

# Calcul diferențial și integral (notițe de curs)

Șt. Balint

E. Kaslik, L. Tănăsie, A. Tomoioagă, I. Rodilă, N. Bonchiș, S. Mariș

## Cuprins

<b>I</b>	<b>Introducere</b>	<b>9</b>
1	Noțiunile: mulțime, element al unei mulțimi, apartenența la o mulțime: sunt noțiuni fundamentale în matematică.	9
2	Simboluri folosite în teoria mulțimilor.	9
3	Operații cu mulțimi.	10
4	Relații binare.	12
5	Funcții.	14
6	Funcția compusă. Inversa unei funcții.	16
7	Simboluri logice.	17
8	Afirmația contrară, teorema contrară și teorema reciprocă.	18
9	Condiție necesară și condiție suficientă.	19
<b>II</b>	<b>Calcul diferențial și integral pentru funcții reale de o variabilă reală</b>	<b>20</b>
10	Elemente de topologie în $R^1$ .	20

11	Șiruri de numere reale.	21
12	Convergența șirurilor de numere reale.	22
13	Reguli privind convergența șirurilor de numere reale.	23
14	Punct limită al unui șir de numere reale.	27
15	Serii de numere reale.	28
16	Reguli privind convergența seriilor de numere reale.	31
17	Serii absolut convergente.	35
18	Limita într-un punct a unei funcții.	37
19	Reguli privind limita funcției într-un punct.	40
20	Limite laterale.	42
21	Limite infinite.	44
22	Punctele limită ale unei funcții într-un punct.	45
23	Continuitatea unei funcții într-un punct.	46
24	Reguli privind continuitatea unei funcții într-un punct.	48
25	Proprietăți ale funcțiilor continue.	49
26	Șiruri de funcții. Mulțimea de convergență.	52
27	Convergența uniformă a unui șir de funcții și continuitatea.	54
28	Șiruri de funcții reale egal continue și egal mărginite.	55
29	Serii de funcții. Convergență și convergența uniformă.	56
30	Criterii de convergență pentru serii de funcții.	58

31 Serii de puteri.	59
32 Operații cu serii de puteri.	60
33 Derivabilitatea funcțiilor.	61
34 Reguli de derivabilitate.	63
35 Extreme locale.	68
36 Proprietăți fundamentale ale funcțiilor derivabile.	69
37 Derivabilitatea (diferențiabilitatea) de ordin superior.	72
38 Polinoame Taylor.	73
39 Teorema de clasificare a punctelor de extrem.	78
40 Integrala Riemann-Darboux.	79
41 Proprietăți ale integralei Riemann-Darboux.	81
42 Clase de funcții integrabile Riemann-Darboux.	86
43 Teoreme de medie.	89
44 Teorema fundamentală de calcul integral.	90
45 Tehnici de determinare a primitivelor.	92
45.1 Integrarea prin părți . . . . .	93
45.2 Schimbarea de variabilă . . . . .	94
46 Integrale improprii.	96
47 Serii Fourier.	98
48 Diferite forme ale seriei Fourier.	103

<b>III</b>	<b>Calcul diferențial și integral pentru funcții de <math>n</math> variabile reale</b>	<b>108</b>
49	Elemente de topologie în $R^n$ .	108
50	Limita într-un punct a unei funcții de $n$ variabile.	112
51	Continuitatea funcțiilor de $n$ variabile.	113
52	Proprietăți remarcabile ale funcțiilor continue de $n$ variabile.	115
53	Diferențiabilitatea funcțiilor de $n$ variabile.	116
54	Proprietăți fundamentale ale funcțiilor diferențiabile.	122
55	Diferențială de ordin superior.	126
56	Teoremele lui Taylor.	128
57	Teoreme de clasificare a extremelor locale.	129
58	Extreme condiționate.	130
59	Integrala Riemann-Darboux dublă pe un interval bidimensional.	131
60	Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe un interval bidimensional.	134
61	Integrala Riemann-Darboux dublă pe o mulțime măsurabilă Jordan.	137
62	Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe o mulțime măsurabilă Jordan.	143
63	Integrala Riemann-Darboux pe o mulțime $n$ -dimensională măsurabilă Jordan.	146
64	Calculul integralei Riemann-Darboux pe o mulțime $n$ -dimensională măsurabilă Jordan.	152
65	Curbe simple și curbe simple închise.	153

66	Integrala curbilinie de speța întâi.	160
67	Integrala curbilinie de speța a doua.	162
68	Transformarea integralelor duble în integrale curbilinii.	163
69	Suprafețe simple.	167
70	Integrale de suprafață de speța întâi.	172
71	Integrale de suprafață de speța a doua.	173
72	Proprietăți ale integralelor de suprafață.	174
73	Derivarea integralelor cu parametru.	176

## La ce poate fi util un curs de calcul diferențial și integral pentru un student de anul întâi care dorește să fie licențiat în informatică?

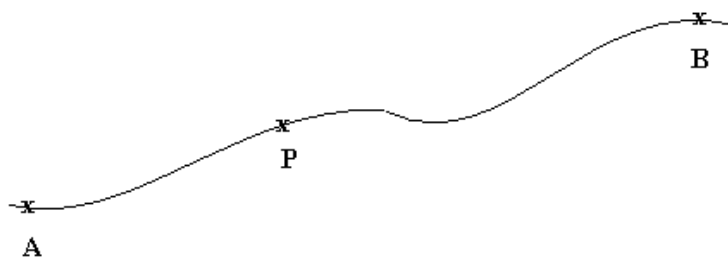
Această întrebare ne-a fost pusă de mai multe ori chiar la primele lecții de către studenții care au participat la curs.

Este dificil să dăm un răspuns complet și convingător la întrebare la început pentru că trebuie să vorbim despre utilitatea unor concepte și instrumente matematice pe care cei care întreabă nu le cunosc încă în rezolvarea unor probleme cu care nu s-au întâlnit.

Chiar dacă așa stau lucrurile întrebarea nu trebuie și nu poate fi ocolită. Este necesar să formulăm un răspuns parțial care arată utilitatea acestei discipline în rezolvarea unei probleme reale și o face interesantă pentru viitorii informaticieni. Dorim să subliniem aici că pentru studenții care au optat pentru licență în matematică disciplina de calcul diferențial și integral reprezintă o parte consistentă a edificiului matematicii pe care ei trebuie să-l studieze și problema utilității nu se pune de obicei în termenii unei utilități în afara matematicii.

Revenim acum la încercarea de formulare a unui răspuns parțial promis studenților informaticieni. Dorim să spunem de la început că în acest curs vor fi prezentate concepte și instrumente clasice de calcul diferențial și integral folosite în analiza funcțiilor reale sau vectoriale de una sau mai multe variabile reale. Pentru a ilustra utilitatea unor concepte și instrumente prezentate în curs vom considera problema reală de elaborare a unui mers al trenurilor și vom sublinia acea fază în care anumite concepte și instrumente de calcul diferențial sunt utile.

Elaborarea unui mers al trenurilor pentru o rețea de căi ferate dată este o problemă reală și complexă. Ea se bazează pe: cunoașterea restricțiilor de viteză pe rețea; pe cunoașterea stațiilor; pe cunoașterea materialului rulant care urmează să circule pe rețea; pe opțiuni privind oprirea sau nu și staționarea unor trenuri în anumite stații și pe un calcul prealabil din care rezultă că dacă nu intervin lucruri neprevăzute atunci conform mersului, trenurile nu se ciocnesc. Anumite concepte și instrumente de calcul diferențial și integral se dovedesc utile tocmai în acest calcul. Vom ilustra un fragment dintr-un asemenea calcul. Pentru a se asigura că trenurile nu se ciocnesc este necesar să cunoaștem la fiecare moment poziția trenurilor care circulă pe aceeași linie și să ne asigurăm că nu există un moment la care pozițiile a două trenuri coincid. Să alegem de exemplu linia Timișoara București pe care o reprezentăm cu o curbă  $\overline{AB}$  ca în figura următoare:



iar un tren care circulă pe această linie în intervalul de timp  $[t_0, t_0 + T]$  va fi reprezentat cu un punct  $P$ . Dacă în intervalul de timp considerat sunt mai multe trenuri care circulă pe

această linie va trebui să descriem mișcarea fiecăruia. Pentru a descrie matematic mișcarea unui tren reprezentat cu  $P$ , putem asocia fiecărui moment de timp  $t \in [t_0, t_0 + T]$  lungimea arcului de curbă  $\widehat{AP}$ , unde  $P$  este punctul de pe curba  $\widehat{AB}$  unde se află trenul la momentul  $t$ . Se obține astfel o funcție  $f$  definită pentru  $t \in [t_0, t_0 + T]$  și care are valori în mulțimea  $[0, l]$ :  $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow [0, l]$ ;  $l$  este distanța pe calea ferată de la  $A$  la  $B$ .

Subliniem aici că obiectul apărut aici în mod natural pentru a descrie mișcarea unui tren, este o funcție reală de o variabilă reală care este un obiect matematic și este un subiect de studiu al cursului.

Trenul despre care vorbim, trebuie să sosească la anumite ore în stațiile în care are opriri și are restricții de viteză pe parcurs, de aceea funcția  $f$  poate fi destul de complicată. Cu toate acestea sunt câteva caracteristici ale mișcării reale care trebuie să se regăsească în proprietățile funcției  $f$ . Astfel, de exemplu, mișcarea reală este continuă; prin aceasta înțelegem că trenul  $P$  ajunge dintr-o poziție  $P_1$  într-o poziție  $P_2$  treptat, trecând prin toate pozițiile intermediare și nu printr-un salt. Aceasta înseamnă că funcția  $f$  care descrie mișcarea chiar dacă este complicată trebuie să aibă următoarea proprietate: oricare ar fi  $t_2 \in [t_0, t_0 + T]$  dacă  $t_1$  tinde la  $t_2$  atunci  $f(t_1)$  tinde la  $f(t_2)$ .

O funcție cu o asemenea proprietate, se numește în curs, funcție continuă pe segmentul  $[t_0, t_0 + T]$  și este studiată punându-se în evidență diferite proprietăți ale acesteia. Prin urmare funcțiile continue studiate în cadrul cursului sunt utile, de exemplu, pentru a descrie mișcarea unui tren pe o linie ferată.

Dacă trenul pleacă în momentul  $t_0$  din stația  $A$  și se îndepărtează continuu de  $A$  fără să se oprească până la momentul  $t_1$  în prima stație  $S_1$  atunci funcția  $f$  care descrie mișcarea are următoarea proprietate: oricare ar fi  $t', t'' \in [t_0, t_1]$ ,  $t' < t''$  rezultă  $f(t') < f(t'')$ . În curs o funcție cu această proprietate este numită monoton crescătoare. Tot în curs sunt prezentate și funcțiile monoton descrescătoare și proprietăți ale funcțiilor monotone. În cazul mișcării considerate, acest concept este util pentru că exprimă apropiere sau îndepărtare.

Datorită restricțiilor de viteză și a opririlor în stații viteza trenului depinde de locul în care se află. Mai exact depinde de momentul  $t$ : aceasta întrucât trenul în intervalul de timp  $[t_0, t_0 + T]$  poate să treacă de mai multe ori prin același loc. Pentru a afla viteza trenului la momentul  $t_1$  se consideră viteza medie  $\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}$  pe un interval de timp mic  $[t, t_1]$  și limita acesteia pentru  $t$  tinzând la  $t_1$  reprezintă viteza trenului la momentul  $t_1$ . În curs această limită se numește derivata funcției  $f$  în  $t_1$  și se notează  $f'(t_1)$ . Dacă trenul se află într-o stație în intervalul de timp  $[t_1, t_2]$  atunci viteza lui este zero  $f'(t) = 0$  pentru  $t \in [t_1, t_2]$ . Dacă  $f'(t) > 0$ , atunci trenul se îndepărtează de  $A$ , iar dacă  $f'(t) < 0$  atunci trenul se apropie de  $A$ . Dacă trenul merge cu o viteză constantă în intervalul  $[t_1, t_2]$ , atunci  $f'(t) = \text{const}$  pe intervalul  $[t_1, t_2]$ . Aceste considerații arată cât de util este conceptul de derivată studiat în curs în descrierea mișcărilor mecanice.

În final subliniem că dintr-un profil de viteză  $v(t)$  (care rezultă din restricții de viteză, fixarea apriori a momentelor de sosire și plecare din stații) funcția  $f(t)$  care descrie mișcarea se recuperează folosind formula integrală:

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

prezentată în curs.

Nădăjduim să credem că această argumentație extrem de simplă și parțială reușește

să convingă studenții informaticieni că vor face cunoștința la acest curs cu obiecte și rezultate matematice utile ce le vor fi de folos în viitoarea carieră de informatician.

Cursul scris este prezentat într-o formă destul de standard foarte asemănător cu un curs prezentat pentru cei care se pregătesc să fie licențiați în matematică.

Cursul vorbit însă este plin cu comentarii și exemple menite să ilustreze pe parcurs utilitatea și aplicabilitatea conceptelor și a rezultatelor la rezolvarea unor probleme reale.

Autorii



## Partea I

# Introducere

### 1 Noțiunile: mulțime, element al unei mulțimi, apartenența la o mulțime: sunt noțiuni fundamentale în matematică.

Într-un curs de matematică riguros, noțiunile care se folosesc trebuie definite.

O definiție descrie o noțiune (A) folosind o altă noțiune (B) presupusă cunoscută sau în orice caz mai simplă decât (A). Noțiunea (B) la rândul ei trebuie și ea să fie definită și în definiția ei se va folosi o altă noțiune (C) mai simplă ca (B), și așa mai departe.

Astfel, în construcția unei teorii matematice, în care noțiunile sunt definite, se degajă un set restrâns de noțiuni simple la care celelalte pot fi reduse și care la rândul lor nu sunt definite. Noțiunile din acest set vor fi numite noțiuni fundamentale. Noțiunile fundamentale în matematică trebuie să fie așa de evidente ca să nu necesite definiții. Semnificația noțiunilor fundamentale se descrie prin exemple.

Noțiunile: mulțime, element al unei mulțimi, apartenența unui element la o mulțime, sunt noțiuni fundamentale în matematică. Nu există definiții precise a acestor noțiuni, dar semnificația lor se poate clarifica prin exemple.

Să considerăm noțiunea de mulțime. Putem vorbi fără nici o ambiguitate despre: mulțimea studenților dintr-o sală de curs, mulțimea zilelor dintr-un an, mulțimea punctelor dintr-un plan, etc. În cazurile enumerate; fiecare student din sala de curs, fiecare zi a anului, fiecare punct al planului este un element al mulțimii respective.

Atunci când se consideră o mulțime concretă ceea ce este esențial este ca să existe un criteriu în baza căruia se poate decide pentru orice element dacă aparține sau nu aparține la mulțime. Astfel, în cazul mulțimii zilelor unui an; "20 mai", "3 iulie", "29 decembrie" sunt elemente ale mulțimii, iar "miercuri", "vineri", "ziua liberă", "ziua lucrătoare" nu sunt elemente ale mulțimii. În cazul mulțimii punctelor dintr-un plan doar punctele din planul considerat sunt elemente ale mulțimii. Dacă un punct nu este în planul considerat sau dacă elementul nu este un punct, atunci punctul sau elementul nu este element al mulțimii.

Pentru a defini o mulțime concretă este necesar să se descrie clar elementele care aparțin acestei mulțimi. Orice descriere defectuoasă poate duce la contradicție logică.

### 2 Simboluri folosite în teoria mulțimilor.

Dacă  $x$  este un element al mulțimii  $A$ , atunci aceasta se notează astfel  $x \in A$ . Dacă  $x$  nu este element al mulțimii  $A$ , atunci aceasta se notează cu  $x \notin A$ . Simbolul  $\in$  se numește simbolul apartenenței.

**Definiția 2.1.** Două mulțimi  $A$  și  $B$  care sunt formate exact din aceleași elemente se zic egale.

Altfel spus în familia mulțimilor egalitatea  $A = B$  înseamnă că aceeași mulțime se notează cu litere diferite, sau altfel,  $A$  și  $B$  sunt nume diferite pentru aceeași mulțime. Notăția  $A = \{x, y, z, \dots\}$  înseamnă că mulțimea  $A$  este formată din elementele  $x, y, z, \dots$ . Dacă într-o asemenea notație anumite simboluri se repetă acestea desemnează același element. De exemplu:  $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

O mulțime  $A$  formată din toate elementele  $x$  ale unei mulțimi  $B$  care au o anumită proprietate, se notează astfel:  $A = \{x \in B \mid \dots\}$ , unde proprietatea este specificată după linia verticală. De exemplu, fie  $a$  și  $b$  două numere reale astfel încât  $a < b$ . Mulțimea de puncte ale intervalului închis  $[a, b]$  este mulțimea  $[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R}^1 \mid a \leq x \leq b \right\}$ , unde  $\mathbb{R}^1$  este mulțimea tuturor numerelor reale.

**Definiția 2.2.** *Dacă orice element dintr-o mulțime  $A$  este element al unei mulțimi  $B$ , atunci zicem că  $A$  este o submulțime a mulțimii  $B$  și notăm  $A \subset B$  sau  $B \supset A$ .*

Relația  $A \subset B$  se citește astfel "mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$ ", iar relația  $B \supset A$  se citește astfel "mulțimea  $B$  include mulțimea  $A$ ". Se vede ușor că  $A = B$  dacă și numai dacă  $A \subset B$  și  $B \subset A$ .

### 3 Operații cu mulțimi.

**Definiția 3.1.** *Oricare ar fi mulțimile  $A$  și  $B$  reuniunea  $A \cup B$  este mulțimea de elemente care aparțin la  $A$  sau la  $B$  sau la ambele mulțimi.*

**Definiția 3.2.** *Oricare ar fi mulțimile  $A$  și  $B$  intersecția  $A \cap B$  este mulțimea de elemente care aparțin la  $A$  și la  $B$ .*

**Definiția 3.3.** *Oricare ar fi mulțimile  $A$  și  $B$  diferența  $A - B$  este mulțimea de elemente din  $A$  care nu aparțin la  $B$ .*

*Dacă mulțimea  $B$  este o submulțime a mulțimii  $A$  atunci mulțimea  $A - B$  se numește complementara lui  $B$  în  $A$  și se notează  $C_A B$ .*

**Comentariu:**

1. Este posibil ca două mulțimi  $A$  și  $B$  să nu aibă nici un element în comun. Într-un asemenea caz intersecția  $A \cap B$  nu are nici un element. Cu toate acestea convenim ca și în asemenea cazuri să considerăm că intersecția  $A \cap B$  este o mulțime; care nu conține nici un element. Această mulțime se numește mulțimea vidă (sau mulțimea nulă) și se notează cu simbolul  $\emptyset$ .
2. Noțiunile de reuniune a două mulțimi și de intersecție a două mulțimi pot fi extinse la trei, patru, cinci sau mai multe mulțimi. Astfel:  
Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt  $n$  mulțimi atunci:  
- reuniunea  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  este mulțimea elementelor care aparțin la cel puțin una din mulțimile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .  
- intersecția  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  este mulțimea elementelor care aparțin la toate mulțimile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

3. Oricare ar fi mulțimea  $A$  sunt adevărate următoarele incluziuni:  $A \subset A$  și  $\emptyset \subset A$ . Altfel spus mulțimea  $A$  și mulțimea vidă  $\emptyset$  sunt submulțimi ale mulțimii  $A$ . Aceste două submulțimi ale lui  $A$  se numesc submulțimi improprii ale mulțimii  $A$ . O submulțime  $B$  a mulțimii  $A$  diferită de  $A$  și  $\emptyset$  se numește submulțime proprie a mulțimii  $A$ .
4. Uneori reuniunea mulțimilor poartă denumirea de suma mulțimilor și intersecția mulțimilor poartă denumirea de produs al mulțimilor.
5. Operațiile de reuniune și intersecție sunt definite de obicei pe mulțimea tuturor submulțimilor (părților) unei mulțimi  $S$ , care se notează cu  $\mathcal{P}(S)$ .

*Operațiile de reuniune și intersecție au următoarele proprietăți:*

- *asociativitate:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- *comutativitate:*

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{oricare ar fi } A, B \in \mathcal{P}(S)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{oricare ar fi } A, B \in \mathcal{P}(S)$$

- *intersecția este distributivă față de reuniune:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- *reuniunea este distributivă față de intersecție:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C \in \mathcal{P}(S)$$

- *pentru orice  $A \in \mathcal{P}(S)$  există un singur  $B \in \mathcal{P}(S)$  astfel încât să avem  $A \cup B = S$  și  $A \cap B = \emptyset$ . Mulțimea  $B$  este mulțimea  $C_S A$ .*

- *pentru orice  $A \in \mathcal{P}(S)$  avem  $A \cup S = S$  și  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .*

- *pentru orice  $A, B \in \mathcal{P}(S)$  avem:*

$$C_S(A \cup B) = C_S A \cap C_S B$$

$$C_S(A \cap B) = C_S A \cup C_S B$$

*Aceste egalități se numesc legiile lui De Morgan.*

**Definiția 3.4.** *Oricare ar fi mulțimile  $A$  și  $B$  produsul cartezian  $A \times B$  este mulțimea de perechi ordonate  $(a, b)$  cu  $a \in A$  și  $b \in B$ .*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

*Produsul cartezian este distributiv față de reuniune și intersecție:*

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad \text{oricare ar fi } A, B, C$$

## 4 Relații binare.

**Definiția 4.1.** O relație binară în (sau pe) mulțimea  $A$  este o submulțime  $R$  a produsului cartezian  $A \times A$ :  $R \subset A \times A$ .

Prin tradiție apartenența  $(x, y) \in R$  se notează cu  $xRy$ .

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  este o relație binară în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.2.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este reflexivă dacă pentru orice  $x \in A$  avem  $xRx$ .

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este o relație binară reflexivă în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.3.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este simetrică dacă

$$xRy \Rightarrow yRx \quad \text{pentru orice } x, y \in A$$

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  este o relație binară simetrică în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.4.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este antisimetrică dacă

$$xRy \text{ și } yRx \Rightarrow x = y \quad \text{pentru orice } x, y \in A$$

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este o relație binară antisimetrică în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.5.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este tranzitivă dacă:

$$xRy \text{ și } yRz \Rightarrow xRz \quad \text{pentru orice } x, y, z \in A.$$

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este o relație binară tranzitivă în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.6.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este totală dacă pentru orice  $x, y \in A$  este adevărată cel puțin una dintre următoarele două afirmații:  $xRy$ ,  $yRx$ .

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este o relație binară totală în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.7.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este parțială dacă există  $x, y \in A$  astfel încât nici una din următoarele două aserțiuni nu este adevărată:  $xRy$ ,  $yRx$ .

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  este o relație binară parțială în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.8.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este o relație de ordine parțială dacă are următoarele proprietăți:  $R$  este relație parțială;  $R$  este reflexivă;  $R$  este antisimetrică;  $R$  este tranzitivă.

Relația de incluziune a mulțimilor este o relație de ordine parțială în mulțimea părților unei mulțimi.

**Definiția 4.9.** O relație binară  $R$  în mulțimea  $A$  este relație de ordine totală dacă are următoarele proprietăți:  $R$  este relație totală;  $R$  este reflexivă;  $R$  este antisimetrică;  $R$  este tranzitivă.

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este o relație binară de ordine totală în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale.

**Definiția 4.10.** O mulțime  $A$  împreună cu o relație de ordine parțială în  $A$  se numește sistem parțial ordonat și se notează cu  $(A, R)$ .

Mulțimea părților unei mulțimi  $X$  împreună cu relația de incluziune este un sistem parțial ordonat.

**Definiția 4.11.** O mulțime  $A$  împreună cu o relație de ordine totală  $R$  în  $A$  se numește sistem total ordonat și se notează tot cu  $(A, R)$ .

Mulțimea numerelor reale împreună cu relația  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \mid x - y \leq 0\}$  este un sistem total ordonat.

**Definiția 4.12.** Fie  $(A, R)$  un sistem parțial ordonat și  $A'$  o submulțime a lui  $A : A' \subset A$ . Un element  $a \in A$  este majorant pentru mulțimea  $A'$  dacă  $a$  verifică  $a'Ra$  oricare ar fi  $a' \in A'$ . Un majorant  $a^*$  pentru  $A'$  este margine superioară pentru  $A'$  dacă  $a^*$  verifică  $a^*Ra$  pentru orice majorant  $a$  al lui  $A'$ . Marginea superioară a lui  $A'$  dacă există se notează cu  $\sup A'$ .

**Definiția 4.13.** Fie  $(A, R)$  un sistem parțial ordonat și  $A'$  o submulțime a lui  $A : A' \subset A$ . Un element  $a \in A$  este minorant pentru mulțimea  $A'$  dacă  $a$  verifică  $aRa'$  pentru orice  $a' \in A'$ . Un minorant  $a_*$  pentru  $A'$  este margine inferioară pentru  $A'$  dacă  $a_*$  verifică  $aRa_*$  pentru orice minorant  $a$  al lui  $A'$ . Marginea inferioară a lui  $A'$  dacă există se notează cu  $\inf A'$ .

