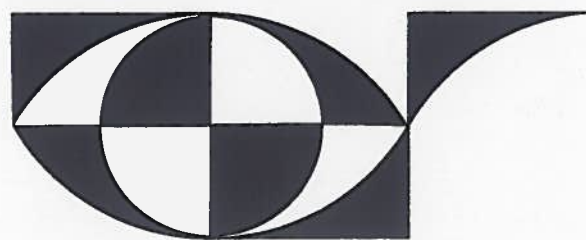


Wissenschaftliche Nachrichten



Herausgegeben vom Bundesministerium
für Bildung, Wissenschaft und Kultur

Nr. 131
2/2006



DAS ZUKUNFTSMINISTERIUM

bm:bwk

Inhalt

Grundwissenschaftliche Probleme



Angewandte Systemtheorie in der Pädagogik	3
Buchbesprechung	5

Biologie, Geowissenschaften



Zur Biologie der Trichinen	7
Natur im Wandel heißt Leben im Wandel	11
GEO-Veranstaltungen am Naturhistorischen Museum 2007	12

Chemie



Feuerwerk: Tradition – Kunst – Wissenschaft	13
Kaiserliche Akademie der Wissenschaften – Ein historisches Blitzlicht	18

Mathematik



Der T-Test in Excel	19
Gregorianische Kalendergeschichten	21
Zur Seltenheit der reduziblen Polynome	23
Ein Urlaub in Ägypten, ein langweiliger Abend und einige mathematische Folgerungen	26
Algebraische Zahlen am Einheitskreis III: Eine merkwürdige Klasse algebraischer Zahlen	29
Hypothesentests mit widersprüchlichen Folgerungen	33
Diffusionsvorgänge in Excel: Elementare Modelle	34
Darf man 0 mit 0 potenzieren?	36
Aufgaben	37

Physik, Astronomie



Metrologie (die Lehre vom Messen) heute	43
Von der Symmetrie zur Supersymmetrie	46

Wirtschafts- und Sozialgeographie Wirtschaftsinformationen



Der ÖROK-Atlas – www.oerok-atlas.at	47
Buchbesprechungen	51
LPA Prof. Mag. Dr. Wolfgang Sitte verstorben	52

IMPRESSUM:

„Wissenschaftliche Nachrichten“, Fortbildungsorgan des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur für AHS- und BHS-Lehrer.
Erscheint dreimal jährlich, im März/April, Juli/August und November/Dezember.
Medieninhaber (Verleger) und Herausgeber: Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur, 1010 Wien, Minoritenplatz 5. Redaktion: Dr. Christian Wolny, BRG Kandlgasse 39, 1070 Wien. Hersteller: Ueberreuter Print und Digimedia GmbH, 2100 Korneuburg, Industriestraße 1, Telefon: 02262/789.

Das Informationsblatt „Wissenschaftliche Nachrichten“ erscheint im Juli/August, im November/Dezember und im März/April. Es wird (Erl. des BMUK vom 18. 11. 1965, Z. 120.712/V/4a/65) den zuständigen Schulbehörden (LSR bzw. SSR), den Direktionen der allgemeinbildenden und der berufsbildenden höheren Schulen Österreichs, welche in den genannten Schulkategorien **Philosophie, Mathematik, im naturwissenschaftlichen Fach, Geographie** und **Wirtschaftskunde** unterrichten, zur kostenlosen Verteilung zur Verfügung gestellt.



Angewandte Systemtheorie in der Pädagogik

Robert Hofstetter

Niklas Luhmann (1927–1998) gilt als einer der Begründer der Systemtheorie. Er war zwar an der Universität Bielefeld Professor für Soziologie, seine Publikationen handeln jedoch oftmals auch von pädagogischen Problemen. Es schien mir daher sinnvoll, in meiner Arbeit vor allem auf ihn zu rekurrieren.

Als Lehrer kann ich mir den Hinweis nicht verkneifen, dass Luhmann seine Pädagogik völlig unpädagogisch vermittelt hat. Seine Werke sind in einer sehr schwer verständlichen Sprache verfasst, die es dem Laien fast unmöglich macht, Boden unter Füßen zu finden. Viele Dinge, die ich hier vorbringe, sind einfach nur Assoziationen, die bei der Lektüre in mir emporgestiegen sind.

Gestatten Sie mir, dass ich in meinen Aufsatz immer wieder auch kritische Bemerkungen einstreue. Ich werde mich bemühen, die Kritik von der Darstellung Luhmanns abzugrenzen.

Nach Luhmann folgen in einer funktional differenzierten Gesellschaft die einzelnen gesellschaftlichen Subsysteme einem eigenen binären Code, der alle Kommunikationsprozesse im betreffenden System bestimmt. Wirtschaft, d. h. der Markt, ist eines dieser Subsysteme, Politik, Wissenschaft, Recht usw. sind andere. In der Wirtschaft geht es um zahlbar und nicht zahlbar, in der Politik um Macht und nicht Macht, in der Jurisprudenz um Recht oder nicht Recht, in der Wissenschaft um wahr oder nicht wahr usw. Keines dieser Subsysteme lässt sich dem Code eines anderen Subsystems unterwerfen: Von der Politik können wir keine Entscheidung über wahr und falsch erwarten, und von der Wirtschaft keine Entscheidungen darüber, wem politische Macht zukommen soll und wem nicht. Folgt auch das Bildungssystem einem eigenen Differenzierungsprinzip, einem eigenen Code? Für Luhmann steht fest, dass dies der Fall sein muss. Er erschließt diesen Code aus der Selektionsfunktion des Bildungssystems; denn nur in Bezug auf diese Funktion gebe es jene künstliche Zweiwertigkeit, die einen Code auszeichne. Man könne „gut oder schlecht abschneiden, gelobt oder getadelt werden, zu weiterführenden Kursen oder Schulen zugelassen oder nicht zugelassen werden und schließlich Abschlusszeugnisse erhalten oder nicht erhalten“ (Luhmann, *Ökologische Kommunikation*, S. 195).

Der Code des Bildungssystems entsteht nach Luhmann aus der Notwendigkeit, dass Individuen in einer funktional differenzierten Gesellschaft sich ihren Weg durch die sozialen Systeme selber suchen und die Kar-

riere, d.h. eine Sequenz von selektiven Entscheidungen zwischen alternativen Anschlussmöglichkeiten, durchlaufen müssen. „Nur wenn man in die Schule aufgenommen wird, erhält man Zensuren. Die Zensuren sind von Bedeutung für die Versetzung innerhalb der Schullaufbahn. Der erfolgreiche Abschluss einer Ausbildung ist von Bedeutung für den Berufseintritt. Der Berufseintritt bestimmt die weitere Karriere, wobei in allen Fällen das freiwillige oder unfreiwillige Nichterfüllen der Anforderungen ebenfalls Karrierewert hat, nur eben negativen“ (Luhmann, *Ökologische Kommunikation*, S. 195).

In seinen späteren Werken hat Luhmann seinen Codierungsvorschlag revidiert. Er sieht den Code nunmehr in der Zweifelt von „vermittelbar/nicht vermittelbar“, betont allerdings die Notwendigkeit einer Ergänzung dieses Codes durch eine Zweitcodierung mit dem üblichen Selektionsschema „besser/schlechter“, da die Primärcodierung ergänzt werden müsse durch „ein retrospektives Verfahren, das festzustellen sucht, ob die Vermittlung gelungen ist oder nicht“ (Luhmann, *Das Erziehungssystem der Gesellschaft*, S. 73).

Das, worum es in der Schule eigentlich geht: die Inhalte, die gelehrt und gelernt werden sollen, die Mentalitäts- und Persönlichkeitsveränderungen, die man mit dem Bildungsprozess erzielen will, sind gemäß der Luhmann'schen Theorie bloß das Programm, die Kriterien, aufgrund derer die Selektionsentscheidungen getroffen werden. Das Programm ist zwar die einzige Möglichkeit von außen auf das Bildungssystem einzuwirken. Aber das ändert nichts daran, dass das, was das System daraus produziert, am Ende immer selektive Entscheide sind. Jeder Inhalt ist für diesen Zweck verwendbar, die biographischen Daten der Habsburger ebenso wie Schillers „Glocke“ oder die Kepler'schen Gesetze. Denn bei jedem Inhalt, gleich welcher Art, geht es immer darum, diesen Inhalt zu wissen, und dies mündet sogleich in die Selektionsfrage, ob etwas nun richtig gewusst oder falsch gewusst oder gar nicht gewusst wird. Jede Antwort auf diese Frage aber hat Selektionswert und entscheidet über die weitere Karriere, selbst wenn diese nur darin besteht, dass man noch ein Nachholpensum einschalten muss oder gleich die nächste Lektion anschließen kann.

Als Erziehung haben alle Kommunikationen zu gelten, die in der **Absicht** des Erziehens in Interaktionen aktualisiert werden. Damit ist klargestellt, was durch den Begriff der Erziehung ausgeschlossen werden soll, nämlich absichtslose Erziehung, also Sozialisation.

Die Absicht gebärt aus sich selbst heraus zwei recht ungleiche Kinder, nämlich Erziehung und Selektion: Die Pädagogik hat beide Sprößlinge ungleich beurteilt. Sie hat Erziehung als ihr eigenstes Anliegen geliebt, Selektion dagegen als staatlich aufgezugenes Amt abgelehnt. Im Erziehungssystem kommt es zu einer Präferenz für Erziehung und gegen Selektion. Luhmann ortet demzufolge ein Konsensdefizit für soziale Selektion.

Die Reformüberlegungen der 60er und 70er Jahre hatten sich vornehmlich an diesem Gegensatz orientiert. Sie hatten versucht, die Kinder und Heranwachsenden die Selektion so wenig wie möglich spüren zu lassen. Als Konsequenz daraus wurden die Noten in der 1. Klasse der Volksschulen durch Verbalbeurteilungen ersetzt, die Aufnahmeprüfungen in die Gymnasien abgeschafft und die Möglichkeit eines Aufstiegs mit einem Nicht genügend gewährt etc.

Die Selektion wird stärker als in aller davorliegenden Tradition von sozialer Schichtung abgekoppelt. Man kann Prüfungen nicht unter Berufung auf Herkunft bestehen oder umgehen. Damit wird die Schule zur zentralen Dirigierungsstelle für Chancen im späteren Leben.

Hier möchte ich mich erstmals mit meiner Kritik einhaken: Das Ziel der Herkunftsneutralisierung wird nur unvollständig erreicht; denn die Statistiken zeigen, dass die Kinder aus besseren Familien trotzdem bessere Chancen haben, im Selektionssystem zu reüssieren (Neuwirth, Schulkarrieren und Bildung der Eltern, in: Pisa 2000 und Pisa 2003, S. 105 ff.).

Schule hat meines Erachtens auch die Funktion, Defizite zu kompensieren. Denn nur so lassen sich alle Begabungsreserven ausschöpfen. Mag sein, dass heute die Integration an ihre Grenzen stößt und die Leistungsverweigerung an manchen Standorten bedrohliche Ausmaße annimmt. Aber prinzipiell kann gesagt werden: Die Öffnung der höheren Schulen hat den Übergang zur postindustriellen Wissens- und Informationsgesellschaft erst ermöglicht.

Wichtig für Luhmanns Beschreibung der Erziehung ist die von **Heinz von Foerster** (1911–2002) stammende Unterscheidung von trivialen und nichttrivialen Maschinen. Trivialmaschinen sind solche, die auf einen bestimmten Input einen bestimmten Output produzieren. Solche Maschinen sind zuverlässige Maschinen. Das Gegenteil gilt für nichttriviale oder selbstreferentielle Maschinen. In diesem Fall entscheidet das System, wie es auf den Input reagiert. Solche Maschinen verfügen über ein unendliches Repertoire an Reaktionsmöglichkeiten. Sie sind daher unberechenbare und folglich unzuverlässige Maschinen.

Die Systemtheorie dekretiert nun: Die Erziehung verwandelt Menschen von nichttrivialen in triviale Maschinen. Sie führt somit zu einer Trivialisierung der Zöglinge.

„Tests sind Instrumente, um ein Maß der Trivialisierung festzulegen. Ein hervorragendes Testergebnis verweist auf vollkommene Trivialisierung: der Schüler ist völlig vorhersagbar und darf daher in die Gesellschaft entlassen werden. Er wird weder irgendwelche Überraschungen noch irgendwelche Schwierigkeiten bereiten“ (Von Foerster, Wissen und Gewissen, S. 208).

An dieser Stelle ist meines Erachtens wieder Kritik

angebracht: Selbstverständlich sind und bleiben Menschen trotz Schulbesuch nichttriviale Maschinen. Lernen als Dressurakt zu interpretieren, scheint mir zumindest eine unzulässige Verkürzung pädagogischer Interventionen zu sein. Erstrangiges Ziel eines emanzipatorischen Unterrichts ist die Kritikfähigkeit des Zöglings. Eine mögliche Strategie dieses Ziel zu erreichen, könnte darin bestehen, Testfragen zu stellen, die mehrere Antworten zulassen.

Durch die Werke Luhmanns zieht sich eine konservative Grundtendenz wie die folgende Textstelle zeigt: Die Reformbemühungen stellen nichts anderes dar als „die Tendenz zur Substitution eines Systems mit unbekanntem Nachteilen für ein System mit bekannten Nachteilen. Durch Reformen wird bloß ein Nachteil durch einen anderen ersetzt“ (Luhmann/Schorr: Reflexionsprobleme im Erziehungssystem, S. 256).

Beobachtet man das jeweils reformierte System, hat man den Eindruck, dass das Hauptresultat von Reformen die Erzeugung des Bedarfs für weitere Reformen ist. Reformen wären demnach sich selbst generierende Programme für die Veränderung der Strukturen des Systems (vgl. Luhmann, Das Erziehungssystem der Gesellschaft, S. 166).

Dazu wieder einige private Anmerkungen: Schulentwicklung gilt als heilige Kuh. Bereits in der Ausbildung der Lehrer wird Wert darauf gelegt, dass sich die Meinung verfestigt, Schule müsse sich ununterbrochen entwickeln. Häufig wird das Bild vom Radfahrer gebracht, der sich auch nur dann im Sattel hält, wenn das Fahrrad in Bewegung bleibt. Das System funktioniert nur solange, als es seine Dynamik beibehält. Stillstand bedeutet Untergang. Auf diese Weise wird einer Generation von Lehrkräften jede Chance geraubt, auf bewährte Routinen zurückzugreifen. Als Konsequenz tritt bei ihnen, aber auch bei ihren Schülern eine totale Verunsicherung ein. Grund zur Freude haben eigentlich nur jene Consulting-Firmen, die viel Geld verdienen, indem sie die Schulentwickler beraten. Die Ergebnisse der grassierenden „Reformitis“ sind jedenfalls äußerst fragwürdig. Dabei wäre so leicht Abhilfe zu schaffen, würde man nur ein wenig das Prinzip beherzigen: Nicht die Schule muss sich entwickeln, die Schüler müssen sich entwickeln.

Auch angesichts der schlechten PISA-Ergebnisse Österreichs muss die Frage gestellt werden, inwieweit sie Resultat verfehlter Reformen und nicht – wie allgemein in den Medien kolportiert wird – Resultat eines Reformstaus sind. Es wurden ja auch Maßnahmen wie die Stundenkürzungen, die Reduzierung der Anforderungen, die Verschlechterung der Lehrerbesoldung als Reformen verkauft.

Luhmann tritt für eine Professionalisierung des Lehrberufs und damit für eine Verbesserung der Ausbildung ein. Er sieht vor allem in diesen Fragen die Achillesferse der weiteren Entwicklung. Er setzt auf Professionalisierung und nicht, oder kaum, auf Organisation.

In der Schul- und Hochschulhierarchie nimmt die professionelle Komponente von oben nach unten ab. Auf den oberen Stufen dominiert die fachliche Ausbildung, nach unten zu gewinnt die pädagogische Ausbildung immer mehr an Bedeutung.

Werfen wir wieder einen Blick auf die österreichi-



sche Situation: Volksschul- und Hauptschul-Lehrer werden in Pädagogischen Akademien ausgebildet. Fragen der Stoffvermittlung genießen dort absolute Priorität. Die Kandidaten für das Lehramt haben von Anfang an die Möglichkeit, in eigens dafür eingerichteten Versuchsschulen praktische Erfahrungen zu sammeln.

Dagegen erfolgt die Ausbildung der AHS-Lehrer an den Universitäten. Im Vordergrund steht die fachliche Qualifikation. Die Klage über die unzureichende Vorbereitung der AHS-Lehrer auf die Situation in den Klassenzimmern ist weit verbreitet.

Professionalisierung heißt für Luhmann vor allem eine Verstärkung der psychologischen und pädagogischen Ausbildung. Dem kann man nur zustimmen. Allerdings haben Psychologie und Pädagogik bislang zu wenig die konkrete Unterrichtssituation reflektiert. Ihre Konzepte werden daher nicht als sehr hilfreich empfunden. Das mag daran liegen, dass es keine erfolgssicheren Lernrezepte gibt. In diesem Zusammenhang spricht Luhmann vom „Technologiedefizit“ des Erziehungssystems.

Es wird die Aufgabe einer sich neu positionierenden Pädagogik sein, dieses Manko auszugleichen. Dabei

wird die Analyse der konkreten Unterrichtssituation im Mittelpunkt stehen müssen. Die Ausbildung für den Lehrberuf wird die pädagogische Praxis nicht vorwegnehmen können, aber sie könnte darauf vorbereiten. Als Ziel strebt Luhmann einen Lehrer an, der Erfolge und Misserfolge mit Gelassenheit erträgt.

Literatur

- Foerster, Heinz von:* Wissen und Gewissen: Versuch einer Brücke. Frankfurt 1993.
- Hagen, Wolfgang* (Hrsg.): Warum haben Sie keinen Fernseher, Herr Luhmann? Berlin 2004.
- Luhmann, Niklas:* Das Erziehungssystem der Gesellschaft. Frankfurt 2002.
- Luhmann, Niklas:* Legitimation durch Verfahren. Neuwied 1969.
- Luhmann, Niklas:* Ökologische Kommunikation: Kann die moderne Gesellschaft sich auf ökologische Gefährdungen einstellen? Opladen 1986.
- Luhmann, Niklas:* Schriften zur Pädagogik. Frankfurt 2004.
- Luhmann, Niklas/Schorr, Karl Eberhard:* Reflexionsprobleme im Erziehungssystem. Frankfurt 1988 (1979).
- Neuwirth, Erich/Ponocny, Ivo/Grossmann, Wilfried* (Hrsg.): Pisa 2000 und Pisa 2003: Vertiefende Analysen und Beiträge zur Methodik. Graz 2006.
- Reese-Schäfer:* Luhmann zur Einführung. Hamburg 1992.
- Vorhauser, Monika:* Die Bedeutung systemtheoretischer Ansätze für die Pädagogik. Diplomarbeit, Universität Wien 1991.

Buchbesprechung

Konrad Paul Liessmann: Theorie der Unbildung. Die Irrtümer Wissensgesellschaft. Wien 2006, Paul Zsolnay Verlag. ISBN-10: 3-552-05382-4.

Liessmann räumt in seinem neuesten Buch mit den Irrwegen der modernen Pädagogik auf. Die Bildungswissenschaft hat anstatt die Bildung der Menschen zu fördern der Unbildung Vorschub geleistet. Sie hat Modetrends als Erkenntnisfortschritte ausgegeben.

So lautet einer ihrer Grundsätze: Gegenständliches Wissen ist ein unnötiger Ballast. Es genügt zu wissen, wo man nachschauen muss. Liessmann wendet dagegen ein: Wissen lässt sich nicht auslagern. Es entsteht im Kopf des Lernenden und sonst nirgendwo. Ich werde etwa mit anderssprachigen Menschen wohl kaum erfolgreich kommunizieren können, wenn ich keine Vokabel beherrsche. Der Hinweis, dass alle Vokabel in meinem Computer gespeichert sind, wird mir da wenig nutzen.

Keine Gnade findet auch das Prinzip, Lernen auf Lernen lernen zu beschränken. Nach Liessmann gibt es kein Lernen ohne Inhalte. Aber natürlich stellt sich dann sofort die Frage: Welche Inhalte sollen gelehrt werden? Seit der Demontage der humanistischen Bildung kann diese Frage nicht mehr beantwortet werden. Liessmann fordert deshalb das Aufstellen eines Kanons mit den wichtigsten Bildungsgütern. Im Deutsch-Unterricht liefe das etwa auf eine Liste jener Werke hinaus, die von allen Schülern gelesen werden müssten.

Liessmann ist skeptisch, dass die Aneignung von

Wissen spielerisch erfolgen kann. Natürlich sollen die Kinder dort abgeholt werden, wo sie sich gerade befinden. Wichtig ist aber auch die Ergänzung: Die Kinder sollen nicht dort bleiben, wo sie sich gerade befinden. Ja, es kann geradezu als Pflicht der Schule angesehen werden, die Schüler mit dem Neuen zu konfrontieren. Die Alternative wäre, sich damit abzufinden, dass eine ernsthafte Beschäftigung mit den Dingen erst auf der Universität stattfindet.

Zu PISA hat Liessmann ein ambivalentes Verhältnis. Einerseits enthüllt dieser von der OECD organisierte Test die Defizite, die von der modernen Pädagogik hinterlassen wurden, andererseits etabliert er selbst eine Norm. Indem man bestimmte Kompetenzen abprüft, stellt man diese Kompetenzen als besonders wichtig hin. Schon geistert die Empfehlung herum, man möge doch im Mathematik-Unterricht PISA-Test-Beispiele üben. Es besteht die Gefahr, dass die Schulen zu „Trainingsstätten für die heimlichen Lehrpläne der OECD-Ideologen“ (S. 86) degradiert werden. Das Problematische daran ist, dass über die Auswahl der Kompetenzen, über die ein Schüler verfügen soll, nie öffentlich diskutiert wurde.

Natürlich sind die Schulsysteme der einzelnen Länder sehr schwer vergleichbar. Um eine Rangliste zu erstellen, ist es notwendig, Qualitäten zu quantifizieren. Dass diese Methode geistigen Inhalten nicht gerecht werden kann, versteht sich eigentlich von selbst. Wer die Existenz dieser Inhalte bestreitet, sollte an das Goe-

the-Wort erinnert werden: „Was ihr nicht wägt, hat für euch kein Gewicht; was ihr nicht münzt, das glaubt ihr, gelte nicht.“

Bei der Lektüre von Liessmanns Buch wird immer klarer: Die Bildungsmisere wird durch die gleichen Reformen verursacht, die eigentlich eingeführt wurden, um die Bildungsmisere abzuwenden. Bei jeder Regierungserklärung wiederholt sich das gleiche Ritual. Der Bundeskanzler tritt vor das Rednerpult und verkündet im Brustton der Überzeugung, dass es jetzt endlich den Reformstau aufzulösen gelte. In Wahrheit befinden wir uns in einem Zustand der permanenten Reform. Da jede Reform nicht nur Probleme löst, sondern auch neue Probleme aufwirft, führt jede Reform zu weiteren Reformen. So entsteht ein Kreislauf, der sich selbst am Leben erhält. Liessmann konstatiert: „Man kann behaupten, dass eine gelungene Reform einen Selbstwiderspruch darstellt. Denn dann gäbe es nichts mehr zu reformieren – und das kann nicht sein“ (S. 170).

Übrigens zählt Liessmann zu den verunglückten Reformen, die alles schlechter gemacht haben, auch die Rechtschreibreform. Es ist daher nur konsequent, dass er sich in seinem Buch der alten Orthographie bedient.

Der Sinn von Institutionen liegt darin, stabile Rahmenbedingungen für das Handeln anzubieten. Die Menschen sollen von Strukturproblemen entlastet werden, damit sie sich voll und ganz auf ihr Kerngeschäft konzentrieren können. Genau das wollen die von der Sucht aufs Neue erfassten Politiker nicht akzeptieren.

Jede Reform löst zunächst ein Chaos aus. Es dauert, bis sich die Menschen mit den neuen Rahmenbedingungen zurechtfinden. Wenn endlich wieder alles klappt, kommt die nächste Reform. Hinter dieser Methode verbirgt sich ein tieferer Sinn: „Da niemand im Chaos leben kann, werden Institutionen, die durch Reformen chaotisiert werden, in der Regel von privaten Ordnungskräften wieder stabilisiert“ (S. 167). Egal ob es um die Sicherheit, um die Gesundheit oder die Bildung

geht, überall spielt sich das gleiche Muster ab. „Aus öffentlichem Eigentum soll Privateigentum, aus öffentlichen Angelegenheiten sollen Privatangelegenheiten werden“ (S. 172). Wo der Staat versagt, öffnet sich ein neuer Markt.

Es darf die Prognose gewagt werden, dass bei Fortdauer des Reformfurors ein Run auf Privatschulen einsetzen wird. Reüssieren werden jene Bildungseinrichtungen, die ihren Zöglingen stabile Rahmenbedingungen garantieren können.

Der politische Wille, der hinter all diesen Trends steht, wird durch den Hinweis auf angebliche Sachzwänge verschleiert. Man erzeugt eine self-fulfilling-prophecy – eine Vorhersage, die sich nur deshalb erfüllt, weil sie vorhergesagt wurde. Dazu Liessmann: „Der Glaube an die Unausweichlichkeiten unserer Zeit gehört womöglich zu jenen Illusionen, die notwendig sind, damit das Unausweichliche wirklich unausweichlich wird“ (S. 175).

Paradoxerweise hat die Linke das Terrain für den Sieg des Neoliberalismus bereitet. Denn es waren linke Pädagogen, die in den 60er und 70er Jahren den Primat der Ökonomie, die Praxisnähe des Unterrichts und die Vereinigung der Erziehung mit der materiellen Produktion gefordert haben. Begierig wurde dieses Programm von den Neoliberalen aufgegriffen und umgesetzt.

Die Unbildung hat eine wichtige gesellschaftliche Funktion: Sie geht mit dem Verzicht einher, verstehen zu wollen, wie die Machtmechanismen funktionieren. Den Absolventen unserer Bildungsanstalten soll das kritische Potenzial ausgetrieben werden. Diese Gesellschaft will sich nicht in Frage stellen lassen.

Nur gebildete Menschen sind mündige Menschen. Und nur mündige Menschen können sich gegen Manipulationen wehren. Liessmanns Buch liefert gute Argumente für alle, die den Kampf gegen die Unbildung noch nicht aufgegeben haben.

Robert Hofstetter



Zur Biologie der Trichinen

Mag. Dr. Hubert Kopeszki

Seit Jahrzehnten gibt es in Österreich keinen belegten Todesfall durch Trichinenbefall. Erkrankungen mit Spitalsaufenthalt, verursacht durch den Genuss trichinösen Fleisches – also Trichinosen – treten sehr wohl auf. Laut Auskunft des Statistischen Zentralamtes liegen in Österreich folgende Zahlen vor: 1995 tritt eine Trichinose auf, 1998 werden zwei Fälle bekannt, 1999 liegen wieder zwei weitere Erkrankungen vor, ebenso zwei im Jahr 2000.

Der folgende Beitrag beschäftigt sich genauer mit der Lebensweise und dem Körperbau der Trichinen (siehe Abbildungen), um dem Leser die Biologie dieses Parasiten wieder in Erinnerung zu rufen und auf die potenzielle Gefahr einer Infektion hinzuweisen, die vor allem im benachbarten Ausland dann gegeben ist, wenn eine verpflichtende Fleischschau nicht vorgesehen ist.

Trichinen (*Trichinella spiralis*) sind sogenannte Rundwürmer, die als erwachsene Tiere im Darm (Darmtrichine) ihres Wirtes leben und als Larve in der Muskulatur (Muskeltrichine) fleischfressender Säugetiere (und des Menschen). Dort rufen sie die Trichinenkrankheit (Trichinose) hervor.

Die Infektion erfolgt durch den Genuss trichinösen Fleisches. Wird trichinenbefallenes Muskelfleisch bei der Zubereitung nicht ausreichend erhitzt (die letale Temperatur für Larven liegt zwischen 62 °C und 72 °C) – z. B. bei Steaks oder Räucherschinken – bleiben die Larven am Leben und können zur Infektion führen. Auch ein monatelanges Einfrieren überleben etliche Muskeltrichinen. Untersuchungen haben gezeigt, dass das wiederholte Auftauen und Einfrieren trichinösen Fleisches die Anzahl lebender Larven deutlich herabsetzt, trotzdem aber kein vollständiges Abtöten der Trichinen bewirkt.

Die Erkrankung äußert sich in Übelkeit, Fieber und Darmkatarrh und kann nur unter ärztlicher Kontrolle (mit Spitalsaufenthalt) erfolgreich bekämpft werden; unbehandelt (nicht erkannt) führt die Erkrankung zum Tod.

Die Darmtrichinen sind zwischen 1,5 mm (Männchen) und 4 mm (Weibchen) groß (Abb. 1). Die Männchen sterben nach der Begattung, die Weibchen bohren sich mit Hilfe ihres Mundstiletts durch die Darmwand und saugen von der Zellflüssigkeit der Darmwand, ohne allzu großen Schaden anzurichten. Sechs bis sieben Tage nach der Infektion gebären die Weibchen schubweise 200 bis 1500 junge Larven von 0,1 mm Länge. Diese Larven lassen sich vom Blutstrom in alle Körperregionen verschleppen, können dann in die Muskelfasern des Wirtes (Schwein, Ratte, Maus, Mensch) eindringen und sich dort einkapseln.

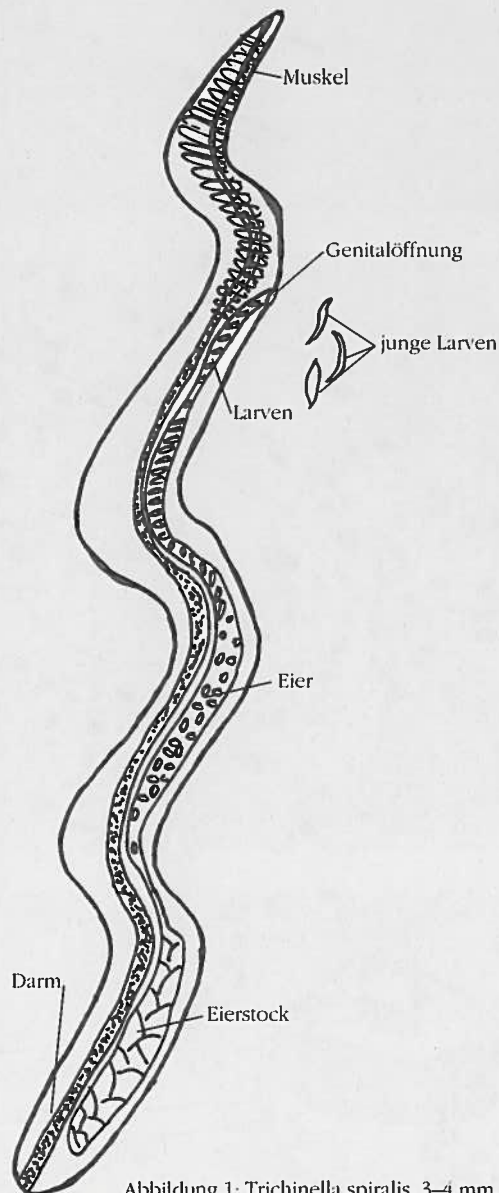


Abbildung 1: *Trichinella spiralis*, 3–4 mm, Weibchen

Die Larven setzen sich dabei bevorzugt in den gut durchbluteten Muskelbereichen fest, wie z. B. Zwerchfell und Zunge. Aus diesem Grund wird bei einer veterinärmedizinischen Untersuchung des Schwarzwildes bevorzugt Muskelfleisch aus diesem Bereich entnommen (Abb. 2).

Diese Larven (Muskeltrichinen) verursachen beim Menschen Muskelschmerzen, Kreislaufbeschwerden



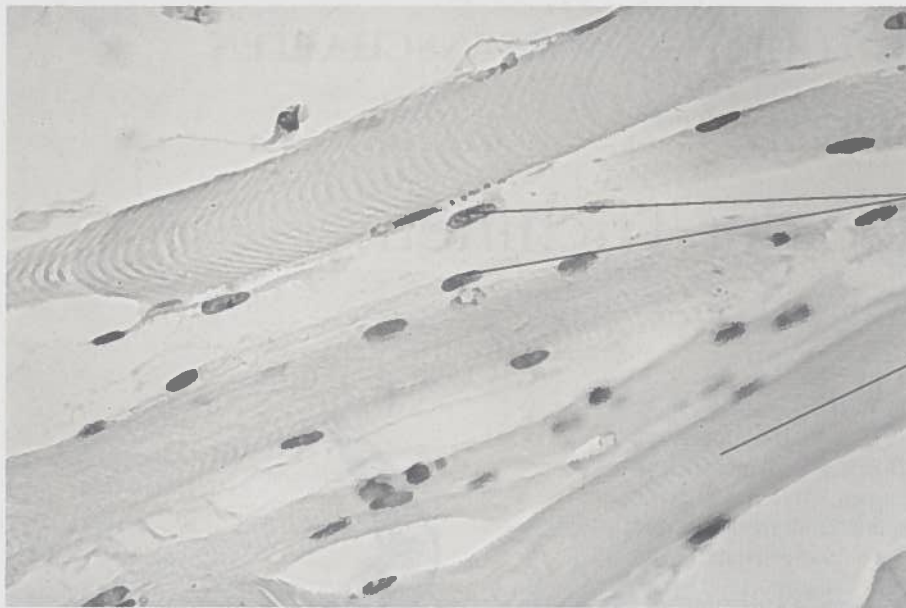


Abbildung 2: Mikroskopisches Präparat, geschnitten und gefärbt: gesunder Muskel

Zellkerne

Muskelfaser (quergestreifter gesunder Muskel eines Menschen)

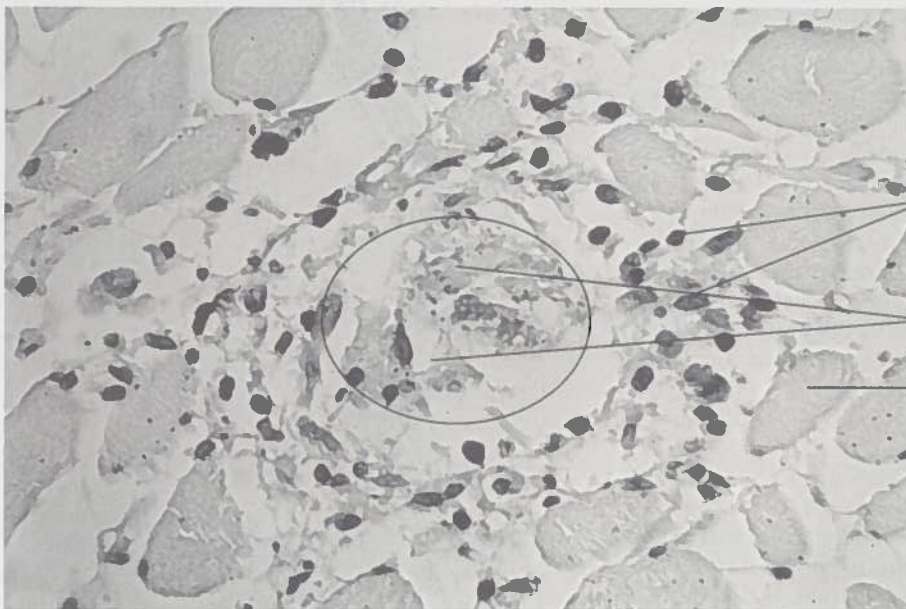


Abbildung 3: Erkrankter Muskel nach Trichinenbefall

Zellkerne

durch Trichinenbefall zerstörte Muskelfasern eines Menschen

Muskelfaser

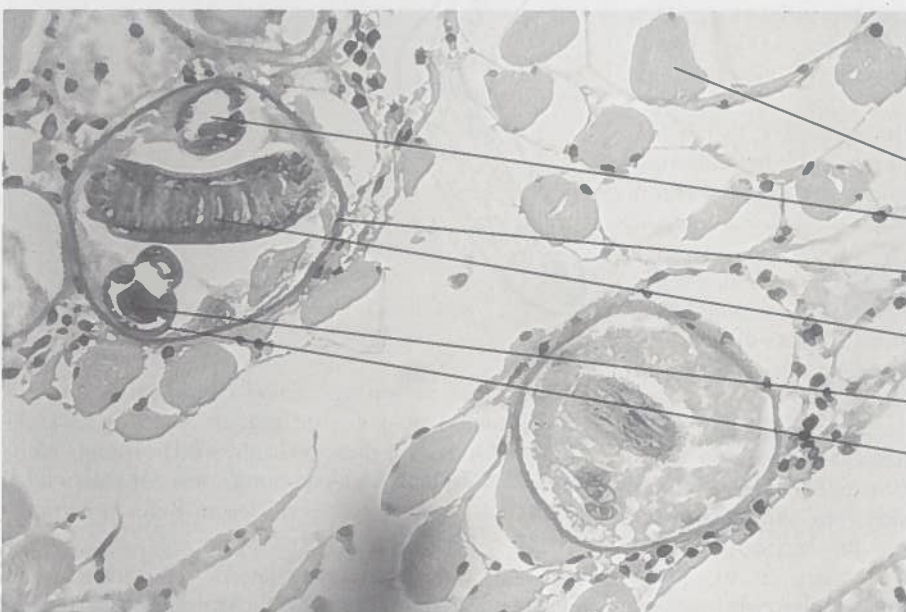


Abbildung 4: Angeschnittene Trichinenkapsel und mehrfach eingeschnittene Trichine

Muskel

Rundwurm quer

Kapselwand

Rundwurm = Trichine (der Länge nach geschnitten)

Darm des Wurms

Körperwand des Wurms



Abbildung 5: Muskel, längs, und eine lebende Trichine „aufgerollt“

Trichinenlarve

Kalkkapsel

Muskelfaser



Abbildung 6: Totalpräparate: hier lebt die Trichine noch

Kalkkapseln

und Steifigkeit. Sie führen nämlich nach acht bis neun Tagen zu einer Zersetzung der Muskelfasern (Abb. 2 u. 3). Die beigelegten Abbildungen zeigen den Vergleich gesunder und entsprechend befallener Muskelfasern (Abb. 3). Während man bei gesunden Muskelfasern die Querstreifung des Skelettmuskels sehr gut im Mikroskop beobachten kann, lösen sich diese Fasern, insbesondere die Hüllen der Fasern, beim befallenen Skelettmuskel auf und die Zellkerne scheinen lose „herumzuliegen“ (Abb. 3 u. 4). Der befallene Wirt (Schwarzwild, Ratte, Maus, Mensch etc.) versucht sich insofern zu schützen, als er versucht den Parasiten durch Bindegewebe und Kalk abzukapseln (Abb. 5 u. 6). Bekannt sind die Abbildungen dieser zitronenförmigen Kapseln mit den brezelförmig aufgerollten Rundwürmern (Abb. 7). Dabei kann eine Trichine in einer solchen Kapsel im Schwein elf Jahre, beim Menschen 31 Jahre lebensfähig bleiben (Kästner 1969).

