ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Методические указания по курсу
"Основы дискретной математики"
для студентов специальности 220200

Пермь 1998

Математическая логика наряду с теорией множеств составляет фундамент современной математики. Математическая логика занимается анализом методом рассуждений.

В рамках курса «Основы теории систем» рассматриваются начальные понятия алгебраического и исчисленческого аспектов многообразной отрасли математики – современной математической логики.

В данных методических указаниях рассматриваются вопросы алгебры логики, дана краткая теоретическая справка по соответствующим разделам логики и приведены примеры.

Алгебра высказываний в простейшем своём виде используется в дисциплинах, связанных с программированием (при формировании логических условий). Алгебраические преобразования и минимизация преобразований необходимы при создании комбинированных схем ЭВМ и других дискретных устройств.

Язык предикатов позволяет обеспечить качественно новый уровень логических рассуждений и преобразований. Язык и алгебра предикатов широко используются при описании и исследовании сложных систем.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Значение «истинно» и «ложно» обычно обозначаются I или 0, или И и Л, или T и F. Высказывания будем обозначать любыми буквами, возможно с индексами. Из простейших (элементарных или атомарных) высказываний с помощью логических операций строятся сложные высказывания (формулы алгебры высказываний).

Операции логики высказываний можно задать с помощью табл.1

Таблица 1.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	A&B	$A \to B$	A~B	$A \oplus B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$
0	0	I	0	0	I	I	0	I	I
0	I	I	I	0	I	0	I	I	0
I	0	0	I	0	0	0	I	I	0
I	I	0	I	I	I	I	0	0	0

Содержательно логические операции обычно интерпретируют следующим образом:

отрицание (инверсия) $\neg(-)$ – «не»

дизъюнкция $\vee(+)$ – «или»

конъюнкция $\&(\cdot,\wedge)$ – «и»

импликация $\to(\supset)$ – «если … , то»

эквивалентность $\sim(\leftrightarrow)$ – «тогда и только тогда» (или «эквивалентно»)

неравнозначность (сумма по модулю 2)	$\oplus$	- «исключающее или»
штрих Шеффера	$\mid$	- «и - не»
стрелка Пирса	$\downarrow$	- «или - не»

Примем соглашение относительно силы связывания ряда операций (упорядочив по убыванию): $\neg, \&, \vee, \to, \sim$.

Высказывания A и B называются равносильными, если на одинаковых наборах значений переменных (атомарных высказываний), входящих в высказывание, значения этих высказываний будут совпадать. Запись $A \equiv B$ будет означать, что высказывания A и B равносильны.

Основные равносильности алгебры высказываний:

1. Коммутативный закон

$$A \vee B \equiv B \vee A, \quad AB \equiv BA$$

2. Ассоциативный закон

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C, \quad A(BC) \equiv (AB)C$$

3. Дистрибутивный закон

$$A(BC) \equiv (A \vee B)(A \vee C), \quad A(B \vee C) \equiv AB \vee BA$$

4. Закон Де Моргана

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

5. Закон идемпотентности

$$A \vee A \equiv A, \quad AA \equiv A$$

6. Закон поглощения

$$A \vee AB \equiv A, \quad A(A \vee B) \equiv A$$

7. Закон склеивания

$$AB \vee A\overline{B} \equiv A$$

8. Закон исключенного третьего

$$A \vee \overline{A} \equiv 1$$

   и закон противоречия

$$A \cdot \overline{A} \equiv 0$$

9. Закон двойного отрицания или в общем виде

$$n\left\{\overline{\overline{\vdots}}\right. \overline{A} \equiv \begin{cases} A, & \text{если } n \text{ - четное} \\ \overline{A}, & \text{если } n \text{ - нечетное} \end{cases}$$

10. $A \vee 0 \equiv A, \quad A \cdot 0 \equiv 0$
11. $A \vee 1 \equiv 1, \quad A \cdot 1 \equiv 1$
12. $\overline{0} \equiv 1, \quad \overline{1} \equiv 0$

13. $A \to B \equiv \bar{A} \vee B$
14. $A \sim B \equiv AB \vee \bar{A}\bar{B}$
15. $A \oplus B \equiv A\bar{B} \vee \bar{A}B$
16. $A \mid B \equiv \overline{AB} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
17. $A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B} \equiv \bar{A}\bar{B}$

Сложное высказывание, истинное при любых значениях входящих в него элементарных высказываний, называется тавтологией. Отрицание тавтологией есть противоречие.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Одно и то же сложное высказывание может быть предоставлено в различных формах.