**Definiția 4.14.** Fie  $(A, R)$  un sistem parțial ordonat. Un element  $a \in A$  este maximal dacă pentru orice  $a' \in A$  cu proprietatea  $aRa'$  rezultă  $a'Ra$ .

**Remarca 4.1.** Familia  $P(X)$  a părților unei mulțimi  $X$  cu relația de incluziune  $R = \subset$  este un exemplu bun pentru ilustrarea acestor concepte. Sistemul parțial ordonat este  $(P(X); \subset)$ . O margine superioară a unei mulțimi  $\mathcal{B} \subset P(X)$  este orice submulțime a mulțimii  $X$  care conține mulțimea  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ , iar mulțimea  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  este marginea superioară a mulțimii  $\mathcal{B}$ . Analog, mulțimea  $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$  este marginea inferioară a mulțimii  $\mathcal{B}$ . Singurul element maximal în mulțimea  $P(X)$  este mulțimea  $X$ .

**Definiția 4.15.** O relație  $R$  în mulțimea  $A$  este relație de echivalență dacă are următoarele proprietăți:  $R$  este reflexivă,  $R$  este simetrică și  $R$  este tranzitivă. Un exemplu de relație de echivalență este egalitatea în mulțimea părților  $P(X)$  ale unei mulțimi  $X$ .

Mulțimea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ divizibil cu } 5\}$  este o relație de echivalență în mulțimea  $\mathbb{Z}$  a numerelor întregi.

**Definiția 4.16.** O relație  $R$  între elementele unei mulțimi  $A$  și elementele unei mulțimi  $B$  este o submulțime a produsului cartezian  $A \times B$ ;  $R \subset A \times B$ .

Prin tradiție dacă  $(x, y) \in R$  se notează cu  $xRy$ .

**Definiția 4.17.** O funcție  $f$  definită pe o mulțime  $A$  și cu valori în mulțimea  $B$  este o relație  $R$  între elementele mulțimii  $A$  și elementele lui  $B$  ( $R \subset A \times B$ ) care are următoarele proprietăți:

- a) pentru orice  $x \in A$ , există  $y \in B$  astfel încât  $xRy$ .
- b) dacă pentru  $x \in A$  și  $y_1, y_2 \in B$  avem  $xRy_1$  și  $xRy_2$ , atunci  $y_1 = y_2$ .

Prin tradiție, o funcție  $f$  definită pe mulțimea  $A$  și cu valori în mulțimea  $B$  se notează cu  $f : A \rightarrow B$ .

## 5 Funcții.

Noțiunea de funcție joacă un rol important în matematică. Nu este o noțiune fundamentală pentru că așa cum am văzut poate fi definită folosind noțiunea de mulțime (o relație binară cu anumite proprietăți). Cu toate acestea pentru cei care abia încep să studieze analiza matematică este mai ușor dacă consideră noțiunea de funcție drept noțiune fundamentală clarificând semnificația ei prin exemple și descriind-o de o manieră satisfăcătoare (pentru sensul comun).

**Descrierea 5.1.** Dacă la fiecare element  $x$  al unei mulțimi  $A$  ( $x \in A$ ) am pus în corespondență (am asociat) un element  $y$  dintr-o mulțime  $B$  ( $y \in B$ ) pe baza unei reguli, atunci zicem că am definit o funcție (corespondență, aplicație)  $f$  pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$  și o notăm cu  $f : A \rightarrow B$ . Astfel o funcție este determinată de mulțimile  $A$  și  $B$ , precum și de regula de corespondență (legea) care asociază unui element  $x \in A$  un element  $y \in B$ .

De ce **Descrierea 5.1.** a funcției nu este o definiție? Ce-i lipsește?

**Descrierea 5.1.** folosește noțiunile de corespondență și regulă care nu au fost definite în prealabil și de aceea **Descrierea 5.1.** nu este o definiție. Desigur intuitiv este clar ce este o regulă și ce este o corespondență. În cazuri simple, aceste noțiuni nu conduc la confuzii și sunt suficient de clare pentru a conferii noțiunii de funcție calitate de noțiune fundamentală. Altfel spus și noțiunea de funcție poate fi considerată noțiune fundamentală. Trebuie însă să reținem că acest lucru nu este necesar pentru că funcția poate fi definită cu ajutorul noțiunii de mulțime.

Este de asemenea important de reținut că în cazul în care funcția  $f : A \rightarrow B$  este gândită ca noțiune fundamentală descrisă de 5.1., atunci regula prin care unui element  $x \in A$  se

asociază un element  $y \in B$  este aplicabilă fiecărui element  $x$  din mulțimea  $A$ . Elementul  $x \in A$  se numește argumentul funcției, iar elementul  $y \in B$  ce corespunde lui  $x$  se numește valoarea funcției și se notează  $y = f(x)$ . Într-o asemenea notație și viziune funcția  $f$  apare ca o regulă care transformă fiecare element  $x \in A$  într-un element  $y = f(x) \in B$ . De aceea funcția se numește adesea și transformare.

Mulțimea  $A$  se numește domeniul de definiție al funcției  $f$  și mulțimea elementelor  $y \in B$  pentru care există  $x \in A$  astfel ca  $y = f(x)$ , se numește domeniul de valori al funcției  $f$ . Acesta se notează de obicei cu  $f(A)$  :

$$f(A) = \left\{ y \in B \mid \text{există } x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y \right\}$$

și se numește adesea imaginea mulțimii  $A$  prin funcția  $f$ .

Adesea va trebui să considerăm funcții care asociază la fiecare număr real  $x$  dintr-o submulțime  $A$  a mulțimii numerelor reale;  $x \in A \subset \mathbb{R}$ ; un număr real  $y = f(x) \in \mathbb{R}^1$ . Acest gen de funcții se numesc funcții reale de o variabilă reală și în cazul unora regula de corespondență este dată de o expresie algebrică explicită. De exemplu:

$$y = x^2 + 2x; \quad y = \frac{1-x}{\sqrt{x+2}}; \quad y = \sqrt[5]{1 + \sqrt[7]{x}}$$

Membrii dreپți ai acestor egalități reprezintă regula după care  $x$  se transformă în  $y$ . Regula în primul caz este: fiecare  $x$  se ridică la pătrat și apoi se adaugă dublul lui  $x$ .

Regulile în cel de-al doilea și cel de-al treilea caz pot fi formulate în mod asemănător.

Regula poate fi formulată și cu ajutorul funcțiilor elementare  $\exp$ ,  $\log_a$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{tg}$ ,  $\text{ctg}$ ,  $\text{arctg}$ , etc în combinație cu operații algebrice. De exemplu:

$$y = \log_2 \sqrt{1 + \sin x}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}x - 2^x}}.$$

Membrii dreپți ai acestor egalități arată regula după care  $x$  se transformă în  $y$ .

O altă metodă, utilizată frecvent, pentru a defini o regulă este următoarea: se consideră două funcții  $f_1$  și  $f_2$  definite printr-o expresie ca cele prezentate mai sus și un număr  $a$ , după care se scrie:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{pentru } x < a \\ f_2(x) & \text{pentru } x \geq a \end{cases}$$

Egalitatea aceasta se interpretează ca o regulă care la un număr  $x$  mai mic decât  $a$  face să corespundă un număr  $y$  după regula  $f_1$  și la un număr  $x$  mai mare sau egal cu  $a$  face să corespundă un număr  $y$  după regula  $f_2$ .

## 6 Funcția compusă. Inversa unei funcții.

**Definiția 6.1.** Fie  $f : X \rightarrow Y$  și  $g : Y \rightarrow Z$  două funcții. Pentru orice  $x \in X$  elementul  $g(f(x))$  aparține mulțimii  $Z$ . Corespondența:

$$x \mapsto g(f(x))$$

definește o funcție pe mulțimea  $X$  cu valori în mulțimea  $Z$ , care se notează cu  $g \circ f : X \rightarrow Z$  și se numește compusa funcțiilor  $g$  și  $f$ .

**Comentariu:** Regula după care elementului  $x \in X$  i se asociază elementul  $g(f(x))$  se formulează în cuvinte astfel: prima oară se aplică  $f$  elementului  $x$  și se obține elementul  $f(x) \in Y$ , după aceea se aplică funcția  $g$  elementului  $f(x)$  și se obține elementul  $g(f(x))$  din mulțimea  $Z$ . De exemplu:

$$f(x) = \sin x; g(y) = y^2 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin^2 x$$

$$f(x) = x^2; g(y) = \operatorname{tg} y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{tg} x^2$$

$$f(x) = \frac{x}{2}; g(y) = \cos y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos \frac{x}{2}$$

**Definiția 6.2.** Funcția  $f : X \rightarrow Y$  este injectivă dacă pentru orice  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$  rezultă  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Definiția 6.3.** Funcția  $f : X \rightarrow Y$  este surjectivă dacă pentru orice  $y \in Y$  există  $x \in X$  astfel încât  $f(x) = y$ .

**Definiția 6.4.** Funcția  $f : X \rightarrow Y$  este bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

**Comentariu:**

1. O funcție injectivă  $f : X \rightarrow Y$  are următoarea proprietate: dacă  $f(x_1) = f(x_2)$  atunci  $x_1 = x_2$ .  
Funcțiile numerice:  $y = 5x$ ;  $y = e^x$ ;  $y = \operatorname{arctg} x$  sunt injective.
2. O funcție surjectivă  $f : X \rightarrow Y$  se numește funcție cu valori pe  $Y$ . Dacă funcția definită pe  $X$  este cu valori pe  $Y$  atunci pentru orice  $y \in Y$  ecuația  $f(x) = y$  are cel puțin o soluție în  $X$ . Funcția numerică  $y = \sin x$  este o funcție definită pe mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale și cu valori pe segmentul închis  $[-1, 1]$  și nu este o funcție surjectivă pe mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a tuturor numerelor reale. (Ecuația  $\sin x = 2$  nu are soluție).
3. O funcție bijectivă  $f : X \rightarrow Y$  este o corespondență unu la unu. Aceasta înseamnă că: orice  $x \in X$  are un corespondent  $y \in Y$ ,  $y = f(x)$  și la diferiți  $x$  corespund  $y$  diferiți; pentru orice  $y \in Y$  există  $x \in X$  astfel ca  $y = f(x)$  și pentru diferiți  $x$ , elementele  $y$  sunt diferite.

**Definiția 6.5.** Fie  $f : X \rightarrow Y$  o funcție bijectivă. Pentru orice  $y \in Y$  există un  $x \in X$ , unic! astfel ca  $f(x) = y$ . Corespondența  $y \mapsto$  "acel  $x$  pentru care  $f(x) = y$ " definește o funcție pe mulțimea  $Y$  cu valori pe mulțimea  $X$ , care se numește inversa funcției  $f$  și se notează cu  $f^{-1}$ ;  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ .



## Comentariu:

1. Regula de corespondență din definiția 6.5 implică următoarea proprietate a funcției inverse:

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ pentru orice } y \in Y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in X$$

2. Funcțiile  $f$  și  $f^{-1}$  sunt mutual inverse; adică:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

3. Pentru a găsi inversa unei funcții numerice  $y = f(x)$  (dacă  $f$  este bijectivă) trebuie să exprimăm  $x$  în funcție de  $y$ . Astfel de exemplu: dacă  $y = 3x + 2$  funcția inversă este  $x = \frac{y-2}{3}$ ; dacă  $y = x^3$  funcția inversă este:  $x = \sqrt[3]{y}$ .

## 7 Simboluri logice.

În matematică se folosesc frecvent următoarele expresii: "pentru orice element" și "există". Aceste expresii sunt notate cu simboluri speciale.

Expresia: "pentru orice element" se notează cu simbolul  $\forall$  care se obține prin inversarea literei A; prima literă din cuvântul "Any".

Expresia "există" se notează cu simbolul  $\exists$  care este imaginea în oglindă a literei E; prima literă din cuvântul "Exist".

Se folosește de asemenea simbolul  $\Rightarrow$  cu semnificația "rezultă". Dacă  $A$  și  $B$  sunt două afirmații atunci  $A \Rightarrow B$  înseamnă că din  $A$  rezultă  $B$ .

Dacă  $A \Rightarrow B$  și  $B \Rightarrow A$  atunci afirmațiile  $A$  și  $B$  sunt echivalente și aceasta se notează cu  $A \Leftrightarrow B$ .  $A \Leftrightarrow B$  înseamnă că afirmația  $A$  este adevărată dacă și numai dacă  $B$  este adevărată.

Folosind aceste notații injectivitatea unei funcții  $f : X \rightarrow Y$  poate fi scrisă sub forma:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

iar surjectivitatea aceleiași funcții sub forma:

$$\forall y \in Y \exists x \in X \mid f(x) = y.$$

Linia verticală înaintea egalității  $f(x) = y$  se citește "astfel încât".

Notăția  $A \stackrel{def}{\Leftrightarrow} B$  se folosește când vrem să definim o noțiune  $A$  folosind o afirmație  $B$ . Ea se citește: "prin definiție  $A$  este  $B$ ". Astfel de exemplu notația:

$$X \subset Y \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \{(\forall x)(x \in X) \Rightarrow (x \in Y)\}$$

definește  $X$  ca submulțime a mulțimii  $Y$ . Partea dreaptă a notației se citește astfel: "orice element  $x$  din  $X$  este element al mulțimii  $Y$ ".

## 8 Afirmăția contrară, teorema contrară și teorema reciprocă.

**Definiția 8.1.** Oricare ar fi afirmația  $A$ , notăm cu  $\bar{A}$  afirmația: "afirmația  $A$  este falsă". Afirmăția  $\bar{A}$  se numește afirmația contrară.

**Exemplu 8.1.** Dacă  $A$  este afirmația: "7 este un număr impar" atunci  $\bar{A}$  este afirmația: "7 nu este un număr impar". Dacă  $A$  este afirmația: "mâine va ploua" atunci afirmația  $\bar{A}$  va fi: "mâine nu va ploua". Dacă  $A$  este afirmația: "toate rachetele vor atinge ținta", atunci  $\bar{A}$  este afirmația: "cel puțin o rachetă nu va atinge ținta".

**Definiția 8.2.** Pentru teorema "dacă  $A$  atunci  $B$ " afirmația "dacă  $\bar{A}$  atunci  $\bar{B}$ " se numește teoremă contrară. Teorema contrară a teoremei contrare este teorema inițială.

**Exemplu 8.2.**  $A$ ="suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater este egală cu  $180^\circ$ ",  $B$ ="patrulaterul este inscriptibil",  $\bar{A}$ ="suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater nu este egală cu  $180^\circ$ ",  $\bar{B}$ ="patrulaterul nu este inscriptibil"

Teorema "dacă  $A$  atunci  $B$ " se formulează astfel: "dacă suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater este egală cu  $180^\circ$  atunci patrulaterul este inscriptibil". Teorema contrară: "dacă  $\bar{A}$  atunci  $\bar{B}$ " se formulează astfel: "dacă suma mărimilor a două unghiuri opuse într-un patrulater nu este egală cu  $180^\circ$  atunci patrulaterul nu este inscriptibil". În acest exemplu ambele teoreme: cea directă și cea contrară sunt adevărate.

**Definiția 8.3.** Pentru orice afirmație în matematică (teoremele inclusiv) care au forma  $A \Rightarrow B$  se poate construi o nouă afirmație permutând  $A$  și  $B$ . Astfel se obține afirmația  $B \Rightarrow A$  care se numește afirmație reciprocă sau teoremă reciprocă. Mai exact teorema  $B \Rightarrow A$  este reciproca teoremei  $A \Rightarrow B$ . Reciproca teoremei reciproce este teorema inițială. De aceea teoremele  $A \Rightarrow B$  și  $B \Rightarrow A$  se zic mutual reciproce.

Dacă teorema directă  $A \Rightarrow B$  este adevărată, reciproca ei  $B \Rightarrow A$  poate fi adevărată sau falsă.

**Exemplu 8.3.** Teorema directă (teorema lui Pitagora) este: "dacă triunghiul este dreptunghic atunci pătratul laturii celei mai mari a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi". Teorema reciprocă este: "dacă pătratul laturii celei mai mari a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi atunci triunghiul este dreptunghic".

În acest exemplu atât teorema directă cât și cea reciprocă sunt adevărate.

**Exemplu 8.4.** Teorema directă: "dacă două unghiuri sunt drepte atunci cele două unghiuri sunt egale". Teorema reciprocă: "dacă două unghiuri sunt egale atunci cele două unghiuri sunt drepte".

În acest exemplu teorema directă este adevărată, iar teorema reciprocă este falsă.

Teorema reciprocă este echivalentă cu teorema contrară. Aceasta înseamnă că teorema reciprocă este adevărată dacă și numai dacă teorema contrară este adevărată.

## 9 Condiție necesară și condiție suficientă.

**Definiția 9.1.** *Dacă teorema  $A \Rightarrow B$  este adevărată atunci: condiția  $A$  este suficientă pentru  $B$  și condiția  $B$  este necesară pentru  $A$ .*

*Dacă teorema reciprocă  $B \Rightarrow A$  este adevărată atunci: condiția  $B$  este suficientă pentru  $A$  și condiția  $A$  este necesară pentru  $B$ .*

**Definiția 9.2.** *Dacă teorema directă  $A \Rightarrow B$  și teorema reciprocă  $B \Rightarrow A$  sunt adevărate atunci : condiția  $A$  este necesară și suficientă pentru  $B$  și condiția  $B$  este necesară și suficientă pentru  $A$ . Cu alte cuvinte condițiile  $A$  și  $B$  sunt echivalente.  $A$  este adevărată dacă și numai dacă  $B$  este adevărată.*

**Exemplu 9.1.** Teorema lui Bézout este: ”Dacă  $\alpha$  este o rădăcină a polinomului  $P(x)$  atunci polinomul  $P(x)$  este divizibil cu  $x - \alpha$ ”.

Reciproca teoremei lui Bézout este: ”Dacă polinomul  $P(x)$  este divizibil cu  $x - \alpha$  atunci  $\alpha$  este o rădăcină a polinomului  $P(x)$ .”

Știm că atât teorema lui Bézout cât și reciproca ei sunt adevărate. Rezultă de aici că o condiție necesară și suficientă pentru ca ”numărul  $\alpha$  să fie rădăcină a polinomului  $P(x)$ ” este ca ”polinomul  $P(x)$  să fie divizibil cu  $x - \alpha$ ”. Prin urmare, este adevărată teorema: ”polinomul  $P(x)$  este divizibil cu  $x - \alpha$  dacă și numai dacă  $\alpha$  este rădăcină a polinomului  $P(x)$ ”.

## Partea II

# Calcul diferențial și integral pentru funcții reale de o variabilă reală

## 10 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^1$ .

**Definiția 10.1.** O vecinătate a punctului  $x \in \mathbb{R}^1$  este o mulțime  $V \subset \mathbb{R}^1$  care conține un interval deschis  $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$  ce conține pe  $x$ : adică  $x \in (a, b) \subset V$ .

Orice interval deschis care conține pe  $x$  este vecinătate pentru  $x$ . Un interval deschis este vecinătate pentru orice  $x$  ce aparține intervalului.

**Definiția 10.2.** Un punct  $x \in \mathbb{R}^1$  este punct interior al mulțimii  $A \subset \mathbb{R}^1$  dacă există un interval deschis  $(a, b)$  astfel încât  $x \in (a, b) \subset A$ .

Un punct  $x$  al intervalului  $(a, b)$  este un punct interior al mulțimii  $(a, b)$ .

**Definiția 10.3.** Interiorul unei mulțimi  $A \subset \mathbb{R}^1$  este mulțimea punctelor interioare ale lui  $A$ .

Tradițional interiorul mulțimii  $A$  se notează cu  $Int(A)$  sau cu  $\overset{\circ}{A}$ . Dacă  $A = (a, b)$ , atunci  $\overset{\circ}{A} = (a, b) = A$ .

**Definiția 10.4.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^1$  este deschisă dacă  $A = \overset{\circ}{A}$ .

Orice interval deschis este o mulțime deschisă. Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^1$  este deschisă, dacă și numai dacă fiecare punct al ei este în mulțime cu o întregă vecinătate.

Reuniunea unei familii de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este mulțime deschisă.

Mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}^1$  și mulțimea vidă  $\emptyset$  sunt mulțimi deschise.

**Definiția 10.5.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^1$  este închisă dacă complementara ei  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^1}A$  este deschisă.

Orice interval închis  $[a, b]$  este o mulțime închisă.

Intersecția unei familii de mulțimi închise este închisă.

Reuniunea unui număr finit de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}^1$  și mulțimea vidă  $\emptyset$  sunt mulțimi închise.

**Definiția 10.6.** Punctul  $x \in \mathbb{R}^1$  este punct limită sau punct de acumulare al mulțimii  $A \subset \mathbb{R}^1$ , dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $x$  conține cel puțin un punct  $y$  din  $A$  care este diferit de  $x$ ;  $y \neq x$  și  $y \in V \cap A$ .

**Definiția 10.7.** Închiderea  $\bar{A}$  a mulțimii  $A \subset \mathbb{R}^1$  este intersecția tuturor mulțimilor închise care conțin mulțimea  $A$ .

Închiderea unei mulțimi  $A$  are următoarele proprietăți:

$$\bar{A} \supset A; \quad \overline{\bar{A}} = \bar{A}; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$\bar{A} = A$  dacă și numai dacă  $A$  este mulțime închisă.

$x \in \bar{A}$  dacă și numai dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $x$  intersectează mulțimea  $A$  ( $V \cap A \neq \emptyset$ ).

**Definiția 10.8.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^1$  este mărginită dacă există  $m, M \in \mathbb{R}^1$  astfel încât  $m \leq x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ .

**Definiția 10.9.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^1$  este compactă dacă este mărginită și închisă.

Orice interval închis  $[a, b]$  este mulțime compactă.

## 11 Șiruri de numere reale.

**Definiția 11.1.** O funcție definită pe mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  și cu valori în mulțimea  $\mathbb{R}^1$  a numerelor reale se numește șir de numere reale.

**Comentariu:** Valoarea funcției, care definește șirul de numere reale, în 1 se notează cu  $a_1$ , valoarea în 2 se notează cu  $a_2$ , ... , valoarea în  $n$  cu  $a_n$ , ... .

Tradițional  $a_1$  se numește primul termen al șirului,  $a_2$  cel de-al doilea termen al șirului, ... ,  $a_n$  cel de-al  $n$ -lea termen al șirului sau termenul general.

Șirul  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  se notează tradițional cu  $(a_n)$ . Pentru a defini un șir trebuie să definim toți termenii șirului. Altfel spus trebuie dată o regulă care permite determinarea fiecărui termen al șirului.

**Exemplu 11.1.**

$$\begin{array}{llllll} a_n = q^{n-1}, q \neq 0; & a_1 = 1; & a_2 = q; & a_3 = q^2; & \dots & a_n = q^{n-1}; & \dots \\ a_n = \frac{1}{n}; & a_1 = 1; & a_2 = \frac{1}{2}; & a_3 = \frac{1}{3}; & \dots & a_n = \frac{1}{n}; & \dots \\ a_n = n^2; & a_1 = 1; & a_2 = 4; & a_3 = 9; & \dots & a_n = n^2; & \dots \\ a_n = (-1)^n; & a_1 = -1; & a_2 = 1; & a_3 = -1; & \dots & a_n = (-1)^n; & \dots \\ a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}; & a_1 = 0; & a_2 = 1; & a_3 = 0; & \dots & a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}; & \dots \end{array}$$

Se poate întâmpla ca atunci când  $n$  crește și  $a_n$  crește.

**Definiția 11.2.** Șirul  $(a_n)$  este crescător dacă pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  are loc inegalitatea  $a_n \leq a_{n+1}$ .

**Definiția 11.3.** Un șir  $(a_n)$  este descrescător dacă pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  are loc inegalitatea  $a_{n+1} \leq a_n$ .

**Definiția 11.4.** Un șir  $(a_n)$  este monoton dacă este crescător sau este descrescător.

**Exemplu 11.2.** Dacă  $q > 1$  atunci șirul  $a_n = q^n$  este crescător, iar dacă  $q \in (0, 1)$  atunci șirul  $a_n = q^n$  este descrescător. Dacă  $q \in (0, \infty)$  și  $q \neq 1$  atunci șirul  $a_n = q^n$  este monoton

**Definiția 11.5.** Un șir  $(a_n)$  este mărginit dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  are loc inegalitatea  $|a_n| \leq M$ .

Dacă  $q \in (0, 1)$  atunci șirul  $a_n = q^n$  este mărginit ( $|a_n| < 1$ ). Șirul  $a_n = (-1)^n$  este mărginit ( $|a_n| \leq 1$ ).

**Definiția 11.6.** Un șir  $(a_n)$  este nemărginit dacă nu este mărginit. Altfel spus, pentru orice  $M > 0$  există  $n_M \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|a_{n_M}| > M$ .

Dacă  $q > 1$  atunci șirul  $a_n = q^n$  este nemărginit.

**Definiția 11.7.** Un subșir al șirului  $(a_n)$  este un șir de forma  $(a_{n_k})$  unde  $(n_k) = n_1, n_2, \dots$  este un șir strict crescător de numere naturale.