Die Abbildungen 5, 6 und 8 zeigen solche Muskeltrichinen bei einer befallenen Maus. Die bindegewebige Kapsel wird durch Kalk verstärkt, der Hohlraum ist mit

Flüssigkeit gefüllt, in dem sich die Larve schlängelnd bewegen kann. Im mikroskopischen Präparat kann beim Skelettmuskel frisch getöteter Tiere tatsächlich die Bewegung der Larven beobachtet werden. Je eher von einem erlegten (Schwarz-)Wild ein solches Muskelpräparat angefertigt wird, umso besser sind die Chancen eine Trichine zu finden bzw. zu bestätigen.

Die neuesten veterinärmedizinischen Untersuchungen werden allerdings nicht an einzelnen Tieren durchgeführt, sondern der Nachweis eines Trichinenbefalls erfolgt serologisch. Das bedeutet, dass von mehreren geschlachteten/getöteten (erlegten) Tieren gleichzeitig mehrere Muskelstücke mittels Mixer fein zerkleinert werden und mit Hilfe von Chemikalien ein Nachweis eventuell vorhandener Trichinen erfolgt. Nur wenn hier ein positiver Nachweis gelingt, also der Verdacht eines Befalls auftritt, werden die Tiere dieser Tranche einzeln mikroskopisch untersucht. Eine stückweise Untersuchung wäre auf Grund der enormen Tierzahlen, die in großen Schlachthöfen in kurzer Zeit anfallen, nicht mehr möglich.

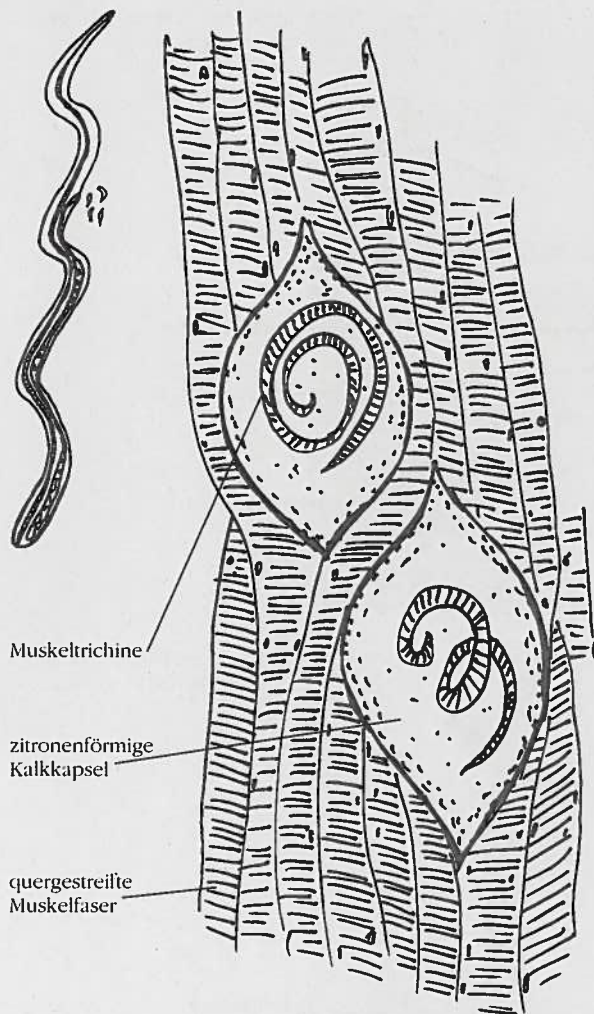


Abbildung 7: Zitronenförmige Kapsel mit „brezelförmiger“ Trichine

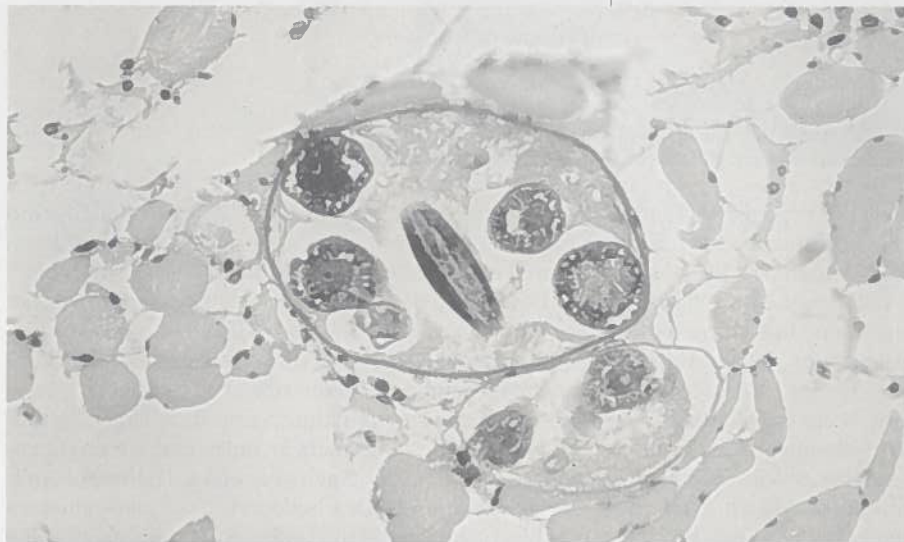


Abbildung 8: Bei mikroskopischen Dünnschnitten wird eine Trichinenlarve mehrmals angeschnitten

Von Trichinen befallen werden Hunde, Ratten, Mäuse, Katzen, Schweine, Dachse, Füchse und der Mensch. (In der Literatur kaum bekannt und umso interessanter ist, dass sich auch Pflanzenfresser mit Trichinen infizieren können, wie z. B. Pferde. Das kann dann passieren, wenn Pferde in ihrem Futtertrog Mäuse fangen und fressen [!!!!] und diese Mäuse mit Trichinen infiziert sind.)

Der Wirt stellt im Falle der Trichine sowohl Zwi-

schen- als auch Endwirt dar. Wird trichinöses Fleisch gegessen (gefressen), so löst sich die Kapsel im Magen wieder auf und die Trichine wird zum Darmbewohner. Hier häutet sie sich und kann bereits 40 Stunden später begattet werden.

Der Befall beim Menschen

Während die Darmtrichinen, also die erwachsenen Parasiten, „nur“ Darmkatarrh hervorrufen, bewirken die Angriffe der Larven ohne Behandlung meist den Tod. Die durch den Muskelzerfall (Abb. 3) freiwerdenden Gifte führen nämlich zur Lähmung der Muskulatur – bei einer entsprechenden medizinischen Bekämpfung können diese Zellgifte bzw. die abgestorbenen Trichinen zu einem tödlichen Schock führen – Behandlungen können daher nur stationär unter permanenter ärztlicher Kontrolle erfolgen.

Bemerkenswert ist, dass der Hauptüberträger, das Schwein, auch schwere Infektionen meist gut übersteht und daher im Muskelfleisch infizierter Schweine extrem viele infektiöse Larven sitzen können. Untersuchungen haben gezeigt, dass in einem Kilogramm Schweinemuskel bis zu 12.500 eingekapselte Larven (Abb. 6) leben können und der Genuss solchen Fleisches praktisch immer zu einer Erkrankung führt.

Bemerkenswert sind auch jene Infektionen geworden, die durch den Genuss von Fleisch von Wildtieren erfolgten, bei denen der Laie keine Infektion vermutet, wie z. B. Fuchs und Dachs (Kästner 1973).

Die verpflichtende Fleischuntersuchung (in Teilen Deutschlands bereits seit 1877) hat zur Eindämmung bzw. zum fast vollständigen Verschwinden der Trichinose geführt. Die zwar wenigen, aber dennoch auftretenden Erkrankungen, wenn auch nicht durch „einhei-

mische“ Infektionen hervorgerufen, zeigen aber, dass man weiterhin gut beraten ist, nur untersuchtes Schwarzwildfleisch und gut durchgekocht zu konsumieren.

Literatur:

Kästner, A. (1973) Lehrbuch der speziellen Zoologie. Bd. 1, Teil 1, Wirbellose: Gustav Fischer Verlag, Stuttgart.

Natur im Wandel heißt Leben im Wandel

Klima & Evolution als Motoren des Lebendigen – Eine neue Dauerausstellung im Naturhistorischen Museum Wien ab Juni 2007

Mathias Harzhauser*

Klimaentwicklung und Evolution sind die derzeit meistdiskutierten naturwissenschaftlichen Forschungsgebiete. In einer neuen Ausstellung befasst sich das Naturhistorische Museum Wien mit diesen brandaktuellen Themen.

Der Schwerpunkt der Ausstellung zeigt den Menschen als integrierten Bestandteil der Natur, sei es als Produkt der Evolution und ihrer Mechanismen oder als (allzu) cleverer Räuber, der seit Jahrtausenden das Aussterben vieler Organismen verursacht oder beschleunigt. Der Mensch wird aber auch im Spiegel der Klimaentwicklung gezeigt. Über Jahrtausende prägten Klimaschwankungen die Entwicklung der Zivilisation. Spielerisch spannt sich der Bogen von den ersten Hochkulturen in Ägypten und Mesopotamien bis zum Ausbruch der Französischen Revolution. Nun scheint es, dass erstmals der Mensch das Klimageschehen beeinflusst. „Global Warming“ und seine Folgen werden thematisiert. Dramatische Wackelbilder verdeutlichen das Ausmaß der Gletscherschmelze, während Stereobilder wärmeliebende Insekten als Gewinner der Erderwärmung dreidimensional vorführen. Die moderne Darstellung der Klimaentwicklung der letzten 700 Millionen Jahre zeigt, dass das Klima nie stabil war. Die Extreme reichen vom tropisch-heißen Erdmittelalter bis zur massiven Vergletscherung vor 700 Millionen Jahren. Besonders hervorgehoben wird das eiszeitliche Klimageschehen der letzten 1.000.000 Jahre, basierend auf modernsten geochemischen Untersuchungen an Bohrkernen. Welchen Einfluss der „volltechnisierte“ Mensch auf die Umwelt hat, wird erst im Spiegel dieser langfristigen Klimaentwicklung deutlich.

Die eigentlichen Stars der Ausstellung sind die perfekt restaurierten Skelette von Höhlenbär, Waldbison, Riesenhirsch und Höhlenlöwe. Die entsprechenden Höhlenmalereien zeigen diese Tiere, wie sie der eiszeitliche Mensch als Zeit- und Augenzeuge erlebte. Die aufwändige Rekonstruktion einer typischen Mammutjägerhütte, die in den kalten Wintern als schützende Behausung diente, vermittelt die rauen Lebensumstände unserer Vorfahren. Die exzellenten Skelette von Säbelzahnkatze, Riesengürteltier, Riesenfaultier und von einigen fossilen Riesenstraußen (Moa) veranschaulichen

Grundmechanismen der Evolution: das Wettrennen zwischen Räuber und Beute, die gegenläufigen Trends zu Riesenwuchs oder Verzweigung sowie die mehrfache „Erfindung“ von Strategien als Antwort auf ähnliche Umweltbedingungen. Aufgrund des geowissenschaftlichen Backgrounds liegt ein weiterer Schwerpunkt auf Aussterben und Geodynamik als oft unterschätzte Bestandteile des Evolutionsmotors. Neue Computeranimationen erwecken die ausgestorbene Tierwelt zum Leben und veranschaulichen astronomische Parameter, die unser Klima steuern.

Die meist komplexen Zusammenhänge werden bewusst durch überraschende Eye-catcher aufgelockert. Am Ende weiß der Besucher, warum die Rote Königin aus Lewis Carroll's „Alice hinter den Spiegeln“ ein Grundprinzip der Evolution formuliert, dass der einäugige Riese Polyphem ein Zwergelfant war und was Hannibal und Pieter Brueghel der Ältere mit der Klimageschichte zu schaffen haben.

* Univ.-Doz. Dr. Mathias Harzhauser ist Direktor der Geologisch-paläontologischen Abteilung des Naturhistorischen Museums.



GEO-Veranstaltungen am Naturhistorischen Museum 2007

Zielgruppe: AHS-Lehrer und Lehramtskandidaten, Biologie und Umweltkunde, Geografie und Wirtschaftskunde, Geschichte

Mittwoch, 13. Juni 2007, 19 Uhr,
Kinosaal des Museums

Öffentliche Buchpräsentation

Der Autor **Mag. Thomas Hofmann** (Geologische Bundesanstalt Wien) präsentiert den Band „**Wien, Niederösterreich und Burgenland**“ aus der Reihe „**Wanderungen in die Erdgeschichte**“, Band 22, Pfeil Verlag, München.

Anschließend: Abendführung im Naturhistorischen Museum Wien

Mittwoch, 4. Juli 2007, 18 Uhr,
Kinosaal des Museums

Gemeinsame Veranstaltung der Österreichischen Geologischen Gesellschaft, der Österreichischen Mineralogischen Gesellschaft und der Freunde des Naturhistorischen Museums

Wilfried Schlosser (ASEP – Water and Sanitation Extension Program): **Trinkwasser für Dörfer am Dach der Welt**

Anschließend: **Über Wasser**, Dokumentarfilm von **Udo Maurer**

Anschließend: Diskussion mit dem Regisseur

Mittwoch, 5. Dezember 2007, 14–17.30 Uhr,
Kinosaal des Museums

Halbtägiges Seminar für AHS-Lehrer Biologie und Umweltkunde, Geografie und Wirtschaftskunde, Geschichte

Univ.-Prof. Dr. Fritz F. Steininger (Krahuletz Museum Eggenburg): **Johann Wolfgang von Goethe – Geognost in seiner Zeit**

Dr. Kurt Decker (Universität Wien): **Carnuntum – ein historisches Starkbeben**

Dr. Ralf Schuster (Geologische Bundesanstalt Wien): **Die Alpen als Produkt der Plattentektonik**. Wie spielen sich die Prozesse der Plattentektonik – Öffnung eines ozeanischen Beckens – Schließung des Beckens – Kontinentkollision in den Alpen – wider?

Univ.-Doz Dr. Marhias Harzhauser (NHMW): **Das Wiener Becken im Miozän**. Ökologie und Klimageschichte

Dr. Erich Draganits (TU Wien): **Der Neusiedlersee in historischer Zeit**

Anmeldungen bei: Dr. Herbert Summesberger, Naturhistorisches Museum, A-1010 Wien, Burgring 7, herbert.summesberger@nhm-wien.ac.at

Anschließend:

Mittwoch, 5. Dezember 2007, 18–21 Uhr,
Kinosaal, Eingang: Maria-Theresien-Platz

6. Barbara-Markt am Naturhistorischen Museum

Österreichische Geologische Gesellschaft, Naturhistorisches Museum Wien, Geologische Bundesanstalt Wien, Freunde des Naturhistorischen Museums Wien

Zwangloses Treffen von Lehrerinnen und Lehrern aller Schultypen mit Mineralogen, Geologen, Paläontologen des NHMW, der Uni Wien und Graz sowie der GBA und Freunden des NHMW; Angebote von Neuerscheinungen, Präsentation von Neuerungen am NHMW

Detailprogramm wird bekannt gegeben



Johann Wolfgang von Goethe, Altersportrait



Feuerwerk

Tradition – Kunst – Wissenschaft

Jakob Steiner

Kaum eine Kunst vermag es, innerhalb kürzester Zeit so viele Menschen zu begeistern und in ihren Bann zu ziehen wie das Feuerwerk. Seit seiner Erfindung hat das bunte Spektakel aus Licht und Feuer bis heute nichts an seiner Attraktivität verloren. Jahr für Jahr begeistert das Zischen der Raketen und das dumpfe Donnern der Kanonenschläge immer mehr Menschen. Dabei hat sich die sogenannte Lustfeuerwerkerei über die Jahrhunderte hinweg in vielen Ländern zu einer wichtigen Tradition entwickelt, welche nicht selten auch religiöse Hintergründe birgt. Doch auch im Bereich der Kunst konnte sich dieses traditionelle Handwerk etablieren. So gilt es bei professionell durchgeführten Großfeuerwerken die zahlreichen Effekte teilweise im Hundertstelsekundentakt nach einer zuvor genau festgelegten Choreographie in den Himmel zu feuern. Jedes Jahr treffen sich auf diese Weise die weltweit führenden Pyrotechniker und wetteifern bei den unterschiedlichsten Feuerwerkswettbewerben um den Titel des besten Feuerwerkers. Dabei ahnen nur die wenigsten der begeisterten Zuseher, wie viel Arbeit und Erfahrung hinter derartigen Shows steckt. Nicht selten verbergen sich überaus komplexe chemische Reaktionen hinter den diversen Farb- und Flimmereffekten. Dabei sorgen komplizierte, mit viel Know-how produzierte Gemische unterschiedlichster Chemikalien für die brillanten Momente aus Licht und Feuer.

Historisches

Die Geschichte des Feuerwerkes reicht bis in das China des neunten Jahrhunderts zurück. Damals warfen die Chinesen schwarzpulvergefüllte Bambusstangen ins Feuer, um böse Geister zu vertreiben. Das unter dem Namen huo yao („Feuerdroge“) bekannte Gemisch aus Salpeter, Schwefel und Holzkohle gelangte im Laufe des 13. Jahrhunderts vermutlich über arabische Handelswege nach Europa.

Eine in der Literatur immer wieder auftretende Geschichte ist die Erzählung vom Franziskanermönch Berthold Schwarz (Abb. 1), der um 1370 das Schwarzpulver erfunden haben soll. Die Menschen des ausgehenden Mittelalters bzw. der Frührenaissance sahen eine enge Verknüpfung des Ordens des heiligen Franziskus mit der Alchemie, sodass die Legende äußerst glaubhaft erschien. Wie bereits dargelegt, war das Pulver jedoch im Orient längst erfunden und seine Kenntnis bis in die Schriften des Franziskaners Roger Bacon

vorgedrungen, der 1265/66 in einer „Epistola“ das erste Pulverrezept im heutigen Europa veröffentlichte. Schwarz könnte aber derjenige gewesen sein, welcher als erster die todbringende Wirkung des Schwarzpulvers im christlichen Abendland erkannte. Ob es den Mönch mit dem treffenden Namen jemals gegeben hat, ist unklar. Fest steht jedoch, dass das dunkle Pulver seit dem 13. Jahrhundert in großen Mengen produziert wurde.



Abb. 1: Der Mönche Berthold Schwarz
(Abbildung aus „7000 Jahre Chemie“ von Otto Krätz)

Viele Herrscher erkannten schnell das militärische Potential der neuen Erfindung. Eine neue Ära im Kriegsgeschehen brach an. Während sich die Ritter Schritt für Schritt zurückzogen, betrat der Soldat das Schlachtfeld. Das Schwarzpulver wurde aber auch für friedliche Zwecke genutzt. Neben der praktischen Anwendung zu Sprengzwecken im Bergbau fanden viele Adelige ihren Gefallen an Feuerwerken aller Art. Die sogenannte Lustfeuerwerkerei war geboren und fand dabei vom 16. bis 18. Jahrhundert ihren Höhepunkt. Sie bildete den Vorläufer des heutigen Feuerwerkes.

Schwarzpulver

Das Schwarzpulver dürfte wohl eine der wichtigsten Grundmischungen in der Pyrotechnik darstellen. Nahe-



zu alle heute verwendeten Feuerwerkskörper enthalten Schwarzpulver in Form diverser pyrotechnischer Sätze.

Schwarzpulver ist eine Mischung aus 74% Kaliumnitrat (KNO_3), 15,6% Holzkohle (C) und 10,4% Schwefel (S). Nitrate werden im Volksmund häufig auch als Salpeter bezeichnet. Grund dafür ist der frühere Einsatz des sogenannten „Chinasalpeters“ (= Natriumnitrat NaNO_3) bei der Schwarzpulverproduktion. Wegen der zur Neige gehenden Salpetervorkommen in Chile und der hygroskopischen Eigenschaft dieses Natriumsalzes wird heutzutage nur noch mit dem besser geeigneten Kaliumnitrat gearbeitet.

Bei der Produktion kommt es wie bei allen pyrotechnischen Sätzen stark auf die Sorgfältigkeit der Verreibung und die Körnung an. Von Hand gemischtes Schwarzpulver brennt meist recht langsam und ist daher nicht für Treib- oder Zerlegerladungen geeignet. Bei der industriellen Herstellung werden Kugelmöhlen eingesetzt, welche die Bestandteile über Stunden feinst miteinander verreiben. Auf diese Art und Weise erreicht man wesentlich höhere Verbrennungsgeschwindigkeiten. Meist wird das fertige Schwarzpulver gepresst und anschließend wieder zerschlagen, um einen gewünschten Körnungsgrad zu erhalten (Abb. 2). Typische Feuerwerkspulver haben Körnungen zwischen 2,5 und 3,5 mm. Diese eignen sich gut als Treib- und Zerlegerladungen. Heute kennen wir unzählige Arten diverser Schwarzpulver, die sich je nach Verwendungszweck durch Faktoren wie Körnung, Powerindex, Politur ... etc. unterscheiden.

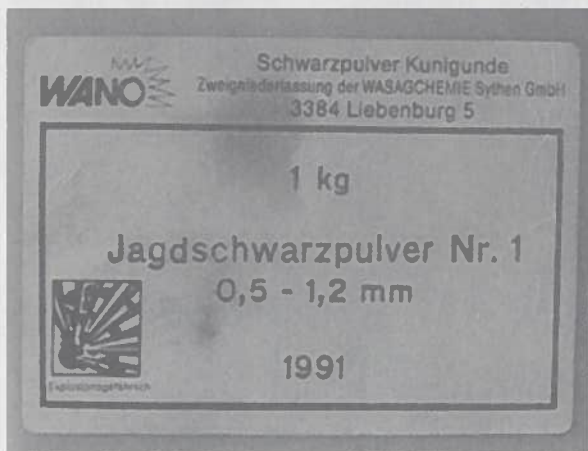


Abb. 2: Körnungsgrad von Schwarzpulver (Foto: Jakob Steiner)

Besonders wichtig ist die Qualität der für die Schwarzpulverherstellung verwendeten Holzkohle. Dabei werden die besten Ergebnisse mit sogenannter Faulbaumkohle erzielt. Auch die Holzkohle diverser Trauerweiden eignet sich sehr gut für die Pulverproduktion. Aktivkohle ist gänzlich ungeeignet, da sich die Zusammensetzung von Holzkohle stark von reinem Kohlenstoff unterscheidet.

Schwarzpulver ist nicht schlag- und reibungsempfindlich. Diese Eigenschaften machen es im Vergleich zu anderen pyrotechnischen Mischungen relativ handhabungssicher. Es lässt sich außerdem gut dosieren. Besonders vorteilhaft ist seine „schiebende“ und nicht wie bei anderen Gemischen häufig auftretende „zertrümmernde“ Wirkung.

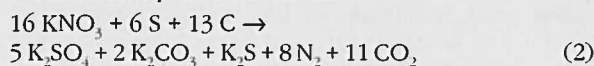
Die bei der Verbrennung von Schwarzpulver entstehende Energie ist enorm. Dies ist auch aus der entspre-

chenden Reaktionsenthalpie (= die bei einer chemischen Reaktion unter konstantem Druck frei werdende Energie) von $\Delta_{\text{H,p}} = -2316$ bis -3484 Jg^{-1} ersichtlich.

Eine genaue Reaktionsgleichung für die Verbrennung von Schwarzpulver zu formulieren ist äußerst schwierig. Bis heute kann die Reaktion nicht mit Sicherheit gedeutet werden, da pyrotechnische Reaktionen generell schwer analytisch fassbar sind und es sich im Fall des Schwarzpulvers offensichtlich um keine genau definierte Reaktion handelt. Geht man nur von den empirischen Mengenverhältnissen der Ausgangsstoffe aus, kann unter Berücksichtigung der molaren Massen folgende Gleichung aufgestellt werden:



Dass die Schwarzpulververbrennung mit einer derartigen Gleichung keineswegs befriedigend beschrieben werden kann, stellte bereits Berthelot fest und konzipierte eine andere Reaktionsgleichung (2), welche auf der von Bunsen im Jahre 1857 durchgeführten Analyse der Reaktionsprodukte basiert:



Leider ergibt sich beim genaueren Betrachten, dass auch diese Gleichung keinesfalls ausreichen kann, die überaus komplexe Reaktion korrekt zu deuten. Stattdessen kann durch Angabe mehrerer Reaktionsgleichungen lediglich eine Annäherung an die vermutlich ablaufenden Reaktionen während des Umsatzes angegeben werden, welche den Rahmen dieses Beitrages jedoch mit Sicherheit sprengen würde und daher hier nicht weiter ausgeführt wird.

Weiters stellte sich heraus, dass die Reaktion stark vom verwendeten Schwarzpulver und vielen äußeren Faktoren abhängig ist. Dieser Umstand macht es auch besonders schwierig bereits gemachte Ergebnisse ein weiteres Mal zu reproduzieren.

Pyrotechnische Sätze

Als pyrotechnische Sätze werden Mischungen von unterschiedlichen chemischen Substanzen angesehen, welche bei willkürlich ausgelöster chemischer Zustandsänderung bestimmte Bewegungs-, Licht-, Knall-, Rauch-, Nebel-, Druck- oder Reizwirkungen zeigen.

Wichtig ist der Unterschied zwischen pyrotechnischen Sätzen und gewerblichen oder militärischen Sprengstoffen. Während es sich bei pyrotechnischen Sätzen (z. B. Schwarzpulver, Bengalpulver, ...) immer um Mischungen verschiedener Chemikalien handelt, bestehen Sprengstoffe (z. B. Glycerintrinitrat, Trinitrotoluol, ...) aus lediglich einer Substanz und stellen daher Reinstoffe dar.

Pyrotechnische Sätze sind nicht selten recht komplexe Mischungen aus diversen Bestandteilen. Grob können die Bestandteile in folgende Gruppen eingeteilt werden:

- Oxidationsmittel
- Reduktionsmittel (Brennstoffe)
- Metalle (dienen auch als Reduktionsmittel!)
- Farbgeber
- Katalysatoren, Inhibitoren
- Bindemittel
- Zusatzstoffe (Farbverstärker, Fließmittel, Stabilisatoren, ...)

Diese Auflistung ist zugegebenermaßen etwas willkürlich, da natürlich nicht jeder Satz alle angeführten Bestandteile enthalten muss. Des weiteren können einzelne Substanzen in der jeweiligen Reaktion unterschiedliche Aufgaben zur gleichen Zeit erfüllen. So können Metalle einerseits als Effektgeber fungieren und prächtige Funken- und Flimmereffekte („Tremolanteffekte“) erzeugen, gleichzeitig natürlich aber auch ihre Wirkung als überaus gute Reduktionsmittel entfalten. Farbgebende Substanzen, wie zum Beispiel Erdalkalimetallnitratre, können neben der Erzeugung von prächtigen Farben auch die Aufgabe eines entsprechenden Oxidationsmittels erfüllen.

Durch Mischen der verschiedenen Bestandteile ergeben sich schließlich Anfeuerungs-, Treib-, Effekt-, Leucht-, Knall-, Rauch-, Nebel-, Blitzknall-, Pfeiff-, Verzögerungs-, Zerleger-, Heiz- und Schwefelsätze.

Einige Beispiele der diversen in der Pyrotechnik eingesetzten Chemikalien sind in Tabelle 1 zu finden.

Oxidationsmittel	KNO ₃ , KClO ₃ , KClO ₄ , NH ₄ ClO ₄ , Ba(ClO ₃) ₂ , Ba(NO ₃) ₂ , PbO ₂ , ...
Reduktionsmittel	C, S, Shellack, versch. Zucker, ...
Metalle	Mg, Al, Ti, Fe, Zr, Ca, versch. Legierungen, ...
Farbgeber	Sr(NO ₃) ₂ , SrCO ₃ , BaCO ₃ , CuO, CuCO ₃ , NaNO ₃
Katalysatoren/Inhibitoren	Fe ₂ O ₃ , Cr ₂ O ₃ , ...
Bindemittel	Dextrin, Stärke, ...
Zusatzstoffe (Farbverstärker, Fließmittel, Stabilisatoren)	OVC, Parlon, Dechloran, SiO ₂ , H ₃ BO ₃ , K ₂ Cr ₂ O ₇ , ...

Tabelle 1

Die Abbrandeigenschaften der einzelnen Sätze sind dann von Faktoren wie Feuchtigkeit, Mischung, Packungsdichte und Wärmeleitfähigkeit abhängig. Besonders Augenmerk hat dabei vor allem die Eigenschaft der Wärmekapazität verdient. Bei pyrotechnischen Gemischen, in welchen Holzkohle als Brennstoff eingesetzt wird, ist Kohlendioxid das primär zu beachtende Reaktionsprodukt. Da das Nichtmetalloxid ein Gas darstellt, kann es leicht entweichen und beeinflusst die Reaktion nicht in sonderlich hohem Maße. Dagegen entstehen bei metallhaltigen Mischungen feste Metalloxide, welche einerseits die frei werdende Wärmeenergie speichern und so zu einem besonders heißen Abbrand führen, gleichzeitig erhöhen die Oxide aber auch die aktive Oberfläche. Dies hat zur Folge, dass Mischungen starker Oxidationsmittel mit leicht oxidierbaren Metallen wie Aluminium oder Magnesium besonders heftig abbrennen.

Flammenfarbe

Die zahlreichen Feuerwerke der Barockzeit waren zwar äußerst prunkvoll und teuer, jedoch ließen sie vor allem in puncto Farbigekeit sehr viel zu wünschen übrig. Wirklich farbiges und gleißend helles Feuerwerk gibt es erst seit knapp 100 Jahren. Verantwortlich für die prächtigen, bunten Flammen sind verschiedene Salze, wobei vor allem jene Verbindungen der diversen Alkali- und Erdalkalimetalle zum Einsatz kommen.

Je nach verwendeter Substanz sind unterschiedliche Farben möglich. Natürlich sind auch Mischungen mög-

lich. Einige wenige Beispiele sind in Tabelle 2 aufgelistet.

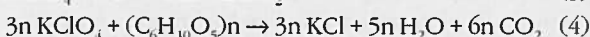
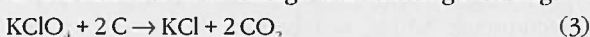
Flammenfarbe	Verantwortliches Element	Beispiele verwendeter Salze
gelb/orange	Na	NaNO ₃ , (COO) ₂ Na ₂ , Na ₂ CO ₃
violett	K	KNO ₃ , K ₂ CO ₃
orange/karminrot	Ca	CaO, CaCO ₃
rot	Sr	Sr(NO ₃) ₂ , SrCO ₃
grün	Ba	Ba(NO ₃) ₂ , BaCO ₃
blau/grün	Cu	CuO

Tabelle 2

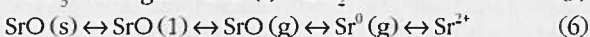
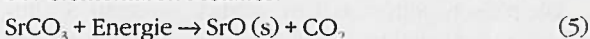
Während weißes Licht bei pyrotechnischen Sätzen durch die sogenannte Schwarzkörperstrahlung entsteht (verschiedene Körper emittieren gemäß dem Planck'schen Strahlungsgesetz Licht unterschiedlicher Wellenlängen, wenn sie entsprechend thermisch angeregt werden, dies geschieht aber meist erst bei sehr hohen Temperaturen), ist die Erzeugung farbiger Flammen etwas schwieriger.

Bei der thermischen Anregung der Salze werden einzelne Elektronen der Atome angeregt und dadurch auf höhere Energieniveaus gehoben. Anschließend fallen die Elektronen in ihren Grundzustand zurück und strahlen die zuvor aufgenommene Energie in Form von sichtbarem Licht in der für das Element charakteristischen Farbe aus.

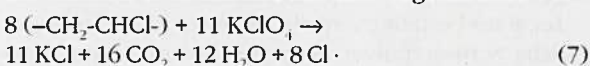
Häufig werden Chlordonatoren in Form von chlorierten Polymeren wie PVC, Parlon oder Dechloran hinzugefügt. Die bei der Verbrennung frei werdenden Chlorradikale reagieren mit den im Verlauf der Reaktion elementar entstehenden Metallen zu Metall-I-chloriden, wobei diese zunächst in einem hochangeregten Zustand vorliegen. Beim Übergang in den energetischen Grundzustand werden dann Photonen ausgesandt. Ein mögliches Reaktionsschema beschreiben die nachstehenden Gleichungen für einen rot brennenden Perchloratsatz. In (3) bzw. alternativ (4) wird zunächst die für die Reaktion notwendige Wärmeenergie erzeugt.



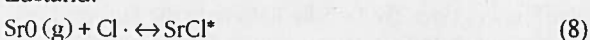
Anschließend kommt es gemäß (5) zum Verdampfen des entsprechenden Farbgebers und zur Entstehung des elementaren Metalles:



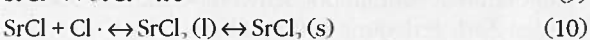
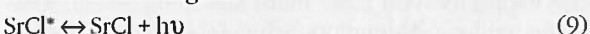
In einer Parallelreaktion (7) entstehen daraus überaus reaktive Chlorradikale aus dem zugesetzten PVC:



Diese reagieren mit dem zuvor entstandenen Metall zu Metall-I-chloriden im energetisch hochangeregten Zustand:



Schließlich wird Energie in Form von sichtbarem Licht abgegeben, wobei das Monochlorid in einer Folgereaktion mit einem weiteren Chlorradikal zum Dichlorid weiterreagiert:



Wichtig ist es bei derartigen Reaktionen auch, den entsprechenden Zersetzungspunkt der Farbgeber zu beachten. Oft muss man relativ „kühle“ Flammen (<2000° C) erzeugen, um eine entsprechende Flammenfärbung zu erreichen. Dies ist besonders bei der Erzeugung von blauen Leuchtsätzen zu beachten.

Leuchtsterne

Für die Herstellung der verschiedenen Feuerwerkskörper müssen die fertig gemischten, losen pyrotechnischen Sätze meist zu sogenannten Sternen (Leuchtsternen) verarbeitet werden. Unter dem Begriff Leuchtstern versteht man eine kleine, aus pyrotechnischem Satz geformte Kugel, wobei es auch zylindrische und würfelförmige Sterne gibt. Die Leuchtsterne werden in den späteren Feuerwerksartikeln in großen Mengen als Effekte eingesetzt. Sie bilden die farbenprächtigen Bouquets der einzelnen Effekte, während sie brennend durch die Luft fliegen.

Für die Herstellung der Sterne werden zunächst pflanzliche Samen oder Reishülsen in Dragiertrommeln vorgelegt und mit Ethanol-Wasser-Mischungen befeuchtet. Anschließend wird der pulverförmige Leuchtsternsatz in kleinen Portionen zugegeben. Durch die abwechselnde Zugabe von Satz und Flüssigkeit wird die Mischung auf die pflanzlichen Samen aufgerollt. Dabei wachsen die Leuchtsterne nach dem Schneeballprinzip in der Mischtrommel heran.

Auch eine abwechselnde Zugabe unterschiedlicher Sätze ist möglich. Die fertigen Sterne brennen später von außen nach innen und können so im Verlauf der Reaktion mehrfach die Flammenfarbe oder den Effekt wechseln.

Fertig gerollte Sterne werden meist im Freien in der Sonne getrocknet und anschließend in die einzelnen Feuerwerkskörper einlaboriert.

Pyrotechnische Artikel

Derzeit gibt es eine große Anzahl verschiedenster pyrotechnischer Artikel, welche sowohl für den privaten als auch für den professionellen Gebrauch angeboten werden. Im Folgenden soll eine kleine Auswahl einiger pyrotechnischer Gegenstände näher beschrieben werden.

Die typische Silvesterrakete ist als sogenannte Schüttrakete aufgebaut. Dabei befinden sich die Leuchtsterne lose (teilweise auch mit Zerlegerladung gemischt) in einer Kartonhülle, welche ihrerseits am oberen Ende des sogenannten Raketentreibers befestigt ist.

Letzterer besteht ebenfalls aus einer Kartonhülle, in welche Schwarzpulver eingepresst wird. Dabei wird eine dünne Seele in das Pulver eingepresst und die Hülse mit einer Düse aus Ton verschlossen. Beim Entzünden des Treibers über eine (An-)Zündschnur (Anzündlitze) bewegt der Treiber die Rakete in die Luft und entzündet am Kulminationspunkt die Effektladung.

Eine Alternative zur gewöhnlichen Schüttrakete bildet die sogenannte Endbrennerrakete, bei der die Leuchtsterne im Inneren der Rakete durch eine zusätzliche Papphülle von einer meist aus Blitzknallsatz (Kaliumperchlorat-Aluminium-Schwefel-Gemisch) bestehenden Zerlegerladung getrennt sind.



Abb. 3: Verschiedene Kugelbomben Kaliber 210 mm auf Abschussmörsern fertig zum Verladen aufgelegt (Foto: Jakob Steiner).

Bei professionellen Großfeuerwerken stellen Raketen als Effekte eher die Ausnahme dar. Stattdessen werden sogenannte Feuerwerksbomben eingesetzt, welche aus Abschussmörsern verschossen werden. Typische Kugelbomben sind in Abbildung 3 zu sehen.

Eine Schwarzpulvertreibladung an der Unterseite der Bombe wird gezündet und schießt diese nach dem Prinzip einer Kanonenkugel aus dem Rohr. Dabei wird an der Unterseite der Bombe ein Verzögerungszünder entzündet, welcher nach kurzer Zeit (üblicherweise 2 bis 3 Sekunden) ins Innere der Kugelbombe durchschlägt. Dadurch wird die Zerlegerladung entzündet, welche ihrerseits wiederum die Sterne entflammt und die gesamte aus Pappe oder Kunststoff bestehende Hülle zerreißt. Die Leuchtsterne werden daraufhin durch die enorme Wucht sphärisch auseinandergetrieben und bilden den bliebenen Großfeuerwerkseffekt (Abb. 4).

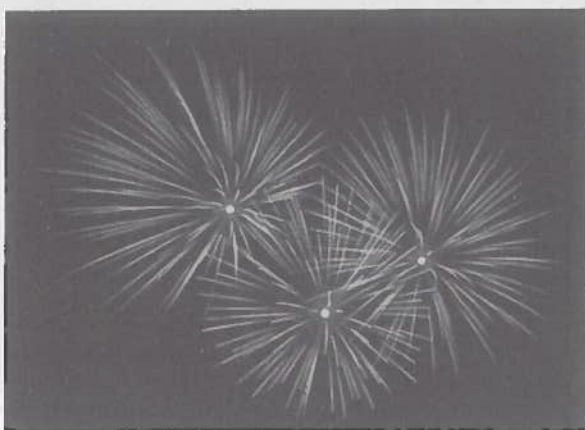


Abb. 4: Kugelbomben mit „Peonyeffekt“ (Foto: Simone Pettenauer)

Eine Alternative zur Kugelbombe stellt die besonders im europäischen Raum weit verbreitete Zylinderbombe dar (Abb. 5). Die meist in Italien oder Spanien gefertigten Effekte funktionieren nach dem selben Prinzip wie die Kugelbombe, jedoch befindet sich der Verzögerungszünder in den meisten Fällen auf der Oberseite der Bombe. Dies ist sehr wichtig, da der Abschussdruck bei Zylinderbomben aufgrund der besser abdichtenden Form um ein Vielfaches höher ist als bei Kugelbomben vergleichbaren Kalibers.



Abb. 5: Italienische Zylinderbomben Kaliber 150 mm
(Foto: Petra Rosenblatt)

Eine Besonderheit stellen Mehr- und Simultanschlagbomben dar, welche mehrere kleine Zylinderbomben (sog. Bombetten oder Polypen) enthalten. Diese werden am Himmel auseinandergeschleudert und explodieren dann nacheinander oder simultan.

