Látható, hogy  $n - m = 20$  fölött már nagyon közel van a két eloszlás egymáshoz. Természetesen az általánosított Student-próba szempontjából nem a sűrűségfüggvények alakja, hanem a  $\gamma$  és  $\gamma'$  kvantilisok a mérvadók, amelyek a 2. függelék táblázataiban találhatóak ( $n - m$ ) és az  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűség különböző értékeire.



8.1. ábra. A Student- eloszlás (szaggatott görbe) és a módosított Student-eloszlás (folytonos görbe) sűrűségfüggvénye ( $n - m$ ) különböző értékeire

### \*A 8.1. tétel levezetése

#### Jelölések

A (8.7) képlet levezetéséhez először néhány jelölésre lesz szükségünk. Az  $\mathbf{F}$  mátrix  $i$ -edik sora az  $\mathbf{f}_i^T$  sorvektor, amivel az illesztett érték az

$$\tilde{y}_i = f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}) = f(x_i, \mathbf{a}) + \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_i = f(x_i, \mathbf{a}) + \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{a} \quad (8.12a)$$

alakban írható. Itt kihasználtuk a tételnek azt a feltételét, hogy az illesztési probléma linearizálható, és – ami ezzel együtt jár – a 6.3. alfejezetben tárgyalt torzítás elhanyagolható. Ezzel

$$Q_{\min} = \sum_{j=1}^n w_j (\xi_j - \tilde{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^n w_j (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_j)^2. \quad (8.12b)$$

A (8.3c) képletet a

<sup>74</sup> Útmutatás: Először lássuk be, hogy a (8.11) függvény integrálja 1. Utána használjuk ki, hogy a szórásnégyzetet megadó integrál kifejezhető az  $(n - m)$ -edik és az  $(n - m + 2)$ -edik függvény integráljával.



$$D^2(\xi_i - \tilde{y}_i) = \frac{\sigma^2}{w_i} \quad (8.12c)$$

alakba írjuk át, ahol (8.5) szerint

$$\frac{1}{w_i^*} = \frac{1}{w_i} - \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_i. \quad (8.12d)$$

A (6.9b) és a (6.12b) képletek az

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^T, \quad (8.12e)$$

illetve

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1} \sum_{j=1}^n w_j \Delta \xi_j \mathbf{f}_j \quad (8.12f)$$

alakra hozhatók.

Hagyjuk most ki a  $\xi_i$  mért értéket az illesztésből! A (8.12) képletekkel definiált mennyiségeket úgy tudjuk kiszámítani, hogy a  $j$ -re vonatkozó összegzésekből kihagyjuk a  $j = i$  indexű tagot. Az így kapott mennyiségeket a teljes illesztéshez tartozóktól az “ $i$ ” indexszel különböztetjük meg:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j \neq i} w_j \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^T = \mathbf{R} - w_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T \quad (8.13a)$$

[vö. (8.12e)],

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{R}_i^{-1} \sum_{j \neq i} w_j \Delta \xi_j \mathbf{f}_j = \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{R} \Delta \mathbf{a} - w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i) \quad (8.13b)$$

[vö. (8.12f)], végül (8.12b) alapján

$$Q_i = \sum_{j \neq i} w_j \left( \Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j \right)^2 = \sigma^2 \chi_{n-m-1}^2. \quad (8.13c)$$

Ennek a képletnek a második része a 6.2. TÉTELből következik, hiszen egy pontot kihagyunk, vagyis a szabadsági fokok száma 1-gyel csökkent. Fontos hangsúlyozni, hogy ez csak akkor érvényes, ha az  $i$ -edik ponton kívül más kiszóró pont nincs. Ha az  $i$ -edik pont kiszóró pont, ez nem befolyásolja (8.13c) érvényességét. Ezt a későbbiekben még ki fogjuk használni. A 6.3. TÉTELből következik, hogy ezekkel a feltételekkel  $Q_i$  és a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbség statisztikailag függetlenek.

Amikor az  $i$ -edik pontot kihagyjuk az illesztésből, a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbség így írható:

$$\xi_i - \tilde{y}_i = \Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i. \quad (8.13d)$$

Ezt figyelembe véve (8.5) alapján kapjuk a

$$t'_i = \frac{\left( \Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i \right) \sqrt{w_i^{**}}}{\sqrt{\frac{Q_i}{n-m-1}}} \quad (8.14a)$$

törtet, ahol

$$\frac{1}{w_i^{**}} = \frac{1}{w_i} + \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i. \quad (8.14b)$$

Azért áll itt pozitív előjel, mert az  $i$ -edik most külső pont. A jelölések befejezéseként a (8.5) egyenletet átírjuk a most bevezetett jelölésekkel:

$$t_i = \frac{(\xi_i - \tilde{y}_i) \sqrt{w_i^*}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m}}} = \frac{(\Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_i) \sqrt{w_i^*}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m}}}. \quad (8.15)$$

### Segédtetelek

A (8.7) képlet levezetése három segédteleten alapul.

8.1. LEMMA. A súlyok között fennáll a következő összefüggés:

$$w_i^* w_i^{**} = w_i^2. \quad (8.16)$$

(8.12d) és (8.14b) alapján

$$\begin{aligned} \frac{w_i^2}{w_i^* w_i^{**}} &= \left(1 - w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_i\right) \left(1 + w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i\right) = \\ &= 1 - w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_i + w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i - w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_i w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \\ &= 1 + w_i \mathbf{f}_i^T (\mathbf{R}_i^{-1} - \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{f}_i - w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_i) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \\ &= 1 + w_i \mathbf{f}_i^T (\mathbf{R}_i^{-1} - \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{f}_i - w_i \mathbf{f}_i^T (\mathbf{R}_i^{-1} - \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{f}_i = 1, \end{aligned}$$

amivel (8.16)-ot igazoltuk. A második és harmadik sor között kihasználtuk a (8.13a) képletet.

8.2. LEMMA. A négyzetösszegek között fennáll a következő összefüggés:

$$Q_i = Q_{\min} \left(1 - \frac{t_i^2}{n-m}\right). \quad (8.17)$$

Ennek belátásához először kiszámítjuk a

$$\Delta Q = Q_{\min} - w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{j \neq i} w_j (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}_j)^2$$

különbséget:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \sum_{j \neq i} w_j \left[ (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j) + (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{f}_j \right]^2 = \\ &= \sum_{j \neq i} w_j (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j)^2 + 2 (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \sum_{j \neq i} w_j (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j) \mathbf{f}_j + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \neq i} w_j \left[ (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{f}_j \right]^2.$$

(8.13c) szerint az első tag  $Q_i$ -vel egyenlő. A második tag eltűnik, ugyanis egyrészt a (8.13b) képletet balról  $\mathbf{R}_i$ -vel beszorozva (8.13a) alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} w_j \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^T \Delta \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} w_j \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j,$$

másrészt (6.12b) alkalmazásával adódik az

$$\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} w_j \Delta \xi_j \mathbf{f}_j.$$

A két kifejezést egymással egyenlővé tesszük, vagyis

$$\sum_{j \neq i} w_j (\Delta \xi_j - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_j) \mathbf{f}_j = 0,$$

amint állítottuk. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} Q_{\min} - w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 &= Q_i + \sum_{j \neq i} w_j \left[ (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{f}_j \right]^2 = \\ &= Q_i + (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{R}_i (\Delta \mathbf{a}_i - \Delta \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (8.18)$$

(8.13a) és (8.13b) alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i (\Delta \mathbf{a}_i - \Delta \mathbf{a}) &= \mathbf{R} \Delta \mathbf{a} - w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i - \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{a} = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_i) \Delta \mathbf{a} - w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i = \\ &= w_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{a} - w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i = -w_i (\Delta \xi_i - \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{a}) \mathbf{f}_i = -w_i (\xi_i - \tilde{y}_i) \mathbf{f}_i. \end{aligned}$$

Ha ezt a (8.18) egyenletbe helyettesítjük, a

$$\begin{aligned} Q_{\min} - w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 &= Q_i + (\Delta \mathbf{a}_i^T - \Delta \mathbf{a}^T) \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{R}_i (\Delta \mathbf{a}_i - \Delta \mathbf{a}) = \\ &= Q_i + w_i^2 (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i \end{aligned}$$

összefüggés adódik. (8.14b), (8.15) és (8.16) szerint ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_{\min} - w_i (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 \left( 1 + w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i \right) = Q_{\min} - \frac{w_i^2}{w_i^{**}} (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 = \\ &= Q_{\min} - w_i^* (\xi_i - \tilde{y}_i)^2 = Q_{\min} - t_i^2 \frac{Q_{\min}}{n - m}, \end{aligned}$$

amint a lemma állítja.

8.3. LEMMA. Fennáll a következő összefüggés:

$$\left( \Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i \right) \sqrt{w_i^{**}} = t_i \sqrt{\frac{Q_{\min}}{n - m}}. \quad (8.19)$$

(8.13a) és (8.13b) alapján a képlet bal oldalán szereplő különbség a

$$\begin{aligned}
\Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i &= \Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{R} \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i + w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \\
&= \Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T (\mathbf{R}_i + w_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T) \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i + w_i \Delta \xi_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i = \\
&= (\Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i) (1 + w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i) = (\xi_i - \tilde{y}_i) (1 + w_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{f}_i).
\end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük a (8.14b), (8.15) és (8.16) összefüggéseket, akkor ebből adódik a lemma állítása:

$$(\Delta \xi_i - \Delta \mathbf{a}_i^T \mathbf{f}_i) \sqrt{w_i^{**}} = (\xi_i - \tilde{y}_i) \sqrt{w_i^{**}} \frac{w_i}{w_i^{**}} = (\xi_i - \tilde{y}_i) \sqrt{w_i^*} = t_i \sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m}}.$$

### Végeredmény

Ha a most bizonyított két utolsó lemmában kapott képleteket (8.14a)-ba helyettesítjük, egyszerűen adódik a (8.7) képlet:

$$t'_i = \frac{t_i \sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m}}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-m-1} \left(1 - \frac{t_i^2}{n-m}\right)}} = \frac{t_i}{\sqrt{1 - \frac{t_i^2 - 1}{n-m-1}}}.$$

A fenti levezetés tiszta algebrai eszközökkel dolgozik, tehát a (8.7) képlet meglehetősen általános feltételekkel érvényes. A 8.1. TÉTELben az illesztés végrehajthatóságára vonatkozó feltétel konkrétan azt jelenti, hogy az  $\mathbf{R}$  és  $\mathbf{R}_i$  mátrixok minden  $i$ -re invertálhatók.

### **Az általánosított Student-próba használata**

A kiszóró pontok megtalálására több próba is elképzelhető – attól függően, hogyan állnak rendelkezésünkre a mérési adatok. Az alábbiakban három rokon próbát tekintünk át: Gauss-próba, Student-próba és általánosított Student-próba. Megfontolásainkat a súlyozatlan átlagolás esetére korlátozzuk, ami a fenti jelölésekkel azt jelenti, hogy  $w_i \equiv 1$  és  $f(x_i, \mathbf{a}) = a_1$ .

#### Gauss-próba

Akkor alkalmazzuk a *Gauss-próbát*, amikor ismerjük az egyes mérések  $\sigma$  szórását. Ilyenkor nincs szükség arra, hogy az (5.7)-ben definiált  $s$  empirikus szórás segítségével becsüljük.

A Gauss-próba alapesete az  $M(\xi_i) = a$  hipotézis ellenőrzése ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ez történhet akár a

$$\zeta = \frac{\bar{\xi} - a}{D(\bar{\xi})} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - a}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}},$$

akár a

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

statisztika alapján. Mindkettő Gauss-eloszlást követ, zérus várható értékkel és 1 szórással. A 2. függelék táblázataiból a választott  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséghez megtalálhatjuk a  $\gamma$  kvantilist. A hipotézist elvetjük, ha

$$|\zeta| > \gamma, \quad \text{illetve} \quad |\zeta_i| > \gamma$$

fennáll valamelyik  $i$ -re ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

A Gauss-próba használható kiszoró pontok keresésére is. Képezzük a

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sigma'}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

hányadosokat, ahol a nevező a számláló szórása:

$$\begin{aligned} D^2(\xi_i - \bar{\xi}) &= D^2 \left[ \xi_i \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \xi_j \right] = \\ &= \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \sigma^2 \frac{n-1}{n^2} = \sigma^2 \frac{n-1}{n}, \end{aligned}$$

tehát a

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

választás megfelel. Az így kapott  $\zeta_i$  hányados szintén Gauss-eloszlást követ, zérus várható értékkel és 1 szórással. Ha valamelyik  $i$ -re  $|\zeta_i| > \gamma$ , akkor a megfelelő mérési adatot kiszoró pontnak minősítjük.

### Student-próba

A Student-próbát szerzője<sup>75</sup> eredetileg a következő célból alkotta meg. Egyetlen  $\xi$  adatot mérünk, és az  $M(\xi) = a$  hipotézist kívánjuk ellenőrizni.  $\xi$  szórására ( $\sigma$ ) vonatkozóan van egy független mérésekből,  $n$  szabadsági fokkal becsült empirikus szórásnégyzetünk:

$$s^2 = \sigma^2 \frac{\chi_n^2}{n}.$$

Ekkor a

$$t = \frac{\xi - a}{s}$$

hányados Student-eloszlást követ  $n$  szabadsági fokkal. A hipotézist akkor vetjük el, amikor  $|t| > \gamma$ , ahol  $\gamma$  a választott  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűséghez tartozó kvantilis.

A Student-próba ebben a megfogalmazásában nem igazán használható kiszoró pontok keresésére, legfeljebb a következő hipotézis vizsgálatáról lehet szó. Feltesz-

<sup>75</sup> A Student álnév, eredeti neve Gosset.

szük, hogy  $n$  mérést végeztünk, és az a hipotézisünk, hogy egy független,  $(n + 1)$ -edik mérés várható értéke ugyanaz, mint a korábbiaké. Ekkor nyilván a

$$t = \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-1}}}$$

statisztikát kell használnunk. Ez akkor lenne Student-tört, ha a nevezőben a számláló szórásának a becslése állna. A jelenlegi nevező az első  $n$  mérés közös  $\sigma^2$  szórásnégyzetének a becslése. A Student-próba esetében mindig feltesszük, hogy a független  $(n + 1)$ -edik mérés szórásnégyzete is ugyanez. A számláló szórásnégyzete ezzel a feltevessel

$$D^2(\xi - \bar{\xi}) = D^2(\xi) + D^2(\bar{\xi}) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{n+1}{n},$$

vagyis a nevezőt korrigálni kell ahhoz, hogy Student-törtet kapjunk:

$$t' = t \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{\xi - \bar{\xi}}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}}.$$

Ha  $|t'| > \gamma$ , akkor a mondott hipotézist elvetjük.

#### Általánosított Student-próba

Nézzük először az  $M(\xi_i) = a$  hipotézist ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) abban az esetben, amikor  $\sigma^2$ -et ebből az  $n$  mérésből becsüljük, és közülük az egyikre akarunk próbát felírni. Ekkor nem járhatunk el a fentiek szerint, mert a

$$\frac{\xi_i - a}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-1}}}$$

törtben a számláló nem független a nevezőtől. Független viszont az átlag, tehát az

$$\eta = \frac{\bar{\xi} - a}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-1}}}$$

hányados kapcsolatba hozható a Student-eloszlással:

$$t = \eta \sqrt{n} = \frac{\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{(n-1)\sigma^2}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}},$$

amire szintén lehet kvantilist találni a 2. függelék táblázataiban.

Az általánosított Student-próba alapesete a kiszóró pontok keresése. Ha az egyes mérések szórását  $n$  mérésből becsüljük, és *közülük az egyik* mérésre akarunk próbát felírni, akkor csak a fentiekben ismertetett általánosított Student-próba marad. Eszerint tehát kiszámítjuk a (8.5) képlet szerinti

$$t_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n}}}$$

törtet (lásd alább), amelyekből a (8.7) transzformációval kaphatunk  $(n - 2)$  szabadsági fokú Student-törtet. Ha ennek a kvantilise  $\gamma$ , akkor a  $|t_i| > \gamma'$  fennállásakor minősítjük az  $i$ -edik mérést kiszórónak, ahol  $\gamma'$ -t a (8.8) képlettel számítjuk ki  $\gamma$ -ból.

Vegyük észre, hogy  $t_i$  számításához  $Q_{\min}$ -ot – kivételesen – nem  $(n - 1)$ -gyel, hanem  $n$ -nel kell osztani, amint ezt a fenti képletben is tettük. Mivel most egyetlen paramétert becslünk ( $a_1$ -et), a (8.5) képletben szereplő  $\mathbf{F}$  mátrix egyetlen oszlopból áll, és minden eleme 1-gyel egyenlő. Mivel a  $\xi_i$  mért adatok szórása azonos, most  $w_i \equiv 1$ , vagyis a  $\mathbf{W}$  mátrix az egységmátrix. Végeredményben tehát  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F}$   $1 \times 1$ -es mátrix, vagyis skalár, amelynek az értéke  $n$ . Ebből következik, hogy

$$\left[ \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{F} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \right]_{ii} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Figyelembe véve, hogy most  $\tilde{y}_i = \bar{\xi}$ , a (8.5) képlet ezzel a következő eredményt adja:

$$t_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n-1} \frac{n-1}{n}}} = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n}}},$$

amint fent állítjuk.

### 8.3. A kiszóró pontok megtalálása

A (8.7) képletet először 1935-ben vezették le a súlyozás nélküli átlagolás speciális esetében [4]. A fenti jelölésekkel ez a  $w_i \equiv 1$  és  $f(x_i, \mathbf{a}) = a_1$  esetnek felel meg. A kiszóró pontokkal foglalkozó irodalomban néha idézik is. Teljes általánosságban való levezetése [3]-ban található meg először (1977). A mérések kiértékelésében azonban sokáig nem játszott nagy szerepet. Először ennek okait beszéljük meg.

1935-ben írt dolgozatában Thompson javasolta a (8.7) képlet használatát, hiszen segítségével a súlyozás nélkül átlagolt mért mennyiségek közül egy Student-próba segítségével ki lehet válogatni a hibásakat, vagyis a kiszóró pontokat. Egy évvel később Pearson és ChandraSekar írtak egy cikket [4], amelyben rámutatnak a módszer gyengéire. Elismerik, hogy a javasolt módszer korrektül veszi figyelembe az *elsőfajú* hibát (vö. 4.3. alfejezet), de teljesen védtelen a *másodfajú* hibával szemben. Két oka van annak, hogy a matematikusok nem sokra becsülték a (8.7) képletet. Egyrészt nem volt kellően általános, hiszen eredeti formájában a súlyozás nélküli átlagolásra vonatkozott, viszont a kiszóró pontok főleg a függvényillesztésben izgalmasak. Másrészt Pearson és ChandraSekar ellenvetései nagyon komolyak, és nem könnyű rájuk válaszolni. Mivel a 8.1. TÉTEL szerint a képlet nagyon általános feltételek mellett igaz, jól alkalmazható a kiszóró pontok megkeresésére, ha a másodfajú hibával kapcsolatos ellenvetésekre megtaláljuk a választ. Ezért az alábbiakban ezzel foglalkozunk először.

## A másodfajú hiba

Amikor a másodfajú hiba hatásait elemezzük, az eredeti  $H_0$  hipotézissel szemben meg kell fogalmaznunk egy ellenhipotézist. A  $H_0$  hipotézis így hangzik:

$H_0$ : a  $\xi_i$  mért értékek között ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nincs kiszóró pont.

Amikor az  $i$ -edik pontot vizsgáljuk, a  $|t'_i| > \gamma$  kritériumot alkalmazzuk, ahol  $t'_i$ -t a (8.7) képlettel kapjuk. Az  $i$ -edik pontot akkor minősítjük kiszórónak, amikor ez az egyenlőtlenség igaz. Az elsőfajú hiba valószínűsége a (8.6) képletben szereplő  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűség: ennyi annak a valószínűsége, hogy az  $i$ -edik pontot kiszórónak minősítjük, pedig nem az. Ezt jelenti az a kijelentés, hogy a módszer korrektül kezeli az elsőfajú hibát.

A másodfajú hiba azt jelenti, hogy a  $|t'_i| > \gamma$  egyenlőtlenség hamis, pedig az  $i$ -edik pont kiszóró, vagyis fennáll rá a (8.1) reláció. A mérések kiértékelése szempontjából ennek súlyos következményei lehetnek, hiszen ez okozhatja, hogy a becsült paraméterek torzítottak lesznek. Annak a valószínűségét, hogy ez nem következik be, az alkalmazott statisztikai próba *erejének* nevezzük. A próba erejét meg szoktuk vizsgálni a  $(\xi_i - y_i)$  szisztematikus hiba függvényében, és azt tekintjük a *legjobb* próbának, amelyre a próba ereje a legnagyobb. Ha egy próba a szisztematikus hiba minden értékére a legjobb, akkor azt *egyenletesen legjobb* próbának nevezzük. Az adott probléma elemzésében nem megyünk ilyen mélyre, mert célunk elsősorban a *gyakorlati* kérdésekre adandó válaszok megkeresése.<sup>76</sup>

A másodfajú hibát a következő ellenhipotézissel szemben vizsgáljuk:

$H_1$ : a  $\xi_i$  mért értékek között ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 1-nél több kiszóró pont van.

Azért választjuk éppen ezt, mert ha ez igaz, akkor az alapul vett (8.7) képlet egyetlen pontra sem érvényes, tehát az alkalmazott próba az elsőfajú hibát sem fogja korrektül kezelni.

A probléma megvilágítására a 8.1. táblázatban mutatunk két példát. Két mérést végeztek, mindkettő jól illeszthető volt egy-egy koszinusz-függvénnyel. Az egyikben a mérési pontok száma  $n = 20$ , a másikban  $n$  értéke jóval 100 fölött volt. Mindkét esetben a  $\xi_i$  mért értékek közül négyet-négyet tudatosan elrontottunk: a második számjegyet  $\pm 1$ -gyel megváltoztattuk. Felesleges az elrontott görbéket felrajzolni, a probléma megértéséhez elegendő az illesztésben kapott eredményeket megnézni. A 8.1. táblázat a négy-négy legnagyobb abszolút értékű Student-törtet mutatja. Kevés mérési pont esetében a  $|t'_i| > \gamma$  próba a négy közül csak egyetlen kiszóró pontot talált meg, viszont sok mérési pont esetében megtalálta mind a négyet. Az előbbi esetben tehát fellépett a másodfajú hiba, a másodikban azonban nem.

8.1. táblázat. Négy kiszóró pont keresése

$n$ kicsi		$n$ nagy	
$t'_i$	Student-próba	$t'_i$	Student-próba
2,966	megtalálta	4,373	megtalálta
2,258	nem találta meg	-4,474	megtalálta
-1,874	nem találta meg	-5,497	megtalálta
-1,749	nem találta meg	6,538	megtalálta

<sup>76</sup> A helyzet az, hogy ez a vizsgálat nem történt meg, pedig hasznos lenne. Mindenesre ez a hiányosság nem érinti az alábbi megfontolásokat.



Mi a probléma eredete? Nyilván szoros kapcsolatban van nem csak a kiszóró pontok számával, hanem a mérési pontokéval is. Pearson és ChandraSekar a következő matematikai jelenségre hívják fel a figyelmet. Súlyozatlan átlagolás esetében könnyű belátni, hogy a  $t_i$  törtek között fennállnak a

$$\sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_i - \bar{\xi})^2}{\frac{Q_{\min}}{n}} = \frac{Q_{\min}}{\frac{Q_{\min}}{n}} = n \quad (8.20a)$$

és

$$\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n}}} = 0 \quad (8.20b)$$

összefüggések. Belátásukhoz figyelembe kell venni a (8.5) képletet, ahol  $\tilde{y}_i = \bar{\xi}$ , továbbá az előző alfejezet végén kiszámítottuk, hogy

$$t_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{Q_{\min}}{n}}}.$$

Megjegyezzük, hogy a  $t_i$  törtek között  $(m + 1)$  analóg összefüggés áll fenn az általános esetben [3].

Várhatóan a kiszóró pontokhoz tartoznak a legnagyobb abszolút értékű  $t_i$  értékek. A Student-próba akkor fogja ezeket kimutatni, ha nagyobbak, mint a (8.8) képletben szereplő  $\gamma'$  kvantilis. Érdemes ezért megvizsgálni, hogy a (8.20) feltételeknek eleget tevő  $t_i$  értékek abszolút értékének a maximuma egyáltalán mekkora lehet – függetlenül attól, hogy honnan származnak. A részletes vizsgálat (lásd [3] és [4]) a következő eredményt adja:

- Ha a kiszóró pontok száma  $k$ , akkor a  $t_i$  törtek abszolút értéke akkor a legnagyobb, ha abszolút értékeik egymással egyenlők, viszont a többi tört értéke  $1/\sqrt{n}$  nagyságrendű vagy 0 (attól függően, hogy  $k$  páratlan, illetve páros).
- A maximális abszolút érték kiszámítható, nagysága  $\sqrt{n/k}$ , ha  $k$  páros, és

$$\sqrt{\frac{n}{k + \frac{1}{n-k}}},$$

ha  $k$  páratlan.

Meg lehet mutatni [3], hogy ezek a következtetések nem csak a súlyozatlan átlagolás esetében érvényesek, hanem jó közelítéssel igazak tetszőleges súlyok és illesztőfüggvény esetében is.

Mi mindebből a tanulság? Választ kapunk a 8.1. táblázattal kapcsolatban felvetett kérdésre:

- Ha  $n$  elég nagy (100-as nagyságrendű), akkor ez a felső korlát még 4 kiszóró pont esetében is elég nagy. Például  $n = 100$  és  $k = 4$  esetében a felső korlát 5, ami általában nagyobb, mint a kvantilis, amely 99% konfidenciaszinten  $\gamma = 2,5$  (vö. 2. függelék). Ekkor tehát jó esély van arra, hogy mind a 4 kiszóró pontot észrevesszük.

- Ha  $n$  nem elég nagy (mondjuk  $n = 20$ ), akkor a felső határ  $k = 4$ -re 2,24, tehát 4 kiszóró pontot semmiképpen sem sikerül egyszerre kimutatni, hiszen a felső korlát kisebb, mint a  $\gamma = 2,5$  kvantilis.  $k = 3$  esetében a felső határ 2,56, ami nagyon közel van a kvantilishoz, tehát 3 kiszóró pont egyszerre való kimutatására szintén kicsi az esély, bár nem kizárt.

A fenti megfontolások szerint kis számú mérési adat esetében *elemi matematikai* esély is alig van arra, hogy egynél több kiszóró pontot megtaláljunk. Kis  $n$  esetén ugyanis a  $t_i$  törtek elvi maximuma nem vagy alig haladja meg a kvantilist. Tekintsünk most el ezektől az esetektől, és tegyük fel, hogy  $n$  elég nagy ahhoz, hogy legalább az elemi matematikai esély meglegyen egynél több kiszóró pont megtalálásához. Ha például  $k = 2$  kiszóró pontot keresünk, és egy  $\gamma \approx 2,5$  kvantilissel dolgozunk, akkor  $n$  értékének a  $\sqrt{n/2} > 2,5$  egyenlőtlenséget magasan teljesítenie kell, vagyis  $n$ -nek jelentősen nagyobbak kell lennie, mint  $2 \times 2,5^2 = 12,5$ . Ha ez teljesül, akkor az alábbiakban *elegendően nagy mintáról* fogunk beszélni.

A kiszóró pontok megtalálásának legkomolyabb gátja a (8.20a) megszorítás, amely mindig fennáll, amikor a  $\sigma^2$  tényező az (5.7) szerinti empirikus szórásnégyzettel becsüljük. Ha ezt nem tesszük, mert  $\sigma^2$ -et valamilyen megfontolásból ismertnek tételezzük fel, akkor hasonló probléma nem merül fel, mert nincs szükség a (8.7) képletre sem, sőt az nem is érvényes. A most talált probléma végső gyökere tehát a  $\tilde{\sigma}^2 = s^2$  becslés, amitől meg tudunk szabadulni, ha  $\sigma^2$ -et ismertnek vesszük. Természetesen ezzel egyéb problémák nem oldódnak meg, amelyekről a későbbiekben még bőven lesz szó.