### **Comentariu:**

Orice subșir al unui șir crescător este șir crescător.

Orice subșir al unui șir descrescător este șir descrescător.

Orice subșir al unui șir mărginit este șir mărginit.

## **12 Convergența șirurilor de numere reale.**

Se poate întâmpla ca dacă  $n$  crește termenii  $a_n$  ai șirului  $(a_n)$  să se apropie de un număr  $L$ . În acest caz ajungem la o noțiune matematică importantă, cea de convergență a unui șir la un număr.

**Definiția 12.1.** Șirul de numere reale  $(a_n)$  converge la numărul  $L$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N = N(\varepsilon)$  astfel ca toți termenii de rang  $n > N(\varepsilon)$  ai șirului să verifice inegalitatea:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Faptul că șirul  $(a_n)$  converge la numărul  $L$  se notează pe scurt cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  și se exprimă prin cuvintele: "pentru  $n$  tinzând la infinit limita lui  $(a_n)$  este egală cu  $L$ " sau  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  și se exprimă prin cuvintele "pentru  $n$  tinzând la infinit  $a_n$  tinde la  $L$ ".

În cazul  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  se mai spune  $(a_n)$  converge la  $L$ .

**Comentariu:** Dacă șirul  $(a_n)$  converge la  $L$ , atunci orice subșir  $(a_{n_k})$  al șirului  $(a_n)$  converge la  $L$ . Aceasta întrucât pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n > N(\varepsilon)$  să avem  $|a_n - L| < \varepsilon$ . De aici rezultă că pentru orice  $n_k > N$  avem  $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$ .

Nu orice șir este convergent. De exemplu, șirul  $a_n = (-1)^n$  nu converge. Aceasta întrucât subșirul  $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$  converge la 1 și subșirul  $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$  converge la -1.

### **Limita unui șir convergent este unică.**

Afirmația contrară ar însemna că șirul  $(a_n)$  converge la  $L_1$  și  $L_2$  cu  $L_1 \neq L_2$ . Rezultă de aici că există  $N_1$  și  $N_2$  astfel încât  $|a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$  pentru orice  $n > N_1$

și  $|a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$  pentru orice  $n > N_2$ . De aici rezultă că pentru orice  $n > \max\{N_1, N_2\}$  avem:  $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < |L_1 - L_2|$  ceea ce este absurd.

**Dacă un șir  $(a_n)$  converge la  $L$ , atunci este mărginit.** Aceasta întrucât există  $N(1)$  astfel că pentru orice  $n > N(1)$  să avem:  $|a_n - L| < 1$  și astfel  $|a_n| = |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$  pentru orice  $n > N(1)$ . Rezultă în continuare că pentru orice  $n$  are loc inegalitatea:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N(1)}|, 1 + |L|\}$$

**Exemplu 12.1.** Vom arăta că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Considerăm  $\varepsilon > 0$  și condiția:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Rezultă de aici inegalitatea  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  sau  $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$  echivalent cu  $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Punem  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$ , unde  $\left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \right]$  este partea întreagă a numărului  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ . Este evident că dacă  $n > N(\varepsilon)$  atunci  $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$  și inegalitatea  $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$  este satisfăcută.

În acest exemplu am demonstrat convergența la zero folosind definiția convergenței.

În următoarea secțiune vom stabili reguli care permit verificarea convergenței și calcularea limitei de o manieră mult mai simplă.

În anumite cazuri se spune că șirul  $(a_n)$  converge (tinde) la infinit. Sensul acestei noțiuni este precizat în următoarele definiții:

**Definiția 12.2.** Șirul  $(a_n)$  tinde la  $+\infty$  dacă pentru orice  $M > 0$  există  $N(M)$  astfel încât  $a_n > M$  oricare ar fi  $n > N(M)$ .

Șirul  $a_n = n^2$  tinde la  $+\infty$  în sensul acestei definiții.

**Definiția 12.3.** Șirul  $(a_n)$  tinde la  $-\infty$  dacă pentru orice  $M > 0$  există  $N(M)$  astfel încât  $a_n < -M$  pentru  $n > N(M)$ .

Șirul  $a_n = -n^2$  tinde la  $-\infty$  în sensul acestei definiții.

## 13 Reguli privind convergența șirurilor de numere reale.

Fie  $(a_n)$  și  $(b_n)$  două șiruri de numere reale convergente la numerele  $a$  și respectiv  $b$ .

**Regula sumei:** Șirul  $(a_n + b_n)$  converge la  $a + b$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$  și  $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$ . Deoarece  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  și  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  există  $N_1 = N_1(\varepsilon')$  astfel încât  $|a_n - a| < \varepsilon', \forall n > N_1$  și există  $N_2 = N_2(\varepsilon')$  astfel încât  $|b_n - b| < \varepsilon', \forall n > N_2$ . Fie  $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ . Pentru orice  $n > N_3$  avem:

$$|a_n - b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon$$

Aceasta demonstrează că  $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$ . □

**Regula produsului:** Șirul  $(a_n \cdot b_n)$  converge la  $a \cdot b$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  există  $M > 0$  astfel ca  $|b_n| \leq M$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .  
Rezultă:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq \\ &\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$  și fie  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$ .

Deoarece  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  există  $N_1$  și  $N_2$  astfel încât:  $|a_n - a| < \varepsilon_1, \forall n > N_1$  și  $|b_n - b| < \varepsilon_2, \forall n > N_2$ .

Fie  $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ . Pentru orice  $n > N_3$  avem:  $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon$ . Altfel spus:  $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$ . □

**Regula câtului:** Dacă  $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  și  $b \neq 0$  atunci șirul  $\frac{a_n}{b_n}$  converge la  $\frac{a}{b}$ .

*Demonstrație.* Prima oară arătăm că  $\frac{1}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b}$ . Pentru aceasta evaluăm diferența:

$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right|$  și găsim:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}$$

Întrucât  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$  există  $N_1$  astfel încât să avem:  $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$  pentru orice

$n > N_1$ . Considerăm numărul  $M = \max\left\{\frac{2}{|b|}, \frac{1}{|b_1|}, \dots, \frac{1}{|b_{N_1}|}\right\}$  și remarcăm că are loc

inegalitatea  $\left| \frac{1}{b_n} \right| < M$  pentru orice  $n$ .

Fie acum  $\varepsilon > 0$  și  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot |b|}{M}$ . Pentru  $\varepsilon' > 0$  există  $N_2 = N_2(\varepsilon')$  astfel încât  $|b_n - b| < \varepsilon'$

pentru orice  $n > N_2$ . De aici rezultă că  $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$  pentru orice  $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ .

Cu alte cuvinte  $\frac{1}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b}$ . În virtutea regulii produsului rezultă:  $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$ . □

**Regula de înmulțire cu un număr:** Șirul  $(k \cdot a_n)$  converge la  $k \cdot a$  pentru orice număr real  $k$ .

Regula de înmulțire cu un număr este un caz special al regulii produsului.



**Aplicație 13.1** Determinați limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} = ?$$

*Soluție:* Regula câtului nu poate fi aplicată direct pentru că nici numărătorul nici numitorul fracției  $\frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6}$  nu converge la o limită finită.

Cu toate acestea dacă se dă factor comun  $n^2$  și la numărător și la numitor și fracția se simplifică cu  $n^2$  se obține:

$$a_n = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}$$

Se arată ușor că  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și că șirul constant ( $k$ ) converge la  $k$ . Aplicând acum regula sumei, a produsului și a înmulțirii cu un număr rezultă următoarele convergențe:

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad 4 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

Aplicând în continuare regula câtului obținem următoarea convergență:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5n + 6} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$

**Regula "cleștelui":** Fie  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  trei șiruri de numere reale care verifică inegalitățile:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dacă șirurile  $(a_n)$  și  $(c_n)$  sunt convergente la aceeași limită  $L$  atunci șirul  $(b_n)$  converge la  $L$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  avem:  $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L$ ,  $\forall n$  și deci:

$$|b_n - L| \leq \max\{|a_n - L|, |c_n - L|\}, \quad \forall n.$$

Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  și  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  astfel încât să avem:

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1(\varepsilon) \quad \text{și} \quad |c_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2(\varepsilon)$$

Rezultă că avem:

$$|b_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N_3 = N_3(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}.$$

Cu alte cuvinte  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ . □

**Aplicația 13.2.** Arătați că  $(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

*Soluție:* Fie  $a_n = -\frac{1}{n^2}$ ;  $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ ;  $c_n = \frac{1}{n^2}$ .

Întrucât  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ;  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  și  $a_n \leq b_n \leq c_n$  rezultă (aplicând regula cleștelui)  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Regula de convergență a șirurilor monotone:** Dacă  $(a_n)$  este un șir monoton și mărginit atunci este convergent.

*Demonstrație.* Vom demonstra afirmația pentru un șir crescător și mărginit. Demonstrația este similară pentru un șir descrescător și mărginit.

Fie  $(a_n)$  un șir crescător și mărginit și fie  $M_0 = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ . Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $a_N > M_0 - \varepsilon$ .

Dacă  $n > N$ , atunci  $a_n \geq a_N$  și deci  $a_n > M_0 - \varepsilon$ . În plus  $a_n \leq M_0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Rezultă astfel că  $|a_n - M_0| < \varepsilon$  pentru  $n > N$ . Aceasta demonstrează că  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_0$ .  $\square$

**Aplicație 13.3.** Un șir  $(a_n)$  este definit astfel:  $a_1 = 1$  și  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$  pentru  $n \geq 1$ .

Să se arate că:  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

*Soluție:* Prima oară se arată, prin inducție, că șirul  $(a_n)$  este crescător.

Deoarece  $a_1 = 1$  și  $a_2 = \sqrt{2}$  avem:  $a_1 \leq a_2$ . Calculăm acum diferența  $a_{n+1} - a_n$  și găsim:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}}$$

Întrucât suma  $\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}$  este pozitivă dacă  $a_{n-1} \leq a_n$ , atunci  $a_n \leq a_{n+1}$ . Astfel rezultă prin inducție că șirul  $(a_n)$  este crescător.

Din relația de recurență  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$  prin ridicare la pătrat se obține egalitatea:

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 1 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

și deoarece șirul  $(a_n)$  este crescător avem:  $(a_n - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} \leq 0$ . Din această inegalitate

rezultă imediat că șirul  $(a_n)$  este mărginit superior de numărul  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Cu regula de convergență a șirurilor monotone deducem că șirul  $(a_n)$  este convergent. Fie  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Deoarece  $a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  obținem că  $L = \sqrt{L + 1}$  și astfel  $L^2 = L + 1$ . Ecuația de gradul al doilea  $L^2 = L + 1$  are două rădăcini:  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ . Întrucât  $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , rădăcina pozitivă este limita. Adică  $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ .

**Teorema 13.1. Teorema lui Weierstrass-Bolzano** Dacă șirul de numere reale  $(a_n)$  este mărginit atunci conține un subșir convergent.

*Demonstrație.* Fie  $S_N = \{a_n | n > N\}$ .

Dacă fiecare mulțime  $S_N$  are un cel mai mare element, atunci considerăm următorul subșir al șirului  $(a_n)$ :

$$b_1 = a_{n_1} = \max S_1; b_2 = a_{n_2} = \max S_{n_1}; b_3 = a_{n_3} = \max S_{n_2}; \dots$$

Șirul  $(b_n)$  este un subșir al șirului  $(a_n)$  și este descrescător. Deoarece  $(a_n)$  este mărginit, șirul  $(b_n)$  este și el mărginit. Rezultă astfel că șirul  $(b_n)$  este convergent. Dacă pentru un  $M, S_M$  nu are un cel mai mare element atunci pentru orice  $a_m$  cu  $m > M$  există  $a_n$  cu  $n > m$  și  $a_n > a_m$ . Fie  $c_1 = a_{M+1}$  și  $c_2$  primul termen al șirului  $a_n$  după  $c_1 = a_{M+1}$  care are proprietatea  $c_2 > c_1$ . În continuare fie  $c_3$  primul termen al șirului  $(a_n)$  după  $c_2$  care verifică  $c_3 > c_2$  și așa mai departe. Se obține în acest fel un subșir  $(c_n)$  al șirului  $(a_n)$ ; care este monoton crescător. Deoarece  $(c_n)$  este mărginit este convergent.  $\square$

Intuitiv este clar că dacă  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  atunci termenii șirului care au rang mare diferă puțin de  $L$  și deci și unul de celălalt. Mai exact avem:

**Teorema 13.2. Criteriul Cauchy de convergență al unui șir de numere reale.**  
*Un șir  $(a_n)$  de numere reale este convergent dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât avem:*

$$|a_p - a_q| < \varepsilon, \quad \forall p, q > N(\varepsilon)$$

*Demonstrație.* Presupunem că șirul  $(a_n)$  converge la  $L$  și considerăm un număr  $\varepsilon > 0$ . Există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru orice  $n > N(\varepsilon)$ . Prin urmare:  $|a_p - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  și  $|a_q - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall p, q > N(\varepsilon)$  și rezultă că:

$$|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L| < \varepsilon, \quad \forall p, q > N(\varepsilon).$$

Presupunem acum că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $|a_p - a_q| < \varepsilon$ ,  $\forall p, q > N(\varepsilon)$ . Pentru  $\varepsilon = 1$  și  $N_1 = N(1)$  ales astfel încât  $|a_p - a_q| < 1$ ,  $\forall p, q > N_1$ , avem:

$$|a_n| = |a_n - a_{N_1+1} + a_{N_1+1}| \leq |a_n - a_{N_1+1}| + |a_{N_1+1}| \leq 1 + |a_{N_1+1}|, \quad \forall n \geq N_1 + 1$$

și deci:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}| + 1\} = M, \quad \forall n$$

Cu alte cuvinte șirul  $(a_n)$  este mărginit.

Conform teoremei lui Weierstrass-Bolzano șirul  $(a_n)$  conține un subșir  $(a_{n_k})$  convergent. Fie  $L = \lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  și  $\varepsilon$  un număr real pozitiv  $\varepsilon > 0$ . Există  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  astfel încât  $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall n_k > N_1$  și există  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  astfel încât  $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall p, q > N_2$ . De aici rezultă că pentru orice  $n > N_3 = \max\{N_1, N_2\}$  avem:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

unde  $n_k$  este ales astfel încât  $n_k > N_3$ . □

## 14 Punct limită al unui șir de numere reale.

**Definiția 14.1.** *Un punct  $x \in \mathbb{R}^1$  este punct limită al șirului  $(a_n)$  dacă există un subșir  $(a_{n_k})$  al șirului  $(a_n)$  care converge la  $x$ ;  $a_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x$ .*

**Definiția 14.2.** *Mulțimea punctelor  $x \in \mathbb{R}^1$  care sunt puncte limită ale șirului  $(a_n)$  se notează cu  $\mathcal{L}(a_n)$  și se numește mulțimea punctelor limită sau pe scurt mulțimea limită a șirului  $(a_n)$ .*

Șirul  $(a_n)$  converge la  $L$  ( $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ) dacă și numai dacă  $\mathcal{L}(a_n) = \{L\}$ .

**Definiția 14.3.** *Limita superioară a șirului  $(a_n)$  este marginea superioară a mulțimii  $\mathcal{L}(a_n)$ . Limita superioară a șirului  $(a_n)$  se notează tradițional cu  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  sau cu  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{L}(a_n)$ .*

**Definiția 14.4.** *Limita inferioară a șirului  $(a_n)$  este marginea inferioară a mulțimii  $\mathcal{L}(a_n)$ . Limita inferioară a șirului  $(a_n)$  se notează tradițional cu  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  sau cu  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \mathcal{L}(a_n)$ .*

Șirul  $(a_n)$  converge dacă și numai dacă are loc:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Exemplu 14.1.** În cazul șirului  $a_n = (-1)^n$  mulțimea punctelor limită  $\mathcal{L}(a_n)$  este:  $\mathcal{L}(a_n) = \{-1, 1\}$  și:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

## 15 Serii de numere reale.

Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  fixat, suma:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

are sens.

Dacă șirul  $(s_n)$  converge la "s" atunci "s" poate fi numit în mod justificat suma "seriei infinite"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Mai precis:

**Definiția 15.1.** *O serie infinită de numere reale este un șir de numere reale  $(s_n)$  al cărui termen general  $s_n$  are forma  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  unde  $(a_n)$  este un șir de numere reale dat.*

În mod tradițional o serie infinită se notează cu simbolul  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $a_n$  se numește prin tradiție termenul general al seriei.

Tot prin tradiție simbolul  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește serie iar șirul de numere reale  $(s_n)$  cu  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  se numește șirul sumelor parțiale ale seriei.

**Definiția 15.2.** *Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  este convergent. Limita șirului  $(s_n)$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  se numește suma seriei și se notează cu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ .*

**Definiția 15.3.** *Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă dacă șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  este divergent.*

**Exemplu 15.1.** Să se verifice că  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ .

*Soluție:* Șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  este  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$ . Deoarece  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  este convergentă și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ .

**Exemplu 15.2.** Să se verifice că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  este divergentă.

*Soluție:* Șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  este  $s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ . Deoarece șirul  $(s_n)$  este divergent seria  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  este divergentă.

**Exemplu 15.3.** Să se verifice că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$  este convergentă și suma ei este egală cu 1.

*Soluție:* Întrucât:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

termenul general al șirului sumelor parțiale este:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

și deci  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

**Comentariu:** Exemplul 15.1 este un caz particular de serie geometrică având forma  $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ , în care  $x$  este un număr real. Remarcăm că aici însumarea începe cu  $n = 0$  și nu cu  $n = 1$ . Pentru o serie geometrică suma primilor  $n$  termeni este:

$$s_n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}$$

Un calcul standard arată că

$$s_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x} \text{ pentru } \forall x \neq 1.$$

De aici  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-x} \quad \forall |x| < 1$ .

Deoarece șirul  $(s_n)$  este divergent pentru  $|x| \geq 1$  obținem următorul rezultat:

*Seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^n + \dots$ ,  $a \neq 0$  converge dacă și numai*

dacă  $|x| < 1$ . Mai mult suma seriei este  $\frac{a}{1-x}$ .

Deoarece suma unei serii convergente este definită ca limita șirului sumelor parțiale al seriei, rezultatele privind convergența șirurilor de numere reale pot fi folosite pentru a stabili convergența seriilor.

Urmează un rezultat care poate fi adesea util pentru a testa divergența unei serii.

### **Teorema 15.1. Convergența la zero a termenului general**

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă atunci  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Demonstrație.* Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă atunci șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  converge la o limită "s". Rezultă că șirul  $s_{n-1}$  converge tot la "s" și astfel  $a_n = s_n - s_{n-1}$  converge la 0. Prin urmare  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  $\square$

**Aplicație 15.1** Considerăm seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ . Deoarece  $a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \neq 0$  rezultă că seria considerată nu este convergentă.

Trebuie reținut că dacă  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  nu rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă. Astfel de

exemplu în cazul seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$  avem:

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

și

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

### **Criteriul lui Cauchy de convergență a unei serii de numere reale**

Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  și  $p \geq 1$  avem:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale  $(s_n)$ :  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ; converge.

Șirul  $(s_n)$  converge dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $|s_q - s_r| < \varepsilon$  pentru  $\forall q, r > N(\varepsilon)$ . Aceasta este echivalent cu condiția:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $\forall n \geq N(\varepsilon)$  și  $p \geq 1$  avem:  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ .  $\square$

## 16 Reguli privind convergența seriilor de numere reale.

În continuare prezentăm câteva reguli relative la convergența seriilor de numere reale, care sunt utile în aplicații. Aceste reguli se obțin aplicând regulile de convergență a șirurilor la șirurile sumelor parțiale.

### Regula sumei

Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt convergente atunci seria sumă  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  este convergentă și are loc egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

### Regula de înmulțire cu un număr

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă atunci  $\forall k \in \mathbb{R}^1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$  este convergentă și are loc egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Criteriul 1 al comparației.** Dacă  $0 \leq a_n \leq b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  și dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* Fie  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  și  $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ . Din ipoteză rezultă că  $\forall n \in \mathbb{N}$  avem

$0 \leq s_n \leq t_n$ . Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge atunci șirul  $t_n$  converge la un număr  $t$ :  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$ .

Șirul  $(t_n)$  fiind crescător pentru orice  $n$  are loc  $t_n \leq t$ . De aici și din  $s_n \leq t_n$  rezultă inegalitatea  $s_n \leq t$ ,  $\forall n$ . Prin urmare șirul crescător  $s_n$  este mărginit superior și deci este convergent. Aceasta înseamnă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.  $\square$

**Exemplu 16.1.** Să se verifice că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$  este convergentă.

*Soluție.* Fie  $a_n = \frac{1 + \cos n}{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$ . Pentru orice  $n$  avem  $a_n \geq 0$  și  $a_n \leq \frac{1}{2^n}$ . Considerăm șirul  $b_n = \frac{1}{2^n}$  și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Această serie din urmă fiind convergentă rezultă

că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

**Criteriul 2 al comparației.** Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt cu termeni pozitivi ( $a_n \geq 0$  și  $b_n \geq 0$ ) și  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0$  atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge dacă și numai dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge.

*Demonstrație.* Presupunem că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este convergentă și considerăm sumele parțiale:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Deoarece  $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  pentru  $\varepsilon = 1$  există  $N_1 = N(1)$  astfel încât avem:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 1, \quad \forall n > N_1.$$

De aici rezultă inegalitatea:

$$\frac{a_n}{b_n} = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} - L + L \right| \leq \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| + |L| < 1 + |L| = k, \quad \forall n > N_1.$$

Considerăm acum seriile cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  unde  $\alpha_n = a_{N_1+n}$  și  $\beta_n = k \cdot b_{N_1+n}$ .

Inegalitatea  $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n, \forall n$  și convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=N_1+1}^{\infty} k \cdot b_n$  implică că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  este convergentă. Deoarece natura unei serii nu se schimbă dacă se adaugă la ea

un număr finit de termeni rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

Am arătat astfel că din convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  rezultă convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Reciproca acestei afirmații se arată inversând rolurile lui  $a_n$  și  $b_n$  în raționamentul precedent și observând că  $\frac{b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L}$ .  $\square$

**Exemplu 16.2.** Să se verifice că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$  este convergentă.

*Demonstrație.* Fie  $a_n = \frac{1}{7 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n}$  și  $b_n = \frac{1}{5^n}$ . Raportul  $\frac{a_n}{b_n}$  converge la  $\frac{1}{2} \neq 0$  și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$  este convergentă. Rezultă astfel că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.  $\square$



**Criteriul raportului.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este cu termeni pozitivi ( $a_n > 0$ ) și șirul

$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  converge la  $L$  atunci: din  $L > 1$  rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă; din

$L < 1$  rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă; din  $L = 1$  nu putem trage nici o concluzie.

*Demonstrație.* Presupunem  $L < 1$  și considerăm  $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - L)$ . Observăm că  $\varepsilon > 0$  și  $L + \varepsilon = k < 1$ . Deoarece  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $\alpha_n = |\alpha_n - L + L| \leq \varepsilon + L = k < 1, \forall n > N(\varepsilon)$ . De aici rezultă inegalitatea  $a_{n+1} \leq k \cdot a_n, \forall n > N(\varepsilon)$ . Fie  $\beta_n = a_{N(\varepsilon)+n}$ . Pentru orice  $n \geq 1$  avem  $\beta_{n+1} \leq k \cdot \beta_n$  și prin inducție rezultă inegalitatea:

$$\beta_{n+1} \leq k^n \cdot \beta_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \beta_1$  este o serie geometrică convergentă pentru că  $k < 1$ . De aici rezultă că

seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  converge și, prin urmare, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge de asemenea.

Presupunem acum  $L > 1$  și fie  $\varepsilon = L - 1$ . Numărul  $\varepsilon$  este pozitiv ( $\varepsilon > 0$ ) și deoarece  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $\alpha_n > L - \varepsilon$  pentru orice  $n > N(\varepsilon)$ . Rezultă că  $a_{n+1} > a_n, \forall n > N(\varepsilon)$  și  $a_n > a_{N(\varepsilon)}, \forall n > N(\varepsilon)$ .

Deoarece  $a_{N(\varepsilon)} \neq 0$  șirul  $(a_n)$  nu tinde la zero și deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.  $\square$

**Exemplu 16.3.** Să se determine valorile lui  $x$  pentru care seria  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (4x^2)^n$  este convergentă.

*Soluție:* Fie  $a_n = n \cdot (4x^2)^n$  și  $\alpha_n = \frac{(n+1) \cdot (4x^2)^{n+1}}{n \cdot (4x^2)^n} = 4x^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Șirul  $(\alpha_n)$  converge la  $4x^2$ ;  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4x^2$ .

De aici rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă dacă  $4x^2 > 1$  ( $|x| > \frac{1}{2}$ ) și este convergentă

dacă  $|x| < \frac{1}{2}$ . Nu știm deocamdată ce se întâmplă dacă  $|x| = \frac{1}{2}$ . Dacă  $|x| = \frac{1}{2}$  atunci

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n$  și deci seria este divergentă.