Neben den Feuerwerksbomben werden bei professionellen Feuerwerken vor allem auch sogenannte Feuertöpfe, römische Lichter und Feuerwerksbatterien eingesetzt. Feuertöpfe zeichnen sich dadurch aus, dass die entsprechenden Effektsterne direkt brennend aus dem Rohr geschleudert werden (Abb. 6). Römische Lichter bestehen aus zylindrischen Papphülsen, in welche abwechselnd Treib-, Effekt- und Verzögerungssätze eingepresst sind. Nach dem Entzünden werden mehrere Leuchtsterne, Kometen oder Bombetten nacheinander aus dem Rohr gefeuert.



Abb. 6: Fünf Feuertöpfe Kaliber 30 mm im Fächer
(Foto: Petra Rosenblatt)

Feuerwerksbatterien stellen einen Verbund mehrerer aus Pappe bestehender Rohre unterschiedlichsten Kalibers dar, welche kleine Bombetten und dazugehörige Treibladungen enthalten. Die einzelnen Hülsen der Batterien sind untereinander mit Zündschnüren verbunden. Auf diese Weise erhält man nach einmaligem Anzünden eine Vielzahl von Abschüssen und Effekten über einen längeren Zeitraum hinweg. Nach dem Feuerwerk werden die ausgeschossenen Batterien als Ganze entsorgt und nicht (wie Mörser für Feuerwerksbomben) erneut verwendet. Klassische Feuerwerksbatterien stammen praktisch ausschließlich aus chinesischer Produktion, wobei die Chinesen viel Phantasie bei der Erfindung neuer Effektkombinationen beweisen.

Gesetzliches

In Österreich unterliegen die Einfuhr und Abgabe sowie der Besitz und die Verwendung von pyrotechnischen Artikeln dem Pyrotechnikgesetz von 1974. Darin werden die Feuerwerkskörper in vier Klassen eingeteilt:

- Klasse I: Feuerwerksscherzartikel, Feuerwerksspielwaren
Nettoexplosivstoffmasse: <3 g
- Klasse II: Kleinf Feuerwerk
Nettoexplosivstoffmasse: 3–50 g
- Klasse III: Mittelfeuerwerk
Nettoexplosivstoffmasse: 50–250 g
- Klasse IV: Großfeuerwerk
Nettoexplosivstoffmasse: >250 g

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass zusätzlich aufgrund der Zusammensetzung der Sätze unterschieden wird. Beispielsweise darf ein Klasse-I-Artikel niemals mehr als 0,5 g Cellulosenitrat (Schießbaumwolle) enthalten, sehr wohl aber bis zu 3 g eines Leuchtsatzes. Dabei werden vor allem Knall- und Pfeiffsätze differenziert betrachtet.

Zuletzt soll hier noch ein weiterer Paragraph angeführt werden, welcher vor allem für alle ChemielehrerInnen interessant sein dürfte. Gemäß § 14 des österreichischen Pyrotechnikgesetzes ist die nichtgewerbsmäßige Herstellung von pyrotechnischen Sätzen und Gegenständen in Österreich verboten. Jedoch ist die Herstellung im Rahmen von Lehr- und Forschungszwecken von diesem Verbot ausgenommen:

„Die nichtgewerbsmäßige Herstellung von pyrotechnischen Gegenständen und losen pyrotechnischen Sätzen ist verboten; ausgenommen von diesem Verbot ist die Herstellung von pyrotechnischen Gegenständen und losen pyrotechnischen Sätzen zu Lehr- und Forschungszwecken.“

Abschließendes

Im Rahmen der von ao. Univ.-Prof. Dr. Adolf Mikula abgehaltenen Vorlesung über Anorganische Technologie an der Universität Wien bekam ich seitens des Vortragenden die Einladung, einen Gastvortrag zum Thema Feuerwerk abzuhalten. Diese für mich sehr spannende Aufgabe bereitete mir viel Freude und führte schließlich auch zu diesem Artikel. An dieser Stelle möchte ich mich deshalb vor allem bei Herrn Professor Mikula für das überaus ehrenvolle Angebot und die großzügige Unterstützung mittels persönlicher Literatur bedanken. Mein weiterer Dank gilt der Kollegin Martina Wolny, welche die Idee für einen Fachartikel hatte und mich ermutigte, diesen in der hier vorliegenden Form zu verfassen.

Literatur:

- Otto Krätz: 7000 Jahre Chemie. Lizenzausgabe (1999) für Nikol Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG
 Alfons Bujard: Die Feuerwerkerei. Erschienen 1912, Reprint 2001, Survival Press Verlag
 Viktor Obendrauf: Von Knallteufeln und Knatterfontänen; Experimente mit pyrotechnischem Spielzeug (Teil I). Erschienen in Chemie und Schule (Salzburg) 14 (1999), Nr. 4
 Werner Siegelin: Pyrotechnik. Dynamit Nobel AG, Werk Depyfab, Clebronn
 Philipp Zilles: Protokoll zum Experimentalvortrag Pyrotechnik am 26. 6. 2002. Philipps-Universität Marburg, Sommersemester 2002
 Unterlagen zur Vorlesung über anorganische Technologie, Universität Wien, ao. Univ.-Prof. Dr. Adolf Mikula
 Österreichisches Pyrotechnikgesetz von 1974



Kaiserliche Akademie der Wissenschaften – Ein historisches Blitzlicht

Anlass für diesen Artikel ist das im Schuljahr 2007/08 zu feiernde hundertjährige Bestandsjubiläum des Bundesrealgymnasiums Wien VII, Kandlgasse. Mit der Gründung im Schuljahr 1907/08 war bereits ein bedeutendes sechzigjähriges Jubiläum verbunden. Die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Wien wurde durch Allerhöchstes Patent 1847 ins Leben gerufen und die feierliche Eröffnungssitzung fand im Jahr 1848 statt.

Zahlreiche Spitzenleistungen von Wissenschaftlern der Monarchie wurden in den Sitzungsberichten der Akademie veröffentlicht. Aber auch erstklassige Forscher anderer Länder publizierten ihre bedeutenden Arbeiten in dieser angesehenen Zeitschrift.

1907/08 veröffentlichte die Akademie die Bände 116 und 117 der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse. Stellvertretend für eine Vielzahl ausgezeichneten Arbeiten werden folgende zehn Veröffentlichungen angeführt:

1. Auer Karl, Ritter von Welsbach (Chemiker): „Die Zerlegung des Ytterbiums in seine Elemente“;
2. Diener Karl (Paläontologe): „Die Faunen der tibetischen Klippen von Malla Johar (Zentral-Himalaya)“;
3. Hann Julius von (Meteorologe): „Zur Meteorologie der Adria“;
4. Heß Viktor (Physiker): „Analyse der Strahlung des Radiobleis“;
5. Landsteiner Karl (Bakteriologe, Serologe): „Über das Karzinom der Leber“;
6. Molisch Hans (Botaniker): „Über die Sichtbarmachung der Bewegung mikroskopisch kleinster Teilchen für das freie Auge“;
7. Pöch Rudolf (Mediziner, Anthropologe, Ethnologe): „Zweiter Bericht über meine phonographischen Aufnahmen in Neu-Guinea (Britisch-Neu-Guinea) vom 7. Oktober 1905 bis zum 1. Februar 1906“;
8. Rutherford Ernest (Physiker): „Mitteilungen der Radium-Kommission der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. 3. Untersuchungen über die Radiumemanation. 1. Volumen der Emanation“;
9. Steindachner Franz (Zoologe): „Über einige Fischarten aus dem Flusse Cubatao im Staate Santa Catharina bei Theresopolis (Brasilien)“;
10. Zuckerkandl Emil (Anatom): „Zur Anatomie und Morphologie der Extremitätenarterien“.

Welche besonderen wissenschaftlich-technischen Leistungen und Begebenheiten der Jahre 1907 und 1908 sollten noch kurz erwähnt werden?

1907:

- Der amerikanische Genetiker Thomas Hunt Morgan führt die Taufliege (Fruchtliege) *Drosophila melanogaster* als Versuchstier in die Genetik ein;
- der deutsche Chemiker und Mediziner Paul Ehrlich und seine Mitarbeiter suchen systematisch nach chemotherapeutisch wirksamen Substanzen;
- der österreichische Physiker Felix Albert Ehrenhaft schlägt zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung die Öltröpfchen-Methode vor;
- in der Düsseldorfer Zeitung wird das selbsttätige Waschmittel Persil in einer Anzeige angekündigt;

- im Alter von 29 Jahren geht die österreichische Physikerin Lise Meitner nach Berlin und vertieft ihre Physikstudien bei Max Planck.

1908:

- Karl Landsteiner weist experimentell nach, dass die Poliomyelitis übertragbar ist – er vermutet die Existenz eines Virus;
- durch die Zusammenarbeit zwischen dem deutschen Chemiker Fritz Haber und der Badischen Anilin- und Sodafabrik (BASF) Ludwigshafen werden die technischen Probleme der Ammoniak-Synthese bei hohem Druck gelöst;
- in Wien tagt der XVI. Internationale Amerikanisten-Kongress. U. a. soll der letzte erhaltene alt-mexikanische Federschmuck (heute im Museum für Völkerkunde Wien) von einer internationalen Expertenkommission untersucht werden.

1908 ist ein wirkliches Glücksjahr für die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Der Rechtsanwalt Dr. Carl Kupelwieser (Sohn des Malers Leopold Kupelwieser) stiftet für die Akademie das Institut für Radiumforschung. Bereits 1910 wird das Radium-Institut eröffnet. Die Akademie schenkt dem Institut vier Gramm Radium, die in der Gasglühlichtfabrik von Auer von Welsbach in Atzgersdorf bei Wien hergestellt worden waren.

Im Auftrag der Akademie der Wissenschaften erforscht Rudolf Pöch 1907, 1908 (und auch noch 1909) die Kultur der Buschmänner in Südafrika. Auf zwei Reisen durch die mittlere und südliche Kalahari sammelt er wertvolles anthropologisches, prähistorisches und ethnologisches Material.

Einer der erfahrensten und berühmtesten Orientalisten der Monarchie ist Alois Musil, ein Vetter des Schriftstellers Richard Musil. Seine Forschungsreisen in Palästina und Arabien schlagen sich nieder in dem dreibändigen Werk „Arabia Petraea“, das 1907 und 1908 von der Akademie publiziert wurde.

Zwischen Alois Musil und dem BRG 7 besteht ein Zusammenhang. Diese Verbindung hängt mit der im Jahr 1916 erfolgten Gründung der k. k. Orient- und Übersee-Gesellschaft zusammen. Musil übernimmt die Leitung der wissenschaftlich-kulturellen Hauptgruppe; daneben besteht eine wirtschaftspolitische.

„Als Musil anfangs 1917 zum ersten Mal über die Tätigkeit seiner Abteilung referierte, konnte er bereits auf bedeutende Erfolge hinweisen und neue, zukunftsweisende Vorschläge machen.

Sein Antrag, die k. k. öffentlichen Lehranstalten für orientalische Sprachen großzügig auszugestalten, war vom Unterrichtsministerium – wie viele andere Vorschläge, die Musil nach dem Regierungsantritt Kaiser Karls machen sollte – akzeptiert worden. Die Räume eines Staatsgymnasiums im 7. Wiener Gemeindebezirk, Kandlgasse, wurden zur Verfügung gestellt“ [1].

Dr. Reinhard Furtner

Benützte Literatur:

[1] Bauer, Karl Johannes: Alois Musil. Wahrheitssucher in der Wüste. Wien, 1989.

Weitere Literaturzitate siehe Festschrift der G VII/2007.



Der T-Test in Excel

Norbert Brunner und Manfred Kühleitner

Ein häufiges Problem ist der Vergleich eines beobachteten Stichprobenmittelwerts mit einem Sollwert. Dabei wird der T-Test angewandt. Wir zeigen an einem Beispiel, wie man diesen Test ohne statistische Vorkenntnisse über eine einfache Simulation in Excel entwickeln kann. Diese Vorgehensweise verwendet nur elementare Überlegungen und konzentriert die Aufmerksamkeit auf die Grundideen des Hypothesentestens.

1. Aufgabenstellung

Bei einer Füllmengenkontrolle werden drei Packungen mit dem Nenninhalt von 500 g nachgewogen. Als Messwerte erhält man 490, 492 und 494 g. Stützen diese Daten die Vermutung, dass die Füllmengen im Mittel signifikant unter dem Sollwert liegen?

Um die konkreten Messwerte zu interpretieren, vergleichen wir sie mit Werten, die wir bei einer „Modellabfüllung“ erhalten. Hierzu arbeiten wir zuerst mit einem ganz besonders einfachen Modell: Die Füllmenge X soll gleichverteilt zwischen den Grenzen $\mu \pm b$ schwanken. Die Schwankungsbreite b setzen wir als bekannt voraus, ebenso $\mu = 500$. Später werden wir b durch die Streuung s ersetzen, die wir aus den $n = 3$ Messwerten durch die Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad (1)$$

berechnen. Dabei bezeichnet m den Mittelwert

$$m = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

der Messwerte. Nachdem wir ein Abfüllmodell erstellt haben, können wir in Excel zufällige Werte der Füllmengen erzeugen. Dazu fertigen wir ein Tabellenblatt nach dem Muster der Tabelle 1 an.

	A	B	C	D
1		Füllmenge der Packung		
2	Pos.	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3

Tabelle 1. Excel Tabelle zur Füllmengensimulation

Den Abfüllvorgang simulieren wir in Excel mit dem Befehl =ZUFALLSZAHL(). Dieser liefert gleichverteilte Zufallszahlen z zwischen 0 und 1. Soll die Füllmenge zufällig um den Wert μ mit der Größe b schwanken, so transformiert man z zu $\mu + (2 \cdot z - 1) \cdot b$.

2. Vergleich mit dem Mittelwert

Zuerst gehen wir davon aus, dass die Größe b bekannt ist.

2.1. Modellannahme $b = 10$:

In die Zellen B3:D3 schreiben wir jeweils den Befehl =500+(2*ZUFALLSZAHL()-1)*10

Nun stehen in den Zellen B3:D3 die Füllmengen dreier Packungen. Durch Drücken der Taste F9 wird die Tabelle mit neuen Zufallszahlen berechnet. Wir müssen nur mehr schauen, inwieweit das gemessene Ergebnis von den so erzeugten zufälligen Abfüllungen abweicht. Um nicht drei Füllmengen gleichzeitig zu beobachten, wird man nur eine Testgröße berechnen. Naheliegender Mittelwert der drei Füllmengen. Wir fügen daher unserer Tabelle 1 eine weitere Spalte hinzu in der wir den Mittelwert m der Füllmenge von drei befüllten Packungen berechnen. Wieder drücken wir die Taste F9 und zählen mit, wie oft der Mittelwert der Modellabfüllung kleiner ist, als der Mittelwert $m = 492$ der Stichprobe. Wir stellen fest, dass dies sehr selten der Fall ist. Exakt berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Zufallszahlen $490 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 510$ ein Mittelwert $(x_1 + x_2 + x_3)/3 \leq 492$ beobachtet wird, durch (Mathematica)

$$\iiint_B \frac{1}{8 \cdot b^3} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{9}{2000} = 0,45\%$$

Dabei ist B das durch die beiden Ungleichungen definierte Tetraeder von Abbildung 1. Man wird demnach mit hoher Sicherheit vermuten, dass die Abfüllanlage falsch eingestellt ist.

2.2. Modellannahme $b = 20$:

Die analoge Simulation führt zu einem konträren Ergebnis, wie man sofort aus Abbildung 2 sieht. Durch Drücken der Taste F9 stellen wir in annähernd 10% der Fälle einen Füllmengenmittelwert kleiner als $m = 492$ fest. Exakt ist diese Wahrscheinlichkeit 12,15%. Demnach wäre der Beobachtungswert nicht besonders auffällig.

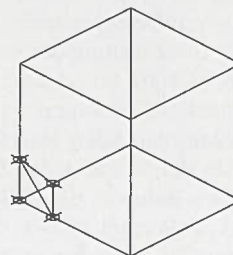


Abbildung 1: Würfel $490 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 510$ und Tetraeder mit $(x_1 + x_2 + x_3)/3 \leq 492$.

Das Ergebnis hängt sehr stark vom Modell ab. Wenn man weiß, dass die Produktion zwischen 490 und 510 g schwankt, dann wäre die Beobachtung sehr selten.



Liegt die Füllmenge hingegen im Bereich zwischen 480 und 520 g, dann ist die Beobachtung unauffällig. Der Grund für diese unterschiedlichen Ergebnisse ist die größere Streuung: Im Vergleich zur Streuung geringe Unterschreitungen der Sollfüllmenge sind nicht ungewöhnlich (Abbildung 1).

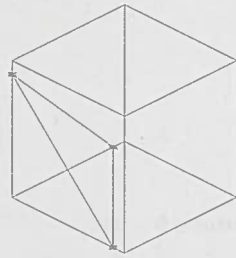


Abbildung 2: Würfel $480 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 520$ und Tetraeder mit $(x_1 + x_2 + x_3) / 3 \leq 492$.

3. Vergleich der T-Werte

In der Praxis ist die Streuung der Grundgesamtheit oft nicht bekannt. Man schätzt dann die Streuung aus der Stichprobe mit Hilfe der Formel (1) und bildet daraus die dimensionslose Testgröße

$$T = \frac{m - \mu}{s} \sqrt{n} \quad (3)$$

Dabei ist n die Größe der Stichprobe; bei uns $n = 3$. Nun berechnen wir für unsere Stichprobe den T -Wert. Wir erhalten $T = -6,93$.

Es stellt sich die Frage, wie man den beobachteten Wert $T = -6,93$ interpretieren soll: Ist er besonders niedrig oder ist er eher unauffällig? Zur Prüfung erweitern wir Tabelle 1 um weitere zwei Spalten: In Spalte F berechnen wir die Streuung s und in Spalte G den T -Wert.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Füllmenge der Packung						
2	Pos.	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Mittelwert	Streuung	T

Tabelle 2: Excel-Tabelle zur Füllmengensimulation

In den Zellen E3:G3 stehen somit die Formeln zur Berechnung der mittleren Füllmenge m , der Varianz s und dem T -Wert T :

=MITTELWERT (B3 : D3)

=STABW (B3 : D3)

= (E2 - 500) * WURZEL (3) / F3 .

Wir können uns durch Drücken der Taste F9 rasch ein Bild von der Häufigkeit von T -Werten kleiner als $-6,93$ machen: Solche T -Werte sind sehr selten.

Mit ein wenig Mehraufwand erhalten wir sogar einen Näherungswert für diese Häufigkeit. Wir kopieren die dritte Zeile bis in Zeile 1002. So erhalten wir den T -Wert für 1.000 Experimente (Ziehungen von drei Packungen) bei einer funktionierenden Maschine. Zusätzlich nummerieren wir in der Spalte A die Zahl der Experimente. Wir schreiben daher in die Zelle A3 die Zahl 1 und in die Zelle A3 die Formel =A2+1, die wir bis in die Zelle 1002 kopieren. In einer freien Zelle zählen wir jetzt, wie hoch darunter der Anteil der T -Werte unter $-6,93$ ist. Dies leistet der Befehl

=ZÄHLENWENN (G3 : G1002 ; "< -6,93") / 1000

Wir erhalten Werte, die zwischen 1 und 3% schwanken. (Die Genauigkeit schätzen wir durch Drücken der

Taste F9 ab, die ein anderes Set von 1.000 Experimenten liefert.)

Wir schließen daraus: Bei unserer Modellabfüllung tritt in weniger als 5% der Experimente ein T -Wert kleiner als der beobachtete T -Wert $= -6,93$ auf. Mit 95% Sicherheit ist daher die getestete Abfüllanlage falsch eingestellt.

4. Bemerkungen

1. Wahl der Testgröße: Verwendet man statt dem Mittelwert in Abschnitt 2 den T -Wert als Testgröße, so wird für *beide* Modelle 2.1. und 2.2. die Nullhypothese (fehlerfreie Abfüllung) mit 95% Sicherheit verworfen (Abschnitt 3). Hingegen wird mit dem Mittelwert als Testgröße die Nullhypothese für 2.1. verworfen, aber für 2.2. akzeptiert!

2. Alternative Testgröße: Für das einfache Modell einer gleichverteilten Füllmenge im Intervall $\mu \pm b$ kann man als Schätzwert für $2 \cdot b$ die Differenz aus dem kleinsten und dem größten Stichprobenwert verwenden, $d = \max\{x_1, x_2, x_3\} - \min\{x_1, x_2, x_3\}$. Die Testgröße $TG = (m - \mu) / d$ nimmt für die Stichprobe den Wert $TG = -2$ an. Mit einem Integral rechnet man nach, dass dieser Wert (unabhängig von b) in nicht mehr als 2% der Fälle unterschritten wird. Es liegt also eine signifikante Unterschreitung des Mittelwerts $\mu = 500$ vor (95% Sicherheit).

3. Standardmodell: In der Statistik wird für den T -Test ein von unserem Modell abweichendes Modell verwendet: Die Füllmengen sind normalverteilt mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 . (Diese Annahme beschreibt mathematisch, dass große Abweichungen vom Mittelwert immer unwahrscheinlicher werden.) Verwenden wir für die Varianz den Schätzwert $\sigma = s = 2$ aus den beobachteten Daten, so erhalten wir in diesem Fall in Excel die Modellabfüllung durch folgenden Befehl in den Zellen B3:D3

=NORMINV (ZUFALLSZAHL () ; 500 ; 2)

Für dieses Modell hat man die Verteilung der T -Werte formelmäßig ermittelt: Die T -Werte befolgen die *Student'sche t-Verteilung* mit $n - 1 = 2$ Freiheitsgraden. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein T -Wert unterhalb von T beobachtet wird, das Integral

$$\int_{-\infty}^T \frac{dx}{\sqrt{(2+x^2)^3}} = \text{TVERT}(-T; \text{Freiheitsgrade}; 1)$$

Dieses Integral ist auch in Excel vorprogrammiert. (Dabei wird $T < 0$ vorausgesetzt und „1“ weist auf den einseitigen T -Test hin.) Für $T = -6,93$ und Freiheitsgrade = 2 beträgt diese Wahrscheinlichkeit knapp über 1%. Wir erhalten also wieder das Ergebnis: Die drei Beobachtungen weisen eine signifikante Unterschreitung des Mittelwerts nach.

4. Summenhäufigkeit: Die theoretische T -Verteilung ist in Excel mit Hilfe des Befehls TVERT vorprogrammiert. Bildet man die relative Summenhäufigkeit der simulierten T -Werte so kann man die Genauigkeit der Simulation überprüfen. Konkret erweitern wir unser Tabellenblatt nach dem Muster der Tabelle 3.

	H	I	J	K
1	Klassen	Daten	Rel. SH	T-Vert

Tabelle 3. Excel Tabelle zur Füllmengensimulation

Wir schreiben in die erste Zeile erklärenden Text. In der Spalte H stehen die Klassengrenzen (-15 bis 15; Schrittweite 1) für die Häufigkeit der T -Werte. In der Spalte I berechnen wir die entsprechenden Häufigkeiten mit Hilfe des Matrixbefehls

=HÄUFIGKEIT (G3 : G1003 ; H2 : H32)

Wir markieren dazu I2:I32 und geben den Befehl ein, indem wir die drei Tasten STRG, ↑ und ↓ gleichzeitig drücken. In der Spalte J berechnen wir die relative Summenhäufigkeit. Dazu schreiben wir in die Zelle J2 die Formel =SUMME(\$I\$2 : I2) / 1000 und kopieren diese bis in die Zeile 32. Abschließend berechnen wir in der Spalte K die exakten Werte einer T -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden. Dazu schreiben wir in die Zelle K2 die Formel =TVERT (-H2 ; 2 ; 1) und kopieren diese bis in die Zeile 17. In die Zelle K18 (positiver x -Wert) schreiben wir die Formel =1 - TVERT (H18 ; 2 ; 1) und kopieren diese bis in die Zeile 32.

Abschließend fügen wir ein Diagramm der simulierten relativen Summenhäufigkeit und der in Excel exakt berechneten T -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden ein (Bereiche H2:H32, J2:K32).

Durch Drücken der Taste F9 kann man sich wieder von der Güte der Simulation überzeugen. Weil die simulierten T -Werte aus dem einfachen Gleichverteilungsmodell stammen, illustriert die Abbildung 3 gleichzeitig die Robustheit des T -Tests (siehe Bemerkung 5.)

5. Robustheit: Die theoretische T -Verteilung beruht auf der Annahme, dass die Daten normalverteilt sind. In der Praxis kann man aber nie ganz sicher sein, ob die Daten aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen. Wir haben aber gesehen, dass der T -Test *robust* ist: Er liefert selbst für kleine Stichproben gute Resultate (Abschätzung der Häufigkeiten der T -Werte), wenn die Annahme der Normalverteilung nicht gilt. Insbesondere ist das einfache Modell auf der Basis der

Gleichverteilung ausreichend, um die Grundidee dieses wichtigen Tests zu illustrieren (vgl. Abbildung 3).

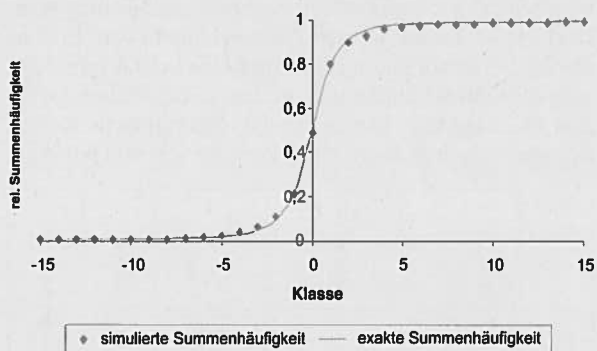


Abbildung 3. Vergleich der simulierten T -Werte mit der T -Verteilung.

6. Weitere Hypothesen: Bisher haben wir nur die Frage gestellt ob die Füllmenge im Mittel geringer ist als der Sollwert. Die Fragen, ob der Mittelwert größer als der Sollwert ist oder ob der Mittelwert vom Sollwert abweicht (zweiseitiger T -Test) werden auf analoge Weise behandelt. Vergleiche von Differenzen der Mittelwerte unabhängiger Stichproben aus Grundverteilungen mit derselben Varianz und die Ermittlung von Konfidenzintervallen für Mittelwerte sind von Fisher auf diese Fragestellung zurückgeführt worden. Sie können daher mit der T -Verteilung behandelt werden. Bei Untersuchung von Differenzen der Mittelwerte aus Grundgesamtheiten mit unterschiedlichen Mittelwerten und Varianzen ist die T -Verteilung nicht mehr anwendbar. Man wird mit einer Simulation arbeiten.

Anschrift der Verfasser:

a.o. Univ.-Prof. Dr. Norbert Brunner und a.o. Univ.-Prof. Dr. Manfred Kühleitner, Institut für Mathematik, DIB, BOKU, Gregor Mendel Straße 33, 1180 Wien, E-Mail: norbert.brunner@boku.ac.at, manfred.kuehleitner@boku.ac.at



Gregorianische Kalendergeschichten

Axel Born und Gerhard J. Woeginger

Ein tropisches Jahr ist der Zeitraum zwischen der Tag-und-Nacht-Gleiche in einem Frühling und der Tag-und-Nacht-Gleiche im darauffolgenden Frühling. Während eines tropischen Jahres umkreist die Erde genau einmal vollständig die Sonne.

Dazu benötigt die Erde **ungefähr** 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 46 Sekunden. (Die Länge der tropischen Jahre schwankt und oszilliert ein wenig, da die Bewegung der Erde von der Schwerkraft der anderen Planeten und von der Schwerkraft des Mondes beeinflusst wird.) Damit unsere Kalenderjahre möglichst gut mit den tropischen Jahren übereinstimmen, ist im Gregorianischen Kalender **ungefähr** jedes vierte Jahr ein Schaltjahr. Gewöhnliche Jahre haben 365 Tage, Schaltjahre haben 366 Tage. Die genaue Regel lautet:

- Jahre, die nicht durch 4 teilbar sind, sind gewöhnliche Jahre;

- Jahre, die durch 4 aber nicht durch 100 teilbar sind, sind Schaltjahre;
- Jahre, die durch 100 aber nicht durch 400 teilbar sind, sind gewöhnliche Jahre;
- Jahre, die durch 400 teilbar sind, sind Schaltjahre.

Es ist leicht zu sehen, dass sich im Gregorianischen Kalender die Schaltjahre in einem Zyklus von 400 Jahren wiederholen. Betrachten wir einen solchen Zyklus von 400 aufeinander folgenden Jahren einmal genauer:

Er besteht aus 303 gewöhnlichen Jahren und aus 97 Schaltjahren. Alles in allem ergibt das $303 \cdot 365 + 97 \cdot 366 = 146097$ Tage. **Erstaunlicherweise** ist die Zahl 146097 durch 7 teilbar, und daher bestehen diese 400 Jahre aus genau 20871 Wochen. Das bedeutet aber, dass sich im Gregorianischen Kalender nicht nur die Schaltjahre, sondern auch die Wochentage in einem Zyklus von 400 Jahren wiederholen! Da der 1. Jänner

2000 ein Samstag war, wird der 1. Jänner 2400 ebenfalls ein Samstag sein. Da der 2. Jänner 2000 ein Sonntag war, wird der 2. Jänner 2400 ebenfalls ein Sonntag sein. Und so fort. Da das Jahr 2000 ein Schaltjahr war, in dem der 29. Feber auf einen Dienstag fiel, wird das Jahr 2400 ebenfalls ein Schaltjahr war, in dem der 29. Feber auf einen Dienstag fällt. Der gesamte Gregorianische Kalender wiederholt sich mit einer Periode von 400 Jahren.

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1.	684	687	685	685	687	684	688
2.	688	684	687	685	685	687	684
3.	684	688	684	687	685	685	687
4.	687	684	688	684	687	685	685
5.	685	687	684	688	684	687	685
6.	685	685	687	684	688	684	687
7.	687	685	685	687	684	688	684
8.	684	687	685	685	687	684	688
9.	688	684	687	685	685	687	684
10.	684	688	684	687	685	685	687
11.	687	684	688	684	687	685	685
12.	685	687	684	688	684	687	685
13.	685	685	687	684	688	684	687
14.	687	685	685	687	684	688	684
15.	684	687	685	685	687	684	688
16.	688	684	687	685	685	687	684
17.	684	688	684	687	685	685	687
18.	687	684	688	684	687	685	685
19.	685	687	684	688	684	687	685
20.	685	685	687	684	688	684	687
21.	687	685	685	687	684	688	684
22.	684	687	685	685	687	684	688
23.	688	684	687	685	685	687	684
24.	684	688	684	687	685	685	687
25.	687	684	688	684	687	685	685
26.	685	687	684	688	684	687	685
27.	685	685	687	684	688	684	687
28.	687	685	685	687	684	688	684
29.	641	644	642	642	643	641	644
30.	631	626	631	627	629	629	627
31.	399	401	398	402	399	401	400

Tabelle 1: Die Verteilung der Wochentage auf die Monatstage von 400 aufeinander folgenden Jahren des Gregorianischen Kalenders.

Man kann sich nun leicht ausrechnen (oder sich leicht von einem Computer-Programm ausrechnen lassen), wie sich die verschiedenen Monatstage innerhalb einer solchen Periode von 400 Jahren auf die sieben Wochentage verteilen. Wir haben das getan und unsere Ergebnisse in der Tabelle 1 aufgelistet. Interessanterweise ist diese Verteilung ziemlich ungleichmässig. Zum Beispiel: Es ist viel wahrscheinlicher, dass der 31. Tag eines Monats auf einen Donnerstag fällt, als dass er auf einen Mittwoch fällt. Die Wahrscheinlichkeit für den Donnerstag beträgt $p = 402/2800$, während die Wahrscheinlichkeit für den Mittwoch nur $p = 398/2800$ beträgt. (In 400 aufeinander folgenden Jahren gibt es genau 2800 Monate mit 31 Tagen.) Ein anderes Beispiel: Der 13. Tag eines Monats fällt am häufigsten auf einen Freitag, und zwar 688-mal in 400 Jahren, und er fällt nur seltener auf die anderen Wochentage. Eine wirklich schlechte Nachricht für abergläubische Menschen!

In der Tabelle 2 listen wir die Verteilungen der Wochentage für einige konkrete Daten auf. Der Valentinstag (14. Februar) fällt besonders oft auf einen Dienstag. Der Schalttag (29. Februar) fällt oft auf einen Montag oder Mittwoch. Weihnachten (24. Dezember) fällt oft auf Montag, Donnerstag oder Samstag und seltener auf Dienstag, Mittwoch, Freitag oder Sonntag. Der Rosenmontag fällt praktisch immer auf einen Montag.

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
Valentinstag	56	58	56	58	57	57	58
Schalttag	15	13	15	13	14	14	13
Weihnachten	58	57	57	58	56	58	56
Rosenmontag	400	0	0	0	0	0	0

Tabelle 2: Die Verteilung der Wochentage für einige konkrete Tage in 400 aufeinander folgenden Jahren des Gregorianischen Kalenders.

Zum Abschluss wollen wir noch ein kleines Gedankenexperiment machen: Wir wollen eine Reform des Gregorianischen Kalenders durchführen, die die durch 400 teilbaren Jahre zu gewöhnlichen Jahren (mit 365 Tagen) macht. Nach unserer Reform wiederholen sich die Schaltjahre in einem neuen, kürzeren Zyklus von 100 Jahren. Dieser Zyklus umfasst 76 gewöhnliche Jahre und 24 Schaltjahre, und besteht daher aus $76 \cdot 365 + 24 \cdot 366 = 36524$ Tagen. Diese Zahl $36524 = 7 \cdot 5217 + 5$ ist **nicht** durch 7 teilbar. In unserem reformierten Gregorianischen Kalender wiederholen sich daher Wochentage und Schaltjahre in einem gemeinsamen Zyklus von 700 Jahren, der sich aus sieben 100-jährigen Schaltjahreszyklen zusammensetzt. Ein einzelner Schaltjahreszyklus besteht aus 5217 Wochen und 5 Tagen. Relativ zum unmittelbar vorangehenden Schaltjahreszyklus verschiebt sich dabei jedes Datum um fünf Wochentage nach vorne: Montag wird zu Samstag, Samstag wird zu Donnerstag, Donnerstag zu Dienstag, etc. Nach sieben Verschiebungen ist alles wieder beim Alten.

Diese sieben Verschiebungen sorgen dafür, dass im reformierten Gregorianischen Kalender die Monatstage völlig gleichmässig auf die sieben Wochentage verteilt wären: Die Wahrscheinlichkeit, dass der 31. Tag eines Monats auf einen Donnerstag fällt, wäre genau gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass er auf irgendeinen anderen fixen Wochentag fällt. Der Valentinstag und Weihnachten würden jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/7$ auf einen Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag oder Sonntag fallen. Ach, wie wäre die Welt dann langweilig!

Anschriften der Verfasser:

Axel Born, ORG Ursulinen, Leonhardstraße 62, 8010 Graz.
Gerhard J. Woeginger, TU Eindhoven, P.O. Box 513,
5600 MB Eindhoven, Niederlande.

Zur Seltenheit der reduziblen Polynome

Gerald Kuba

Es sind asymptotisch 100 Prozent aller rationalen Polynomen festen Grades irreduzibel. Insbesondere hat ein zufällig gewähltes nichtlineares Polynom fast sicher keine rationale Nullstelle. Wir leiten elementar eine Ungleichung ab, die die wahre Größenordnung des Anteils der reduziblen Polynome bestimmt.

1. Einleitung

Bekanntlich gibt es eine starke Analogie zwischen dem Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen und dem Ring $\mathbb{Q}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten X mit rationalen Koeffizienten. Die gesamte elementare Arithmetik des Ringes \mathbb{Z} (Teilbarkeit, Division mit Rest, Satz von der eindeutigen Primfaktorenzerlegung usw.) lässt sich praktisch 1:1 auf den Ring $\mathbb{Q}[X]$ übertragen. Die Rolle der Primzahlen im Ring \mathbb{Z} spielen dann im Ring $\mathbb{Q}[X]$ die irreduziblen Polynome: Ein rationales Polynom $p(X)$ heißt *irreduzibel*, wenn es keine Darstellung $p(X) = q_1(X) \cdot q_2(X)$ mit rationalen Polynomen $q_1(X), q_2(X)$ gibt, deren Grade kleiner als der Grad von $p(X)$ sind. Im Gegenzug nennt man natürlich ein *nicht* irreduzibles Polynom *reduzibel*. So ist z. B. das Polynom $X^2 - \frac{1}{9}$ reduzibel, da $X^2 - \frac{1}{9} = (X - \frac{1}{3})(X + \frac{1}{3})$ gilt. (Dagegen ist, wie man leicht sieht, das Polynom $X^2 + \frac{1}{9}$ irreduzibel.)

Die reduziblen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ entsprechen somit den *zusammengesetzten* Zahlen in \mathbb{Z} . Die Analogie zwischen \mathbb{Z} und $\mathbb{Q}[X]$ findet allerdings ein jähes Ende, wenn man die Verteilung der Primzahlen in \mathbb{Z} mit der der irreduziblen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ vergleicht. Bekanntlich strebt der Anteil der Primzahlen unter den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots, k$ mit $k \rightarrow \infty$ gegen 0. Somit beträgt die asymptotische Dichte der Primzahlen NULL Prozent: Eine zufällig gewählte natürliche Zahl ist *fast sicher* keine Primzahl. Dagegen beträgt die asymptotische Dichte der irreduziblen Polynome 100 Prozent: Ein zufällig gewähltes rationales Polynom ist *fast sicher* irreduzibel.

2. Formulierung eines polynomialen Primzahlsatzes

Für ganzzahliges k sei $\pi(k)$ die Anzahl aller Primzahlen p im Bereich $p \leq k$. Wie bereits festgestellt gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(k)/k = 0$. Der klassische Primzahlsatz, der bereits von Gauss und Legendre vermutet, jedoch erst 1896 von Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen wurde, geht über dieses Resultat weit hinaus. Er besagt, dass der Anteil der Primzahlen unter den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots, k$ für großes k nahezu invers dem natürlichen Logarithmus von k ist, genauer dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (\pi(k)/k) \ln k = 1$ gilt.

Bevor wir eine Aussage über die asymptotische Dichte

der irreduziblen Polynome überhaupt gewinnen können, müssen wir klarstellen, was eigentlich unter der *asymptotischen Dichte* bei rationalen Polynomen zu verstehen ist. Zur asymptotischen Dichte der Primzahlen kommt man, indem man die Menge \mathbb{N}^+ der positiven ganzen Zahlen durch eine denkbar einfache Folge T_1, T_2, T_3, \dots endlicher Teilmengen ausgeschöpft, nämlich $T_k = \{1, \dots, k\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Zu jeder Teilmenge T_k bestimmt man die Anzahl $\pi(k)$ der in ihr enthaltenen Primzahlen. Dann dividiert man diese Anzahl $\pi(k)$ durch die Anzahl aller Elemente von T_k und bestimmt das Grenzverhalten des Quotienten für $k \rightarrow \infty$.