Элементарной дизъюнкцией называется выражение вида $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждое $A_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ является либо элементарным высказыванием, либо отрицанием элементарного высказывания.

Элементарной конъюнкцией называется выражение вида $B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_n$ где каждое $B_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ является либо элементарным высказыванием, либо отрицанием элементарного высказывания.

П р и м е р ы :

1.	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	- элементарная дизъюнкция;
2.	$\underline{x}yz$	- элементарная конъюнкция;
3.	x	- можно считать частным случаем как элементарной конъюнкции, так и элементарной дизъюнкции;
4.	$xy \vee z$	- не является ни элементарной конъюнкции, ни элементарной дизъюнкции;
5.	$\overline{x \vee y \vee z}$	- не является ни элементарной дизъюнкцией;
6.	xyz	- не является ни элементарной конъюнкцией.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данного высказывания называется равносильное ему высказывание вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_S$, $K_i \left(i = \overline{1,s}\right)$ - элементарная конъюнкция.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данного высказывания называется равносильное ему высказывание вида $D_1 \vee D_1 \vee \ldots \vee D_t$, где $D_i \left(i = \overline{1,t}\right)$ - элементарная дизъюнкция.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция (называемая также конституентой единицы) содержит все элементарные высказывания либо их отрицания по одному разу. Конституенты единицы в СНДФ не повторяются.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция (называемая также конституентой нуля) содержит все элементарные высказывания либо их отрицания по одному разу. Конституенты нуля в СКНФ не повторяются.

Каждое высказывание, кроме тавтологии и противоречия, имеет единственную СДНФ и единственную СКНФ.

Тавтология не имеет СКНФ, а противоречие – СДНФ.

П р и м е р ы :

1. $xy \vee xz \vee y$ - ДНФ;
2. $(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z})x$ - КНФ;
3. $\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ - СДНФ;
4. $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ - СКНФ;
5. $\bar{x} \vee y$ - можно рассматривать как ДНФ и как КНФ;
6. $\overline{xy}z \vee x\bar{y}z$ - не является СДНФ;
7. $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(w \vee \bar{x} \vee \bar{z})$ - не является СКНФ;
8. $xy\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z}$ - не является СДНФ.

При переходе от ДНФ к СДНФ используются следующие равносильности:
$A \cdot 1 \equiv A$; $B \vee \bar{B} \equiv 1$; $A \equiv A(B \vee \bar{B}) \equiv AB \vee A\bar{B}$.

П р и м е р :

$$x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$
$$xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$$

При переходе от КНФ к СКНФ используются следующие равносильности:
$A \vee 0 \equiv A$; $B \cdot \bar{B} \equiv 0$; $A \equiv A \vee B\bar{B} \equiv (A \vee B)(A \vee \bar{B})$.

П р и м е р :

$$x(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \equiv (x \vee y\bar{y} \vee z\bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \equiv$$
$$(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

При переходе СДНФ к СКНФ в начале необходимо получить отрицание исходного высказывания за счет выписывания через дизъюнкцию недостающих (до полного перечня) конституент единицы, а затем взять отрицание этого высказывания и выполнить преобразования по закону Де Моргa.

П р и м е р:

$$f = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz;$$
$$\bar{f} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z};$$
$$\bar{\bar{f}} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}} \equiv (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z).$$

При переходе от СКНФ к СДНФ в начале необходимо получить отрицание исходного высказывания за счет выписывания через конъюнкцию недостающих (до полного нуля) конституент нуля, а затем взять отрицание этого высказывания и выполнить преобразования по закону Де Морга.

П р и м е р:

$$f = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z);$$
$$\bar{f} = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z});$$
$$\bar{\bar{f}} = f = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})} \equiv$$
$$xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz.$$

МИНИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Существует много методов минимизации сложных высказываний. Рассмотрим один из них, удобный для алгоритмизации, а следовательно, для переноса процедуры минимизации на ЭВМ – метод Квайна. Этот метод использует следующие равносильности:

Неполное склеивание $AB \vee A\bar{B} \equiv AB \vee A\bar{B} \vee A$;

Поглощение $A \vee AB \equiv A$.