În consecință seria  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (4x^2)^n$  este convergentă dacă și numai dacă  $|x| < \frac{1}{2}$ .

**Criteriul rădăcinii.** Fie seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie cu termeni pozitivi.

Dacă există  $k \in (0, 1)$  și  $N \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sqrt[n]{a_n} \leq k, \forall n > N$  atunci seria este convergentă.

Dacă  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  pentru o infinitate de termeni ai seriei atunci seria este divergentă.

*Demonstrație.* Dacă există  $k \in (0, 1)$  și  $N$  astfel încât  $\sqrt[n]{a_n} \leq k$  pentru  $n > N$  atunci  $a_n \leq k^n$  pentru  $n > N$ . Prin urmare seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  poate fi comparată cu seria geometrică

$\sum_{k=1}^{\infty} k^n$ , care este convergentă pentru că  $k < 1$ . Aceasta este demonstrația în primul caz.

Dacă  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  pentru o infinitate de termeni ai seriei, atunci  $a_n \geq 1$  pentru o infinitate de termeni ai șirului  $(a_n)$  și  $a_n$  nu tinde la zero. Rezultă astfel că seria este divergentă. Aceasta este demonstrația în al doilea caz.  $\square$

**Aplicație 16.1.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  este convergentă. Folosind criteriul rădăcinii avem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

**Criteriul de convergență pentru serii alternate (Leibnitz).** Dacă șirul  $(b_n)$  este monoton

descrescător și converge la zero ( $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ) atunci seria alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$  converge.

*Demonstrație.* Considerăm  $s_m = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \cdot b_n$  termenul general al șirului sumelor

parțiale al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ . Subșirul termenilor de rang par  $s_{2m}$  are proprietatea:

$$s_{2m} = b_1 - (b_2 - b_3) - \dots - (b_{2m-2} - b_{2m-1}) - b_{2m} \leq b_1$$

și

$$s_{2m} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2m-1} - b_{2m}).$$

Deci este mărginit superior și este crescător.

Rezultă în acest fel că șirul  $(s_{2m})$  este convergent. Fie  $s = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}$ .

În mod analog se arată că subșirul termenilor de rang impar  $(s_{2m+1})$  este descrescător și mărginit inferior. Rezultă astfel că șirul  $(s_{2m+1})$  este convergent și fie  $t = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1}$ .

Avem:

$$t - s = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{2m+1} - s_{2m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{2m+1} = 0$$

Arătăm în final că  $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s = t$ .

Pentru aceasta fie  $\varepsilon > 0$  și  $N_1 = N_1(\varepsilon)$ ,  $N_2 = N_2(\varepsilon)$  aleși astfel încât  $|s_{2m} - s| < \varepsilon$   $\forall m > N_1$  și  $|s_{2m+1} - s| < \varepsilon$ ,  $\forall m > N_2$ . Fie  $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ . Orice  $n > N$  este par  $n = 2m$  ( $m > N_1$ ) sau este impar  $n = 2m + 1$  ( $m > N_2$ ). În ambele cazuri

$|s_n - s| < \varepsilon$  dacă  $n > N$ . Cu alte cuvinte șirul  $(s_n)$  converge la  $s$  și deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$  este convergentă.  $\square$

**Exemplu 16.4.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$  este convergentă pentru că șirul  $\frac{1}{n}$  este monoton descrescător și tinde la 0.

**Criteriul integral.** Fie  $f : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$  o funcție continuă descrescătoare și  $a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ . Considerăm șirul  $j_n = \int_1^n f(x)dx$ .

Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(j_n)$  converge.

Demonstrația acestei teoreme va fi făcută în secțiunea în care integrala Riemann este definită.

**Aplicație 16.2.** Arătați că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge dacă și numai dacă  $p > 1$ .

*Soluție:* Considerăm funcția  $f_p(x) = \frac{1}{x^p}, x > 0$  și  $p > 0$ . Funcția  $f_p$  este continuă, descrescătoare și  $f_p(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$ . Pentru  $p \neq 1$  avem:

$$j_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^n = \frac{1}{1-p} (n^{1-p} - 1).$$

Pentru  $p > 1$  avem  $j_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p-1}$  și pentru  $p < 1$  șirul  $(j_n)$  este divergent. Pentru  $p = 1$  avem:

$$j_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^n = \ln(n)$$

și șirul  $(j_n)$  este divergent.

**Remarca 16.1.** Dacă  $p \leq 0$  seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  este divergentă pentru că termenul general al seriei nu tinde la zero.

**Exemplu 16.5.** Seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă.

**Comentariu.** Seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  împreună cu seriile geometrice constituie o clasă de serii a căror convergență (divergență) este cunoscută.

## 17 Serii absolut convergente.

**Definiția 17.1.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă dacă seria valorilor absolute  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  este convergentă.

O serie convergentă care nu este absolut convergentă este serie simplu convergentă.

**Convergența absolută implică convergența.** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  este convergentă,

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* Pentru orice  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$  avem:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n|$$

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  este convergentă, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $n, m$  cu proprietatea  $n > m > N$  avem:

$$|a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

De aici rezultă  $|s_n - s_m| < \varepsilon$ ,  $\forall n, m, n > m > N(\varepsilon)$ . Folosind criteriul lui Cauchy obținem convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . □

**Exemplu 17.1.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$  converge pentru că este absolut convergentă.

Seria armonică alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  este simplu convergentă. Ea converge (așa cum rezultă

din criteriul lui Leibnitz), dar nu converge absolut pentru că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

**Comentariu.** Convergența absolută poate fi stabilită cu ajutorul criteriilor de convergență prezentate pentru serii cu termeni pozitivi.

Convergența absolută este importantă pentru că suma unei serii absolut convergente este independentă de ordinea în care se adună termenii.

Pe de altă parte, se poate arăta că oricare ar fi seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  simplu convergentă și oricare

ar fi numărul real  $S$ , prin rearanjarea termenilor seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  putem avea:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ .

De exemplu, putem obține orice număr real prin rearanjarea termenilor seriei armonice alternate.

### Produsul Cauchy a două serii.

Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt absolut convergente și

$$c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_1$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  este absolut convergentă și are loc egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

*Demonstrație.* Admitem la început că seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt serii cu termeni pozitivi și considerăm produsele:

$$\begin{array}{cccc} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 & \dots \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 & \dots \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Dacă  $w_n$  este suma produselor din acest tabel situate în pătratul  $n \times n$  cu vârful în  $a_1 \cdot b_1$  atunci  $w_n = s_n \cdot t_n$  unde  $s_n$  și  $t_n$  sunt sumele parțiale ale seriilor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

De aici

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

Observăm acum că  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  este suma produselor din acest tabel adunate după diagonală.

Astfel dacă  $u_n$  este suma parțială a lui  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  atunci:

$$w \left[ \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right] \leq u_n \leq w_n$$

Cu regula cleștelui rezultă  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$ .

În cazul general, raționamentul precedent poate fi repetat pentru seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ ;

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  pentru a deduce că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  este absolut convergentă.

Deoarece seria produs  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  este o combinație liniară a seriilor:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ ;

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$  avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

□

## 18 Limita într-un punct a unei funcții.

În calculul diferențial și calculul integral un concept important este conceptul de limită a unei funcții într-un punct. Conceptul este folosit în studiul continuității, derivatei, integralei și alte studii.

Considerăm o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Vom analiza comportamentul lui  $f(x)$  atunci

când  $x$  se apropie de o valoare reală fixată "a". Pentru aceasta se presupune că  $f(x)$  este definit pentru orice  $x$  care se apropie de "a", nu însă neapărat și în "a". Cu alte cuvinte vom presupune că domeniul de definiție  $A$  conține o mulțime de forma  $(a-r, a) \cup (a, a+r)$  unde  $r > 0$ .

**Definiția 18.1.** Funcția  $f$  are limita  $L$  în punctul "a" dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ,  $\forall x \in A$ ,  $x \neq a$  și  $|x - a| < \delta$ .

Faptul ca funcția  $f$  are limita  $L$  în punctul "a" se notează prin tradiție astfel:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  sau  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ .

### Comentariu:

1. Valoarea funcției  $f$  în punctul  $a$ , dacă există, nu intervine în definiția limitei. Valoarea  $f(a)$  poate să nu verifice inegalitatea din definiția limitei.
2. Fiind dată funcția  $f$  și numărul  $L$ , inegalitatea  $|f(x) - L| < \varepsilon$  înseamnă  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$  și prin urmare  $\varepsilon$  poate fi interpretată ca și acuratețea prescrisă cu care se aproximează  $L$ ; cât de aproape vrem să fim de  $L$ .
3. Numărul  $\delta$  nu este determinat în mod unic de  $\varepsilon$ . După ce sa găsit un  $\delta(\varepsilon)$ , orice  $\delta' < \delta(\varepsilon)$  poate fi luat.

**Exemplu 18.1.** Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ .

*Soluție:* Fie  $\varepsilon > 0$  și să considerăm inegalitatea:

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad 4 - \varepsilon < \frac{x^2 - 4}{x - 2} < 4 + \varepsilon$$

pentru  $x \neq 2$ . Aceasta este echivalentă cu inegalitatea:  $4 - \varepsilon < x + 2 < 4 + \varepsilon$  sau  $2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$ , arătând că putem lua  $\delta = \varepsilon$ .

**Exemplu 18.2.** Să se arate că în orice punct  $a > 0$ , funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  are limită și

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

*Soluție:* În adevăr, dacă  $\varepsilon > 0$ , atunci are loc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad \sqrt{a} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{a} + \varepsilon$$

care prin ridicare la pătrat devine:

$$a - 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 < x < a + 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Pentru un  $a$  și un  $\varepsilon$  dat, putem lua  $\delta = 2\sqrt{a} \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$ .

**Exemplu 18.3.** Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  nu există.

*Soluție:* Reamintim că oricât de aproape de  $a = 0$  există  $x'$  astfel ca  $f(x') = 1$  și  $x''$  astfel ca  $f(x'') = -1$ . Rezultă că pentru orice  $L$  există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $\forall \delta > 0 \exists x$  cu  $|x - 0| < \delta$  și  $\left| \sin \frac{1}{x} - L \right| > \varepsilon$ .

*Limita funcției  $f$  în punctul  $a$  (dacă există) este unică.*

În adevăr: să presupunem prin absurd că  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  și  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$  și  $L_1 \neq L_2$ .

Pentru  $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$  există  $\delta_1$  astfel încât  $|f(x) - L_1| < \varepsilon$  pentru  $0 < |x - a| < \delta_1$  și există  $\delta_2$  astfel încât  $|f(x) - L_2| < \varepsilon$  pentru  $0 < |x - a| < \delta_2$ . De aici, pentru  $0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  avem  $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < |L_1 - L_2|$  ceea ce este absurd.

**Teorema 18.1. (Teorema lui Heine)** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  are limită în "a" dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n)$ ,  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ , și  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  șirul  $(f(x_n))$  converge.*

*Demonstrație.* Presupunem că  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  și considerăm un șir  $(x_n)$  de numere reale cu următoarele proprietăți:  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ , și  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ . Pentru  $\delta > 0$  există  $N = N(\delta)$  astfel încât  $|x_n - a| < \delta$ ,  $\forall n > N$ . De aici rezultă  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$  pentru  $n > N$ , deci șirul  $(f(x_n))$  converge la  $L$ .

Presupunem acum că pentru orice șir de numere reale  $(x_n)$  cu următoarele proprietăți:  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ , și  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , șirul  $(f(x_n))$  converge. Vom arăta la început că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  nu depinde de  $(x_n)$ . Raționăm prin reducere la absurd și presupunem că există două șiruri de numere reale  $(x'_n)$  și  $(x''_n)$  cu următoarele proprietăți:  $x'_n, x''_n \in A$ ,  $x'_n \neq a$ ,  $x''_n \neq a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = a$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = L' \neq L'' = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ . Cu șirurile  $(x'_n), (x''_n)$  construim șirul  $(x_n)$  definit astfel:

$$x_n = \begin{cases} x'_k & \text{pentru } n = 2k \\ x''_{k+1} & \text{pentru } n = 2k + 1 \end{cases}$$

și remarcăm că acest șir are următoarele proprietăți:  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ , și  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Prin urmare șirul  $(f(x_n))$  converge la un număr  $L$ . Deoarece  $f(x'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L'$  și  $f(x''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L''$  trebuie să avem  $L = L'$  și  $L'' = L$  și astfel avem  $L' = L''$  absurd.

Fie  $L$  valoarea comună a limitelor șirurilor  $(f(x_n))$ . Vom arăta că  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ . Pentru aceasta presupunem contrariul. Rezultă că există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$  astfel încât  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  și  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ . Rezultă de aici că șirul  $(f(x_n))$  nu converge la  $L$  deși  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$  și  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Absurd.  $\square$

**Criteriul Cauchy-Bolzano pentru limita funcției.**

*Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  are limită în "a" dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $0 < |x' - a| < \delta$  și  $0 < |x'' - a| < \delta$  implică  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .*

*Demonstrație.* Presupunem că  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  și considerăm  $\varepsilon > 0$ . Există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru  $0 < |x - a| < \delta$  să avem  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ . De aici, pentru orice  $x', x''$  cu

$0 < |x' - a| < \delta$  și  $0 < |x'' - a| < \delta$  avem  $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - L| + |f(x'') - L| < \varepsilon$ . Presupunem acum că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $x', x''$  cu  $0 < |x' - a| < \delta$  și  $0 < |x'' - a| < \delta$  avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  și considerăm un șir de numere reale  $(x_n)$  cu următoarele proprietăți:  $x_n \in A, x_n \neq a$  și  $x_n \rightarrow a$ . Pentru  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  există  $N = N(\delta)$  astfel încât  $|x_n - a| < \delta$  pentru orice  $n > N$ . De aici, pentru  $n, m > N$  avem  $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ . Aceasta arată că șirul  $(f(x_n))$  este convergent. Cu teorema lui Heine rezultă că  $f$  are limită în  $a$ .  $\square$

## 19 Reguli privind limita funcției într-un punct.

a) Dacă  $f(x) = k = \text{constant}$  atunci  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} k, \forall a$ .

b) Dacă  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  și  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} M$  atunci

$$\begin{cases} f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \pm M \\ f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \cdot M. \end{cases}$$

c) Dacă  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L, g(x) \neq 0$  și  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} M \neq 0$  atunci  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{L}{M}$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra doar implicația

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \quad \text{și} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} M \quad \implies \quad f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L + M.$$

Celelalte se fac asemănător sau sunt mai degrabă tehnice și pot fi omise la prima citire. Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$  și  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$  astfel încât:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pentru  $0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  avem:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon$$

$\square$

### Regula "cleștelui".

Dacă pe o mulțime de forma  $I = (a - r, a) \cup (a, a + r)$ ,  $r > 0$  funcțiile  $f, g, h$  verifică inegalitățile  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  și dacă  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  și  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  atunci  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ,  $\forall x \in I$  avem  $f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$ . De aici rezultă inegalitatea:  $|g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\}$ ,  $\forall x \in I$ . Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$  și  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$  astfel încât să avem:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{și} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - L| < \varepsilon.$$



De aici rezultă că:

$$0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\} \implies |g(x) - L| \leq \max\{|f(x) - L|, |h(x) - L|\} < \varepsilon$$

□

**Exemplu 19.1.** Să se arate că  $\sin \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$  și  $\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$ .

*Soluție:* Fie  $\theta$  unghiul la centru măsurat în radiani într-un cerc de rază 1.

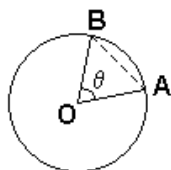


Figura 19.1:

Aria sectorului circular  $OAB$  este  $\frac{|\theta|}{2}$  și aria triunghiului  $OAB$  este  $\frac{|\sin \theta|}{2}$ . De aici avem:

$$0 \leq \frac{|\sin \theta|}{2} \leq \frac{|\theta|}{2} \quad \text{sau} \quad 0 \leq |\sin \theta| \leq |\theta|$$

Funcțiile  $f(\theta) = 0$ ;  $g(\theta) = |\sin \theta|$ ;  $h(\theta) = |\theta|$  verifică condițiile din regula cleștelui și rezultă astfel că:  $\sin \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .

Pentru a arăta că  $\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$  pornim de la identitatea  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  din care obținem  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  și deci  $\cos^2 \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$ . De aici rezultă  $\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \pm 1$ , dar  $\cos \theta$  fiind pozitiv în vecinătatea lui 0 rezultă că  $\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$ .

**Exemplu 19.2.** Folosind regula cleștelui, putem arăta că  $x \cdot \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Observăm că  $x \cdot \sin \frac{1}{x}$  verifică inegalitățile:

$$-|x| \leq \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \quad \forall x \neq 0$$

Alegem  $f(x) = -|x|$ ,  $g(x) = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right|$ ,  $h(x) = |x|$  și aplicăm regula cleștelui; rezultă

$$x \cdot \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Putem arăta în acest fel și că  $x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

**Exemplu 19.3.** Putem arăta că  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  ”prinzând” exponențiala  $e^x$  între  $1 + x$  și  $1 + x + x^2$  pe o vecinătate a lui 0. Mai precis:

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2, \quad \forall x \in (-\infty, 1).$$

Folosind inegalitățile precedente putem arăta:  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

**Limita funcției compuse:** Dacă  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ ,  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow L} M$  și  $g \circ f$  este definit pe o mulțime ce conține  $I = (a - r) \cup (a, a + r)$ ,  $r > 0$  atunci  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} M$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow L} M$  există  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$  astfel încât

$$0 < |y - L| < \delta_1 \implies |g(y) - M| < \varepsilon.$$

Asemănător din  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  rezultă că există  $\delta_2 = \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$  astfel încât  $0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - L| < \delta_1$ .

De aici rezultă:  $0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - L| < \delta_1 \implies |g(f(x)) - M| < \varepsilon$ .  
Ceea ce arată că  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} M$ .  $\square$

## 20 Limite laterale.

Limita  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  prezentată în Definiția 18.1 este o limită bilaterală pentru că variabila  $x$  se poate apropia de ” $a$ ” și din stânga și din dreapta. Vom analiza acum limite unilaterale, când variabila  $x$  se apropie de ” $a$ ” doar din stânga sau doar din dreapta. Aceasta este necesar atunci când funcția este definită doar în stânga sau doar în dreapta punctului ” $a$ ” sau atunci când apropiindu-ne din stânga și din dreapta obținem limite diferite. Vom folosi următoarea terminologie:

” $x$  tinde la ” $a$ ” dinspre dreapta” sau ” $x$  coboară la ” $a$ ”” și notăm  $x \rightarrow a^+$  sau  $x \searrow a$ .

” $x$  tinde la ” $a$ ” dinspre stânga” sau ” $x$  urcă la ” $a$ ”” și notăm  $x \rightarrow a^-$  sau  $x \nearrow a$ .

**Definiția 20.1.** Limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul ” $a$ ” este  $L$  (sau limita lui  $f(x)$  atunci când  $x$  tinde la ” $a$ ” dinspre dreapta este  $L$ ) dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Faptul că limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul ” $a$ ” este  $L$  se notează astfel:

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{sau} \quad L = \lim_{x \searrow a} f(x)$$

**Definiția 20.2.** Limita la stânga a funcției  $f$  în punctul ” $a$ ” este  $L$  (sau limita lui  $f(x)$  atunci când  $x$  tinde la ” $a$ ” dinspre stânga este  $L$ ) dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Faptul că limita la stânga a funcției  $f$  în punctul ” $a$ ” este  $L$  se notează astfel:

$$L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{sau} \quad L = \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

**Observația 20.1.** Dacă funcția  $f$  are limită la stânga și limită la dreapta în ” $a$ ” și aceste limite laterale sunt egale cu  $L$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

atunci funcția  $f$  are limită în " $a$ " și această limită este  $L$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

**Exemplu 20.1.** Funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  este definită doar pentru  $x \geq 0$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

**Exemplu 20.2.** Funcția

$$\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x > 0 \\ -1, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

nu are limită în  $a = 0$ . Limitele laterale însă există:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign}(x) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign}(x) = -1$ .

**Exemplu 20.3.** Funcția treaptă și funcția scară.  
Funcția treaptă este definită astfel:

$$\text{step}(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } x = 0 \\ 1, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

Pentru  $x \neq 0$  funcția treaptă poate fi scrisă astfel:

$$\text{step}(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x)).$$

Funcția treaptă are limite laterale în 0 și:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{step}(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{step}(x) = 0$ .

Funcția treaptă translatată  $\text{step}(x - a)$  are treapta în punctul " $a$ " (nu în 0) unde are limite laterale:  $\lim_{x \rightarrow a^+} \text{step}(x - a) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow a^-} \text{step}(x - a) = 0$ .

Funcția scară este o funcție cu mai multe trepte. De exemplu:

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^m \text{step}(x - n)$$

La fiecare treaptă funcția scară are o limită laterală la stânga și o limită laterală la dreapta care sunt diferite și sunt diferite și de valoarea funcției  $S_m$  în punct. În toate celelalte puncte limitele laterale coincid și deci funcția scară are limită în puncte  $x \neq n$ .

**Definiția 20.3.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este crescătoare dacă pentru orice  $x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2$  rezultă  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

**Definiția 20.4.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este descrescătoare dacă pentru orice  $x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2$  rezultă  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

**Definiția 20.5.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este monotonă dacă este crescătoare sau este descrescătoare.

## Existența limitelor laterale în cazul funcțiilor monotone

Dacă funcția  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$  este monotonă atunci pentru orice  $x_0 \in (a, b)$  limitele  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  există.

*Demonstrație.* Fie  $x_0 \in (a, b)$  și mulțimea:

$$S_{x_0} = \{f(x) | x < x_0\}$$

Dacă funcția  $f$  este crescătoare, atunci mulțimea  $S_{x_0}$  este mărginită superior de  $f(x_0)$  și dacă  $f$  este descrescătoare, atunci mulțimea  $S_{x_0}$  este mărginită inferior de  $f(x_0)$ .

Dacă funcția  $f$  este crescătoare, atunci marginea superioară a mulțimii  $S_{x_0}$  este limita la stânga a lui  $f$  în  $x_0$ :  $\sup S_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  și dacă  $f$  este descrescătoare atunci marginea inferioară a mulțimii  $S_{x_0}$  este limita la stânga a lui  $f$  în  $x_0$ ;  $\inf S_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Considerând mulțimea:

$$R_{x_0} = \{f(x) | x > x_0\}$$

se arată de aceeași manieră că dacă  $f$  este funcție crescătoare atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf R_{x_0}$  și dacă  $f$  este funcție descrescătoare atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup R_{x_0}$ .  $\square$

## 21 Limite infinite.

Plus infinit  $+\infty$  și minus infinit  $-\infty$  sunt simboluri matematice și nu sunt numere cu care se fac operații algebrice.

**Definiția 21.1.** *Limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul "a" este  $+\infty$  dacă pentru orice  $M > 0$  există  $\delta = \delta(M) > 0$  astfel încât:*

$$f(x) > M, \quad \forall x \in (a, a + \delta)$$

*Faptul că limita la dreapta a funcției  $f$  în "a" este  $+\infty$  se notează astfel:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ .*

**Definiția 21.2.** *Limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul "a" este  $-\infty$  dacă pentru orice  $M > 0$  există  $\delta = \delta(M) > 0$  astfel încât:*

$$f(x) < -M, \quad \forall x \in (a, a + \delta)$$

*Faptul că limita la dreapta a funcției  $f$  în "a" este  $-\infty$  se notează astfel:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .*

**Remarca 21.1.** Limitele la stânga:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

și limitele bilaterale:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se definesc analog.

**Exemplu 21.1.** Să se verifice că:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

**Exemplu 21.2.** Se poate întâmpla ca o funcție să aibe o limită laterală finită și cealaltă limită laterală infinită într-un punct "a". De exemplu:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$$

Limitele care se obțin pentru  $x \rightarrow +\infty$  sau  $x \rightarrow -\infty$  se numesc limite la  $\pm\infty$  și nu trebuie confundate cu limita infinită.

**Definiția 21.3. (limita la infinit)** Limita funcției  $f$  la  $+\infty$  este  $L$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $M > 0$  astfel încât:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \forall x > M$$

Limita la  $-\infty$  se definește analog.

**Exemplu 21.3.** Funcția  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x + x^2}$  are următoarele limite la infinit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

## 22 Punctele limită ale unei funcții într-un punct.

**Definiția 22.1.** Numărul  $L$  este punct limită al funcției  $f$  în "a" dacă există un șir  $(x_n)$  de numere reale cu următoarele proprietăți:  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  și  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ; unde "A" este domeniul de definiție al funcției  $f$ .

Tradițional mulțimea punctelor limită a lui  $f$  în "a" se notează  $\mathcal{L}_a(f)$ .