In Analogie dazu wäre die Menge $\mathbb{Q}[X]$ durch eine geschickt und natürlich gewählte Folge S_1, S_2, S_3, \dots endlicher Polynomgruppen auszuschöpfen. Mit $\pi(S_k)$ könnte man dann die Anzahl der irreduziblen Polynome in der Menge bezeichnen. Ist dann $a(S_k)$ die Anzahl aller Polynome in S_k , so wäre $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(S_k)/a(S_k) = 1$ die angestrebte Aussage, dass die *asymptotische Dichte* der irreduziblen Polynome gleich 1 ist.

Im Wesentlichen werden wir genauso vorgehen, allerdings eine zweckmäßige Vereinfachung vornehmen. Wir nennen zwei rationale Polynome $p(X), q(X)$ *ähnlich*, wenn es eine rationale Zahl $\rho \neq 0$ gibt, sodass $p(X) = \rho \cdot q(X)$ gilt. Sind $p(X)$ und $q(X)$ zwei ähnliche Polynome, dann ist offensichtlich $p(X)$ genau dann irreduzibel, wenn $q(X)$ irreduzibel ist. Ferner gibt es zu jedem rationalen Polynom $p(X)$ ein ähnliches Polynom, das durchwegs ganzzahlige Koeffizienten hat. (Um ein solches zu gewinnen, braucht man $p(X)$ ja nur mit dem Hauptnenner aller Koeffizienten von $p(X)$ zu multiplizieren, z. B. $42 \cdot (\frac{2}{21}X^3 - \frac{2}{11}X + \frac{2}{3}) = 4X^3 - 15X + 63$.) Nach einem bekannten Satz von Gauß lässt sich jedes ganzzahlige Polynom, das Produkt zweier rationaler Polynome der Grade m und n ist, auch stets als Produkt zweier ganzzahliger Polynome der Grade m und n schreiben. Ein Polynom $p(X)$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist somit dann und nur dann reduzibel, wenn es eine Darstellung $p(X) = q_1(X) \cdot q_2(X)$ mit *ganzzahligen* Polynomen $q_1(X), q_2(X)$ gibt, deren Grade kleiner als der Grad von $p(X)$ sind. Wir können uns daher im Folgenden auf *ganzzahlige* Polynome beschränken. Schließlich wollen wir bei der Formulierung unseres polynomialen Primzahlsatzes auch nicht alle Polynome in einen Topf werfen, sondern immer Polynome eines festen Grades n betrachten. Dabei betrachten wir gleich nur Grade n größer als 1, denn unter den linearen Polynomen sind nicht nur asymptotisch 100 Prozent aller Polynome irreduzibel: selbstverständlich sind *alle* linearen Polynome irreduzibel!

Zu fest vorgegebenem $n \geq 2$ und variablem ganzzahligen $h \geq 1$ betrachten wir alle Polynome $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ mit Koeffizien-



ten $a_i \in \mathbb{Z}$ dergestalt, dass $a_n \neq 0$ und $|a_i| \leq h$ für alle $i = 0, 1, \dots, n$ gilt. Es sei $A_n(h)$ die Anzahl all dieser Polynome und $I_n(h)$ bzw. $R_n(h)$ die Anzahl all dieser Polynome, die irreduzibel bzw. reduzibel sind. Es gilt somit stets $I_n(h) + R_n(h) = A_n(h)$ und, wie man leicht ausrechnen kann, $A_n(h) = 2h(2h+1)^n$. Unser polynomialer Primzahlsatz lautet nun

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{I_n(h)}{A_n(h)} = 1 \text{ bzw. } \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{R_n(h)}{A_n(h)} = 0.$$

Wir werden ein wenig mehr zeigen und den Anteil der reduziblen Polynome genauer abschätzen:

Satz 1. Für jeden festen Grad $n \geq 2$ gilt die Abschätzung

$$2^n h^n \leq R_n(h) \leq n^{2n} h^n (1 + \ln h)^2$$

für alle $h \geq 1$.

Auch wenn die obere Schranke der Abschätzung etwas grob (und z. B. im Falle $n \geq 4$ für $h < 10^{17}$ wegen $R_n(h) \leq A_n(h) \leq (2h)(3h)^n$ trivial) ist, zeigt die Abschätzung deutlich die Asymptotik von $R_n(h)$: Die wahre Größenordnung von $R_n(h)$ ist für sehr große h im Wesentlichen durch h^n gegeben. (Konstante Faktoren sowie der logarithmische Faktor sind unwesentlich.) Das Verhältnis $R_n(h)/A_n(h)$ bewegt sich somit in der Größenordnung $1/h$, sodass die Konvergenzgeschwindigkeit der Nullfolge $R_n(h)/A_n(h)$ ($h = 1, 2, \dots$) im Wesentlichen dieselbe wie bei der Folge $1/h$ ($h = 1, 2, \dots$) ist. Das Verhältnis $I_n(h)/A_n(h)$ strebt mit $h \rightarrow \infty$ genauso rasch gegen 1 wie der Ausdruck $1 - \frac{1}{h}$.

3. Gitterpunkte unter einer Hyperbel

Man kann Satz 1 auch als Gitterpunktstheorem interpretieren: Es wird die Anzahl aller Gitterpunkte (a_0, a_1, \dots, a_n) in einem $(n+1)$ -dimensionalen Würfel der Kantenlänge $2h$ abgeschätzt, deren Koordinaten den Koeffizienten eines reduziblen Polynoms vom Grade n entsprechen. Tatsächlich benötigen wir zum Beweis von Satz 1 ein elementares Resultat aus der Gitterpunktlehre.

Lemma 1. Für reelles t sei $H(t)$ die Anzahl der Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y , für die $0 \neq |xy| \leq t$ erfüllt ist. Dann gilt $H(t) \leq 4t(1 + \ln t)$ für alle $t \geq 1$.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die Anzahl $H_1(t)$ der Punkte (x, y) mit ganzen Koordinaten x, y zu bestimmen, die innerhalb des Hyperbeldreiecks liegen, das durch die Ungleichungen $x, y \geq 1$ und $xy \leq t$, also durch $x \geq 1$ und $1 \leq y \leq t/x$ festgelegt ist. Es gilt dann natürlich $H(t) = 4H_1(t)$. Die ganze Zahl $H_1(t)$ ist nun offensichtlich nicht größer als die reelle Zahl

$$\sum_{1 \leq k \leq t} \frac{t}{k} = t \cdot \sum_{1 \leq k \leq t} \frac{1}{k}.$$

Wenn man eine Sequenz von Rechteckstreifen der Breite 1 zwischen die Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ und die x -Achse parallel zur y -Achse einpasst, so ergibt ein Flächeninhaltsvergleich

$$\sum_{2 \leq k \leq t} \frac{1}{k} \leq \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln x,$$

sodass also $\frac{1}{4} H(t) = H_1(t) \leq t \left(1 + \sum_{2 \leq k \leq t} \frac{1}{k} \right) \leq t(1 + \ln t)$ gilt, q. e. d.

4. Eine Koeffizientenabschätzung

Lemma 2. Es seien y_1, y_2, \dots, y_m reelle Zahlen im Intervall $[-y, y]$ für $y > 0$. Dann sind die Absolutbeträge der Koeffizienten des Polynoms

$$(X + y_1)(X + y_2) \dots (X + y_m) \text{ durchwegs kleiner als } (y+1)^m.$$

Beweis. Es gilt $(X + y_1)(X + y_2) \dots (X + y_m) = X^m + s_{m-1}X^{m-1} + \dots + s_1X + s_0$ mit

$$s_{m-1} = y_1 + y_2 + \dots + y_m,$$

$$s_{m-2} = y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_1y_m + y_2y_3 + y_2y_4 + \dots + y_2y_m + \dots + y_{m-1}y_m,$$

$$\dots$$

$$s_1 = y_2y_3 \dots y_m + y_1y_3 \dots y_m + \dots + y_1y_2 \dots y_{m-2}y_m + y_1y_2 \dots y_{m-2}y_{m-1},$$

$$s_0 = y_1y_2 \dots y_m.$$

Für $k = 1, 2, \dots, n$ errechnet sich der Koeffizient s_{m-k} dadurch, dass man für jede k -elementige Teilmenge J von $\{1, 2, \dots, m\}$ das Produkt $\prod_{i \in J} y_i$ bildet und dann die Summe dieser

Produkte bildet. Die Anzahl dieser Summanden beträgt

$$\text{natürlich exakt } \binom{m}{k}.$$

Wegen $|y_i| \leq y$ gilt daher $|s_{m-k}| \leq \binom{m}{k} y^k$ für

$k = 1, 2, \dots, m$ und somit gilt

$$|s_j| \leq \max_{1 \leq k \leq m} \binom{m}{k} y^k < \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} y^k = (y+1)^m$$

(binomischer Lehrsatz!) für alle $j = 0, 1, \dots, m-1$ q. e. d.

5. Beweis von Satz 1

Wir müssen die Anzahl $R_n(h)$ aller Polynome

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i im Intervall $[-h, h]$ und $a_n \neq 0$ abschätzen, sodass $p(X)$ reduzibel ist. Sicher reduzibel ist $p(X)$, wenn $a_0 = 0$ gilt, denn dann kann man aus $p(X)$ das Polynom X herausheben. Die Bedingung $a_0 = 0$ ist natürlich äquivalent mit $p(0) = 0$, d. h. die Zahl 0 ist eine Nullstelle des Polynoms $p(X)$. Da es genau $(2h+1)^{n-1}$ ganzzahlige Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ mit $-h \leq a_i \leq h$ und genau $2h$ ganze Zahlen $a_n \neq 0$ im Intervall $[-h, h]$ gibt, beträgt die Anzahl unserer Polynome $p(X)$, für die $p(0) = 0$ gilt, exakt $(2h)(2h+1)^{n-1}$. Somit gilt jedenfalls $R_n(h) \geq (2h)(2h+1)^{n-1} > (2h)^n$, womit die untere Schranke der Ungleichung in Satz 1 gesichert ist.

Um nun auch die obere Schranke der Ungleichung zu bestätigen, fragen wir einfach, wie viele Möglichkeiten es maximal geben kann, ein Polynom $p(X)$ wie oben festgelegt als Produkt von zwei Polynomen $f(X)$ und $g(X)$ zu schreiben, wobei der Grad von $f(X)$ bzw. $g(X)$ kleiner als n ist. Wir setzen also

$$f(X) = b_r X^r + b_{r-1} X^{r-1} + \dots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0,$$

$$g(X) = c_s X^s + c_{s-1} X^{s-1} + \dots + c_2 X^2 + c_1 X + c_0,$$

mit $b_i, c_j \in \mathbb{Z}$ für $i = 0, 1, \dots, r$ und $j = 0, 1, \dots, s$.

Für das Gradpaar (r, s) mit $r, s \geq 1$ und $r + s = n$ nennen wir die Doppelsequenz $(b_0, b_1, \dots, b_r; c_0, c_1, \dots, c_s)$ zulässig vom Typ (r, s) wenn $b_r, c_s \neq 0$ und $b_0 c_0 \neq 0$ und sämtliche Koeffizienten des Polynoms $f(X) \cdot g(X)$ im

Intervall $[-h, h]$ liegen. Die Anzahl aller zulässigen Doppelsequenzen aller möglichen Typen ist dann sicher nicht kleiner (wegen Mehrfachzählungen sogar beträchtlich größer) als die Anzahl aller reduziblen Polynome $p(X)$ vom Grad n mit allen Koeffizienten im Intervall $[-h, h]$ für die $p(0) \neq 0$ gilt. Letzteres entspricht der Bedingung $b_0 c_0 \neq 0$. Die reduziblen Polynome $p(X)$ mit $p(0) = 0$ auszuschließen dient der technischen Vereinfachung und stellt überhaupt kein Problem dar, wenn wir nur deren bereits berechnete Anzahl $(2h)(2h+1)^{n-1}$ im Hinterkopf behalten.

Lemma 3. Für $r, s \geq 1$ und $r+s = n$ sei die Doppelsequenz $(b_0, b_1, \dots, b_r; c_0, c_1, \dots, c_s)$ zulässig vom Typ (r, s) . Dann gilt $|b_i|, |c_j| < 2^{n-1} n^{2n+1} h$ für alle i, j .

Mit Lemma 3 ist die obere Abschätzung von Satz 1 leicht zu erzielen. Es gibt genau $n-1$ Zahlenpaare (r, s) mit $r, s \geq 1$ und $r+s = n$. Die Anzahl aller zulässigen Doppelsequenzen vom Typ (r, s) ist nicht größer als die Anzahl $Z(r, s; h)$ aller ganzzahligen Tupel $(b_0, b_1, \dots, b_r; c_0, c_1, \dots, c_s)$ mit $|b_i|, |c_j| < 2^{n-1} n^{2n+1} h$ für $1 \leq i < r, 1 \leq j < s$ und $0 \neq |b_0 c_0| \leq h$ und $0 \neq |b_r c_s| \leq h$. Mit Hilfe von Lemma 1 gilt daher

$$Z(r, s; h) \leq (2 \cdot 2^{n-1} n^{2n+1} h)^{r-1} (2 \cdot 2^{n-1} n^{2n+1} h)^{s-1} (4h(1+\ln h))^2 = 2^{n(n-2)+1} n^{(2n+1)(n-2)} h^n (1+\ln h)^2.$$

Die Zahl $Z(r, s; h)$ hängt natürlich nicht wirklich von (r, s) , sondern wegen $r+s = n$ lediglich von n (und h) ab: $Z(r, s; h) = Z(n; h)$. Aus

$$R_n(h) \leq (2h)(2h+1)^{n-1} + (n-1)Z(n; h)$$

gewinnen wir schließlich die Abschätzung

$$R_n(h) \leq (2h)(2h+h)^{n-1} + n \cdot 2^{n^2-2n+1} n^{2n^2-3n-2} h^n (1+\ln h)^2 \leq (2 \cdot 3^{n-1} + 2^{n^2-2n+1} n^{2n^2-3n-1}) h^n (1+\ln h)^2.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen, denn es gilt $2 \cdot 3^{x-1} + 2^{x^2-2x+1} x^{2x^2-3x-1} < x^{2x^2}$ für alle $x \geq 2$, was man etwa mit einer elementaren Kurvendiskussion leicht verifizieren kann.

6. Beweis von Lemma 3

Es sei $p(X)$ irgendein ganzzahliges Polynom vom Grad n mit allen Koeffizienten im Intervall $[-h, h]$ und $p(0) \neq 0$. Da $p(X)$ höchstens n reelle Nullstellen hat, können wir im Intervall $[-n, n]$ stets n ganze Zahlen x_1, \dots, x_n festlegen, sodass $p(x_i) \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ gilt. Zunächst stellen wir fest:

$$\text{Für alle } i = 1, 2, \dots, n \text{ gilt } |p(x_i)| < n^{n+1} h \quad (6.1).$$

Das folgt sofort aus der Tatsache, dass $|p(x_i)|$ nicht größer als der Wert $P(n)$ sein kann, wobei das Polynom $P(X)$ durch $P(X) = hX^n + hX^{n-1} + \dots + hX^2 + hX + h$ gegeben ist, denn (geometrische Reihe!)

$$P(n) = h \cdot (n^{n-1} - 1) / (n - 1)$$

Wenn es nun eine Darstellung $p(X) = f(X)g(X)$ mit ganzzahligen Polynomen $f(X)$ und $g(X)$ der Grade r und s gibt, so müssen für jedes i die ganzen Zahlen $f(x_i)$ und $g(x_i)$ Teiler der ganzen Zahl $p(x_i) \neq 0$ sein. Insbesondere gilt $|f(x_i)|, |g(x_i)| \leq |p(x_i)|$ und nach (6.1) somit

$$\text{für alle } i = 1, 2, \dots, n \text{ gilt } |f(x_i)| < n^{n+1} h \quad (6.2).$$

Der Grad r von $f(X)$ ist kleiner als n , sodass $r+1 \leq n$ gilt. Da ein Polynom r -ten Grades durch die Werte an $r+1$ Stellen eindeutig festgelegt ist und für das durch

$$q(X) = \sum_{i=1}^{r+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{r+1} f(x_i) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \prod_{j=1}^{r+1} (X - x_j) \quad (6.3)$$

gegebene Polynom $q(X)$ offensichtlich $q(x_i) = f(x_i)$ für alle $i = 1, 2, \dots, r, r+1$ gilt (Lagrange'sche Interpolation!), haben wir $q(X) = f(X)$ und können (6.3) benutzen, um eine Abschätzung der Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_r des Polynoms $f(X)$ zu gewinnen. Da x_1, \dots, x_{r+1} ganze Zahlen sind, gilt sicher

$$\left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} \frac{1}{x_i - x_j} \right| \leq 1.$$

Nach Lemma 2 sind die Absolutbeträge der Koeffizienten des Polynoms $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} (X - x_j)$ durchwegs kleiner als $(n+1)^r$. Wegen (6.2) und $q(X) = f(X)$ und (6.3) müssen daher die Absolutbeträge der Koeffizienten des Polynoms $f(X)$ durchwegs kleiner als

$$(r+1) \cdot (n^{n+1} h) \cdot (n+1)^r \leq n \cdot (n^{n+1} h) \cdot (2n)^{n-1} = 2^{n-1} n^{2n+1} h$$

sein. In analoger Weise erhält man die letzte Schranke auch für die Koeffizienten des Polynoms $g(X)$, womit Lemma 3 bewiesen ist.

7. Eine Bemerkung zu Satz 1

Unter Zuhilfenahme nichtelementarer Hilfsmittel, die den Rahmen der vorliegenden Note sprengen würden, kann man zeigen, dass Satz 1 im Falle $n \geq 3$ richtig bleibt, wenn man den Faktor $(1+\ln h)^2$ wegstreicht: Die wahre Größenordnung von $R_n(h)$ ist nicht nur im Wesentlichen, sondern sogar *exakt* durch h^n gegeben, falls $n \geq 3$ gilt. Dies trifft im Sonderfall $n = 2$ allerdings nicht zu.

Tatsächlich entspricht die wahre Größenordnung von $R_2(h)$ überraschenderweise dem geometrischen Mittel der oberen und unteren Schranke von $R_2(h)$ in Satz 1, d. h. es gilt $c_1 h^2 (1+\ln h) \leq R_2(h) \leq c_2 h^2 (1+\ln h)$ für alle $h \geq 1$, wobei c_1 und c_2 gewisse positive Konstanten sind.

8. Reelle Polynome

Betrachtet man statt rationaler Polynome *reelle* oder *komplexe* Polynome, dann kann von der *Seltenheit der reduziblen Polynome* überhaupt nicht mehr die Rede sein. In beiden Fällen ist zwar wieder kein lineares Polynom reduzibel. Nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* ist jedoch ein komplexes Polynom vom Grad größer als 1 bzw. ein reelles Polynom vom Grad größer als 2 stets über \mathbb{C} bzw. \mathbb{R} reduzibel.

Somit bleibt die Frage nach dem Anteil der reduziblen Polynome unter allen reellen Polynomen vom Grade 2, mit dessen exakter Bestimmung wir unsere Note abschließen.



Satz 2. Es sind (rund) 62,72% aller quadratischen reellen Polynome (über dem Körper \mathbb{R}) reduzibel.

Beweis. Ein Polynom $p(X) = aX^2 + bX + c$ mit reellen Koeffizienten ist genau dann reduzibel, wenn $p(X)$ eine reelle Nullstelle hat, also genau dann, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt. Die asymptotische Dichte der reduziblen Polynome unter allen quadratischen Polynomen ist somit auf natürliche Weise durch den grenzwertigen *Volumensanteil* des durch die Ungleichung $b^2 - 4ac \geq 0$ festgelegten Teilkörpers des Würfels $|a|, |b|, |c| \leq h$ für $h \rightarrow \infty$ gegeben. Da der Volumensanteil offensichtlich von h unabhängig ist, sprechen wir gar nicht mehr von der asymptotischen Dichte, sondern gleich vom tatsächlichen Anteil der reduziblen quadratischen Polynome.

Das Volumen des Würfels beträgt $8h^3$. Der durch $|x|, |y|, |z| \leq h$ und $4xy \leq z^2$ festgelegte Körper besitzt aus Symmetriegründen das Volumen

$$4h^3 + 4 \int_0^h \left(\int_0^h \min \left\{ h, \frac{z^2}{4x} \right\} dx \right) dz,$$

welches somit

$$4h^3 + 4 \int_0^h \left(\int_0^{z^2/(4h)} h dx + \int_{z^2/(4h)}^h \frac{z^2}{4x} dx \right) dz = \frac{41 + \ln 64}{9} h^3$$

beträgt. Somit beträgt der gesuchte Volumensanteil $((41 + \ln 64)/9)h^3 / (8h^3) = 0,62720\dots$, *q. e. d.*

Ein Urlaub in Ägypten, ein langweiliger Abend und einige mathematische Folgerungen

Axel Born und Gerhard J. Woeginger

Ein unglaublich langweiliger Dia-Abend

Kürzlich waren wir gemeinsam mit Professor Ambrosius zu einem Dia-Abend bei der Familie Meier eingeladen. Herr und Frau Meier zeigten uns Tausende von Dias, die sie im vergangenen Sommer in Ägypten gemacht hatten. Der Abend fing genau so an, wie wir erwartet hatten. Das Dia Nr. 0001 zeigte uns Frau Meier, die in einem dicken Buch blätterte. „Da liest die Ilse gerade aus unserem Reiseführer vor“, erklärte Herr Meier.

Ein wenig später zeigte uns das Dia Nr. 0288 dann Frau Meier im Schatten einer gewaltigen Säule stehen. Der obere Teil der Säule war am Dia abgeschnitten. „Dieses Bild hab ich genau um 12 Uhr Mittag aufgenommen, und laut Reiseführer ist die Säule genau 12 Meter hoch. Ein komischer Zufall“, erläuterte Herr Meier. „Und im Reiseführer steht auch, dass sie zu den ganz berühmten Säulen gehört, die durch Alexander den Großen nach Alexandria gekommen sind“, setzte Frau Meier hinzu. „Die Ilse schwitzt so auf dem Dia, weil es so furchtbar heiß war. Das war nämlich am 21. Juni, genau wie der Sommer angefangen hat“, erklärte Herr Meier. Zu unserem Erstaunen erregte dieses Dia Nr. 0288 die Aufmerksamkeit von Professor Ambrosius: „Diese Säule wirft aber einen interessanten Schatten“, bemerkte er.

Herr Meier schaltete schnell zum Dia Nr. 0289 weiter, das den Boden in Großaufnahme zeigte, der aus großen, grauen, quadratischen Steinplatten bestand. „Ja, das ist mir damals auch aufgefallen“, sagte Herr Meier. „Der Schatten der Säule fällt nämlich genau mit einer der Steinplatten zusammen.“ Die nächsten paar Dias

zeigten dann noch mehr dieser Platten in immer größerem Detail. „Laut Reiseführer ist jede Platte genau 1,60 mal 1,60 Meter groß. Und ich bin auch genau 1,60 Meter groß. Ein komischer Zufall“, warf Frau Meier ein.

Auf Dia Nr. 0962 war das Mietauto abgebildet, mit dem Herr und Frau Meier von Alexandria aus südwärts gefahren waren. „Vollklimatisiert. Andernfalls hätte sich die Ilse wohl zu Tode geschwitzt“, sagte Herr Meier dazu. Das darauffolgende Dia Nr. 0963 zeigte das Armaturenbrett des Mietautos. „Merkt euch dieses Bild genau!“, sagte Herr Meier. „Es gibt später eine kleine Pointe dazu, aber ich will euch nicht jetzt schon die Überraschung verderben.“

Und tatsächlich. Viele, viele, viele Dias später sahen wir dann auf dem Dia Nr. 6622 wieder das Armaturenbrett des Mietautos. „Wenn ihr euch den Kilometerstand auf Dia Nr. 0963 gemerkt habt, dann könnt ihr nachrechnen, dass wir zu diesem Zeitpunkt genau tausend Kilometer zurückgelegt hatten. Tausend Kilometer von Alexandria bis nach Assuan, in drei Wochen!“ Frau Meier unterbrach ihren Ehemann ganz aufgeregt: „Tausend Kilometer sind es aber nur deshalb gewesen, weil wir nicht schnurgerade nach Assuan gefahren sind. Stattdessen sind wir dem Nil gefolgt und haben viele Abstecher zu den wichtigsten Sehenswürdigkeiten gemacht. Im Reiseführer steht, dass die Luftlinie von Alexandria bis Assuan nur 845 Kilometer beträgt.“

Auf dem Dia Nr. 6651 war Frau Meier im Schatten eines gewaltigen Obeliskens zu sehen. Weit entfernt war im Hintergrund der Stausee von Assuan zu erkennen. „Das ist wieder die Ilse“, erläuterte Herr Meier. „Aber der Obelisk neben ihr ist leider nicht antik. Den haben

erst die Engländer in der Kolonialzeit da hingebaut. Im Reiseführer steht auch, dass dieser Obelisk am 21. Juni zu Mittag keinen Schatten wirft, weil da die Sonne genau über ihm im Zenith steht. Dieses schattenlose Schauspiel haben wir aber leider verpasst, weil wir am 21. Juni noch im Norden in Alexandria waren. Schade, das hätte wohl einige wunderschöne Dias ergeben“, seufzte er.

Als wir die Familie Meier nach dem Dia-Abend verließen, sagte Professor Ambrosius zu uns im Treppenhaus: „Ausgezeichnet! Ein höchst vergnüglicher Abend, und noch dazu äußerst lehrreich! Und wenn ihr genau aufgepasst habt, dann könnt ihr nun aus den erhaltenen Informationen sogar den Umfang der Erde bestimmen!“

Wie wir den Erdumfang bestimmen

Wir wollen nun den Umfang der Erde aus den Informationen herleiten, die uns Herr und Frau Meier im Laufe des Dia-Abends zur Verfügung gestellt haben. Dazu machen wir die folgenden beiden vereinfachenden Annahmen.

Erste Annahme: **Wir nehmen an, dass die Erde eine Kugel ist.** Wir wissen natürlich, dass die Erde an den Polen abgeflacht ist und keine perfekte Kugel bildet. Aber die Kugelform ist eine einfache und vernünftige Näherung für die Form der Erde, und unsere Rechnungen werden durch diese Annahme nur ganz gering verfälscht.

Zweite Annahme: **Wir nehmen an, dass alle auf der Erde auftreffenden Sonnenstrahlen parallel zu einander sind.** Die Sonne strahlt ihre Lichtstrahlen radial nach außen ab. Daher sind die Sonnenstrahlen keineswegs parallel zu einander. Der Sonnendurchmesser beträgt allerdings nur 1,4 Millionen Kilometer, während der Abstand von der Sonne zur Erde 150 Millionen Kilometer beträgt. Durchmesser und Abstand sind also rund einen Faktor 100 von einander entfernt! Das entspricht ungefähr der Situation, wenn man mit einer 1 Zentimeter großen Glühbirne einen 1 Meter entfernten Stecknadelkopf anleuchtet. Die auftreffenden Strahlen sind daher *beinahe* parallel, und unsere vereinfachende Annahme führt nur zu einem winzigen Rechenfehler.

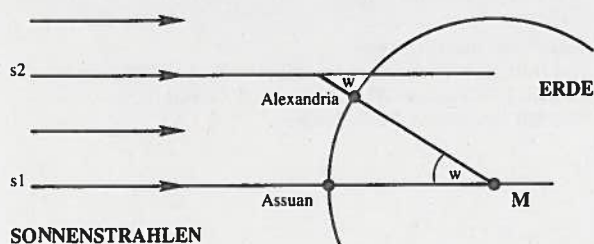


Abbildung 1: Die Ebene, die Alexandria, Assuan und den Erdmittelpunkt M enthält.

Im Meier'schen Reiseführer steht geschrieben, dass der Obelisk in Assuan am Mittag des 21. Juni keinen Schatten wirft. Die Sonnenstrahlen treffen genau vertikal in Assuan ein. Wenn man einen derartigen Sonnenstrahl s_1 gedanklich immer weiter und weiter verlängert, dann trifft er schlussendlich auf den Erdmittelpunkt M . (Mathematisch gesagt: Eine Gerade trifft dann und nur dann vertikal auf eine Kugeloberfläche auf, wenn sie durch den Mittelpunkt der Kugel geht.) Wir

wollen nun die Ebene genauer betrachten, die am 21. Juni durch einen solchen Sonnenstrahl s_1 durch Assuan (Gerade) und durch Alexandria (Punkt) aufgespannt wird; siehe Abbildung 1. Diese Ebene geht durch den Mittelpunkt der Erde, schneidet die Erde in einem Großkreis und zerlegt die Erdkugel in zwei Halbkugeln.

Auf Grund unserer zweiten Annahme sind die beiden Sonnenstrahlen s_1 und s_2 parallel zu einander. Die Gerade, die durch M und durch Alexandria geht, schneidet daher beide Geraden s_1 und s_2 unter dem selben Winkel w . Wie groß ist dieser Winkel w ? Für die Antwort benötigen wir ein wenig (ganz elementare) Trigonometrie: Die Säule in Alexandria ist 12 Meter hoch und steht vertikal von der Erde ab. Am Mittag des 21. Juni ist ihr Schatten genau 1,60 Meter lang. Der Winkel w (zwischen Säule und Sonnenstrahl s_2) liegt also in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer Ankathete der Länge 12 und einer Gegenkathete der Länge 1,60. Deshalb gilt

$$\tan(w) = \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete} = 1,60 / 12 = 2/15.$$

Der Taschenrechner liefert uns nun $w = 7,5946^\circ$. Vom Erdmittelpunkt M aus gesehen deckt der Winkel w zwischen Alexandria und Assuan einen Anteil von $7,5946^\circ$ des Gesamtkreises mit 360° ab. Der Abstand zwischen Alexandria und Assuan (845 Kilometer) muss einen proportionalen Anteil des Gesamtumfangs U der Erde abdecken. Wir folgern:

$$7,5946 : 360 = 845 : U.$$

Daher ist der Erdumfang $U = 845 \cdot 360 / 7,5946 = 40.054$ Kilometer lang. Wenn man bedenkt, dass unsere Rechnungen auf einigen verwackelten Dias und auf dem Geschreibsel in einem Reiseführer beruhen, dann sind diese 40.054 Kilometer ein ganz erstaunlich guter Näherungswert: Moderne Erdvermessungen mit Satelliten haben nämlich ergeben, dass der Äquatorumfang der Erde rund 40.076 Kilometer und der Polumfang rund 39.941 Kilometer betragen.

Wie Eratosthenes den Erdumfang bestimmte

Der griechische Wissenschaftler Eratosthenes von Kyrene (276–194 v. Chr.) hat um das Jahr 230 v. Chr. als einer der ersten Menschen den Erdumfang berechnet. Eratosthenes war umfassend gebildet und arbeitete als Mathematiker, Historiker, Geograph, Philologe, Dichter und Bibliothekar in Alexandria. Genau wie wir ging Eratosthenes von den beiden Annahmen im letzten Abschnitt aus, von der Kugelform der Erde und von der Parallelität der Sonnenstrahlen.

Zur ersten Annahme: Eratosthenes war natürlich belehrt und gebildet genug, um über die Kugelform der Erde Bescheid zu wissen. Die Kugelform der Erde wurde bereits von Pythagoras vermutet, der rund 300 Jahre vor Eratosthenes lebte. Zur Zeit des Eratosthenes wurde sie vom Großteil der wissenschaftlichen Gemeinschaft akzeptiert.

Zur zweiten Annahme: Um das Jahr 270 v. Chr. herum hatte Aristarch von Samos (310–230 v. Chr.) gewissenhafte astronomische Beobachtungen angestellt, und sie in seinem Werk „Über die Größen und die Abstände von Sonne und Mond“ zusammengefasst. Aristarch lei-



tete von seinen Beobachtungen ab, dass die Sonne zwanzig Mal größer ist als der Mond, und dass sie zwanzig Mal weiter von der Erde entfernt ist als der Mond. Wir wissen heutzutage, dass Aristarchs Zahlen viel zu klein geraten sind, was uns aber wegen der großen Ungenauigkeit der damaligen Messinstrumente nicht weiter verwundert. Eratosthenes wusste auf jeden Fall, dass der Abstand von der Sonne zur Erde gigantisch groß ist, und er schloss daraus, dass alle auf der Erde auftreffenden Sonnenstrahlen parallel sind.

Eratosthenes wusste, dass in der südägyptischen Stadt Syene (dem heutigen Assuan) die Häuser am Mittag der Sommersonnenwende keine Schatten werfen. Es soll auch einen tiefen Brunnen auf der Nil-Insel Elephantine bei Syene gegeben haben, in dem die Sonnenstrahlen nur zur Sommersonnenwende den tief unter der Erde gelegenen Wasserspiegel erreichten. Es ist nicht bekannt, ob Eratosthenes auf seinen Reisen jemals nach Syene gekommen ist und diese Phänomene selbst beobachtet hat. Wahrscheinlicher ist, dass er darüber in den Schriftrollen der Bibliothek von Alexandria nachgelesen hat. Syene/Assuan liegt jedenfalls nur wenig nördlich vom Wendekreis des Krebses, und die Sonnenstrahlen fallen dort am 21. Juni vertikal ein.

Eratosthenes lebte in Alexandria. Während einer Sommersonnenwende bestimmte er dort zu Mittag den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen. Vermutlich verwendete er dazu eine sogenannte Skaphe, ein primitives und ziemlich ungenaues halbkugelförmiges Instrument zur Winkelmessung. Vielleicht hat er auch den Schatten eines Obeliskens vermessen, und die Länge des Schattens in Relation zur Höhe des Obeliskens gesetzt. Wir wissen nicht genau, wie er die Messung durchgeführt hat. Ohne Trigonometrie war es auf jeden Fall ein hartes Stück Arbeit. Seine Messungen ergaben, dass der Einfallswinkel gleich dem fünfzigsten Teil eines vollen Winkels ist, also $360^\circ/50 = 7,2^\circ$.

Eratosthenes ging davon aus, dass der Abstand von Alexandria nach Syene rund 5.000 Stadien beträgt. Eine Anekdote berichtet, dass Eratosthenes einen Soldaten die Strecke von Alexandria nach Syene abgehen ließ, der dabei seine Schritte mitzählen musste. Aus der Anzahl der Schritte und aus der durchschnittlichen Schrittlänge konnte sich Eratosthenes dann den Abstand bestimmen. Wahrscheinlicher ist, dass Eratosthenes die alten ägyptischen Landvermessungen studierte, und sich dann den Abstand daraus ausrechnete. Einige der geographische Schriften von Eratosthenes sind uns nämlich erhalten geblieben, und sie zeigen, dass er über ausge-

zeichnete Detailkenntnisse über den Verlauf des Nils verfügte.

Eratosthenes setzte seine Informationen auf dieselbe Weise zusammen, wie wir es im letzten Abschnitt getan haben (siehe Abbildung 1): Da der Winkel w den fünfzigsten Teil eines vollen Winkels bildet, müssen die 5.000 Stadien den fünfzigsten Teil des vollen Erdumfangs bilden. Daher ist der Erdumfang $U = 250.000$ Stadien lang.

Schlussbemerkungen

Unglücklicherweise ist nicht genau überliefert, wie groß ein Stadion des Eratosthenes in den heute verwendeten Längeneinheiten wäre. Wir wissen zwar durch Herodot, dass ein Stadion genau 600 griechische Fuß beträgt, aber die Länge eines griechischen Fußes ist uns nicht bekannt; wahrscheinlich wiesen diese alten Längemaße auch große regionale Unterschiede auf. *Hulisch* [2] nimmt an, dass ein Stadion rund 157,5 Metern entspricht. *Gulbekian* [1] setzt ein Stadion mit rund 166,7 Metern an, und *Rawlins* [3] setzt es 185 Metern gleich. Unter den Annahmen dieser drei Herren würden die 250.000 Stadien von Eratosthenes respektive 39.375 oder 41.667 oder 46.250 Kilometer ergeben.

Auf jeden Fall erhalten wir Werte, die relativ nahe beim tatsächlichen Erdumfang liegen. Und auf jeden Fall hat Eratosthenes eine intellektuelle Meisterleistung erbracht, die uns auch heute noch in Ehrfurcht versetzt. In Zeiten der PISA-Studien fragen wir uns auch, wie viele der österreichischen Maturanten wohl dazu in der Lage wären, rein aus den Informationen des Meier'schen Dia-Abends heraus den Erdumfang zu bestimmen.

Literatur

- [1] E. *Gulbekian* (1987). The origin and value of the stadion unit used by Eratosthenes in the third century B.C. *Archive for History of Exact Sciences* 37, 359–363.
- [2] F. *Hulsch* (1862). *Griechische und Römische Metrologie*. Verlag Weidmann, Berlin.
- [3] D. *Rawlins* (1982). The Eratosthenes-Strabo Nile map. Is it the earliest surviving instance of spherical cartography? Did it supply the 5.000 stades arc for Eratosthenes' experiment? *Archive for History of Exact Sciences* 26, 211–219.

Anschriften der Verfasser:

Axel Born, ORG Ursulinen, Leonhardstraße 62, 8010 Graz.
Gerhard J. Woeginger, TU Eindhoven, P.O. Box 513,
5600 MB Eindhoven, Niederlande.

Algebraische Zahlen am Einheitskreis III: Eine merkwürdige Klasse algebraischer Zahlen

Gerald Kuba

1. Einleitung

Das in [2] abgehandelte zahlentheoretische Problem aus der Mechanik legt folgende Klassifizierung der algebraischen Zahlen nahe. Wir nennen eine komplexe Zahl α *plus-algebraisch* und sprechen kurz von einer *PA-Zahl*, wenn sie als Nullstelle eines Polynoms

$$p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

mit *rationalen* und *nichtnegativen* Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ auftritt. Ohne diese Nichtnegativitätsforderung an die rationalen Koeffizienten erhält man die gewöhnlichen algebraischen Zahlen, sodass also eine plus-algebraische Zahl automatisch algebraisch ist. Nennen wir abkürzend eine algebraische Zahl, die nicht plus-algebraisch ist eine *NPA-Zahl*, so zerfällt die Menge aller algebraischen Zahlen in zwei disjunkte Klassen: die Klasse aller PA-Zahlen und die Klasse aller NPA-Zahlen. Während man zum Nachweis, dass eine Zahl eine PA-Zahl ist, im Prinzip nur ein einziges konkretes Polynom benötigt, genügt es zum Nachweis, dass eine Zahl eine NPA-Zahl ist, natürlich nicht, ein Polynom mit einem negativen Koeffizienten zu finden, das die Zahl annulliert. Man muss vielmehr garantieren können, dass die Zahl nicht auch Nullstelle eines anderen Polynoms (möglicherweise von abstrus großem Grade) ist, das zufällig gerade durchwegs nichtnegative Koeffizienten hat.

Innerhalb des rationalen Zahlkörpers \mathbb{Q} ist die Klassifizierung jedoch trivial, denn es gilt:

Sätzchen. *Es ist $\alpha \in \mathbb{Q}$ genau dann eine NPA-Zahl, wenn $\alpha > 0$ gilt.*

Beweis. Ist $p(X)$ ein Polynom wie oben, dann gilt natürlich $p(\alpha) > 0$ für alle $\alpha > 0$. Umgekehrt ist jedes nichtpositive $\alpha \in \mathbb{Q}$ als Nullstelle des Polynoms $X + |\alpha|$ eine PA-Zahl.