Минимизация выполняется в три этапа:

1. Высказывание из произвольной формы переводится в СДНФ.
2. Исходя из СДНФ, получают сокращенную дизъюнктивную нормальную формулу ($С_КДНФ$)
3. На основе СДНФ и $С_КДНФ$ строится импликантная матрица, с помощью которой получается минимальная дизъюнктивная нормальная формула (МДНФ).

Заметим, что данный метод (как и большинство других) находит минималную среди дизъюнктивных нормальных формул для данного высказывания (т.е. требование нормальности формы является серьёзным ограничением).

Первый этап минимизации был рассмотрен ранее, когда обсуждался переход от ДНФ к СДНФ.

На втором этапе с СДНФ выполняют все возможные операции неполного склеивания, а затем все возможные операции поглощения. Полученная в результате форма называется $С_КДНФ$.

На заключительном этапе строится импликантная матрица, столбцами которой являются конституенты единицы исходной СДНФ, а строками – элементы $С_КДНФ$, называемые имликантами.

Выбирается набор импликант, содержащий минимальное количество элементарных высказываний и такой, что совокупность выбранных импликант имеет вхождения во все конституенты единицы. Дизъюнкция этих импликант даёт МДНФ.

Примеры:

I. Получить МДНФ для высказывания $(x \downarrow y) \vee ((x \vee y)\bar{z})$.

Получим СДНФ

$$(x \downarrow y) \vee ((x \vee y)\bar{z}) \equiv \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \equiv \underset{1}{\bar{x}\bar{y}z} \vee \underset{2}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{3}{xy\bar{z}} \vee \underset{4}{x\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{5}{\bar{x}y\bar{z}}.$$

Получим $С_КДНФ$. При склеивании будем указывать порядковые номера конъюнкции, участвовавших в склеивании, и рядом записывать результат. Неполное склеивание будет обеспеченно за счет того, что конъюнкции, участвовавшие в склеивании, не уничтожаются:

$1-2$: $\bar{x}\bar{y}$ 6
$2-4$: $\bar{y}\bar{z}$ 7
$2-5$: $\bar{x}\bar{z}$ 8
$3-4$: $x\bar{z}$ 9
$3-5$: $y\bar{z}$ 10

$7-10$: $\bar{z}$
$8-9$: $\bar{z}$

Далее выполняются поглощения. Результат каждого склеивания поглощает конъюнкции, участвовавшие в склеивании. Выполнив все возможные склеивания, получаем $С_КДНФ$ $\bar{x}\bar{y} \vee z$.

Получим МДНФ (табл.2):

Таблица 2

	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
$\bar{x}\bar{y}$	+	+			
$\bar{z}$		+	+	+	+

Из импликантной матрицы следует, что МДНФ совпадает с $С_КДНФ$.

2. Получить МДНФ для высказывания $((x \mid y) \to (x \downarrow z)) \vee \overline{\bar{x} \to \bar{z}}$.

Получим СДНФ:

$$((x \mid y) \to (x \downarrow z)) \vee \overline{\bar{x} \to \bar{z}} \equiv \overline{\overline{xy}} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \equiv xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \equiv$$
$$xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \ .$$

Получим $С_КДНФ$:

$$1-2 \;:\; xy \qquad\qquad 4-6 \;:\; \bar{x}\bar{y}$$
$$1-5 \;:\; yz \qquad\qquad 5-6 \;:\; \bar{x}z$$
$$2-3 \;:\; x\bar{z}$$
$$3-4 \;:\; \bar{y}\bar{z}$$

$С_КДНФ$ имеет вид $xz \vee zy \vee x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z$.

В данном случае получается две МДНФ (табл. 3)

$МДНФ_1$

$$xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \;;$$

$МДНФ_2$

$$yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \;.$$

Таблица 3

	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$
xy	+	+				
yz	+				+	
$x\bar{z}$		+	+			
$\bar{y}\bar{z}$			+	+		
$\bar{x}\bar{y}$				+		+
$\bar{x}z$					+	+

ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА.

Предикатом $P(x_1,\ldots\ldots..,x_n)$ называется функция, в которой переменные $x_1,\ldots\ldots\ldots,x_n$ могут принимать значения из некоторой предметной области, а сама функция может быть истинной или ложной.