**Definiția 22.2.** Limita inferioară a funcției  $f$  în "a" este marginea inferioară a mulțimii  $\mathcal{L}_a(f)$ , adică  $\inf \mathcal{L}_a(f)$ . Limita inferioară a lui  $f$  în "a" se notează cu  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  și avem:

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \inf \mathcal{L}_a(f)$$

**Definiția 22.3.** Limita superioară a funcției  $f$  în "a" este marginea superioară a mulțimii  $\mathcal{L}_a(f)$ , adică  $\sup \mathcal{L}_a(f)$ . Limita superioară a lui  $f$  în "a" se notează cu  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  și avem:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \sup \mathcal{L}_a(f)$$

### Are loc următoarea afirmație:

Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  are limita  $L$  în punctul „ $a$ ” dacă și numai dacă:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

*Demonstrație.* Prima oară presupunem că  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$  și considerăm un șir  $(x_n)$  cu următoarele proprietăți:  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a$ . Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Întrucât  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât  $|x_n - a| < \delta$  pentru orice  $n > N$ . Rezultă că pentru  $n > N$  avem  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ . Se obține astfel egalitatea  $\mathcal{L}_a(f) = \{L\}$  și prin urmare:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Presupunem acum că  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = L$  și vrem să arătăm că  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$ .

Raționăm prin reducere la absurd și admitem că  $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow a} L$ . Rezultă că există  $\varepsilon_0$  astfel încât pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există  $x_n$  cu proprietatea  $|x_n - a| < \frac{1}{n}$  și  $|f(x_n) - L| > \varepsilon_0$ . Șirul  $(f(x_n))$  are un subșir  $(f(x_{n_k}))$  care are limită. Este clar că  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \neq L$ .

Rezultă că  $\mathcal{L}_a(f)$  nu se reduce la un element. □

**Exemplu 22.1.** Să se arate că dacă  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \neq 0$  atunci  $\mathcal{L}_0(f) = [-1, 1]$ .

*Soluție:* Fie  $l \in [-1, 1]$ . Ecuația  $\sin \frac{1}{x} = l$  are o infinitate de soluții:

$$x_n = \frac{1}{(-1)^n \arcsin l + n\pi}.$$

Șirul  $(x_n)$  are următoarele proprietăți:  $x_n \in \mathbb{R}^1$ ,  $x_n \neq 0$ ,  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  și  $f(x_n) = l$ . Rezultă  $l \in \mathcal{L}_0(f)$ .

Prin urmare avem incluziunea  $[-1, 1] \subset \mathcal{L}_0(f)$ . Arătăm acum incluziunea  $\mathcal{L}_0(f) \subset [-1, 1]$ .

Pentru aceasta fie  $l \in \mathcal{L}_0(f)$ . Există un șir  $(x_n)$  cu următoarele proprietăți:  $x_n \neq 0$ ,  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  și  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ .

Întrucât  $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n}$  rezultă că  $|f(x_n)| \leq 1$  și deci  $|l| \leq 1$ . De aici avem apartenența  $l \in [-1, 1]$ .

## 23 Continuitatea unei funcții într-un punct.

Imprecis dar sugestiv, o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă dacă graficul ei este o curbă continuă. În particular dacă  $A$  conține o vecinătate a punctului  $a \in A$ , graficul lui  $f$  se trasează prin  $(a, f(a))$  fără a ridica creionul de pe hârtie. Un asemenea comportament în  $(a, f(a))$  se realizează dacă se impune ca pentru  $x$  aproape de  $a$ ,  $f(x)$  să fie aproape de  $f(a)$ . Fie  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  și  $a \in \text{Int}(A)$ .

**Definiția 23.1.** Funcția  $f$  este continuă în " $a$ " dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Această definiție impune trei condiții:  $f(a)$  este definită; există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ;  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Definiția limitei într-un punct a funcției  $f$ , formulată în limbajul  $\varepsilon, \delta$  poate fi ușor transpusă pentru a formula o definiție a continuității în  $a$  a funcției  $f$ .

**Definiția 23.2.** Funcția  $f$  este continuă în punctul " $a$ " dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Exemplu 23.1.** Să se verifice că funcția  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}^1$  este continuă în  $a = 0$ .

*Soluție:* Pentru  $\varepsilon > 0$  determinăm  $x$  pentru care  $|x^2 - 0| = |x^2| < \varepsilon$  și găsim  $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ . Prin urmare, dacă  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$  atunci  $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ , pentru  $\forall x$  astfel încât  $|x - 0| < \sqrt{\varepsilon}$ .

**Definiția 23.3.** Dacă funcția  $f$  este continuă pentru orice  $x \in (a, b)$  zicem că  $f$  este continuă pe intervalul  $(a, b)$ .

Dacă funcția  $f$  este continuă în orice punct  $x$  din domeniul de definiție zicem că  $f$  este continuă.

**Definiția 23.4.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  atunci  $f$  este continuă la dreapta în  $a$ .

**Definiția 23.5.** Funcția  $f$  este continuă la stânga în  $a$  dacă  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

Are loc următoarea afirmație:

Funcția  $f$  este continuă în  $a$  dacă și numai dacă este continuă la stânga și la dreapta în  $a$ .

**Remarca 23.1.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  și este continuă aceasta înseamnă că  $f$  este continuă pe  $(a, b)$ , este continuă la dreapta în  $a$  și continuă la stânga în  $b$ .

**Teorema 23.1. [de continuitate a lui Heine.]** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă în punctul  $a \in \overset{\circ}{A}$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_n)$  cu proprietățile:  $x_n \in A, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  șirul  $(f(x_n))$  converge la  $f(a)$ .

*Demonstrație.* Acest rezultat se obține din teorema lui Heine pentru limită. □

**Teorema 23.2. [de continuitate a lui Cauchy-Bolzano.]** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă în punctul  $a \in \overset{\circ}{A}$  dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $|x' - a| < \delta$  și  $|x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Rezultatul se obține din teorema Cauchy-Bolzano pentru limită. □

## 24 Reguli privind continuitatea unei funcții într-un punct.

**Regula sumei:** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt continue în punctul  $a \in \mathbb{R}^1$  atunci funcția  $f + g$  este continuă în punctul  $a$ .

**Regula produsului:** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt continue în punctul  $a \in \mathbb{R}^1$  atunci funcția  $f \cdot g$  este continuă în punctul  $a$ .

**Regula câtului:** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt continue în punctul  $a \in \mathbb{R}^1$ ,  $g(x) \neq 0$  și  $g(a) \neq 0$  atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este continuă în punctul  $a$ .

**Regula cleștelui:** Dacă funcțiile  $f, g$  și  $h$  sunt astfel încât inegalitatea:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

este verificată pe o vecinătate a punctului  $a \in \mathbb{R}^1$  și  $f(a) = g(a) = h(a)$  atunci continuitatea funcțiilor  $f$  și  $h$  în punctul  $a$  implică continuitatea funcției  $g$  în punctul  $a$ .

Aceste reguli se demonstrează folosind regulile cu aceeași denumire de la limită într-un punct.

### Regula de continuitate a funcției compuse:

Dacă funcția  $f$  este continuă în  $a \in \mathbb{R}^1$  și funcția  $g$  este continuă în  $f(a) \in \mathbb{R}^1$  atunci funcția compusă  $g \circ f$  este continuă în  $a$ .

*Demonstrație.* Fie  $b = f(a)$ . Deoarece  $g$  este continuă în  $b$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $|t - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(t) - g(b)| < \varepsilon$ .

Deoarece  $f$  este continuă în " $a$ " pentru  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$  există  $\delta_2 = \delta_2(\delta_1) = \delta_2(\varepsilon)$  astfel încât  $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$ . Deducem că  $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ .

Prin urmare:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_2(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $|x - a| < \delta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$ .  $\square$

**Aplicație 24.1** Deoarece funcția identică  $x \mapsto x$ , funcția constantă  $x \mapsto k$  și funcțiile trigonometrice  $\sin$  și  $\cos$  sunt continue, în virtutea regulilor precedente, următoarele funcții sunt continue:

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}; \quad x \mapsto x^3 \cdot \cos x^2; \quad x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

### Prelungirea prin continuitate.

Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  nu este definită în punctul " $a$ " dar  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  există și este finită atunci funcția  $g : A \cup \{a\} \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , definită prin  $g(x) = f(x)$  pentru  $x \neq a$  și  $g(a) = L$  este continuă în  $a$ .

Funcția  $g$  se numește prelungirea prin continuitate a funcției  $f$ .

**Exemplu 24.1.** Funcția  $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită cu:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$



este prelungirea prin continuitate a funcției  $f : \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită cu  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

## 25 Proprietăți ale funcțiilor continue.

**Proprietatea de mărginire:** Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă atunci:

1. funcția  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$ .
2. funcția  $f$  își atinge marginile în anumite puncte din  $[a, b]$ .

**Comentariu:**

1. Prima afirmație înseamnă că există numerele reale  $m$  și  $M$  astfel încât  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ .
2. Cea de-a doua afirmație înseamnă că dacă  $m = \inf \{f(x) | x \in [a, b]\}$  și  $M = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$  atunci există  $c$  și  $d$  în  $[a, b]$  astfel încât  $m = f(c)$  și  $M = f(d)$ .

*Demonstrație. Demonstrația mărginirii.* Fie  $B = \{x | x \in [a, b] \text{ și } f \text{ este mărginită pe } [a, x]\}$ . Mulțimea  $B$  conține pe  $a$  ( $a \in B$ ) și este mărginită;  $y \leq b, \forall y \in B$ . Fie  $c = \sup B$ . Întrucât funcția  $f$  este continuă la dreapta în punctul  $a$ , pentru  $\varepsilon = 1$  există  $\delta_1 = \delta(\varepsilon) = \delta(1) > 0$  astfel încât:  $a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < 1$ . De aici rezultă inegalitatea  $|f(x)| < 1 + |f(a)|, \forall x \in [a, a + \delta_1]$ . Prin urmare  $c > a + \frac{\delta_1}{2} > a$ .

De fapt va trebui să arătăm că  $c = b$ . Deocamdată am obținut doar că  $c > a$ . Presupunem prin absurd că  $c < b$ . Deoarece  $c > a$  și  $f$  este continuă în  $c$  rezultă că pentru  $\varepsilon = 1$  există  $\delta' = \delta'(\varepsilon) = \delta'(1) > 0$  astfel încât  $|x - c| < \delta' \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |f(c)|$ . Altfel spus funcția  $f$  este mărginită pe  $[c, c + \delta']$ . De aici  $c + \frac{\delta'}{2} \in B$  și aceasta contrazice faptul că  $c = \sup B$ . Prin urmare  $c = b$  și astfel  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$ .  $\square$

*Demonstrație. Demonstrația atingerii marginii.* Deoarece funcția  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$  mulțimea:  $A = f([a, b]) = \{f(x) | x \in [a, b]\}$  este mărginită. Fie  $m = \inf A$  și  $M = \sup A$ . Să presupunem prin absurd că  $f(x) \neq M, \forall x \in [a, b]$  și să considerăm funcția  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  definită pentru  $x \in [a, b]$ . Funcția  $g$  construită în acest fel este continuă și conform primei părți din această demonstrație, este mărginită pe  $[a, b]$ . Fie  $K$  astfel încât:

$$g(x) \leq K, \quad \forall x \in [a, b].$$

De aici se obține:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K \Rightarrow \frac{1}{K} \leq M - f(x) \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Această din urmă inegalitate contrazice egalitatea  $M = \sup A$ . Prin urmare ipoteza  $f(x) \neq M, \forall x \in [a, b]$  este absurdă. Trebuie deci să admitem că există  $x_M \in [a, b]$  astfel încât  $f(x) = M$ . Analog se arată că  $f$  își atinge marginea inferioară.  $\square$

### Proprietatea valorii intermediare (proprietatea lui Darboux)

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă atunci pentru orice  $\gamma$  situat între  $\alpha = f(a)$  și  $\beta = f(b)$  există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = \gamma$ .

**Comentariu:** De aici rezultă că dacă  $f$  are valorile  $\alpha'$  și  $\beta'$  în punctele  $x'$  și  $x''$  din  $[a, b]$  atunci  $f$  are toate valorile posibile între  $\alpha'$  și  $\beta'$ .

*Demonstrație.* Pentru a face o alegere, admitem că  $\alpha < \gamma < \beta$  și considerăm mulțimea

$$S = \{x \mid x \in [a, b] \text{ și } f(x) < \gamma\}.$$

Mulțimea  $S$  conține pe  $a$  deci  $S$  nu este vidă. Considerăm  $c = \sup S$  și observăm că  $c \in (a, b)$ . Vom arăta că  $f(c) = \gamma$ . Pentru aceasta raționăm prin reducere la absurd și admitem că  $f(c) \neq \gamma$ . Rezultă de aici că  $f(c) < \gamma$  sau  $f(c) > \gamma$ .

Dacă  $f(c) < \gamma$  atunci pentru  $\varepsilon = \gamma - f(c)$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât:

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

În particular

$$|f(c + \frac{\delta}{2}) - f(c)| < \varepsilon$$

și astfel:  $f(c + \frac{\delta}{2}) - f(c) < \gamma - f(c)$ .

De aici  $f(c + \frac{\delta}{2}) < \gamma$  și deci  $c + \frac{\delta}{2} \in S$ . Aceasta contrazice egalitatea  $c = \sup S$ . Prin urmare nu putem avea  $f(c) < \gamma$ .

Dacă  $f(c) > \gamma$ , atunci pentru  $\varepsilon = f(c) - \gamma > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca:  $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ . De aici rezultă că dacă  $x \in (c - \delta, c]$  atunci  $f(x) > \gamma$  și deci  $x \notin S$ . Altfel spus  $\sup S \leq c - \delta$  ceea ce contrazice  $c = \sup S$ .

Rezultă în final  $f(c) = \gamma$ . □

Proprietatea lui Darboux are multe aplicații. Iată una din acestea:

**Aplicația 25.1** Orice polinom de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

*Demonstrație.* Fie  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  un polinom de grad  $n = \text{impar}$ . Fără a pierde din generalitate, putem presupune  $a_n = 1$ .

Știm că  $P = P(X)$  este o funcție continuă și considerăm funcția

$$r(X) = \frac{P(X)}{X^n} - 1, \quad X \neq 0$$

Funcția  $r(X)$  se majorează astfel:

$$|r(X)| = \left| \frac{P(X)}{X^n} - 1 \right| = \left| \frac{a_{n-1}}{X} + \dots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} \right| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{X} \right| + \dots + \left| \frac{a_1}{X^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{X^n} \right|$$

și dacă  $M = \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$  atunci:

$$|r(X)| \leq M \cdot \sum_{r=1}^n \frac{1}{|X|^r} < M \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{|X|^r} = \frac{M}{|X| - 1}, \quad \forall |X| > 1$$

De aici  $|r(X)| < 1$  pentru  $|X| > 1 + M$ . În particular  $1 + r(X) > 0$  pentru orice  $X$  cu  $|X| > 1 + M$ . De aici rezultă că  $P(X) = X^n(1 + r(X))$  are același semn ca  $X^n$  pentru  $|X| > 1 + M$ .

Întrucât  $n$  este număr impar rezultă că există  $\alpha > 0$  și  $\beta < 0$  astfel ca  $P(\alpha) > 0$  (se alege  $\alpha > 1 + M$ ) și  $P(\beta) < 0$  (se alege  $\beta < -(1 + M)$ ). Folosind proprietatea valorii intermediare rezultă că există  $c$  ( $|c| < 1 + M$ ) astfel încât  $P(c) = 0$ .

Aceasta arată că  $P$  are o rădăcină în intervalul  $(-(1 + M), 1 + M)$ .

De fapt toate rădăcinile reale ale polinomului  $P$  sunt în intervalul  $(-(1 + M), 1 + M)$ .  $\square$

### Proprietatea de transformare a intervalului în interval

*Dacă funcția  $f : [a, b] = I \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă atunci mulțimea  $f(I)$  este un interval mărginit și închis.*

**Comentariu:** Această proprietate a funcției continue arată că ea transformă un interval mărginit și închis tot într-un interval mărginit și închis.

*Demonstrație.* Din proprietatea de mărginire rezultă că există  $c, d \in I$  astfel încât:

$$f(c) = m_0 = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$

$$f(d) = M_0 = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$$

Pentru a face o alegere presupunem că  $c \leq d$ . Proprietatea valorii intermediare aplicată pe subintervalul  $[c, d]$  arată că  $f$  ia toate valorile dintre  $m_0 = f(c)$  și  $M_0 = f(d)$ . Cu alte cuvinte  $f(I) = [m_0, M_0]$ .  $\square$

### Proprietatea de punct fix.

*Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  este continuă atunci există cel puțin un punct  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) = c$  ( $c$  este punct fix pentru  $f$ ).*

**Comentariu:** Această proprietate spune că graficul funcției intersectează prima bisectoare  $y = x$ .

*Demonstrație.* Fie  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  definit prin  $g(x) = f(x) - x$ . Funcția  $g$  este continuă. Dacă  $f(a) = a$  sau  $f(b) = b$  atunci nu avem nimic de demonstrat. Putem deci presupune că  $f(a) \neq a$  și  $f(b) \neq b$ . De aici  $g(a) = f(a) - a > 0$  și  $g(b) = f(b) - b < 0$ . Proprietatea valorii intermediare în cazul funcției  $g$  arată că există  $c \in (a, b)$  astfel încât  $g(c) = 0$ . De aici rezultă egalitatea  $f(c) = c$ .  $\square$

### Proprietatea de continuitate a funcției inverse

*Dacă  $f : I \rightarrow J$  este o bijecție continuă definită pe intervalul  $I$  și cu valori pe intervalul  $J$  atunci funcția inversă  $f^{-1} : J \rightarrow I$  este continuă.*

*Demonstrație.* Considerăm o bijecție continuă  $f : I \rightarrow J$  definită pe intervalul  $I$  și cu valori pe intervalul  $J$ .

Prima oară arătăm că funcția  $f$  este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare. Pentru aceasta raționăm prin reducere la absurd și presupunem că  $f$  nu este nici strict crescătoare nici strict descrescătoare. În acest caz există în  $I$  trei numere  $a_1, a_2, a_3$  cu următoarele proprietăți:  $a_1 < a_2 < a_3$  și  $f(a_1) < f(a_3) < f(a_2)$ . Aplicăm proprietatea valorii intermediare funcției  $f$  pe  $[a_1, a_2]$  și deducem că există  $c \in (a_1, a_2)$  astfel încât

$f(c) = f(a_3)$ . Aceasta contrazice faptul că  $f$  este bijecție. În demonstrație presupunem în continuare că  $f$  este crescătoare. Demonstrația este similară dacă  $f$  este descrescătoare. Funcția  $f$  fiind deci strict crescătoare, funcția  $f^{-1}$  este și ea strict crescătoare.

Fie acum  $b \in J$  și  $a = f^{-1}(b) \in I$ . Pentru orice  $\varepsilon > 0$  (suficient de mic) funcția  $f$  transformă intervalul  $I_a^\varepsilon = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  în intervalul  $J_b^\varepsilon = f(I_a^\varepsilon) = [m, M]$ . Deoarece funcția  $f$  este strict crescătoare, rezultă  $b \in (m, M)$ . Fie  $\delta = \min\{b - m, M - b\} > 0$ . Intervalul închis  $[b - \delta, b + \delta]$  este o submulțime a intervalului  $[m, M] = f(J_b^\varepsilon)$  și  $f^{-1}$  transformă intervalul  $[b - \delta, b + \delta]$  în  $I_a^\varepsilon = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ . Rezultă astfel că pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca

$$|y - b| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon$$

□

*Dacă funcția  $f : I \rightarrow J$  este o surjecție strict monotonă a intervalului  $I$  pe intervalul  $J$  atunci funcția  $f$  și inversa ei  $f^{-1}$  sunt continue.*

**Definiția 25.1.** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este uniform continuă pe  $A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât:*

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in A$$

**Teorema de continuitate uniformă.**

*Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă atunci  $f$  este uniform continuă.*

**Comentariu:** Această teoremă afirmă de fapt că o funcție continuă pe un interval mărginit și închis este uniform continuă.

*Demonstrație.* Este tehnică și nu o facem. □

## 26 Șiruri de funcții. Mulțimea de convergență.

Fie  $A \subset \mathbb{R}^1$  și  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  un șir de funcții reale definite pe  $A$ :  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Vom nota acest șir cu  $(f_n)$ .

**Definiția 26.1.** *Un element  $a \in A$  este punct de convergență al șirului  $(f_n)$  dacă șirul de numere reale  $(f_n(a))$  converge.*

*Mulțimea punctelor de convergență ale șirului  $(f_n)$  se numește mulțimea de convergență a șirului  $(f_n)$ .*

Fie  $B \subset A$  mulțimea de convergență a șirului  $(f_n)$ . Pentru orice  $b \in B$  există  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b)$  și are sens să considerăm funcția  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin:

$$f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b)$$

Funcția  $f$  definită în acest fel se numește limita șirului de funcții  $f_n$  pe mulțimea  $B$ . Se mai spune că șirul  $f_n$  converge la  $f$  pe  $B$ .

**Definiția 26.2.** Fie  $(f_n)$  un șir de funcții reale definite pe  $A \subset \mathbb{R}^1$ :  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^1$  este limita șirului de funcții  $(f_n)$  dacă pentru orice  $x \in A$  și orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(x, \varepsilon)$  astfel ca pentru  $n > N(x, \varepsilon)$  să avem:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Faptul că funcția  $f$  este limita șirului de funcții  $(f_n)$  pe  $A$  se notează astfel:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  pe  $A$ .

**Comentariu:** Dacă în definiția precedentă  $N$  depinde doar de  $\varepsilon$  și nu depinde de  $x$  atunci zicem că șirul  $(f_n)$  converge uniform la  $f$  pe  $A$ .

**Definiția 26.3.** Șirul de funcții  $(f_n)$  converge uniform la funcția  $f$  pe mulțimea  $A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  și  $x \in A$  are loc:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Exemplu 26.1.** Considerăm  $A = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x = 1 \\ 0, & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ . Șirul de funcții  $(f_n)$  converge la  $f$  și nu converge uniform la  $f$ .

**Exemplu 26.2.** Considerăm  $A = [0, 2\pi]$ ,  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ,  $f(x) = 0$ ,  $x \in A$ . Șirul de funcții  $(f_n)$  converge uniform la  $f$  pe  $A$ .

Faptul că șirul de funcții  $(f_n)$  converge uniform la funcția  $f$  pe mulțimea  $A$  se notează astfel:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f, \text{ pe } A$$

Urmează în continuare două criterii de convergență uniformă.

**Criteriul 1 (Cauchy).** Șirul de funcții reale  $(f_n)$ :  $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  converge uniform la funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^1$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $n, m > N(\varepsilon)$  și orice  $x \in A$  are loc:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Presupunem prima oară că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$  pe  $A$ . Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $p \geq N(\varepsilon)$  are loc  $|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall x \in A$ . Fie  $n, m > N(\varepsilon)$  și  $x \in A$ . Are loc inegalitatea:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Presupunem acum că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n, m > N(\varepsilon)$  și  $x \in A$  are loc:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

și arătăm că există  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  astfel ca  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$ .

Din ipoteză rezultă că pentru orice  $x \in A$  șirul de numere  $(f_n(x))$  este convergent. Deci

șirul de funcții  $(f_n)$  converge la o funcție  $f$  pe  $A$ :  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  pe  $A$ .

Considerăm  $\varepsilon > 0$  și  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n, m > N(\varepsilon)$  și  $x \in A$  să avem:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Alegem  $m_0 > N(\varepsilon)$  și din  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  deducem că:

$$|f(x) - f_{m_0}(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

Aceasta arată că  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  pe  $A$ . □

**Criteriul 2.** Fie  $(f_n)$  un șir de funcții reale:  $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  și o funcție reală  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Dacă există un șir de numere reale pozitive  $(a_n)$  care converge la zero și verifică  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  și orice  $x \in A$  atunci  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  pe  $A$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  are loc  $a_n < \varepsilon$ . Rezultă că  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  pentru  $n > N(\varepsilon)$  și  $x \in A$ . Cu alte cuvinte  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ . □

## 27 Convergența uniformă a unui șir de funcții și continuitatea.

Propoziția următoare arată că, convergența uniformă păstrează continuitatea:

**Propoziția 27.1.** Fie  $(f_n)$  un șir de funcții reale  $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  uniform convergent la o funcție reală  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ . Dacă funcțiile  $f_n$  sunt continue într-un punct  $a \in A$  atunci funcția  $f$  este continuă în "a".