Bemerkung. Natürlich ist jede positive algebraische Zahl eine NPA-Zahl. Es kann aber auch eine negative algebraische Zahl eine NPA-Zahl sein. Wie wir sehen werden, trifft dies z. B. auf die Zahl $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zu.

In dieser Note wollen wir uns im Hinblick auf die Anwendung auf das in [2] dargestellte Problem vor allem mit NPA-Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ beschäftigen, die am Einheitskreis liegen, d. h. für die $|\alpha| = 1$ gilt.

2. Beispiele

Eine NPA-Zahl $\neq 1$ am Einheitskreis zu finden, ist gar nicht so einfach. Betrachtet man etwa die algebraische Zahl $\alpha = \frac{1}{5} + i \cdot \frac{3}{5}$, die Nullstelle des Polynoms $X^2 - \frac{6}{5}X + 1$ ist, so wird man kein rationales Polynom zweiten, dritten oder vierten Grades finden können,

das α annulliert und dessen Koeffizienten alle nichtnegativ sind. (*Aufgabe:* Man gebe eine elementargeometrische Begründung dieser Behauptung.) Trotzdem ist α eine PA-Zahl, denn es gilt

$$\alpha^5 + \frac{34}{195}\alpha^4 + \frac{13}{9405}\alpha^3 + \frac{10529}{460845}\alpha^2 + \frac{88}{4655}\alpha + \frac{51}{49} = 0.$$

Die Zahl $i \cdot \bar{\alpha} = \frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}$ ist dagegen wesentlich leichter als PA-Zahl entlarvt: Sie ist eine Nullstelle des Polynoms $X^2 - \frac{6}{5}X + 1$ und daher auch eine Nullstelle des Polynoms

$$(X^2 - \frac{6}{5}X + 1) \cdot (X^2 + \frac{6}{5}X + 1) = X^4 + \frac{14}{25}X^2 + 1.$$

Ferner kommen auch die prominentesten algebraischen Zahlen am Einheitskreis, nämlich die *Einheitswurzeln* (mit Ausnahme der Zahl 1) als NPA-Zahlen nicht in Frage. Die Einheitswurzeln sind genau die Zahlen $e^{i\phi} = \cos \phi + i \cdot \sin \phi$, wobei das Argument ϕ ein *rationales* Vielfaches von π ist. Ist nun also $\zeta = e^{i\phi}$ mit rationalem q und schreiben wir $q = \frac{m}{n}$ mit ganzzahligen m, n und $n > 0$, dann gilt $\zeta^{2n} = e^{2m\pi i} = 1$, woher auch der Name *Einheitswurzel* kommt. Somit ist ζ eine Nullstelle des Polynoms $X^{2n} - 1$. Im Falle $\zeta \neq 1$ ist wegen $X^{2n} - 1 = (X - 1)(1 + X + X^2 + \dots + X^{2n-1})$ die Zahl ζ auch eine Nullstelle des Polynoms $1 + X + X^2 + \dots + X^{2n-1}$ und somit eine PA-Zahl. Kurz: *Alle Einheitswurzeln $\neq 1$ sind PA-Zahlen.*

Um nun nachzuweisen, dass z. B. $\frac{1-\sqrt{13}}{4} + i \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}$ tatsächlich eine NPA-Zahl am Einheitskreis ist, benötigen wir ein wenig Rüstzeug aus elementarer Algebra.

3. Kleiner algebraischer Exkurs

Würde es nicht dem modernen Funktionsbegriff zuwiderlaufen (und strenggenommen einfach falsch sein), könnte man ein *Polynom* salopp als spezielle *Funktion* mit beliebig und unbegrenzt erweiterbarem Definitionsbereich bezeichnen. Die *analytische* Sichtweise greift jedenfalls zu kurz, denn in erster Linie ist ein Polynom ein *algebraisch* Ding! Vor allem zwei Eigenschaften sind es, die Polynome zum unverzichtbaren Handwerkszeug des Algebraikers machen und die auch wir benötigen werden: Einerseits kann man mit Polynomen fast so *rechnen*, wie man es von den ganzen Zahlen her gewohnt ist. Genauer bilden die *Polynome in einer Unbestimmten X über einem Körper K* (d. h. mit Koeffizienten aus dem Körper \mathbb{K}) auf kanonische Weise einen *Ring* $\mathbb{K}[X]$, der strukturell in vielerlei Hinsicht dem Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ähnelt. (Viele Konzepte der elementaren Zahlentheorie, wie Teilbarkeit, Division mit Rest, eindeutige Primfaktorenzerlegung, sind fast wörtlich vom Ring \mathbb{Z} auf den Ring $\mathbb{K}[X]$ übertragbar.) Andererseits kann man in einem Polynom $p(X)$ über \mathbb{K} die Unbestimmte X durch ein festes Ele-



ment κ eines beliebigen Oberkörpers von \mathbb{K} ersetzen und damit ein Element $p(\kappa)$ erhalten, das vielleicht selbst dann in \mathbb{K} liegt, wenn κ gar nicht in \mathbb{K} liegt. So ist z. B. $p(X) = X^2 + 3$ ein Polynom über dem rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} und die Zahl $p(\sqrt{2}) = 5$ liegt in \mathbb{Q} , obwohl die (im Oberkörper \mathbb{R} liegende) Zahl $\sqrt{2}$ nicht in \mathbb{Q} liegt.

Wir wollen nun die für unsere Zwecke wichtigsten Begriffe und Resultate aus der Polynomalgebra kurz und bündig zusammenstellen. Details findet man in jedem besseren Lehrbuch der Algebra, z. B. in der hervorragenden Monographie [1].

Ist $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n , wobei man Terme der Art $0X^k$ weglassen kann, so sprechen wir kurz von einem reellen Polynom. Von besonderem Interesse sind diejenigen reellen Polynome, deren Koeffizienten rationale Zahlen sind. Wir sprechen dann von rationalen Polynomen. Ist der sogenannte Leitkoeffizient a_n gleich 1, dann heißt das Polynom monisch bzw. normiert. Im Falle $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ ist die natürliche Zahl n der Grad des Polynoms. Polynome vom Grad 1 heißen linear, solche vom Grad 2 bzw. 3 nennt man quadratisch bzw. kubisch. Ist $p(X) = a_0$, so heißt $p(X)$ konstant und im Falle $a_0 \neq 0$ ist der Grad des Polynoms gleich 0. Haben die beiden Polynome $p_1(X)$ bzw. $p_2(X)$ den Grad m bzw. n , dann hat das Polynom $p_1(X) \cdot p_2(X)$ den Grad $m + n$.

Gilt $p_1(X) \cdot p_2(X) = p_3(X)$ für Polynome über einem Körper \mathbb{K} , wobei wir nur die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ zu betrachten brauchen, dann heißt $p_1(X)$ ein Teiler von $p_3(X)$. (Dieser Teilbarkeitsbegriff ist absolut, d. h. zwei Polynome über einem Körper \mathbb{K} stehen genau dann in einer auf \mathbb{K} bezogenen Teilbarkeitsbeziehung, wenn sie dies bezogen auf irgendeinen Oberkörper $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ als Polynome über \mathbb{K}' tun.)

Ein nichtkonstantes Polynom $p(X)$ heißt irreduzibel über \mathbb{K} , wenn $p(X)$ nicht als Produkt zweier Polynome geschrieben werden kann, die einen kleineren Grad als $p(X)$ haben. Es ist gefährlich, von irreduziblen Polynomen zu sprechen und den Zusatz über \mathbb{K} wegzulassen. (So ist etwa das Polynom $X^4 - 5$ irreduzibel über \mathbb{Q} , wegen $X^4 - 5 = (X^2 - \sqrt{5}) \cdot (X^2 + \sqrt{5})$ aber nicht irreduzibel über \mathbb{R} .) Ein reelles Polynom, das irreduzibel über \mathbb{R} ist, kann nur linear oder quadratisch sein. Wenn wir von einem irreduzibel rationalen Polynom sprechen, so meinen wir damit stets ein rationales Polynom, das irreduzibel über dem Körper \mathbb{Q} ist. Zu jedem $n \geq 1$ gibt es unendlich viele normierte, irreduzibel rationale Polynome vom Grade n .

Ist $p(X)$ ein nichtkonstantes, reelles Polynom und z eine komplexe Zahl, dann heißt z eine Nullstelle des Polynoms $p(X)$, wenn $p(z) = 0$ gilt, also wenn diejenige komplexe Zahl verschwindet, die man aus $p(X)$ erhält, indem man die Unbestimmte X durch z ersetzt. Man sagt dann auch: Das Polynom $p(X)$ annulliert die Zahl z . Ist z eine Nullstelle von $p(X)$, dann ist z für jede reelle Zahl $r \neq 0$ auch Nullstelle des Polynoms $r \cdot p(X)$. Mit jeder Nullstelle $z = a + bi$ eines reellen Polynoms $p(X)$ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ eine Nullstelle von $p(X)$. Besitzt ein rationales Polynom $p(X)$ eine rationale Nullstelle ρ , dann ist das lineare, rationale Polynom $X - \rho$ ein Teiler von $p(X)$, sodass ins-

besondere $p(X)$ nicht irreduzibel rational ist. Jedes irreduzibel rationale Polynom vom Grade n besitzt genau n (paarweise verschiedene) Nullstellen in \mathbb{C} . Diese Nullstellen treten als Paare konjugiert komplexer Zahlen auf, sodass es mindestens eine reelle Nullstelle geben muss, wenn n ungerade ist.

Eine komplexe Zahl α heißt algebraisch, wenn sie von irgendeinem rationalen Polynom annulliert wird. Insbesondere wird eine algebraische Zahl immer von einem normierten rationalen Polynom annulliert. Überdies gibt es zu jeder algebraischen Zahl α ein eindeutig bestimmtes normiertes rationales Polynom $p_\alpha(X)$ kleinsten Grades, das α annulliert. Dieses Polynom $p_\alpha(X)$ ist irreduzibel rational und heißt das Minimalpolynom von α . Der Grad einer algebraischen Zahl α ist der Grad des Minimalpolynoms von α . Die algebraischen Zahlen vom Grad 1 sind genau die rationalen Zahlen. Die algebraischen Zahlen vom Grad 2, die man auch quadratisch nennt, sind genau die Zahlen von der Form $a + e \cdot \sqrt{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $b > 0$ und $e \in \{1, -1, i, -i\}$ und $e\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. Mit der folgenden wunderbaren Eigenschaft des Minimalpolynoms wollen wir unseren Exkurs beenden:

(3.1) Ist die algebraische Zahl α eine Nullstelle eines rationalen Polynoms $q(X)$, dann ist das Minimalpolynom $p_\alpha(X)$ ein Teiler von $q(X)$.

4. Die NPA-Bedingung

Zunächst formulieren wir zwei Lemmata über PA-Zahlen.

Lemma 1. Die komplexe Zahl z ist genau dann eine PA-Zahl, wenn ρz für irgendeine rationale Zahl $\rho > 0$ eine PA-Zahl ist.

Beweis. Für rationales $\rho \neq 0$ ist ein Polynom $q(X)$ genau dann rational, wenn das Polynom $q(\rho X)$ rational ist. Für eine beliebige reelle Zahl $a > 0$ hat ein reelles Polynom $p(X)$ genau dann durchwegs positive Koeffizienten, wenn das reelle Polynom $p_1(X) = p(aX)$ durchwegs positive Koeffizienten hat, q. e. d.

Lemma 2. Wenn für die komplexe Zahl z und irgendeine ganze Zahl $n > 0$ die Zahl z^n eine PA-Zahl ist, dann ist bereits z eine PA-Zahl.

Beweis. Es sei $p(X)$ ein rationales Polynom mit positiven Koeffizienten, sodass $p(z^n) = 0$ gilt. Dann ist das durch $q(X) = p(X^n)$ definierte Polynom ein rationales Polynom mit positiven Koeffizienten und es gilt $q(z) = 0$, q. e. d.

Wir formulieren nun eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer NPA-Zahl, mit der wir unendlich viele NPA-Zahlen am Einheitskreis konstruieren werden.

Lemma 3. Wenn ein irreduzibel rationales Polynom vorliegt, das eine positive reelle Nullstelle besitzt, dann sind alle Nullstellen des Polynoms NPA-Zahlen.

Beweis. Es sei $p(X)$ ein rationales Polynom, das über \mathbb{Q} irreduzibel ist. Wir zeigen gleich etwas mehr, nämlich dass für die Nullstellen von $p(X)$ gilt:

(*) Ist eine Nullstelle eine NPA-Zahl, dann sind alle Nullstellen NPA-Zahlen.

Da eine positive reelle Zahl eine NPA-Zahl sein muss, folgt Lemma 3 aus (*). Um nun (*) zu beweisen, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine NPA-Zahl mit $p(\alpha) = 0$. O. B. d. A. sei

$p(X)$ normiert, sodass $p(X)$ das Minimalpolynom von α ist. Wäre nun eine andere Nullstelle α' von $p(X)$ eine PA-Zahl, dann würde α' von einem rationalen Polynom $q(X)$ mit positiven Koeffizienten annulliert werden. Da $p(X)$ auch das Minimalpolynom der Zahl α' ist, müsste dann $p(X)$ ein Teiler von $q(X)$ sein: $q(X) = p(X) \cdot p_1(X)$ mit $p_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Dann hätten wir aber $q(\alpha) = p(\alpha) \cdot p_1(\alpha) = 0$ und somit wäre α eine Nullstelle von $q(X)$ im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass α eine NPA-Zahl ist, *q. e. d.*

Mit Hilfe von Lemma 3 kann man z. B. leicht nachweisen, dass $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine NPA-Zahl ist. Denn diese Zahl ist quadratisch und hat das Minimalpolynom $X^2 + X - 1$. Die zweite Nullstelle des Polynoms ist die reelle Zahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und somit positiv.

Aufgabe. Man konstruiere weitere *negative quadratische* NPA-Zahlen und zeige allgemein, dass eine *reelle quadratische* Zahl α genau dann eine NPA-Zahl ist, wenn eine der beiden Nullstellen des Minimalpolynoms von α positiv ist. Ferner folgere man daraus, dass einerseits die reellen quadratischen NPA-Zahlen dicht in \mathbb{R} liegen, andererseits die negativen quadratischen PA-Zahlen dicht in $]-\infty, 0]$ liegen. (Eine Teilmenge A einer Punktmenge P liegt *dicht* in P , wenn in beliebiger Nähe eines Punktes aus P stets irgendein Punkt aus A liegt. Z. B. liegen die rationalen Zahlen dicht in \mathbb{R} und die algebraischen Zahlen dicht in \mathbb{C} .)

5. NPA-Zahlen am Einheitskreis

Im Lichte des zweiten Abschnitts sind quadratische NPA-Zahlen am Einheitskreis schwer aufzuspüren. Tatsächlich wäre die Suche nach solchen NPA-Zahlen ein sinnloses Unterfangen, wie folgender Satz zeigt.

Satz 1. *Jede nichtreelle quadratische Zahl ist eine PA-Zahl.*

Beweis. Eine nichtreelle quadratische Zahl ist stets von der Form $a \pm i\sqrt{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $b > 0$. Wir unterscheiden die Fälle $a > 0$ und $a \leq 0$. Im Falle $a \leq 0$ erkennt man sofort, dass die beiden Zahlen $z = a \pm i\sqrt{b}$ PA-Zahlen sind, da $(z-a)^2 = -b$ und somit $z^2 + 2(-a)z + b = 0$ gilt. Im Falle $a > 0$ betrachten wir für ganzzahliges $n > 1$ beliebige Potenzen $(a \pm i\sqrt{b})^n$, die (nach Rechnung in einem imaginärquadratischen Zahlkörper oder nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes) alle von derselben Bauart wie $a \pm i\sqrt{b}$ sein müssen. Da beim Potenzieren einer komplexen Zahl mit n ihr Argument mit n multipliziert wird, gibt es eine natürliche Zahl m , sodass $(a \pm i\sqrt{b})^m = a_1 \pm i\sqrt{b_1}$ mit $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$ und $b_1 > 0$ und $a_1 < 0$ gilt. Nach dem vorher Bewiesenen sind daher die beiden Zahlen $(a \pm i\sqrt{b})^m$ PA-Zahlen. Nach Lemma 2 müssen daher auch $a \pm i\sqrt{b}$ PA-Zahlen sein, *q. e. d.*

Bemerkung. Mit dem Sätzchen in der Einleitung, der Aufgabe im vorigen Abschnitt und Satz 1 liegt eine einfache und vollständige Klassifizierung aller algebraischen Zahlen höchstens zweiten Grades in PA- und NPA-Zahlen vor. Ferner ist es nicht schwierig, auch alle algebraischen Zahlen $\alpha \neq 0$ zu klassifizieren, deren Minimalpolynom $p_\alpha(X)$ nur reelle Nullstellen hat: *Genau dann ist so eine Zahl α eine PA-Zahl, wenn alle Nullstellen von $p_\alpha(X)$ negativ sind.* (Beweis als **Aufgabe**.)

Auch unter den algebraischen Zahlen dritten Grades wird man keine NPA-Zahlen am Einheitskreis finden können. Es gilt nämlich

Satz 2. *Das Quadrat des Betrages einer kubischen Zahl ist stets irrational.*

Beweis. Es sei $p(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ ein Polynom mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und einer Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha|^2 \in \mathbb{Q}$. Im Falle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist α rational oder quadratisch und somit ist $p(X)$ wegen (3.1) nicht irreduzibel rational. Es sei also $\alpha \notin \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Dann ist $\bar{\alpha}$ eine weitere nichtreelle Nullstelle von $p(X)$, während die dritte Nullstelle ξ von $p(X)$ reell ist. Wegen $\alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2$ und $\alpha + \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ ist $p(X)$ das Produkt eines quadratischen und eines linearen *reellen* Polynoms:

$$p(X) = X^3 + aX^2 + bX + c = (X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + |\alpha|^2) \cdot (X - \xi).$$

Ein Koeffizientenvergleich $-\xi \cdot |\alpha|^2 = c$ ergibt. Mit der dann *rationalen* Nullstelle $\xi = -c/|\alpha|^2$ kann $p(X)$ nicht irreduzibel rational sein. Ein irreduzibel rationales Polynom dritten Grades kann daher keine Nullstelle α mit $|\alpha|^2 \in \mathbb{Q}$ haben, *q. e. d.*

Eine NPA-Zahl $\neq 1$ am Einheitskreis muss also eine algebraische Zahl von mindestens viertem Grade sein. Die einfachsten Polynome, die eine Anwendung von Lemma 3 ermöglichen, sind die irreduzibel rationalen Polynome vierten Grades mit genau zwei reellen Nullstellen, von denen eine positiv ist, und einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen am Einheitskreis. Zunächst betrachten wir exemplarisch das Polynom $p(X) := X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$.

Wegen

$$p(X) = \left(X^2 - \frac{\sqrt{13}+1}{2}X + 1\right) \cdot \left(X^2 + \frac{\sqrt{13}-1}{2}X + 1\right)$$

sind die vier Nullstellen von $p(X)$ die beiden konjugiert komplexen Zahlen

$$\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{4} + i \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{4} - i \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}},$$

für die offensichtlich $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ gilt, und die beiden reellen Zahlen

$$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{8}} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{4} - \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{8}}.$$

Insbesondere ist das Polynom $p(X)$ irreduzibel rational. Wegen $\xi_1 > 1$ sind nach Lemma 3 die beiden Zahlen α_1 und α_2 NPA-Zahlen. Allgemein gilt nun:

Satz 3. *Wenn r, s rationale Zahlen sind, sodass $s > 0$ und $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$ und*

$$-\sqrt{s} < 2+r < \min\{\sqrt{s}, 4-\sqrt{s}\}$$

gilt, dann sind die beiden Zahlen

$$-\frac{1}{2} \left(r + \sqrt{s} \pm i \sqrt{4 - (r + \sqrt{s})^2} \right)$$

NPA-Zahlen vom Betrage 1.

Den Beweis von Satz 3 verschieben wir auf den nächsten Abschnitt und formulieren gleich eine im Zusammenhang mit [2] wichtige Folgerung.

Satz 4. *Es gibt unendlich viele SNNS-Winkel, die keine NNS-Winkel sind.*

Beweis. Für irrationales $x \in \mathbb{R}$ ist $\phi = \pi x$ genau dann ein SNNS-Winkel, der kein NNS-Winkel ist, wenn $e^{i\pi x}$ eine NPA-Zahl ist (vgl. [2]). Für rationales x ist $e^{i\pi x}$ als Einheitswurzel eine PA-Zahl, *q. e. d.*



Ferner ergibt sich ohne grobe Mühe aus Satz 3 der
Satz 5. Die NPA-Zahlen auf dem Einheitskreis $|z|=1$ liegen dicht.

Beweis. Die Abbildung $x \mapsto -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ bzw. $x \mapsto -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ bildet das Intervall $-2 < x < 2$ offensichtlich stetig und bijektiv auf den strikt oberen bzw. strikt unteren Halbkreis des Einheitskreises ab. Setzt man $s = 5$ in Satz 3, dann bekommt man für jede rationale Zahl r im Intervall $-2 - \sqrt{5} < r < 2 - \sqrt{5}$ die beiden am Einheitskreis liegenden NPA-Zahlen $-\frac{r+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-(r+\sqrt{5})^2}$. Daher liegen bereits diese speziellen NPA-Zahlen dicht am Einheitskreis, *q. e. d.*

Satz 6. Die NPA-Zahlen in der komplexen Zahlenebene liegen dicht.

Beweis. Wir zeigen, dass die NPA-Zahlen auf jedem Kreis $|z|=p$ mit rationalem Radius $p > 0$ dicht liegen. Dazu betrachten wir alle NPA-Zahlen am Einheitskreis und projizieren sie via $z \mapsto pz$ auf den Kreis $|z|=p$. Wegen Satz 5 genügt es zu zeigen, dass für eine NPA-Zahl α auch die Zahl $p\alpha$ eine NPA-Zahl ist. Das wiederum folgt sofort aus Lemma 1, *q. e. d.*

Bemerkung. Im Lichte von Satz 1 liegen auch die PA-Zahlen dicht in \mathbb{C} .

Aufgabe. Unter Verwendung der Ungleichung $3n \arctan \frac{1}{n} < \pi$ zeige man, dass für ganzzahliges $n \geq 1$ die PA-Zahl $n+i$ keine Nullstelle eines rationalen Polynoms mit positiven Koeffizienten und einem Grad $\leq 3n$ sein kann.

6. Beweis von Satz 3

Wir verallgemeinern das Beispiel im vorigen Abschnitt und suchen ein normiertes irreduzibel rationales Polynom $p(X)$ vierten Grades, das genau zwei reelle Nullstellen, sowie ein Paar Nullstellen am Einheitskreis hat. Um Lemma 3 anwenden zu können, muss eine der reellen Nullstellen positiv sein. Über \mathbb{R} zerfällt das Polynom in zwei quadratische, normierte Polynome mit reellen Koeffizienten:

$$p(X) = (X^2 + uX + v) \cdot (X^2 + aX + b).$$

Der erste Faktor soll die reellen Nullstellen von $p(X)$ liefern, sodass $u^2 - 4v \geq 0$ vorauszusetzen ist. Der zweite Faktor soll die nichtreellen Nullstellen von $p(X)$ am Einheitskreis liefern, sodass $b = 1$ und $|a| < 2$ vorauszusetzen ist. Wir multiplizieren aus und erhalten

$$p(X) = X^4 + (u+a)X^3 + (ua+v+1)X^2 + (av+u)X + v.$$

Da $p(X)$ ein rationales Polynom ist, müssen sämtliche Koeffizienten rational sein. Ferner dürfen wegen der Absolutheit der Polynomteilbarkeit nicht beide Zahlen u, v bzw. beide Zahlen a, b rational sein. Wegen $b = 1$ ist somit a irrational und wegen $u+a \in \mathbb{Q}$ daher auch u . Da $av+u$ rational ist, ist auch $(av+u) - (u+a)$ rational, was wegen der Irrationalität von a nur im Falle $v = 1$ funktioniert. Mit den Vietaschen Formeln im Hinterkopf erkennt man, dass für irrationale u, a sowohl ua als auch $u+a$ genau dann rational sind, wenn u und a die reellen Nullstellen eines quadratischen irreduzibel rationalen Polynoms $q(X)$ sind. Daher gilt $u = r + e\sqrt{s}$ und $a = r - e\sqrt{s}$ mit passendem Vorzeichen $e = \pm 1$ und passenden rationalen Zahlen r, s , wobei $s > 0$ und $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$ zu gelten hat.

Für unsere Zwecke muss zusätzlich $|r - e\sqrt{s}| < 2$ gelten und eine der reellen Nullstellen $-\frac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 - 4})$ von $p(X)$ positiv sein. (Man beachte, dass $|u| > 2$ bereits vorausgesetzt ist.) Im Fall $u > 2$ sind beide Nullstellen negativ, im Fall $u < -2$ sind beide Nullstellen positiv. Wir müssen daher auch $r + e\sqrt{s} < -2$ verlangen. Die Ungleichungen $|r - e\sqrt{s}| < 2$ und $r + e\sqrt{s} < -2$ sind offensichtlich gemeinsam nur dann erfüllbar, wenn $e = -1$ gilt, womit also $u = r - \sqrt{s}$ und $a = r + \sqrt{s}$ festgelegt ist. Die rationalen Parameter r und s sind somit folgenden Restriktionen unterworfen:

$$s > 0, s \notin \mathbb{Q}, -2 < r + \sqrt{s} < 2, r - \sqrt{s} < -2.$$

Umgekehrt liefern alle rationalen Parameter r, s , die diese Bedingungen erfüllen, für unsere Zwecke geeignete Koeffizienten a und u . Die Bedingungen sind offensichtlich äquivalent mit

$$s > 0, s \notin \mathbb{Q}, -\sqrt{s} < 2 + r < \min\{\sqrt{s}, 4 - \sqrt{s}\}$$

und die beiden Nullstellen des Polynoms $X^2 + aX + b = X^2 + (r + \sqrt{s})X + 1$ sind durch

$$-\frac{1}{2} \left(r + \sqrt{s} \pm i\sqrt{4 - (r + \sqrt{s})^2} \right)$$

gegeben.

7. Eine Variation der Klassifizierung

Abschließend wollen wir noch kurz folgende Variation des Begriffs einer PA-Zahl diskutieren. Wir nennen eine komplexe Zahl α eine PPA-Zahl, wenn sie als Nullstelle eines Polynoms

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

mit rationalen und durchwegs positiven Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ auftritt. (Natürlich kann man stets gleich $a_n = 1$ verlangen.) A fortiori ist jede PPA-Zahl auch eine PA-Zahl. Umgekehrt ist jedoch die Zahl 0 zwar eine PA-Zahl, aber keine PPA-Zahl, es sei denn, man interpretiert das Nullpolynom als leere Zeichenkette. Dass mit den PPA-Zahlen trotzdem kein wirklich neuer Zahlbegriff kreiert wird, zeigt folgender Satz, mit dem wir unseren kleinen Ausflug in das Reich der algebraischen Zahlen beenden.

Satz 6. Eine algebraische Zahl $\alpha \neq 0$ ist genau dann eine PPA-Zahl, wenn sie eine PA-Zahl ist.

Beweis. Es sei $p(X)$ ein rationales Polynom n -ten Grades mit nichtnegativen Koeffizienten, das α annulliert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p(0) \neq 0$, ansonsten spalten wir einen geeigneten Faktor X^k ab. Dann ist α auch eine Nullstelle des Polynoms $q(X) := (1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}) \cdot p(X)$. Das Polynom $q(X)$ ist offensichtlich rational vom Grad $2n - 1$ und besitzt, wie man sofort sieht, genau $2n$ positive Koeffizienten, *q. e. d.*

Literatur

- [1] Hungerford, Th.W.: *Algebra*. Springer Verlag, 1974.
- [2] Kuba, G.: *Algebraische Zahlen am Einheitskreis II: Nichtaustarierbare Einheitsvektoren*. *Wiss. Nachr.* **129**, 28–31 (2005).

Anschrift des Verfassers:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Gerald Kuba, Institut für Mathematik der Universität für Bodenkultur, 1180 Wien

Hypothesentests mit widersprüchlichen Folgerungen

Helmut Brunner

Eine umfangreiche Literatur warnt vor fehlerhaften Interpretationen von Daten („Lügen mit Statistik“). Deshalb ist es sinnvoll, im Unterricht die Grundlagen der beschreibenden Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vermitteln. In dieser Notiz soll mit einem Beispiel illustriert werden, dass auch bei einer statistisch korrekten Vorgehensweise die Interpretation der Daten von der Auswahl der Vergleichsmethode abhängen kann. Es sollte deshalb auch die Wahl der Methoden thematisiert werden.

Beispiel: Die Notengebung (z. B. in Mathematik) von zwei Schulen S1 und S2 wurde anhand von Stichproben mit je 100 Schülern verglichen. Tabelle 1 (grauer Bereich) gibt die beobachteten Häufigkeiten der Noten wieder. Die Nullhypothese besagt, dass die Unterschiede zufällig sind.

Tabelle 1. Vergleich zweier unabhängiger Stichproben.

Note:	1	2	3	4	5	m	s
S1:	15	20	30	20	15	3,00	1,27
S2:	20	30	33	10	7	2,54	1,13
theoretisch:	17,5	25,0	31,5	15,0	11,0		

Lehrbücher beschreiben zur Überprüfung dieser Hypothese meist den T-Test (Vergleich von Mittelwerten) und gelegentlich den Chi-Quadrat-Test (Vergleich von Häufigkeiten). Für Tabelle 1 liefern die Tests gegensätzliche Resultate: Mit dem Chi-Quadrat-Test kann kein signifikanter Unterschied festgestellt werden, mit dem T-Test hingegen schon. Der Grund für diese Diskrepanz ist, dass jeweils eine andere Modifikation der Nullhypothese überprüft wird.

1. Chi-Quadrat-Test

Der Chi-Quadrat-Test überprüft, ob die Noten in beiden Schulen mit den selben Wahrscheinlichkeiten p_1 für Note 1 bis p_5 für Note 5 auftreten.

Nachdem die Wahrscheinlichkeiten p_i unbekannt sind, werden sie aus den Daten geschätzt. Z. B. haben $35 = 15 + 20$ unter den 200 Schülern die Note 1, d. h. $p_1 = 35/200 = 17,5\%$, weswegen an beiden Schulen theoretisch je 17,5 Schüler mit der Note 1 erwartet werden. Analog erhält man die anderen Einträge in der Zeile „theoretisch“ der Tabelle 1.

Nun berechnet man die Abweichungen der beobachteten von der theoretischen Häufigkeit. Als Maßzahl dient das durch die theoretische Häufigkeit dividierte Quadrat der Abweichung. Die Testgröße χ^2 ist die Summe dieser Zahlen über die $5 \times 2 = 10$ Klassen „Note i in Schule j “: Sie ist (gerundet) $\chi^2 = 9,10$.

Um zu überprüfen, ob diese Testgröße auffällig hoch ist, wird sie mit der χ^2 -Verteilung mit $4 = (5 - 1) \times (2 - 1)$ Freiheitsgraden verglichen. (Die Reduktion der Freiheitsgrade ist eine Folge der Berechnung der theoretischen Häufigkeiten p_i aus den Daten.) Es stellt sich (z. B. mit Excel) heraus, dass in fast $6\% = \text{CHIVERT}(9,10; 4)$ der

zufälligen Ziehungen aus einer Grundgesamtheit ein χ^2 -Wert vorkommt, der größer als 9,10 ist. Mit 95% Sicherheit könnte ein Unterschied erst ab einem χ^2 -Wert von $9,49 = \text{CHIINV}(0,05; 4)$ behauptet werden.

2. T-Test

Der T-Test überprüft, ob der Notendurchschnitt in beiden Schulen gleich ist.

In Tabelle 1 sind die Notendurchschnitte $m_1 = 3,00$ und $m_2 = 2,54$ angeführt. Weiter berechnet man aus den Stichproben die erwartungstreuen Schätzwerte $s_1 = 1,27$ und $s_2 = 1,13$ der Standardabweichungen (Formel mit Division durch $n - 1 = 99$ statt durch n). Für den T-Test berechnet man aus s_1 und s_2 einen gemeinsamen Schätzwert s für die Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Die Testgröße ist

$$t = \frac{m_1 - m_2}{s \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = 2,70$$

Für die Frage, ob dieser t -Wert besonders groß ist, vergleicht man ihn mit der T-Verteilung mit $n_1 + n_2 - 2 = 198$ Freiheitsgraden. Es sind lediglich $0,4\% = \text{TVERT}(2,70; 198; 1)$ der theoretischen t -Werte größer als 2,70. Bereits ab einem t -Wert von $1,65 = \text{TINV}(0,1; 198)$ kann man mit 95% Sicherheit konstatieren, dass S1 einen schlechteren Notenschnitt hat, als S2 (entspricht einer zweiseitigen Grenze von 10%).

3. Schlussbemerkungen

1. Nachdem für S1 der Anteil der Schüler mit 4 oder 5 doppelt so hoch ist, als für S2, könnte man vermuten, dass sich die Schulen unterscheiden. Der Chi-Quadrat-Test zeigt jedoch keinen signifikanten Unterschied. Der Grund ist, dass der χ^2 -Wert nur die absolute Abweichung der Häufigkeit vom theoretischen Wert berücksichtigt, aber nicht das Vorzeichen. Wie man mit einer Simulation feststellen kann, schwanken die Häufigkeiten stark, weswegen erst hohe χ^2 -Werte signifikant sind.

2. Die Notendurchschnitte von S1 und S2 unterscheiden sich kaum ($m_1 - m_2 = 0,46$). Man wird daher keinen signifikanten Unterschied erwarten. Wie man jedoch an Zufallsstichproben erkennt, variieren die Mittelwerte generell nur wenig. Dadurch wird auch eine geringe Verschiebung signifikant, wie der T-Test beim Beispiel nachweist.

3. Der T-Test setzt voraus, dass die Stichproben aus Grundgesamtheiten mit gleicher Varianz stammen. Der F-Test verifiziert das für das Beispiel: Die Prüfgröße $F = s_1^2/s_2^2 = 1,26$ wird in $12,5\% = \text{FVERT}(1,26; 99; 99)$ der analogen Experimente übertroffen. Die 95%-Signifikanzgrenze wäre $\text{FINV}(0,05; 99; 99) = 1,39$.



Diffusionsvorgänge in Excel: Elementare Modelle

Norbert Brunner und Manfred Kühleitner

Wir betrachten ein liegendes Glasrohr wie in Abb. 1, das durch einen Schieber in zwei Bereiche geteilt wird. Zu Beginn wird das linke Ende mit Tee (graue Zelle Nr. 1) und der Rest mit klarem Wasser gefüllt. Wir interessieren uns, wie sich der Tee im Glasrohr verteilt, wenn man den Schieber entfernt. Überlässt man nach dem Öffnen des Schiebers das Rohr sich selbst, so werden sich die beiden Flüssigkeiten im Laufe der Zeit durch die zufällige Bewegung der Flüssigkeitsteilchen entlang des Glasrohres gleichmäßig verteilen. Wir werden die zeitliche Entwicklung dieses Vorganges auf elementare Weise in einem Tabellenkalkulationsprogramm (MS-Excel) berechnen.

1	2	...	9	10
---	---	-----	---	----

Start

Abbildung 1: Glasrohr zu Beginn der Diffusion und Einteilung in zehn gedachte Zellen.

1. Klassische Beschreibung: Konzentrationsausgleich

Um den Vorgang der Diffusion in Excel numerisch zu simulieren, wird das Rohr in einzelne kleine Zellen gleicher Länge unterteilt. Ebenso unterteilen wir die Zeit in diskrete Schritte. Welche Breite der Zellen und Dauer der Zeitschritte wir wählen, ist für das Modell gleichgültig. Wir legen daher in Excel eine Tabelle wie in Abb. 2 an.

	A	B	C	...	J	K
1	Zeit	Zelle Nr.				
2	t	1	2	...	9	10
3	0			...		
4	1			...		

Abbildung 2: Die Excel-Tabelle.

Nun werden wir zeilenweise in den Spalten B bis K, beginnend mit Zeile 3, die Konzentration (Dichte, relative Teilchenhäufigkeit) $c(i, t)$ von Tee in den einzelnen Zellen ($1 \leq i \leq 10$) zum Zeitpunkt t (Spalte A) angeben bzw. berechnen.

Zuerst müssen wir die Ausgangssituation zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreiben: Zu Beginn soll das Glasrohr nur im linken Feld Tee enthalten, d. h. $c(1, 0) = 1$ und $c(i, 0)$ für $i = 2, \dots, 10$. Wir schreiben daher in die Zelle B3 den Wert 1 und in die Zellen C3:K3 jeweils den Wert 0.

Nun berechnen wir nacheinander die Konzentrationen der einzelnen Zellen zum Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots, t + 1$. Dabei unterscheiden wir, ob es sich um eine Zelle am Rand oder im Inneren handelt.

Für die Zellen im Inneren nehmen wir an, dass die Teilchen im Rohr selber weitergeleitet werden und

nicht entweichen. Besonders einfach wird das Modell, wenn im betrachteten Zeitintervall zwischen t und $t + 1$ alle Teeteilchen in die unmittelbaren Nachbarzellen wandern, und zwar jeweils die Hälfte der Teilchen nach links, die andere Hälfte nach rechts. Somit berechnet sich die Teilchenzahl in der Zelle i zum nächsten Zeitpunkt $t + 1$ als der Mittelwert der Teilchenzahlen der Nachbarzellen $i \pm 1$ zum jetzigen Zeitpunkt t , d. h.:

$$c(i, t + 1) = \frac{1}{2} \cdot c(i - 1, t) + \frac{1}{2} \cdot c(i + 1, t).$$

Wir tragen somit in die Zelle C4 die Formel $= (B3 + D3) / 2$ ein und kopieren diese bis in die Zelle J4.

Für die Zellen am Rand nehmen wir an, dass das Glasrohr links und rechts isoliert ist. Am linken Ende ist dann die Annahme plausibel, dass sich ein Teilchen zwar nach rechts bewegen kann, aber statt einer Bewegung nach links liegen bleibt. Analog für den rechten Rand. Eine Randzelle 1 bzw. 10 erbt somit die Hälfte ihrer eigenen Teilchen und die Hälfte der Teilchen der Nachbarzelle 2 bzw. 9:

$$c(1, t + 1) = \frac{1}{2} c(1, t) + \frac{1}{2} c(2, t) \text{ und}$$

$$c(10, t + 1) = \frac{1}{2} c(9, t) + \frac{1}{2} c(10, t).$$

Wir geben daher in die Zelle B4 die Formel $= (B3 + C3) / 2$ ein und in Zelle K4 die Formel $= (J3 + K3) / 2$.

Damit ist die Hauptarbeit zur Modellierung der Diffusion erledigt. Wir markieren den Bereich A4:K4 und kopieren ihn nach unten bis in die Zeile 103 (d. h.: $t = 100$). Damit haben wir die zeitliche Entwicklung der Teeteilchenkonzentration in den einzelnen Zellen gewonnen.