A kiszóró pontok keresésével kapcsolatban néha lehet találkozni meggondolatlan kijelentésekkel. Egy – szerencsére már visszavont – mérési útmutatóban találtuk a következő receptet: “Ha a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mért adatok közül valamelyiknek az átlagtól való eltérése nagyobb, mint  $3\sigma$ , akkor az kiszóró pont, és el kell vetni.”  $\sigma$ -val az (5.7) szerint becsült  $s$  empirikus szórást jelöli szerző, továbbá a szövegkörnyezetből világos, hogy a mérések  $n$  száma ritkán nagyobb 10-nél. Attól a hibától is tekintsünk el, hogy (8.5) alapján  $s$  helyett az

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n}$$

képletet kell használni a próbában szereplő  $t_i$  statisztika számítására [vö. (8.20)], hiszen a  $(\xi_i - \bar{\xi})$  különbség szórása az így számított  $s'$ . Az igazi baj máshol van. Legyen, mondjuk,  $n = 10$ . Ekkor a fentiek szerint  $|t_i| \leq \sqrt{n-1} = 3$ , tehát a maximum éppen a szerző által választott  $\gamma = 3$  kvantilissel egyezik meg. Ez azt jelenti, hogy a javasolt próba *sohasem fog találni* kiszóró pontot. A  $t_i$  statisztika maximumának elemzésére vonatkozó levezetések [3] ugyanis az következnek, hogy a maximum csak a következő esetben lép fel:

$$\max(t_i) = \pm 3 \quad \text{és} \quad t_j = \mp \frac{1}{3}, \quad j \neq i.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ezek kielégítik a (8.20) egyenlőségeket. Ez következik be például a következő “mért” adatsor esetében:

$$\xi_1 = 109, \quad \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_{10} = 99.$$

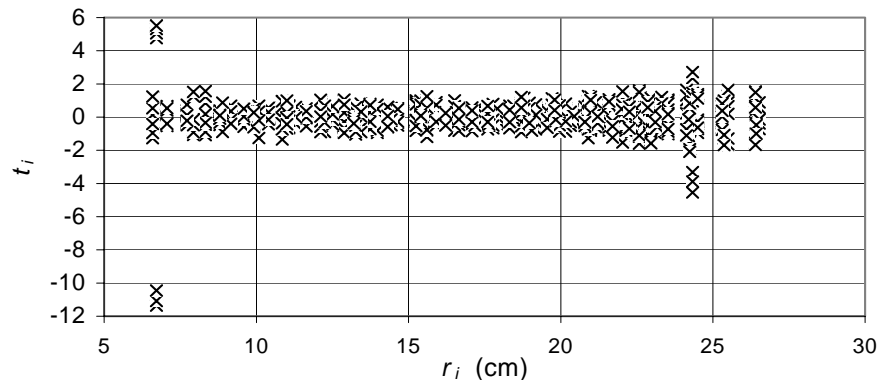
Jól elvégzett mérések nem szoktak ilyen eredményre vezetni. Ha mégis ilyesmi jön ki, nem azt kell vizsgálni, hogy  $\xi_1$  kiszóró adat-e, hanem azt, hogy mi lehet a baj a többi kilenc adattal. Egyébként, ha az egyiket egy kicsit megváltoztatjuk, a maximális  $t_i$  a kvantilisnél kisebbé válik. Legyen például  $\xi_2 = 98$ . Ekkor – mint egyszerűen kiszámíthatjuk – a következő adódik:

$$t_1 = 2,986; \quad t_2 = -0,623; \quad t_3 = t_4 = \dots = t_{10} = -0,295.$$

Egyiknek az abszolút értéke sem haladja meg a  $\gamma = 3$  kvantilist.

### Mi legyen a kiszóró pontokkal?

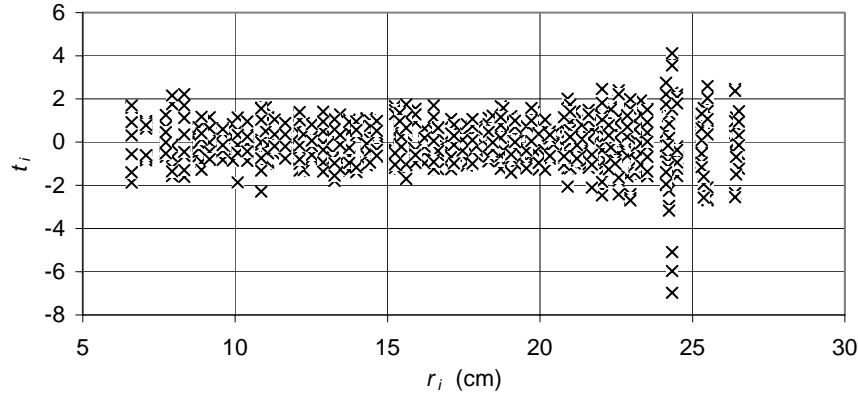
A 8.2a. ábra egy elegendően nagy mintára vonatkozóan mutatja a  $t_i$  törteket. Az illesztés egy, a 7.7. alfejezetben tárgyalt normálás volt, sok multiplikatív és additív korrekcióval (vö. 7.6. alfejezet): henger alakú reaktorban a különböző  $r_i$  sugarakhoz tartozó teljesítménysűrűséget mérték. Az illesztésben minden mért adatot figyelembe vettünk. Az ábráról látható, hogy a mérés tartalmaz több kiszóró pontot is. Különösen szembeszökők az  $r_i = 6,72$  cm-hez tartozó értékek, amelyek mind a  $(-\gamma', +\gamma')$  intervallumon kívül vannak, ahol a kvantilis  $\varepsilon = 0,01$ -hez tartozó értéke  $\gamma' = 2,57$ . Az ábra másik jellegzetessége, hogy a többi pont túlnyomó része a  $(-1, +1)$  intervallumba esik. Nem csak az előbbieket, hanem ez a többség sem lehet Student-tört<sup>77</sup>, hiszen azok 35%-ának a  $(-1, +1)$  intervallumon kívülre kell esnie.



8.2a. ábra. A  $t_i$  törtek az  $r_i$  pozíció függvényében, minden mért adat figyelembevételével

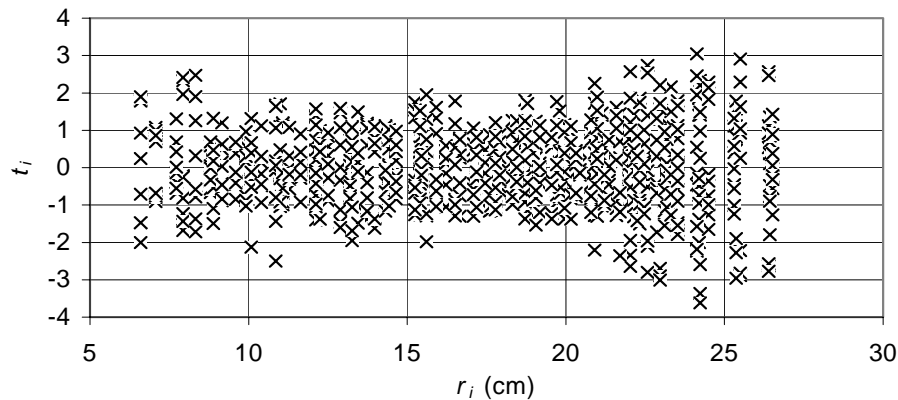
Nincs olyan gyakorlott kísérleti fizikus, aki ne ítélné az  $r_i = 6,72$  cm-hez tartozó pontokat kiszórónak. Tekintsük magunkat ilyennek, és hagyjuk ki ezeket a pontokat az illesztésből! Az eredmény a 8.2b. ábrán látszik. Most az  $r_i = 24,33$  cm-hez tartozó pontok esnek messze kívül a  $(-\gamma', +\gamma')$  intervallumon, amelyek az előbbi ábrán még alig látszottak kiszórónak. Feltűnő ugyanakkor, hogy a többi pont eloszlása kezd megfelelni a Student-eloszlásnak: kezdik kitölteni a  $(-2, +2)$  intervallumot.

<sup>77</sup> A pontok száma akkora, hogy elhanyagolható a Student-eloszlás és a módosított Student-eloszlás között különbség, vö. 8.1. ábra. Ezért a továbbiakban nyugodtan beszélhetünk egyszerűen csak Student-eloszlásról.



8.2b. ábra. A  $t_i$  törtek az  $r_i$  pozíció függvényében, az  $r_i = 6,72$  cm-hez tartozó pontok kihagyásával

Nagyon úgy tűnik, hogy az  $r_i = 24,33$  cm-hez tartozó pontok szintén kiszóró pontok, tehát hagyjuk ki ezeket is, és ismételjük meg az illesztést! Az eredmény a 8.2c. ábrán látható. A kép teljesen megváltozott: bár most is esnek pontok a  $(-\gamma', +\gamma')$  intervallumon kívülre, de a többi pontok eloszlása már nagyon olyanoknak tűnik, mint amit az ember a Student-eloszlás alapján vár. A kiértékelésben most érkezünk el az igazi dilemmához. Az eddigiekben elég magabiztosak voltunk, és gond nélkül hagytuk el a kiszórónak látszó pontokat. A 8.2c. ábrához hasonló ábrák láttán még a legtapasztaltabb kísérleti fizikusok is elbizonytalanodnak.



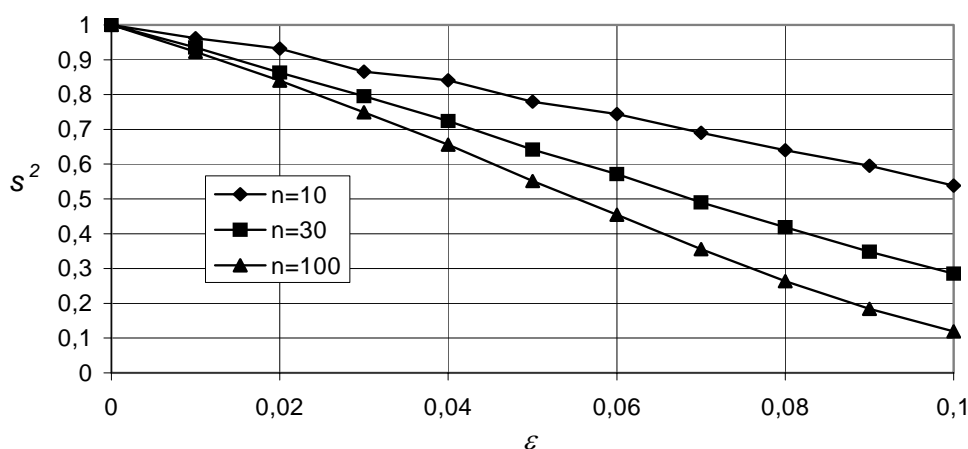
8.2c. ábra. A  $t_i$  törtek az  $r_i$  pozíció függvényében, az  $r_i = 6,72$  cm és  $24,33$  cm-hez tartozó pontok kihagyásával

Nézzük meg ezért közelebbről, mi a teendő, ha egy mérési adat kiszóró pontnak minősül. Az esetek nagy részében megtaláljuk a hiba okát: elírás, hibás kalibráció, téves adatátvitel stb. Ekkor a hiba kijavítása után rendbe szokott jönni az illesztés. Ha a hiba okát nem találjuk, *nem okos dolog kizárólag a Student-próbára hagyatkozva akár egyetlen pontot is elhagyni*. Amit a fenti mérés elemzésében egy hályogkovács magabiztosságával tettünk, nem volt helyes. Ezt az állítást akkor is fenntartjuk, ha a következő alfejezetben meg fogjuk mutatni, hogy helyes volt elhagyni, amit elhagytunk. A probléma ott van, hogy *a Student-próba ehhez nem elegendő alap*.

A probléma illusztrálására a következő numerikus kísérletet végeztük:

1. Generáltunk  $n$  darab Gauss-eloszlású véletlen számot zérus várható értékkel és 1 szórással.
2. Kiszámoltuk az átlagot és az empirikus szórásnégyzetet ( $s^2$ ).
3. Elhagytuk azokat, amelyeket a Student-próba kiszórónak mutatott.

4. Ezután a 2. lépéstől folytattuk addig, amíg legalább egy kiszóró pont akadt.
5. A 8.3. ábra mutatja az utolsó lépésben kapott  $s^2$ -et az  $\varepsilon$  konfidencia-valószínűség és  $n$  függvényében.



8.3. ábra.  $s^2$  függése  $\varepsilon$ -tól és  $n$ -től

Az ábráról látszik, hogy már 99%-os konfidenciaszinten ( $\varepsilon = 0,01$ ) is jelentős a csökkenés. Tekintve, hogy a kiindulási adatokat véletlenszám-generátor állította elő, közöttük kiszóró pont nem lehet. A próba mégis ilyennek minősített egyes adatokat, aminek az lett az eredménye, hogy az  $s^2$  empirikus szórásnégyzet jelentősen lecsökkent. Emiatt *ok nélkül nem szabad kiszóró pontot elhagyni*. Fontos megjegyezni, hogy ez a következtetés arra az esetre vonatkozik, amikor  $\sigma^2$ -et becsüljük. Ha adottnak vesszük, akkor a kiszóró pontok elhagyása miatt nem csökken a becsült paraméterek szórása.

Akár becsüljük  $\sigma^2$ -et, akár nem, nem tudjuk eldönteni, miről van szó: a Student-próba elsőfajú hibájáról vagy valóságos, de ismeretlen eredetű szisztematikus hibáról. Az sem biztos továbbá, hogy nincs több kiszóró pont, mint amennyit a Student-próba annak minősít, vagyis nem lépett fel a másodfajú hiba.

Ugyanerre a konklúzióra jutnak a [6] alatt idézett szerzők is. A továbbiak szempontjából azonban a leginkább figyelemre méltó Pearson és ChandraSekar figyelmeztetése [4]: az a kérdés, hogy az általánosított Student-próba által kiszórónak minősített pont valóban kiszóró-e, *nem dönthető el az általánosított Student-próba keretein belül*. Ennek eldöntéséhez valamilyen független eszközre van szükség. Természetesen ugyanezt mondanák, bármilyen más próbát alkalmaznánk a kiszóró pontok keresésére.

Itt a probléma gyökere. Kell keresnünk valamilyen független eszközt. Ez lehet feljegyzéseink átnézése, műszereink beállításának, kalibrációjának ellenőrzése és ehhez hasonlók. Ha ezek nem segítenek, kell egy végső eszköz. Hogy ez mi lehet, arra a 8.2. ábrák elemzésekor már utaltunk. Azokon az ábrákon tűnt biztosnak, hogy kiszóró pontokkal állunk szemben, amelyeken a pontok *többsége* nem felelt meg annak, amit a Student-eloszlás alapján vártunk: a kiszóró pontok mindig együtt járnak azzal, hogy a többi ponthoz tartozó  $t_i$  törtek túlságosan kicsik. Tulajdonképpen ez a másodfajú hiba végső oka. A keresett járulékos eszköznek ezt a dolgot kell kimutatnia. Ilyen eszközök vannak, ezek az *illeszkedési próbák*, amelyek annak az vizsgálatára szolgálnak, hogy egy adott statisztikai sokaság tekinthető-e egy adott eloszlásból vett mintának.

A mondottak alapján tehát a következő eljárást fogjuk követni:

1. Minden mérési adatra vonatkozóan elvégezzük az általánosított Student-próbát, amely vagy jelöl ki kiszóró pontokat vagy sem.

2. A kapott  $t_i$  törtek összességére vonatkozóan illeszkedési próbát végzünk annak eldöntésére, hogy ezek tekinthetők-e az általánosított Student-eloszlásból vett mintának.
3. Ha nem tekinthetők annak, akkor az 1. lépésben kiszórónak mutató pontokat kiszórónak tekintjük, és elvetjük.
4. Ezt követően az elhagyott pontok nélkül megismételjük az illesztést.

Ahhoz, hogy ezt alkalmazni tudjuk, meg kell ismerkednünk az illeszkedési próbákkal. Ez lesz a 8.4. alfejezet témája.

## 8.4. Illeszkedési próbák

### Illeszkedési próbákról általában

Legyen az  $\eta$  valószínűségi változó *elméleti eloszlásfüggvénye*  $F(x)$ .  $n$ -szer megmértük és az  $\{\eta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  halmazt kaptuk eredményül. Azt akarjuk ellenőrizni, tekinthető-e ez a halmaz az  $F(x)$  eloszlásból vett mintának. Ehhez definiálnunk kell az *empirikus eloszlásfüggvényt*. Rendezzük a mért adatokat nagyság szerint növekvő sorba:

$$\eta_1^* \leq \eta_2^* \leq \dots \leq \eta_n^*.$$

A csillaggal jelölt mennyiségek ugyanazok, mint a korábbiak, csak sorba vannak rendezve. Az empirikus eloszlásfüggvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\Phi_n(x) = \frac{k}{n}, \quad (8.21)$$

ha

$$\eta_k^* < x, \quad \text{de} \quad \eta_{k+1}^* \geq x.$$

Azt a hipotézist kívánjuk tesztelni, hogy

$$M[\Phi_n(x)] = F(x). \quad (8.22)$$

Az általánosság kedvéért az  $\eta_i$  jelölést használjuk, de az általános képleteket végső soron  $\eta_i$  helyett a  $t_i$  törtekre,  $F(x)$  helyett pedig a módosított Student-eloszlás eloszlásfüggvényére fogjuk alkalmazni.

A hipotézisvizsgálathoz szükségünk van az empirikus és az elméleti eloszlásfüggvények valamilyen funkcionáljára, amelynek ismerjük az eloszlásfüggvényét. Anderson és Darling a következő funkcionált vizsgálta [7]:

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_n(x) - F(x)]^2 \psi[F(x)] dF(x), \quad (8.23)$$

ahol  $\psi(t)$  valamilyen súlyfüggvény. Legyen  $\gamma_W$  a kvantilis. A (8.22) hipotézist elvetjük az adott konfidenciaszinten, ha

$$W_n^2 > \gamma_W. \quad (8.24)$$

Két súlyfüggvényre ismertek kvantilisek (aszimptotikusan  $n \rightarrow \infty$ -re):

(1) Ha  $\psi(t) \equiv 1$ :

$$W_n^2 = n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(\eta_i^*) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2. \quad (8.25)$$

Kvantilis 95% konfidenciaszinten:  $\gamma_W = 0,4614$ .

(2) Ha  $\psi(t) = \frac{1}{t(t-1)}$ :

$$W_n^2 = -n + 2 \sum_{i=1}^n \left[ \ln \frac{1}{1-F(\eta_i^*)} - \frac{2i-1}{2n} \ln \frac{F(\eta_i^*)}{1-F(\eta_i^*)} \right]. \quad (8.26)$$

Kvantilis 95% konfidenciaszinten:  $\gamma_W = 2,4987$ .

A (8.22) hipotézis ellenőrzésére több más próbát is definiáltak, de ezeket illetően az irodalomra utalunk [7]. A kiszóró pontok kereséséhez elegendők a (8.25) és (8.26) funkcionálok. Érdeemes megjegyezni, hogy a (8.26) funkcionál különösen érdekes a mi szempontunkból: a súlyfüggvény kiemeli az  $F \rightarrow 0$  és  $F \rightarrow 1$  szélsőértékeket, amelyek éppen a kiszóró pontoknak felelnek meg. Egyébként  $F(1-F)$  éppen a (8.23)-ban szereplő  $(\Phi_n - F)$  különbség szórásnégyzete.

A (8.26) funkcionál kiszámítása okozhat numerikus nehézségeket, amikor  $n$  nagy. Ilyenkor ugyanis előfordulhatnak nagy abszolút értékű pozitív és negatív  $t_i$  törtek, amelyekre  $F(t_i)$  közel lehet 0-hoz, illetve 1-hez. Ilyenekre a (8.26)-ban levő logaritmusok argumentuma a szingularitás közelébe esik, így az összeg megfelelő tagjának a kiszámítása pontatlan. Külön gond, hogy a kiszámítandó mennyiség két nagy szám,  $n$  és az összeg kis különbsége, ami tovább rontja a számítási pontosságot. Mindezek a nehézségek gondos programozással elkerülhetők.

8.2. táblázat. Az illeszkedési próbák kvantilisei

$\varepsilon$	$\psi(t) \equiv 1$	$\psi(t) = 1/t(t-1)$
0,001	1,1679	7,1782
0,01	0,7435	3,9245
0,02	0,6198	3,2900
0,03	0,5489	2,9336
0,04	0,4993	2,6867
0,05	0,4614	2,4987
0,10	0,3473	1,9354
0,15	0,2841	1,6226
0,20	0,2412	1,4091
0,30	0,1843	1,1204

Az illeszkedési próbához szükséges kvantilisek Anderson és Darling számításai szerint [7] a 8.2. táblázatban találhatóak. Mivel az ő számításaik aszimptotikusan,  $n \rightarrow \infty$  mellett érvényesek,  $n$  értéke a táblázatnak nem bemenő adata.

### Grafikus módszer

Az előzőekben definiált funkcionálok alapuló próba hasznos kiegészítője a grafikus ábrázolás. Ez a következő észrevétel alapján: az  $F(\eta)$  valószínűségi változó egyenletes eloszlású, ugyanis

$$P\{F(\eta) < x\} = P\{\eta < F^{-1}(x)\} = F[F^{-1}(x)] = x.$$

Ez a gondolatmenet folytonos eloszlásokra érvényes. Határozzuk meg  $F(\eta_i^*)$  várható értékét! Ehhez szükség van  $F(\eta_i^*)$  sűrűségfüggvényére. Mi kell ahhoz, hogy

$$x < F(\eta_k^*) < x + dx$$

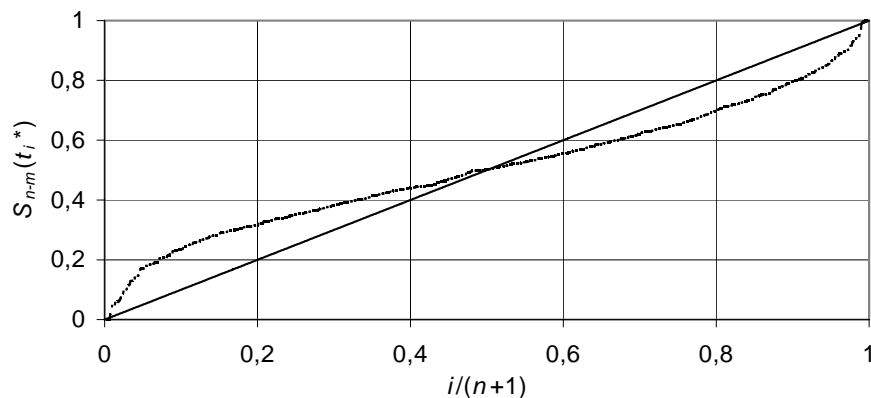
teljesüljön? ( $dx$  végtelen kicsi.)  $(k-1)$  darab változónak  $x$ -nél kisebbnek,  $(n-k)$  darabnak pedig  $x$ -nél nagyobbak kell lennie. A  $k$ -adik értéket  $n$ -féleképpen választhatjuk ki, az előbbi  $(k-1)$ -et pedig  $\binom{n-1}{k-1}$ -féleképpen. Így tehát:

$$f_k(x)dx = P\{x < F(\eta_k^*) < x + dx\} = n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx.$$

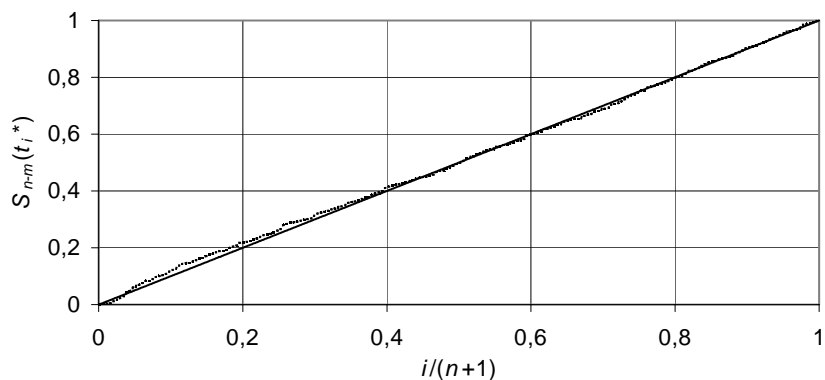
Ezzel

$$M[F(\eta_k^*)] = \int_0^1 f_k(x)x dx = n \binom{n-1}{k-1} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{k}{n+1},$$

amint ez elemi úton ellenőrizhető. Tehát ha  $F(\eta_i^*)$ -t ábrázoljuk  $k/(n+1)$  függvényében, egy  $45^\circ$  alatt hajló egyenest kell kapnunk, ha igaz a hipotézis. Ilyen grafikonokat mutatnak a 8.4a. és 8.4b. ábrák. Az előbbi a 8.2a. ábrán, az utóbbi pedig a 8.2c. ábrán látható helyzetnek felel meg. Világosan látszik, hogy az előbbi tartalmaz, de az utóbbi már nem tartalmaz kiszóró pontokat.



8.4a. ábra. A 8.2a. ábrán látható helyzetnek megfelelő illeszkedési grafikon



8.4b. ábra. A 8.2c. ábrán látható helyzetnek megfelelő illeszkedési grafikon



## Alkalmazás a $t_i$ törtekre

A fentieket a  $t_i$  törtekre alkalmazzuk, vagyis az elméleti eloszlásfüggvény most

$$F(x) = S_{n-m}^*(x),$$

amelynek megfelelő sűrűségfüggvényt (8.11)-ben felírtuk. Ez nagyon hasznos információt ad, de a módszer sajnos csak közelítő, mert a  $t_i$  törtek nem függetlenek, márpedig a  $\gamma_W$  kvantilisok számításában ezt feltételezték. Annak, hogy nem függetlenek, a (6.5) normálegyenletek az okai. Ezek ugyanis  $m$  darab egyenletet alkotnak a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbségekre vonatkozóan. Nos, (8.5) szerint velük arányosak a  $t_i$  törtek, ami azt jelenti, hogy a normálegyenletek átírhatók a  $t_i$  törtekre vonatkozó egyenletrendszerre. Az így kapott  $m$  egyenletből  $m$  darab  $t_i$  tört kifejezhető a maradék  $(n - m)$  törttel. Emiatt közelítés a fenti illeszkedési próbát közvetlenül a  $t_i$  törtekre alkalmazni. A tapasztalat azt mutatja, hogy nagy  $n$ -re mégis jól alkalmazható.

Amikor azonban  $n$  nem elég nagy (mondjuk kisebb, mint 100), akkor célszerű ezt a lineáris függőséget megszüntetni, vagyis az  $n$  darab  $t_i$  törtet (vagy valamilyen velük arányos mennyiségeket)  $(n - m)$  darab független valószínűségi változóra transzformálni. Ennek a módját tárgyaljuk a következő szakaszban.

### \*Transzformálás Gauss-eloszlásra

A  $t_i$  törtek helyett egyszerűbb a  $(\xi_i - \tilde{y}_i)$  különbségeket transzformálni annak érdekében, hogy megvizsgáljuk, tekinthetők-e egy Gauss-eloszlásból vett mintának.<sup>78</sup> Mint mondtuk, ezek nem függetlenek, hiszen (6.5) szerint kielégítenek  $m$  egyenletet:

$$\begin{aligned} G_k(\tilde{\mathbf{a}}) &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})}{\partial a_k} [\xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})] = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i F_{ik}(\xi_i - \tilde{y}_i) = 0, \end{aligned} \quad (8.27)$$

$k = 1, 2, \dots, m$ , amit

$$\mathbf{F}^T \mathbf{W}(\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\mathbf{y}}) = 0 \quad (8.28)$$

szerint írhatunk át vektori alakba. Ez azt jelenti, hogy közülük  $m$  különbség kifejezhető a többi  $(n - m)$ -mel. Keresünk egy olyan  $(n - m) \times n$ -es  $\mathbf{C}$  mátrixot, hogy a

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{C} \mathbf{W}^{1/2} (\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\mathbf{y}}) \quad (8.29)$$

vektor  $(n - m)$  azonos szórású, független komponensből álljon, vagyis

$$\mathbf{M}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T) = \sigma^2 \mathbf{E}_{n-m, n-m}, \quad (8.30)$$

tehát arányos az  $(n - m) \times (n - m)$ -es egységmátrixszal. A transzformáció alapján

<sup>78</sup> A 6.7. alfejezetben tárgyaljuk a különböző, esetleg nem Gauss-eloszlású mérési adatok kezelését. Ott megmutatjuk, hogy ezek gyakorlatilag Gauss-eloszlásúnak tekinthetők. Ezért elég csak a Gauss-eloszlásra vonatkozó hipotézist vizsgálni.

$$\begin{aligned}
M(\bar{\xi}\bar{\xi}^T) &= \mathbf{C}\mathbf{W}^{1/2} M\left[(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})^T\right] \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{C}^T = \\
&= \sigma^2 \mathbf{C}\mathbf{W}^{1/2} (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}^T) \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{C}^T = \\
&= \sigma^2 \mathbf{C} (\mathbf{E} - \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{F}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{W}^{1/2}) \mathbf{C}^T.
\end{aligned}$$

Keressük a transzformáló mátrixot a következő alakban:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-m, n-m} & -\mathbf{X}_{n-m, m} \end{bmatrix}, \quad (8.31)$$

ahol  $\mathbf{X}$  egy egyelőre határozatlan  $(n-m) \times m$ -es mátrix. Úgy fogjuk megválasztani, hogy (8.30) teljesüljön. A deriváltak mátrixát is bontsuk ennek megfelelő blokkokra:

$$\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_{n-m, m} \\ \mathbf{F}''_{m, m} \end{bmatrix}. \quad (8.32)$$

A felső blokk  $(n-m) \times m$ -es, az alsó blokk pedig  $m \times m$ -es. Némi mátrixalgebrával az alábbi egyenletet kapjuk a keresett  $\mathbf{X}$  mátrixra:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \mathbf{E} &= \sigma^2 (\mathbf{E} + \mathbf{X}\mathbf{X}^T - \mathbf{F}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'^T + \mathbf{F}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}''^T \mathbf{X}^T) + \\
&+ \sigma^2 (\mathbf{X}\mathbf{F}''\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'^T - \mathbf{X}\mathbf{F}''\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}''^T \mathbf{X}^T).
\end{aligned}$$

Közvetlen beszorzással be lehet látni, hogy ez a mátrixegyenlet a következő alakra hozható:

$$(\mathbf{X}\mathbf{F}'' - \mathbf{F}')\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{F}''^T \mathbf{X}^T - \mathbf{F}'^T) = \mathbf{X}\mathbf{X}^T. \quad (8.33)$$

Bontsuk az  $\mathbf{R}$  mátrixot két mátrix szorzatára:  $\mathbf{R} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$  (vö. 2.6. TÉTEL). Ezt beírva a (8.33) egyenlet kielégül, ha

$$(\mathbf{X}\mathbf{F}'' - \mathbf{F}')\mathbf{H}^{-1} = -\mathbf{X},$$

amiből

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}'\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{F}''\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{E}_m)^{-1} = \mathbf{F}'(\mathbf{H} + \mathbf{F}'')^{-1}.$$

Azokat az  $i$  indexeket, amelyeket kitranszformálunk, (vagyis az  $\mathbf{F}''$ -nek megfelelő  $i$ -ket) úgy célszerű megválasztani, hogy a  $\zeta_i$  és az  $(\bar{\xi} - \tilde{\mathbf{y}})$  valószínűségi változók közötti korreláció a legerősebb legyen a megmaradó  $i$  indexekre. Itt nem részletezett megfontolások szerint azokat az  $i$ -ket célszerű az  $\mathbf{F}''$  mátrix számára kiválasztani, amelyekre a  $D^2(\tilde{y}_i)/D^2(\xi_i)$  hányados a legnagyobb.