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel încât pentru orice  $x \in A$  are loc  $|f_{N(\varepsilon)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . În particular, avem:

$$|f_{N(\varepsilon)}(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Deoarece funcția  $f_{N(\varepsilon)}$  este continuă în punctul "a" există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât  $|x - a| < \delta \implies |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

De aici, rezultă că pentru orice  $x$  cu  $|x - a| < \delta$  avem:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)| + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(a)| + |f_{N(\varepsilon)}(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcția  $f$  este continuă în "a". □

**Consecința 27.1.** Limita unui șir uniform convergent de funcții continue este funcție continuă.

## 28 Șiruri de funcții reale egal continue și egal mărginite.

Fie  $(f_n)$  un șir de funcții reale de variabilă reală:  $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

Expresia:

” $(f_n)$  este un șir de funcții continue pe  $A$ ” înseamnă că:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(n, x, \varepsilon) > 0, \text{ a.î. } |x - x'| < \delta \implies |f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Dacă funcțiile  $f_n$  sunt uniform continue pe  $A$ , atunci  $\delta$  nu depinde de  $x$ . Prin urmare, expresia

” $(f_n)$  este un șir de funcții uniform continue pe  $A$ ” înseamnă că:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(n, \varepsilon) > 0, \text{ a.î.}$$

$$|x' - x''| < \delta \implies |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'' \in A.$$

Se poate întâmpla că  $\delta$  nu depinde de  $n$ , dar depinde de  $x$  și  $\varepsilon$ . În acest caz șirul  $(f_n)$  este un șir de funcții egal continue. Mai precis:

*Șirul de funcții  $(f_n)$  este un șir de funcții egal continue pe  $A$  dacă pentru orice  $x \in A$  și orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice  $n$  are loc:*

$$|x - x'| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon.$$

Dacă  $\delta$  nu depinde de  $x$  și  $n$ , atunci funcțiile din șirul  $(f_n)$  sunt uniform continue și egal continue. Mai exact:

*Șirul de funcții  $(f_n)$  este un șir de funcții egal uniform continue pe  $A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât:*

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon) \implies |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } \forall x', x'' \in A.$$

*Șirul  $(f_n)$  este un șir de funcții mărginite pe  $A$  dacă  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M = M(n) > 0$  astfel încât  $|f_n(x)| < M, \forall x \in A$ .*

Dacă  $M$  nu depinde de  $n$  atunci funcțiile din șirul  $(f_n)$  sunt egal mărginite. Mai exact:

*Șirul  $(f_n)$  este un șir de funcții egal mărginite pe  $A$  dacă există  $M > 0$  astfel încât  $|f_n(x)| < M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ .*

**Teorema 28.1. [Arzela-Ascoli].** Fie  $I = [a, b]$  un interval închis și  $(f_n)$  un șir de funcții reale  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Dacă șirul  $(f_n)$  este un șir de funcții egal continue și egal mărginite atunci șirul  $(f_n)$  conține un subșir  $(f_{n_k})$  care este uniform convergent.

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă în acest curs. □

## 29 Serii de funcții. Convergență și convergența uniformă.

Fie  $A \subset \mathbb{R}^1$  și  $f_n$  un șir de funcții reale  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Definiția 29.1.** Simbolul  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este o serie de funcții convergentă în  $a \in A$  dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$  este convergentă.

Simbolul  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este o serie de funcții divergentă în  $a \in A$  dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$  este divergentă.

**Definiția 29.2.** Un punct  $a \in A$  este punct de convergență al seriei de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  dacă seria converge în "a".

Mulțimea punctelor de convergență ale seriei de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  se numește mulțimea de convergență a seriei de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

Fie  $B \subset A$  mulțimea de convergență a seriei de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Pentru  $x \in B$  notăm cu  $S(x)$  suma:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Stabilim astfel o corespondență de la mulțimea  $B$  la  $\mathbb{R}^1$ . Adică o funcție

$$S : B \subset A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

Funcția definită mai sus se numește suma seriei de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  pe mulțimea  $B$ .

Tradițional suma seriei de funcții se notează cu  $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  pentru  $x \in B$ .

**Definiția 29.3.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  o serie de funcții definite pe  $A$  și  $S$  o funcție definită pe  $B \subset A$ . Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge la  $S$  pe mulțimea  $B$  dacă pentru orice  $x \in B$  și orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(x, \varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice  $n > N$  avem:

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$



Dacă numărul  $N$  nu depinde de  $x$  atunci seria converge uniform la  $S$  pe  $B$ . În acest caz avem următoarea definiție:

**Definiția 29.4.** *Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniform la  $S$  pe  $B$  dacă  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$  astfel încât:*

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in B.$$

**Definiția 29.5.** *Seria de funcții reale  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge absolut pe  $B$  dacă seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  converge pe  $B$ .*

Dacă seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge absolut pe  $B$  atunci ea converge pe  $B$ .

**Exemplu 29.1.** a) Considerăm șirul de funcții  $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$   $n \geq 0$ , și seria de

funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

Mulțimea de convergență a seriei de funcții este  $\mathbb{R}^1$  și suma seriei este funcția:

$$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Seria de funcții este absolut convergentă pe  $\mathbb{R}^1$ .

b) Pentru  $n \geq 1$  considerăm șirul de funcții definit pe  $\mathbb{R}^1$  astfel:  $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$  și seria

de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

Seria de funcții este absolut convergentă pe  $\mathbb{R}^1$ . Seria de funcții este uniform convergentă pe  $\mathbb{R}^1$ .

c) Pentru  $n \geq 1$  considerăm  $f_n(x) = \cos^n x$  și seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Mulțimea de convergență a seriei este  $\mathbb{R}^1 \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Seria este absolut convergentă pe această mulțime.

d) Pentru  $n \geq 1$  considerăm  $f_n(x) = \frac{e^{n|x|}}{n}$  și seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Mulțimea de convergență a acestei serii de funcții este vidă.

## 30 Criterii de convergență pentru serii de funcții.

Considerăm seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  definite pe  $A$ ;  $f_n : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Definiția 30.1.** *Seria de funcții  $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$  se numește restul de ordinul  $k+1$  al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .*

**Criteriul 1:** *Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este convergentă pe  $A$  dacă și numai dacă restul de orice ordin al seriei este convergent pe  $A$ .*

*Demonstrație.* Considerăm sumele parțiale:

$$\begin{aligned} S_k &= f_1 + f_2 + \dots + f_k \\ \sigma_p^k &= f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_{k+p} \end{aligned}$$

și observăm că

$$S_{k+p} = S_k + \sigma_p^k$$

Din această egalitate rezultă că șirul  $(S_{k+p})$  converge pentru  $p \rightarrow \infty$  dacă și numai dacă șirul  $(\sigma_p^k)$  converge pentru  $p \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Criteriul 2:** *Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este convergentă pe  $A$  dacă și numai dacă șirul sumelor resturilor converge la zero pe  $A$ .*

*Demonstrație.* Imediată.  $\square$

**Criteriul 3 (Cauchy):** *Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniform pe  $A$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N = N(\varepsilon)$  astfel ca pentru  $n \geq N$  și  $p \geq 1$  să aibe loc:*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

*Demonstrație.* Criteriul este o consecință a criteriului Cauchy pentru șiruri.  $\square$

**Criteriul 4:** *Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie de numere pozitive convergentă. Dacă  $|f_n(x)| \leq a_n$ ,  $\forall x \in A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  atunci seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .*

*Demonstrație.* Imediată.  $\square$

## 31 Serii de puteri.

**Definiția 31.1.** O serie de funcții de forma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  se numește serie de puteri.

Orice serie de puteri converge pentru  $x = 0$ .

**Mulțimea de convergență a unei serii de puteri.**

**Teorema 31.1. [Abel-Cauchy-Hadamard.]** *Seria de puteri  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  este absolut convergentă în orice punct  $x$  cu  $|x| < R$  unde  $R$  este:*

$$R = \frac{1}{\omega} \quad \text{pentru } 0 < \omega \leq +\infty$$

$$R = +\infty \quad \text{pentru } \omega = 0$$

și  $\omega = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Seria de puteri este divergentă în orice punct  $x$  cu  $|x| > R$ .

Pentru orice  $r \in (0, R)$  seria de puteri este uniform convergentă pe intervalul închis  $[-r, r]$ .

$R$  se numește raza de convergență a seriei de puteri.

*Demonstrație.* Considerăm un punct  $x_0 \in \mathbb{R}^1$  și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_0|^n$ . Aplicăm criteriul

rădăcinii acestei serii și obținem: dacă  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| < 1$ , atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$  este

absolut convergentă. Cu alte cuvinte, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$  este absolut convergentă pentru

$|x_0| < R$ , unde  $R = \frac{1}{\omega}$  dacă  $0 < \omega \leq +\infty$  și  $R = +\infty$  dacă  $\omega = 0$ , iar  $\omega = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Aplicând același criteriu rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$  este divergentă pentru orice  $x_0$  cu  $|x_0| > R$ .

Pentru  $r \in (0, R)$  seria  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$  converge ( $x = r$  este un punct în care  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  converge absolut) și pentru  $x \in [-r, r]$  are loc:

$$|a_n| \cdot |x|^n \leq |a_n| \cdot r^n$$

Conform Criteriului 4 de convergență seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  este uniform convergentă pe  $[-r, r]$ . □

**Exemplu 31.1.** a) Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  este absolut convergentă pentru  $|x| < 1$  și este divergentă pentru  $|x| > 1$ . Raza de convergență a seriei este  $R = 1$ ; mulțimea de convergență este intervalul deschis  $(-1, 1)$ .

b) Pentru seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  raza de convergență  $R$  este  $R = 1$ . Mulțimea de convergență este  $[-1, 1)$ .

c) Mulțimea de convergență a seriei de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$  este  $(-1, 1]$ .

d) Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$   $\alpha > 1$  este absolut convergentă pe  $[-1, 1]$ .

În ceea ce privește continuitatea sumei unei serii de puteri avem:

**Teorema 31.2. Teorema de continuitate a sumei.** *Suma  $S$  a seriei de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este o funcție continuă pe  $(-R, R)$ .*

*Demonstrație.* Fie  $x_0 \in (-R, R)$ . Există  $r > 0$  și  $r < R$  astfel încât să aibe loc:  $-R < -r < x_0 < r < R$ . Deoarece pe intervalul închis  $[-r, r]$  seria converge uniform și termenii seriei sunt funcții continue, suma  $S$  este funcție continuă pe  $[-r, r]$ . În particular,  $S$  este o funcție continuă în  $x_0$ .

Suma  $S$  a seriei de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este uniform continuă pe orice interval compact conținut în  $(-R, R)$ . □

**Remarca 31.1.** Considerațiile acestea pot fi aplicate și în cazul seriilor de forma:  

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

## 32 Operații cu serii de puteri.

Considerăm seriile de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  având razele de convergență  $R_1$  și  $R_2$  și

presupunem că are loc  $0 < R_1 \leq R_2$ . Notăm cu  $f(x)$  suma seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  și cu  $g(x)$  suma

seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \text{și} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$$

**Regula sumei.** *Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$  are raza de convergență cel puțin  $R_1$  și are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad \forall x : |x| < R_1$$

**Regula înmulțirii cu un număr.** *Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n$  are raza de convergență cel puțin  $R_1$  și are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n = k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x : |x| < R_1$$

**Regula produsului.** *Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  are raza de convergență  $R_1$  și are loc:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$$

unde  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$ .

*Demonstrație.* Aceste reguli se obțin în baza regulilor generale relative la serii de funcții. □

**Remarca 32.1.** Aceste reguli pot fi aplicate și la serii de forma:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ .

### 33 Derivabilitatea funcțiilor.

Intuitiv vorbind, o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este derivabilă (diferențiabilă) în  $c \in A$  dacă în punctul  $P(c, f(c))$  se poate trasa tangenta la graficul funcției. Panta corzii  $PQ$  din figura 33.1:

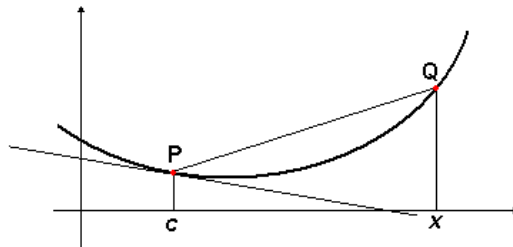


Figura 33.1:

este  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  și ceea ce se cere este ca aceasta să tindă la panta tangentei în  $P$  atunci când  $Q$  se apropie de  $P$ .

Această idee geometrică motivează următoarea definiție:

**Definiția 33.1.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este derivabilă (diferențiabilă) în punctul  $c \in A$  dacă există limita  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  și este finită.

Tradițional valoarea limitei se notează cu  $f'(c)$  sau cu  $\frac{df}{dx}(c)$  și se numește derivata lui  $f$  în  $c$ .

**Exemplu 33.1.** Funcția  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  este derivabilă (diferențiabilă) în orice punct  $c \in \mathbb{R}^1$ .

În adevăr pentru  $c$  fixat,  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  (pentru  $x \neq c$ ) în cazul de față este:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \frac{(x - c) \cdot (x + c)}{x - c} = x + c \xrightarrow{x \rightarrow c} 2c$$

De aici, rezultă că funcția  $f$  este derivabilă (diferențiabilă) în punctul  $c$  și  $f'(c) = 2c$ .

**Exemplu 33.2.** Funcția  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  este derivabilă (diferențiabilă) în orice  $c \neq 0$ .

Este ușor de verificat că funcția  $f$  este derivabilă (diferențiabilă) în orice  $c \neq 0$  și  $f'(c) = 1$  pentru  $c > 0$  și  $f'(c) = -1$  pentru  $c < 0$ .

Pentru  $c = 0$  avem:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x > 0 \\ -1, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

De aici

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \quad \text{și} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -1$$

Deoarece aceste limite laterale nu coincid,  $f$  nu este derivabilă (diferențiabilă) în  $c = 0$ .

**Definiția 33.2.** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  este derivabilă (diferențiabilă) în orice punct  $a \in A$  atunci funcția  $f' : A \subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se numește derivata funcției  $f$ .

**Remarca 33.1.** În general, punctele în care  $f$  nu este derivabilă (diferențiabilă), pot fi identificate adesea examinând limitele laterale ale raportului  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  dacă  $x \rightarrow c$ .

Limita la stânga  $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  se numește derivata la stânga a funcției  $f$  în  $c$  și se notează cu  $f'_-(c)$ .

Analog, limita la dreapta  $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  se numește derivata la dreapta a funcției  $f$  în  $c$  și se notează cu  $f'_+(c)$ .

Evident,  $f'(c)$  există dacă și numai dacă  $f'_-(c) = f'_+(c)$ .

**Teorema 33.1.** Dacă  $f$  este derivabilă (diferențiabilă) în punctul  $c$ , atunci  $f$  este continuă în  $c$ .

*Demonstrație.* Definim funcția:

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, & \text{dacă } x \neq c \\ f'(c), & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

Deoarece  $f$  este derivabilă (diferențiabilă) în  $c$ ,  $F_c(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} F_c(c)$  și deci  $F_c$  este funcție continuă în  $c$ . Întrucât

$$f(x) = f(c) + F_c(x) \cdot (x - c), \quad \forall x \in A$$

rezultă că funcția  $f$  este continuă în  $c$ . □

Menționăm că există funcții continue care nu sunt diferentiabile.

Tabelul următor conține câteva funcții elementare și derivatele lor:

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}, x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

## 34 Reguli de derivabilitate.

**Regula sumei:** Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile în  $c$ , atunci suma funcțiilor  $f + g$  este derivabilă în  $c$  și are loc egalitatea:

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

**Regula produsului:** Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile în  $c$ , atunci produsul funcțiilor  $f \cdot g$  este funcție derivabilă în  $c$  și are loc egalitatea:

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

**Regula reciprocă:** Dacă  $f$  este o funcție care nu se anulează și este derivabilă în  $c$ , atunci  $\frac{1}{f}$  este derivabilă în  $c$  și are loc egalitatea:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -\frac{f'(c)}{f^2(c)}.$$

*Demonstrație. (pentru regula produsului)*

Pentru  $x \neq c$  avem:

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(c)}{x - c} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(c) + f(x) \cdot g(c) - f(c) \cdot g(c)}{x - c} = \\ &= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Dacă  $x \rightarrow c$  atunci,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rightarrow f'(c) \quad \text{și} \quad \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \rightarrow g'(c).$$

Deci

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(c)}{x - c} \xrightarrow{x \rightarrow c} f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

□

Regula produsului și a reciprocei pot fi combinate pentru a obține regula câtului.

**Regula câtului:** Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile în  $c$  și  $g(x) \neq 0$ , atunci  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $c$  și are loc egalitatea:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{[g(c)]^2}.$$

**Exemplu 34.1.** Folosind regulile de mai sus să se calculeze pentru fiecare din următoarele funcții derivata în punctele indicate:

- i)  $f(x) = x^2 + \sin x \quad x \in \mathbb{R}^1$ ;
- ii)  $f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad x \in \mathbb{R}^1$ ;
- iii)  $f(x) = \operatorname{tg} x \quad x \in \mathbb{R}^1$  și  $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $n$  număr întreg;
- iv)  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ ,  $x \neq 0$ ;
- v)  $f(x) = \sec x$ ,  $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ;
- vi)  $f(x) = \operatorname{cosec} x$ ,  $x \neq n\pi$ ;
- vii)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ;
- viii)  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $x \neq n\pi$ .



**Regula "cleștelui":** Fie  $f, g$  și  $h$  trei funcții care verifică relațiile:  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , pentru orice  $x$  în vecinătatea lui  $c$  și  $g(c) = f(c) = h(c)$ . Dacă funcțiile  $g$  și  $h$  sunt derivabile în  $c$ , atunci și  $f$  este derivabilă în  $c$  și este verificată relația:

$$f'(c) = g'(c) = h'(c).$$

*Demonstrație.* Din inegalitățile date rezultă că pentru orice  $x > c$  avem:

$$\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

și pentru orice  $x < c$  avem:

$$\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \geq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq \frac{h(x) - h(c)}{x - c}$$

Rezultatul căutat se obține din regula cleștelui pentru limite de funcții dacă  $g'(c) = h'(c)$ . Pentru a demonstra această egalitate din urmă, fie:

$$G_c(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} & \text{dacă } x \neq c \\ g'(c) & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

și

$$H_c(x) = \begin{cases} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} & \text{dacă } x \neq c \\ h'(c) & \text{dacă } x = c. \end{cases}$$

Fie  $k(x) = G_c(x) - H_c(x)$ . Deoarece funcțiile  $g$  și  $h$  sunt derivabile în  $c$ , funcțiile  $G_c$  și  $H_c$  sunt continue în  $c$ . Astfel funcția  $k$  este continuă în  $c$ . Din primele inegalități rezultă că dacă  $x > c$ , atunci  $k(x) \leq 0$ , iar dacă  $x < c$ , atunci  $k(x) \geq 0$ . Așadar,  $k(c) = 0$  și atunci  $G_c(c) = H_c(c)$ . Cu alte cuvinte,  $g'(c) = h'(c)$ .  $\square$

**Exemplu 34.2.** Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

verifică inegalitatea:  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , dacă  $h(x) = -x^2$  și  $g(x) = x^2$ . Deoarece  $g$  și  $h$  sunt derivabile în  $0$ , iar derivata celor două funcții în  $0$  este  $0$ , din criteriul cleștelui se obține că  $f$  este derivabilă în  $x = 0$ .

Folosind alte reguli se obține că funcția  $f$  este derivabilă pentru orice  $x \neq 0$  și în plus,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Se observă că  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  nu există, deși  $f'(0)$  există, și  $f'$  nu este continuă în  $0$ .

**Regula de derivare a funcției compuse:** Dacă funcția  $f$  este derivabilă în  $c$  și funcția  $g$  este derivabilă în  $b = f(c)$ , atunci funcția  $g \circ f$  este derivabilă în  $c$  și are loc egalitatea:

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

*Demonstrație.* Fie

$$F_c(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{dacă } x \neq c \\ f'(c) & \text{dacă } x = c \end{cases}$$

și

$$G_b(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{dacă } y \neq b \\ g'(b) & \text{dacă } y = b. \end{cases}$$

Funcția  $F_c$  este continuă în  $x = c$  și pentru orice  $x$  avem:

$$f(x) = f(c) + (x - c) \cdot F_c(x).$$

Funcția  $G_b$  este continuă în  $y = b$  și pentru orice  $y$  avem:

$$g(y) = g(b) + (y - b) \cdot G_b(y).$$

Așadar

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(y) = g(b) + (y - b) \cdot G_b(y) = \\ &= g(f(c)) + (f(x) - f(c)) \cdot G_b(f(x)) = \\ &= g(f(c)) + (x - c) \cdot F_c(x) \cdot G_b(f(x)). \end{aligned}$$

și astfel

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = F_c(x) \cdot G_b(f(x)).$$

Funcția din membrul drept al egalității de mai sus este continuă în  $x = c$ . Deci

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = F_c(c) \cdot G_b(f(c)) = f'(c) \cdot g'(f(c)),$$

□

Regula de derivare a funcțiilor compuse, în literatura anglo saxonă, este adesea numită "the chain rule". Formula de derivare a funcțiilor compuse este mai sugestivă în notația lui Leibniz. Dacă  $\Delta x = h$  și  $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ , atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Notația lui Leibniz pentru această limită este:  $\frac{dy}{dx}$ . Dacă se notează  $y = g(u)$ , unde  $u = f(x)$ , atunci  $f'(x) = \frac{du}{dx}$  și  $g'(f(x)) = \frac{dy}{du}$  și  $(g \circ f)'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Regula de derivare poate fi scrisă astfel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

**Exemplu 34.3.** Să se arate că  $h(x) = \sin x^2$  este derivabilă.

*Soluție:* Dacă considerăm funcțiile  $g(x) = \sin x$  și  $f(x) = x^2$ , atunci  $h = g \circ f$ . Deoarece  $f$  și  $g$  sunt derivabile în orice punct, din regula de derivare a funcției compuse rezultă că funcția  $h$  este derivabilă. În plus,

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2x \cos x.$$

**Regula de derivare a inversei:** Presupunem că  $f : A \rightarrow B$  este o funcție bijectivă și continuă, unde  $A$  și  $B$  sunt intervale. Dacă  $f$  este derivabilă în  $a \in A$  și  $f'(a) \neq 0$ , atunci  $f^{-1}$  este derivabilă în  $b = f(a)$  și are loc egalitatea:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

*Demonstrație.* Pentru  $a \in A$ . Considerăm:

$$F_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{dacă } x \neq a \\ f'(a) & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

$F_a$  este continuă în  $x = a$  și pentru orice  $x \in A$

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot F_a(x).$$

Dacă  $b = f(a)$  și  $y = f(x)$  pentru  $x \in A$  atunci:

$$F_a(x) = \frac{y - b}{x - a} \quad \text{pentru } x \neq a.$$

Considerăm

$$G_b(y) = \frac{x - a}{y - b} \quad \text{pentru } y \neq b$$

și remarcăm că aceasta verifică:

$$G_b(y) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{F_a(x)} = \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(y)}, \quad y \neq b.$$

Deoarece funcția  $f$  este bijectivă și continuă,  $f^{-1}$  este continuă. Pe de altă parte  $F_a$  este continuă în  $x = a$  și astfel funcția  $F_a \circ f^{-1}$  este continuă în  $y = b$ . În plus au loc egalitățile:

$$(F_a \circ f^{-1})(b) = F_a(f^{-1}(b)) = F_a(a) = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0$$

Astfel rezultă că:

$$\frac{x - a}{y - b} = G_b(y) = \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(y)} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{(F_a \circ f^{-1})(b)}.$$

Cu alte cuvinte:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left( \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \right) (b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

**Consecința 34.1.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $A$  și  $f'(a) \neq 0$  pentru orice  $a \in A$  atunci funcția inversă  $f^{-1}$  este derivabilă pe  $f(A)$  și are loc egalitatea  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Exemplu 34.4.** Funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definită prin relația  $f(x) = x^2$  este o funcție bijectivă. Inversa funcției  $f$  este  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ . Funcția  $f$  este derivabilă pentru  $x > 0$  și  $f'(x) = 2x \neq 0$ . Folosind regula inversei, funcția  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  este derivabilă și are loc relația:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Exemplu 34.5.** Funcția  $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$  dată prin relația  $g(x) = \sin x$  este o funcție bijectivă, iar inversa ei este dată de relația  $g^{-1}(x) = \arcsin x$ . Funcția  $g$  este derivabilă și are loc relația:

$$(g' \circ g^{-1})(x) = \cos(\arcsin x) \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

Folosind regula inversei, funcția  $g^{-1}$  este derivabilă și are loc egalitatea:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

## 35 Extreme locale.

În această secțiune sunt prezentate rezultate referitoare la determinarea maximului și minimului local pentru funcții derivabile.

**Definiția 35.1.** O funcție  $f$  are un maxim local în  $c$  dacă există un interval deschis  $I$  care conține pe  $c$  astfel încât  $f(x) \leq f(c)$  pentru orice  $x \in I$ . Dacă  $f(x) \geq f(c)$  pentru fiecare  $x \in I$ , atunci  $f$  are un minim local în  $c$ .

**Teorema 35.1.** [Teorema extremelor locale, teorema lui Fermat] Dacă funcția  $f$  este derivabilă în  $c$  și are în  $c$  un minim sau maxim local, atunci  $f'(c) = 0$ .

*Demonstrație.* Presupunem că  $x = c$  este un punct de minim local pentru  $f$ . Există un interval deschis  $I$  astfel încât  $f(x) - f(c) \geq 0$  pentru orice  $x \in I$ . Dacă  $x > c$ , atunci  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  și dacă  $x < c$ , atunci  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ . Astfel  $f'_+(c) \geq 0$  și  $f'_-(c) \leq 0$ . Dar  $f'(c)$  există și avem:  $f'_+(c) = f'_-(c)$ . Deci  $f'(c) = 0$ .  $\square$

Deși condiția  $f'(c) = 0$  trebuie să fie îndeplinită într-un punct de maxim sau minim local, această condiție nu este suficientă pentru a avea un extrem local în  $c$ . De exemplu, considerăm următoarea funcție:  $f(x) = x^3$ . În punctul  $x = 0$ , avem  $f'(0) = 0$ , dar 0 nu este nici maxim local, nici minim local.