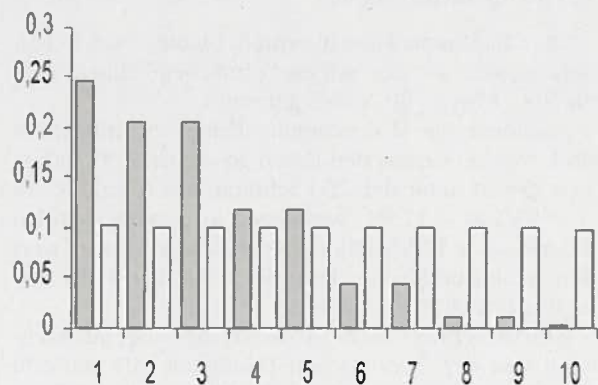


Abbildung 3: Konzentrationen für $t = 10$ und 100 (linke graue bzw. rechte weiße Säule).

Abschließend können wir Teile dieses Bereichs markieren und ein Säulendiagramm einfügen, um den zeitlichen Verlauf der relativen Teilchenhäufigkeiten auch grafisch darzustellen. In Abb. 3 sind die Konzentrationen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten abgebildet: Es ist zu erkennen, wie die Teilchen in das Glasrohr wandern. Die ursprünglich in der ersten Zelle konzentrier-

ten Teeteilchen haben sich im Laufe der Zeit auf zehn Zellen gleichmäßig aufgeteilt. Obwohl die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen weitergeht, ändert sich der erreichte Zustand $c_i = 0,1$ nicht mehr. Die Diffusion führt somit zu einem Gleichgewichtszustand (Konzentrationsausgleich über das gesamte Rohr).

2. Bemerkungen

1. Varianten. Im Tabellenblatt haben wir angenommen, dass alle Teilchen einer inneren Zelle die Zelle verlassen und gleichmäßig nach links bzw. rechts in die Nachbarzellen wandern. Stattdessen kann man auch annehmen, dass ein Teil der Teilchen liegen bleibt oder dass bei der Wanderung eine Richtung bevorzugt ist oder überhaupt nur die Diffusion in eine Richtung möglich ist (Osmose). Diese Vorgänge sind durch Veränderungen der Formeln für die inneren Zellen zu modellieren. Für eine Zelle am linken oder rechten Rand lassen sich unterschiedliche Randbedingungen formulieren. Auch sie beschreiben nahe liegende physikalische Sachverhalte (z. B. in Tee getauchtes offenes Glasrohr).

2. Animation. Die grafische Veranschaulichung ist noch nicht zufrieden stellend. Mit ein klein wenig mehr Aufwand können wir die zeitliche Entwicklung der Diffusion, in einem Diagramm dargestellt, als Film in Zeitlupe (1 Sekunde pro Zeitschritt) ablaufen lassen. Dazu müssen wir aber ein Makro schreiben.

Zur Vorbereitung zeichnen wir in einem neuen Tabellenblatt ein Diagramm der Ausgangssituation zum Zeitpunkt $t = 0$. Als Daten auf der x -Achse wählen wir den Bereich B2:K2; als Daten auf der y -Achse wählen wir den Bereich B3:K3. Anschließend formatieren wir die y -Achse im Diagramm, indem wir als feste Grenzen das Minimum 0 und das Maximum 1 vorgeben.

Jetzt starten wir mit der Tastenkombination Alt+F11 den Makroeditor und fügen ein neues Modul mit dem untenstehenden Code ein. Danach gehen wir auf das Tabellenblatt, welches das Diagramm enthält, und starten das Makro.

```
Sub MakroFilm()
Dim k As Integer
Dim cht As Chart
Dim rng As Range
Set cht = ActiveSheet.ChartObjects(1).Chart
With Worksheets(1)
For k = 3 To 103
Set rng = .Range(.Cells(k, 2), .Cells(k, 11))
cht.SeriesCollection(1).Values = rng
Application.Wait (Now + TimeValue("0:00:01"))
Next k
End With
End Sub
```

3. Statistische Beschreibung: Zufallsbewegung einzelner Teilchen

Das Modell von Abschnitt 1 beschäftigt sich mit einem großen Kollektiv von Teilchen, bei dem das Verhalten der einzelnen Teilchen vernachlässigt wird. Zum Abschluss wollen wir noch die Bewegungen einzelner Teilchen im Glasrohr verfolgen. Zu ihrer Beschreibung unterteilen wir das Glasrohr wieder in zehn Zellen (Abb. 1). Jedes Teilchen trifft zu jedem Zeitschritt die

zufällige Wahl, ob es ins linke Feld oder ins rechte Feld wandert. Die Bewegung ist also ein Zufallspfad.

	A	B	C
1	t	0	=1+B1
2	x	1	=MIN(10;MAX(1;B2+ WENN(ZUFALLSZAHL() <0,5;-1;1)))

Abbildung 4: Excel-Tabelle für einen Zufallspfad.¹

Wir bezeichnen mit x_t die Position des Teilchens zum Zeitpunkt t . Es startet zum Zeitpunkt $t = 0$ in Zelle 1 (d. h. $x_0 = 1$). Wenn sich das Teilchen zum Zeitpunkt t in einem inneren Feld befindet, dann ist die Position im nächsten Zeitpunkt $x_{t+1} = x_t + Z$ mit einer Zufallszahl $Z = \pm 1$, wobei beide Werte gleich wahrscheinlich sind. Am Rand bleibt das Teilchen liegen, wenn $x_t = 1$ und $Z = -1$ bzw. $x_t = 10$ und $Z = +1$. Dieses Bewegungsverhalten kann man in folgender Formel zusammenfassen: $x_{t+1} = \min\{10, \max\{1, x_t + Z\}\}$ mit $Z = \pm 1$ und $x_0 = 1$.

Wir legen nun ein Tabellenblatt wie in Abb. 4 an: In Spalte A steht die Beschriftung, in Zeile 1 die Zeit und in Zeile 2 die Position. In C2 steht die obige Formel. Dabei wird die diskrete Zufallszahl Z mit den zwei Werten ± 1 durch die zwischen 0 und 1 gleichverteilte Zufallszahl von Excel wie folgt berechnet:

$Z = \text{WENN}(\text{ZUFALLSZAHL}() < 0,5; -1; 1)$

Schließlich kopieren wir die Formeln in C1:C2 bis in Spalte CX (entspricht $t = 100$).

Um die zufällige Bewegung einzelner Teilchen für 100 Züge zu verfolgen, markieren wir die ersten beiden Zeilen und erstellen ein Diagramm Punkt XY. Durch Drücken der Taste F9 wird die Tabelle mit neuen Zufallszahlen berechnet: Es entsteht eine andere Zick-Zack-Linie.

	A	B
105	Pos.	Relative Häufigkeit
106	1	=HÄUFIGKEIT(CX2: CX101;A2:A11)/100

Abbildung 5: Relative Häufigkeit der Zellbelegungen.

Wir betrachten als nächstes die Bewegung für ein kleines Kollektiv von 100 Teilchen, die alle im linken Feld starten. Für dieses Kollektiv berechnen wir die

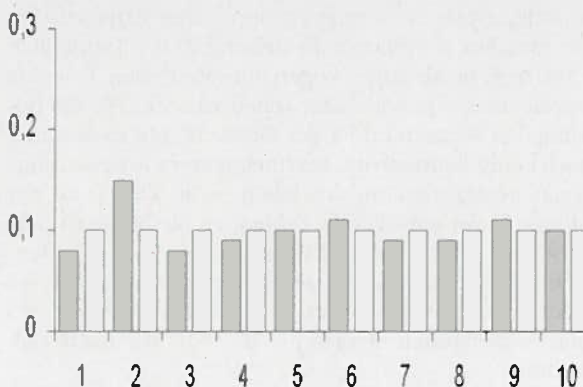


Abbildung 6: Teilchendichte von 100 Teilchen für $t = 100$ (graue Säule) und stationäre Dichte.

¹ Dieses Modell der Diffusion geht zurück auf Einstein, A. (1905): Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, S. 549-560.

Teilchendichten c_i zum Zeitpunkt $t = 100$. Wir kopieren dazu die zweite Zeile bis in Zeile 101. Anschließend legen wir eine Häufigkeitstabelle wie in Abb. 5 an. Wir schreiben in A106:A115 die Feldnummern $i = 1$ bis 10 an. Wir markieren dann B106:B115, tragen die in B106 abgebildete Formel ein und drücken gleichzeitig die Tasten STRG+UMSCHALTEN+ENTER, weil es sich um eine Array-Funktion handelt (Abb. 6).

Das Ergebnis der kollektiven Teilchenbewegung sieht man in Abb.6. Durch Drücken der Taste F9 kön-

nen wir die Ergebnisse von unterschiedlichen Bewegungen sehen und wegen der geringen Teilchenzahl deutliche Fluktuationen der Teilchendichten wahrnehmen.

Anschrift der Verfasser:

a.o. Univ.-Prof. Dr. Norbert Brunner und a.o. Univ.-Prof. Dr. Manfred Kühleitner, Institut für Mathematik, DIB, BOKU, Gregor-Mendel-Straße 33, 1180 Wien, E-Mail: norbert.brunner@boku.ac.at, manfred.kuehleitner@boku.ac.at

Darf man 0 mit 0 potenzieren?

Gerald Kuba

Wohl jeder, der Mathematik lehrt, ist irgendwann mit der Frage nach dem Wert der Größe 0^0 konfrontiert. Auf den meisten Taschenrechnern erscheint nach der Eingabe „0 hoch 0“ die Fehlermeldung *Error* im Display. Bei besseren Modellen ist das Ergebnis gleich 1. In den meisten Lehrbüchern wird $0^0 = 1$ definiert und gelegentlich als praktische (etwa $0! = 1$ vergleichbare) Konvention bezeichnet. Andererseits ist bei den Grenzwertberechnungen 0^0 genauso eine *unbestimmte Größe* wie $\frac{0}{0}$ oder $0 \cdot \infty$ oder 1^∞ o. ä. In manchen Lehrbüchern wird daher 0^0 ausdrücklich *nicht definiert*, wobei dann aber meist und inkonsequent ein *leeres Produkt beliebiger Zahlen* gleich 1 gesetzt wird und ferner immer Stellen zu finden sind, wo implizit die Gleichung $0^0 = 1$ benutzt wird.

Der arithmetische Zugang

Vom arithmetischen Standpunkt aus gibt es höchstens zwei Möglichkeiten, 0^0 sinnvoll, d. h. mit den elementaren Rechenregeln kompatibel zu definieren: Entweder setzt man $0^0 = 1$ oder $0^0 = 0$. Die letztere, ungewöhnliche Variante kann als extrem *basislastig* angesehen werden. Sie extrapoliert die für alle $x > 0$ gültige Beziehung $0^x = 0$. Die Festlegung $0^0 = 1$ ist nur vordergründig *exponentenlastig* im Sinne einer Extrapolation der für alle $x > 0$ gültigen Beziehung $x^0 = 1$. Tatsächlich kann man sie als ausgewogen mit sehr breiter Toleranz bezeichnen, wie wir später sehen werden. Für die potentiellen Werte 0 und 1 der Größe 0^0 gibt es arithmetisch keine Alternativen. Rechnet man – wie neuerdings sogar gesetzlich vorgeschrieben – die Zahl 0 zu der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen, so bleibt die für alle positiven Zahlen gültige Rechenregel $(a^b)^c = a^{bc}$ offensichtlich nur dann auf \mathbb{N} gültig, wenn entweder $0^0 = 1$ oder $0^0 = 0$ gilt. (So würde z. B. die Festlegung $0^0 = 3$ den Widerspruch $9 = (0^0)^2 = 0^{0 \cdot 2} = 0^0 = 3$ nach sich ziehen.)

Der kombinatorische Zugang

Um sich das Leben nicht unnötig schwer zu machen, legt man als Konventionen $0! = 1$ und $\binom{a}{0} = 1$ fest. In diesem Zusammenhang ist die Festlegung $0^0 = 1$

zwangsläufig. So impliziert der binomische Lehrsatz die Gleichung $(a+b)^0 = a^0 b^0$, was mit $a = 0$ und $b > 0$ wegen $b^0 = 1$ automatisch $0^0 = 1$ impliziert.

Polynome und Potenzreihen

Die Exponentialfunktion wird standardgemäß als überall konvergierende Potenzreihe definiert:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bei der Auswertung $e^0 = 1$ kommt man nicht daran vorbei, die Identität $0^0 = 1$ zu verwenden. Gleiches gilt natürlich bereits bei der Auswertung von Polynomen. Ist $p(X)$ etwa ein rationales Polynom in einer Unbestimmten, das in der Standardform

$$p(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

angeschrieben wird, so ist in der Auswertung $p(0) = a_0$ die Gleichung $0^0 = 1$ involviert.

Die analytische Unbestimmtheit

Ersetzt man im Ausdruck a^b die Basis a durch irgendeine Nullfolge $(1/n^\alpha)$ und den Exponenten b durch irgendeine Nullfolge $(1/n^\beta)$, so strebt die Folge a^b mit $n \rightarrow \infty$ immer gegen 1. In diesem Sinn ist die Festlegung $0^0 = 1$ *ausgewogen mit sehr breiter Toleranz*. So strebt etwa a^b gegen 1 auch bei der Wahl der sehr schnell fallenden Nullfolge $a = n^{-1000000000000}$ und der sehr langsam fallenden Nullfolge $a = n^{-0.000000000001}$. (Mehr noch: Zu beliebig großem N kann man $\alpha, \beta > 0$ so wählen, daß zwar $(1/n^\alpha)^{1/n^\beta} < 1/N$ für alle $n \leq N$ gilt, aber schließlich doch $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^\alpha)^{1/n^\beta} = 1$ gilt.) Trotzdem ist 0^0 eine *unbestimmte Größe*: Die Potenz a^b strebt für $a = 1/q^n$ ($q > 0$) und $b = 1/n$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen $1/q$. (Tatsächlich ist diese Potenz a^b identisch mit $1/q$.) Somit gibt es für $0 < \omega \leq 1$ stets positive, monoton fallende Nullfolgen a_n und b_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \omega$. Die gibt es sogar für $\omega = 0$, man hat etwa $(1/n^n)^{1/n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man hat aber bereits wieder $(1/n^n)^{1/n^{1+\epsilon}} \rightarrow 1$ für beliebig kleines $\epsilon > 0$, obwohl der Quotient $n^{1+\epsilon}/n^n$ *exponen-*

tiell, also viel schneller als jeder Quotient n^β/n^α ($\beta < \alpha$) gegen 0 strebt. (Für $0 < \epsilon \leq 1$ gilt stets $n^{1+\epsilon}/n^n < 8e^{-n}$.)

Läßt man auch *negative* Nullfolgen (a_n) und (b_n) zu, dann gibt es (unter Berücksichtigung der Wohldefiniertheit der reellen Potenzen $x^{p/q}$ für $x < 0$ und gekürzte Brüche $p/q \neq 0$ mit *ungeradem* Nenner) zu jedem $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nirgends verschwindende Nullfolgen a_n und b_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \omega$.

Im Vergleich mit der extrapolierten „Identität“ $1^\infty = 1$ ist $0^0 = 1$ wesentlich ausgewogener. Sind nämlich (x_n) und (y_n) positive und unbeschränkt wachsende Folgen, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/x_n)^{y_n} = 1$ genau dann, wenn (x_n) schneller wächst als (y_n) , d. h. wenn (y_n/x_n) eine Nullfolge ist. (Die charmante Identität $1^\infty = e$ ist somit hochgradig instabil verglichen mit $1^\infty = 1$.) Dagegen gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/x_n)^{1/y_n} = 1$ genau dann, wenn $(\ln x_n)$ langsamer wächst als (y_n) , d. h. wenn $((\ln x_n)/y_n)$ eine Nullfolge ist.

Die mengentheoretische Definition

Vom mengentheoretischen Standpunkt aus ist $0^0 = 1$ keine Konvention sondern ein *beweisbarer Satz*. Das-

selbe gilt auch für $0! = 1$ und $\binom{n}{0} = 1$. Letzteres liegt auf der Hand: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Somit gilt $\binom{n}{0} = 1$,

weil eine Menge mit n Elementen genau *eine* Teilmenge mit *null* Elementen hat: die leere Menge \emptyset .

Für Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ ist n^m *per definitionem* die Anzahl aller Abbildungen von einer Menge mit genau m Elementen in eine Menge mit genau n Elementen. Deswegen gilt $n^0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und insbesondere $0^0 = 1$, weil es genau eine Abbildung von \emptyset in eine beliebige Menge Y gibt. Eine Abbildung von X nach Y ist

nämlich *per definitionem* jede Teilmenge F von $X \times Y$ mit der Zuordnungseigenschaft, daß es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in F$. Im Falle $X = \emptyset$ ist wegen $\emptyset \times Y = \emptyset$ die Menge $F = \emptyset$ die einzige Teilmenge von $X \times Y$ und $F = \emptyset$ ist auch eine Abbildung von X nach Y , da die Zuordnungsvorschrift mangels Elementen in der Menge X automatisch erfüllt ist. Somit ist $F = \emptyset$ die einzige Abbildung von \emptyset nach Y . (Ist auch Y leer, so bekommt man nicht nur $0^0 = 1$, sondern auch $0! = 1$, da dann $F = \emptyset$ die einzige Permutation auf \emptyset , d. h. die einzige bijektive Abbildung von $X = \emptyset$ nach $Y = \emptyset$ ist.)

Aufgaben

Walther Janous

Aufgabe Nr. 109.

a) $p(n, k)$ sei die Anzahl der Permutationen der Ordnung n , bei denen genau k Elemente ihren Platz behalten.

Man berechne $p(7, k)$ für $k = 0, 1, \dots, 7$ und man zeige, dass $p(n, n-2)$ für $n \geq 2$ ein Binomialkoeffizient ist.

b) Für $p(n, 0)$ gibt es keine geschlossene Lösung, doch es existiert eine Summenform.

Man beweise die Darstellung $p(n, 0) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Man zeige mit Hilfe dieser Formel, dass es für die Folge $\{p(n, 0), n \geq 1\}$ eine einfache Rekursion gibt und dass immer $|p(n, 0) - p(n, 1)| = 1$ gilt.

Weiters gilt $p(n, k) = \binom{n}{k} p(n-k, 0)$.

c) Unter der Struktur einer Permutation verstehen wir ihre Aufteilung in einzelne Zyklen. Mit $s(z_1, z_2, \dots, z_m)$ bezeichnen wir die Anzahl der Permutationen, die aus Zyklen der Längen z_1, z_2, \dots und z_m aufgebaut werden ($m \geq 1$). In einer Struktur können Zykluslängen mehrfach vorkommen und ihre Reihenfolge spielt keine Rolle. Es muss nur $\sum_{i=1}^m z_i = n$ gelten.

Beispiele für $n = 4$ sind:

$s(2, 2) = 3$, nämlich 2143, 3412, 4321

$s(4) = 6$, nämlich 2341, 2413, 3142, 3421, 4123, 4312

$s(1, 1, 1, 1) = 1$, nämlich 1234.

Man bestimme alle möglichen Strukturen der Permutationen zur Ordnung 7 und berechne deren Anzahlen.

(Kurt WAGNER, Klagenfurt, Altredakteur der Wiss. Nachr.)

d)* [„Open-end-Teil“] Man untersuche das „Strukturproblem“ auch für Permutationen anderer Ordnungen. (W. J.)

Aufgabe Nr. 110.

a) Es soll $x > 1$ eine beliebige reelle Zahl sein.

Man bestimme den Wert der doppelt unendlichen Reihe

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$

b)* [„Open-end-Teil“] Man betrachte „analoge“ Reihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n(n)} \cdot f(x^{n(n)})$, in denen z. B. $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ eine streng monotone Funktion ist, die $g(n+1) - g(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllt. (W. J.)

Schließlich noch das Quicky **Q16**.

Gibt es zwei Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass die zwei Bedingungen $f(g(x)) = x^2$ und $g(f(x)) = x^3$ für alle reellen Argumente x erfüllt sind? (W. J.)



Einsendeschluss für Lösungen (**bitte in übersichtlicher und gut lesbarer Form – unbedingt getrennt nach Aufgaben [!]**) 30. März 2007.

Zuschriften erbeten an Walther Janous, WRG Ursulinen, Fürstenweg 86, 6020 Innsbruck (oder Schneeberggasse 169, 6020 Innsbruck) bzw. **WORD-lesbare** Dokumente an walther.janous@tirol.com. [Bitte dabei NUR den Formel-Editor 3.0 zu verwenden!]

Aufgabenvorschläge (samt Lösungen), Anregungen, Kritik usw. sind jederzeit willkommen.

Leider ist durch ein „unerwartetes Verhalten“ meines neuen PC (ich bezeichne es als GAU-ähnlich) ein beträchtlicher Datenverlust zustande gekommen. Deshalb war es mir unmöglich die Aufgabentexte wie üblich im Voraus zu verschicken. Ich bitte um Entschuldigung für den Termindruck, der sich dadurch (und aufgrund von Verzögerungen des Erscheinens der WN) ergab, und bitte alle Interessenten für die Vorauszusendung mir noch einmal ihre E-Mail-Adressen zu schicken. (Betreffzeile bitte: Aufgabentexte WN). Ich hoffe auch, dass ich niemanden übersehen habe, der zu den nun folgenden Aufgaben einen Lösungsbeitrag geschickt hat.

Lösung der zwei Aufgaben aus WN 128 (Juli/August 2005), p. 35.

Fibonacci lässt grüßen ...

Aufgabe Nr. 103.

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ betrachten wir folgende Fragestellung $F_2(n)$: Welche rationale Quadratzahl ergibt sowohl nach ihrer Vergrößerung als auch nach ihrer Verkleinerung um n wieder eine rationale Quadratzahl?

a) Man zeige, dass es unendlich viele Werte von n gibt, für die $F_2(n)$ wenigstens eine Lösung besitzt. Zu diesen Werten gehört insbesondere $n = 5$.

b) Man untersuche, ob es Werte von n gibt, für die $F_2(n)$ keine Lösung besitzt.

c) „Open-end-Teil“ Man betrachte analoge Fragestellungen für $F_k(n)$, in denen an Stelle der rationalen Quadrate k -te Potenzen von rationalen Zahlen auftreten ($k \geq 3$). (Johanna TIBAUDO, Innsbruck,

Gerd BARON, TU Wien,

Eleonore FABER, Univ. Innsbruck, und W. J.)

Zuschriften sind eingegangen von:

Gerd BARON (TU Wien), Johann BRANDSTETTER (Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten), Eleonore FABER (Univ. Innsbruck [Studentin]), Franz GAMMER (BG 19 – Billrothstraße, Wien), Herbert HAMETNER (Gallneukirchen), W. J., Gerhard KIRCHNER (Univ. Innsbruck), Wolfgang KIRSCHENHOFER (Herzogenburg), Kurt SCHOISSWOHL (Innsbruck), Johanna TIBAUDO (Innsbruck) und Otto VOGL (Linz).

Ausgangspunkt dieser Aufgabe war die Fragestellung $F_2(5)$, die Leonardo von Pisa im Jahr 1225 im Rahmen eines öffentlichen Mathematikturniers in Pisa (in Anwesenheit von Friedrich II, Kaiser des Römischen Reichs Deutscher Nation) glänzend löste und dadurch seine mathematischen Fähigkeiten unter Beweis stellte:

Welche rationale Quadratzahl gibt nach ihrer Vergrößerung wie nach ihrer Verkleinerung um 5 wieder eine rationale Quadratzahl?

a) Wenn die ganzen Zahlen x , y und z pythagoreische Tripel sind, d. h. $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, dann gelten (wie man durch unmittelbares Ausrechnen sieht)

$$z^2 - 2 \cdot x \cdot y = (x - y)^2 \quad (1)$$

und

$$z^2 + 2 \cdot x \cdot y = (x + y)^2 \quad (2)$$

Wegen der Darstellungen $x = 2 \cdot u \cdot v$, $y = u^2 - v^2$ und $z = u^2 + v^2$ mit ganzen Zahlen u und v ergeben sich mit (1) und (2) die zwei Identitäten

$$(u^2 + v^2)^2 - 4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2) = (2 \cdot u \cdot v - u^2 + v^2)^2 \quad (3)$$

$$(u^2 + v^2)^2 + 4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2) = (2 \cdot u \cdot v + u^2 - v^2)^2 \quad (4)$$

Zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl $n \geq 1$ versuchen wir nun (sofern dies möglich ist) die rationalen (oder ganzen Zahlen) $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ derart zu bestimmen, dass

$$4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2) = n \cdot w^2 \quad (5)$$

erfüllt ist.

Wegen (3) und (4) haben wir dann

$$\left(\frac{u^2 + v^2}{w}\right) - n = \left(\frac{2 \cdot u \cdot v - u^2 + v^2}{w}\right)^2 \quad (6)$$

und

$$\left(\frac{u^2 + v^2}{w}\right) + n = \left(\frac{2 \cdot u \cdot v + u^2 - v^2}{w}\right)^2 \quad (7)$$

• Für $n = 5$ in Gleichung (5) sind u , v mit $4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2) = 5 \cdot w^2$ zu bestimmen.

$u = 5$ und $v = 4$ führen auf $w = 12$. Mit (6) und (7) erhält man

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Deshalb besitzt $F_2(5)$ zumindest eine Lösung.

• Setzt man in Gleichung (5) $w = 1$, so ergibt sich $n = 4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2)$.

Daher erhält man für jedes Paar (u, v) von positiven ganzen Zahlen mit $u > v$ eine natürliche Zahl $n = 4 \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2)$, für die (6) und (7) gelten.

Das bedeutet, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die $F_2(n)$ wenigstens eine Lösung besitzt.

Beispiele dazu sind:

i) $n = 24$ ($u = 2, v = 1$): $5^2 - 24 = 1^2$ und $5^2 + 24 = 7^2$

ii) $n = 120$ ($u = 3, v = 2$): $13^2 - 120 = 7^2$ und $13^2 + 120 = 17^2$

Aber auch $F_2(15)$ besitzt wenigstens eine Lösung, wie

$$u = 4, v = 1, w = 4 \quad \text{und} \quad \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 15 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{17}{4}\right)^2 + 15 = \left(\frac{23}{4}\right)^2 \quad \text{zeigen.}$$

b) Es seien $n \geq 1$ eine natürliche und r, s, t rationale Zahlen, für die $r^2 + n = s^2$ und $r^2 - n = t^2$ gelten, wobei $0 < r < s$ und $0 < |t| < r$ sind.

Durch Subtraktion bzw. Addition der zwei Gleichungen ergeben sich

$$s^2 - t^2 = 2 \cdot n \quad (8)$$

$$\text{und } s^2 + t^2 = 2 \cdot r^2, \text{ d. h. mit } x := \frac{s}{r} \text{ und } y := \frac{t}{r}:$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (9)$$

Dabei müssen $x \neq 1$, $y \neq 1$ und $x \neq y$ sein.

Wenn man in (9) $x = 1+w$ und $y = 1+k \cdot w$ einsetzt, wobei $w \neq 0$, $k \neq 0$ und $k \neq 1$ sind, so erhält man

$$w = -\frac{2 \cdot (k+1)}{k^2+1} \text{ und daher } x = \frac{s}{r} = \frac{k^2-2 \cdot k-1}{k^2+1} \text{ und}$$

$$y = \frac{t}{r} = \frac{-k^2-2 \cdot k+1}{k^2+1}.$$

Mit (8) erhält man daraus $r = \frac{k^2+1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{k \cdot (1-k^2)}}$ und

$$\text{damit schließlich } s = \frac{k^2-2 \cdot k-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{k \cdot (1-k^2)}} \text{ und}$$

$$t = \frac{-k^2-2 \cdot k+1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{k \cdot (1-k^2)}}.$$

r , s und t sind genau dann rationale Zahlen, wenn $\frac{n}{k \cdot (1-k^2)} = z^2$ für eine rationale Zahl z gilt.

Wir zeigen nun, dass diese Bedingung für $n = 1$ mit rationalen Zahlen k und z unerfüllbar ist, indem wir (indirekt) nachweisen, dass die Gleichung $k \cdot (1-k^2) = \frac{1}{z^2}$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Angenommen, $k = \frac{p}{q}$ und $\frac{1}{z} = \frac{u}{v}$ seien Lösungen, wobei $\text{ggT}(p, q) = \text{ggT}(u, v) = 1$, $u \neq 0$, $p > 0$ und $p \neq |q|$ sind.

Dann müsste gelten:

$$\frac{p \cdot (q^2 - p^2)}{q^3} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Weil die zwei vorkommenden Brüche gekürzt sind, folgen

$$p \cdot (q^2 - p^2) = \varepsilon \cdot u^2 \quad (10)$$

und

$$q^3 = \varepsilon \cdot v^2 \quad (11)$$

mit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Aus (10) ergibt sich wegen $\text{ggT}(p, q^2 - p^2) = 1$, dass p eine Quadratzahl, d. h. $p = \alpha^2$, ist.

Aus (11) schließt man (über die Primfaktorzerlegung), dass q das ε -fache einer Quadratzahl, d. h. $q = \varepsilon \cdot \alpha^2$, ist.

(10) zeigt schließlich, dass $\beta^4 - \alpha^4 = \varepsilon \cdot \frac{u^2}{p}$, d. h. eine Gleichung des Typs

$$x^4 - y^4 = z^2 \quad (12)$$

erfüllt sein müsste.

Mit der *Methode des unendlichen Abstiegs* hat aber schon Fermat gezeigt, dass die diophantische Gleichung (12) unter der (bei uns zutreffenden) Bedingung $\text{ggT}(x, y) = 1$ nur die trivialen Lösungen (x, y, z) mit $x^2 = y^2 = 1$ oder $x^2 = 1$, $y = 0$ besitzt. (Vgl. etwa [5], p. 17 f.)

Deshalb müsste – im Widerspruch zur Voraussetzung – $k \in \{-1, 0, 1\}$ sein und $F_2(1)$ besitzt, wie behauptet, keine Lösung.

Man überlegt auch unschwer, dass $F_2(m^2)$ keine Lösung besitzt, wenn m eine positive ganze Zahl ist.

Im Folgenden soll eine Lösung der Teile **a)** und **b)** „vom höheren Standpunkt“ vorgestellt werden (*Eleonore Faber*).

Sie läuft über elliptische Kurven und verwendet die spezielle Kurve $E: y^2 = x^3 - n^2x$.

Dazu benötigen wir zuerst einige Eigenschaften von elliptischen Kurven:

Definition („Elliptische Kurve“). Es sei K ein Körper und \bar{K} der algebraische Abschluss von K . Weiters soll $f(x) \in K[x]$ ein Polynom dritten Grades mit verschiedenen Nullstellen in \bar{K} sein. Dann heißt

$E: y^2 - f(x) = 0$ *elliptische Kurve* über K .

(Bei uns gilt im Weiteren $K = Q$ und wir betrachten $E_Q =$ Menge der rationalen Punkte auf E .)

• *Satz 1* („Addition von rationalen Punkten“). Es sei $E: y^2 - f(x) = 0$ eine elliptische Kurve über Q mit einem Punkt $e = \infty$ (unendlich ferner Punkt). Dann wird E_Q mit der folgenden Verknüpfung zu einer abelschen Gruppe (mit neutralem Element e):

Seien $p, q \in E_Q$, $p = (x_0, y_0)$, $q = (z, w)$. $y = kx + d$ soll für $p \neq q$ die Gerade durch p und q mit $k := \frac{w - y_0}{z - x_0}$ bzw. für $p = q$ die Tangente an E sein.

Man setzt nun $u := k^2 - a - x_0 - z$, und $v := ku + d$ und definiert damit $p + q := (u, -v)$.

(Geometrisch bedeutet diese Operation: Man bestimmt zuerst die Sekante durch p und q (bzw. die Tangente durch p , falls $p = q$), berechnet dann den Schnittpunkt mit E und erhält schließlich durch Spiegelung dieses Schnittpunktes an der x -Achse den Punkt $p + q$).

Beweis. Neutrales Element: e nach Konstruktion.

Kommutativität und Assoziativität: einfach in die Formeln einsetzen und nachrechnen.

(Das Ganze kann man auch geometrisch beweisen, siehe dazu z. B. [1].)

• *Definition* („Kongruenzzahl“). $a \in Q$ heißt *Kongruenzzahl*, wenn a der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks im R^2 mit rationalen Seitenlängen ist, d. h. es existieren $x, y, z \in Q_+$ mit $x^2 + y^2 = z^2$ und $xy = 2a$.

• *Definition* („Pythagoreisches Tripel“). $x, y, z \in N$ (bzw. Q_+) bilden genau dann ein pythagoreisches Tripel, wenn $x^2 + y^2 = z^2$. (Das Tripel heißt reduziert, falls $\text{ggT}(x, y, z) = 1$.)

Pythagoreische Tripel kann man mit Hilfe der sog. *indischen Formeln* konstruieren:

Dafür wählt man die Zahlen $a, b \in N$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ und $a > b$, die nicht beide ungerade sind. Dann durchlaufen $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ (oder $x \rightarrow y, y \rightarrow x$) alle reduzierten pythagoreischen Tripel.

Dadurch kann man also unendlich viele derartige Tripel finden, insbesondere auch unendlich viele Kongruenzzahlen!

Nach diesen Vorbereitungen folgt die Lösung der Aufgabe.

• Der folgende Satz liefert eine *Beziehung zwischen den pythagoreischen Tripeln und $F_2(n)$* :

Satz 2. Es sei $n \in N$ quadratfrei. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Mengen

$$A_n := \{(x, y, z) \in Q^3; x^2 + y^2 = z^2, xy = 2n\} \text{ und}$$

$$B_n := \{x \in Q; x \text{ Quadrat}, x \pm n \text{ Quadrat}\}.$$

(D. h.: gewisse pythagoreische Tripel \leftrightarrow alle rationalen Zahlen, die $F_2(n)$ erfüllen.)

Beweis. Wir definieren die Abbildungen $f: A_n \rightarrow B_n$ durch $(x, y, z) \rightarrow \frac{z}{4}$ und $g: B_n \rightarrow A_n$ durch

$$x \rightarrow (\sqrt{x+n} - \sqrt{x-n}, \sqrt{x+n} + \sqrt{x-n}, 2\sqrt{x}).$$

f und g sind wohldefiniert.



Einsetzen liefert $gof = fog = Id$, also $g = f^{-1}$ und damit ist f die gesuchte Bijektion.

• Jetzt stellen wir einen Zusammenhang zwischen der Menge A_n und elliptischen Kurven her. (Man erhält ihn durch einige Rechnungen mit pythagoreischen Tripeln.)

Satz 3. Es sollen $(x, y) \in Q^2$ und $E: y^2 = x^3 - n^2x$ sein. Dann erhält man durch die Vorschrift

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{z^2}{4}, \frac{1}{8}(x^2 - y^2)z \right) \text{ eine Abbildung}$$

$\gamma: A_n \rightarrow E_Q$.

Es sei $E'_Q \subseteq E_Q$ die Menge der $(x, y) \in E_Q$, für die x ein Quadrat mit geradem Nenner ist.

Dann ist die Abbildung $\gamma: A_n \rightarrow E'_Q$ wohldefiniert und surjektiv.

Umgekehrt ist $\lambda: E'_Q \rightarrow A_n$;

$$(x, \pm y) \rightarrow (\sqrt{x+n} - \sqrt{x-n}, \sqrt{x+n} + \sqrt{x-n}, 2\sqrt{x}).$$

Beweis. Es seien $(x, y) \in E'_Q$, $u := \sqrt{x} \in Q_+$ und $t :=$ Nenner von u , also $t \in \mathbb{Z}$. Mit $v := \frac{y}{u}$ ergibt sich $v^2 = \frac{y^2}{x} = x^2 - n$. Da (o.B.d.A.) $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir ein reduziertes pythagoreisches Tripel (t^2v, t^3n, t^2x) mit $t^2n \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben nun $t^2n = 2rs$, $t^2v = r^2 - s^2$, $t^2x = r^2 + s^2$ mit r, s aus Q_+ . Dann liegt $\left(\frac{2r}{t}, \frac{2s}{t}, 2u\right)$ in A_n und wird unter γ auf (x, y) abgebildet.

Den Rest nachzurechnen bleibe dem Leser als Übungsaufgabe.

• Man kann sogar zeigen, dass $E'_Q = 2E_Q := \{p \in E_Q; \exists q \in E_Q: p = 2q\}$ bzgl. der oben definierten Addition gilt. (Der Beweis ist etwas kompliziert, man vergleiche etwa [2], I, Prop. 19.)

• Die Idee ist nun: Wenn man einen Punkt p unendlicher Ordnung in E_Q finden kann (d. h. für kein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $kp = e$), so erhält man durch Berechnung von $2p, 4p, 8p, \dots$ unendlich viele rationale Punkte in $2E_Q$. Durch $f \circ \lambda(p)$ erhält man dann unendlich viele x , die $F_2(n)$ erfüllen. Die Frage lautet also: Für welche n besitzt E_Q einen Punkt unendlicher Ordnung?

Die recht einfach klingende Antwort ist

Satz 4. Seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ quadratfrei und E_Q wie oben.

Dann gilt: n ist Kongruenzzahl $\Leftrightarrow E_Q$ besitzt einen Punkt unendlicher Ordnung.

(Für den Beweis benötigt man, dass E_Q nur vier Punkte endlicher Ordnung besitzt, nämlich $(0, 0)$, $(\pm n, 0)$ und e , wie man aus [2], I, Prop. 17 ersieht. Der gesamte Beweis findet sich etwa in [2], I, Prop. 18.)

• Somit zu **a)**. Da es unendlich viele pythagoreische Tripel und daher unendlich viele Kongruenzzahlen n gibt, besitzt $F_2(n)$ wegen Satz 2 für unendlich viele n wenigstens eine Lösung.

ad **b)**. Wegen der Bijektion zwischen A_n und B_n von Satz 2 ergibt sich: Wenn n keine Kongruenzzahl ist, kann es $F_2(n)$ auch nicht erfüllen. (Z. B. sind 1, 2, 3, 4 nicht kongruent.)

Das Problem, wie man von einer gegebenen Zahl n entscheiden kann, ob sie kongruent ist, ist offenbar immer noch nicht vollständig gelöst. (Man siehe dazu auch [2].)

Nun betrachten wir noch den Spezialfall $F_2(5)$: Zuerst sucht man einen Punkt p unendlicher Ordnung auf

$E: y^2 = x^3 - 25x$, berechnet dann die Vielfachen und erhält so die gesuchten Quadratzahlen (als x -Koordinate von p , da $f \circ \lambda(x, y) = f(\cdot, 2\sqrt{x}) = x$).

$$\text{Aus } p = (45, 300) \text{ ergeben sich } 2p = \left(\frac{1681}{144}, \dots \right),$$

$$4p = \left(\frac{11183412793921}{2234116132416}, \dots \right),$$

$$8p = \left(\frac{62425319345774489875576913540908007654663493663770881}{28667777423930631959129990083752908396266457397504}, \dots \right)$$

usw.

Bemerkung. (W. J.) Man konsultiere auch die Internetquelle [3] mit vielen Verweisen.

Neueste Erkenntnisse über Kongruenzzahlen (und viele Verweise auf Originalarbeiten) finden sich im Abschnitt D7 des nun schon in der dritten (stark überarbeiteten) Auflage vorliegenden „Klassikers“ [4]. Es gelten etwa:

(Tunnell) Alle quadratfreien Zahlen $n \equiv 5, 6$ oder 7 mod 8 sind kongruent.