A (8.31) ötlet Sarkadi egyik tesztjéből [7] indul ki. Sarkadi a  $\xi_i$  független valószínűségi változók normalitásának vizsgálatára javasolja a következő eljárást. Először a közös várható értéket küszöböli ki a

$$\zeta_i = \xi_i - \xi'_n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \xi'_n = \frac{n\bar{\xi} + \sqrt{n}\xi_n}{n + \sqrt{n}}$$

transzformációval. Az így kapott zérus várható értékű és  $\sigma^2$  szórásnégyzetű valószínűségi változók továbbra is függetlenek. Ezek a változók megfelelnek a (8.29) szerint kapott  $\zeta_i$  változóknak.

Egy újabb transzformációval kiküszöböljük a  $\sigma^2$  tényezőt.<sup>79</sup> Be lehet látni (lásd [7], 1991), hogy az

$$\eta_i = \frac{\zeta_i^2}{\sum_{j=i}^{n-m} \zeta_j^2} \quad (8.34)$$

hányadosok ( $i = 1, 2, \dots, n - m - 1$ ) egymástól statisztikailag függetlenek, és sűrűségfüggvényük a Béta-eloszlás:

$$f_i(u) = \frac{u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{B(p, q)}, \quad (8.35)$$

ahol

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad q = \frac{n-i}{2},$$

továbbá

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Az illeszkedési próbát az  $F_i(\eta_i)$  mennyiségekre csináljuk, ahol  $F_i(u)$  az előbbi sűrűségfüggvény integrálja. Ebben az illeszkedési próbában az elméleti eloszlásfüggvény az egyenletes eloszlás  $F(x) = x$  eloszlásfüggvénye.

8.3. táblázat. A (8.25) és (8.26) funkcionálok értékei a 8.2. ábrákon mutatott esetekre  
A kvantilisek 0,4614 és 2,4987  $n\omega^2$ -re, illetve  $W_n^2$ -re.

Ábra	$Q_{\min}/(n-m)$	$n\omega^2$	$W_n^2$
8.2a.	11,87	D: 9,92 G: 25,5	D: 47,7 G: 126
8.2b.	4,94	D: 0,46 G: 1,06	D: 3,24 G: 6,66
8.2c.	4,07	D: 0,10 G: 0,40	D: 0,89 G: 3,20

### Alkalmazás a korábban tárgyalt mérésre

Ha a fenti illeszkedési próbákat alkalmazzuk a 8.2. ábrákon látható esetekre, a 8.3. táblázatban látható eredményeket kapjuk. A táblázatban "D"-vel jelöljük a transzformálatlan ("direkt") adatokra, "G"-vel pedig a transzformált ("Gauss-eloszlású") adatokra vonatkozó próbák eredményeit. Látható a táblázatból, hogy a 8.2c. ábrának megfelelő eset lényegesen jobb funkcionálokot eredményezett, mint a két korábbi, de a "G" esetnek megfelelő  $W_n^2$  funkcionál egy kicsivel még mindig nagyobb, mint a kvantilisek. Ha további pontokat hagyunk el, ez a helyzet egyáltalán nem javul, tehát mindenképpen indokolt ennél az illesztésnél megállni.

<sup>79</sup> Ez az ötlet szintén Sarkadi idézett dolgozatában található.

## \*9. ASZIMPTOTIKUS TARTOMÁNY KERESÉSE

### \*9.1. A probléma felvetése

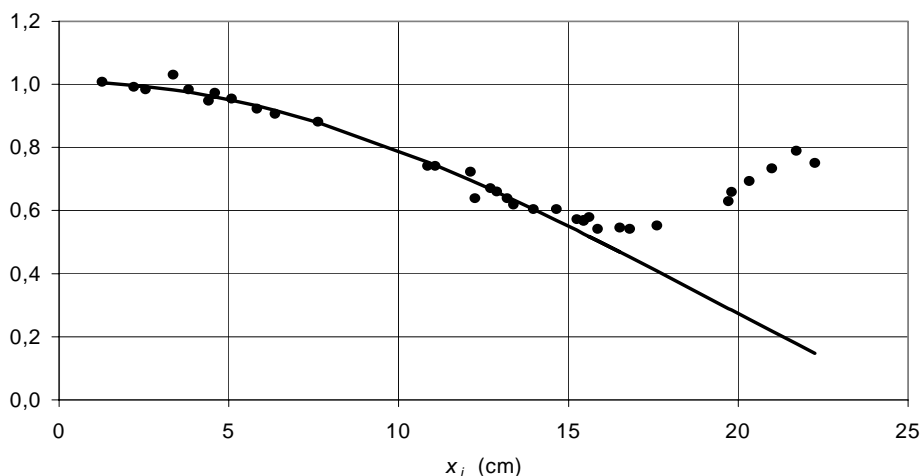
Gyakran választunk olyan illesztőfüggvényt, amelyről *tudjuk*, hogy az  $x_i$  változónak van olyan tartománya, ahol

$$M(\xi_i) \neq f(x_i, \mathbf{a}). \quad (9.1)$$

Ez emlékeztet a kiszóró pontok definíciójára használt (8.1) relációra, de már a 8. fejezet elején is hangsúlyoztuk, hogy az  $x_i$  változó említett tartományába eső mért értékeket nem tekintjük kiszóró pontnak, hiszen a (9.1) reláció fennállásának az oka az illesztőfüggvény tudatos egyszerűsítése. A definíciót egy példával világítjuk meg. A 9.1. ábrán látható pontok egy mérés eredményei, amelyről tudjuk, hogy  $x_i$  elegendően kis értékeire

$$M(\xi_i) = a_1 J_0(a_2 x_i), \quad (9.2)$$

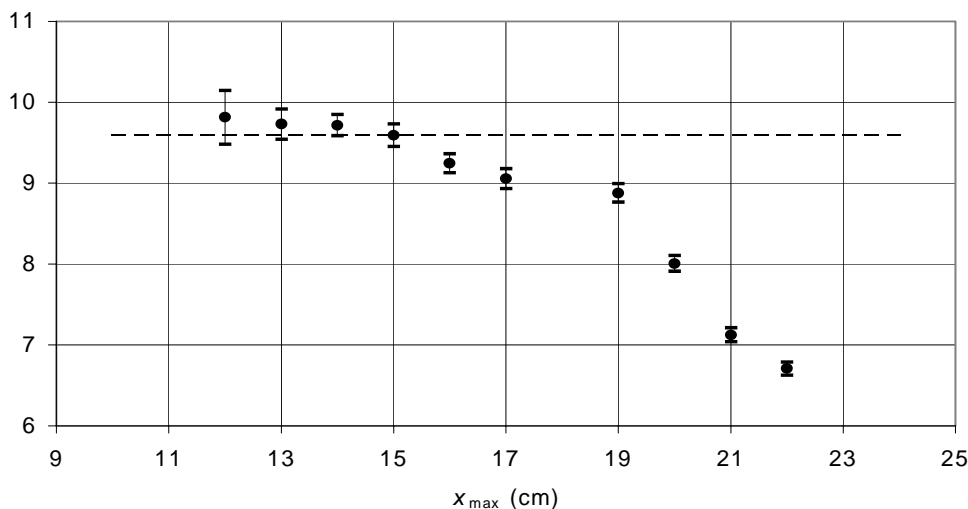
ahol  $J_0$  a nulladrendű Bessel-függvény, amelyet folytonos görbével be is rajzoltunk az ábrára. Látható, hogy körülbelül 15 cm-nél nagyobb  $x_i$  értékekre ez a függvény nem írja le a méréseket, hiszen a mért pontok 16 cm után emelkedni kezdenek, viszont a Bessel-függvény szigorúan monoton csökkenő. Azt persze nem tudjuk, hol van az a határ, amelynél kisebb  $x_i$  értékekre (9.2) fennáll, a probléma éppen ennek a megkeresése. Tekintve, hogy (9.2) az elegendően kis  $x_i$  értékekre csak aszimptotikusan teljessül, a keresett tartományt *aszimptotikus tartománynak* nevezzük.



9.1. ábra. Példa a (9.1) relációra

Az aszimptotikus tartomány keresésére általánosan elterjedt módszer a *pontelhagyás módszere*, amely abban áll, hogy az illesztést többször megismételjük úgy, hogy fokozatosan elhagyjuk azokat a pontokat, ahol sejtésünk szerint fennáll a (9.1) reláció. Mindaddig, amíg az illesztésben van olyan pont, amelyre (9.1) érvényes, az illesztett paraméterekre torzított becslést kapunk, és a torzítás mértéke függ attól, hány ilyen

pont van. Miután azonban az ilyen pontokat mind elhagytuk, a becült paraméterek torzítatlanok lesznek, tehát várható értékük azonos lesz, legfeljebb szórásuk fog növekedni, hiszen a pontok elhagyása információvesztést jelent, ami a szórás növekedésében jut kifejezésre. A pontelhagyásos módszer szerint az aszimptotikus tartomány keresése így annak a határnak a keresését jelenti, amelytől kezdve a becült paraméterek várható értéke azonos.



9.2. ábra. A aszimptotikus tartomány keresése a pontelhagyás módszerével

A módszert a 9.2. ábrán világítjuk meg. A grafikonon a (9.2) függvény  $a_2$  paraméterét ábrázoltuk  $x_{\max}$  függvényében. Mindegyik illesztésben figyelembe vettük a 9.1. ábra mindazon pontjait, amelyekre  $x_i \leq x_{\max}$ . Az első illesztésben  $x_{\max} = 22$  cm, majd fokozatosan csökkentettük 1 cm-rel. Mindegyik lépésben több pontot hagyunk el, mint az előzőben. Mint fentebb mondtuk, a szórások eközben monoton nőnek. Az  $a_2$  paraméter becült értékei pedig kezdetben nőnek, majd lassan stabilizálódnak. Az  $x_{\max} = 22$  cm, 21 cm, 20 cm és 19 cm-nél végzett illesztések megítélése nem jelent problémát: ezek majdnem biztosan tartalmazznak még az aszimptotikus tartományon kívüli pontokat. Az  $x_{\max} = 17$  cm-nél végzett illesztéstől kezdve azonban már nem lehetünk ilyen biztosak a dolgunkban. Az ábra szerint az  $x_{\max} = 12$  cm, 13 cm és 14 cm-nél végzett illesztések eredményei között nyilvánvalóan nincs szignifikáns különbség. A többire vonatkozóan ugyanez már nem evidens, de az ellenkezője sem az. Például az  $x_{\max} = 12$  cm-hez tartozó illesztett paraméter szórása már olyan nagy, hogy láthatóan nem tér el szignifikánsan az  $x_{\max} = 16$  cm-hez tartozó illesztett paramétertől. Ezeket a megállapításokat csak sejtés alapján tehetjük, hiszen nyilvánvaló, hogy az egymás után kapott paraméterbecslések között erős korreláció van, tehát két érték közötti különbség szignifikáns voltát nem olyan egyszerű eldönteni (lásd a “Mért mennyiségek egyenlősége” című részt az 5.2. alfejezetben).

A 9.2. ábrán mutatott helyzet az egyszerűbbek közé tartozik, mert a kapott paraméterek az első lépésekben határozottan emelkednek, majd egy bizonyos lépéstől kezdve szemmel is láthatóan stabilizálódnak. Nem szokott ez mindig így kijönni, vannak nehezebben áttekinthető esetek is. Mindenképpen beláthatjuk, hogy valamilyen statisztikai próbára van szükségünk ahhoz, hogy az aszimptotikus tartományt megnyugtató módon megtaláljuk, illetve kimutassuk, hogy nincs ilyen tartomány. A jelen fejezet célja egy, a gyakorlatban jól bevált próba ismertetése. A 9.2. ábrára berajzolt szaggatott vonal azt az értéket jelzi, amelyet ezzel a próbával kaptunk. Megjegyezzük, hogy – a kiszóró pontok kereséséhez hasonlóan – két próba egymást követő alkalmazására lesz szükség, de ennek most más oka van, mint a kiszóró pontok esetében.

## \*9.2. Definíciók és jelölések

Tudjuk, hogy az  $f(x, \mathbf{a})$  függvény csak egy  $x \in X_\infty$  tartományban (az ún. *aszimptotikus tartományban*) írja le jó közelítéssel a mért  $\xi_i$ -k várható értékét. A pontelhagyásos módszer értelmében választunk  $K$  tartományt

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_l \supset \dots \supset X_K, \quad (9.3a)$$

és reméljük, hogy van köztük olyan, amelyre  $X_\infty \supset X_l$ . (9.3a)-ból következik, hogy ez minden további tartományra is igaz. Jelöljük az  $X_l$ -re vonatkozóan becsült paramétervektort  $\tilde{\mathbf{a}}_l$ -lel. További jelölések (vö. 9.3. ábra):

$$Q_l = \sum_{i \in I_l} w_i (\xi_i - f(x_i, \tilde{\mathbf{a}}_l))^2, \quad (9.4)$$

ahol  $I_l$  az  $X_l$ -tartománynak megfelelő  $i$  indexek halmaza:

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_l \supset \dots \supset I_K. \quad (9.3b)$$

$\sigma^2$ -nek az  $l$ -edik lépésben kapott becslése

$$s_l^2 = \frac{Q_l}{n_l - m}; \quad (9.5)$$

továbbá

$n_l$ : az  $I_l$ -hez tartozó mérési pontok száma;

$\bar{\xi}_l$ : a  $\bar{\xi}$  vektornak az a vetülete, amelyben csak az  $I_l$ -hez tartozó  $i$  indexek szerepelnek;

$$\Delta \mathbf{a}_l = \tilde{\mathbf{a}}_l - \mathbf{a};$$

$\mathbf{F}_l$ : az  $\mathbf{F}$  mátrixnak az az almátrixa, amelyben csak az  $I_l$ -hez tartozó  $i$  indexek szerepelnek;

$\mathbf{W}_l$ : a  $\mathbf{W}$  mátrixnak az az almátrixa, amelyben csak az  $I_l$ -hez tartozó  $i$  indexek szerepelnek;

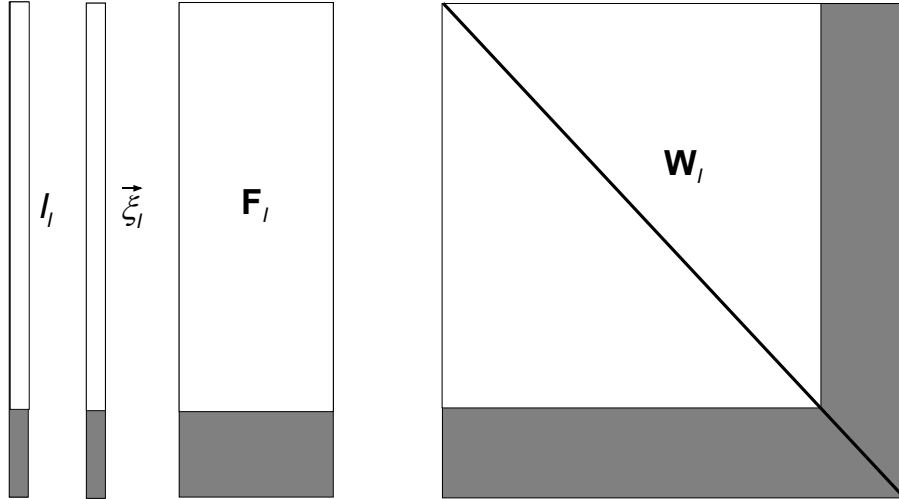
$$\mathbf{R}_l = \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l \mathbf{F}_l. \quad (9.6)$$

Az ellenőrzendő hipotézis:

$$H_0: \text{létezik olyan } l, \text{ amelyre } \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{a}}_l) = \mathbf{a} \quad (9.7a)$$

és

$$\mathbf{M}(Q_l) = \sigma^2 (n_l - m). \quad (9.7b)$$



9.3. ábra. A definíciókban szereplő vektorok és mátrixok sematikus ábrázolása. A szürke tartomány az eredeti mátrixoknak, a fehér pedig az  $l$ -edik lépésben szereplő csökkentett méretűeknek felel meg. A  $\mathbf{W}_l$  mátrixban csak a bejelölt átló mentén vannak zérustól különböző elemek

Az  $l$ -edik lépésben végrehajtott illesztés a következő eredményeket adja. Felteszünk, hogy  $H_0$  igaz az  $l$ -edik lépésre. Ekkor

$$\tilde{\mathbf{y}}_l = f(x_l, \tilde{\mathbf{a}}_l) = f(x_l, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^m F_{lk} \Delta a_{lk}, \quad i \in I_l,$$

amit vektoralakba írva a

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}}_l = \tilde{\mathbf{y}}_l - \mathbf{M}(\tilde{\xi}_l) = \mathbf{F}_l \Delta \mathbf{a}_l$$

képlet adódik. (9.4)-ben a

$$\tilde{\xi}_l - \tilde{\mathbf{y}}_l = \Delta \tilde{\xi}_l - \mathbf{F}_l \Delta \mathbf{a}_l$$

vektor komponenseit emeljük négyzetre, vagyis

$$\begin{aligned} Q_l &= (\tilde{\xi}_l - \tilde{\mathbf{y}}_l)^T \mathbf{W}_l (\tilde{\xi}_l - \tilde{\mathbf{y}}_l) = \\ &= (\Delta \tilde{\xi}_l - \mathbf{F}_l \Delta \mathbf{a}_l)^T \mathbf{W}_l (\Delta \tilde{\xi}_l - \mathbf{F}_l \Delta \mathbf{a}_l). \end{aligned}$$

Közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a következő átalakítás helyességét:

$$\begin{aligned} Q_l &= \Delta \tilde{\xi}_l^T (\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_l \mathbf{F}_l \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l) \Delta \tilde{\xi}_l + \\ &+ (\Delta \tilde{\xi}_l^T \mathbf{W}_l \mathbf{F}_l \mathbf{R}_l^{-1} - \Delta \mathbf{a}_l^T) \mathbf{R}_l (\mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l \Delta \tilde{\xi}_l - \Delta \mathbf{a}_l). \end{aligned}$$

Mivel mindkét tag pozitív definit, ez akkor veszi fel a minimumát, amikor

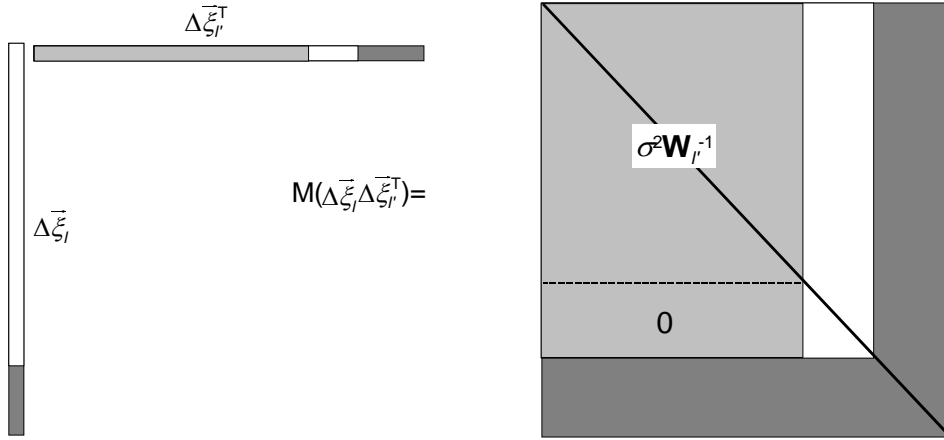
$$\Delta \mathbf{a}_l = \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l \Delta \tilde{\xi}_l, \quad (9.8)$$

és a minimum értéke

$$Q_l = \Delta \tilde{\xi}_l^T (\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_l \mathbf{F}_l \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l) \Delta \tilde{\xi}_l.$$

Ezeket a képleteket korábban más úton már levezettük, lásd például a (6.12b) képletet. A 6.2. TÉTEL levezetését az  $I_l$  halmazra alkalmazva kapjuk, hogy

$$Q_l = \sigma^2 \chi_{n_l - m}^2. \quad (9.9)$$



9.4. ábra. Az  $M(\Delta \bar{\xi}_l \Delta \bar{\xi}_l^T)$  várható érték sematikus ábrázolása

### \*9.3. Kovariancia az $l$ -edik és az $l'$ -edik lépés között

Mivel a pontelhagyás módszerében az egymást követő lépésekben kapott paraméterbecslések azonosságát vagy eltéréseit vizsgáljuk, szükségünk van az egyes lépésekben becsült paraméterek közötti kovarianciára. Ennek kiszámításában a (9.8) képletből indulunk ki, amelynek alapján

$$M(\Delta \mathbf{a}_l \Delta \mathbf{a}_{l'}^T) = \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l M(\Delta \bar{\xi}_l \Delta \bar{\xi}_{l'}^T) \mathbf{W}_{l'} \mathbf{F}_{l'} \mathbf{R}_{l'}^{-1}.$$

Először a jobb oldalon szereplő várható értéket számítjuk ki. Ezt a 9.4. ábrán szemléltetjük. A  $\Delta \bar{\xi}_l$  vektort fehér színnel,  $\Delta \bar{\xi}_{l'}^T$ -et pedig világosszürkével ábrázoljuk a baloldali rajzon. A kettő diadikus szorzata olyan mátrix, amelyben a sorok száma az  $I_l$ , az oszlopok száma pedig az  $I_{l'}$  indexhalmaz elemeinek a számával egyezik meg. A mátrix várható értéke a 9.4. ábra jobboldali rajzán világosszürkével ábrázolt mátrix, amelynek minden eleme zérus kivéve a berajzolt átlónak a szaggatott vonal feletti részét, ahol a megfelelő mérések szórásnégyzetei állnak:

$$\left[ M(\Delta \bar{\xi}_l \Delta \bar{\xi}_{l'}^T) \right]_{ii'} = \delta_{ii'} D^2(\xi_{l'}) = \delta_{ii'} \frac{\sigma^2}{w_{l'}},$$

ahol

$$i \in I_l \quad \text{és} \quad i' \in I_{l'}.$$

Ebből következik, hogy a világosszürkével jelölt mátrixnak a szaggatott vonal feletti blokkja  $\sigma^2 \mathbf{W}_{l'}^{-1}$ . Amikor a mátrixot  $\mathbf{W}_{l'}$ -vel szorozzuk, ez a blokk átmegy az egységmátrix  $\sigma^2$ -szeresébe, vagyis



$$\mathbf{M}\left(\Delta\bar{\xi}_l\Delta\bar{\xi}_{l'}^T\right)\mathbf{W}_{l'}\mathbf{F}_{l'} = \begin{array}{|c|} \hline \sigma^2\mathbf{F}_{l'} \\ \hline \mathbf{O} \\ \hline \end{array} \quad (9.10a)$$

(Kihasználtuk, hogy  $I_{l'} \subset I_l$ .) Ezt a mátrixot kell balról  $\mathbf{F}_l^T\mathbf{W}_l$ -vel szoroznunk. Az utóbbit a következőképpen ábrázoljuk:

$$\mathbf{F}_l^T\mathbf{W}_l = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{F}_{l'}^T\mathbf{W}_{l'} & \text{fekete} \\ \hline \end{array} \quad (9.10b)$$

Itt a feketére színezett almatrix az  $\mathbf{F}_l^T\mathbf{W}_l$  mátrixnak azokat az oszlopait tartalmazza, amelyek  $i$  indexe az  $I_l - I_{l'}$  halmazba esik. Az itt található elemek a (9.10a) képletben szereplő nullákkal szorzódnak, tehát értékük nem játszik szerepet. Ezután már könnyen felírható a (9.10a) és (9.10b) mátrixok szorzata:

$$\mathbf{F}_l^T\mathbf{W}_l\mathbf{M}\left(\Delta\bar{\xi}_l\Delta\bar{\xi}_{l'}^T\right)\mathbf{W}_{l'}\mathbf{F}_{l'} = \sigma^2\mathbf{F}_{l'}^T\mathbf{W}_{l'}\mathbf{F}_{l'} = \sigma^2\mathbf{R}_{l'}. \quad (9.10c)$$

Végeredményben tehát azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}\left(\Delta\mathbf{a}_l\Delta\mathbf{a}_{l'}^T\right) = \sigma^2\mathbf{R}_l^{-1}\mathbf{R}_{l'}\mathbf{R}_{l'}^{-1} = \sigma^2\mathbf{R}_l^{-1}.$$

Ezt az első látásra meghökkentő eredményt tétel formájában is kimondjuk:

9.1 TÉTEL. Ha  $I_{l'} \subset I_l$ , akkor az ezeknek az intervallumoknak megfelelő illesztésekben becsült paraméterek kovarianciamátrixa

$$\mathbf{M}\left(\Delta\mathbf{a}_l\Delta\mathbf{a}_{l'}^T\right) = \sigma^2\mathbf{R}_l^{-1}. \quad (9.11)$$

Ez nagyon erős korrelációt jelent. (9.11)-ből ugyanis az következik, hogy bármelyik illesztett  $a_k$  paraméternek ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) az  $l$  és  $l'$  indexű illesztésekben becsült értékei közötti kovariancia az  $I_l$  intervallumban kapott érték szórásnégyzete:

$$\text{cov}(\tilde{a}_{lk}, \tilde{a}_{l'k}) = \sigma^2\left[\mathbf{R}_l^{-1}\right]_{kk} = D^2(\tilde{a}_{lk}). \quad (9.12)$$

Ebből egyszerűen igazolhatjuk azt az állítást, amelyet a 9.1. alfejezetben csak heurisztikusan sejtettünk:

9.2. TÉTEL. Ha  $I_{l'} \subset I_l$ , akkor az ezeknek az intervallumoknak megfelelő illesztésekben becsült paraméterek szórásai közül az előbbié a nagyobb:

$$D(\tilde{a}_{l'k}) \geq D(\tilde{a}_{lk}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (9.13)$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $I_{l'} = I_l$ .

A bizonyításhoz a Schwarz-féle egyenlőtlenségből (3.5. TÉTEL) indulunk ki. Ha ezt a (9.12) képletben adott kovarianciára alkalmazzuk, akkor

$$D(\tilde{a}_{lk}) \cdot D(\tilde{a}_{l'k}) \geq |\text{cov}(\tilde{a}_{lk}, \tilde{a}_{l'k})| = D^2(\tilde{a}_{lk}),$$

amiből következik (9.13). A 3.5. TÉTEL szerint itt csak akkor állhat egyenlőség, amikor  $\tilde{a}_{lk} = \tilde{a}_{l'k}$ , aminek a feltétele pedig  $I_{l'} = I_l$ .

A gyakorlatban bármelyik illesztett paraméter becsült értékeinek az azonosságát vizsgálhatjuk, és a tapasztalat szerint mindegyik esetben ugyanazt az aszimptotikus tartományt kapjuk eredményül. Ezért elég az egyik paramétert vizsgálni. Mindegyik illesztőfüggvény paramétereinek között van egy olyan, amely fizikailag a legérdekesebb. Legyen ez az, amelyiknek a becsült értékeit vizsgáljuk. Az egyszerűség kedvéért ezt  $p_l$ -lel jelöljük. Ha ennek az indexe  $k$ , akkor

$$\text{cov}(p_l, p_{l'}) = \sigma^2 [\mathbf{R}_l^{-1}]_{kk} = \sigma^2 c_l^2,$$

ha  $l \leq l'$  (vagyis  $I_{l'} \subset I_l$ ).

A 9.1 TÉTEL szerint a  $p_1, p_2, \dots, p_K$  valószínűségi változók  $\sigma^2 \mathbf{C}$  kovarianciamátrixát a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1^2 & c_1^2 & \dots & c_1^2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_2^2 & \dots & c_2^2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & \dots & c_3^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & \dots & c_K^2 \end{bmatrix}$$

alakban írhatjuk fel.

#### \*9.4. $p_0$ becslése

A (9.7) alatti  $H_0$  hipotézis helyett a következő, szigorúbb hipotézist fogjuk vizsgálni:

$$H_1: M(p_l) = p_0, \quad l = 1, 2, \dots, K. \quad (9.14)$$

Ha ez igaz, akkor a  $p_1, p_2, \dots, p_K$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(p_1, p_2, \dots, p_K) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{K/2} \sqrt{\det \mathbf{C}}} \exp\left\{-\frac{S}{2\sigma^2}\right\},$$

ahol

$$S = \sum_{l=1}^K \sum_{l'=1}^K \omega_{ll'} (p_l - p_0)(p_{l'} - p_0), \quad \omega_{ll'} = [\mathbf{C}^{-1}]_{ll'}. \quad (9.15)$$

$p_0$  becslésére a maximális valószínűség módszerét használjuk: úgy választjuk meg, hogy a sűrűségfüggvény maximális, vagyis  $S$  minimális legyen.

9.3. TÉTEL.  $S$  akkor minimális, ha  $\tilde{p}_0 = p_1$ , és ekkor

$$S_1 = S_{\min} = \sum_{l=1}^{K-1} \frac{(p_{l+1} - p_l)^2}{c_{l+1}^2 - c_l^2}. \quad (9.16)$$

A  $H_1$  ellenőrzésére szolgáló statisztikai próba részben ezen a tételeen alapul.