В алгебре предикатов справедливы все операции алгебры высказываний. Кроме того, вводятся операции навешивания кванторов:

1. Квантор общности (всеобщности): $\forall_x P(x)$ – «для всех справедливо *P(x)*» или короче «для всех *x-P(x)*».
2. Квантор существования: $\exists\, x\ P(x)$ – «существуют (есть) такие *x*, что справедливо *P(x)*» или короче « есть такие *x*, что *P(x)*».

Если предметные переменные определены на конечные области, то операции навешивания кванторов можно выразить через операции конъюнкции и дизъюнкции соответственно.

Пусть $x_1 \in \{a_1,\ldots,a_m\}$,

тогда

$$\forall x_1\, P(x_1,\ldots,x_n)=P(a_1,\ldots,x_n)\&P(a_2,\ldots,x_n)\&\ldots\&P(a_m,\ldots,x_n),$$
$$\exists x_1\, P(x_1,\ldots,x_n)=P(a_1,\ldots,x_n)\vee P(a_2,\ldots,x_n)\ \vee\ldots\vee P(a_m,\ldots,x_n);$$

в частном случае

$\forall x\ P(x)=P(a_1)\&P(a_2)\&\ldots\&P(a_m)$,

$\exists x\ P(x)=P(a_1)\vee P(a_2)\ \vee\ldots\vee P(a_m)$;

Говорят, что квантор связывает соответствующую переменную. Предикат (формула) называется замкнутым, если связаны все переменные (если нет свободных, т.е. несвязных переменных).

Основные равносильности предикатов:

1. $\neg\forall xP(x)\equiv\exists x\neg P(x)$;
2. $\neg\exists xP(x)\equiv\forall x\neg P(x)$;
3. $\neg\forall x\neg P(x)\equiv\exists xP(x)$;
4. $\neg\exists x\neg P(x)\equiv\forall xP(x)$.

Пусть Q – формула, не содержащая переменной x, тогда:

5. $\forall x\ P(x)\vee Q\equiv\forall x(P(x)\vee Q)$;
6. $\forall x\ P(x)\&Q\equiv\forall x(P(x)\&Q)$;
7. $\exists x\ P(x)\vee Q\equiv\exists x(P(x)\vee Q)$;
8. $\exists x\ P(x)\&Q\equiv\exists x(P(x)\&Q)$;
9. $\forall xQ\equiv Q$;
10. $\exists xQ\equiv Q$;
11. $\forall x\ P(x)\&\forall x\ R(x)\equiv\forall x\ (P(x)\&R(x))$;
12. $\exists x\ P(x)\vee\exists x\ R(x)\equiv\exists x\ (P(x)\vee R(x))$;
13. $\forall x\ P(x)\vee\forall x\ R(x)\rightarrow\forall x\ (P(x)\vee R(x))$;
14. $\exists x\ P(x)\&R(x)\rightarrow\exists x\ P(x)\&\exists x\ R(x)$;

Отметим, что импликация в обратную сторону для формул 13 и 14 не имеют места, а следовательно, между левой и правой частями нельзя поставить знак равносильности (≡).

Например, если *P(x)* – «быть четным числом» и *R(x)* – «быть нечетным числом», то из справедливости $\exists xP(x)\&\exists xR(x)$ не следует справедливость $\exists x(P(x)\&R(x))$, так как нет такого числа, которое бы было одновременно четным или нечетным.

15. $\forall xP(x)\equiv\forall yP(y)$;
16. $\exists xP(x)\equiv\exists yP(y)$;

Формулы 15 16 имеют место при условии, что x и y принимают свои значения из одной предметной области.

17. $\forall x \, \exists y \, P(x, y) \not\equiv \exists y \, \forall x \, P(x, y)$;
18. $\exists \mathrm{x} \, \forall y \, P(x, y) \not\equiv \forall y \, \exists x \, P(x, y)$;

УПРАЖНЕНИЯ.

Звёздочкой отмечены задания, для которых приведены решения или даны ответы.