**Exemplu 35.1.** Să se delimiteze o mulțime în care se află punctele de minim și maxim local pentru următoarea funcție:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$

## 36 Proprietăți fundamentale ale funcțiilor derivabile.

În această secțiune sunt prezentate câteva proprietăți fundamentale ale funcțiilor derivabile.

**Teorema 36.1. [Teorema lui Rolle.]** *Dacă o funcție  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , derivabilă pe  $(a, b)$  și dacă  $f(a) = f(b)$ , atunci există cel puțin un  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstrație.* Deoarece funcția  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , ea este mărginită pe  $[a, b]$  și atinge o valoare maximă, notată  $f(c_1)$ , și o valoare minimă, notată  $f(c_2)$ ,  $c_1$  și  $c_2$  situate în intervalul  $[a, b]$ .

Dacă  $f(c_1) = f(c_2)$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ . De aici, rezultă  $f'(x) = 0$ , pentru orice  $x \in [a, b]$  și teorema este demonstrată.

Dacă  $f(c_1) \neq f(c_2)$ , atunci cel puțin una din valorile  $c_1$  și  $c_2$  este diferită de  $a$  și  $b$ . Prin urmare, funcția  $f$  are un maxim sau un minim local în intervalul  $(a, b)$  (sau pe amândouă).

Conform teoremei de extrem local  $f'$  este zero cel puțin într-un punct din intervalul  $(a, b)$ .  $\square$

**Teorema 36.2. [Teorema valorii medii, Lagrange.]** *Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(a, b)$  și este continuă pe intervalul  $[a, b]$ , atunci există cel puțin o valoare  $c \in (a, b)$ , astfel încât:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Demonstrație.* Considerăm funcția  $g(x) = f(x) - \lambda x$ , unde  $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Funcția  $g$  este derivabilă pe  $(a, b)$  și continuă pe intervalul  $[a, b]$ .  $\lambda$  a fost ales astfel încât  $g(a) = g(b)$ . Aplicând teorema lui Rolle, există cel puțin o valoare  $c$ ,  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $g'(c) = 0$ .

Prin urmare,  $f'(c) - \lambda = 0$  și rezultă că  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .  $\square$

**Teorema 36.3. [Teorema de monotonie.]** *Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(a, b)$  și este continuă pe intervalul  $[a, b]$ , atunci:*

- (1) *Dacă  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$  atunci  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[a, b]$ ;*
- (2) *Dacă  $f'(x) < 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$  atunci  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $[a, b]$ ;*
- (3) *Dacă  $f'(x) = 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$  atunci  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ .*

*Demonstrație.* Considerăm  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , cu  $x_1 < x_2$ . Deoarece funcția  $f$  îndeplinește ipotezele din teorema de medie pe intervalul  $[x_1, x_2]$  există  $c$ ,  $x_1 < c < x_2$  astfel încât să avem:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Deoarece  $f'(c) > 0$ , rezultă că  $f(x_2) > f(x_1)$ . Cu alte cuvinte,  $f$  este funcție strict crescătoare pe intervalul  $[a, b]$ .

Demonstrația pentru 2 și 3 este similară. □

**Observația 36.1.** Teorema anterioară este folosită pentru determinarea și clasificarea punctelor de extrem și pentru stabilirea unor inegalități dintre funcții.

**Exemplu 36.1.** Pentru funcția  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$  determinați punctele de extrem și precizați natura lor: .

*Soluție:* Funcția  $f$  este derivabilă și derivata ei este:

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (2 - x) \cdot x.$$

Punctele de extrem se află printre soluțiile ecuației  $f'(x) = 0$ . De aici rezultă că  $x = 0$  și  $x = 2$  sunt eventual puncte de extrem. Deoarece  $e^{-x} > 0$ , avem următoarele situații: dacă  $x < 0$  atunci  $f'(x) < 0$ , dacă  $x \in (0, 2)$  atunci  $f'(x) > 0$  și dacă  $x > 2$  atunci  $f'(x) < 0$ . Astfel funcția  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0)$ , este crescătoare pe intervalul  $(0, 2)$  și este descrescătoare din nou pe intervalul  $(2, +\infty)$ . Rezultă că  $x = 0$  este un punct de minim local pentru funcția  $f$  și  $x = 2$  este un punct de maxim local pentru funcția  $f$ .

**Exemplu 36.2.** Arătați că  $e^x \geq 1 + x$ , pentru orice  $x$ .

*Soluție:* Considerăm funcția  $f(x) = e^x - 1 - x$ . Funcția  $f$  este derivabilă și  $f'(x) = e^x - 1$ . Deoarece  $f'(x) > 0$  pentru  $x > 0$  rezultă că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x > 0$ . Deoarece  $f'(x) < 0$  pentru  $x < 0$  rezultă că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x < 0$ . În final se obține că  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^1$ , adică  $e^x \geq 1 + x$ .

Rezultatul următor este greu de interpretat geometric, dar este necesar pentru a demonstra regula lui l'Hôpital. Aceasta este o regulă foarte potrivită pentru determinarea limitelor de forma:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , unde  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ .

**Teorema 36.4. [Teorema de medie a lui Cauchy.]** Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile pe intervalul  $(a, b)$  sunt continue pe intervalul  $[a, b]$  și  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ , atunci există cel puțin o valoare  $c \in (a, b)$ , astfel încât:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

*Demonstrație.* Observăm că  $g(a) \neq g(b)$ . În caz contrar aplicând teorema lui Rolle pentru funcția  $g$  în intervalul  $[a, b]$  se obține că funcția  $g'$  se anulează într-un punct din intervalul  $(a, b)$  ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcția  $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ , unde  $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

Funcția  $h$  îndeplinește ipotezele din teorema lui Rolle. Așadar există  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $h'(c) = 0$ , ceea ce implică:  $f'(c) = \lambda \cdot g'(c)$ . □

**Teorema 36.5.** [Regula lui l'Hôpital, versiunea A] Fie  $f$  și  $g$  două funcții care îndeplinesc ipotezele teoremei de medie a lui Cauchy și fie  $x_0 \in (a, b)$ . Dacă  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiția că limita din dreapta există.

*Demonstrație.* Aplicând teorema de media a lui Cauchy pentru funcțiile  $f$  și  $g$  pe intervalul  $[x_0, x]$  unde  $x_0 < x \leq b$ , rezultă că există  $c$ ,  $x_0 < c < x$  astfel încât:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiția că limita din dreapta există.

Un rezultat similar se obține pentru intervalul  $[x, x_0]$ , unde  $a \leq x < x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cu condiția ca limita din dreapta există.

Regula rezultă imediat. □

**Exemplu 36.3.** Să se verifice că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Soluție:* Funcțiile  $f(x) = \sin x$  și  $g(x) = x$  îndeplinesc ipotezele regulei lui l'Hôpital. În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

**Exemplu 36.4.** Să se verifice că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

*Soluție:* Folosind regula compunerii pentru limite de funcții se obține:

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

iar cu regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Regula lui l'Hôpital poate fi folosită pentru evaluarea multor limite nedeterminate, odată ce acestea sunt exprimate ca și limite de cături de funcții, cu condiția ca  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  să se poată evalua.

Adesea, limita de mai sus este tot o nedeterminare (adică  $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ ) și s-ar putea aplica din nou regula lui l'Hôpital, dar trebuie ca funcțiile  $f'$  și  $g'$  să fie și ele derivabile.

## 37 Derivabilitatea (diferențiabilitatea) de ordin superior.

**Definiția 37.1.** *Dacă  $f$  este o funcție derivabilă și derivata sa  $f'$  este la rândul ei o funcție derivabilă, atunci se spune că funcția  $f$  este de două ori derivabilă, iar derivata lui  $f'$  se numește derivata de ordinul al doilea a lui  $f$  și se notează:  $f''$  sau  $f^{(2)}$ .*

**Definiția 37.2.** *În general,  $f$  este derivabilă de  $n$  ori dacă  $f$  este derivabilă de  $(n - 1)$  ori și derivata de ordinul  $n - 1$  este o funcție derivabilă. Derivata derivatei de ordinul  $n - 1$  se numește derivata de ordinul  $n$  a lui  $f$  și se notează cu  $f^{(n)}$ . Dacă, în plus  $f^{(n)}$  este o funcție continuă, atunci se spune că funcția  $f$  are derivata de ordinul  $n$  continuă (este de clasă  $C^n$ )*

**Exemplu 37.1.**

1. Dacă  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , atunci

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} \cdot x^{m-n} & \text{pentru } n \leq m \\ 0 & \text{pentru } n > m. \end{cases}$$

2. Dacă  $f(x) = \sin x$ , atunci  $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  pentru  $n \geq 1$ .

3. Dacă  $f(x) = \ln x$ , atunci  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$  pentru  $n \geq 1$ .

Derivatele de ordin superior pentru un produs de funcții  $f$  și  $g$  sunt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \tag{37.1}$$

$$(f \cdot g)^{(2)} = f^{(2)} \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g^{(2)} \tag{37.2}$$

$$(f \cdot g)^{(3)} = f^{(3)} \cdot g + 3 \cdot f^{(2)} \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g^{(2)} + f \cdot g^{(3)}. \tag{37.3}$$

Formula ce urmează este des folosită și poate fi demonstrată prin inducție după  $n$ .

**Teorema 37.1. [Formula lui Leibnitz.]** *Dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții derivabile de  $n$  ori, atunci  $h = f \cdot g$  este o funcție derivabilă de  $n$ -ori și este verificată relația:*

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$



**Teorema 37.2.** [Regula lui l'Hôpital, versiunea B.] Fie  $f$  și  $g$  două funcții care au derivatele de ordinul  $n$  continue pe intervalul  $(a, b)$ , iar  $x_0$  cu proprietatea  $a < x_0 < b$ . Dacă

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pentru } 0 \leq k \leq n - 1$$

și

$$g^{(n)}(x_0) \neq 0$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

**Exemplu 37.2.** Să se verifice că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) = 0.$$

## 38 Polinoame Taylor.

Considerăm o serie de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  cu raza de convergență  $R > 0$ . Fie  $f(x)$  suma seriei pentru  $|x| < R$ .

Se poate demonstra că  $f$  este o funcție derivabilă și derivata verifică egalitatea:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Derivata de ordin  $k$  verifică:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k} \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Dacă  $x = 0$ , atunci

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{pentru } k = 1, 2, \dots$$

Așadar coeficientul  $a_n$  al lui  $x^n$  în seria de puteri este  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  unde  $f(x)$  este suma seriei de puteri. Deci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad \text{pentru } |x| < R.$$

Pentru valori mici ale lui  $x$ , suma  $f(x)$  poate fi aproximată cu polinomul de gradul  $N$ :

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(0)}{N!}x^N$$

în care  $N$  este un număr natural oarecare.

În această secțiune vom analiza cât de bine aproximează acest polinom funcția  $f(x)$ , în cazul în care  $f(x)$  nu este neapărat suma unei serii de puteri.

**Definiția 38.1.** Fie  $f$  o funcție derivabilă de  $n$ -ori în  $0$ . Polinomul Taylor de gradul  $n$  pentru  $f$  în  $0$  este definit de egalitatea:

$$T_n f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

**Exemplu 38.1.** Fie  $f(x) = e^x$ . Pentru  $k = 1, 2, \dots$ , avem  $f^{(k)}(0) = 1$ . Astfel

$$\begin{aligned} T_0 f(x) &= 1 \\ T_1 f(x) &= 1 + x \\ T_2 f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Primul rezultat se obține din estimarea diferenței între  $f(b)$ , valoarea funcției date în  $x = b$  și  $T_n f(b)$ , valoarea polinomului Taylor de gradul  $n$  în  $x = b$ .

**Teorema 38.1. [Prima teoremă a restului]** Dacă  $f$  este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^{(n+1)}$  pe un interval deschis ce conține punctele  $0$  și  $b$ , atunci diferența dintre  $f$  și  $T_n f$  în punctul  $x = b$  este dată de:

$$f(b) - T_n f(b) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$$

în care  $c \in (0, b)$ .

*Demonstrație.* Pentru simplificare, vom presupune că  $b > 0$ . Dacă

$$h_n(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \quad x \in [0, b].$$

atunci  $h_n(b) = 0$  și  $h_n(0) = f(b) - T_n f(b)$ . Dacă

$$g(x) = h_n(x) - \left(\frac{b-x}{b}\right)^{n+1} \cdot h_n(0) \quad x \in [0, b].$$

atunci  $g$  este continuă pe intervalul  $[0, b]$ , este derivabilă pe intervalul  $(0, b)$  și este verificată relația  $g(0) = g(b) = 0$ . Conform teoremei lui Rolle există  $c$  între  $0$  și  $b$  astfel încât  $g'(c) = 0$ . După un calcul simplu se obține

$$h'_n(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n$$

Astfel

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{(n+1)(b-x)^n}{b^{n+1}} \cdot h_n(0)$$

și

$$0 = g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + \frac{(n+1)(b-c)^n}{b^{n+1}} \cdot h_n(0)$$

obținându-se

$$h_n(0) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

□

Diferența  $f(b) - T_n f(b)$  se notează cu  $R_n f(b)$  și se numește restul aproximării în  $x = b$ . Astfel:

$$f(b) = T_n f(b) + R_n f(b)$$

și eroarea de aproximare a lui  $f(b)$  prin polinomul  $T_n f(b)$  este dată de restul aproximării  $R_n f(b)$ . Deoarece  $f^{(n+1)}$  este continuă pe un interval închis ce conține punctele 0 și  $b$ , ea este mărginită pe acest interval. Există deci un număr  $M$  astfel încât  $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$  și

$$|R_n f(b)| \leq \left| \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot M.$$

Astfel, pentru un  $n$  fixat, restul aproximării poate fi mic pentru valori ale lui  $b$  apropiate de zero. Cu alte cuvinte, polinoamele Taylor reprezintă o bună aproximare a funcțiilor în vecinătatea lui  $x = 0$ . Următorul exemplu ilustrează acest fapt:

**Exemplu 38.2.** Dacă  $f(x) = \sin x$ , atunci

$$T_7 f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \quad R_7 f(x) = \frac{x^8}{8!} (-\sin c)$$

pentru  $c$  între 0 și  $x$ . Conform primei teoreme a restului se obține:

$$R_7 f(0.1) \leq \frac{0.1^8}{8!} = 2.48 \cdot 10^{-13}.$$

Vom arăta în continuare cum polinoamele Taylor pot fi utilizate pentru a dezvolta în serie de puteri funcția  $f$  care este indefinit derivabilă pe un interval deschis ce conține pe 0 și pe  $x$ . Pentru  $x$  avem:

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x).$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad \text{pentru } |x| < R$$

unde  $R$  este raza de convergență a seriei de puteri.

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x) = 0$  pentru  $|x| < R' < R$ , pentru o anumită valoare  $R'$ , atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad \text{pentru } |x| < R'.$$

Această serie de puteri este numită serie McLaurin pentru  $f(x)$ .

**Exemplu 38.3.** Dezvoltarea în serie McLaurin a funcției  $f(x) = e^x$ .

**Soluție:** În primul rând

$$T_n f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

și  $R_n f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$  unde  $c \in (0, x)$ . Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , conform criteriului raportului este absolut convergentă pentru orice număr real  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Convergența la zero a termenului general  $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  implică

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \right| \rightarrow 0 \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty$$

oricare ar fi  $x$  fixat. Deci, pentru  $x$  fixat,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x) = 0$ , și rezultă

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

În mod asemănător, seriile de puteri pot fi generate pentru funcțiile standard. În fiecare caz, suma seriei de puteri este  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x)$  și egalitatea dintre funcție și suma seriei este valabilă pentru acele valori  $x$  pentru care:

- a) seria de puteri determinată converge și
- b) restul  $R_n f(x) \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ .

În alcătuirea următoarei liste, dificultatea constă în stabilirea condiției de la punctul b):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{38.3}$$

$$(1+x)^t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t \cdot (t-1) \cdot \dots \cdot (t-n+1)}{n!} x^n \quad t \notin \mathbb{N}, \quad x \in (-1, 1) \tag{38.4}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} \quad -1 < x \leq 1. \tag{38.5}$$

Forma restului determinată în prima teoremă a restului se numește formă Lagrange.

Primii câțiva termeni ai seriei McLaurin pentru o funcție  $f$  dată dau o bună aproximare a lui  $f(x)$  în vecinătatea lui 0.

Dar care este aproximarea lui  $f(x)$  pentru  $x$  în vecinătatea unui număr real  $a$ ? În acest caz polinoamele trebuie considerate ca puteri ale lui  $(x - a)$  și nu puteri ale lui  $x$ .

**Definiția 38.2.** Fie  $f$  o funcție de  $n$ -ori derivabilă pe un interval deschis ce conține pe  $a$ ,  $a$  număr real fixat. Polinomul Taylor de gradul  $n$  pentru  $f$  în  $a$  este definit astfel:

$$T_{n,a}f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Prima teoremă a restului poate fi acum generalizată.

**Teorema 38.2. Teorema lui Taylor** Dacă  $f$  este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^{(n+1)}$  pe un interval deschis ce conține punctele  $a$  și  $b$ , atunci diferența dintre  $f$  și  $T_{n,a}f$  în  $b$  este dată de relația:

$$f(b) - T_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

pentru  $c \in (a, b)$ .

*Demonstrație.* Pentru fiecare  $t$  între  $a$  și  $b$  avem:

$$f(b) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n + F(t)$$

unde

$$F(t) = R_{n,t}f(b) = f(b) - T_{n,t}f(b).$$

Derivând în raport cu  $t$  se obține:

$$0 = f'(t) + \left(-f'(t) + \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(b-t)\right) + \left(-\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(b-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(b-t)^2\right) + \dots$$

$$\dots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\right) + F'(t).$$

Reducând termenii asemenea se obține egalitatea:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n.$$

Conform teoremei de medie a lui Cauchy pentru funcțiile  $F$  și  $G$  pe intervalul mărginit de punctele  $a$  și  $b$  (unde  $G(t) = (b-t)^{n+1}$ ), există un număr  $c$  între  $a$  și  $b$  astfel încât:

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{-(n+1)(b-c)^n}.$$

Deci

$$\frac{-(f(b) - T_{n,a}f(b))}{-(b-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n}{(n+1)(b-c)^n}$$

sau

$$f(b) - T_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

□

Eroarea de aproximare a lui  $f(b)$  prin polinomul  $T_{n,a}f(b)$  este restul aproximării:

$$R_{n,a}f(b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

în care  $c \in (a, b)$ . Aproximarea este bună când  $b$  este aproape de  $a$ .

Seriile de puteri pot fi generate ca serii de puteri ale lui  $(x-a)$ , numite serii Taylor, pentru funcții în  $a$ . Egalitatea dintre funcție și suma seriei este valabilă pentru acele valori  $x$  pentru care:

- a) seria de puteri determinată este convergentă și
- b)  $R_{n,a}f(x) \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$ .

### 39 Teorema de clasificare a punctelor de extrem.

Formula lui Taylor, întâlnită des în analiza numerică și prezentată în continuare, se folosește la investigarea punctelor de extrem.

În formula lui Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n,a}f(x) + R_{n,a}f(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

$c$  este între  $a$  și  $x$ ,  $c \in (a, x)$  și dacă  $x-a = h$ , atunci  $c$  este între  $a$  și  $a+h$  și se scrie astfel  $c = a + \theta \cdot h$  cu  $\theta \in (0, 1)$ . Rezultă:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta \cdot h)$$

cu  $\theta \in (0, 1)$ .

Această expresie subliniază că valoarea lui  $f$  în  $a+h$  este determinată de valoarea lui  $f$  și a derivatelor în  $a$ , iar  $\theta$  reprezintă gradul de nedeterminare.

Atunci când se investighează extremele funcției  $f$  care are punctul staționar  $x = a$  (adică  $f'(a) = 0$ ), este necesară determinarea semnului expresiei  $f(a+h) - f(a)$  pentru valori mici ale lui  $h$ . Aceasta se poate face folosind expresia precedentă și se obține următorul rezultat.

**Teorema 39.1. Teorema de clasificare a punctelor de extrem** Dacă  $f$  este o funcție de clasă  $\mathcal{C}^{(n+1)}$  într-o vecinătate a lui " $a$ " și  $f^{(k)}(a) = 0$  pentru  $k = 1, 2, \dots, n$  (în particular  $f'(a) = 0$ , deci  $x = a$  este un punct staționar pentru  $f$ ) și  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$  atunci:

- (1) dacă  $n+1$  este par și  $f^{(n+1)}(a) > 0$ , atunci  $f$  admite un minim local în  $x = a$ .
- (2) dacă  $n+1$  este par și  $f^{(n+1)}(a) < 0$ , atunci  $f$  admite un maxim local în  $x = a$ .

(3) dacă  $n + 1$  este impar, atunci  $f$  nu admite nici minim local, nici maxim local în  $x = a$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $f^{(k)}(a) = 0$  pentru  $k = 1, 2, \dots, n$ , obținem că

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

unde  $0 < \theta < 1$ . Dar  $f^{(n+1)}(a) \neq 0$  și  $f^{(n+1)}$  este continuă, deci există  $\delta > 0$  astfel încât  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$  pentru  $|x - a| < \delta$ . Așadar pentru orice  $h$  care satisface  $|h| < \delta$ ,  $f^{(n+1)}(a + \theta h)$  are același semn ca și  $f^{(n+1)}(a)$ , deci  $f(a + h) - f(a)$  are același semn ca și  $h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a)$  pentru orice  $h$  cu  $|h| < \delta$ .

(1) Dacă  $n + 1$  este par și  $f^{(n+1)}(a) > 0$ , atunci  $f(a + h) - f(a) \geq 0$  pe un interval deschis  $(a - \delta, a + \delta)$ . Deci  $x = a$  este un minim local pentru  $f$ .

(2) Dacă  $n + 1$  este par și  $f^{(n+1)}(a) < 0$ , atunci  $f(a + h) - f(a) \leq 0$  pe un interval deschis  $(a - \delta, a + \delta)$ . Deci  $x = a$  este un maxim local pentru  $f$ .

(3) Dacă  $n + 1$  este impar, semnul lui  $f(a + h) - f(a)$  se schimbă după semnul lui  $h$ . Se spune că  $x = a$  este un punct orizontal de inflexiune.  $\square$

**Exemplu 39.1.** Să se determine natura punctelor staționare:

$$f(x) = x^6 - 4x^4.$$

## 40 Integrala Riemann-Darboux.

**Definiția 40.1.** O partiție  $P$  a segmentului  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  este o mulțime finită de puncte  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  cu proprietatea:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Fie o funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită pe  $[a, b]$  și  $m, M$  astfel încât

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Funcția  $f$  este mărginită pe fiecare subinterval  $[x_{i-1}, x_i]$  și notăm:

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

**Definiția 40.2.** Suma superioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este, prin definiție, numărul:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

**Definiția 40.3.** Suma inferioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este, prin definiție, numărul:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

**Propoziția 40.1.** Oricare ar fi partiția  $P$  a segmentului  $[a, b]$ , au loc următoarele inegalități:

$$m(b - a) \leq L_f(P) \leq U_f(P) \leq M(b - a)$$

*Demonstrație.*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) = M \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = M(b - a)$$

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) = m \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = m(b - a)$$

Inegalitatea  $L_f(P) \leq U_f(P)$  este evidentă. □

**Remarca 40.1.** Propoziția 40.1 arată că mulțimile:

$$L_f = \{L_f(P) | P - \text{partiție a segmentului } [a, b]\}$$

$$U_f = \{U_f(P) | P - \text{partiție a segmentului } [a, b]\}$$

sunt mărginite.

Fie  $\mathcal{L}_f = \sup L_f$  și  $\mathcal{U}_f = \inf U_f$ .

**Propoziția 40.2.** Are loc inegalitatea:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

*Demonstrație.* Fie  $P$  o partiție a segmentului  $[a, b]$  și  $P'$  partiția  $P' = P \cup \{y\}$  unde  $x_{i-1} < y < x_i$  pentru un anumit  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Cu alte cuvinte,  $P'$  este obținută prin adăugarea unui punct  $y$  la punctele partiției  $P$ .

Vom arăta acum că au loc următoarele inegalități:

$$L_f(P) \leq L_f(P') \quad \text{și} \quad U_f(P') \leq U_f(P)$$

Considerăm numerele  $M_i' = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, y]\}$  și  $M_i'' = \sup\{f(x) | x \in [y, x_i]\}$  și remarcăm inegalitățile imediate  $M_i' \leq M_i$  și  $M_i'' \leq M_i$ .

Ținând seama de acestea, deducem:

$$\begin{aligned} U_f(P') &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_i'(y - x_{i-1}) + M_i''(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_i(y - x_{i-1}) + M_i(x_i - y) + \sum_{j=i+1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = U_f(P) \end{aligned}$$

Într-un mod asemănător se arată că are loc și inegalitatea  $L_f(P) \leq L_f(P')$ .