A bizonyítás érdekében bevezetjük be az

$$u_l = p_l - p_0, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

jelöléseket. Ha ezeket az  $\mathbf{u}$  vektor komponenseinek tekintjük, akkor

$$S = \mathbf{u}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}.$$

Először kiszámítjuk a

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}$$

vektort, amely a

$$\mathbf{Cz} = \mathbf{u}$$

egyenlet megoldása. A  $\mathbf{C}$  mátrix fenti alakját figyelembe véve ennek egyes egyenletei a következők:

$k > 1$  esetében:

$$\sum_{l=1}^{k-1} c_l^2 z_l + c_k^2 \sum_{l=k}^K z_l = u_k. \quad (9.17a)$$

$k = 1$  esetében:

$$c_1^2 \sum_{l=1}^K z_l = u_1. \quad (9.17b)$$

Írjuk fel a (9.17a) egyenletet  $k$  helyett  $(k-1)$ -re, és vonjuk ki a két egyenletet egymásból. Rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l=k}^K z_l = \frac{u_k - u_{k-1}}{c_k^2 - c_{k-1}^2}, \quad k > 1 \quad (9.17c)$$

és (9.17b) alapján pedig

$$\sum_{l=1}^K z_l = \frac{u_1}{c_1^2}.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} S = \mathbf{u}^T \mathbf{z} &= \sum_{k=1}^K u_k z_k = u_K z_K + \sum_{k=1}^{K-1} u_k \left\{ \sum_{l=k}^K z_l - \sum_{l=k+1}^K z_l \right\} = \\ &= u_K z_K + u_1 \sum_{l=1}^K z_l + \sum_{k=2}^{K-1} u_k \sum_{l=k}^K z_l - \sum_{k=1}^{K-1} u_k \sum_{l=k+1}^K z_l = \\ &= u_1 \sum_{l=1}^K z_l + \sum_{k=2}^K u_k \sum_{l=k}^K z_l - \sum_{k=1}^{K-1} u_k \sum_{l=k+1}^K z_l = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_1 \sum_{l=1}^K z_l + \sum_{k=1}^{K-1} u_{k+1} \sum_{l=k+1}^K z_l - \sum_{k=1}^{K-1} u_k \sum_{l=k+1}^K z_l = \\
&= u_1 \sum_{l=1}^K z_l + \sum_{k=1}^{K-1} (u_{k+1} - u_k) \sum_{l=k+1}^K z_l = \frac{u_1^2}{c_1^2} + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{c_{k+1}^2 - c_k^2} = \\
&= \frac{(p_1 - p_0)^2}{c_1^2} + \sum_{l=1}^{K-1} \frac{(p_{l+1} - p_l)^2}{c_{l+1}^2 - c_l^2}.
\end{aligned}$$

A második tagban álló összeg független  $p_0$ -tól. Az első tag mindig pozitív kivéve, ha

$$\tilde{p}_0 = p_1.$$

Ennélfogva  $p_0$  becslése  $p_1$  a maximális valószínűség elve szerint. Ezért használtuk  $p$  felett a spanyol ékezetet ( $\sim$ ). Ezzel a tételt igazoltuk.

A  $H_1$  hipotézis ellenőrzésére szolgáló próbához még egy tételre van szükségünk:

9.4. TÉTEL. Ha igaz a  $H_1$  hipotézis, akkor a  $\tilde{p}_0 = p_1$  becslés torzítatlan, továbbá

$$S_1 = \sigma^2 \chi_{K-1}^2. \quad (9.18)$$

A tételnek a becslés torzítatlanságára vonatkozó része triviális:

$$M(\tilde{p}_0) = M(p_1) = p_0.$$

A  $\chi^2$ -eloszlásra vonatkozó állítást három lépésben látjuk be.

a) A (9.16) alatti összegben minden tag 0 várható értékű Gauss-eloszlású valószínűségi változó négyzete, ugyanis

$$M(p_{l+1} - p_l) = M(p_{l+1}) - M(p_l) = p_0 - p_0 = 0.$$

b) Mindegyik tag várható értéke  $\sigma^2$ , hiszen

$$\begin{aligned}
M\{(p_{l+1} - p_l)^2\} &= M\{[(p_{l+1} - p_0) - (p_l - p_0)]^2\} = \\
&= D^2(p_{l+1}) + D^2(p_l) - 2 \operatorname{cov}(p_{l+1}, p_l) = \sigma^2(c_{l+1}^2 - c_l^2).
\end{aligned}$$

c)  $l < l'$  esetén a különböző tagok kovarianciája 0, ami Gauss-eloszlás esetében függetlenséget jelent:

$$\begin{aligned}
M[(p_{l+1} - p_l)(p_{l'+1} - p_{l'})] &= \operatorname{cov}(p_{l+1}, p_{l'+1}) - \operatorname{cov}(p_{l+1}, p_{l'}) - \\
&- \operatorname{cov}(p_l, p_{l'+1}) + \operatorname{cov}(p_l, p_{l'}) = \sigma^2(c_{l+1}^2 - c_{l'+1}^2 - c_l^2 + c_{l'}^2) = 0.
\end{aligned}$$

Így tehát  $S_1$  valóban  $(L - 1)$  darab független, zérus várható értékű és  $\sigma$  szórású, Gauss-eloszlású valószínűségi változó összege. Ezzel a tételt beláttuk.

### \*9.5. $\chi^2$ - vagy F-próba $H_1$ vizsgálatára

A  $H_1$  hipotézis vizsgálatában két esetet különböztetünk meg:  $\sigma^2$  ismert, illetve  $\sigma^2$  nem ismert. Az előbbi esetben egy  $\chi^2$ -próbát fogalmazzunk meg, az utóbbiban pedig egy F-próbát.

### $\chi^2$ -próba, amikor $\sigma^2$ ismert

Ha  $\sigma^2$  ismert, akkor a fentiek alapján egy  $\chi^2$ -próbát lehet csinálni  $H_1$  vizsgálatára. Ebben az esetben a próba 9.4. TÉTELEN alapul. A 2. függelék táblázataiból kikeressük azt a  $\gamma$  kvantilist, amelyre

$$P\{\chi_n^2 \leq \gamma\} = 1 - \varepsilon,$$

és a  $H_1$  hipotézist elfogadjuk, amikor

$$S_1 < \sigma^2 \gamma \quad (9.19)$$

ahol  $S_1$ -et a (9.16) képlettel számítjuk ki.

### F-próba, amikor $\sigma^2$ nem ismert

Ha  $\sigma^2$  nem ismert (ami a gyakoribb eset), akkor  $\sigma^2$ -et becsülni kell. Ekkor egy F-próbát lehet definiálni a következő tétel alapján:

9.5. TÉTEL.  $Q_{l'}$  statisztikailag független  $p_l$ -től, ha  $l \leq l'$ .

A bizonyításhoz elég belátni, hogy  $l \leq l'$  esetén

$$\left(\Delta \bar{\xi}_{l'} - \mathbf{F}_{l'} \Delta \mathbf{a}_{l'}\right) \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{a}_l$$

független, hiszen  $Q_{l'}$  az előbbi függvénye. A két vektor kovarianciamátrixa

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\left(\Delta \mathbf{a}_l \left(\Delta \bar{\xi}_{l'}^T - \Delta \mathbf{a}_{l'}^T \mathbf{F}_{l'}^T\right)\right) = \\ & = \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T \mathbf{W}_l \mathbf{M}\left(\Delta \bar{\xi}_l \Delta \bar{\xi}_{l'}^T\right) \left(\mathbf{E}_{l'} - \mathbf{W}_{l'} \mathbf{F}_{l'} \mathbf{R}_{l'}^{-1} \mathbf{F}_{l'}^T\right). \end{aligned}$$

Itt alkalmaztuk a (9.8) képletet. Mivel most is  $I_{l'} \subset I_l$ , a 9.4. ábra és a (9.10b) egyenlet alapján írhatjuk:

$$\mathbf{F}_{l'}^T \mathbf{W}_l \mathbf{M}\left(\Delta \bar{\xi}_l \Delta \bar{\xi}_{l'}^T\right) = \sigma^2 \mathbf{F}_{l'}^T,$$

továbbá alkalmazhatjuk a (9.10c) képletet. Végeredményben a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\left(\Delta \mathbf{a}_l \left(\Delta \bar{\xi}_{l'}^T - \Delta \mathbf{a}_{l'}^T \mathbf{F}_{l'}^T\right)\right) = \\ & = \sigma^2 \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T - \sigma^2 \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{R}_{l'} \mathbf{R}_{l'}^{-1} \mathbf{F}_l^T = \sigma^2 \left(\mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T - \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{F}_l^T\right) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk.

A tétel alapján csak  $Q_K$  független  $S_1$ -től. Így tehát

$$\frac{S_1}{Q_K / (n_K - m)} = \frac{\chi_{K-1}^2}{\chi_{n_K - m}^2 / (n_K - m)} = (K - 1) f_{K-1, n_K - m}.$$

A kvantilist a következő egyenlettel definiáljuk:

$$P\{f_{K-1, n_K - m} < \gamma_f\} = 1 - \varepsilon_2.$$

Ebből kapjuk az F-próbát: a  $H_1$  hipotézist elfogadjuk, ha

$$\frac{S_1}{Q_K/(n_K - m)} < (K - 1)\gamma_f. \quad (9.20)$$

### \*9.6. Próbák sorozata

Ha a (9.19) vagy (9.20) próba eredménye pozitív, akkor – az adott konfidenciaszinten – az  $I_1$  tartomány aszimptotikus. Mi van, ha a próba eredménye negatív, hiszen ekkor az  $I_1$  tartomány nem aszimptotikus? Ezért bizonyára az  $(I_1 - I_2)$  tartományban levő nem aszimptotikus pontok tehetők felelőssé. Tehát a próbát meg kell ismételni az  $I_2$  tartományra vonatkozóan. Ha a próba ezután is negatív eredményre vezet, akkor az  $I_3$  tartományra vonatkozóan végezzük el, és így tovább, amíg végül pozitív eredményre nem jutunk. Valójában tehát a statisztikai próbák sorozatát kell végrehajtani. A (9.14) hipotézis helyett most a hipotézisek sorozatát kell definiálnunk:

$$H_k: \quad M(p_l) = p_0, \quad l = k, k+1, \dots, K, \quad (9.21)$$

( $k = 1, 2, \dots, K - 1$ ). A próbák sorozatának az alapja a fentiek általánosítása:

$$S_k = \sum_{l=k}^{K-1} \frac{(p_{l+1} - p_l)^2}{c_{l+1}^2 - c_l^2} = \sigma^2 \chi_{K-k}^2. \quad (9.22a)$$

Ezt használjuk, amikor  $\sigma^2$  ismert. Ellenkező esetben az F-próbák sorozatát hajtjuk végre, amelyek a

$$\frac{S_k}{Q_K/(n_K - m)} = \frac{\chi_{K-k}^2}{\chi_{n_K-m}^2/(n_K - m)} = (K - k)f_{K-k, n_K-m} \quad (9.22b)$$

statisztikákon alapulnak.

A próbák sorozata egy sor pozitív és negatív választ produkál. Nem lebecsülendő probléma, hogyan válasszuk ki ezek alapján az aszimptotikus tartományt. A sok lehetséges stratégia közül kettőt emelünk ki. Kezdetben a próbák többnyire csupa “nem” eredményt adnak. A döntési probléma csak akkor válik komollyá, amikor valamelyik próba eredményeként végre kijön egy “igen”. Legyen ennek a próbának az indexe  $k_1$ . Kétféleképpen gondolkodhatunk:

1. Mondhatjuk azt, hogy a  $k_1$ -edik lépés már az aszimptotikus tartomány indexe, tehát, ha valamelyik  $k > k_1$ -re a “nem” jön ki, akkor ez az elsőfajú hiba következménye, vagyis emiatt figyelmen kívül hagyjuk, és az  $I_{k_1}$  intervallumot fogadjuk el aszimptotikus tartománynak. Ezt a gondolkodást nevezhetjük “az első igen stratégiájá”-nak. Ez megengedő stratégia, mert nem nagyon törődik a másodfajú hibával.
2. Gondolkozhatunk azonban kevésbé megengedő módon is. Mondhatjuk, hogy a  $k_1$ -edik lépésben kijött “igen” lehetett a másodfajú hiba következménye, amit csak alátámaszt, ha valamelyik  $k > k_1$ -re a “nem” jön ki. Ezért csak olyan próbának “hiszünk”, amely után csupa “igen” következik. Ezt a gondolkodást nevezhetjük “az utolsó nem stratégiájá”-nak.

A két stratégia között csak a másodfajú hiba analízise alapján lehet dönteni (lásd alább).

A próbáknak ez a sorozata végeredményben megfelel a (9.7) képletekben definiált  $H_0$  hipotézis ellenőrzésének.

### \*9.7. $\varphi$ -próba

Az F-próba előtt meg kell győződni arról, hogy helyesen becsüljük a paraméterek szórását, pontosabban a  $c_l^2$  mennyiségeket. Ha ugyanis a paraméterek becsült értéke torzított, akkor ezek becslése is torzított lesz. Gyakran még az sem teljesül, hogy ezek monoton növekvő sorozatot alkossanak. Egy külön próba, a  $\varphi$ -próba szolgál arra, hogy megtaláljuk azt a  $k_2$  indexet, amelynek megfelelő lépésben becsült paraméterek biztosítják, hogy a  $c_l^2$  mennyiségek számítása közelítőleg torzítatlan becslést adjon.

Bizonyítható az alábbi két tétel:

9.6. TÉTEL. Fennáll a következő egyenlőség:

$$\text{cov}\left(\frac{Q_l}{n_l - m}, \frac{Q_{l'}}{n_{l'} - m}\right) = \frac{2\sigma^4}{n_l - m}, \quad l \leq l', \quad (9.23)$$

továbbá

9.7. TÉTEL. A

$$\frac{Q_l}{n_l - m} \quad \text{és} \quad \frac{Q_{l'+1}}{n_{l'+1} - m} - \frac{Q_{l'}}{n_{l'} - m}$$

valószínűségi változók korrelálatlanok, ha  $l < l'$ .

E két tétel bizonyítása hosszadalmas, ezért elhagyjuk. Megtalálható [3]-ban (1991). Ha a  $\chi^2$ -eloszlást Gauss-eloszlással közelítjük, belátható [3] a

9.8. TÉTEL.  $k = 1, 2, \dots, (K - 1)$ -re

$$T_k = \sum_{l=k}^{K-1} \frac{\left[ \frac{Q_{l+1}}{n_{l+1} - m} - \frac{Q_l}{n_l - m} \right]^2}{\frac{2}{n_{l+1} - m} - \frac{2}{n_l - m}} = \sigma^4 \chi_{K-k}^2, \quad (9.24)$$

továbbá a

$$\varphi_{K-k, n_k - m} = \frac{\sqrt{T_k / (K - k)}}{Q_k / (n_k - m)} = \frac{\chi_k / \sqrt{K - k}}{\chi_{n_k - m}^2 / (n_k - m)} \quad (9.25)$$

hányados számlálója és nevezője statisztikailag független egymástól.

Ennek a valószínűségi változónak a statisztikai jellemzői nem ismertek az irodalomban. Vizsgálata [3]-ban, kvantilisei pedig a 2. függelékben található meg. Ezekből ki lehet keresni az alábbi kvantilist:

$$P\left\{\varphi_{K-k, n_k - m} < \gamma_\varphi\right\} = 1 - \varepsilon_1. \quad (9.26)$$

Ezen alapul a  $\varphi$ -próba, amely az alábbi hipotézis ellenőrzésére szolgál:

$$H'_k: \quad M\left(\frac{Q_l}{n_l - m}\right) = \sigma^2, \quad l = k, k+1, \dots, K. \quad (9.27)$$

A  $\varphi$ -próba szerepét a fejezet elején mutatott példa révén mutatjuk be. Először a  $\varphi$ -próbát hajtjuk végre. Az eredmények a 9.1. táblázatban láthatók. A kvantiliseket a 2. függelék  $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozó táblázataiból vettük. Az első “igen” az 5. lépésben adódik. Mivel ennek a próbának csak kiegészítő szerepe van, itt elegendő “az első igen stratégiáját” alkalmazni, tehát az  $I_5$  intervallumot alkalmasnak tartjuk arra, hogy a becült paraméterek szórását az ebben a lépésben kapott paraméterértékek mellett számoljuk ki.

9.1. táblázat. A  $\varphi$ -próba eredményei a 9.1. ábrán látható példára

$k$	$Q_k / (n_k - m)$	$n_k - m$	$\varphi$	Kvantilis	Próba
1	60,21	32	2,825	1,735	nem
2	49,67	31	3,225	1,761	nem
3	27,58	29	4,238	1,804	nem
4	5,672	27	2,931	1,854	nem
5	3,663	26	18,97	1,898	igen
6	2,625	24	1,632	1,970	igen
7	1,815	19	2,097	2,142	igen
8	1,402	18	1,903	2,257	igen
9	1,624	15	2,132	2,532	igen
10	0,8617	11			

A becült paraméterek szórását újraszámoljuk az  $I_5$  intervallumra kapott paraméterértékek mellett. Így ezekre érvényes lesz a 9.2. TÉTEL, vagyis ezekkel képezhetjük az  $S_k$  mennyiségeket  $k = 1, 2, \dots, (K - 1)$ -re, és végrehajthatjuk a (9.22b) szerinti F-próbák sorozatát. Eredményük a 9.2. táblázatban látható. A kvantiliseket a 2. függelék  $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozó táblázataiból vettük ki. Az “utolsó nem stratégiája” alapján a  $k = 7$  lépéshez tartozó  $I_7$  intervallumot minősíthetjük aszimptotikusnak (95% konfidenciaszinten). A 9.2. táblázattal kapcsolatban megjegyezzük, hogy harmadik oszlopban levő szórások nem növekszenek monoton módon, ami ellentmondani látszik a 9.2. TÉTELnek. A dolognak az a magyarázata, hogy ezek a szórások a tétel szerint valóban növekvő  $c_k^2$ -ek és a 9.1. táblázatban levő  $Q_k / (n_k - m)$  tényezők szorzatából vont négyzetgyökök. Ezek a monotonitáshoz képest mutathatnak kis eltéréseket.

9.2. táblázat. Az F-próba eredményei a 9.1. ábrán látható példára

$k$	$\bar{a}_2$	Szórás	$(K - k)f$	Kvantilis	Próba
1	6,708	0,082	3693	26,07	nem
2	7,125	0,086	2577	23,58	nem
3	8,006	0,098	1050	21,09	nem
4	8,879	0,115	137,8	18,57	nem
5	9,055	0,123	71,55	16,02	nem
6	9,245	0,118	36,38	13,43	nem
7	9,593	0,138	9,202	10,76	igen
8	9,717	0,132	0,194	7,965	igen
9	9,730	0,185	0,174	4,844	igen
10	9,813	0,332			



### \*9.8. A másodfajú hiba

Az alábbiakban az  $\varepsilon$  konfidenciaszint megválasztásával foglalkozunk. Nyilván az az érdekünk, hogy  $\varepsilon$ -t minél kisebbre válasszuk, hiszen nagy  $\varepsilon$ -ra a végül elfogadott paraméterbecslés szórása túlságosan nagyra nő. Ennek azonban korlátot szab a másodfajú hiba. Mint általában, most is meg kell határoznunk azt az alternatív hipotézist, amellyel szemben ezt vizsgáljuk. A 9.2. ábrával kapcsolatban mondottakból, továbbá a 9.2. táblázatból látszik, hogy a nullhipotézis elfogadása vagy elvetése csak azokban a lépésekben jelent problémát, amelyeknek megfelelő  $I_l$  intervallumok közel vannak az aszimptotikus tartományhoz. Ezért alternatív hipotézisként azt tesszük fel, hogy egy kivételével mindegyik lépés aszimptotikus:

$$M(p_l) = p_0, \quad l > k, \quad (9.28a)$$

$$M(p_k) = p'_0 \neq p_0. \quad (9.28b)$$

(9.22a) alapján ezzel

$$S_k = \sum_{l=k}^{K-1} \zeta_l^2 = S_{k+1} + \zeta_k^2, \quad (9.29a)$$

ahol

$$\zeta_l = \frac{p_{l+1} - p_l}{\sqrt{c_{l+1}^2 - c_l^2}}. \quad (9.29b)$$

Az alternatív hipotézis szerint

$$M(\zeta_l) = 0, \quad l > k, \quad (9.30a)$$

$$M(\zeta_k) = \frac{p_0 - p'_0}{\sqrt{c_{k+1}^2 - c_k^2}} = h \neq 0, \quad (9.30b)$$

továbbá

$$D^2(\zeta_l) = 1 \quad (9.30c)$$

minden  $l$ -re.

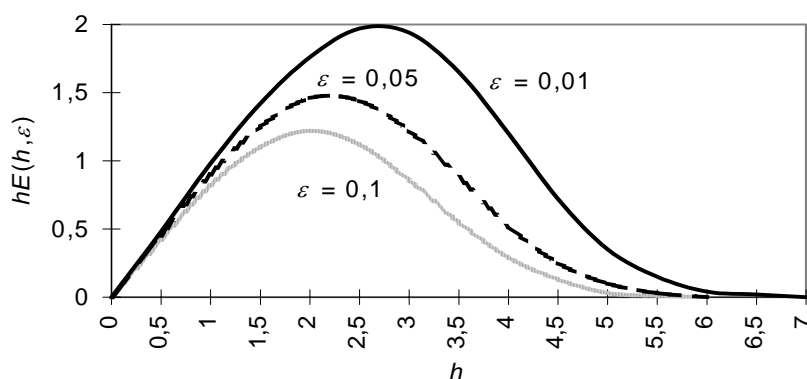
A vizsgálatban – az egyszerűség kedvéért – feltételezzük, hogy  $\sigma^2$ -et ismerjük, és értéke  $\sigma^2 = 1$ , vagyis a (9.19) próbát alkalmazzuk. A másodfajú hiba valószínűsége ekkor

$$\begin{aligned} E(h, \varepsilon) &= P\{S_k < \gamma_k\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P\{S_{k+1} < \gamma_k - x^2\} \exp\left[-\frac{(x-h)^2}{2}\right] dx, \end{aligned}$$

ugyanis ilyen valószínűséggel fogadja el a próba a valójában nem igaz  $H_k$  hipotézist. Az integrál alatti valószínűséget a  $\chi^2$ -eloszlás alapján lehet számolni.  $(1 - E)$  a próba ereje, annak a valószínűsége, hogy a  $H_k$  hipotézist a próba elveti. Tehát a próba  $E$ , illetve  $(1 - E)$  valószínűséggel választ egy rendre  $p'_0$  és  $p_0$  várható értékű paramétert. Így a kiválasztott érték várható értéke

$$\begin{aligned} p'_0 E(h, \varepsilon) + p_0 [1 - E(h, \varepsilon)] &= p_0 + (p'_0 - p_0) E(h, \varepsilon) = \\ &= p_0 - h E(h, \varepsilon) \sqrt{c_{k+1}^2 - c_k^2}. \end{aligned}$$

Ennek  $p_0$ -tól való eltérését tulajdonképpen már tekinthetnénk a próba *szisztematikus hibájának*. Két dolgot azonban figyelembe kell még venni. Először is a  $hE$  szorzat erősen függ  $h$ -tól, mint a 9.5. ábrán látható. Kis  $h$ -ra ugyan nagy az  $E$  valószínűség, de az ez által okozott hiba várható értéke kicsi. Nagy  $h$  esetén a hiba nagy, de  $E$  kicsi, tehát várható értékben ennek sem jelentős a hatása. Minden  $\varepsilon$ -ra van egy közbenső  $h$ -érték, ahol a hiba várható értéke maximális. Ha ezt a maximumot tekintjük szisztematikus hibának, akkor a tényleges hiba  $h$  semmilyen értéke mellett sem lehet ennél nagyobb. A 9.5. ábráról leolvasható, hogy ez a maximum  $\varepsilon$ -nak monoton csökkenő függvénye. Gyengén függ  $(K - k)$ -től is [3].



9.5. ábra. A  $hE(h, \varepsilon)$  hiba függése a (9.30b)-ben definiált  $h$ -tól

A másik dolog, amit figyelembe kell venni, az alkalmazott stratégia. Legyen  $P_{K-k}$  annak a valószínűsége, hogy a  $k$ -adik lépést ténylegesen elfogadjuk, feltéve, hogy a próba ezt választotta ki. Az “első igen stratégiája” mellett nyilván  $P_{K-k} = 1$ . Ugyanakkor az “utolsó nem stratégiája” mellett általában  $P_{K-k} < 1$ . Ennek az az oka, hogy e mellett a stratégia mellett akkor fogadjuk el a  $k$ -adik lépést, ha az  $l > k$  lépésekre csupa “igen” jön ki. Ennek  $P_{K-k}$  valószínűsége pedig lehet kisebb 1-nél. Legegyszerűbb Monte Carlo módszerrel kiszámítani: a leírt döntési folyamatot számítógéppel szimulálva nagy pontossággal becsülhetjük a  $P_{K-k}$  valószínűséget. Végeredményben tehát a

$$\delta p_0 = P_{K-k} \sqrt{c_{k+1}^2 - c_k^2} \cdot \max_h [hE(h, \varepsilon)] \quad (9.31)$$

szorzatot tekintjük az alkalmazott statisztikai próba szisztematikus hibájának. Annál kisebb, minél nagyobbra választjuk  $\varepsilon$ -t.

Van azonban egy másik szempont is: a *szórás*. Minél nagyobb  $\varepsilon$ , annál nagyobb a végeredményben kiválasztott lépéshez tartozó szórás. Ez az elsőfajú hiba következménye. A jelen alfejezet befejezésekképpen ezt vizsgáljuk meg. Legyen  $P\{I_l\}$  annak a valószínűsége, hogy a próbasorozat az  $I_l$  intervallumot nyilvánítja aszimptotikusnak – feltéve, hogy  $H_k$  igaz. Két eset lehetséges: a próbasorozat mindegyik  $I_l$  intervallumot elveti, vagy valamelyiket kiválasztja. Az előbbi esetben az *egész mérés* elvetendő. Ennek a valószínűsége általában kicsi, de  $\varepsilon$  nagy értékeire az “utolsó nem stratégiája” mellett néha előfordul. Például  $\varepsilon = 0,1$  mellett körülbelül 5% ennek a valószínűsége. Ez már önmagában is arra utal, hogy  $\varepsilon$ -t nem célszerű nagyra választani. Feltéve, hogy ez a kedvezőtlen eset nem következik be, a végeredményben kiválasztott  $I_l$  intervallumhoz tartozó paraméterbecslés szórásnégyzetének átlagos értéke<sup>80</sup>

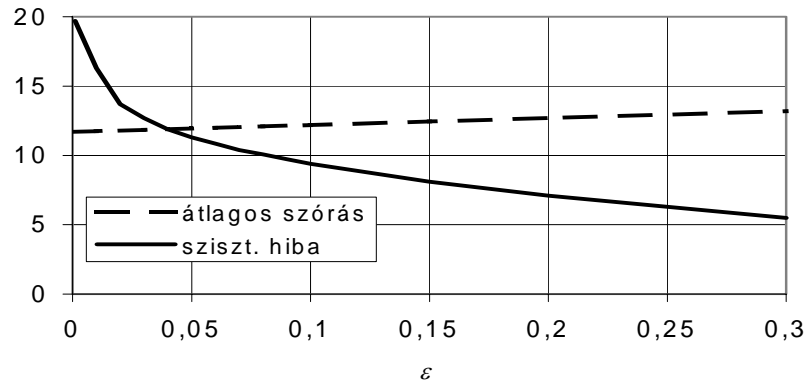
<sup>80</sup> Az átlagot itt a következőképpen értjük. Az egész mérést (gondolatban) végtelen sokszor megismételjük azonos körülmények között, majd a fent leírt módon mindegyiket külön kiértékeljük. A próba

$$\overline{D^2(\tilde{p}_0)} = \frac{\sum_{l=k}^K P\{I_l\} D^2(p_l)}{\sum_{l=k}^K P\{I_l\}}. \quad (9.32)$$

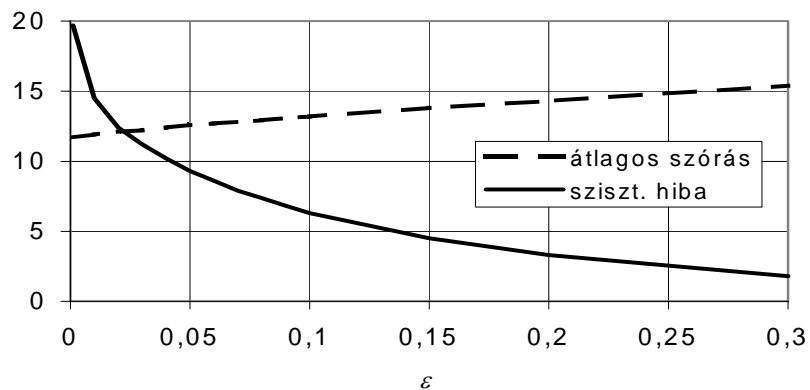
Ennek az átlagnak a négyzetgyökét nevezzük a továbbiakban *átlagos szórás*nak. A két stratégiára a 9.6a. és 9.6b. ábrákon hasonlítjuk ezt össze a (9.31) alatt definiált szisztematikus hibával.<sup>81</sup> Az ábrákról a következő tanulságokat szűrhetjük le:

- Ahogy vártuk, a szisztematikus hiba  $\varepsilon$ -nal gyorsabban csökken az “utolsó nem stratégiájára”, mint a másokra.
- Az átlagos szórás *lassan* emelkedik  $\varepsilon$ -nal, tehát az elsőfajú hiba hatása nem növeli meg jelentősen a szórást.
- Mindkét stratégiára a szisztematikus hiba egy  $\varepsilon < 0,05$  konfidenciaszintnél kisebbé válik, mint az átlagos szórás, és utána lassan csökken.

Ezekből következik, hogy  $\varepsilon$  értékét 0,05 és 0,1 között célszerű megválasztani, mert ez biztosítja, hogy a szisztematikus hiba kisebb lesz, mint az átlagos szórás.



9.6a. ábra. A szisztematikus hiba és az átlagos szórás összevetése. Az “első igen stratégiája”;  $K - k = 9$



9.6b. ábra. A szisztematikus hiba és az átlagos szórás összevetése. Az “utolsó nem stratégiája”;  $K - k = 9$

által kiválasztott lépéshez tartozó szórásnégyzeteket átlagoljuk. Ennek az átlagnak a határértéke (9.32), amikor az ismétlések száma tart a végtelenhez.