1. Записать в символической форме следующие сложные высказывания:
   а)* если студент отлично учится, занимается общественной работой и не имеет нарушений, то он получает повышенную стипендию;
   б)* если деталь не стоит в плане и обеспечена заготовкой, то , если она срочная и план составлен правильно, - неверно, что деталь не стоит плане;

3. * Какие из приведённых ниже высказываний являются отрицанием высказывания «Петя пошел в институт»:
   - Не Петя пошел в институт;
   - Петя не пошел в институт;
   - Петя пошел не в институт.

8.* Выразить операции $\vee$ и $\&$ через операции $-$ и $\to$.

11.* Построить формулу от трёх переменных:
   а) которая принимает такое же значение истинности, как и большинство переменных;
   б) истинную в том и только в том случае, когда совпадает значение равно двух переменных;

13. Получить ДНФ для формул:
   а) * $\left(\mathbf{xy} \vee \overline{\mathbf{x}}\mathbf{y} \vee \mathbf{z}\right)\mathbf{x}\overline{\mathbf{z}}$**;**
   в) * $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$**;**

14. Получить КНФ для формул:
   а) * $\mathbf{xy} \vee \mathbf{z}$**;**
   б) * $\mathbf{xy}$**;**

15. Получить СДНФ для формул:
   а) * $(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})(\overline{\mathbf{x}} \vee \mathbf{z})$**;**
   б) * $(\mathbf{x} \downarrow \mathbf{y}) \to (\overline{\mathbf{y}} \,|\, \mathbf{z})$**;**
   д) * $\mathbf{x} \vee \overline{\mathbf{x}} \vee \mathbf{y}$**;**

16. Получить СКНФ для формул:

а)* $xy \vee \bar{x}z$;

б) $x \sim y$;

в)* xy;

г) xyz;

д) $\overline{x(y \vee z)} \to (xy \vee z)$;

ж) $(\overline{x \oplus y} \to c) \downarrow c$;

з)* $x \to (y \to x)$;

и) $\overline{xy \to x} \vee x(y \vee z)$;

к) $(x \mid y) \to (x \mid z)$;

л) $(x \vee y)(x \vee z) \vee xy$;

м) $(x \vee y)\bar{x} \vee z$;

н) $(x \downarrow y) \sim (x \oplus y)$;

о) $(x \sim y) \sim (x \sim z)$;

п) $(x \sim y) \oplus (x \sim z)$;

р) $(x \vee y)(x \vee z)(x \vee \bar{w})$.

17. Получить СДНФ, а затем перейти к СКНФ:

б)* $\mathbf{(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})}$;

18.* Пусть задана функция f (сложное высказывание) от трёх аргументов (элементарных высказываний) x, y, z и $f(x, y, z) = x$. Построить для данной функции СДНФ.

19. Получить СКНФ, а затем перейти к СДНФ:

г)* $\mathbf{(x \mid y)xy}$;

20. Получить МДНФ для формул:

а)* $((x \oplus y) \sim z) \to x$;

б)* $((1 \oplus xy) \oplus xz) \vee (\overline{z \to y})$;

в)* $(x \oplus y) \to \overline{z \vee y}$;

г)* $((A \to B) \sim (C \sim D)) \vee \overline{B \to A} \cdot (C \sim D)$;

д)* $(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C \vee \bar{D})(\bar{A} \vee B \vee C \vee \bar{D})$;

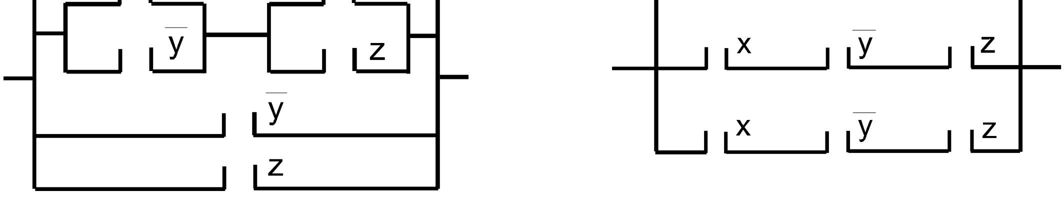
е)* $x \vee yz \vee \bar{x}z$;

ж)* $\mathbf{\overline{(x \to y) \to z} \vee x}$;

з)* $\mathbf{\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{z}}$;

22.* Из контактов x, y, z составить схему так, чтобы она замыкалась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-нибудь два из трёх контактов x, y, z.

24.* Упростить схемы *рис.1*, *а* и *б*.