(Bastien) Zu den nichtkongruenten Zahlen gehören Primzahlen $p \equiv 3$ mod 8 und die Produkte von zwei derartigen Primzahlen, das Doppelte von Primzahlen $p \equiv 5$ mod 8 und das Doppelte der Produkte von zwei derartigen Primzahlen, das Doppelte von Primzahlen $p \equiv 9$ mod 16 und Primzahlen $p \equiv 1$ mod 8, deren Darstellung $p = a^2 + b^2$ die Eigenschaft hat, dass $a + b$ kein quadratischer Rest mod p ist.

c) Es sei $k \geq 3$. Nun sind für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ rationale Zahlen r, s und t zu bestimmen, für die $r^k + n = s^k$ und $r^k - n = t^k$ gelten, wobei $0 < t < r < s$ sind.

Durch Addition erhält man die Bedingung $s^k + t^k = 2r^k$, die notwendigerweise erfüllt sein muss. Über diese an Fermats letzten Satz gemahnende Gleichung (wenn man mit dem Hauptnenner multipliziert, darf man o.B.d.A. annehmen, dass r, s und t positive ganze Zahlen sind) sind aber nur Einzelergebnisse bekannt. (Vgl. etwa [5], [6].)

• Für $k = 3$ und $m \geq 1$ haben die Gleichungen $x^3 + y^3 = 2^m \cdot z^3$ über \mathbb{Z}^3 nur die trivialen Lösungen (x, y, z) mit $x + y = z = 0$ und für $m = 1$ zusätzlich noch (x, x, x) für $x \neq 0$.

• Für $k = 4$ hat die Gleichung $x^4 + y^4 = 2 \cdot z^2$ über \mathbb{Z}^3 nur die trivialen Lösungen $x^2 = y^2$ und $z^2 = x^4$.

(Die Beweise von Legendre bzw. Fermat verwenden die Methode des unendlichen Abstiegs. Unter Ausnutzung gewisser Eigenschaften des ZPE-Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und des Eisenstein-Körpers $\mathcal{O}(\sqrt{-3})$ kann man sogar zeigen, dass die Gleichungen $x^5 + y^5 = a \cdot z^3$ für „sehr viele“ Werte von a nur die trivialen Lösungen (x, y, z) mit $x + y = z = 0$ besitzen.)

Literatur:

- [1] J. Silverman & J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1992.
- [2] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Graduate Texts in Mathematics 97, Springer 1984.
- [3] <http://mathworld.wolfram.com/CongruentNumber.html>
- [4] R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*. Problem Books in Mathematics, Springer 2004.
- [5] L. Mordell, *Diophantine Equations*. Pure and Applied Mathematics 30, Academic Press 1969.
- [6] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*. Springer 1999.

Dreiecke, Kegelschnitte und gewisse Flächeninhalte

Aufgabe Nr. 104.

a) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, dem eine Ellipse derart eingeschrieben ist, dass sie die Dreiecksseiten BC , CA und AB in den Punkten D , E bzw. F berührt.

Man zeige, dass $[DEF] = 2 \cdot \sqrt{\frac{[FEA] \cdot [DFB] \cdot [EDC]}{[ABC]}}$ gilt.

(Dabei bezeichnet $[XYZ]$ den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ .)

b) [„Open-end-Teil“] Man betrachte analogen Aussagen, etwa

- für andere Kurven, die die Seiten eines Dreiecks berühren,
- für Ellipsen, die die Seiten eines konvexen Polygons mit mehr als drei Eckpunkten berühren,
- für Ellipsoide, die die Seitenflächen eines Tetraeders berühren,
- ...

(W. J.)

Zuschriften sind eingegangen von:

Johann BRANDSTETTER (Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten), Peter COSTAMOLING (BG/BRG/SRG Reithmannstraße, Innsbruck), Franz GAMMER (BG 19 – Billrothstraße, Wien), Jutta GUT (VHS Floridsdorf, Wien), Herbert HAMETNER (Gallneukirchen), W. J., Gerhard KIRCHNER (Univ. Innsbruck), Wolfgang KIRSCHENHOFER (Herzogenburg), Otto PREM (BHAK St. Johann im Pongau), Kurt SCHOISSWOHL (Innsbruck) und Johanna TIBAUDO (Innsbruck).

a) i) Wir lösen die Aufgabe zunächst für den Sonderfall des Inkreises k von Dreieck ABC , dessen Radius r sein soll.

Dazu überlegen wir zuerst folgende Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC .

Seien R der Umkreisradius des Dreiecks und $s := \frac{a+b+c}{2}$ sein Halbumfang. Dann gelten

$$[ABC] = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{2 \cdot s^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{(\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma)^2} \quad (1)$$

Denn bekanntlich sind $[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$,

$a = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$, $b = 2 \cdot R \cdot \sin \beta$ und $c = 2 \cdot R \cdot \sin \gamma$.

Daraus folgen dann $a \cdot b \cdot c = 8 \cdot R^3 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ und $s = R \cdot (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$.

Aus $[ABC] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$ und den zwei voran stehenden Relationen ergibt sich sofort die Behauptung (1).

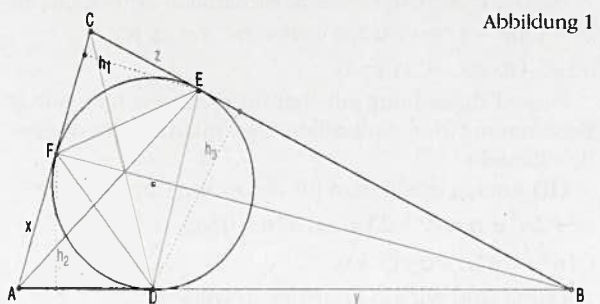


Abbildung 1

Mit den Bezeichnungen aus der Zeichnung haben wir $x = s - a$, $y = s - b$, und $z = s - c$.

Damit erhalten wir

• ΔFEA : Höhe $h_1 = z \cdot \sin \gamma = (s - c) \cdot \sin \gamma$,

$$[FEA] = \frac{x \cdot h_1}{2} = \frac{(s - a) \cdot (s - c) \cdot \sin \gamma}{2} \quad (2)$$

• ΔDFB : Höhe $h_2 = x \cdot \sin \alpha = (s - a) \cdot \sin \alpha$,

$$[DFB] = \frac{y \cdot h_2}{2} = \frac{(s - b) \cdot (s - a) \cdot \sin \alpha}{2} \quad (3)$$

• ΔEDC : Höhe $h_3 = y \cdot \sin \beta = (s - b) \cdot \sin \beta$,

$$[EDC] = \frac{z \cdot h_3}{2} = \frac{(s - c) \cdot (s - b) \cdot \sin \beta}{2} \quad (4)$$

Weiters ist $[DEF] = \frac{r^2}{2} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \quad (5)$

(Dazu beachte man $\angle FID = 180^\circ - \alpha$, $\angle DIE = 180^\circ - \beta$ und $\angle EIF = 180^\circ - \gamma$, verwende dreimal die trigonometrische Flächenformel und $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$.)

Aus der Flächenformel von Heron ergibt sich

$$r^2 = \frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s} \quad (6)$$

(5) und (6) implizieren

$$[DEF] = \frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{2 \cdot s} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \quad (7)$$

(1), (2), (3) und (4) ergeben

$$\frac{[FEA] \cdot [DFB] \cdot [EDC]}{[ABC]} = \frac{(s - a)^2 \cdot (s - b)^2 \cdot (s - c)^2}{16 \cdot s^2} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \quad (8)$$

Aus (7) und (8) erkennt unmittelbar man die behauptete Flächenbeziehung.

ii) Um die Gültigkeit der Aussage für eingeschriebene Ellipsen nachzuweisen legen wir durch den Mittelpunkt I des Inkreises k von Dreieck ABC ein kartesisches Achsenkreuz (d. h. I ist der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems).

Durch die umkehrbar eindeutige affine Abbildung $x = u$ und $y = \frac{r}{t} \cdot v$ mit $0 < t \leq r$ geht der Inkreis k mit

der Gleichung $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ in eine Ellipse $e = k_t$ mit der

Gleichung $\frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{t^2} = 1$ über. Jedes Dreieck ΔXYZ der

Konfiguration geht unter dieser affinen Abbildung in ein Dreieck $\Delta X_1 Y_1 Z_1$ über. Für den Flächeninhalt $[X_1 Y_1 Z_1]$ gilt dann

$$[X_1 Y_1 Z_1] = \frac{t}{r} \cdot [XYZ] \text{ und daher}$$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{[F_1 E_1 A_1] \cdot [D_1 F_1 B_1] \cdot [E_1 D_1 C_1]}{[A_1 B_1 C_1]}} =$$

$$\frac{t}{r} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{[FEA] \cdot [DFB] \cdot [EDC]}{[ABC]}} = \frac{t}{r} \cdot [DEF] = [D_1 E_1 F_1]$$

Da die angegebene affine Abbildung umkehrbar eindeutig ist, ist die Behauptung auch im Fall einer eingeschriebenen Ellipse bewiesen.

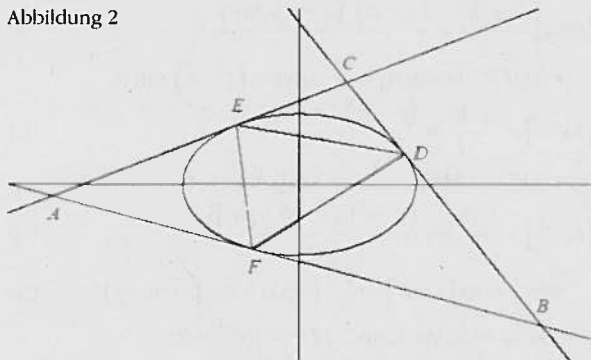
b) [J. Brandstetter, J. Tibaudo und W. J.]

• In Teil a) wurde der „elliptische Fall“ (Abbildung 2) betrachtet. Es liegt „also“ nahe zu untersuchen, ob und



ggf. wie sich das bemerkenswerte Ergebnis auf andere Kegelschnitte übertragen lässt. Dazu muss man das Konzept der *Ankurven* eines Dreiecks verwenden, das sind Kurven, die die Seiten oder deren Verlängerungen

Abbildung 2



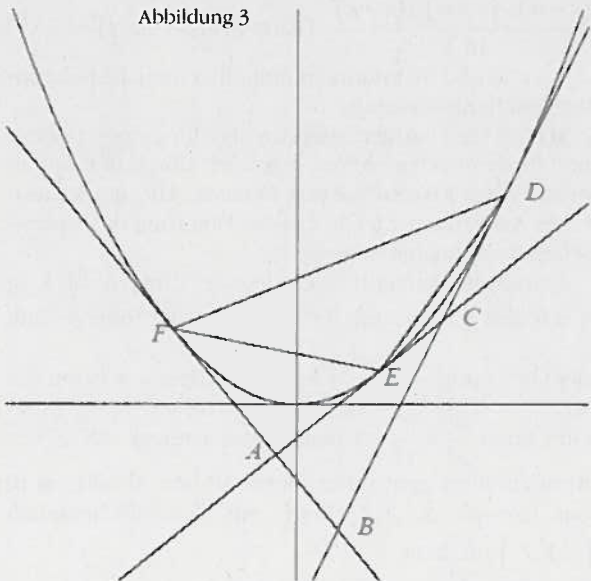
berühren. Um die folgende Aussage nachzuweisen benötigt man kartesische Koordinaten. (Die Beweise, auf deren Wiedergabe aus Platzgründen verzichtet werden muss, bedürfen eines gewissen Rechenaufwands.) Es gilt der folgende allgemeine

Satz. Wenn ein Kegelschnitt eine Seite eines beliebigen Dreiecks ABC von außen und die Verlängerungen der zwei anderen Seiten berührt, so gilt

$$[DEF] = 2 \cdot \frac{[FEA] \cdot [DFB] \cdot [EDC]}{[ABC]}$$

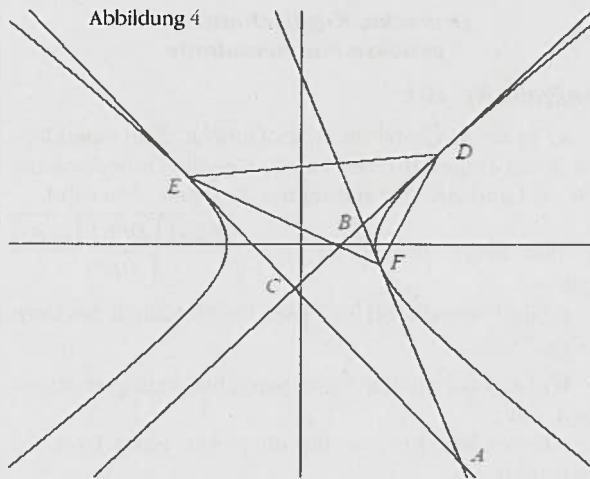
Aus den folgenden Abbildungen ist ein Beispiel für den „parabolischen“

Abbildung 3



bzw. den (beide Äste verwendenden) „hyperbolischen“ Fall ersichtlich.

Abbildung 4



(Falls nur ein Hyperbelast auftritt, ähnelt die entsprechende Figur dem „parabolischen“ Fall.)

• Es sei ABC ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck (mit Basis AB) und F der Basismittelpunkt. Dann gilt die in Rede stehende Flächenrelation genau dann, wenn D und E die Seiten BC bzw. AC im gleichen Verhältnis teilen.

Wenn (umgekehrt) D und E die Seiten BC bzw. AC im gleichen Verhältnis teilen, so gilt die Relation genau dann, wenn F der Basismittelpunkt ist.

Die Bestimmung von F , wenn die Teilverhältnisse für D und E verschieden sind, bleibe dem Leser als kleine Aufgabe.

Deshalb ergibt sich für jede Kurve k , die die Dreiecksseiten in den zuvor erwähnten Punkten D , E bzw. F berührt, die Gültigkeit der Flächenrelation.

• Für Ellipsen, die die Seiten eines konvexen Polygons mit mehr als drei Eckpunkten berühren oder für Ellipsoide, die die Seitenflächen eines Tetraeders oder anderer Körper (Quader, ...) berühren, lassen sich offenbar keine allgemein gültigen Analoga der zuvor betrachteten Relation angeben. (Etwaige weiterführende Erkenntnisse werden selbstverständlich gerne veröffentlicht!)

Zum Schluss noch die Lösung der Aufgabe Q15 aus dem letzten Heft der WN:

Man bestimme die erste Nachkommaziffer e_n (in dezimaler Darstellung) der Zahl $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

$$\text{Wir zeigen } e_n = \begin{cases} 5, & \text{wenn } n = 1 \\ 6, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

Wegen $\sqrt[3]{4} = 1.587\dots$ ist $e_1 = 5$.

Dagegen gilt für $n \geq 2$:

$$n + 0.6 < \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n} < n + 0.7.$$

(i) Die linke Ungleichung ist nämlich äquivalent zu $n^3 + 1.8n^2 + 1.08n + 0.216 < n^3 + 2n^2 + n$, d. h. $0.2n^2 - 0.08n - 0.216 > 0$.

Diese Ungleichung gilt aber für $n \geq 2$, wie man durch Bestimmung der Nullstellen des quadratischen Ausdrucks sieht.

(ii) Analog erhält man für die rechte Ungleichung $n^3 + 2n^2 + n < n^3 + 2.1n^2 + 1.47n + 0.343$, d. h.

$$0.1n^2 + 0.47n + 0.343 > 0.$$

Damit sind wir am Ende des Beweises.



Metrologie (die Lehre vom Messen) heute

(Auszug aus Spektrum der Wissenschaft Juni 2007)

Ian Robinson

Über einhundert Jahren definiert das Urkilogramm die Grundeinheit der Masse. Seit langem soll es durch einen genaueren Standard ersetzt werden.

Heutzutage sind technische Geräte oft schon nach wenigen Jahren hoffnungslos überholt. Da erscheint es geradezu aberwitzig, dass fast alle Messungen von Massen – und damit zusammenhängender Phänomene wie der Energie – von einem Gegenstand abhängen, der seit 117 Jahren in den Gewölben eines kleinen Labors außerhalb von Paris aufbewahrt wird, dem „Internationalen Büro für Gewichte und Maße“ (*Bureau International des Poids et Mesures*). Im Internationalen Einheitensystem SI (*Système International d'Unités*), oft auch metrisches System genannt, definiert der „Internationale Prototyp des Kilogramms“ (IPK) die Grundeinheit der Masse. Dabei handelt es sich um ein zylinderförmiges Objekt aus einer Platin-Iridium-Legierung mit einem Durchmesser und einer Höhe von jeweils 39 Millimetern.

Die SI-Einheiten werden von der „Allgemeinen Konferenz für Gewichte und Maße“ (*Comité International des Poids et Mesures*) verwaltet. In den vergangenen Jahrzehnten hat die Konferenz bereits mehrere der SI-Basiseinheiten neu definiert, also jene Einheiten, die durch Konventionen festgelegt sind und von denen sich alle anderen ableiten. Ziel ist es, ein konsistentes System zu schaffen, das dem wissenschaftlichen und rechnerischen Fortschritt nützt.

Das Meter und die Sekunde sind bereits über Naturphänomene definiert. Das Meter wurde über die Geschwindigkeit des Lichts festgelegt, die Sekunde durch die Frequenz von Mikrowellen, die ein Atom des Elements Cäsium abstrahlt, wenn es zwischen zwei spezifischen Energiezustände wechselt.

Das Kilogramm ist heute die einzige verbliebene SI-Grundeinheit, die noch auf einem von Menschen hergestellten Bezugsobjekt basiert. Von einem solchen Artefakt abhängig zu sein, ist für Wissenschaftler problematisch. Da ihre Instrumente immer präziser werden, kann es passieren, dass ihre Messungen genauer sind als die Definition der Grundeinheit. Metrologen – die Fachleute auf dem Gebiet des Messwesens – bemühen sich deshalb, auch die Einheit der Masse auf Naturkonstanten zurückzuführen. Zwei Wege versprechen dabei den größten Erfolg: Einer basiert auf der sogenannten Avogadro-Konstante, also der Zahl der Atome, die in zwölf Gramm des Kohlenstoffisotops ^{12}C enthalten sind. Der andere bezieht sich auf das Planck'sche Wirkungsquantum, eine Naturkonstante, die den Zusam-

menhang zwischen der Frequenz eines Photons und seiner Energie herstellt.

Um den Prototyp des Kilogramms zur Eichung von Massenangaben heranzuziehen, wird bis heute ein aufwändiges Verfahren praktiziert. Etwa alle dreißig Jahre entnehmen die Metrologen den IPK aus seinem Behältnis, um damit Kopien zu eichen, die ihnen von den 51 Unterzeichnerstaaten der sogenannten Meter-Konvention zugeschickt werden, einem Vertrag, der die Arbeit der SI-Organisationen regelt. Sobald das gelungen ist, werden diese Kopien verwendet, um Massenstandards in den Mitgliedsstaaten zu kalibrieren. In weiteren Schritten werden auf diese Weise schließlich weltweit Messinstrumente in Laboren und Fabriken geeicht.

Es ist sinnvoll, sich auf einen stabilen, unveränderlichen Standard für Massenmessungen zu beziehen. Doch leider ändert sich die Masse des IPK offenbar mit der Zeit. Vergleicht man die Masse des IPK mit anderen, zur gleichen Zeit gefertigten Massenstandards und zieht alte und neuere Messungen von Naturkonstanten heran, so ergibt sich, dass sich die Masse des IPK in den letzten 100 Jahren um mehr als 50 Mikrogramm verändert haben muss. Durch die Akkumulation von Luftverunreinigungen könnte seine Masse zugenommen, durch Abnutzung jedoch abgenommen haben. Für einen Standard, auf dem Forschung und Industrie in aller Welt aufbauen, ist das nicht akzeptabel.

Ähnliche Schwankungen plagten früher auch die Maßeinheiten von Zeit und Länge. So wurde die Sekunde ursprünglich von der Rotationsgeschwindigkeit der Erde abgeleitet. Diese nimmt jedoch langfristig ab und weist zudem kurzzeitige Veränderungen auf. Um davon unabhängig zu sein, wurde die Sekunde 1967 als „die Dauer von 9.192.631.770 Schwingungen der Strahlung des Übergangs zwischen zwei Hyperfeinstruktur-niveaus eines Cäsium-133-Atoms“ neu definiert. Sie ändert sich nicht mit der Zeit und kann jederzeit und überall auf der Welt im Labor gemessen werden.

Obwohl die Definition der Sekunde nun nicht mehr auf der Rotation der Erde beruht, könnte sie sich immer noch als unzureichend erweisen, denn sie hängt von einem quantenphysikalischen Prozess ab, auf den elektromagnetische Felder spürbar einwirken. Forscher entwickeln mit den optischen Uhren gegenwärtig einen Typ neuartiger, präziser Atomuhren, der schon bald eine weitere Neudefinition der Sekunde erfordern könnte.

Demgegenüber ist der Längenstandard recht stabil. Ursprünglich beruhte die SI-Definition des Meters auf



einem Artefakt: einem extrem stabilen Platin-Iridium-Barren, in den zwei Linien in wohldefiniertem Abstand eingeritzt wurden. Im Jahr 1983 wurde das Meter dann als „die Länge des Wegs, den das Licht im Vakuum im Zeitintervall von $1/299.792.458$ Sekunden zurücklegt“ neu definiert. Diese Definition sollte auch dem künftigen technischen Fortschritt standhalten, denn sie ist mit einer der wichtigsten Naturkonstanten verknüpft, der Geschwindigkeit des Lichts, das im Vakuum genau $299.792.458$ Meter in der Sekunde zurücklegt.

Welche Schritte zu unternehmen sind, um das Kilogramm auf der Basis einer physikalischen Konstante neu festzulegen, sodass es sich in den bestehenden Gebrauch einfügt, ist klar. Zunächst müssen Metrologen die betreffenden Konstanten messen und auf der Grundlage des gegenwärtigen Kilogrammstandards fixieren. Erst dann können sie in die Neudefinition eingehen, damit ein nahtloser Übergang zwischen alter und neuer Definition gewährleistet ist. Jedes hinreichend ausgestattete Labor sollte den neuen Massenstandard produzieren können.

Vielversprechend erscheint es, das Kilogramm mit der Masse eines Atoms zu verknüpfen. Dabei bietet sich zunächst an, die Avogadro-Konstante zu fixieren. Diese ist definiert als die Anzahl der Atome in zwölf Gramm des Kohlenstoffisotops ^{12}C , einem sogenannten Mol. Neuen Messungen zufolge beträgt ihr Wert $6,02 \times 10^{23}$ oder 602 Trilliarden pro Mol. Daraus erkennt man, wo für Metrologen das Problem liegt: darin, eine wägbare Menge von Atomen zu zählen. Selbst in den genauesten Waagen verhindern es „Schmutzeffekte“, Massen zu unterscheiden, die um weniger als 100 Nanogramm voneinander abweichen. Das Urkilogramm soll jedoch zumindest mit einer Präzision von 1 zu 50 Millionen definiert werden. Dafür müsste man die Atome zählen, die in 5 Gramm Kohlenstoff- 12 (^{12}C) enthalten sind. Selbst wenn es gelänge, pro Sekunde eine Billionen einzelner Atome zu zählen, würde man dafür etwa 7.000 Jahre benötigen – ein aussichtsloses Unterfangen.

Einfacher ist es, die Anzahl der Atome in einem Kristall zu ermitteln, indem man dessen Volumen durch dasjenige teilt, welches ein einzelnes Atom darin einnimmt. Wiegt man den Kristall, lässt sich aus der Masse eines Atoms dieses Kristalls relativ zu einem Kohlenstoff- 12 -Atom die Avogadro-Konstante bestimmen. Der Neudefinition des Kilogramms wäre man damit einen großen Schritt näher gekommen.

Um auf diese Weise das Kilogramm über die Atommasse zu eichen, muss man zunächst den Abstand der Atome in einem nahezu perfekten Kristall messen, in dem die Atomzahl pro Einheitszelle bekannt ist. Daraus folgt das von einzelnen Atomen eingenommene Volumen. Weist der Kristall eine bekannte Masse auf, lässt sich daraus auf die Masse eines seiner Atome schließen. Aus dem Verhältnis der Molmasse des Isotops, aus dem der Kristall besteht, zur Masse des Atoms folgt die Avogadro-Konstante.

Dies zu tun ist schwieriger, als es klingt, denn dafür ist eine beträchtliche Genauigkeit erforderlich. Tatsächlich ist das Vorhaben so teuer und komplex, dass weltweit kein staatliches Eichlabor über die nötigen Mittel verfügt. Deshalb hat sich ein Konsortium von Forschungslabors in Australien, Belgien, Deutschland, Großbritannien, Italien, Japan und den USA zur „Inter-

nationalen Avogadro-Koordination“ (*International Avogadro Coordination*) zusammengeschlossen.

Das Vorhaben kann nur gelingen, wenn der zu untersuchende Kristall eine nahezu perfekte Struktur aufweist, also äußerst wenige Gitterfehler und Unreinheiten enthält. Da die Halbleiterindustrie im Züchten großer, weitgehend perfekter Einkristalle aus Silizium inzwischen sehr erfahren ist, wurde dieses Element ausgewählt. Sind die Messungen am Siliziumkristall glücklich, können Metrologen die Ergebnisse zur Definition des Mols, die auf Kohlenstoff- 12 -Atomen beruht, in Beziehung setzen, indem sie extrem genaue Messungen der Atommassen von Silizium und Kohlenstoff heranziehen, die mit einem Massenspektrometer bestimmt wurden.

Um die Masse der kristallinen Kugel zu bestimmen, nutzen die Metrologen das Verfahren der „Substitutionswägung“. Diese bei präzisen Messungen übliche Methode ersetzt eine einzelne Wägung durch eine Wägereihe, bei der dieselben Massen mehrfach gewogen werden. Benötigt wird dafür insbesondere eine sogenannte Leermasse. Diese braucht nicht genau bekannt zu sein, muss jedoch einen äußerst stabilen Massenwert aufweisen.

Zunächst wird die Siliziumkugel auf dem einen Arm der Waage platziert, eine Leermasse von etwa einem Kilogramm auf dem anderen. Nachdem die Kugel durch eine Masse ersetzt wurde, die im Rahmen des IPK-Standards bekannt war, wiederholten die Forscher die Wägung. Wird der Austausch vorsichtig genug durchgeführt, liefert der auf der Skala der Waage ablesbare Unterschied unmittelbar die Massendifferenz zwischen der Kugel und dem Massenstandard und damit auch die Masse der Kugel selbst. Durch diese Methode lassen sich Wägefehler stark reduzieren, die minimal unterschiedliche Armlängen der Waage hervorrufen können.

Aus weiteren Proben des Siliziums bestimmten die Forscher die relative Häufigkeit der Siliziumisotope ^{28}Si , ^{29}Si und ^{30}Si im Kristall, um deren Beiträge zur Kugelmasse zu berücksichtigen. Dazu benutzten sie ein Massenspektrometer, mit dem sich die elektrisch geladenen Isotope anhand ihres unterschiedlichen Masse-Ladungs-Verhältnisses trennen lassen.

Inzwischen hat die Internationale Avogadro-Koordination die Messungen an Kugeln aus natürlichem Silizium nahezu abgeschlossen. Zwar gelang es den Metrologen, die Anzahl der Atome in einer Ein-Kilogramm-Kugel mit einer Genauigkeit von 3 zu 10 Millionen zu bestimmen. Für einen neuen Standard ist das jedoch zu unsicher. Um eine noch höhere Genauigkeit zu erreichen, arbeitet das Team derzeit an der Herstellung einer Kugel aus reinem Silizium- 28 . Diese wird voraussichtlich $1,25$ bis $2,5$ Millionen US-Dollar kosten. Mit russischen Gaszentrifugen, die ursprünglich der Produktion von waffenfähigem Uran dienen, trennen Mitarbeiter der Koordination gegenwärtig die Silizium-Isotope. Bis 2010 will das Konsortium eine Genauigkeit erreichen, die besser als 1 zu 50 Millionen ist.

Der zweite Weg zur Neudefinition des Kilogramms basiert auf der Idee, die Masse über ihr Energie-Äquivalent zu bestimmen. Genutzt wird dabei die Äquivalenz von Masse und Energie, die Einstein mit seiner berühmten Formel $E = mc^2$ beschrieb. Ihr zufolge sollte man die Masse durch die Energie definieren können, in die sich

eine bestimmte Materiemenge umwandeln lässt. Wie schon das Zählen einzelner Siliziumatome ist dies nicht einfach, denn schon bei der Umwandlung weniger Atome werden gewaltige Energiemengen frei.

Leichter ist es, auf vergleichsweise konventionelle Weise elektrische und magnetische Energien zu vergleichen. Dabei müssen die Metrologen allerdings die auftretenden Energieverluste in den Griff bekommen. Welche Hindernisse dabei zu überwinden sind, zeigt sich, wenn wir uns einen Elektromotor vorstellen, der eine Masse gegen die Schwerkraft anhebt. Unter idealen Bedingungen würde die gesamte dem Motor zugeführte elektrische Energie E die potenzielle Energie des um die Strecke h angehobenen Objekts vergrößern. Es

gilt demzufolge $E = mgh$, woraus die Masse $m = \frac{E}{gh}$

folgt. Dabei ist g die Schwerebeschleunigung, die mit einem Präzisionsgravimeter bestimmt werden kann. In der Praxis ist diese Art der Massenbestimmung aufgrund von Energieverlusten im Motor und anderen Teilen des Experiments nahezu unmöglich. Zwar versuchten Wissenschaftler, ähnliche Experimente an Objekten durchzuführen, die aufgrund des sogenannten Meißner-Ochsenfeld-Effekts der Supraleitung zum Schweben gebracht wurden. Über eine Genauigkeit von 1 zu 1 Million kamen sie jedoch nicht hinaus.

Eine größere Hoffnung bietet die sogenannte Watt-Waage, die Bryan Kibble vom britischen Nationalen Physikalischen Laboratorium (NPL) vor 30 Jahren ersann und die das Problem des Energieverlusts durch die Messung einer „virtuellen Kraft“ vermeidet. Diese Methode setzt das Kilogramm mit dem Meter, der Sekunde, dem elektrischen Widerstand (in Ohm) sowie der elektrischen Spannung (in Volt) in Bezug, was zwei Prozesse der Quantenmechanik ermöglichen: der Josephson-Effekt und der Quanten-Hall-Effekt. Daraus folgt ein sehr präziser Wert des Planck'schen Wirkungsquantums.

Die Watt-Waage ist eine konventionelle Balkenwaage, an deren einem Arm das zu messende Objekt der Masse m hängt, während sich am anderen Arm eine Spule der Gesamtlänge L in einem starken magnetischen Feld B befindet. Im Experiment wird zunächst ein Strom I durch die Spule geschickt und so eine Kraft erzeugt (das Produkt BLI), welche die Gewichtskraft des Objekts (das Produkt mg) ausgleicht. Danach wird das Objekt entfernt und der Strom abgeschaltet.

Anschließend wird die Spule mit einer Geschwindigkeit v durch das Magnetfeld bewegt und dabei die induzierte Spannung $U = BLv$ gemessen. Dadurch lässt sich das Produkt BL bestimmen, das auf anderem Weg kaum ausreichend genau zu bestimmen ist. Sind das Magnetfeld und die Spule stabil genug, damit das Produkt BL in beiden Teilen des Experiments den gleichen Wert besitzt, lassen sich beide Messungen zur Beziehung $mgv = UI$ kombinieren. Diese beschreibt das Gleichgewicht zwischen der mechanischen Leistung (das Produkt von Kraft und Geschwindigkeit, mgv) und der elektrischen Leistung (das Produkt von Spannung und Stromstärke, UI). Da die Messungen von Spannung und Stromstärke auf der einen Seite sowie Gewicht und Geschwindigkeit auf der anderen Seite jeweils getrennt ausgeführt werden, hängt das Ergebnis nicht davon ab, dass die Leistung tatsächlich in irgendeinem Teil des Experi-

ments verloren geht, was sich durch die Erwärmung der Spule oder Reibung bei der Bewegung nicht gänzlich vermeiden lässt. Demzufolge können die Forscher mit der Anordnung einer „virtuellen Leistung“ ermitteln.

Die Metrologen messen den Strom während der Wägung, indem sie ihn durch einen Widerstand leiten, der zuvor mit Hilfe des Quanten-Hall-Effekts geeicht wurde. Die am Widerstand anliegende Spannung sowie die in die Spule induzierte Spannung werden mit Hilfe des Josephsons-Effekts gemessen, der ebenfalls quantenmechanischer Natur ist. Die Forscher können deshalb die elektrische Leistung in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantums ausdrücken. Da die anderen Terme in der Gleichung nur von der Zeit und der Länge abhängen, kann letztlich die Masse in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantums, des Meters und der Sekunde bestimmt werden – also ausschließlich auf der Grundlage von Naturkonstanten.

Zwar scheint sich diese Methode recht direkt zur Eichung des Kilogramms zu eignen, um jedoch die angestrebte Genauigkeit von 1 zu 100 Millionen zu erreichen, müssen die wichtigsten Größen in dem Experiment mit einer Genauigkeit gemessen werden, die an die Grenzen heutiger Möglichkeiten stößt. Zunächst ist die Schwerebeschleunigung extrem genau zu bestimmen. Dann muss das gesamte Verfahren in einem Vakuum durchgeführt werden, damit weder der Auftrieb in der Luft noch die Strahlenbrechung die Geschwindigkeitsmessung beeinflussen, die mit einem Laser-Interferometer vorzunehmen ist. Die Metrologen müssen außerdem dafür sorgen, dass die Richtung der auf die Spule wirkenden Kraft exakt vertikal verläuft: dafür müssen sie Teile der Apparatur auf mindestens 10 Bogensekunden und 10 Mikrometer exakt ausrichten. Schließlich müssen sie genau verstehen, wie sich das Magnetfeld zwischen den beiden Teilen des Experiments verhält. Das erfordert, dass sich die Temperatur des Permanentmagneten höchstens im Mikrokkelvinbereich langsam und gleichmäßig ändern darf.

Leider führen bisherige Messungen der Siliziumkristalle sowie der Watt-Waagen zu Massenangaben des Kilogramms, die um mehr als 1 zu 1 Million voneinander abweichen. Forscher müssen die Abweichungen auf ein Hundertstel dieser Differenz reduzieren, bevor sie das Kilogramm neu definieren können.

Das Internationale Komitee für Gewichte und Maße treibt die nationalen Eichanstalten an, bis zum Jahr 2011 nicht nur das Kilogramm neu zu definieren, sondern auch das Ampere, das Kelvin und das Mol. Anschließend werden einige Länder die notwendigen Geräte bauen, um diese Definitionen praktisch zu nutzen.

Literatur:

- Replacing the kilogram. Von B. P. Kibble und I. A. Robinson in: *Measurement Science and Technology*, Bd. 14, S. 1229, 2003
- Tracing Planck's constant to the kilogram by electromechanical methods. Von A. Eichenberger et al. in: *Metrologia*, Bd. 40, S. 356, 2003
- History and progress in the accurate determination of the Avogadro constant. Von P. Becker in: *Reports on Progress in Physics*, Bd. 64, S. 1945, 2001
- Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/872688.



Von der Symmetrie zur Supersymmetrie

Zum Tode von Prof. Dr. Julius Wess,
dem Begründer einer der vielseitigsten physikalischen Theorien der letzten 50 Jahre

Prof. Dr. Peter Mättig

Julius Wess, einer der international herausragenden Theoretischen Physiker der letzten 50 Jahre verstarb völlig überraschend am 8. August im Alter von 72 Jahren in Hamburg. „Julius Wess war bis zuletzt ein aktiver und engagierter Forscher voller neuer Ideen und Visionen, seiner Zeit immer einen Schritt voraus“, so Prof. Dr. Jan Louis vom II. Institut für Theoretische Physik an der Universität Hamburg, wo Julius Wess im vergangenen akademischen Jahr eine Gastprofessur innehatte. „Wir verlieren mit Julius Wess einen warmherzigen Kollegen und Lehrer, der bis zuletzt mit ungebrochener Freude forschte. Es ist zutiefst bedauerlich, dass er die mögliche experimentelle Bestätigung des von ihm und Bruno Zumino entwickelten berühmten Modells der Supersymmetrie am Large Hadron Collider (LHC)/CERN nicht mehr erleben kann“, so Prof. Dr. Hermann Nicolai, Direktor am Potsdamer Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik (Albert-Einstein-Institut).

Durch seine Arbeiten und Ideen auf dem Gebiet der Theorie der Elementarteilchen und der Mathematischen Physik schuf Julius Wess neue physikalische Konzepte und prägte so eine ganze Forschergeneration. Er begründete zusammen mit Bruno Zumino 1973 die Supersymmetrie: Einbahnbrechendes Modell, das in vielen Gebieten der Theoretischen Physik seine Anwendung gefunden hat und auch in der Mathematik neue Entwicklungen einleitete. Die Supersymmetrie verallgemeinert das in der Physik (und insbesondere in der Elementarteilchenphysik) so erfolgreich angewendete Symmetrieprinzip um einen weiteren Aspekt: Es stellt eine Verbindung zwischen den Bausteinen der Materie und den zwischen ihnen wirkenden Kräften her.

Die mathematische Existenz dieser Symmetrie war zunächst das eigentlich überraschende Ergebnis der Arbeiten von Wess und Zumino. Die Anwendungen in der Teilchenphysik wurden dann schrittweise erkannt. So ist es beispielsweise im Rahmen einer supersymmetrischen Theorie möglich, die starke und die elektroschwache Kraft in einer sogenannten Grand Unified Theory (GUT) zu vereinheitlichen. Darüber hinaus stellte Supersymmetrie einen ersten Schritt auf der Suche nach einer Quantengravitation, d. h. einer vereinheitlichten Theorie aller Kräfte der Natur dar. So ist sie auch zentrales Element der Stringtheorie – einem viel versprechenden Kandidaten für eine Quantengravitation.

Die Supersymmetrie sagt die Existenz neuer Elementarteilchen voraus, die von 2008 an mit Hilfe der Experimente am LHC gesucht werden. Eines dieser Elementarteilchen könnte auch der Ursprung der sogenannten Dunklen Materie sein, die einen überraschend großen Teil der Energiedichte unseres Universums ausmacht. Zusätzlich gibt es in supersymmetrischen Theorien Ansatzpunkte zur Lösung weiterer grundlegender Rätsel der Physik, beispielsweise zur Frage, warum es im Uni-

versum überhaupt Materie gibt und warum Materie Masse hat. Obwohl die experimentelle Bestätigung der Supersymmetrie noch aussteht, hat sie sich zu einem dominanten Thema der theoretischen Teilchenphysik entwickelt. Ihre Aktualität ist ungebrochen und auch von zentraler Bedeutung für die Gestaltung neuer Experimente weit über die gegenwärtige Zeit hinaus.

Julius Wess, geboren 1934 im österreichischen Oberwölz, studierte in Wien und promovierte 1957 bei Hans Thirring. Er setzte seine wissenschaftliche Arbeit am CERN fort, lehrte ab 1966 am Courant Institute der University of New York und wurde 1968 als Professor an die Universität Karlsruhe berufen. 1990 berief die Max-Planck-Gesellschaft ihn zum Direktor des damaligen Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik in München. Gleichzeitig war er Ordinarius für theoretische Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Julius Wess war ein „besessener“ Forscher und versuchte immer, wissenschaftliches Neuland zu betreten. Seine mathematische Begabung gepaart mit seinem physikalischen Verständnis und seiner physikalischen Intuition machten ihn zu einem der originellsten und kreativsten theoretischen Physiker der letzten 50 Jahre. So gibt es neben der Erfindung der Supersymmetrie eine Reihe weiterer zentraler Arbeiten, die die Physik nachhaltig prägten. Zuletzt verfolgte er die Idee, Raum und Zeit bei sehr kleinen Entfernungen zu modifizieren und ihre geometrische Struktur grundlegend zu verändern. Auch das wissenschaftliche Schicksal dieser sogenannten nicht-kommutativen Geometrie darf Julius Wess leider nicht mehr erleben.