<sup>81</sup> Az ábrákon mutatott számok egy koszinusz-illesztésnek felelnek meg.

## IRODALOM

- [1] Ajánlott kézikönyvek:  
H. CRAMÉR, *Mathematical methods of statistics*, Princeton (1946)  
Denkinger Géza, *Valószínűség-számítás*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1978)  
Sh. Dowdy & S. Warden, *Statistics for Research*, John Wiley & Sons (1982)  
B. V. Gnyegyenko, A. J. Hincsin, *Bevezetés a valószínűség-számításba*, Művelt Nép Könyvkiadó, (1954)  
JÁNOSY LAJOS, *Theory and Practica of the Evaluation of Measurements*, Oxford University Press (1965) – létezik magyar és orosz nyelven is.  
Pál Lénárd, *A valószínűség-számítás és a statisztikai alapjai*, Akadémiai Kiadó (1995)  
JU. V. LINNYIK, *A legkisebb négyzetek módszere és a megfigyelések kiértékelésének matematikai-statisztikai alapjai*, Moszkva (1958) – oroszul és németül  
Reimann József, *Valószínűség-elmélet és matematikai statisztika mérnököknek*, Tankönyvkiadó (1992)  
D. J. Saville & G. R. Wood, *Statistical Methods: The Geometric Approach*, Springer Verlag New York, Inc. (1991)  
B. L. Van der Waerden, *Mathematische Statistik (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 87)*, Berlin–Göttingen–Heidelberg (1957)  
Vetier András, *Szemléletes mérték- és valószínűség-elmélet*, Tankönyvkiadó (1991)  
Vincze István, Varbanova Mária, *Nemparaméteres matematikai statisztika, elmélet és alkalmazások*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1993)  
Vincze István, *Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1975)
- [2] Kemény Sándor, Deák András, *Mérések tervezése és eredményeik kiértékelése*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1993)
- [3] Z. Szatmáry, *Data Evaluation Methods in Reacytor Physics. Theory of Program RFIT*, report KFKI–1977–43 (1977)  
Z. Szatmáry, *User’s Manual of Program RFIT*,  
Part 1. General Description (report KFKI–1991–13/G)  
Part 2. Parameter Estimation (report KFKI–1991–14/G)  
Part 3. The Data Files (report KFKI–1991–15/G)  
Part 4. Statistical Analysis (report KFKI–1991–16/G)
- [4] W. R. Thompson, *On a Criterion for Testing Outlying Observations and the Distribution of the Ratio of Deviation to Sample Standard Deviation*, *Annals of Math. Stat.* **6**, 214–219 (1935)  
E. S. Pearson and C. ChandraSekar, *The Efficiency of Statistical Tools and a Criterion for the Rejection of Outlying Observations*, *Biometrika*, **28**, 308–320 (1936)
- [5] Rózsa Pál, *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó (1764)
- [6] F. E. Grubbs, *Sample Criteria for Testing Outlying Observations in Samples*, *Technometrics*, Vol. 11, 1–21 (1969)  
J. R. Green and D. Margerison, *Statistical Treatment of Experimental Data*, Elsevier Scientific Publ. Comp. (1978)
- [7] R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Íphysik*, Leipzig, Deuticke (1931)  
T. W. Anderson and D. A. Darling, *Asymptotic Theory of Certain “Goodness of Fit” Criteria based on Stochastic Processes*, *Annals of Math. Statistics* **23**, 193 (1952)  
K. Sarkadi, *On Testing for Normality*, *Reports of the Research Institute for Mathematics V.A/3*, Budapest (1960)
- [8] Pierre, Giacomo (International Bureau of Weights and Measures), *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*, (1993)
- [9] *Fizika laboratóriumi gyakorlatok I.–V., egyetemi jegyzet*, BME (1998)

# 1. FÜGGELÉK. METROLÓGIAI KIFEJEZÉSEK

A *metrológia* a mérések tudománya. Tekintve, hogy a mérések kiértékelése évszázadokra nyúlik vissza, számos módszer és kifejezés terjedt el a gyakorlatban, közülük több elavult, eredeti definíciója elhomályosult, és egyre több zavar keletkezett. Ezért az ISO<sup>1</sup> vezetésével a világ hét metrológiai szervezete az 1990-es évek elején szabványosították az elnevezéseket és jelöléseket, pontosabbá tették a definíciókat. A [8] szógyűjtemény szerzője írja:

“A tudomány és a technika minden ágában gondosan meg kell válogatni az alkalmazott szókincset. Minden kifejezésnek ugyanazt kell jelentenie bárki is használja azt. Pontosán körülírt dolgot kell jelentenie, de ez a jelentés nem kerülhet ellentmondásba a mindennapi nyelvhasználattal. Ez különösen érvényes a metrológiában, ahol még egy járulékos nehézség is felmerül: minden mérést hiba terhel, amelyet azonban csak tökéletlenül ismerünk, így a metrológiai kifejezéseknek ki kell fejezniük ezt a bizonytalanságot is. Mi több, még a pontatlanságra is pontosan definiált kifejezést kell találnunk.”

A kialakult nemzetközi szabványokat Magyarországon is bevezették, így azok nálunk is kötelezők mindenki számára. Ennek a függeléknek a célja a legfontosabb fogalmak és elnevezések szótárszerű meghatározása. A metrológiai kifejezések és a valószínűség-elmélet, illetve a matematikai statisztika szókészlete és fogalomrendszere egymásnak többé-kevésbé megfeleltethető, de vannak eltérések is. Mindenesetre a szabványosítás csak a metrológiára korlátozódik.

Az alábbiakat áttanulmányozva látni fogjuk, hogy a kísérleti fizikusok szóhasználatában több tekintetben is eltér a szabványos metrológiai kifejezésektől. A fiatal generációnak már a szabványoknak megfelelő szókincset kell megtanulniuk, de az idősebb generációnak is fokozatosan át kell vennie azt.

## F1.1. Metrológiai kyszótár

Az alábbi táblázatban megnevezett fogalmakhoz megadjuk a [8] szótárban használt numerikus azonosítókat, ami remélhetőleg megkönnyíti az Olvasó számára a metrológiai szabványokban való eligazodást. A táblázat két utolsó sorában [8]-ból kimaradt kifejezések szerepelnek, így ezeknél hiányzik a számjel. A táblázathoz számos megjegyzést fűztünk.

Fogalom	Meghatározás
1.1. (Mérhető) mennyiség	Egy jelenségnek, testnek vagy anyagnak minőségileg elkülöníthető és mennyiségileg meghatározható jellemzője
1.9. Valódi érték <sup>1)</sup>	Egy adott mennyiség definíciójával összhangban levő érték
1.21. Számérték	Az a szám, amely a mértékegységgel együtt megadja egy mennyiség értékét
2.1. Mérés	Művelet sor egy mennyiség meghatározása céljából

<sup>1</sup> International Organization for Standardization, Nemzetközi Szabványügyi Szervezet.

2.7. Mért mennyiség	A mérés tárgyát képező mennyiség
3.1. Mért érték	Egy mért mennyiségnek mérés által szolgáltatott értéke
3.3. Korrigálatlan adat	Mért adat a szisztematikus hibára való korrekció előtt
3.4. Korrigált adat	Mért adat a szisztematikus hibára való korrekció végrehajtása után
3.5. Mérési pontosság <sup>2)</sup>	Egy mennyiség mért értéke és valódi értéke közötti egyezés szorossága
3.6. Megismételhetőség <sup>3)</sup>	Ha egy mennyiség mérését azonos körülmények mellett megismételjük, az eredményül kapott mért értékek közötti egyezés szorossága
3.7. Reprodukálhatóság <sup>4)</sup>	Ha egy mennyiség mérését változó körülmények mellett megismételjük, az eredményül kapott mért értékek közötti egyezés szorossága
3.8. Empirikus szórás <sup>5)</sup>	A (5.7) képlettel becsült $s$ mennyiség
3.9. Mérési bizonytalanság <sup>6)</sup>	A mérés eredményéhez kapcsolódó mennyiség, ami jellemzi a mért mennyiségnek józanul tulajdonítható értékek szórását
3.10. Mérési hiba <sup>7)</sup>	A mért érték és a valódi érték különbsége
3.12. Relatív hiba <sup>8)</sup>	A mérési hiba osztva a valódi értékkel
3.13. Véletlen hiba <sup>9)</sup>	Tegyük fel, hogy a mérést a megismételhetőség (6.6) feltételei között végtelen sokszor megismételjük. A véletlen hiba egy mért érték és a az ebből kapott átlag közötti különbség
3.14. Rendszeres (szisztematikus) hiba <sup>10)</sup>	Tegyük fel, hogy a mérést a megismételhető módon (6.6) végtelen sokszor megismételjük. A rendszeres hiba az ebből kapott átlag és a valódi érték közötti különbség
3.15. Korrekció	Egy nyers mért értékhez a rendszeres hiba ellensúlyozása céljából algebrai módon hozzáadott érték
3.16. Korrekciós tényező	Számérték, amellyel egy nyers mért értéket megszorozunk a rendszeres hiba ellensúlyozása céljából
Bizonytalanság A-típusú becslése <sup>11)</sup>	A mérési bizonytalanságnak a mért értékek statisztikai elemzésén alapuló becslése
Bizonytalanság B-típusú becslése <sup>12)</sup>	A mérési bizonytalanságnak az A-típusú becsléstől eltérő eszközökkel való becslése

1) Ezt kapnánk egy tökéletes mérés eredményeként. A valódi érték természetéből következik, hogy nem lehet meghatározni. A valódi érték függ a mennyiség definíciójától.

2) A pontosság kvalitatív fogalom. Helyette nem használható a "precizitás" kifejezés.

3) A megismételhetőség kvantitatívan is kifejezhető a mért értékek szórását jellemző mutatók segítségével.

4) Ahhoz, hogy a reprodukálhatóságra vonatkozó kijelentés egyértelmű legyen, meg kell adni azokat a feltételeket, amelyeket változtatunk. A reprodukálhatóság kvantitatívan is kifejezhető a mért értékek szórását jellemző mutatók segítségével.

5) Az  $s^2$  mennyiség az elméleti  $\sigma^2$  szórásnégyzet torzítatlan becslése.  $s/\sqrt{n}$  a  $\bar{\xi}$  mintaátlag szórásának a becslése. Ugyan nevezik néha a "mintaátlag standard hibájának" is, de ez helytelen és kerülendő.

6) Ez a mennyiség lehet például a szórás ( $s$ ) vagy a valamilyen  $\varepsilon$  konfidenciaszinthez tartozó konfidenciaintervallum felszélessége. A "mennyiségnek józanul tulajdonítható értékek" többnyire a mért értékek. A bizonytalanságnak több összetevője lehet: elsősorban az adott mérésből levezetett empirikus szórás, de további összetevőként megjelenhetnek a korábbi tapasztalatokból leszűrt eloszlásokhoz tartozó szórások is.

mennyiségnek józanul tulajdonítható értékek.

7) Mivel a valódi értéket nem ismerjük, nem ismerhetjük a mérési hibát sem. A gyakorlatban előfordul, hogy megegyezés alapján választanak valamilyen konvencionális valódi értéket, és ahhoz viszonyítják a mérési hibát. A "mérési hiba" kifejezés nem használható "szórás" vagy "bizonytalanság" értelemben.

8) Amikor a szövegkörnyezet megkívánja a mérési hiba és a relatív hiba megkülönböztetését, az előbbi helyett használható az "abszolút mérési hiba" kifejezés, ami nem tévesztendő össze a "mérési hiba abszolút értékével".

9) A véletlen hiba a mérési hiba mínusz a rendszeres hiba (6.14). Mivel egy mérést lehetetlen végtelen sokszor megismételni, a véletlen hibát csak közelítőleg tudjuk becsülni.

<sup>10)</sup> Mint a mérési hibát, a rendszeres hibát sem tudjuk meghatározni. A rendszeres hiba a mérési hiba mínusz a véletlen hiba.

<sup>11)</sup> A-típusú becslések a jegyzet következő képletei: (5.7), (5.21), (5.22), (6.22), (7.11) stb.

<sup>12)</sup> A B-típusú becslések fogalma meglehetősen szerteágazó módszereket takar. Közös jellemzőjük, hogy korábbi mérések tapasztalataiból vagy elméleti megfontolásokból származtatott szórásokat kombinálunk a mérési bizonytalanság becslésévé. Például ilyen becslést végeztünk a 2.3. alfejezet “Nem kézben tartott paraméterek hatása” című részének a végén.

## **F1.2. Metrológia és valószínűség-elmélet**

A valószínűség-elmélet szintén pontosan meghatározott fogalmakkal és kifejezésekkel dolgozik, de ezek nem mindig feleltethetők meg pontosan a metrológiai fogalmaknak és kifejezéseknek. Az alábbiakban néhány valószínűség-elméleti fogalomhoz legközelebb álló metrológiai kifejezést adjuk meg. Erre azért van szükség, mert a jegyzetben többnyire a valószínűség-elméleti és matematikai statisztikai nyelvet használjuk.

1. Valószínűségi változó: bővebb fogalom, mint metrológiai megfelelői. A mért érték és annak minden függvénye valószínűségi változó.
2. Várható érték: a mért érték várható értéke ugyanazt jelenti, mint a valódi érték (1.9).
3. Torzítás, torzítatlanság: a rendszeres hiba megléte, illetve hiánya. Megjegyzendő, hogy a rendszeres hiba definíciójában szereplő “végtelen sok ismétlés átlaga” csak akkor értelmezhető, ha megmondjuk a konvergencia jellegét, amit a metrológiai definíció elmulaszt.
4. Szórás: megfelel a metrológiai fogalomnak.
5. Konfidenciaintervallum: a mérési bizonytalanság egy fajta definíciójával rokon fogalom, hiszen hossza a bizonytalanság kétszerese.

A metrológia több mennyiség jelölését is szabványosította:

- az empirikus szórás jele  $s$ ;
- a bizonytalanság B-típusú becslésének eredményét  $u$ -val kell jelölni;<sup>2</sup>
- ha a bizonytalanság becslésében kombináljuk az A- és B-típusú becsléseket, akkor a jelölés  $u_c$ .<sup>3</sup>

Az egyik, [8] szerzőjétől idézett mondatnak ellentmond, hogy a szabványos metrológiai kifejezések több tekintetben is eltérnek a mindennapi szóhasználatától. Ennek az oka, hogy számos közhasznú kifejezés több olyan fogalmat takar, amelyekre a szabvány külön kifejezéseket alkotott. A kísérleti fizikusok körében elterjedt szóhasználat szerint például a *mérési hiba* és a *szórás* rokon értelmű szavak. Ilyen értelemben beszélnek *hibaszámításról*, ami tulajdonképpen nem más, mint a szórás becslése. A szabvány bevezetése óta az ilyen kifejezések kerülendők. A mérési hiba a mérés eredménye és a mért mennyiség valódi értéke közötti különbség, amit nem tudunk meghatározni. A mérési hiba nagyságára azonban több valószínűség-elméleti tétel is vonatkozik, amelyek egyik paramétere a szórás. Ilyen értelemben a szórás valóban jellemző a mérési hibára, de azzal nem azonos fogalom.

Hasonló ellentmondás van a *pontosság* tekintetében is. Ha valamilyen módszerrel (például az ismétlések számának növelésével) csökkentjük a szórást, akkor csak a *pontosság javításáról* beszélhetünk, ugyanis ez kvalitatív fogalom. Így értelmetlen a *pontosság növelését* emlegetni.

<sup>2</sup> Az angol *uncertainty* (= bizonytalanság) szó kezdőbetűjéből kiindulva.

<sup>3</sup> Az indexben szereplő “c” betű az angol *combined* szó kezdőbetűje.

A magyar szóhasználatban nem elhanyagolható az angol nyelv hatása. A szórás helyett lehet hallani *standard deviációt* vagy *standard hibát*, *best estimate*-et. Ezek a kifejezések annak ellenére közkedveltek, hogy például a standard hiba nem lenne használható (vö. 3.8). A *best estimate* pedig az angolban is számárság. Ezt annak ellenére állítjuk, hogy [8]-ban az 1.20. címszó szerint használják “referencia érték” értelemben. A helyzet az, hogy ha ebben az értelemben használjuk, akkor mondjuk ezt: referencia érték. A metrológia nem költészet, ahol rokonértelmű szavakkal igyekszünk finom árnyalatokat kifejezni. A kifejezés ugyanis – szó szerint – “legjobb becslést” jelent. A 4. fejezetben írtak szerint csak torzítatlan, hatékony stb. becslések vannak definiálva, legjobb becslésről nem tud a matematikai statisztika. Hasonlóan szerencsétlen dolog “best value”-ról beszélni (= legjobb érték).

A “best estimate” kifejezéssel kapcsolat még egy dologra érdemes utalni. Bonyolult berendezések biztonsági elemzésében gyakran alkalmazunk ún. *konzervatív* becsléseket, ami azt jelenti, hogy a becslést tudatosan a biztonság irányába torzítjuk. Ha például egy berendezésben a nyomás biztonsági okokból nem mehet egy korlát fölé, akkor a nyomás mérésében vagy számításában úgy járunk el, hogy a mért, illetve számított nyomás biztosan a valódi érték felett legyen. Különösen számításokban szokás ezekkel szembeállítani azokat a számítógépi programokat, amelyek szerzői arra törekedtek, hogy a végeredmény a valódi értéket adja. Pontosabban: az eredmény egyezzen meg a valódi értékkel, ha a bemenő adatokra (amelyek szintén mért mennyiségek) a valódi értéket adják meg. Nos, újabban az ilyen programokat illetik a “best estimate” jelzővel. Ez ugyanúgy nem helyeselhető, mint a fentiekben. Jobb lenne ehelyett a “realisztikus” jelzőt használni.



## 2. FÜGGELÉK. STATISZTIKAI TÁBLÁZATOK

A következő oldalakon közölt kvantiliseket a következőképpen definiáljuk. A **Student-eloszlás**  $\gamma$  kvantilise kielégíti a

$$P\{|t_n| < \gamma\} = 1 - \varepsilon, \quad (\text{F2.1})$$

ahol  $n$  a szabadsági fokok száma. A **módosított Student-eloszlás** számára megadott, a

$$P\{|t_n| < \gamma'\} = 1 - \varepsilon, \quad (\text{F2.2})$$

egyenletet kielégítő  $\gamma'$  kvantilist a Student eloszlásra vezettük vissza:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{n - m}}}, \quad (\text{F2.3})$$

ahol  $\gamma$  az  $(n - 1)$  szabadsági fokú Student-eloszlás kvatilise (F2.1) szerint. További eloszlások:

**$\chi^2$ -eloszlás:**

$$P\{\chi_n^2 < \gamma\} = 1 - \varepsilon, \quad (\text{F2.4})$$

**Fisher-eloszlás:**

$$P\left\{\frac{\chi_l^2/l}{\chi_k^2/k} < \gamma\right\} = 1 - \varepsilon, \quad l < k, \quad (\text{F2.5})$$

**$\varphi$ -eloszlás:**

$$P\left\{\frac{\sqrt{\chi_l^2/l}}{\chi_k^2/k} < \gamma\right\} = 1 - \varepsilon, \quad l < k. \quad (\text{F2.6})$$

A **Gauss-eloszlás** kvantiliseit a Student-eloszlás táblázatának utolsó sorában találjuk.

**Student-eloszlás**

$n \setminus \varepsilon$	0,001	0,00271	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2	0,3
2	31,599	19,170	9,925	6,965	5,643	4,849	4,303	2,920	1,886	1,386
3	12,924	9,207	5,841	4,541	3,896	3,482	3,182	2,353	1,638	1,250
4	8,610	6,613	4,604	3,747	3,298	2,999	2,776	2,132	1,533	1,190
5	6,869	5,502	4,032	3,365	3,003	2,757	2,571	2,015	1,476	1,156
6	5,959	4,900	3,707	3,143	2,829	2,612	2,447	1,943	1,440	1,134
7	5,408	4,527	3,499	2,998	2,715	2,517	2,365	1,895	1,415	1,119
8	5,041	4,274	3,355	2,896	2,634	2,449	2,306	1,860	1,397	1,108
9	4,781	4,092	3,250	2,821	2,574	2,398	2,262	1,833	1,383	1,100
10	4,587	3,955	3,169	2,764	2,527	2,359	2,228	1,812	1,372	1,093
12	4,318	3,762	3,055	2,681	2,461	2,303	2,179	1,782	1,356	1,083
14	4,140	3,634	2,977	2,624	2,415	2,264	2,145	1,761	1,345	1,076
16	4,015	3,542	2,921	2,583	2,382	2,235	2,120	1,746	1,337	1,071
18	3,922	3,474	2,878	2,552	2,356	2,214	2,101	1,734	1,330	1,067
20	3,850	3,420	2,845	2,528	2,336	2,197	2,086	1,725	1,325	1,064
22	3,792	3,378	2,819	2,508	2,320	2,183	2,074	1,717	1,321	1,061
24	3,745	3,343	2,797	2,492	2,307	2,172	2,064	1,711	1,318	1,059
26	3,707	3,314	2,779	2,479	2,296	2,162	2,056	1,706	1,315	1,058
28	3,674	3,290	2,763	2,467	2,286	2,154	2,048	1,701	1,313	1,056
30	3,646	3,269	2,750	2,457	2,278	2,147	2,042	1,697	1,310	1,055
32	3,622	3,251	2,738	2,449	2,271	2,141	2,037	1,694	1,309	1,054
34	3,601	3,235	2,728	2,441	2,265	2,136	2,032	1,691	1,307	1,052
36	3,582	3,221	2,719	2,434	2,260	2,131	2,028	1,688	1,306	1,052
38	3,566	3,208	2,712	2,429	2,255	2,127	2,024	1,686	1,304	1,051
40	3,551	3,197	2,704	2,423	2,250	2,123	2,021	1,684	1,303	1,050
42	3,538	3,187	2,698	2,418	2,246	2,120	2,018	1,682	1,302	1,049
44	3,526	3,178	2,692	2,414	2,243	2,116	2,015	1,680	1,301	1,049
46	3,515	3,170	2,687	2,410	2,239	2,114	2,013	1,679	1,300	1,048
48	3,505	3,163	2,682	2,407	2,237	2,111	2,011	1,677	1,299	1,048
50	3,496	3,156	2,678	2,403	2,234	2,109	2,009	1,676	1,299	1,047
55	3,476	3,141	2,668	2,396	2,228	2,104	2,004	1,673	1,297	1,046
60	3,460	3,129	2,660	2,390	2,223	2,099	2,000	1,671	1,296	1,045
65	3,447	3,118	2,654	2,385	2,219	2,096	1,997	1,669	1,295	1,045
70	3,435	3,109	2,648	2,381	2,215	2,093	1,994	1,667	1,294	1,044
75	3,425	3,102	2,643	2,377	2,212	2,090	1,992	1,665	1,293	1,044
80	3,416	3,095	2,639	2,374	2,209	2,088	1,990	1,664	1,292	1,043
85	3,409	3,089	2,635	2,371	2,207	2,086	1,988	1,663	1,292	1,043
90	3,402	3,084	2,632	2,368	2,205	2,084	1,987	1,662	1,291	1,042
95	3,396	3,080	2,629	2,366	2,203	2,082	1,985	1,661	1,291	1,042
100	3,390	3,076	2,626	2,364	2,201	2,081	1,984	1,660	1,290	1,042
110	3,381	3,068	2,621	2,361	2,199	2,078	1,982	1,659	1,289	1,041
120	3,373	3,063	2,617	2,358	2,196	2,076	1,980	1,658	1,289	1,041
130	3,367	3,058	2,614	2,355	2,194	2,075	1,978	1,657	1,288	1,041
140	3,361	3,053	2,611	2,353	2,192	2,073	1,977	1,656	1,288	1,040
150	3,357	3,050	2,609	2,351	2,191	2,072	1,976	1,655	1,287	1,040
200	3,340	3,037	2,601	2,345	2,186	2,067	1,972	1,653	1,286	1,039
300	3,323	3,024	2,592	2,339	2,180	2,063	1,968	1,650	1,284	1,038
400	3,315	3,018	2,588	2,336	2,178	2,060	1,966	1,649	1,284	1,038
500	3,310	3,014	2,586	2,334	2,176	2,059	1,965	1,648	1,283	1,038
600	3,307	3,011	2,584	2,333	2,175	2,058	1,964	1,647	1,283	1,037
700	3,305	3,010	2,583	2,332	2,175	2,058	1,963	1,647	1,283	1,037
800	3,303	3,008	2,582	2,331	2,174	2,057	1,963	1,647	1,283	1,037
900	3,302	3,007	2,581	2,331	2,174	2,057	1,963	1,647	1,282	1,037
1000	3,300	3,006	2,581	2,330	2,173	2,056	1,962	1,646	1,282	1,037
2000	3,296	3,002	2,578	2,328	2,172	2,055	1,961	1,646	1,282	1,037
3000	3,294	3,002	2,578	2,327	2,171	2,055	1,961	1,645	1,282	1,037
Gauss	3,292	3,001	2,577	2,327	2,171	2,054	1,960	1,645	1,282	1,037

**Módosított Student-eloszlás**

$n \setminus \varepsilon$	0,001	0,00271	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2	0,3
2	1,414	1,414	1,414	1,414	1,413	1,411	1,410	1,397	1,345	1,260
3	1,730	1,727	1,715	1,697	1,680	1,663	1,645	1,559	1,386	1,212
4	1,982	1,966	1,917	1,869	1,828	1,791	1,757	1,611	1,374	1,170
5	2,178	2,140	2,051	1,973	1,912	1,860	1,814	1,631	1,360	1,143
6	2,329	2,269	2,142	2,040	1,965	1,902	1,848	1,640	1,349	1,125
7	2,447	2,367	2,207	2,087	2,000	1,930	1,870	1,644	1,341	1,112
8	2,541	2,442	2,256	2,121	2,026	1,949	1,885	1,647	1,334	1,102
9	2,616	2,502	2,294	2,146	2,044	1,964	1,896	1,648	1,328	1,094
10	2,679	2,550	2,324	2,166	2,059	1,975	1,904	1,649	1,324	1,088
12	2,775	2,624	2,368	2,196	2,080	1,990	1,915	1,649	1,317	1,079
14	2,845	2,677	2,399	2,216	2,095	2,001	1,923	1,650	1,312	1,073
16	2,899	2,717	2,422	2,231	2,105	2,008	1,929	1,649	1,308	1,068
18	2,941	2,748	2,440	2,242	2,113	2,014	1,933	1,649	1,305	1,065
20	2,975	2,773	2,454	2,251	2,119	2,018	1,936	1,649	1,303	1,062
22	3,003	2,794	2,465	2,258	2,124	2,022	1,938	1,649	1,301	1,060
24	3,026	2,811	2,475	2,264	2,128	2,025	1,940	1,649	1,300	1,058
26	3,046	2,825	2,483	2,269	2,132	2,027	1,942	1,648	1,298	1,056
28	3,064	2,838	2,490	2,274	2,135	2,029	1,943	1,648	1,297	1,055
30	3,078	2,849	2,496	2,277	2,137	2,031	1,945	1,648	1,296	1,053
32	3,092	2,858	2,501	2,281	2,139	2,033	1,946	1,648	1,295	1,052
34	3,103	2,866	2,505	2,283	2,141	2,034	1,947	1,648	1,294	1,051
36	3,113	2,874	2,509	2,286	2,143	2,035	1,947	1,648	1,294	1,050
38	3,123	2,880	2,513	2,288	2,144	2,036	1,948	1,648	1,293	1,050
40	3,131	2,886	2,516	2,290	2,146	2,037	1,949	1,647	1,292	1,049
42	3,138	2,892	2,519	2,292	2,147	2,038	1,949	1,647	1,292	1,048
44	3,145	2,896	2,522	2,293	2,148	2,039	1,950	1,647	1,291	1,048
46	3,152	2,901	2,524	2,295	2,149	2,039	1,950	1,647	1,291	1,047
48	3,157	2,905	2,526	2,296	2,150	2,040	1,951	1,647	1,291	1,047
50	3,163	2,909	2,528	2,298	2,151	2,041	1,951	1,647	1,290	1,047
55	3,174	2,917	2,533	2,300	2,153	2,042	1,952	1,647	1,289	1,046
60	3,184	2,924	2,536	2,302	2,154	2,043	1,953	1,647	1,289	1,045
65	3,192	2,930	2,539	2,304	2,155	2,044	1,953	1,647	1,288	1,044
70	3,199	2,935	2,542	2,306	2,156	2,044	1,954	1,646	1,288	1,044
75	3,205	2,939	2,544	2,307	2,157	2,045	1,954	1,646	1,287	1,043
80	3,210	2,943	2,546	2,309	2,158	2,046	1,955	1,646	1,287	1,043
85	3,215	2,946	2,548	2,310	2,159	2,046	1,955	1,646	1,287	1,042
90	3,219	2,949	2,550	2,311	2,160	2,047	1,955	1,646	1,286	1,042
95	3,223	2,951	2,551	2,311	2,160	2,047	1,955	1,646	1,286	1,042
100	3,226	2,954	2,552	2,312	2,161	2,047	1,956	1,646	1,286	1,041
110	3,232	2,958	2,554	2,313	2,162	2,048	1,956	1,646	1,286	1,041
120	3,237	2,961	2,556	2,315	2,162	2,048	1,956	1,646	1,285	1,041
130	3,241	2,964	2,558	2,315	2,163	2,049	1,957	1,646	1,285	1,040
140	3,245	2,967	2,559	2,316	2,163	2,049	1,957	1,646	1,285	1,040
150	3,248	2,969	2,560	2,317	2,164	2,050	1,957	1,646	1,284	1,040
200	3,258	2,976	2,564	2,319	2,165	2,051	1,958	1,645	1,284	1,039
300	3,269	2,984	2,568	2,322	2,167	2,052	1,959	1,645	1,283	1,038
400	3,274	2,988	2,570	2,323	2,168	2,052	1,959	1,645	1,283	1,038
500	3,278	2,990	2,571	2,324	2,168	2,053	1,959	1,645	1,282	1,037
600	3,280	2,991	2,572	2,324	2,169	2,053	1,959	1,645	1,282	1,037
700	3,281	2,992	2,572	2,324	2,169	2,053	1,959	1,645	1,282	1,037
800	3,282	2,993	2,573	2,325	2,169	2,053	1,959	1,645	1,282	1,037
900	3,283	2,994	2,573	2,325	2,169	2,053	1,960	1,645	1,282	1,037
1000	3,284	2,994	2,574	2,325	2,169	2,053	1,960	1,645	1,282	1,037
2000	3,287	2,996	2,575	2,326	2,170	2,053	1,960	1,645	1,282	1,037
3000	3,289	2,997	2,575	2,326	2,170	2,053	1,960	1,645	1,282	1,037
4000	3,289	2,997	2,575	2,326	2,170	2,054	1,960	1,645	1,282	1,037