а) *б*)

Рис. 1

25.* Записать на языке предикатов:

а) все студенты учатся;
б) некоторые студенты отличники;
в) для любого числа можно найти большее число;
г) $x + y = z$;
д) всякий предмет обладает свойством *A*;
е) нечто обладает свойством *A*;
ж) всякий предмет не обладает свойством *A*;
з) нечто не обладает свойством *A*;
и) каждое рациональное число есть действительное число;
к) некоторые действительные числа являются рациональными;
л) ни одно рациональное число не является действительным;
м) некоторые рациональные числа не являются действительными.

26.* Попытайтесь объяснить, почему в упражнениях 25а и 25и использовалась импликация, а в 25б и 25к – конъюнкция.

27.* Записать на языке предикатов:

а) детям до 16 лет ($D(x)$) и роботом ($R(x)$) входить ($B(x)$) запрещено;

б) всем детям до 16 лет ($D(x)$) и роботом ($R(x)$) надлежит получить справки ($C(x)$).

28.* Записать на языке предикатов:

а) всякое N, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6;

б) каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу;

в) через две различные точки проходит единственная прямая.

29. Записать на языке предикатов:

д)* каждый студент ($C(x)$) – спортсмен ($S(x)$) имеет какого-нибудь кумира (y) ($B(x,y)$) среди киноартистов ($K(y)$);

е)* если некоторые большие ЭВМ ($Б(x)$) связаны ($C(x,y)$) с другим большим ЭВМ ($Б(y)$), то значит, не существует мини ЭВМ ($M(x)$), имеющих средства сопряжения ($S(x)$);

30.* При каких условиях:

а) $\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, P(x)$;

б) $\exists x\, P(x) \equiv O$, а $\forall x\, P(x) \equiv 1$;

33.* Это – ставший классический пример, иллюстрирующий дополнительные сложности, связанные с отрицанием: известно, что предложение «Нынешний король Франции лыс» не соответствует действительности. Как это записать на языке предикатов.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

1а. Выберем элементарные высказывания служебным образом:

A – студент отлично учится;

B – студент занимается общественной работой;

C – студент имеет нарушения;

D – студент получает стипендию.

Тогда символическая форма сложного высказывания будет иметь вид

$$A \cdot B \cdot \overline{C} \to D\ .$$

1б. Символическая запись может иметь вид:

$$\overline{П} \cdot З \to \left(C \cdot P \to \overline{П}\right).$$

3. В логике высказываний правильными следует считать высказывания типа «Неверно, что Петя пошел в институт», так как высказывания не делимы.

8. $A \vee B \equiv \overline{A} \to B \equiv \left(A \to B\right) \to B\ ,\quad A \,\&\, B \equiv \overline{A \to \overline{B}}\,.$

11.а $AB\overline{C} \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee ABC$ или то же самое, но в более простой форме $AB \vee AC \vee BC$.

11б. $A\overline{B} \vee B\overline{C} \vee \overline{AC}$.

13а. $xy\overline{z}$.

13в. Формула уже в ДНФ. Почему?

14а. $\left(x \vee z\right)\left(y \vee z\right)$.

14б. Формула уже в КНФ. Почему?

15а. $xyz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z}$.

15б. $xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}$.

15д. $xy \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}\quad \left(\equiv 1\right)$.

16а. $xy \vee \overline{x}y \equiv \left(xy \vee \overline{x}\right)\left(xy \vee z\right) \not\equiv \left(x \vee \overline{x}\right)\left(\overline{x} \vee y\right)\left(x \vee z\right)\left(y \vee z\right) \equiv$
$\left(\overline{x} \vee y \vee z\overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee z \vee y\overline{y}\right)\left(y \vee z \vee x\overline{x}\right) \equiv$
$\left(\overline{x} \vee y \vee z\right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right)\left(x \vee y \vee z\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)$.

16в. $\left(x \vee y\right)\left(x \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y\right)$.

16з. СКНФ отсутствует, т.к. это тавтология.

17б. Это тавтология, поэтому для неё нет СКНФ.

18. $xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$.

19г. Это противоречие, поэтому для него нет СКНФ.