Neben seiner wissenschaftlichen Arbeit engagierte Julius Wess sich für die intensive Förderung von Forschung und Lehre in den vom Krieg betroffenen Balkanländern. Dieses Engagement war ihm eine Herzensangelegenheit und ging auf eigene Erfahrungen nach dem Zweiten Weltkrieg zurück: Seine eigene wissenschaftliche Arbeit und Auslandsaufenthalte wurden damals von der Fulbright-Stiftung gefördert. 1999 gründete Wess daher zusammen mit anderen Kollegen den Verein „Wissenschaftler in globaler Verantwortung“, der Wissenschaftler aus dem ehemaligen Jugoslawien unbürokratisch in Forschung und Lehre unterstützt. Das langfristig und flexibel angelegte Programm ermöglicht es vor allem jungen engagierten Wissenschaftlern aus den vom Krieg betroffenen Balkanländern, einen Teil ihrer Ausbildung an deutschen Forschungseinrichtungen zu absolvieren.

Julius Wess erhielt mehrere Ehrendoktorwürden und wurde für seine wissenschaftlichen Leistungen vielfach ausgezeichnet.

Für Fragen stehen Ihnen zur Verfügung: Prof. Dr. Jan Louis: jan.louis@desy.de, Prof. Dr. Hermann Nicolai: hermann.nicolai@aei.mpg.de



Der ÖROK-Atlas – www.oerok-atlas.at

Ein neues, IKT-gestütztes online verfügbares Hilfsmittel für den GWK-Unterricht

Christian Sitte

1. Einleitung

Die ÖROK (Österreichische Raumordnungskonferenz) wurde im Jahre 1971 als eine vom Bund, Ländern, Städten und Gemeinden sowie den Wirtschafts- und Sozialpartnern getragene Einrichtung zur Koordination der Raumordnung auf gesamtstaatlicher Ebene gegründet. Für die laufende Tätigkeit wurde beim Bundeskanzleramt eine Geschäftsstelle eingerichtet. Zu den Aufgaben der ÖROK zählt u. a. die Aufbereitung von Grundlagen zur Raumforschung in Österreich. Sie bringt nicht nur alle paar Jahre einen Raumordnungsbericht heraus, der auch in der Schule wertvolle updates zu den Buchinhalten bietet (etwa zuletzt 11. Raumordnungsbericht, Wien 2005). Sie publiziert auch seit 1983 gemeinsam mit dem ÖIR (dessen instruktive Zeitschrift „Raum“ wir im letzten WN-Heft vorgestellt hatten), das die computerkartographisch erstellten Karten liefert, den „Atlas zur Räumlichen Entwicklung Österreichs“. Seine gedruckten Kartenblätter erscheinen regelmäßig in Lieferungen, sodass seine ständige Aktualität gewährleistet ist. Sein Vorgänger war der, noch in konventioneller, anspruchsvoller Kartographie häufig komplexanalytischer Karten, gezeichnete „Atlas der Republik Österreich“, den Geographen (u. a. H. Bobek, E. Arnberger) an der Österreichischen Akademie der Wissenschaften seit den 1960er Jahren herausgebracht hatten. Von dieser Stelle erschien 2005 auch die reich mit Karten ausgestattete Publikation „Das neue Bild Österreichs – Struktur und Entwicklung im Alpenraum und in den Vorländern“ (hg. von A. Borsdorf), die E. Lichtenbergers wissenschaftliche Länderkunde „Österreich“ kartographisch erweitert (in deutsch erschien diese in 2. Auflage 2002 bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt; in englischer Sprache dann ebenfalls beim Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien).

Virtuell abrufbare Karten zu Österreich gab und gibt es online auf dem Server des Bundesamts (topographische Situation unterschiedlicher Maßstäbe www.austrianmap.at). Zusätzlich findet man auf dem Server der Statistik Austria (ehem. Stat. Zentralamt) thematische Karten (www.statistik.at/karten/txt.shtml) bzw. auch kombiniert mit detaillierten Daten zu jeder Gemeinde unter www.statistik.at/blickgem/index.jsp) Die Karten waren allerdings vom User nicht veränder- bzw. gestaltbar oder zu ergänzen.

Eigene einfache Karten konnte man aber (auf einer Grundlage der Bezirke bzw. NUTS-Regionen Österreichs bzw. auch auf einer mitgelieferten Weltkarten-grundkarte) schon seit einiger Zeit auf einem kostenfreien praktischen Online-GIS der Kartographieabteilung des Wiener Uni-Instituts für Geographie und Regionalforschung „MyMap“ gestalten <http://map.gis.univie.ac.at/mymap>. Kollege Hartwig Hitz hatte es mit einigen fachdidaktischen Hinweisen in GW-UNTERR. 102/2006, S. 95 f. beschrieben. Im 7. Kl. AHS-Oberstufe-Schulbuch Malcik/Sitte „RGW7neu“ bei www.hoelzel.at wurde dieses Angebot erstmals bei Arbeitsaufgaben zusätzlich integriert (vgl. GW-UNTERR. 104/2006, S. 35 ff.).

2007 wurde das virtuell verfügbare Angebot, das wir in GWK kartographisch nutzen können, um den „ÖROK-Atlas online“ (www.oerok-atlas.at) erweitert. Dieser bringt uns weitere wertvolle Erweiterungen insbesondere für den Unterricht der 6. und 7. Klassen AHS-Oberstufe oder der II. Jahrgänge BHS. Im Impressum steht ausdrücklich „Downloads und Kopien dieser Seite sind unter Angabe der Quelle gestattet“, womit eine Nutzung der selbst erstellten Ergebnisse auf dem Schulserver bzw. Lernplattformen (vgl. Koller/Sitte 2005) nichts im Wege steht. Der ÖROK-Atlas liefert dem Nutzer Möglichkeiten, die bisher nur auf der Maßstabebene eines Bundeslandes etwa der „virtuelle Tirol-Atlas“ für die Schule zur Verfügung stellte (vgl. Rabl 2005 und 2006) und bringt darüber hinaus noch weitere Ergänzungen.



2. Struktur des ÖROK-Atlas online

Der ÖROK-Atlas ist ein kostenloses Service. Grundgedanke bei der Konzeption war die freie Verfügbar-



keit des neuen Instruments für alle Interessierten an jedem PC. Es sind **keine Systeminstallationen** oder Downloads notwendig – was gerade für den Schulbereich hilfreich ist, hat doch der GWK-Lehrer in der Regel keine Administratorenrechte in den EDV-Sälen. Das Gesamtsystem basiert auf Open Source Produkten, wodurch die Kompatibilität mit allen gängigen Systemen und Datenformaten gewährleistet ist.

Inhaltlich am auffälligsten ist bei dem hier vorgestellten neuen virtuellen ÖROK-Atlas sein neben den **Österreichkarten** ferner **zusätzlich** angebotener Bereich mit **Europathemen** in Kartendarstellungen! Dieser schließt eine bislang in der Schule als schmerzlich empfundene Lücke in der Verwendung www-gestützter Karten zu Europa. Zwar gibt es solche als kartographisch unveränderbare farbige verfügbaren Karten als „pdf“ bei „EU-Statistik kurz gefasst“ zu einigen Themen, ansonsten ist ansonsten auf den Eurostat-Servern nur reichhaltiges Tabellenmaterial vorhanden. Aber bei „MyMap“ (s. o.) fehlte eine entsprechende Grundkartenebene, wodurch man mit einfachen Mitteln daraus leider auch keine eigenen thematischen Europakarten fertigen konnte. Dies ist nun mit dieser Neuentwicklung, die die Kartographieabteilung des Instituts für Geographie der Uni Wien (die Kollegen K. Kriz, A. Pucher, G. Katzlberger) für die ÖROK erarbeitet hatten, virtuell und leicht möglich und eröffnet eine Reihe zusätzlicher interessanter didaktischer und methodischer Unterrichtsvarianten!

Über die Jahrhunderte stellte die gedruckte Karte die einzige Möglichkeit dar, Geoinformationen in kartographischer Form einem größeren Benutzerkreis zugänglich zu machen. Die zeitgemäße Kartographie entwickelt sich gegenwärtig hin zu einer modernen, interaktiven Kommunikationswissenschaft. Kartographische Abbildungen werden nicht mehr ausschließlich für reine Präsentationszwecke genutzt, sondern sollen auch zur Exploration von temporalen sowie nicht-temporalen Geodaten eingesetzt werden (Spanring, Gartner, Kriz 2005). Während bei einer klassischen kartographischen Präsentation die räumlichen Strukturen bekannt sind und diese über Karten für die Öffentlichkeit bereitgestellt werden, ist bei der Exploration die Hypothesenfindung das Ziel. Interaktive, mehrdimensionale Visualisierungswerkzeuge helfen bei der Suche nach Mustern, Strukturen und Trends in Datenräumen. Daneben stellen moderne Visualisierungsumgebungen Funktionen zur Analyse und Synthese bereit.

Der „ÖROK-Atlas online“ will mit seinem Angebot einerseits die kartographische Visualisierung unterschiedlicher Datensätze ermöglichen, andererseits die Abfrage und Analyse dieser erleichtern. Er integriert sowohl geographische, als auch thematische Daten und macht diese über ein Kommunikationsportal abrufbar und lässt so eine Informationsschnittstelle für die Abfrage, Analyse und Darstellung von raumrelevanten Sachverhalten entstehen.

Die Anforderung an die Entwickler bestand darin, qualitativ hochwertige Karten auf dem Bildschirm und für den Ausdruck entstehen zu lassen. Die Nutzer sollen Parameter, wie Anzahl der Klassen oder Farbgebung selber bestimmen können. Diese Änderungen aber müssen in einem Rahmen bleiben, die in ihren Spezifikationen von Experten fixiert wurden. Um mit der Karte

interagieren zu können, braucht es zusätzlicher Funktionen, die zur Navigation im kartographischen Kommunikationsportal nötig sind. Diese bestehen auf der einen Seite aus Tools zur räumlichen Navigation wie Zoomfunktionen für Maßstabsänderungen im gewünschten Kartenausschnitt, oder Panfunktionen zur Verschiebung des Ausschnittes. Auf der anderen Seite gibt es Funktionen zur thematischen Navigation, wie Möglichkeiten einzelne Ebenen einer Karte ein- und auszublenden, oder zu kombinieren (Spanring, Gartner, Kriz 2005).

Ziel der Entwickler war es, ein breit einsetzbares Medienangebot für die verschiedensten Gruppen zu schaffen, die sich mit Fragen der räumlichen Entwicklung Österreichs auch im europäischen Kontext interessieren. Ferner sollte die Verfügbarkeit auf jedem PC gegeben sein, wobei keine Systeminstallationen oder Downloads notwendig sein sollen und der Nutzer einfach einsteigen und sofort arbeiten kann. Die Internetdarstellung knüpft ferner an die bewährte Form der gedruckten Kartendarstellungen des ÖROK-Atlas an, und ergänzt sie durch neue Möglichkeiten der Verbreitung, Nutzung und insbesondere eigenständigen Bearbeitungsmöglichkeiten! Dazu dient ein reiches Angebot von Tools.

3. Zwei grundsätzliche Nutzungsmöglichkeiten

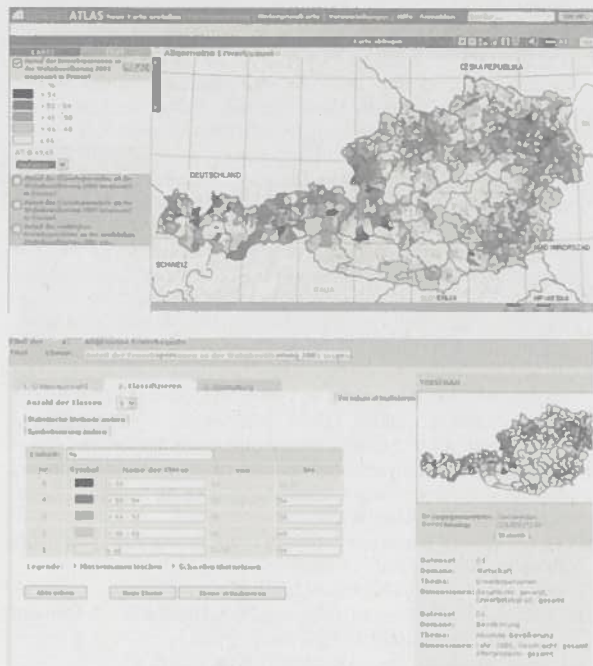
Dem User stehen zwei Wege offen: 1. die sofort mögliche unregistrierte Nutzung und 2. eine nach kostenfreier Registrierung (per mailadresse)

1. In der **unregistrierten Form** kann jeder Nutzer sofort kostenfrei die Karten aus dem Internet über eine Suchfunktion bzw. über einen Kartenindex aufrufen (s. o.), ausdrucken. Ein Großteil der User wird mit dieser Funktion auskommen können. Zu jeder der angebotenen (und in Zukunft laufend ergänzten) Karten gibt es auch einen Erläuterungstext mit Diagrammen, Tabellen etc. Diesen kann man markieren und in weiterer Folge in ein eigenes Word-file einbauen und bei Arbeitsblättern, Lernplattformen etc. nutzen.

1.1 Über die Funktion „Neue Karte erstellen“ bzw. „Ebene in Karte dazufügen“ lassen sich nicht nur die verschiedenen Grundkartenelemente (Grenzen, Relief-schummerung, Städtenamen ...) aus bzw. selektiv einblenden. Wertvolle Aspekte bietet die Möglichkeit unterschiedliche Bereiche der vorhandenen Daten zu kombinieren und gemeinsam auf einer neuen Karte darzustellen. Im System des Programms sind nämlich Rohdaten vorhanden. So zur Bevölkerung die absolute Zahl und die Fläche. Zur Kartenerstellung der Dichte werden aus Kombinationen die am Bildschirm neu aufscheinenden Karten errechnet. Man kann dabei dann auch eigene Daten kombinieren: Die Bevölkerungsprognose bis 2013 – etwa der über 65-Jährigen mit der Fläche des Dauersiedlungsraumes.

1.2 Hintergrundinformationen liefern auch die Möglichkeiten, die zugrundeliegende Statistiken und die Klassenverteilung, die den Signaturenstufen der Karten zugrunde liegen, einzublenden. Wie schon in einfacheren „MyMap“ (s. o.) ist hier außerdem die Möglichkeit eröffnet, nicht nur bei den Signaturen die Farbdarstellung bzw. auch eine Schwarz-weiß-Darstellung (was

gerade für die schulische Nutzung – etwa für Vervielfältigung am Copierer, bei Arbeitsblättern etc. nicht unbedeutend ist) erstellen zu können. Darüber hinaus kann der Nutzer am Bildschirm die unterschiedlichen Eindrücke erarbeiten, die bei unterschiedlichen Klassenzahlen und Veränderung der Schwellenwerte entstehen. Die aufgerufenen Karten können so über ein Symbol, das man in dem linken „Karte-Text-Kasten“ neben der Kartendarstellung findet und das ein neues Fenster auf dem Bildschirm öffnet, in den Signaturen (etwa für den Ausdruck in s/w, oder mehr dargestellte Schwellenwerte („Anzahl der Klassen“), oder die Karte neu aufgebaut auf der Basis Gemeinde-Bezirke-Länder etc. verändert werden.



1.3 Über einen kleinen Button rechts oben (unterhalb der Funktion „Suchen“) kann man ferner beim gleichen Thema dann von der Bezugsebene „Österreich“ auf die Bezugsebene „EU“ umschalten, um ev. Vergleiche zu ziehen oder Österreich im europäischen Kontext einzuordnen.

1.4 Bei der Funktion „Drucken“, kann man im Modus der niedrigen Auflösung für weitere Nutzung (etwa auf einer eigenen Plattform für blended-learning – vgl. Koller/Sitte Ch. 2006) die Ergebnisse abspeichern.

1.5 Über die im linken Frame angeführten „Links“ findet man rasch und problemlos zu den einzelnen Raumplanungsadressen der Bundesländer. Hier böte sich noch die Möglichkeit ein zentrales geographie-/raumordnungsbezogenes Linkregister auszubauen und eine zentrale Ausgangsplattform zu schaffen (ich weise in diesem Zusammenhang auf die Dokumentationsaktivität der ÖROK hin, die bis 2000 in ihrer Schriftenreihe regelmäßig einen Literaturbericht zur Raumforschung und Raumordnung in Österreich erstellt hatte). Vieles kann für die Schule zwar über unser Portal www.gw.eduhi.at gefunden werden, aber so bestünde die Möglichkeit ausgehend vom Atlas eine spezielle virtuelle (thematische?) Einstiegsschiene für das Raumordnungsfragen betreffende Netzwerk zur Verfügung haben.

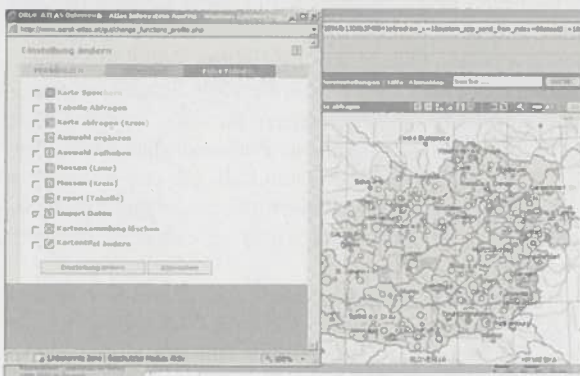
2. Noch mehr Möglichkeiten hat man nach einer kostenfreien **Registrierung als Nutzer:**

Damit kann man über das oben beschriebene „view only“ Prinzip hinaus gehen – der User kann vorgegebene Pfade verlassen. Hier gibt es einen eigenen Werkzeugkasten (symbolisiert durch einen kleinen Hammer in der Bildschirmansicht oben rechts).

Registrierte User haben ferner die Möglichkeit ihre eigenen Karten auch abzuspeichern – diese bleiben dann am ÖROK-Server gesammelt und sind über einen via Registrierungs-mail zugesendeten Link wieder aufrufbar. Die „eigenen Karten“ erscheinen im Kartenindex nach dem Einloggen gelb unterlegt auf. Dazu können sie auch eigene Daten importieren bzw. aus dem Atlas exportieren.

Bei der Voreinstellung „Funktion hinzuklicken“ kann der User auch die Karten im Detail „abfragen“. Ein von ihm aufgespanntes Rechteck gibt ihm in einem Fenster für diesen Bereich eine Liste der Werte. Über den Pol. Bezirk kann man die Namen und Daten der Gemeinden (etwa Bevölkerungspyramiden, Altersstruktur, Bevölkerungsentwicklung, Wirtschaftsdaten, wie Arbeitslosigkeit etc. abrufen. Dorthin kommt man auch über die Suchfunktion und Eingabe der Gemeinde/des Bezirks.

Beim Ausdrucken kommt normalerweise im Modus „niedrige Auflösung“ ein Bild der Karte. Registrierte Nutzer können zusätzlich noch sich ein hochauflösendes PDF der Karte drucken/herunterladen (auch hier wird der Link via mail dem User zugesandt).



3. Didaktisch-methodische Anregungen

Schon bisher konnte man für die Österreichklassen Karten des gedruckten ÖROK-Atlas gut einsetzen. Das ergänzte die Arbeit mit anderen virtuellen Quellen, wie etwa Zeitungs- und Zeitschriftenartikel aus dem WWW, die beispielsweise in einer die Jahresthemen begleitenden Webseite als Links gespeichert vorliegen (etwa gibt es solch eine zu „RGW7neu“ – anzuwählen über den gw.eduhi.at) – gute thematische Karten waren dabei ein eher schwer aufzufindender Bereich. Bei der oben angesprochenen unterrichtlichen Kartennutzung wären aus meiner Erfahrung etwa Einzelarbeiten von Schülern, die Vorbereitung von Referaten, die Spezialthemen bei der Matura oder die Fachbereichsarbeiten zu nennen.

In Wahlpflichtfachkursen, wo ja in der Regel weniger Schüler, etwa um einen Tisch herum mit dem Lehrer sitzen, war es einfacher mit den ein bis zwei vorhandenen Kartenblättern eines Themas zu arbeiten, als im mitunter großen Klassenverband. Man musste dazu schon anspruchsvollere Sozialformen, wie arbeitsteiligen Gruppenunterricht, Lernzirkel/Stationenbetrieb oder Grup-



penpuzzles verwenden, da die farbigen, großformatigen Karten auch nur schlecht kopierbar waren. Hilfe bot manchmal der gedruckte Statistikanhang, den ich mitunter im Online-GIS „MyMap“ umarbeiten ließ.

Nun aber stehen uns weit mehr Möglichkeiten offen. Gerade zu den Lehrplanthemen Bevölkerung, Arbeitsmarkt, Regionale Disparitäten haben wir nun jederzeit greifbare, aktuelle und leicht einsetzbare Unterlagen via Internet:

Frontal kann ich via Beamerprojektion in der Klasse Themen ansprechen, illustrieren, u. U. Vergleiche ziehen lassen. Eigene Karten kann ich in s/w sowohl für Arbeitsblätter, als auch für blended-learning-Seiten (eigene schulinterne Materialsammlung oder Lernplattformlösungen wie etwa bei Koller/Sitte Ch. 2005 beschrieben, aber mit ähnlichen methodischen Szenarien auch auf den etwas komplizierteren „moodle-Plattformen“ vgl. Angebot www.e-lisa-academy.at bzw. www.edumoodle.at/moodle) gestalten. Entsprechend vom Lehrer beigefügte Fragen geben Schülern, bei stärker selbstgesteuerten Arbeitsformen, ein erstes „Geländer“ (ich kann solche aber auch von verschiedenen Gruppen-/od. in Partnerarbeit als Nachbereitung erstellen lassen und dann von den jeweils anderen Gruppen beantworten ... u. U. auf einer Plattform posten, weiter bearbeiten lassen – etwa bei Mindmaps etc. ...), beispielsweise um Thesen zu bestimmten Sachverhalten formulieren und überprüfen zu lassen. Gerade die hier nun erstmals virtuell möglichen Vergleiche der beiden Bezugsebenen Österreich–EU helfen, vielfältige Aspekte zu erschließen. Gerade der Bereich, aktuelle thematische Karten zu EU-bezogenen Themen in der Klasse verfügbar zu haben, war ein Problem, das der EUROSTAT-Server nur bedingt lösen half. Mit der in Aussicht gestellten laufenden Erweiterung des virtuellen Atlasangebots durch die ÖROK wird uns sehr der Unterricht erleichtert werden!

Und letztlich sei eine neue Variante bei der Matura angeführt: nicht nur die Präsentation (die ging bei der Reifeprüfung auch schon bisher mit der einen, in der Schule vorhandenen gedruckten Karte des ÖROK-Atlas), sondern gerade die für spezielle Fragestellungen am Bildschirm mögliche Kombination von Daten, ihre Veränderung – etwa bei Schwellenwerten und Sig-

naturenklassen, die Neuerstellung von Karten und ihre Interpretation können ähnlich attraktiv und spannend sein, wie in „Darstellender Geometrie“, wo bei der mündlichen Prüfung am Laptop mit dem CAD-Programm „Micro-Station“ das Anwendungskönnen des Kandidaten vor aller Augen multimedial vom Prüfling demonstriert wird (was ja der Lehrplan AHS-Oberstufe 2004 ausdrücklich via seiner aufgelisteten „Kompetenzen“ fordert! – vgl. Sitte Ch. 2004).

Literatur

- FELKEL E. (2006): ÖROK-Atlas online. In: RO-Info – Tiroler Raumordnung u. Raumentwicklung, H. 32, S. 12–13. www.tirol.gv.at/raumordnung/
- HITZLH. (2006): MyMap – Thematic Mapping Tool. In: GW-UNTERRICHT (Hg. Bank Austria Wien „Forum Wirtschaftserziehung“) H. 102. S. 95–97. <http://map.gis.univie.ac.at/mymap>
- KATZLBERGER G., KRIZ K., PUCHER A. (2007): ÖROK-Atlas online. Einsatz eines nationalen Atlasinformationssystems im Unterricht. In: Angewandte Geoinformatik 2007, hrsg. J. Strobl, T. Blaschke u. a., Beiträge zum 19. AGIT-Symposium Universität Salzburg
- KOLLER A., SITTE Ch. (2005): Blended Learning mit community.schule.at – Anregungen für den Einsatz von Community- und Lernplattformen im GW-Unterricht. GW-UNTERRICHT 100 (= Festschrift Wolfgang Sitte zum 80. Geburtstag) S. 71–78; www.eduhi.at/dl/blendedlearningGWU100.pdf
- RABL M. (2005): Der Tirol Atlas (<http://tirolatlas.uibk.ac.at>) – ein modernes Atlas-Informationssystem für Nord-, Ost- und Südtirol. In: GW-UNTERRICHT 98, S. 57–62
- RABL M. (2006): Der Tirol Atlas (<http://tirolatlas.uibk.ac.at>) – Einsatzbeispiele im Unterricht. In: GW-UNTERRICHT 102, S. 46–52
- SEIDL M., KRIZ K. (2006): ÖROK-Atlas online – Atlas Informationssystem Austria (AIS) Ein interaktives multimediales Informations- und Analyseinstrument. In: 11. Internat. Konferenz zur Stadtplanung u. Reg. Entwicklung, hrsg. M. Schrenk, Eigenverl. d. Vereins CORP Wien
- SITTE Ch. (2004): Ein neuer Lehrplan GWK für die AHS-Oberstufe 2004. In: Wissenschaftl. Nachrichten H. 125, S. 47–52. www.eduhi.at/dl/LP2004wn125.pdf
- SITTE Ch. (o. J.): Webergänzung zum PS „Sozialformen & Medien“ am Inst. f. Geographie d. Uni Wien. <http://homepage.univie.ac.at/Christian.Sitte/FD/PSsozialformen&medien03/index.html>
- SPANRING Ch., GARTNER G., KRIZ K. (2005): ÖROK-Atlas online. Vortrag CORP 2005 & Geomultimedia05 Wien. In: Proceedings, hrsg. M. Schrenk, Eigenverl. d. Vereins CORP Wien S. 643–650
- Geoland – Geofachdatenportale der österr. Bundesländer – Einstiegseite www.geoland.at/ (zu diesem kommt man auch über die ÖROK-Atlas Webseitenangabe „Links“)

Buchbesprechungen

BOFINGER Peter: **Grundzüge der Volkswirtschaftslehre.** Eine Einführung in die Wissenschaft von Märkten. Pearson Education Deutschland (www.pearson-studium.de), 2007. 2., aktualisierte Auflage, 615 Seiten + CD-ROM € 41,10.

Volkswirtschaftslehredarstellungen gibt es viele: trockene, spannende, langatmige, kurze, geraffte, kurzlebige, langlebige aber nicht mehr aktueller – aber wenige bieten dem Nutzer methodisch so viele Ansätze wie diese. Damit ist nicht nur die beigelegte CD-ROM gemeint, anhand der die meisten theoretischen Modelle nachgespielt und dabei anhand von Simulationen einfach nachvollziehbar wird, wie Märkte im Kleinen und im Großen funktionieren. Damit sind nicht nur die vielen lebensnahen Beispiele gemeint, die der Autor, Professor an der Universität Würzburg, mit einbindet. Methodisch faszinierend ist seine Idee, den modularen Aufbau des Buches – je nach Interessen und zeitlichen Möglichkeiten – auf fünf verschiedenen Wegen aufzuschließen (eine Idee, die weiter gesponnen, so meint der Rezensent, für neu zu gestaltende GW-Schulbücher, die wegen der autonomen Gestaltungsmöglichkeiten der Wochenstunden an den Schulen, vermehrt in einem Band gemeinsam für die 5. und 6. Klasse Oberstufe herausgebracht werden, faszinierende Möglichkeiten eröffnen würde). Bofinger bietet dem Leser erstens „eine Fast-Track“ mit 5 der 26 Buchkapitel zum Reinschnuppern und ersten Überblick an; ferner – wie er im Vorwort ironisch schreibt „... wenn Sie das Buch dann nicht gleich weiterverkaufen ...“ – zeigt er eine „Normal Route“ mit 14 Kapiteln + CD-ROM-Nutzung auf; drittens einen „Spezialpfad Mikroökonomie und Ordnungspolitik“ und viertens einen „Spezialpfad Makroökonomie“. Danach schreibt der Autor „... Wenn Sie über genug Kondition verfügen, können Sie natürlich auch das ganze Buch von vorne bis hinten am Stück durcharbeiten. Sie werden dabei – hoffentlich – sehen, dass die 26 Kapitel einem klaren roten Faden folgen ...“. Hervorzuheben ist, dass die Kapitelüberschriften fast als Zielvorstellungen für den Leser formuliert sind, wie „Die Arbeitsteilung ist die Mutter unseres Wohlstandes ... Wie kann man eine arbeitsteilige Wirtschaft am effizientesten organisieren? ... Wie alle Informationen über die Nachfrageseite in der Nachfragekurve verdichtet werden ... Wie kommen das gesamtwirtschaftliche Angebot und die gesamtwirtschaftliche Nachfrage ins Gleichgewicht? ... Makroökonomie, wie sie schon die Großväter lehrten ... Wie Wirtschaftspolitik in der offenen Volkswirtschaft funktioniert.“ An den jeweiligen Kapitelanfängen sind für den vorbereitenden Lehrer optimal, aber auch hilfreich für den studierenden Leser, die sehr instruktiv ausformulierten genaueren Lernziele der folgenden Darstellung äußerst hilfreich! Am jeweiligen Kapitelende findet man eine „Vertiefung“, Schlagwörter (des Kapitels mit Seiteverweisen) und komplexere Aufgaben, an denen man eine Anwendung des Gelesenen nacharbeiten kann (als Lehrer kann ich sie auch für kleine portfolioorientierte Leistungsnachweise der Schüler einsetzen). Die reichhaltige Grafikausstattung zeigt durchwegs Langzeitentwicklungen (etwa 1921 bis 2005, oder 1949 bis 2005, 1988 bis 2005 ...). Auf

einer Companion-Webseite findet der Nutzer Powerpoint-Folien sowie alle Abbildungen des Buches, Links zu Daten und Originalquellen, Institutionen etc., aber auch Lösungen der Aufgaben.

Insgesamt ist es eine wirklich tragfähige Grundlage für anspruchsvolle Wahlpflichtfächerkurse mit Wirtschaftsschwerpunkt – aber durch seine Kurzformmodulabfolge (s. o.) auch für einen Einsatz in nur sequenzweise gestalteten Ökonomieunterricht – und selbstverständlich für die „selbstgesteuerte Fortbildung“! „Der Bofinger“ sollte in keiner Schulbibliothek, in keinem GW-Kabinett fehlen!
Ch. S.

GEBHARDT H., R. GLASER, U. RADTKE, P. REUBER, (Hg.): **Geographie. Physische Geographie und Humangeographie.** Elsevier GmbH/Spectrum Akademischer Verlag. Heidelberg/München. 2007. 1096 Seiten, € 89,50.

Das vorliegende Werk geht den selten eingeschlagenen Weg einer Zusammenschau der beiden wichtigsten Teilbereiche unseres Bezugsfaches – Handbücher kennen wir meist zu jedem der Teilbereiche. Die Herausgeber und ihre über 100 in den einzelnen Teildisziplinen ausgewiesenen Mitautoren sehen ihre Gesamtschau auch als eine Einladung, die „Welt“ und ihre Zukunftsprobleme in einer breiteren Perspektive verstehen zu lernen, als das viele rein naturwissenschaftlich oder rein kulturwissenschaftlich ausgerichtete Nachbardisziplinen bieten können. Es unterscheidet sich dabei, so die Autoren, von anderen Geographielehrbüchern, das gerade den Zusammenhängen von Umwelt und Gesellschaft in ihrer Schnittmenge zwischen den beiden oben genannten Bereichen breiter Raum eingeräumt wird. „Geographie“ wird dabei als ein „Brückenfach“ mit vielen Ansätzen, mit speziellen Methoden beschrieben. Dem Lehrbuchcharakter entsprechend, werden als Grundgerüst die verschiedenen Teilbereiche der Allgemeinen Geographie vorgestellt. Dazwischen aber streuen die Autoren immer wieder exemplarisch aktuelle Forschungsthemen ein. Interessante Erweiterung erfahren diese Exkurse durch eingestreute www-Links und aktuelle Literaturangaben. Diese und die reiche graphische Ausstattung mit Diagrammen, Kärtchen, Schaubildern etc. machen das Buch gerade für Studienbibliotheken zu einem wertvollen Startpunkt weiterer speziellerer Beschäftigung. Es ist in seinen sechs thematischen Abschnitten eine flüssig geschriebene Zusammenschau, Einstieg und Ergänzung zu dem ebenfalls im Spectrum-Verlag 2001 von Brunotte/Gebhardt/Meurer/Meusburger/Nipper herausgegebenen vierbändigen „Lexikon der Geographie“ oder der ebenfalls 2001 dort von Gebhardt u. a. herausgegebenen deutschen Übersetzung von Knox/Marstons „Humangeographie“ (beide rezensierten wir in GW-UNTERRICHT).

Adressaten dieses Bandes sind neben Studierenden aber auch verschiedenste Multiplikatoren, seien sie in Medien, Wirtschaft, Politik – aber auch eben die Schulen, denen mit diesem Buch „die Geographie“ als ein faszinierendes und gesellschaftlich relevantes Feld mit vielen neuen Ideen und Ansätzen vorgestellt wird. Damit sollten es nicht nur möglichst viele Schulbibliothek-



ken, sondern gerade auch die Lehreraus- und -fortbildungsinstitutionen anschaffen. Auch Entscheidungssträger in unserer Schulverwaltung, bei Lehrplan- und Approbationskommissionen sollten dieses Handbuch heranziehen – es täte unserem Fach und seiner Weiterentwicklung gut, weil es bekanntes strukturiert, akzentuiert, vertiefen hilft, und neue Blickwinkel eröffnet!

Ch. S.

HIMPSL K.: **Wikis im Blended Learning**. Vwv 2007. 170 Seiten, € 27,65.

Dieses Buch ist aus einem Werkstattbericht eines an der HTL Dormbirn erfolgten Einsatzes von WIKIs entstanden. Auch hier findet der Leser einige theoretische Absicherungen des eingeschlagenen Weges angesprochen. Insbesondere sollte sich dabei jeder seiner zugrundeliegenden bzw. angestrebten Lerntheorien bewusst sein. Schwerpunkt aber ist die Schilderung konkreter Arbeitsabläufe in konkreten, verschiedenen Fach- und Unterrichtsbereichen und pädagogische Situationen einer Schule (neben Lernszenarien u. a. auch die Wiki-

funktion bei Klassenratssitzungen, Elterninformationen, schulinterner Projektentwicklung etc.) ansprechenden Einsatzmöglichkeiten der Variante mediawiki.org die an Himppls Schule letztlich dann mit einer Illias-Lernplattform letztlich verbunden wurde.

ABFALTER E.: **Foren, Wikis, Weblogs und Chats im Unterricht**. Vwv-Verlag.de 2007. 146 Seiten, € 25,60.

Dieses Buch, aus einer Diplomarbeit beim Postgraduated Lehrgang Medienpädagogik der Donau Uni Krems entstanden, ist eine überblicksartige erste Einführung in Online-Kommunikationsmedien, einer Reflexion zu Jugend und Internet, einer Skizze der Eigenschaften und Potentiale der oben angeführten Möglichkeiten in Bezug auf ihre Bildungspotentiale, die in eine Darstellung der Online-Kommunikation als Bestandteil von didaktischen Konzepten mündet. Dabei werden vor einem immer wieder angesprochenen theoretischen Hintergrund einige Formen im Sinne des Selbstgesteuerten und kooperativen Lernens konkret dargestellt.

LPA Prof. Mag. Dr. Wolfgang SITTE verstarb 81-jährig

Mit seinem letzten Weg, den er trotz seiner Krankheit die Gnade hatte im Juni 2006 zu Hause in Salzburg im Kreise seiner Familie zu gehen, verloren die WISSENSCHAFTLICHEN NACHRICHTEN ihr dienstältestes Redaktionsmitglied.

Der Physiker und Mathematiker Dr. Walter Kranzer, der die WN mit ihrer ersten Nummer im April 1963 gegründet hatte, holte mit Nummer 8 im Juni 1965 seinen Geographiekollegen Wolfgang Sitte für die Betreuung des Bereichs „Wirtschaftsinformationen und Sozialwissenschaften“ in das Redaktionsteam, für das er bis Heft 129 regelmäßig auch eine Vielzahl von Beiträgen geschrieben hatte (vgl. u. a. dazu ein zusammenfassendes Inhaltsverzeichnis in WN 50/1979 – für später findet man ein solches auf gw.eduhi.at >Medien >Zeitschriften), auch als er selber 1978 mit „seiner“ Zeitschrift „GW-Unterricht“ (gesponsert von der Bank Austria/Forum Wirtschaftserziehung), das seither geographiedidaktisch wichtigste Organ unseres Landes gründete. In den WN erfolgten davor die wichtigsten schulgeographischen Initiativen, die laufend die aktuellsten Trends an eine breite Lehreröffentlichkeit heranbrachten. Exemplarisch seien genannt die den Heften 9/1965 bis 18 beigegebene Dias mit Luftbildinterpretationen, 32/1973 zur Arbeitsgemeinschaft Politische Bildung in der Maturaklasse, 45/1977 zum Paradigmenwechsel der Unterstufen-LPe; in 48/1978 stellte sein Mitstreiter Gustav Kramer den 1. themat. Entwurf für eine 5. Klasse AHS vor ...; W. S. schrieb schon in WN 102 u. 103/1997 zu IKT in GW. In Heft 114/2000 gab er einen Vorabdruck eines ersten Stichwortartikels seines dann 2001 gemeinsam mit H. Wohlschlägl am Institut für Geographie d. Uni Wien herausgegebenen österreichischen Fachdidaktikhandbuches „Beiträge zur Didaktik d. Geographie u. Wirtschaftskunde-Unterrichts“ (Bd. 16 d. Materialien z. Did. d. GW), wodurch „GWK“ zu einem der fachdidaktisch am besten dokumentierten Schulfächern in Österreich wurde.

Sein 80. Geburtstag wurde noch in „seiner“ Zeitschrift GW-UNTERRICHT gleichzeitig mit H. 100/2005 be- gangen (bzw. in den Mitt. d. Österr. Geogr. Ges. Bd. 147/2005, S. 295 ff.). Freunde finden Zeilen in Gedenken anlässlich seines Ablebens in GW-U 104 u. 106 und in den MÖGG 148/2006 S. 397 ff. Es liegt an uns, die von ihm begonnene, auch international gewürdigte und von ihm bis zuletzt mitgestaltete stete Erneuerung des Schulfaches ebenso engagiert weiter voranzutreiben!