$\chi^2$ -eloszlás

$n \setminus \varepsilon$	0,001	0,00271	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2	0,3
2	13,82	11,82	9,21	7,82	7,01	6,44	5,99	4,61	3,22	2,41
3	16,27	14,15	11,34	9,84	8,95	8,31	7,81	6,25	4,64	3,66
4	18,47	16,24	13,28	11,67	10,71	10,03	9,49	7,78	5,99	4,88
5	20,52	18,20	15,09	13,39	12,37	11,64	11,07	9,24	7,29	6,06
6	22,46	20,05	16,81	15,03	13,97	13,20	12,59	10,64	8,56	7,23
7	24,32	21,84	18,48	16,62	15,51	14,70	14,07	12,02	9,80	8,38
8	26,12	23,56	20,09	18,17	17,01	16,17	15,51	13,36	11,03	9,52
9	27,88	25,25	21,67	19,68	18,48	17,61	16,92	14,68	12,24	10,66
10	29,59	26,89	23,21	21,16	19,92	19,02	18,31	15,99	13,44	11,78
12	32,91	30,09	26,22	24,05	22,74	21,79	21,03	18,55	15,81	14,01
14	36,12	33,18	29,14	26,87	25,49	24,49	23,68	21,06	18,15	16,22
16	39,25	36,20	32,00	29,63	28,19	27,14	26,30	23,54	20,47	18,42
18	42,31	39,16	34,81	32,35	30,84	29,75	28,87	25,99	22,76	20,60
20	45,32	42,07	37,57	35,02	33,46	32,32	31,41	28,41	25,04	22,77
22	48,27	44,93	40,29	37,66	36,05	34,87	33,92	30,81	27,30	24,94
24	51,18	47,75	42,98	40,27	38,61	37,39	36,42	33,20	29,55	27,10
26	54,05	50,54	45,64	42,86	41,15	39,89	38,89	35,56	31,79	29,25
28	56,89	53,30	48,28	45,42	43,66	42,37	41,34	37,92	34,03	31,39
30	59,70	56,03	50,89	47,96	46,16	44,83	43,77	40,26	36,25	33,53
32	62,49	58,74	53,49	50,49	48,64	47,28	46,19	42,58	38,47	35,66
34	65,25	61,42	56,06	53,00	51,11	49,72	48,60	44,90	40,68	37,80
36	67,99	64,09	58,62	55,49	53,56	52,14	51,00	47,21	42,88	39,92
38	70,70	66,73	61,16	57,97	56,00	54,55	53,38	49,51	45,08	42,05
40	73,40	69,36	63,69	60,44	58,43	56,95	55,76	51,81	47,27	44,16
42	76,08	71,98	66,21	62,89	60,85	59,33	58,12	54,09	49,46	46,28
44	78,75	74,58	68,71	65,34	63,25	61,71	60,48	56,37	51,64	48,40
46	81,40	77,17	71,20	67,77	65,65	64,09	62,83	58,64	53,82	50,51
48	84,04	79,74	73,68	70,20	68,04	66,45	65,17	60,91	55,99	52,62
50	86,66	82,30	76,15	72,61	70,42	68,80	67,50	63,17	58,16	54,72
55	93,17	88,66	82,29	78,62	76,34	74,66	73,31	68,80	63,58	59,98
60	99,61	94,96	88,38	84,58	82,23	80,48	79,08	74,40	68,97	65,23
65	106,0	101,2	94,42	90,50	88,07	86,27	84,82	79,97	74,35	70,46
70	112,3	107,4	100,4	96,39	93,88	92,02	90,53	85,53	79,71	75,69
75	118,6	113,6	106,4	102,2	99,66	97,75	96,22	91,06	85,07	80,91
80	124,8	119,7	112,3	108,1	105,4	103,5	101,9	96,58	90,41	86,12
85	131,0	125,8	118,2	113,9	111,2	109,1	107,5	102,1	95,73	91,32
90	137,2	131,8	124,1	119,6	116,9	114,8	113,1	107,6	101,1	96,52
95	143,3	137,8	130,0	125,4	122,6	120,5	118,8	113,0	106,4	101,7
100	149,4	143,8	135,8	131,1	128,2	126,1	124,3	118,5	111,7	106,9
110	161,6	155,7	147,4	142,6	139,5	137,3	135,5	129,4	122,2	117,3
120	173,6	167,6	159,0	153,9	150,8	148,4	146,6	140,2	132,8	127,6
130	185,6	179,3	170,4	165,2	162,0	159,6	157,6	151,0	143,3	137,9
140	197,5	191,0	181,8	176,5	173,1	170,6	168,6	161,8	153,9	148,3

## Fisher-eloszlás

 $\varepsilon = 0,001$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	18,643	12,974	10,804	9,633	8,892	8,379	8,001	7,710	7,480	7,292
14	17,143	11,779	9,729	8,622	7,922	7,436	7,078	6,802	6,583	6,404
16	16,120	10,971	9,006	7,944	7,272	6,805	6,460	6,195	5,984	5,812
18	15,379	10,390	8,488	7,459	6,808	6,355	6,021	5,763	5,558	5,390
20	14,819	9,953	8,098	7,096	6,461	6,019	5,692	5,440	5,239	5,075
25	13,877	9,223	7,451	6,493	5,885	5,462	5,148	4,906	4,713	4,555
30	13,293	8,773	7,054	6,125	5,534	5,122	4,817	4,581	4,393	4,239
35	12,897	8,470	6,787	5,876	5,298	4,894	4,595	4,363	4,178	4,027
40	12,609	8,251	6,595	5,698	5,128	4,731	4,436	4,207	4,024	3,874
45	12,392	8,086	6,450	5,564	5,001	4,608	4,316	4,090	3,909	3,760
50	12,222	7,956	6,336	5,459	4,901	4,512	4,222	3,998	3,818	3,671
55	12,086	7,853	6,246	5,375	4,822	4,435	4,148	3,925	3,746	3,600
60	11,973	7,768	6,171	5,307	4,757	4,372	4,086	3,865	3,687	3,541
65	11,879	7,697	6,109	5,249	4,702	4,320	4,035	3,815	3,638	3,493
70	11,799	7,637	6,057	5,201	4,656	4,275	3,992	3,773	3,597	3,452
75	11,731	7,585	6,011	5,159	4,617	4,237	3,955	3,736	3,561	3,417
80	11,672	7,540	5,972	5,123	4,582	4,204	3,923	3,705	3,530	3,386
85	11,619	7,501	5,938	5,092	4,553	4,175	3,895	3,677	3,503	3,359
90	11,573	7,466	5,908	5,064	4,526	4,150	3,870	3,653	3,479	3,336
95	11,532	7,435	5,881	5,039	4,503	4,127	3,848	3,632	3,458	3,315
100	11,496	7,408	5,857	5,017	4,482	4,107	3,829	3,612	3,439	3,296
110	11,432	7,360	5,815	4,979	4,446	4,072	3,795	3,579	3,406	3,264
120	11,380	7,321	5,781	4,947	4,416	4,044	3,767	3,552	3,379	3,237
130	11,337	7,288	5,752	4,921	4,391	4,020	3,744	3,529	3,357	3,215
140	11,299	7,260	5,728	4,898	4,369	3,999	3,724	3,509	3,337	3,196
150	11,267	7,236	5,707	4,879	4,351	3,981	3,706	3,493	3,321	3,179
160	11,238	7,215	5,689	4,862	4,335	3,966	3,691	3,478	3,306	3,165
170	11,214	7,196	5,673	4,847	4,321	3,953	3,678	3,465	3,294	3,153
180	11,192	7,180	5,658	4,834	4,309	3,941	3,667	3,454	3,283	3,142
190	11,172	7,165	5,646	4,822	4,297	3,930	3,656	3,443	3,272	3,132
200	11,154	7,152	5,634	4,812	4,287	3,920	3,647	3,434	3,263	3,123
250	11,088	7,102	5,591	4,772	4,250	3,884	3,612	3,400	3,230	3,089
300	11,043	7,069	5,562	4,746	4,225	3,860	3,588	3,377	3,207	3,067
400	10,989	7,028	5,527	4,713	4,194	3,830	3,560	3,349	3,179	3,040
500	10,957	7,004	5,506	4,694	4,176	3,813	3,542	3,332	3,163	3,023
600	10,934	6,988	5,492	4,681	4,164	3,801	3,531	3,321	3,152	3,013

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,001$ 

k\l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	7,136									
14	6,256	6,130	6,023							
16	5,668	5,547	5,443	5,353	5,274					
18	5,251	5,132	5,031	4,943	4,866	4,798	4,738			
20	4,939	4,823	4,724	4,637	4,562	4,495	4,435	4,382	4,334	
25	4,423	4,312	4,215	4,132	4,059	3,994	3,936	3,884	3,837	3,794
30	4,110	4,001	3,907	3,825	3,753	3,689	3,632	3,581	3,535	3,493
35	3,900	3,792	3,699	3,619	3,547	3,484	3,428	3,378	3,332	3,290
40	3,749	3,642	3,551	3,471	3,400	3,338	3,282	3,232	3,186	3,145
45	3,636	3,530	3,439	3,360	3,290	3,228	3,172	3,122	3,077	3,036
50	3,548	3,443	3,352	3,273	3,204	3,142	3,086	3,037	2,992	2,951
55	3,477	3,373	3,283	3,204	3,135	3,073	3,018	2,968	2,923	2,882
60	3,419	3,315	3,226	3,147	3,078	3,017	2,962	2,912	2,867	2,827
65	3,371	3,268	3,178	3,100	3,031	2,970	2,915	2,866	2,821	2,780
70	3,330	3,227	3,138	3,060	2,991	2,930	2,875	2,826	2,781	2,741
75	3,296	3,192	3,103	3,026	2,957	2,896	2,841	2,792	2,747	2,707
80	3,265	3,162	3,074	2,996	2,927	2,867	2,812	2,763	2,718	2,677
85	3,239	3,136	3,047	2,970	2,902	2,841	2,786	2,737	2,692	2,652
90	3,215	3,113	3,024	2,947	2,879	2,818	2,763	2,714	2,670	2,629
95	3,195	3,092	3,004	2,927	2,858	2,798	2,743	2,694	2,650	2,609
100	3,176	3,074	2,986	2,908	2,840	2,780	2,725	2,676	2,632	2,591
110	3,144	3,042	2,954	2,877	2,809	2,748	2,694	2,645	2,601	2,560
120	3,118	3,016	2,928	2,851	2,783	2,723	2,669	2,620	2,575	2,534
130	3,096	2,994	2,906	2,830	2,762	2,701	2,647	2,598	2,554	2,513
140	3,077	2,976	2,888	2,811	2,743	2,683	2,629	2,580	2,535	2,495
150	3,061	2,959	2,872	2,795	2,727	2,667	2,613	2,564	2,519	2,479
160	3,047	2,945	2,858	2,781	2,714	2,653	2,599	2,550	2,506	2,465
170	3,034	2,933	2,846	2,769	2,701	2,641	2,587	2,538	2,494	2,453
180	3,023	2,922	2,835	2,758	2,691	2,630	2,576	2,527	2,483	2,442
190	3,014	2,912	2,825	2,749	2,681	2,621	2,567	2,518	2,473	2,433
200	3,005	2,904	2,816	2,740	2,672	2,612	2,558	2,509	2,465	2,424
250	2,972	2,871	2,784	2,707	2,640	2,580	2,526	2,477	2,433	2,392
300	2,950	2,849	2,762	2,686	2,618	2,558	2,504	2,456	2,411	2,371
400	2,922	2,822	2,735	2,659	2,592	2,532	2,478	2,429	2,385	2,344
500	2,906	2,806	2,719	2,643	2,576	2,516	2,462	2,413	2,369	2,328
600	2,896	2,795	2,709	2,633	2,565	2,505	2,451	2,403	2,358	2,318

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,01$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,388	4,296
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030	3,939
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780	3,691
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597	3,508
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457	3,368
25	7,770	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217	3,129
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,304	3,173	3,067	2,979
35	7,419	5,268	4,396	3,908	3,592	3,368	3,200	3,069	2,963	2,876
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888	2,801
45	7,234	5,110	4,249	3,767	3,454	3,232	3,066	2,935	2,830	2,743
50	7,171	5,057	4,199	3,720	3,408	3,186	3,020	2,890	2,785	2,698
55	7,119	5,013	4,159	3,681	3,370	3,149	2,983	2,853	2,749	2,662
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,718	2,632
65	7,042	4,947	4,098	3,622	3,313	3,093	2,928	2,798	2,693	2,607
70	7,011	4,922	4,074	3,600	3,291	3,071	2,906	2,777	2,672	2,585
75	6,985	4,900	4,054	3,580	3,272	3,052	2,887	2,758	2,653	2,567
80	6,963	4,881	4,036	3,563	3,255	3,036	2,871	2,742	2,637	2,551
85	6,943	4,864	4,021	3,548	3,241	3,022	2,857	2,728	2,623	2,537
90	6,925	4,849	4,007	3,535	3,228	3,009	2,845	2,715	2,611	2,524
95	6,909	4,836	3,995	3,523	3,216	2,998	2,833	2,704	2,600	2,513
100	6,895	4,824	3,984	3,513	3,206	2,988	2,823	2,694	2,590	2,503
110	6,871	4,803	3,965	3,495	3,188	2,970	2,806	2,677	2,573	2,486
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559	2,472
130	6,834	4,772	3,936	3,467	3,161	2,944	2,780	2,651	2,547	2,460
140	6,819	4,760	3,925	3,456	3,151	2,933	2,769	2,641	2,536	2,450
150	6,807	4,749	3,915	3,447	3,142	2,924	2,761	2,632	2,528	2,441
160	6,796	4,740	3,906	3,439	3,134	2,917	2,753	2,624	2,520	2,434
170	6,786	4,732	3,899	3,431	3,127	2,910	2,746	2,617	2,513	2,427
180	6,778	4,725	3,892	3,425	3,120	2,904	2,740	2,611	2,507	2,421
190	6,770	4,719	3,886	3,419	3,115	2,898	2,735	2,606	2,502	2,415
200	6,763	4,713	3,881	3,414	3,110	2,893	2,730	2,601	2,497	2,411
250	6,737	4,691	3,861	3,395	3,091	2,875	2,711	2,583	2,479	2,392
300	6,720	4,677	3,848	3,382	3,079	2,862	2,699	2,571	2,467	2,380
400	6,699	4,659	3,831	3,366	3,063	2,847	2,684	2,556	2,452	2,365
500	6,686	4,648	3,821	3,357	3,054	2,838	2,675	2,547	2,443	2,356
600	6,677	4,641	3,814	3,351	3,048	2,832	2,669	2,541	2,437	2,351

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,01$ 

k \ l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	4,220									
14	3,864	3,800	3,745							
16	3,616	3,553	3,498	3,451	3,409					
18	3,434	3,371	3,316	3,269	3,227	3,190	3,158			
20	3,294	3,231	3,177	3,130	3,088	3,051	3,018	2,989	2,962	
25	3,056	2,993	2,939	2,892	2,850	2,813	2,780	2,751	2,724	2,699
30	2,906	2,843	2,789	2,742	2,700	2,663	2,630	2,600	2,573	2,549
35	2,803	2,740	2,686	2,639	2,597	2,560	2,527	2,497	2,470	2,445
40	2,727	2,665	2,611	2,563	2,522	2,484	2,451	2,421	2,394	2,369
45	2,670	2,608	2,553	2,506	2,464	2,427	2,393	2,363	2,336	2,311
50	2,625	2,562	2,508	2,461	2,419	2,382	2,348	2,318	2,290	2,265
55	2,589	2,526	2,472	2,424	2,382	2,345	2,311	2,281	2,253	2,228
60	2,559	2,496	2,442	2,394	2,352	2,315	2,281	2,251	2,223	2,198
65	2,534	2,471	2,417	2,369	2,327	2,289	2,256	2,225	2,198	2,172
70	2,512	2,450	2,395	2,348	2,306	2,268	2,234	2,204	2,176	2,150
75	2,494	2,431	2,377	2,329	2,287	2,249	2,216	2,185	2,157	2,132
80	2,478	2,415	2,361	2,313	2,271	2,233	2,199	2,169	2,141	2,115
85	2,464	2,401	2,347	2,299	2,257	2,219	2,185	2,154	2,126	2,101
90	2,451	2,389	2,334	2,286	2,244	2,206	2,172	2,142	2,114	2,088
95	2,440	2,378	2,323	2,275	2,233	2,195	2,161	2,130	2,102	2,077
100	2,430	2,368	2,313	2,265	2,223	2,185	2,151	2,120	2,092	2,067
110	2,413	2,350	2,296	2,248	2,206	2,168	2,134	2,103	2,075	2,049
120	2,399	2,336	2,282	2,234	2,192	2,154	2,119	2,089	2,060	2,035
130	2,387	2,324	2,270	2,222	2,179	2,141	2,107	2,076	2,048	2,022
140	2,377	2,314	2,260	2,212	2,169	2,131	2,097	2,066	2,038	2,012
150	2,368	2,305	2,251	2,203	2,160	2,122	2,088	2,057	2,029	2,003
160	2,360	2,298	2,243	2,195	2,153	2,114	2,080	2,049	2,021	1,995
170	2,354	2,291	2,236	2,188	2,146	2,108	2,073	2,042	2,014	1,988
180	2,348	2,285	2,230	2,182	2,140	2,102	2,067	2,036	2,008	1,982
190	2,342	2,280	2,225	2,177	2,134	2,096	2,062	2,031	2,002	1,976
200	2,338	2,275	2,220	2,172	2,129	2,091	2,057	2,026	1,997	1,971
250	2,319	2,257	2,202	2,154	2,111	2,073	2,038	2,007	1,979	1,953
300	2,307	2,244	2,190	2,142	2,099	2,061	2,026	1,995	1,966	1,940
400	2,292	2,229	2,175	2,126	2,084	2,045	2,011	1,979	1,951	1,925
500	2,283	2,220	2,166	2,117	2,075	2,036	2,002	1,970	1,942	1,915
600	2,277	2,214	2,160	2,111	2,069	2,030	1,996	1,964	1,935	1,909



## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,02$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	7,188	5,516	4,814	4,419	4,162	3,980	3,845	3,740	3,656	3,587
14	6,888	5,241	4,549	4,158	3,904	3,724	3,589	3,485	3,401	3,332
16	6,674	5,046	4,361	3,974	3,721	3,543	3,409	3,304	3,221	3,152
18	6,515	4,900	4,221	3,837	3,586	3,408	3,275	3,171	3,087	3,018
20	6,391	4,788	4,113	3,731	3,482	3,304	3,171	3,067	2,984	2,915
25	6,176	4,593	3,928	3,549	3,302	3,126	2,993	2,890	2,806	2,737
30	6,038	4,470	3,809	3,434	3,188	3,012	2,880	2,777	2,693	2,624
35	5,942	4,384	3,727	3,354	3,109	2,934	2,802	2,699	2,615	2,546
40	5,872	4,321	3,667	3,295	3,051	2,877	2,745	2,641	2,558	2,488
45	5,818	4,273	3,622	3,251	3,007	2,833	2,701	2,598	2,514	2,444
50	5,776	4,235	3,585	3,215	2,972	2,798	2,667	2,563	2,479	2,410
55	5,741	4,204	3,556	3,187	2,944	2,770	2,639	2,535	2,451	2,382
60	5,713	4,179	3,532	3,163	2,921	2,747	2,616	2,512	2,428	2,359
65	5,689	4,157	3,512	3,144	2,901	2,728	2,596	2,493	2,409	2,339
70	5,668	4,139	3,494	3,127	2,885	2,711	2,580	2,476	2,392	2,323
75	5,651	4,123	3,480	3,112	2,870	2,697	2,566	2,462	2,378	2,308
80	5,635	4,110	3,467	3,100	2,858	2,685	2,553	2,450	2,366	2,296
85	5,622	4,098	3,455	3,088	2,847	2,674	2,542	2,439	2,355	2,285
90	5,610	4,087	3,445	3,079	2,837	2,664	2,533	2,429	2,345	2,275
95	5,599	4,078	3,436	3,070	2,828	2,655	2,524	2,421	2,337	2,267
100	5,590	4,069	3,428	3,062	2,821	2,648	2,517	2,413	2,329	2,259
110	5,573	4,055	3,414	3,048	2,807	2,634	2,503	2,400	2,316	2,246
120	5,559	4,042	3,403	3,037	2,796	2,623	2,492	2,389	2,305	2,235
130	5,548	4,032	3,393	3,028	2,787	2,614	2,483	2,380	2,295	2,225
140	5,538	4,023	3,385	3,020	2,779	2,606	2,475	2,372	2,287	2,217
150	5,529	4,016	3,378	3,013	2,772	2,599	2,468	2,365	2,281	2,211
160	5,522	4,009	3,371	3,007	2,766	2,593	2,462	2,359	2,275	2,205
170	5,515	4,003	3,366	3,001	2,761	2,588	2,457	2,354	2,269	2,199
180	5,510	3,998	3,361	2,997	2,756	2,584	2,452	2,349	2,265	2,195
190	5,504	3,994	3,357	2,992	2,752	2,579	2,448	2,345	2,261	2,190
200	5,500	3,990	3,353	2,988	2,748	2,576	2,445	2,341	2,257	2,187
250	5,482	3,974	3,338	2,974	2,734	2,561	2,430	2,327	2,243	2,172
300	5,470	3,963	3,328	2,964	2,724	2,552	2,421	2,318	2,233	2,163
400	5,456	3,951	3,316	2,952	2,713	2,540	2,409	2,306	2,221	2,151
500	5,447	3,943	3,308	2,945	2,706	2,533	2,402	2,299	2,214	2,144
600	5,441	3,938	3,303	2,941	2,701	2,529	2,398	2,294	2,210	2,139

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,02$ 

k\l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	3,529									
14	3,274	3,225	3,183							
16	3,094	3,045	3,003	2,966	2,934					
18	2,960	2,911	2,869	2,832	2,799	2,770	2,745			
20	2,857	2,808	2,765	2,728	2,695	2,666	2,641	2,617	2,596	
25	2,679	2,629	2,587	2,549	2,516	2,487	2,461	2,437	2,416	2,396
30	2,566	2,516	2,473	2,435	2,402	2,372	2,346	2,322	2,300	2,281
35	2,487	2,437	2,394	2,356	2,323	2,293	2,266	2,242	2,220	2,200
40	2,430	2,380	2,336	2,298	2,265	2,234	2,208	2,183	2,161	2,141
45	2,386	2,336	2,292	2,254	2,220	2,190	2,163	2,138	2,116	2,096
50	2,351	2,301	2,257	2,219	2,185	2,154	2,127	2,103	2,080	2,060
55	2,323	2,273	2,229	2,190	2,156	2,126	2,098	2,074	2,051	2,031
60	2,300	2,249	2,205	2,167	2,133	2,102	2,075	2,050	2,027	2,007
65	2,280	2,230	2,186	2,147	2,113	2,082	2,055	2,030	2,007	1,986
70	2,264	2,213	2,169	2,130	2,096	2,065	2,038	2,013	1,990	1,969
75	2,249	2,199	2,155	2,116	2,081	2,051	2,023	1,998	1,975	1,954
80	2,237	2,186	2,142	2,103	2,069	2,038	2,010	1,985	1,962	1,941
85	2,226	2,175	2,131	2,092	2,058	2,027	1,999	1,974	1,951	1,930
90	2,216	2,165	2,121	2,082	2,048	2,017	1,989	1,964	1,941	1,920
95	2,208	2,157	2,112	2,073	2,039	2,008	1,980	1,955	1,932	1,911
100	2,200	2,149	2,105	2,066	2,031	2,000	1,972	1,947	1,924	1,902
110	2,186	2,135	2,091	2,052	2,017	1,986	1,958	1,933	1,910	1,888
120	2,175	2,124	2,080	2,041	2,006	1,975	1,947	1,921	1,898	1,877
130	2,166	2,115	2,070	2,031	1,996	1,965	1,937	1,912	1,888	1,867
140	2,158	2,107	2,062	2,023	1,988	1,957	1,929	1,903	1,880	1,859
150	2,151	2,100	2,055	2,016	1,981	1,950	1,922	1,896	1,873	1,851
160	2,145	2,094	2,049	2,010	1,975	1,944	1,915	1,890	1,866	1,845
170	2,140	2,089	2,044	2,005	1,970	1,938	1,910	1,884	1,861	1,839
180	2,135	2,084	2,039	2,000	1,965	1,933	1,905	1,879	1,856	1,835
190	2,131	2,080	2,035	1,996	1,960	1,929	1,901	1,875	1,852	1,830
200	2,127	2,076	2,031	1,992	1,957	1,925	1,897	1,871	1,848	1,826
250	2,113	2,061	2,017	1,977	1,942	1,910	1,882	1,856	1,833	1,811
300	2,103	2,052	2,007	1,967	1,932	1,901	1,872	1,846	1,823	1,801
400	2,091	2,040	1,995	1,955	1,920	1,888	1,860	1,834	1,810	1,788
500	2,084	2,033	1,988	1,948	1,913	1,881	1,853	1,826	1,803	1,781
600	2,080	2,028	1,983	1,943	1,908	1,876	1,848	1,822	1,798	1,776

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,05$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,285	2,217	2,161	2,114
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077
45	4,057	3,204	2,812	2,579	2,422	2,308	2,221	2,152	2,096	2,049
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,073	2,026
55	4,016	3,165	2,773	2,540	2,383	2,269	2,181	2,112	2,055	2,008
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993
65	3,989	3,138	2,746	2,513	2,356	2,242	2,154	2,084	2,027	1,980
70	3,978	3,128	2,736	2,503	2,346	2,231	2,143	2,074	2,017	1,969
75	3,968	3,119	2,727	2,494	2,337	2,222	2,134	2,064	2,007	1,959
80	3,960	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,126	2,056	1,999	1,951
85	3,953	3,104	2,712	2,479	2,322	2,207	2,119	2,049	1,992	1,944
90	3,947	3,098	2,706	2,473	2,316	2,201	2,113	2,043	1,986	1,938
95	3,941	3,092	2,700	2,467	2,310	2,196	2,108	2,037	1,980	1,932
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,103	2,032	1,975	1,927
110	3,927	3,079	2,687	2,454	2,297	2,182	2,094	2,024	1,966	1,918
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959	1,910
130	3,914	3,066	2,674	2,441	2,284	2,169	2,081	2,010	1,953	1,904
140	3,909	3,061	2,669	2,436	2,279	2,164	2,076	2,005	1,947	1,899
150	3,904	3,056	2,665	2,432	2,274	2,160	2,071	2,001	1,943	1,894
160	3,900	3,053	2,661	2,428	2,271	2,156	2,067	1,997	1,939	1,890
170	3,897	3,049	2,658	2,425	2,267	2,152	2,064	1,993	1,935	1,887
180	3,894	3,046	2,655	2,422	2,264	2,149	2,061	1,990	1,932	1,884
190	3,891	3,043	2,652	2,419	2,262	2,147	2,058	1,987	1,929	1,881
200	3,888	3,041	2,650	2,417	2,259	2,144	2,056	1,985	1,927	1,878
250	3,879	3,032	2,641	2,408	2,250	2,135	2,046	1,976	1,917	1,869
300	3,873	3,026	2,635	2,402	2,244	2,129	2,040	1,969	1,911	1,862
400	3,865	3,018	2,627	2,394	2,237	2,121	2,032	1,962	1,903	1,854
500	3,860	3,014	2,623	2,390	2,232	2,117	2,028	1,957	1,899	1,850
600	3,857	3,011	2,620	2,387	2,229	2,114	2,025	1,954	1,895	1,846