20а. $((x \oplus y) \sim z) \to x \equiv \overline{(x \oplus y)z \vee \overline{(x \oplus y)}\bar{z}} \vee x \equiv$
$\overline{(x \oplus y)z} \cdot \overline{\overline{(x \oplus y)}\bar{z}} \vee x \equiv \left(\overline{x \oplus y} \vee \bar{z}\right)\left(\overline{\overline{x \oplus y}} \vee \bar{\bar{z}}\right) \vee x \equiv$
$\left(xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}\right)\left(\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee z\right) \vee x \equiv$
$xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$ - СДНФ
$x \vee y\bar{z} \vee \bar{y}z$ - $С_К$ДНФ и МДНФ .

20б. $((1 \oplus xy) \oplus xz) \vee \overline{(z \to y)} \equiv \left(\overline{xy} \oplus xz\right) \vee \bar{y}z \equiv xyxz \vee \overline{xy}\,\overline{xz} \vee \bar{y}z \equiv$
$xyz \vee \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee \bar{z}\right) \vee \bar{y}z \equiv xyz \vee \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z \equiv$
$xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$ - СДНФ
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ - МДНФ .

20в. $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$ - СДНФ
$xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}$ - МДНФ.

20г. $A\bar{B}\bar{C}D \vee A\bar{B}C\bar{D} \vee \bar{A}BCD \vee \bar{A}\bar{B}CD \vee \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee ABCD \vee$
$AB\bar{C}\bar{D} \vee A\bar{B}CD \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ - СКНФ
$A\bar{B} \vee CD \vee \bar{C}\bar{D}$ - МДНФ.

20д. $\bar{A} \vee C \vee \bar{D}$.

20е. $x \vee z$.

20ж. $x \vee \bar{z}$.

20з. $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$ или $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$.

21в. $xy \vee xz$.

21г. 1.

22. См. рис. 2.

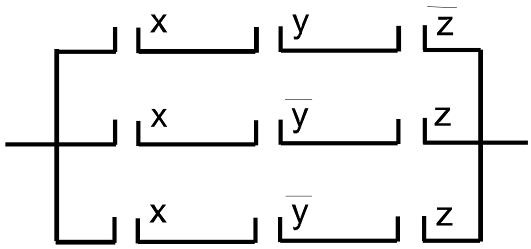
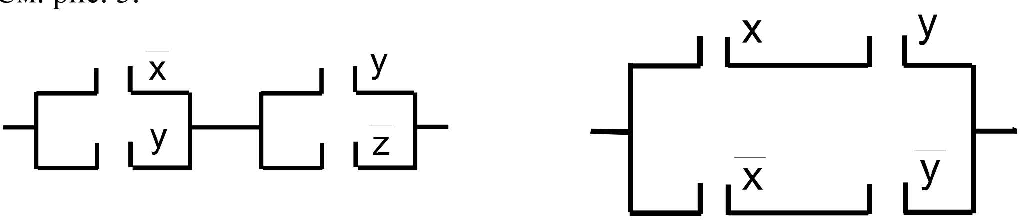


Рис. 2

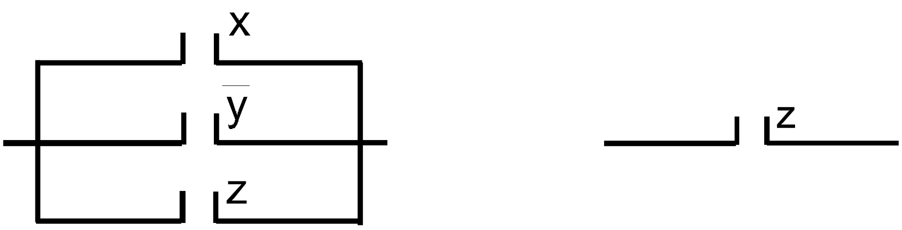
23а. См. рис. 3.



а) *б*)

Рис. 3

23. Упрощенные схемы будут иметь вид, представленный на рис. 4.



а) *б*)

Рис. 4

25а. $\forall x\,(C(x) \rightarrow Y(x))$, где C(x) – «x - студент», а Y(x) – «x - учится».

25б. $\exists x\,(\, C(x)\ \&\ O(x)\,)$.

25в. Запишем двухместный предикат в виде обычного отношения:
$\forall x\, \exists y\, (x < y)$.

25г. Запишем в виде трехместного предиката:

$\forall x,y\, \exists z\, S(x,y,z)$.

Предикат *S* принимает значение “истинно”, когда $x + y = z$, и «ложь» в противном случае. При навешивании соответствующих кванторов поучается утверждение о том, что для любых x и y существует сумма.

25д. $\forall x\, A(x)$.

25е. $\exists x\, A(x)$.

25ж. $\forall x \neg A(x)$.

25з. $\exists x \neg A(x)$.

25и. $\forall x\ (Q(x) \to R(x))$.

25к. $\exists x\ (Q(x)\ \&\ R(x))$

25л. $\forall x\ (Q(x) \to \neg R(x))$.

25м. $\exists x\ (Q(x)\ \&\ \neg R(x))$.

26. В теоретико-множественной интерпретации обычно импликация соответствует включению, а конъюнкция - пересечению. Например, $\forall x\ (Q(x) \to R(x))$. Справедливо, поскольку $Q \subseteq R$; а $\exists x\ (Q(x)\ \&\ R(x))$ справедливо, поскольку $Q \cap R$ не пусто. Ошибкой было бы *25к* записать как $\exists x\ (R(x) \to Q(x))$, поскольку это равносильно $\exists x\ (\neg R(x) \vee Q(x))$, а это высказывание будет истинным для любого x , не являющимся действительным числом.

27. Здесь несколько перефразированы упражнения известного логика С.Клини, который предлагает следующие решения:
а) $\neg\exists x\ ((D(x) \vee R(x))\ \&\ B(x)$, что равносильно
$\forall x\ ((Dx) \vee R(x)) \to \neg B(x))$;
б) ошибкой была бы запись $\forall x\ (D(x)\ \&\ R(x) \to C(x))$, так как $D(x)\ \&\ R(x)$ – пусто. Правильным решением будет
$\forall x\ (D(x) \to C(x))\ \&\ \forall x\ (R(x) \to C(x))$ или $\forall x\ (D(x) \vee R(x) \to C(x))$.

28а. $\forall x\ (А(x) \to Д(x)\ \&\ Ч(x)\ \&\ Ш(x))$.

28б. $\forall x\ \exists y\ B(x,y)$.

28в. $\forall x,y\ (\neg(x=y) \to \exists p\ ((x \in p)\ \&\ (y \in p)\ \&\ \forall q\ ((x \in q)\ \&\ (y \in q) \to (p=q))$.

29д. $\forall x\ (C(x)\ \&\ S(x)) \to \exists y\ (B(x,y)\ \&\ K(y))$.

29е. $\exists x\ Б(x)\ \&\ \forall y\ (C(x,y) \to Б(y)) \to \neg\ \exists x\ (M(x)\ \&\ S(x))$.

30а. Когда x определён на предметной области из одного элемента.

30б. Когда предметная область пуста (но здесь можно и возразить).

31. Отрицаниями будут предложения *в* и *г*. Ответ можно получить формально, если для предиката $\forall x\ \exists y\ B(x,y)$ взять отрицание и совершить равносильное преобразования :
$\neg\forall x\ \exists y\ B(x,y) \equiv \exists x\ \neg\exists y\ B(x,y) \equiv \exists x\ \forall y\ \neg B(x,y)$

32. Само исходное предложение на языке предикатов запишется как:
$\exists x\ К(x)\ \&\ \forall x\ (К(x) \to Л(x))$.
В литературе обычно не обсуждается вариант «огульного» отрицания, т.е. $\neg(\exists x\ К(x)\ \&\ \forall x\ (Кx) \to Л(x))$, поскольку здесь следовало уточнить, что всё таки отрицается: факт лысости короля или факт существования короля во Франции. В связи с этим предлагается два варианта отрицания:

$\exists x$ К(x) & $\forall x$ (К(x) $\to \neg$ Л(x)) ;
$\neg \exists x$ К(x) & $\forall x$ (К(x) $\to$ Л(x)) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Клини С. Математическая логика. – М. : Мир, 1973, с. 11 – 126.
2. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М. : Просвещение, 1968, с. 71 – 93, 108 – 132.
3. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М. : МГУ, 1982, с. 1 – 95.
4. Гильберг Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М. : Наука, т. 1, с. 23 – 45, 74 – 141.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М. : Наука, 1973, с 36 – 65, 123 – 135.
6. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М. : Наука, 1972.