## Fisher-eloszlás

 $\epsilon = 0,05$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	2,717									
14	2,565	2,534	2,507							
16	2,456	2,425	2,397	2,373	2,352					
18	2,374	2,342	2,314	2,290	2,269	2,250	2,233			
20	2,310	2,278	2,250	2,225	2,203	2,184	2,167	2,151	2,137	
25	2,198	2,165	2,136	2,111	2,089	2,069	2,051	2,035	2,021	2,007
30	2,126	2,092	2,063	2,037	2,015	1,995	1,976	1,960	1,945	1,932
35	2,075	2,041	2,012	1,986	1,963	1,942	1,924	1,907	1,892	1,878
40	2,038	2,003	1,974	1,948	1,924	1,904	1,885	1,868	1,853	1,839
45	2,009	1,974	1,945	1,918	1,895	1,874	1,855	1,838	1,823	1,808
50	1,986	1,952	1,921	1,895	1,871	1,850	1,831	1,814	1,798	1,784
55	1,968	1,933	1,903	1,876	1,852	1,831	1,812	1,795	1,779	1,764
60	1,952	1,917	1,887	1,860	1,836	1,815	1,796	1,778	1,763	1,748
65	1,939	1,904	1,874	1,847	1,823	1,802	1,782	1,765	1,749	1,734
70	1,928	1,893	1,863	1,836	1,812	1,790	1,771	1,753	1,737	1,722
75	1,919	1,884	1,853	1,826	1,802	1,780	1,761	1,743	1,727	1,712
80	1,910	1,875	1,845	1,817	1,793	1,772	1,752	1,734	1,718	1,703
85	1,903	1,868	1,837	1,810	1,786	1,764	1,744	1,726	1,710	1,695
90	1,897	1,861	1,830	1,803	1,779	1,757	1,737	1,720	1,703	1,688
95	1,891	1,856	1,825	1,797	1,773	1,751	1,731	1,713	1,697	1,682
100	1,886	1,850	1,819	1,792	1,768	1,746	1,726	1,708	1,691	1,676
110	1,877	1,841	1,810	1,783	1,758	1,736	1,716	1,698	1,682	1,667
120	1,869	1,834	1,803	1,775	1,750	1,728	1,709	1,690	1,674	1,659
130	1,863	1,827	1,796	1,769	1,744	1,722	1,702	1,684	1,667	1,652
140	1,858	1,822	1,791	1,763	1,738	1,716	1,696	1,678	1,661	1,646
150	1,853	1,817	1,786	1,758	1,734	1,711	1,691	1,673	1,656	1,641
160	1,849	1,813	1,782	1,754	1,729	1,707	1,687	1,669	1,652	1,637
170	1,845	1,810	1,778	1,750	1,726	1,703	1,683	1,665	1,648	1,633
180	1,842	1,806	1,775	1,747	1,722	1,700	1,680	1,661	1,645	1,629
190	1,839	1,803	1,772	1,744	1,719	1,697	1,677	1,658	1,642	1,626
200	1,837	1,801	1,769	1,742	1,717	1,694	1,674	1,656	1,639	1,623
250	1,827	1,791	1,759	1,732	1,707	1,684	1,664	1,645	1,628	1,613
300	1,821	1,785	1,753	1,725	1,700	1,677	1,657	1,638	1,621	1,606
400	1,813	1,776	1,745	1,717	1,691	1,669	1,648	1,630	1,613	1,597
500	1,808	1,772	1,740	1,712	1,686	1,664	1,643	1,625	1,607	1,592
600	1,805	1,768	1,736	1,708	1,683	1,660	1,640	1,621	1,604	1,588

## Fisher-eloszlás

 $\varepsilon = 0,1$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	3,177	2,807	2,606	2,480	2,394	2,331	2,283	2,245	2,214	2,188
14	3,102	2,726	2,522	2,395	2,307	2,243	2,193	2,154	2,122	2,095
16	3,048	2,668	2,462	2,333	2,244	2,178	2,128	2,088	2,055	2,028
18	3,007	2,624	2,416	2,286	2,196	2,130	2,079	2,038	2,005	1,977
20	2,975	2,589	2,380	2,249	2,158	2,091	2,040	1,999	1,965	1,937
25	2,918	2,528	2,317	2,184	2,092	2,024	1,971	1,929	1,895	1,866
30	2,881	2,489	2,276	2,142	2,049	1,980	1,927	1,884	1,849	1,819
35	2,855	2,461	2,247	2,113	2,019	1,950	1,896	1,852	1,817	1,787
40	2,835	2,440	2,226	2,091	1,997	1,927	1,873	1,829	1,793	1,763
45	2,820	2,425	2,210	2,074	1,980	1,909	1,855	1,811	1,774	1,744
50	2,809	2,412	2,197	2,061	1,966	1,895	1,840	1,796	1,760	1,729
55	2,799	2,402	2,186	2,050	1,955	1,884	1,829	1,785	1,748	1,717
60	2,791	2,393	2,177	2,041	1,946	1,875	1,819	1,775	1,738	1,707
65	2,784	2,386	2,170	2,033	1,938	1,867	1,811	1,767	1,730	1,699
70	2,779	2,380	2,164	2,027	1,931	1,860	1,804	1,760	1,723	1,691
75	2,774	2,375	2,158	2,021	1,926	1,854	1,798	1,754	1,716	1,685
80	2,769	2,370	2,154	2,016	1,921	1,849	1,793	1,748	1,711	1,680
85	2,765	2,366	2,149	2,012	1,916	1,845	1,789	1,744	1,706	1,675
90	2,762	2,363	2,146	2,008	1,912	1,841	1,785	1,739	1,702	1,670
95	2,759	2,359	2,142	2,005	1,909	1,837	1,781	1,736	1,698	1,667
100	2,756	2,356	2,139	2,002	1,906	1,834	1,778	1,732	1,695	1,663
110	2,752	2,351	2,134	1,997	1,900	1,828	1,772	1,727	1,689	1,657
120	2,748	2,347	2,130	1,992	1,896	1,824	1,767	1,722	1,684	1,652
130	2,745	2,344	2,126	1,989	1,892	1,820	1,764	1,718	1,680	1,648
140	2,742	2,341	2,123	1,985	1,889	1,817	1,760	1,714	1,677	1,645
150	2,739	2,338	2,121	1,983	1,886	1,814	1,757	1,712	1,674	1,642
160	2,737	2,336	2,118	1,980	1,884	1,811	1,755	1,709	1,671	1,639
170	2,735	2,334	2,116	1,978	1,881	1,809	1,752	1,707	1,669	1,636
180	2,734	2,332	2,114	1,976	1,880	1,807	1,750	1,705	1,667	1,634
190	2,732	2,331	2,113	1,975	1,878	1,805	1,749	1,703	1,665	1,633
200	2,731	2,329	2,111	1,973	1,876	1,804	1,747	1,701	1,663	1,631
250	2,726	2,324	2,106	1,967	1,870	1,798	1,741	1,695	1,657	1,624
300	2,722	2,320	2,102	1,964	1,867	1,794	1,737	1,691	1,652	1,620
400	2,718	2,316	2,098	1,959	1,862	1,789	1,732	1,686	1,647	1,615
500	2,716	2,313	2,095	1,956	1,859	1,786	1,729	1,683	1,644	1,612
600	2,714	2,311	2,093	1,954	1,857	1,784	1,727	1,680	1,642	1,609

## Fisher-eloszlás

 $\varepsilon = 0,1$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	2,166									
14	2,073	2,054	2,037							
16	2,005	1,985	1,968	1,953	1,940					
18	1,954	1,933	1,916	1,900	1,887	1,875	1,864			
20	1,913	1,892	1,875	1,859	1,845	1,833	1,821	1,811	1,802	
25	1,841	1,820	1,802	1,785	1,771	1,758	1,746	1,736	1,726	1,718
30	1,794	1,773	1,754	1,737	1,722	1,709	1,697	1,686	1,676	1,667
35	1,761	1,739	1,720	1,703	1,688	1,674	1,662	1,651	1,641	1,632
40	1,737	1,715	1,695	1,678	1,662	1,649	1,636	1,625	1,615	1,605
45	1,718	1,695	1,676	1,658	1,643	1,629	1,616	1,605	1,594	1,585
50	1,703	1,680	1,660	1,643	1,627	1,613	1,600	1,588	1,578	1,568
55	1,691	1,668	1,648	1,630	1,614	1,600	1,587	1,575	1,564	1,555
60	1,680	1,657	1,637	1,619	1,603	1,589	1,576	1,564	1,553	1,543
65	1,672	1,649	1,628	1,610	1,594	1,580	1,567	1,555	1,544	1,534
70	1,665	1,641	1,621	1,603	1,587	1,572	1,559	1,547	1,536	1,526
75	1,658	1,635	1,614	1,596	1,580	1,565	1,552	1,540	1,529	1,519
80	1,653	1,629	1,609	1,590	1,574	1,559	1,546	1,534	1,523	1,513
85	1,648	1,624	1,604	1,585	1,569	1,554	1,541	1,529	1,518	1,507
90	1,643	1,620	1,599	1,581	1,564	1,550	1,536	1,524	1,513	1,503
95	1,640	1,616	1,595	1,577	1,560	1,545	1,532	1,520	1,509	1,498
100	1,636	1,612	1,592	1,573	1,557	1,542	1,528	1,516	1,505	1,494
110	1,630	1,606	1,585	1,567	1,550	1,535	1,522	1,509	1,498	1,488
120	1,625	1,601	1,580	1,562	1,545	1,530	1,516	1,504	1,493	1,482
130	1,621	1,597	1,576	1,557	1,541	1,525	1,512	1,499	1,488	1,477
140	1,617	1,593	1,572	1,553	1,537	1,522	1,508	1,495	1,484	1,473
150	1,614	1,590	1,569	1,550	1,533	1,518	1,504	1,492	1,480	1,470
160	1,611	1,587	1,566	1,547	1,530	1,515	1,502	1,489	1,477	1,467
170	1,609	1,585	1,564	1,545	1,528	1,513	1,499	1,486	1,475	1,464
180	1,607	1,583	1,561	1,543	1,526	1,510	1,497	1,484	1,472	1,462
190	1,605	1,581	1,559	1,541	1,524	1,508	1,494	1,482	1,470	1,459
200	1,603	1,579	1,558	1,539	1,522	1,507	1,493	1,480	1,468	1,458
250	1,597	1,572	1,551	1,532	1,515	1,499	1,485	1,473	1,461	1,450
300	1,592	1,568	1,546	1,527	1,510	1,495	1,481	1,468	1,456	1,445
400	1,587	1,562	1,541	1,522	1,504	1,489	1,475	1,462	1,450	1,439
500	1,583	1,559	1,537	1,518	1,501	1,485	1,471	1,458	1,446	1,435
600	1,581	1,557	1,535	1,516	1,499	1,483	1,469	1,456	1,444	1,433

## Fisher-eloszlás

 $\varepsilon = 0,2$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	1,839	1,846	1,804	1,768	1,740	1,718	1,700	1,686	1,673	1,663
14	1,809	1,809	1,765	1,727	1,697	1,674	1,655	1,639	1,626	1,615
16	1,787	1,783	1,736	1,696	1,665	1,641	1,621	1,605	1,591	1,580
18	1,770	1,762	1,713	1,673	1,641	1,616	1,596	1,579	1,565	1,553
20	1,757	1,746	1,696	1,654	1,622	1,596	1,575	1,558	1,544	1,531
25	1,733	1,718	1,665	1,622	1,588	1,561	1,539	1,521	1,506	1,493
30	1,717	1,699	1,645	1,600	1,565	1,538	1,515	1,497	1,481	1,468
35	1,706	1,686	1,630	1,585	1,550	1,521	1,499	1,480	1,464	1,450
40	1,698	1,676	1,620	1,574	1,538	1,509	1,486	1,467	1,451	1,437
45	1,692	1,668	1,611	1,565	1,529	1,500	1,476	1,457	1,440	1,426
50	1,687	1,662	1,605	1,558	1,522	1,492	1,469	1,449	1,432	1,418
55	1,683	1,657	1,599	1,552	1,516	1,486	1,462	1,443	1,426	1,411
60	1,679	1,653	1,595	1,548	1,511	1,481	1,457	1,437	1,420	1,406
65	1,676	1,650	1,591	1,544	1,507	1,477	1,453	1,433	1,416	1,401
70	1,674	1,647	1,588	1,540	1,503	1,473	1,449	1,429	1,412	1,397
75	1,672	1,644	1,585	1,538	1,500	1,470	1,446	1,425	1,408	1,393
80	1,670	1,642	1,583	1,535	1,497	1,467	1,443	1,422	1,405	1,390
85	1,668	1,640	1,581	1,533	1,495	1,465	1,440	1,420	1,402	1,387
90	1,667	1,639	1,579	1,531	1,493	1,463	1,438	1,418	1,400	1,385
95	1,665	1,637	1,577	1,529	1,491	1,461	1,436	1,415	1,398	1,383
100	1,664	1,636	1,576	1,527	1,489	1,459	1,434	1,414	1,396	1,381
110	1,662	1,633	1,573	1,525	1,487	1,456	1,431	1,410	1,393	1,378
120	1,661	1,631	1,571	1,522	1,484	1,454	1,429	1,408	1,390	1,375
130	1,659	1,630	1,569	1,520	1,482	1,452	1,426	1,406	1,388	1,372
140	1,658	1,628	1,567	1,519	1,480	1,450	1,425	1,404	1,386	1,370
150	1,657	1,627	1,566	1,517	1,479	1,448	1,423	1,402	1,384	1,369
160	1,656	1,626	1,565	1,516	1,478	1,447	1,422	1,401	1,383	1,367
170	1,655	1,625	1,564	1,515	1,476	1,446	1,420	1,399	1,381	1,366
180	1,654	1,624	1,563	1,514	1,475	1,444	1,419	1,398	1,380	1,365
190	1,654	1,623	1,562	1,513	1,474	1,444	1,418	1,397	1,379	1,363
200	1,653	1,622	1,561	1,512	1,474	1,443	1,417	1,396	1,378	1,363
250	1,651	1,620	1,559	1,509	1,470	1,439	1,414	1,393	1,375	1,359
300	1,650	1,618	1,557	1,507	1,468	1,437	1,412	1,390	1,372	1,356
400	1,648	1,616	1,554	1,505	1,466	1,434	1,409	1,387	1,369	1,353
500	1,647	1,615	1,553	1,503	1,464	1,433	1,407	1,386	1,367	1,352
600	1,646	1,614	1,552	1,502	1,463	1,432	1,406	1,385	1,366	1,350

## Fisher-eloszlás

 $\varepsilon = 0,2$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	1,654									
14	1,606	1,598	1,590							
16	1,570	1,561	1,554	1,547	1,541					
18	1,543	1,534	1,526	1,519	1,513	1,507	1,502			
20	1,521	1,512	1,503	1,496	1,490	1,484	1,479	1,474	1,470	
25	1,482	1,472	1,464	1,456	1,449	1,443	1,437	1,432	1,427	1,423
30	1,456	1,446	1,437	1,429	1,422	1,416	1,410	1,404	1,399	1,395
35	1,438	1,428	1,418	1,410	1,403	1,396	1,390	1,384	1,379	1,375
40	1,424	1,414	1,404	1,396	1,388	1,381	1,375	1,370	1,364	1,360
45	1,414	1,403	1,393	1,385	1,377	1,370	1,364	1,358	1,353	1,348
50	1,405	1,394	1,385	1,376	1,368	1,361	1,355	1,349	1,343	1,338
55	1,399	1,387	1,378	1,369	1,361	1,354	1,347	1,341	1,336	1,331
60	1,393	1,382	1,372	1,363	1,355	1,347	1,341	1,335	1,329	1,324
65	1,388	1,377	1,367	1,358	1,350	1,342	1,336	1,329	1,324	1,319
70	1,384	1,372	1,362	1,353	1,345	1,338	1,331	1,325	1,319	1,314
75	1,380	1,369	1,359	1,350	1,341	1,334	1,327	1,321	1,315	1,310
80	1,377	1,366	1,355	1,346	1,338	1,330	1,324	1,317	1,312	1,306
85	1,374	1,363	1,352	1,343	1,335	1,327	1,321	1,314	1,308	1,303
90	1,372	1,360	1,350	1,341	1,332	1,325	1,318	1,311	1,306	1,300
95	1,370	1,358	1,348	1,338	1,330	1,322	1,315	1,309	1,303	1,298
100	1,368	1,356	1,346	1,336	1,328	1,320	1,313	1,307	1,301	1,295
110	1,364	1,352	1,342	1,333	1,324	1,316	1,309	1,303	1,297	1,292
120	1,361	1,350	1,339	1,330	1,321	1,313	1,306	1,300	1,294	1,288
130	1,359	1,347	1,337	1,327	1,319	1,311	1,304	1,297	1,291	1,285
140	1,357	1,345	1,334	1,325	1,316	1,308	1,301	1,295	1,289	1,283
150	1,355	1,343	1,333	1,323	1,314	1,307	1,299	1,293	1,287	1,281
160	1,354	1,342	1,331	1,321	1,313	1,305	1,298	1,291	1,285	1,279
170	1,352	1,340	1,330	1,320	1,311	1,303	1,296	1,289	1,283	1,278
180	1,351	1,339	1,328	1,319	1,310	1,302	1,295	1,288	1,282	1,276
190	1,350	1,338	1,327	1,317	1,309	1,301	1,293	1,287	1,281	1,275
200	1,349	1,337	1,326	1,316	1,308	1,300	1,292	1,286	1,280	1,274
250	1,345	1,333	1,322	1,312	1,304	1,296	1,288	1,281	1,275	1,269
300	1,343	1,330	1,320	1,310	1,301	1,293	1,285	1,279	1,272	1,266
400	1,339	1,327	1,316	1,306	1,298	1,289	1,282	1,275	1,269	1,263
500	1,338	1,325	1,314	1,304	1,295	1,287	1,280	1,273	1,267	1,261
600	1,336	1,324	1,313	1,303	1,294	1,286	1,278	1,272	1,265	1,259



$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,001$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	7,642	6,788	6,421	6,212	6,076	5,981	5,910	5,855	5,811	5,775
14	6,787	5,958	5,600	5,395	5,261	5,167	5,097	5,042	4,999	4,963
16	6,211	5,402	5,050	4,849	4,717	4,624	4,554	4,500	4,456	4,421
18	5,797	5,004	4,658	4,460	4,329	4,237	4,167	4,113	4,070	4,035
20	5,485	4,705	4,365	4,168	4,039	3,947	3,878	3,824	3,781	3,746
25	4,964	4,209	3,877	3,685	3,558	3,467	3,399	3,345	3,302	3,266
30	4,643	3,904	3,579	3,389	3,263	3,173	3,105	3,051	3,008	2,973
35	4,426	3,698	3,377	3,190	3,065	2,975	2,907	2,853	2,810	2,774
40	4,269	3,550	3,232	3,046	2,921	2,832	2,764	2,710	2,667	2,631
45	4,150	3,438	3,122	2,937	2,813	2,724	2,656	2,602	2,559	2,522
50	4,057	3,350	3,036	2,852	2,728	2,639	2,571	2,517	2,474	2,438
55	3,982	3,280	2,967	2,784	2,660	2,571	2,503	2,449	2,405	2,369
60	3,921	3,222	2,911	2,727	2,604	2,515	2,447	2,393	2,349	2,313
65	3,869	3,174	2,863	2,681	2,558	2,468	2,400	2,346	2,302	2,266
70	3,826	3,132	2,823	2,641	2,518	2,429	2,360	2,306	2,262	2,226
75	3,788	3,097	2,789	2,606	2,484	2,394	2,326	2,272	2,228	2,191
80	3,756	3,067	2,759	2,577	2,454	2,365	2,296	2,242	2,198	2,161
85	3,727	3,040	2,732	2,551	2,428	2,339	2,270	2,216	2,172	2,135
90	3,702	3,016	2,709	2,527	2,405	2,316	2,247	2,193	2,148	2,111
95	3,679	2,995	2,688	2,507	2,384	2,295	2,227	2,172	2,128	2,090
100	3,659	2,976	2,670	2,488	2,366	2,277	2,208	2,153	2,109	2,072
110	3,625	2,943	2,638	2,457	2,334	2,245	2,176	2,122	2,077	2,039
120	3,596	2,916	2,611	2,430	2,308	2,219	2,150	2,095	2,050	2,013
130	3,572	2,893	2,589	2,408	2,286	2,196	2,128	2,073	2,028	1,990
140	3,551	2,874	2,570	2,389	2,267	2,177	2,109	2,054	2,008	1,971
150	3,533	2,857	2,554	2,373	2,251	2,161	2,092	2,037	1,992	1,954
160	3,518	2,843	2,539	2,359	2,236	2,147	2,078	2,023	1,977	1,939
170	3,504	2,830	2,527	2,346	2,224	2,134	2,065	2,010	1,964	1,926
180	3,492	2,818	2,516	2,335	2,213	2,123	2,054	1,999	1,953	1,915
190	3,481	2,808	2,506	2,325	2,203	2,113	2,044	1,988	1,943	1,905
200	3,472	2,799	2,497	2,316	2,194	2,104	2,035	1,979	1,934	1,896
250	3,435	2,765	2,463	2,282	2,160	2,070	2,001	1,945	1,899	1,861
300	3,411	2,742	2,440	2,260	2,137	2,047	1,978	1,922	1,876	1,837
400	3,380	2,713	2,412	2,232	2,109	2,019	1,949	1,893	1,847	1,808
500	3,362	2,696	2,395	2,215	2,093	2,002	1,932	1,876	1,830	1,791
600	3,350	2,685	2,384	2,204	2,081	1,991	1,921	1,865	1,818	1,779

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,001$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	5,745									
14	4,933	4,908	4,887							
16	4,391	4,366	4,345	4,326	4,309					
18	4,005	3,980	3,958	3,939	3,923	3,908	3,895			
20	3,716	3,691	3,669	3,650	3,634	3,619	3,606	3,594	3,584	
25	3,237	3,211	3,189	3,170	3,154	3,139	3,126	3,114	3,103	3,093
30	2,943	2,917	2,895	2,876	2,859	2,844	2,831	2,819	2,808	2,798
35	2,744	2,718	2,696	2,677	2,660	2,644	2,631	2,619	2,608	2,598
40	2,601	2,575	2,552	2,533	2,515	2,500	2,486	2,474	2,463	2,453
45	2,492	2,466	2,443	2,424	2,406	2,391	2,377	2,364	2,353	2,343
50	2,407	2,381	2,358	2,338	2,321	2,305	2,291	2,278	2,267	2,256
55	2,338	2,312	2,289	2,269	2,251	2,236	2,221	2,209	2,197	2,186
60	2,282	2,255	2,232	2,212	2,194	2,179	2,164	2,151	2,140	2,129
65	2,235	2,208	2,185	2,165	2,147	2,131	2,116	2,103	2,091	2,081
70	2,194	2,168	2,144	2,124	2,106	2,090	2,075	2,062	2,050	2,039
75	2,160	2,133	2,110	2,089	2,071	2,055	2,040	2,027	2,015	2,004
80	2,130	2,103	2,079	2,059	2,040	2,024	2,009	1,996	1,984	1,973
85	2,103	2,076	2,053	2,032	2,013	1,997	1,982	1,969	1,957	1,946
90	2,080	2,053	2,029	2,008	1,990	1,973	1,958	1,945	1,933	1,921
95	2,059	2,031	2,008	1,987	1,968	1,952	1,937	1,923	1,911	1,900
100	2,040	2,013	1,989	1,968	1,949	1,933	1,918	1,904	1,892	1,880
110	2,008	1,980	1,956	1,935	1,916	1,900	1,884	1,871	1,858	1,847
120	1,981	1,953	1,929	1,908	1,889	1,872	1,857	1,843	1,830	1,819
130	1,958	1,930	1,906	1,885	1,866	1,849	1,833	1,820	1,807	1,795
140	1,939	1,911	1,886	1,865	1,846	1,829	1,813	1,799	1,787	1,775
150	1,922	1,894	1,869	1,848	1,829	1,812	1,796	1,782	1,769	1,757
160	1,907	1,879	1,855	1,833	1,814	1,797	1,781	1,767	1,754	1,742
170	1,894	1,866	1,841	1,820	1,800	1,783	1,768	1,753	1,740	1,728
180	1,883	1,854	1,830	1,808	1,789	1,771	1,756	1,741	1,728	1,716
190	1,872	1,844	1,819	1,798	1,778	1,761	1,745	1,731	1,717	1,705
200	1,863	1,835	1,810	1,788	1,769	1,751	1,735	1,721	1,708	1,696
250	1,828	1,799	1,774	1,752	1,732	1,715	1,699	1,684	1,671	1,658
300	1,804	1,776	1,750	1,728	1,708	1,690	1,674	1,659	1,646	1,633
400	1,775	1,746	1,720	1,698	1,678	1,660	1,643	1,628	1,615	1,602
500	1,757	1,728	1,702	1,680	1,659	1,641	1,625	1,609	1,596	1,583
600	1,745	1,716	1,690	1,668	1,647	1,629	1,612	1,597	1,583	1,570

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,01$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	4,392	4,006	3,835	3,737	3,673	3,628	3,594	3,568	3,547	3,530
14	4,073	3,678	3,502	3,400	3,333	3,286	3,251	3,224	3,202	3,184
16	3,849	3,448	3,268	3,164	3,096	3,048	3,011	2,983	2,960	2,942
18	3,684	3,278	3,096	2,991	2,921	2,871	2,834	2,805	2,782	2,762
20	3,556	3,147	2,964	2,857	2,786	2,735	2,697	2,668	2,644	2,624
25	3,337	2,924	2,737	2,628	2,555	2,502	2,463	2,432	2,407	2,387
30	3,198	2,782	2,593	2,482	2,408	2,354	2,314	2,282	2,256	2,235
35	3,102	2,684	2,494	2,381	2,306	2,252	2,210	2,178	2,151	2,130
40	3,032	2,612	2,421	2,308	2,231	2,176	2,134	2,101	2,074	2,052
45	2,978	2,558	2,365	2,251	2,174	2,118	2,076	2,042	2,015	1,992
50	2,936	2,514	2,321	2,207	2,129	2,073	2,030	1,996	1,968	1,945
55	2,901	2,479	2,286	2,170	2,092	2,036	1,992	1,958	1,930	1,906
60	2,873	2,450	2,256	2,140	2,062	2,005	1,961	1,926	1,898	1,875
65	2,849	2,426	2,232	2,115	2,036	1,979	1,935	1,900	1,871	1,848
70	2,829	2,405	2,210	2,094	2,015	1,957	1,913	1,877	1,848	1,824
75	2,811	2,388	2,192	2,075	1,996	1,938	1,893	1,858	1,829	1,805
80	2,796	2,372	2,176	2,059	1,979	1,921	1,876	1,841	1,811	1,787
85	2,783	2,358	2,162	2,045	1,965	1,906	1,861	1,826	1,796	1,772
90	2,771	2,346	2,150	2,032	1,952	1,893	1,848	1,812	1,783	1,758
95	2,761	2,336	2,139	2,021	1,941	1,882	1,836	1,800	1,771	1,746
100	2,751	2,326	2,129	2,011	1,930	1,871	1,826	1,790	1,760	1,735
110	2,735	2,309	2,112	1,994	1,913	1,853	1,808	1,771	1,741	1,716
120	2,721	2,295	2,098	1,979	1,898	1,838	1,792	1,755	1,725	1,700
130	2,710	2,284	2,086	1,967	1,886	1,826	1,779	1,742	1,712	1,687
140	2,700	2,274	2,076	1,956	1,875	1,815	1,768	1,731	1,701	1,675
150	2,692	2,265	2,067	1,947	1,866	1,805	1,759	1,721	1,691	1,665
160	2,684	2,257	2,059	1,939	1,858	1,797	1,750	1,713	1,682	1,656
170	2,678	2,251	2,052	1,933	1,850	1,790	1,743	1,705	1,675	1,649
180	2,672	2,245	2,046	1,926	1,844	1,783	1,736	1,699	1,668	1,642
190	2,667	2,240	2,041	1,921	1,838	1,778	1,731	1,693	1,662	1,636
200	2,662	2,235	2,036	1,916	1,833	1,773	1,725	1,687	1,656	1,630
250	2,645	2,217	2,018	1,897	1,814	1,753	1,705	1,667	1,635	1,609
300	2,633	2,205	2,005	1,884	1,801	1,740	1,692	1,653	1,622	1,595
400	2,619	2,190	1,990	1,869	1,785	1,723	1,675	1,636	1,604	1,577
500	2,610	2,181	1,981	1,859	1,776	1,713	1,665	1,626	1,594	1,566
600	2,604	2,175	1,975	1,853	1,769	1,707	1,658	1,619	1,587	1,559

**φ-eloszlás**                      **ε = 0,01**

k\l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	3,516									
14	3,169	3,156	3,146							
16	2,926	2,913	2,902	2,892	2,883					
18	2,746	2,733	2,721	2,711	2,702	2,694	2,687			
20	2,608	2,594	2,582	2,572	2,562	2,554	2,547	2,541	2,535	
25	2,369	2,355	2,342	2,331	2,321	2,313	2,305	2,298	2,292	2,287
30	2,217	2,202	2,189	2,177	2,167	2,158	2,150	2,143	2,137	2,131
35	2,111	2,096	2,082	2,070	2,060	2,050	2,042	2,035	2,028	2,022
40	2,033	2,017	2,003	1,991	1,980	1,971	1,962	1,955	1,948	1,941
45	1,973	1,957	1,943	1,930	1,919	1,909	1,901	1,893	1,886	1,879
50	1,926	1,909	1,894	1,882	1,871	1,861	1,852	1,843	1,836	1,829
55	1,887	1,870	1,855	1,842	1,831	1,821	1,812	1,803	1,796	1,789
60	1,855	1,837	1,823	1,809	1,798	1,788	1,778	1,770	1,762	1,755
65	1,827	1,810	1,795	1,782	1,770	1,759	1,750	1,742	1,734	1,727
70	1,804	1,787	1,771	1,758	1,746	1,735	1,726	1,717	1,709	1,702
75	1,784	1,766	1,751	1,737	1,725	1,715	1,705	1,696	1,688	1,681
80	1,766	1,749	1,733	1,719	1,707	1,696	1,687	1,678	1,670	1,662
85	1,751	1,733	1,717	1,703	1,691	1,680	1,670	1,662	1,653	1,646
90	1,737	1,719	1,703	1,689	1,677	1,666	1,656	1,647	1,639	1,631
95	1,725	1,706	1,691	1,677	1,664	1,653	1,643	1,634	1,626	1,618
100	1,714	1,695	1,679	1,665	1,653	1,642	1,631	1,622	1,614	1,606
110	1,694	1,676	1,660	1,645	1,633	1,621	1,611	1,602	1,594	1,586
120	1,678	1,660	1,643	1,629	1,616	1,605	1,594	1,585	1,576	1,569
130	1,665	1,646	1,630	1,615	1,602	1,591	1,580	1,571	1,562	1,554
140	1,653	1,634	1,618	1,603	1,590	1,578	1,568	1,558	1,549	1,541
150	1,643	1,624	1,607	1,593	1,579	1,568	1,557	1,547	1,539	1,530
160	1,634	1,615	1,598	1,583	1,570	1,558	1,548	1,538	1,529	1,521
170	1,626	1,607	1,590	1,575	1,562	1,550	1,539	1,530	1,521	1,512
180	1,619	1,600	1,583	1,568	1,555	1,543	1,532	1,522	1,513	1,505
190	1,613	1,594	1,577	1,562	1,548	1,536	1,525	1,515	1,506	1,498
200	1,608	1,588	1,571	1,556	1,542	1,530	1,519	1,509	1,500	1,492
250	1,586	1,566	1,549	1,534	1,520	1,508	1,496	1,486	1,477	1,468
300	1,572	1,552	1,534	1,519	1,505	1,492	1,481	1,471	1,461	1,452
400	1,554	1,534	1,516	1,500	1,486	1,473	1,462	1,451	1,441	1,432
500	1,543	1,523	1,505	1,489	1,474	1,462	1,450	1,439	1,429	1,420
600	1,536	1,515	1,497	1,481	1,467	1,454	1,442	1,431	1,421	1,412

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,02$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	3,617	3,344	3,220	3,149	3,102	3,069	3,044	3,025	3,009	2,997
14	3,398	3,112	2,981	2,906	2,856	2,820	2,794	2,773	2,757	2,744
16	3,242	2,947	2,812	2,733	2,681	2,644	2,617	2,595	2,578	2,564
18	3,125	2,824	2,686	2,605	2,551	2,513	2,484	2,462	2,444	2,429
20	3,035	2,729	2,588	2,505	2,450	2,411	2,381	2,358	2,339	2,324
25	2,880	2,564	2,419	2,333	2,275	2,234	2,202	2,178	2,158	2,142
30	2,780	2,459	2,310	2,222	2,163	2,120	2,087	2,062	2,041	2,024
35	2,711	2,386	2,235	2,145	2,084	2,040	2,007	1,981	1,959	1,941
40	2,660	2,332	2,179	2,088	2,026	1,982	1,947	1,920	1,898	1,880
45	2,621	2,291	2,137	2,044	1,982	1,936	1,901	1,874	1,852	1,833
50	2,590	2,258	2,103	2,010	1,946	1,900	1,865	1,837	1,814	1,795
55	2,565	2,232	2,076	1,982	1,918	1,871	1,835	1,807	1,784	1,765
60	2,544	2,210	2,053	1,958	1,894	1,847	1,811	1,782	1,759	1,739
65	2,527	2,192	2,034	1,939	1,874	1,826	1,790	1,761	1,737	1,717
70	2,512	2,176	2,018	1,922	1,857	1,809	1,772	1,743	1,719	1,699
75	2,499	2,162	2,003	1,907	1,842	1,794	1,757	1,727	1,703	1,683
80	2,488	2,151	1,991	1,895	1,829	1,780	1,743	1,714	1,689	1,669
85	2,478	2,140	1,980	1,884	1,817	1,769	1,731	1,701	1,677	1,656
90	2,470	2,131	1,971	1,874	1,807	1,758	1,721	1,691	1,666	1,645
95	2,462	2,123	1,962	1,865	1,798	1,749	1,711	1,681	1,656	1,636
100	2,455	2,115	1,955	1,857	1,790	1,741	1,703	1,672	1,648	1,627
110	2,443	2,103	1,941	1,843	1,776	1,727	1,688	1,658	1,632	1,611
120	2,433	2,092	1,930	1,832	1,764	1,715	1,676	1,645	1,620	1,598
130	2,425	2,083	1,921	1,822	1,755	1,704	1,666	1,635	1,609	1,588
140	2,418	2,076	1,913	1,814	1,746	1,696	1,657	1,626	1,600	1,578
150	2,412	2,069	1,906	1,807	1,739	1,688	1,649	1,618	1,592	1,570
160	2,406	2,063	1,900	1,801	1,732	1,682	1,642	1,611	1,585	1,563
170	2,401	2,058	1,895	1,795	1,727	1,676	1,636	1,605	1,579	1,557
180	2,397	2,054	1,890	1,790	1,722	1,671	1,631	1,599	1,573	1,551
190	2,393	2,050	1,886	1,786	1,717	1,666	1,626	1,595	1,568	1,546
200	2,390	2,046	1,882	1,782	1,713	1,662	1,622	1,590	1,564	1,542
250	2,377	2,032	1,868	1,767	1,698	1,646	1,606	1,574	1,547	1,524
300	2,369	2,023	1,858	1,757	1,688	1,636	1,595	1,563	1,536	1,513
400	2,358	2,012	1,846	1,745	1,675	1,622	1,582	1,549	1,522	1,498
500	2,352	2,005	1,839	1,738	1,667	1,615	1,574	1,540	1,513	1,490
600	2,347	2,000	1,835	1,733	1,662	1,609	1,568	1,535	1,507	1,484

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,02$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	2,986									
14	2,732	2,723	2,715							
16	2,552	2,542	2,533	2,526	2,519					
18	2,416	2,406	2,397	2,389	2,382	2,376	2,371			
20	2,311	2,300	2,291	2,283	2,276	2,269	2,264	2,259	2,254	
25	2,128	2,116	2,106	2,098	2,090	2,083	2,077	2,072	2,067	2,062
30	2,010	1,997	1,987	1,978	1,970	1,962	1,956	1,950	1,945	1,940
35	1,927	1,914	1,903	1,893	1,885	1,877	1,870	1,864	1,859	1,854
40	1,865	1,852	1,840	1,831	1,822	1,814	1,807	1,801	1,795	1,790
45	1,817	1,804	1,792	1,782	1,773	1,765	1,758	1,751	1,745	1,740
50	1,779	1,766	1,754	1,743	1,734	1,726	1,718	1,712	1,706	1,700
55	1,748	1,734	1,722	1,711	1,702	1,694	1,686	1,679	1,673	1,667
60	1,722	1,708	1,696	1,685	1,675	1,667	1,659	1,652	1,646	1,640
65	1,701	1,686	1,674	1,663	1,653	1,644	1,636	1,629	1,623	1,617
70	1,682	1,667	1,655	1,643	1,634	1,625	1,617	1,610	1,603	1,597
75	1,666	1,651	1,638	1,627	1,617	1,608	1,600	1,592	1,586	1,580
80	1,652	1,637	1,624	1,612	1,602	1,593	1,585	1,577	1,571	1,564
85	1,639	1,624	1,611	1,599	1,589	1,580	1,572	1,564	1,557	1,551
90	1,628	1,613	1,599	1,588	1,577	1,568	1,560	1,552	1,545	1,539
95	1,618	1,603	1,589	1,577	1,567	1,558	1,549	1,542	1,535	1,528
100	1,609	1,593	1,580	1,568	1,558	1,548	1,540	1,532	1,525	1,518
110	1,593	1,578	1,564	1,552	1,541	1,532	1,523	1,515	1,508	1,502
120	1,580	1,564	1,551	1,539	1,528	1,518	1,509	1,501	1,494	1,487
130	1,569	1,553	1,539	1,527	1,516	1,506	1,498	1,489	1,482	1,475
140	1,560	1,544	1,530	1,517	1,506	1,496	1,487	1,479	1,472	1,465
150	1,551	1,535	1,521	1,509	1,498	1,488	1,479	1,470	1,463	1,456
160	1,544	1,528	1,514	1,501	1,490	1,480	1,471	1,463	1,455	1,448
170	1,538	1,522	1,507	1,495	1,483	1,473	1,464	1,456	1,448	1,441
180	1,532	1,516	1,501	1,489	1,477	1,467	1,458	1,449	1,442	1,435
190	1,527	1,511	1,496	1,483	1,472	1,462	1,452	1,444	1,436	1,429
200	1,523	1,506	1,491	1,479	1,467	1,457	1,447	1,439	1,431	1,424
250	1,505	1,488	1,473	1,460	1,449	1,438	1,429	1,420	1,412	1,405
300	1,493	1,476	1,461	1,448	1,436	1,426	1,416	1,407	1,399	1,391
400	1,479	1,461	1,446	1,433	1,421	1,410	1,400	1,391	1,382	1,375
500	1,470	1,452	1,437	1,423	1,411	1,400	1,390	1,381	1,372	1,365
600	1,464	1,446	1,431	1,417	1,405	1,394	1,383	1,374	1,366	1,358

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,05$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2,700	2,563	2,495	2,455	2,429	2,410	2,396	2,384	2,376	2,368
14	2,579	2,428	2,353	2,309	2,280	2,259	2,243	2,231	2,221	2,213
16	2,492	2,330	2,251	2,204	2,172	2,149	2,132	2,119	2,108	2,100
18	2,426	2,257	2,174	2,124	2,091	2,067	2,049	2,034	2,023	2,014
20	2,375	2,200	2,113	2,062	2,027	2,002	1,983	1,968	1,956	1,946
25	2,286	2,099	2,008	1,952	1,915	1,887	1,867	1,850	1,837	1,827
30	2,228	2,034	1,939	1,881	1,841	1,813	1,791	1,774	1,760	1,748
35	2,187	1,989	1,891	1,831	1,790	1,760	1,737	1,719	1,704	1,692
40	2,158	1,955	1,855	1,794	1,752	1,721	1,697	1,679	1,663	1,651
45	2,135	1,930	1,827	1,765	1,722	1,690	1,666	1,647	1,631	1,618
50	2,117	1,909	1,806	1,742	1,698	1,666	1,641	1,622	1,606	1,592
55	2,102	1,892	1,788	1,723	1,679	1,646	1,621	1,601	1,585	1,571
60	2,090	1,879	1,773	1,708	1,663	1,630	1,604	1,584	1,567	1,553
65	2,079	1,867	1,761	1,695	1,650	1,616	1,590	1,569	1,553	1,538
70	2,071	1,857	1,750	1,684	1,638	1,604	1,578	1,557	1,540	1,525
75	2,063	1,848	1,741	1,674	1,628	1,594	1,567	1,546	1,529	1,514
80	2,056	1,841	1,733	1,666	1,619	1,585	1,558	1,537	1,519	1,504
85	2,051	1,834	1,726	1,658	1,611	1,577	1,550	1,528	1,511	1,496
90	2,045	1,828	1,719	1,652	1,605	1,570	1,543	1,521	1,503	1,488
95	2,041	1,823	1,714	1,646	1,598	1,563	1,536	1,514	1,496	1,481
100	2,037	1,819	1,709	1,640	1,593	1,558	1,530	1,508	1,490	1,475
110	2,030	1,810	1,700	1,631	1,583	1,548	1,520	1,498	1,479	1,464
120	2,024	1,804	1,693	1,624	1,575	1,540	1,512	1,489	1,471	1,455
130	2,019	1,798	1,687	1,617	1,569	1,533	1,504	1,482	1,463	1,447
140	2,015	1,793	1,681	1,612	1,563	1,527	1,498	1,475	1,457	1,441
150	2,011	1,789	1,677	1,607	1,558	1,521	1,493	1,470	1,451	1,435
160	2,008	1,785	1,673	1,603	1,554	1,517	1,488	1,465	1,446	1,430
170	2,005	1,782	1,669	1,599	1,550	1,513	1,484	1,461	1,442	1,425
180	2,002	1,779	1,666	1,596	1,546	1,509	1,481	1,457	1,438	1,422
190	2,000	1,777	1,664	1,593	1,543	1,506	1,477	1,454	1,434	1,418
200	1,998	1,774	1,661	1,590	1,540	1,503	1,474	1,451	1,431	1,415
250	1,990	1,766	1,652	1,580	1,530	1,492	1,463	1,439	1,419	1,403
300	1,985	1,760	1,645	1,573	1,523	1,485	1,455	1,431	1,411	1,394
400	1,979	1,752	1,637	1,565	1,514	1,476	1,446	1,422	1,401	1,384
500	1,975	1,748	1,633	1,560	1,509	1,471	1,440	1,416	1,395	1,378
600	1,973	1,745	1,630	1,557	1,506	1,467	1,437	1,412	1,391	1,374

$\Phi$ -eloszlás $\epsilon = 0,05$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	2,362									
14	2,206	2,200	2,195							
16	2,092	2,086	2,081	2,076	2,072					
18	2,006	1,999	1,993	1,988	1,984	1,980	1,977			
20	1,938	1,931	1,925	1,919	1,915	1,911	1,907	1,904	1,901	
25	1,817	1,810	1,803	1,797	1,792	1,787	1,783	1,780	1,776	1,773
30	1,738	1,730	1,723	1,716	1,711	1,706	1,702	1,698	1,694	1,691
35	1,682	1,673	1,666	1,659	1,653	1,648	1,643	1,639	1,635	1,632
40	1,640	1,631	1,623	1,616	1,610	1,604	1,599	1,595	1,591	1,587
45	1,607	1,598	1,590	1,582	1,576	1,570	1,565	1,561	1,556	1,553
50	1,581	1,571	1,563	1,555	1,549	1,543	1,538	1,533	1,529	1,525
55	1,560	1,550	1,541	1,533	1,526	1,520	1,515	1,510	1,506	1,502
60	1,542	1,531	1,522	1,515	1,508	1,502	1,496	1,491	1,486	1,482
65	1,526	1,516	1,507	1,499	1,492	1,486	1,480	1,475	1,470	1,466
70	1,513	1,503	1,494	1,485	1,478	1,472	1,466	1,461	1,456	1,452
75	1,502	1,491	1,482	1,474	1,466	1,460	1,454	1,449	1,444	1,439
80	1,492	1,481	1,472	1,463	1,456	1,449	1,443	1,438	1,433	1,428
85	1,483	1,472	1,463	1,454	1,447	1,440	1,434	1,428	1,423	1,419
90	1,475	1,464	1,454	1,446	1,438	1,432	1,425	1,420	1,415	1,410
95	1,468	1,457	1,447	1,439	1,431	1,424	1,418	1,412	1,407	1,402
100	1,462	1,451	1,441	1,432	1,424	1,417	1,411	1,405	1,400	1,395
110	1,451	1,439	1,429	1,421	1,413	1,406	1,399	1,393	1,388	1,383
120	1,442	1,430	1,420	1,411	1,403	1,396	1,389	1,383	1,378	1,373
130	1,434	1,422	1,412	1,403	1,395	1,387	1,381	1,375	1,369	1,364
140	1,427	1,415	1,405	1,396	1,387	1,380	1,373	1,367	1,362	1,357
150	1,421	1,409	1,399	1,390	1,381	1,374	1,367	1,361	1,355	1,350
160	1,416	1,404	1,394	1,384	1,376	1,368	1,361	1,355	1,350	1,344
170	1,412	1,399	1,389	1,379	1,371	1,363	1,357	1,350	1,345	1,339
180	1,408	1,395	1,385	1,375	1,367	1,359	1,352	1,346	1,340	1,335
190	1,404	1,392	1,381	1,371	1,363	1,355	1,348	1,342	1,336	1,331
200	1,401	1,388	1,378	1,368	1,359	1,352	1,345	1,338	1,332	1,327
250	1,388	1,376	1,365	1,355	1,346	1,338	1,331	1,324	1,318	1,313
300	1,380	1,367	1,356	1,346	1,337	1,329	1,322	1,315	1,309	1,303
400	1,369	1,356	1,345	1,335	1,326	1,317	1,310	1,303	1,297	1,291
500	1,363	1,350	1,338	1,328	1,319	1,310	1,303	1,296	1,289	1,284
600	1,359	1,346	1,334	1,324	1,314	1,306	1,298	1,291	1,285	1,279



$\Phi$ -eloszlás $\varepsilon = 0,1$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	2,071	2,028	2,000	1,982	1,969	1,960	1,953	1,948	1,944	1,940
14	2,003	1,948	1,914	1,892	1,877	1,866	1,858	1,851	1,846	1,842
16	1,954	1,889	1,851	1,826	1,809	1,797	1,787	1,780	1,774	1,769
18	1,916	1,845	1,803	1,776	1,757	1,744	1,733	1,725	1,719	1,713
20	1,887	1,810	1,765	1,736	1,716	1,702	1,691	1,682	1,675	1,669
25	1,835	1,748	1,698	1,666	1,643	1,627	1,615	1,605	1,597	1,590
30	1,802	1,708	1,654	1,620	1,596	1,578	1,564	1,553	1,544	1,537
35	1,778	1,680	1,623	1,587	1,562	1,543	1,528	1,517	1,507	1,499
40	1,761	1,659	1,600	1,563	1,536	1,517	1,501	1,489	1,479	1,471
45	1,748	1,643	1,582	1,544	1,516	1,496	1,480	1,468	1,458	1,449
50	1,737	1,630	1,568	1,529	1,501	1,480	1,464	1,451	1,440	1,431
55	1,728	1,619	1,557	1,516	1,488	1,467	1,450	1,437	1,426	1,416
60	1,721	1,611	1,547	1,506	1,477	1,455	1,438	1,425	1,414	1,404
65	1,715	1,603	1,539	1,498	1,468	1,446	1,429	1,415	1,403	1,394
70	1,710	1,597	1,532	1,490	1,460	1,438	1,420	1,406	1,395	1,385
75	1,706	1,592	1,526	1,484	1,454	1,431	1,413	1,399	1,387	1,377
80	1,702	1,587	1,521	1,478	1,448	1,425	1,407	1,392	1,380	1,370
85	1,698	1,583	1,516	1,473	1,443	1,419	1,401	1,387	1,374	1,364
90	1,695	1,579	1,512	1,469	1,438	1,415	1,396	1,381	1,369	1,359
95	1,693	1,576	1,509	1,465	1,434	1,410	1,392	1,377	1,364	1,354
100	1,690	1,573	1,505	1,461	1,430	1,406	1,388	1,373	1,360	1,350
110	1,686	1,568	1,500	1,455	1,424	1,400	1,381	1,366	1,353	1,342
120	1,682	1,564	1,495	1,450	1,418	1,394	1,375	1,360	1,347	1,336
130	1,680	1,560	1,491	1,446	1,414	1,389	1,370	1,354	1,341	1,330
140	1,677	1,557	1,488	1,442	1,410	1,385	1,366	1,350	1,337	1,326
150	1,675	1,554	1,485	1,439	1,406	1,382	1,362	1,346	1,333	1,322
160	1,673	1,552	1,482	1,436	1,403	1,379	1,359	1,343	1,330	1,318
170	1,671	1,550	1,480	1,434	1,401	1,376	1,356	1,340	1,327	1,315
180	1,670	1,548	1,478	1,432	1,399	1,373	1,354	1,337	1,324	1,312
190	1,668	1,546	1,476	1,430	1,397	1,371	1,351	1,335	1,321	1,310
200	1,667	1,545	1,474	1,428	1,395	1,369	1,349	1,333	1,319	1,308
250	1,663	1,539	1,468	1,421	1,388	1,362	1,342	1,325	1,311	1,299
300	1,660	1,536	1,464	1,417	1,383	1,357	1,336	1,320	1,305	1,293
400	1,656	1,531	1,459	1,411	1,377	1,351	1,330	1,313	1,298	1,286
500	1,654	1,528	1,456	1,408	1,373	1,347	1,326	1,309	1,294	1,282
600	1,652	1,527	1,454	1,406	1,371	1,344	1,323	1,306	1,291	1,279

$\Phi$ -eloszlás $\varepsilon = 0,1$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	1,937									
14	1,838	1,835	1,832							
16	1,765	1,761	1,758	1,756	1,753					
18	1,709	1,705	1,702	1,699	1,696	1,694	1,692			
20	1,664	1,660	1,656	1,653	1,650	1,648	1,646	1,644	1,642	
25	1,584	1,579	1,575	1,572	1,568	1,566	1,563	1,561	1,559	1,557
30	1,531	1,526	1,521	1,517	1,513	1,510	1,507	1,505	1,503	1,501
35	1,493	1,487	1,482	1,478	1,474	1,471	1,468	1,465	1,462	1,460
40	1,464	1,458	1,453	1,448	1,444	1,441	1,437	1,434	1,432	1,429
45	1,442	1,435	1,430	1,425	1,421	1,417	1,414	1,410	1,408	1,405
50	1,424	1,417	1,411	1,406	1,402	1,398	1,394	1,391	1,388	1,386
55	1,409	1,402	1,396	1,391	1,386	1,382	1,378	1,375	1,372	1,369
60	1,396	1,389	1,383	1,378	1,373	1,369	1,365	1,362	1,359	1,356
65	1,386	1,379	1,372	1,367	1,362	1,358	1,354	1,350	1,347	1,344
70	1,377	1,369	1,363	1,357	1,352	1,348	1,344	1,340	1,337	1,334
75	1,369	1,361	1,355	1,349	1,344	1,340	1,336	1,332	1,328	1,325
80	1,362	1,354	1,348	1,342	1,337	1,332	1,328	1,324	1,321	1,318
85	1,356	1,348	1,341	1,335	1,330	1,326	1,321	1,317	1,314	1,311
90	1,350	1,342	1,336	1,330	1,324	1,320	1,315	1,311	1,308	1,305
95	1,345	1,337	1,331	1,325	1,319	1,314	1,310	1,306	1,302	1,299
100	1,341	1,333	1,326	1,320	1,314	1,310	1,305	1,301	1,297	1,294
110	1,333	1,325	1,318	1,312	1,306	1,301	1,297	1,293	1,289	1,285
120	1,326	1,318	1,311	1,305	1,299	1,294	1,290	1,285	1,282	1,278
130	1,321	1,313	1,306	1,299	1,293	1,288	1,284	1,279	1,275	1,272
140	1,316	1,308	1,301	1,294	1,288	1,283	1,278	1,274	1,270	1,266
150	1,312	1,304	1,296	1,290	1,284	1,279	1,274	1,269	1,265	1,262
160	1,309	1,300	1,293	1,286	1,280	1,275	1,270	1,265	1,261	1,258
170	1,305	1,297	1,289	1,283	1,277	1,271	1,266	1,262	1,258	1,254
180	1,303	1,294	1,286	1,280	1,274	1,268	1,263	1,259	1,254	1,251
190	1,300	1,291	1,284	1,277	1,271	1,265	1,260	1,256	1,252	1,248
200	1,298	1,289	1,281	1,274	1,268	1,263	1,258	1,253	1,249	1,245
250	1,289	1,280	1,272	1,265	1,259	1,253	1,248	1,243	1,239	1,235
300	1,283	1,274	1,266	1,259	1,252	1,247	1,241	1,236	1,232	1,228
400	1,276	1,266	1,258	1,251	1,244	1,238	1,233	1,228	1,223	1,219
500	1,271	1,262	1,254	1,246	1,239	1,233	1,228	1,223	1,218	1,214
600	1,268	1,259	1,250	1,243	1,236	1,230	1,224	1,219	1,215	1,210

$\Phi$ -eloszlás $\varepsilon = 0,2$ 

$k \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	1,479	1,527	1,536	1,539	1,540	1,540	1,540	1,540	1,540	1,540
14	1,448	1,487	1,492	1,492	1,491	1,490	1,489	1,488	1,487	1,487
16	1,426	1,458	1,460	1,457	1,455	1,453	1,451	1,450	1,448	1,447
18	1,408	1,436	1,435	1,431	1,427	1,424	1,422	1,420	1,418	1,417
20	1,395	1,418	1,415	1,410	1,405	1,401	1,398	1,396	1,394	1,392
25	1,371	1,387	1,380	1,372	1,366	1,360	1,356	1,353	1,350	1,348
30	1,355	1,367	1,356	1,347	1,339	1,333	1,328	1,324	1,321	1,318
35	1,344	1,352	1,340	1,329	1,320	1,313	1,308	1,303	1,299	1,296
40	1,336	1,341	1,328	1,316	1,306	1,299	1,293	1,288	1,283	1,280
45	1,330	1,333	1,318	1,305	1,295	1,287	1,281	1,275	1,271	1,267
50	1,325	1,326	1,311	1,297	1,287	1,278	1,271	1,266	1,261	1,257
55	1,321	1,321	1,305	1,291	1,279	1,271	1,263	1,257	1,252	1,248
60	1,318	1,317	1,299	1,285	1,273	1,264	1,257	1,251	1,245	1,241
65	1,315	1,313	1,295	1,280	1,268	1,259	1,251	1,245	1,240	1,235
70	1,312	1,310	1,291	1,276	1,264	1,254	1,247	1,240	1,235	1,230
75	1,310	1,307	1,288	1,273	1,260	1,250	1,242	1,236	1,230	1,225
80	1,308	1,304	1,285	1,270	1,257	1,247	1,239	1,232	1,226	1,221
85	1,307	1,302	1,283	1,267	1,254	1,244	1,236	1,229	1,223	1,218
90	1,305	1,300	1,281	1,264	1,251	1,241	1,233	1,226	1,220	1,215
95	1,304	1,299	1,279	1,262	1,249	1,239	1,230	1,223	1,217	1,212
100	1,303	1,297	1,277	1,260	1,247	1,236	1,228	1,221	1,215	1,209
110	1,301	1,295	1,274	1,257	1,243	1,233	1,224	1,216	1,210	1,205
120	1,299	1,292	1,271	1,254	1,240	1,229	1,220	1,213	1,207	1,201
130	1,298	1,291	1,269	1,252	1,238	1,227	1,218	1,210	1,204	1,198
140	1,297	1,289	1,267	1,250	1,236	1,224	1,215	1,208	1,201	1,195
150	1,296	1,288	1,266	1,248	1,234	1,222	1,213	1,205	1,199	1,193
160	1,295	1,286	1,265	1,246	1,232	1,221	1,211	1,203	1,197	1,191
170	1,294	1,285	1,263	1,245	1,231	1,219	1,210	1,202	1,195	1,189
180	1,293	1,284	1,262	1,244	1,229	1,218	1,208	1,200	1,193	1,187
190	1,293	1,284	1,261	1,243	1,228	1,217	1,207	1,199	1,192	1,186
200	1,292	1,283	1,260	1,242	1,227	1,215	1,206	1,198	1,191	1,185
250	1,290	1,280	1,257	1,238	1,223	1,211	1,201	1,193	1,186	1,180
300	1,289	1,278	1,255	1,236	1,221	1,208	1,198	1,190	1,183	1,176
400	1,287	1,276	1,252	1,233	1,217	1,205	1,195	1,186	1,179	1,172
500	1,286	1,274	1,250	1,231	1,215	1,203	1,192	1,184	1,176	1,170
600	1,285	1,273	1,249	1,230	1,214	1,201	1,191	1,182	1,174	1,168

$\Phi$ -eloszlás $\varepsilon = 0,2$ 

$k \setminus l$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	1,539									
14	1,486	1,486	1,485							
16	1,446	1,446	1,445	1,444	1,444					
18	1,415	1,414	1,413	1,413	1,412	1,411	1,411			
20	1,391	1,389	1,388	1,387	1,386	1,385	1,385	1,384	1,384	
25	1,346	1,344	1,342	1,341	1,340	1,339	1,338	1,337	1,336	1,335
30	1,315	1,313	1,311	1,310	1,308	1,307	1,306	1,305	1,304	1,303
35	1,293	1,291	1,289	1,287	1,285	1,284	1,282	1,281	1,280	1,279
40	1,277	1,274	1,272	1,270	1,268	1,266	1,265	1,263	1,262	1,261
45	1,264	1,261	1,258	1,256	1,254	1,252	1,251	1,249	1,248	1,247
50	1,253	1,250	1,248	1,245	1,243	1,241	1,239	1,238	1,237	1,235
55	1,245	1,241	1,239	1,236	1,234	1,232	1,230	1,228	1,227	1,226
60	1,237	1,234	1,231	1,228	1,226	1,224	1,222	1,221	1,219	1,218
65	1,231	1,228	1,225	1,222	1,220	1,217	1,215	1,214	1,212	1,211
70	1,226	1,222	1,219	1,216	1,214	1,212	1,210	1,208	1,206	1,205
75	1,221	1,218	1,214	1,211	1,209	1,207	1,205	1,203	1,201	1,199
80	1,217	1,213	1,210	1,207	1,205	1,202	1,200	1,198	1,196	1,195
85	1,213	1,210	1,206	1,203	1,201	1,198	1,196	1,194	1,192	1,191
90	1,210	1,206	1,203	1,200	1,197	1,195	1,193	1,190	1,189	1,187
95	1,207	1,203	1,200	1,197	1,194	1,192	1,189	1,187	1,185	1,184
100	1,205	1,201	1,197	1,194	1,191	1,189	1,186	1,184	1,182	1,181
110	1,200	1,196	1,192	1,189	1,186	1,184	1,181	1,179	1,177	1,175
120	1,196	1,192	1,189	1,185	1,182	1,180	1,177	1,175	1,173	1,171
130	1,193	1,189	1,185	1,182	1,179	1,176	1,173	1,171	1,169	1,167
140	1,190	1,186	1,182	1,179	1,176	1,173	1,170	1,168	1,166	1,164
150	1,188	1,184	1,180	1,176	1,173	1,170	1,168	1,165	1,163	1,161
160	1,186	1,181	1,177	1,174	1,171	1,168	1,165	1,163	1,161	1,159
170	1,184	1,180	1,176	1,172	1,169	1,166	1,163	1,161	1,158	1,156
180	1,182	1,178	1,174	1,170	1,167	1,164	1,161	1,159	1,156	1,154
190	1,181	1,176	1,172	1,169	1,165	1,162	1,160	1,157	1,155	1,153
200	1,179	1,175	1,171	1,167	1,164	1,161	1,158	1,155	1,153	1,151
250	1,174	1,170	1,165	1,162	1,158	1,155	1,152	1,149	1,147	1,145
300	1,171	1,166	1,162	1,158	1,154	1,151	1,148	1,145	1,143	1,141
400	1,167	1,162	1,157	1,153	1,149	1,146	1,143	1,140	1,138	1,135
500	1,164	1,159	1,154	1,150	1,147	1,143	1,140	1,137	1,135	1,132
600	1,162	1,157	1,152	1,148	1,145	1,141	1,138	1,135	1,132	1,130