Se poate acum afirma că, dacă  $P'' = P \cup \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  unde  $y_i$  sunt numere distincte în  $[a, b]$ , atunci au loc inegalitățile:

$$L_f(P) \leq L_f(P'') \quad \text{și} \quad U_f(P'') \leq U_f(P)$$



Considerăm acum două partiții  $P_1$  și  $P_2$  ale segmentului  $[a, b]$  și notăm cu  $P_3$  partiția  $P_3 = P_1 \cup P_2$ . Pe baza celor arătate avem:  $L_f(P_1) \leq L_f(P_3)$  și  $U_f(P_3) \leq U_f(P_2)$  și ținând seama de inegalitatea  $L_f(P_3) \leq U_f(P_3)$  deducem inegalitatea:

$$L_f(P_1) \leq U_f(P_2)$$

Cu alte cuvinte, orice sumă inferioară este mai mică decât orice sumă superioară. De aici rezultă  $\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$ .  $\square$

**Definiția 40.4.** O funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită pe  $[a, b]$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$  dacă  $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$ . Această valoare comună se notează cu

$$\int_a^b f(x) dx = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

și se numește integrala Riemann-Darboux a funcției  $f$  pe segmentul  $[a, b]$ .

**Exemplu 40.1.** Funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[0, 1]$  și  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ .

Într-adevăr, pentru  $n \in \mathbb{N}$ , fie  $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ . Avem:

$$U_f(P_n) = \frac{n+1}{2n} \quad \text{și} \quad L_f(P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

și astfel

$$\frac{n-1}{2n} \leq \mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f \leq \frac{n+1}{2n}$$

Pentru  $n \rightarrow +\infty$  rezultă  $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}$ .

**Exemplu 40.2.** Funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1$  dacă  $x$  este rațional și  $f(x) = 0$  dacă  $x$  este irațional, nu este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[0, 1]$ .

Într-adevăr oricare ar fi partiția  $P$  avem  $L_f(P) = 0$  și  $U_f(P) = 1$ . Prin urmare,  $\mathcal{L}_f = 0$  și  $\mathcal{U}_f = 1$ , și astfel  $\mathcal{L}_f \neq \mathcal{U}_f$ .

**Comentariu:** Această definiție a integralei  $\int_a^b f(x) dx$  este doar una din multiplele definiții existente (de exemplu, un alt tip de integrală este integrala Lebesgue). În cazul funcțiilor continue însă, aceste integrale coincid.

## 41 Proprietăți ale integralei Riemann-Darboux.

**Teorema 41.1.** Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții mărginite pe segmentul  $[a, b]$ . Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt integrabile Riemann-Darboux pe  $[a, b]$  atunci toate integralele care apar în relațiile următoare există și relațiile sunt adevărate:

$$(1) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \forall c \in (a, b)$$

$$(3) \text{ dac\u0103 } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ atunci } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(4) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

*Demonstra\u021bie.* (1) Demonstra\u021bia egalit\u0103\u021bii (1) se reduce la demonstrarea egalit\u0103\u021bilor:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \text{\u0219i} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Faptul c\u0103 egalitatea  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$  este adev\u0103rat\u0103 pentru orice  $\alpha \geq 0$  rezult\u0103 din egalit\u0103\u021bile  $L_{\alpha f}(P) = \alpha L_f(P)$  \u0219i  $U_{\alpha f}(P) = \alpha U_f(P)$ , valabile pentru orice  $\alpha \geq 0$  \u0219i orice parti\u021bie  $P$  a lui  $[a, b]$ .

Faptul c\u0103 egalitatea  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$  este adev\u0103rat\u0103 pentru orice  $\alpha < 0$  rezult\u0103 din egalit\u0103\u021bile  $L_{-f}(P) = -U_f(P)$  \u0219i  $U_{-f}(P) = -L_f(P)$ , valabile pentru orice parti\u021bie  $P$  a lui  $[a, b]$ .

Faptul c\u0103 egalitatea  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  este adev\u0103rat\u0103 se ob\u021bine observ\u0103nd c\u0103 pentru orice parti\u021bie  $P$  a lui  $[a, b]$  \u0103re loc:

$$L_f(P) + L_g(P) \leq L_{f+g}(P) \leq U_{f+g}(P) \leq U_f(P) + U_g(P)$$

din care rezult\u0103 inegalit\u0103\u021bile:

$$\mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g \leq \mathcal{L}_{f+g} \leq \mathcal{U}_{f+g} \leq \mathcal{U}_f + \mathcal{U}_g$$

Aceste inegalit\u0103\u021bi \u0103mpreun\u0103 cu egalit\u0103\u021bile:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int_a^b f(x) dx \quad \text{\u0219i} \quad \mathcal{L}_g = \mathcal{U}_g = \int_a^b g(x) dx$$

demonstreaz\u0103 c\u0103 \u0103re loc:

$$\mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{U}_{f+g} = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- (2) Pentru demonstrația egalității (2) fie  $P_1$  și  $P_2$  partiții ale lui  $[a, c]$ , respectiv  $[c, b]$ . Reuniunea  $P = P_1 \cup P_2$  este o partiție a lui  $[a, b]$  și avem:

$$L_f(P) = L_f(P_1) + L_f(P_2)$$

Considerăm numerele:

$$\mathcal{L}_f^1 = \sup\{L_f(P_1) \mid P_1 \text{ este partiție a lui } [a, c]\}$$

$$\mathcal{L}_f^2 = \sup\{L_f(P_2) \mid P_2 \text{ este partiție a lui } [c, b]\}$$

Întrucât  $L_f(P) \leq \int_a^b f(x) dx$  (din definiție) rezultă că are loc inegalitatea:

$$L_f(P_1) + L_f(P_2) \leq \int_a^b f(x) dx$$

De aici rezultă inegalitatea  $L_f(P_1) \leq \int_a^b f(x) dx - L_f(P_2)$ , din care se obține în continuare inegalitatea:

$$\mathcal{L}_f^1 \leq \int_a^b f(x) dx - L_f(P_2)$$

Din această inegalitate rezultă succesiv:

$$L_f(P_2) \leq \int_a^b f(x) dx - \mathcal{L}_f^1$$

$$\mathcal{L}_f^2 \leq \int_a^b f(x) dx - \mathcal{L}_f^1$$

$$\mathcal{L}_f^1 + \mathcal{L}_f^2 \leq \int_a^b f(x) dx$$

Considerăm acum sumele superioare și observăm că avem:

$$U_f(P) = U_f(P_1) + U_f(P_2)$$

În continuare considerăm:

$$\mathcal{U}_f^1 = \inf\{U_f(P_1) \mid P_1 \text{ este partiție a lui } [a, c]\}$$

$$\mathcal{U}_f^2 = \inf\{U_f(P_2) \mid P_2 \text{ este partiție a lui } [c, b]\}$$

Întrucât  $U_f(P) \geq \int_a^b f(x) dx$  (din definiția integralei) rezultă

$$U_f(P_1) + U_f(P_2) \geq \int_a^b f(x) dx$$

De aici se obține succesiv:

$$U_f(P_1) \geq \int_a^b f(x) dx - U_f(P_2)$$

$$\mathcal{U}_f^1 \geq \int_a^b f(x) dx - U_f(P_2)$$

$$U_f(P_2) \geq \int_a^b f(x) dx - \mathcal{U}_f^1$$

$$\mathcal{U}_f^2 \geq \int_a^b f(x) dx - \mathcal{U}_f^1$$

$$\mathcal{U}_f^1 + \mathcal{U}_f^2 \geq \int_a^b f(x) dx$$

Am obținut în acest fel inegalitățile:

$$\mathcal{L}_f^1 + \mathcal{L}_f^2 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{U}_f^1 + \mathcal{U}_f^2$$

Întrucât  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ , pentru orice  $\varepsilon > 0$  se poate alege  $P$  astfel încât  $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$ .

Alegând  $P_1$  și  $P_2$  astfel încât  $P = P_1 \cup P_2$  să satisfacă condiția de sus, obținem:

$$\begin{aligned} U_f(P_1) - L_f(P_1) + U_f(P_2) - L_f(P_2) &= U_f(P_1) + U_f(P_2) - (L_f(P_1) + L_f(P_2)) = \\ &= U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon \end{aligned}$$

De aici rezultă inegalitățile:

$$0 \leq U_f(P_1) - L_f(P_1) < \varepsilon \quad \text{și} \quad 0 \leq U_f(P_2) - L_f(P_2) < \varepsilon$$

Aceste inegalități demonstrează că avem:

$$\mathcal{L}_f^1 = \mathcal{U}_f^1 \quad \text{și} \quad \mathcal{L}_f^2 = \mathcal{U}_f^2$$

adică  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, c]$  și  $[c, b]$  și are loc egalitatea (2.2).

- (3) Pentru a demonstra (3) este suficient să se arate că dacă  $f(x) \geq 0$  pe  $[a, b]$  atunci are loc :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Faptul că inegalitatea  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  este adevărată rezultă din inegalitățile:

$$0 \leq L_f(P) \leq U_f(P)$$

valabile pentru orice partiție  $P$  a lui  $[a, b]$ .

- (4) Pentru a arăta (4) demonstrăm în primul rând că dacă  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $|f|$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ . Pentru aceasta introducem funcțiile  $f^+, f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definite astfel:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

și

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{dacă } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

și remarcăm următoarele egalități:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{și} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Arătăm în continuare că dacă funcția  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ , atunci funcțiile  $f^+, f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ . Mărginirea funcțiilor  $f^+$  și  $f^-$  este evidentă.

Fie  $P$  o partiție a segmentului  $[a, b]$ . În cazul funcției  $f^+$  notăm:

$$m_i^+ = \inf\{f^+(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{și} \quad M_i^+ = \sup\{f^+(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

și observăm că au loc următoarele inegalități:

$$M_i^+ - m_i^+ \leq M_i - m_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

unde:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{și} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Rezultă de aici că are loc inegalitatea:

$$0 \leq U_{f^+}(P) - L_{f^+}(P) \leq U_f(P) - L_f(P)$$

pentru orice partiție  $P$ .

De aici rezultă integrabilitatea Riemann-Darboux a funcției  $f^+$  pe segmentul  $[a, b]$ . Integrabilitatea Riemann-Darboux a funcției  $f^-$  pe segmentul  $[a, b]$  se arată la fel. În baza afirmației (1) și a egalității  $|f| = f^+ + f^-$  rezultă că funcția  $|f|$  este

integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ .

Pentru a obține inegalitatea (4) ținem seama de inegalitățile:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

și folosind (3) deducem inegalitățile:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

care demonstrează (4).

□

**Remarca 41.1.** Dacă funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită și integrabilă pe  $[a, b]$  atunci  $f$  este integrabilă pe orice subinterval  $[c, d] \subset [a, b]$ .

Mai mult, dacă  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ , atunci are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx$$

**Remarca 41.2.** Prin definiție,

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Remarca 41.3.** Dacă  $a > b$ , atunci, prin definiție

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

## 42 Clase de funcții integrabile Riemann-Darboux.

**Teorema 42.1.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $[a, b]$  atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b]$ .

*Demonstrație.* Vom arăta că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o partiție  $P$  astfel încât  $U_f(P) - L_f(P) \leq \varepsilon$ .

Considerăm în acest scop un număr  $\varepsilon > 0$  și numărul  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Dacă pentru orice  $x \in [a, b]$  avem:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon'$$

atunci considerăm partiția  $P = \{x_0, x_1\}$  cu  $x_0 = a$  și  $x_1 = b$  și verificăm că  $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$ .

Dacă însă mulțimea  $S$  definită prin:

$$S = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| = \varepsilon'\}$$

este nevidă atunci considerăm punctul  $x_1 = \inf S$ . Acesta este primul element al segmentului  $[a, b]$  care are proprietatea  $|f(x) - f(a)| = \varepsilon'$ .

Dacă  $x_1 = \inf S = b$  atunci considerăm partiția  $P = \{x_0, x_1\}$  cu  $x_0 = a$  și  $x_1 = b$  și verificăm că  $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$ .

Dacă  $x_1 = \inf S < b$  atunci se consideră  $x_2$  primul element din  $[x_1, b]$  pentru care  $|f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'$ .

Dacă  $x_2 = \inf\{x \in [x_1, b] \mid |f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'\} = b$  atunci considerăm partiția  $P = \{x_0, x_1, x_2\}$  cu  $x_0 = a, x_1 = \inf S$  și  $x_2 = b$  și verificăm că  $U_f(P) - L_f(P) \leq \varepsilon$ .

Dacă  $x_2 = \inf\{x \in [x_1, b] \mid |f(x) - f(x_1)| = \varepsilon'\} < b$  atunci se consideră  $x_3$  primul element din  $[x_2, b]$  pentru care  $|f(x) - f(x_2)| = \varepsilon'$  și se continuă procesul.

Trebuie să arătăm că acest proces nu poate fi continuat la nesfârșit.

Să presupunem prin absurd că în acest fel se obține un șir infinit  $(x_n)$ . Este clar din construcție că șirul  $(x_n)$  este crescător și mărginit. Prin urmare  $(x_n)$  este convergent la un punct  $x \in [a, b]$ . Deoarece  $f$  este funcție continuă rezultă că  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  și  $f(x_{n-1}) \rightarrow f(x)$ . Pe de altă parte, din construcție avem  $|f(x_n) - f(x_{n-1})| = \varepsilon'$ , ceea ce este în contradicție cu  $f(x_n) - f(x_{n-1}) \rightarrow 0$ .

Rezultă astfel că șirul  $(x_n)$  este finit, adică există  $N$  astfel încât  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  este o partiție a lui  $[a, b]$  pentru care  $|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \varepsilon', i = 1, 2, \dots, N$ .

Pentru această partiție  $P$  avem:

$$M_i - m_i \leq 2\varepsilon' \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Rezultă:

$$U_f(P) - L_f(P) = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 2\varepsilon'(b - a) = \varepsilon$$

Folosim această inegalitate și obținem succesiv:

$$\mathcal{L}_f \geq L_f(P) \geq U_f(P) - \varepsilon \geq \mathcal{U}_f - \varepsilon$$

Deoarece  $\varepsilon > 0$  este oarecare, rezultă  $\mathcal{L}_f \geq \mathcal{U}_f$ . Această inegalitate împreună cu inegalitatea  $\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$  implică  $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$ . Rezultă astfel că funcția continuă  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe segmentul  $[a, b]$ .  $\square$

**Definiția 42.1.** O funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se zice continuă pe porțiuni dacă există o partiție  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  a segmentului  $[a, b]$  și funcțiile continue  $f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$  astfel încât  $f(x) = f_i(x), \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$ .

**Teorema 42.2.** O funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe porțiuni este integrabilă Riemann-Darboux și are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x) dx$$

*Demonstrație.* Este suficient să arătăm că dacă o funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietatea  $f(x) = g(x), \forall x \in (\alpha, \beta) \subset [a, b]$  și  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[\alpha, \beta]$  și are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy$$

Pentru aceasta considerăm o partiție  $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  a segmentului  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_n = \beta$  și scriem:

$$L_f(P) = L_g(P) + (m_1^f - m_1^g) \cdot (y_1 - y_0) + (m_n^f - m_n^g) \cdot (y_n - y_{n-1})$$

$$U_f(P) = U_g(P) + (M_1^f - M_1^g) \cdot (y_1 - y_0) + (M_n^f - M_n^g) \cdot (y_n - y_{n-1})$$

unde am notat:

$$\begin{aligned} m_1^f &= \inf\{f(y)|y \in [y_0, y_1]\} & m_1^g &= \inf\{g(y)|y \in [y_0, y_1]\} \\ m_n^f &= \inf\{f(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} & m_n^g &= \inf\{g(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} \\ M_1^f &= \sup\{f(y)|y \in [y_0, y_1]\} & M_1^g &= \sup\{g(y)|y \in [y_0, y_1]\} \\ M_n^f &= \sup\{f(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} & M_n^g &= \sup\{g(y)|y \in [y_{n-1}, y_n]\} \end{aligned}$$

Prin scădere se obține:

$$\begin{aligned} U_f(P) - L_f(P) &= U_g(P) - L_g(P) + (M_1^f - m_1^f + m_1^g - M_1^g)(y_1 - y_0) + \\ &+ (M_n^f - m_n^f + m_n^g - M_n^g)(y_n - y_{n-1}) \leq \\ &\leq U_g(P) - L_g(P) + [(M^f - m^f) + (M^g - m^g)](y_1 - y_0 + y_n - y_{n-1}) \end{aligned}$$

Alegând  $\varepsilon > 0$  și  $P$  astfel încât  $U_g(P) - L_g(P) < \varepsilon/2$  și  $y_1 - y_0 + y_n - y_{n-1} < \varepsilon/[2(M^f - m^f + M^g - m^g)]$  rezultă că  $U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$ . Numărul  $\varepsilon$  putând fi oricât de mic, rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[\alpha, \beta]$ .

Pentru a demonstra egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy$$

remarcăm următoarele:

$$f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ implică } m_1^f \leq m_1^g \text{ și } f(\alpha) > g(\alpha) \text{ implică } m_1^f = m_1^g$$

de unde rezultă inegalitatea  $m_1^f - m_1^g \leq 0$ .

$$f(\beta) \leq g(\beta) \text{ implică } m_n^f \leq m_n^g \text{ și } f(\beta) > g(\beta) \text{ implică } m_n^f = m_n^g$$

de unde rezultă inegalitatea  $m_n^f - m_n^g \leq 0$ .

Inegalitățile  $m_1^f - m_1^g \leq 0$  și  $m_n^f - m_n^g \leq 0$  implică inegalitatea  $L_f(P) \leq L_g(P)$ .

$$f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ implică } M_1^f = M_1^g \text{ și } f(\alpha) > g(\alpha) \text{ implică } M_1^f \geq M_1^g$$

de unde rezultă inegalitatea  $M_1^f - M_1^g \geq 0$ .

$$f(\beta) \leq g(\beta) \text{ implică } M_n^f = M_n^g \text{ și } f(\beta) > g(\beta) \text{ implică } M_n^f \geq M_n^g$$



de unde rezultă inegalitatea  $M_n^f - M_n^g \geq 0$ .  
 Inegalitățile  $M_1^f - M_1^g \geq 0$  și  $M_n^f - M_n^g \geq 0$  implică inegalitatea  $U_f(P) \geq U_g(P)$ .  
 Prin urmare avem:

$$L_f(P) \leq L_g(P) \leq U_g(P) \leq U_f(P)$$

Deoarece  $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy$  (am arătat că  $f$  este integrabilă), din aceste inegalități obținem egalitățile:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \mathcal{L}_g = \mathcal{U}_g = \int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy$$

□

**Comentariu:** Există diferite caracterizări ale integrabilității Riemann-Darboux. Una dintre aceste caracterizări, care se leagă de rezultatele stabilite în teoremele precedente este următoarea:

O funcție mărginită  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux dacă și numai dacă  $f$  este continuă aproape peste tot.

Menționăm că funcția  $f$  este continuă aproape peste tot dacă mulțimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

O mulțime  $A \subset [a, b]$  se zice neglijabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o familie cel mult numărabilă de intervale deschise  $(a_n, b_n)$  astfel încât să avem:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

O funcție continuă pe porțiuni este continuă aproape peste tot.

## 43 Teoreme de medie.

**Teorema 43.1.** *Dacă funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue și  $g(x) \geq 0$  oricare ar fi  $x \in [a, b]$ , atunci există  $c \in [a, b]$  astfel încât să avem:*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

*Demonstrație.* Dacă funcția  $g$  este identic nulă, egalitatea de mai sus este verificată, pentru orice  $c \in [a, b]$ . Presupunem în cele ce urmează că  $g$  nu este identic nulă, de

unde  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . Considerăm  $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$  și  $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$ .

Întrucât  $g(x) \geq 0$  avem:

$$m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x), \forall x \in [a, b]$$

De aici rezultă:

$$m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$$

și

$$K = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \in [m, M]$$

Funcția  $f$  fiind continuă există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) = K$ . De aici rezultă:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

□

**Consecința 43.1.** Dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  atunci există  $c \in [a, b]$  astfel încât:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

## 44 Teorema fundamentală de calcul integral.

**Teorema 44.1.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită și integrabilă Riemann-Darboux pe segmentul  $[a, b]$  și  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este funcția definită prin

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

atunci funcția  $F$  este continuă pe  $[a, b]$ . Mai mult, dacă funcția  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , atunci  $F$  este derivabilă pe  $[a, b]$  și  $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $f$  este mărginită, există  $M > 0$  astfel încât  $|f(t)| \leq M, \forall t \in [a, b]$ . Pentru  $c \in [a, b]$  fixat, avem:

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right| = \left| \int_c^x f(t) dt \right|$$

Pentru  $x > c$  rezultă inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq \int_c^x |f(t)| dt \leq M \cdot (x - c)$$

Pentru  $x < c$  rezultă inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq \int_x^c |f(t)| dt \leq M \cdot (c - x)$$

Rezultă în final inegalitatea:

$$|F(x) - F(c)| \leq M \cdot |x - c|, \forall x \in [a, b]$$

Această inegalitate demonstrează continuitatea funcției  $F$  în punctul  $c$ .

Să presupunem acum că funcția  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  și să considerăm  $c \in [a, b]$  fixat.

Pentru  $c < x < b$  avem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \left| \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt}{x - c} - f(c) \right| \leq \left| \frac{\int_c^x f(t) dt}{x - c} - f(c) \right| = \\ &= \left| \frac{\int_c^x (f(t) - f(c)) dt}{x - c} \right| \leq \frac{\int_c^x |f(t) - f(c)| dt}{x - c} \end{aligned}$$

Cum  $f$  este continuă, pentru  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$  pentru orice  $|t - c| < \delta$ . De aici, pentru  $x \in (c, c + \delta)$ , rezultă:

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| < \frac{\int_c^x \varepsilon dt}{x - c} = \varepsilon$$

Cu alte cuvinte, derivata la dreapta  $F_+'(c)$  există și  $F_+'(c) = f(c)$ .

În mod analog rezultă că derivata la stânga există și  $F_-'(c) = f(c)$ . □

**Remarca 44.1.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ , atunci:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = F(x_2) - F(x_1)$$

unde  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

**Remarca 44.2.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă cu  $\Phi'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , atunci există o constantă reală  $C$  astfel încât:

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

unde  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

**Remarca 44.3.** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă cu  $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ , atunci oricare ar fi  $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$  avem:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

**Comentariu:** Evaluarea integralei  $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$  pe baza formulei:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

depinde de găsirea unei funcții  $\Phi$  care are proprietatea  $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ .

**Exemplu 44.1.**

$$a) \int_0^1 (x^3 + 2) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{4}$$

$$b) \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{5}{6}$$

**Definiția 44.1.** Orice funcție  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  care are proprietatea  $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$  se numește o primitivă a funcției  $f$ .

**Remarca 44.4.** Din păcate există multe funcții a căror primitivă nu poate fi scrisă în termeni de funcții elementare. În asemenea situații calculul integralei  $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$  se face numeric.

## 45 Tehnici de determinare a primitivelor.

În secțiunea precedentă am văzut că integrala Riemann-Darboux

$$\int_a^b f(x) dx$$

poate fi calculată găsind o primitivă a funcției  $f$ , dacă așa ceva există și este exprimabilă în termeni de funcții simple.

Există numeroase tehnici de determinare a primitivelor și în această secțiune prezentăm două din cele mai importante tehnici: *integrarea prin părți* și *schimbarea de variabilă*.

## 45.1 Integrarea prin părți

**Teorema 45.1.** *Dacă funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile și au derivate continue pe  $[a, b]$  atunci are loc egalitatea:*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

unde simbolul  $\int f(x)g'(x) dx$  reprezintă mulțimea primitivelor funcției  $f g'$ , iar  $\int f'(x)g(x) dx$  reprezintă mulțimea primitivelor funcției  $f'g$ .

*Demonstrație.* Funcția  $h = fg$  are derivată continuă pe  $[a, b]$  și

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Fie acum  $\varphi \in \int f(x)g'(x) dx$  și diferența  $\psi = \varphi - fg$ . Prin derivare se obține egalitatea:

$$\psi' = \varphi' - f'g - fg' = -f'g$$

care arată că  $\psi \in -\int f'g$ .

Astfel am obținut că funcția  $\varphi = fg + \psi$  și  $\psi \in -\int f'g$ . Altfel spus,  $\varphi \in fg - \int f'g$ .

Analog se arată că oricare ar fi  $\psi \in -\int f'(x)g(x) dx$ , funcția  $\varphi = fg + \psi \in \int f(x)g'(x) dx$ . □

**Consecința 45.1.** *Dacă funcțiile  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  au derivate continue pe  $[a, b]$ , atunci are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

**Exemplu 45.1.** *Multe formule de recurență se stabilesc prin integrare prin părți repetată. De exemplu, fie:*

$$I_n = \int \cos^n x dx$$

*Integrând prin părți rezultă:*

$$I_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

*De aici avem:*

$$nI_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)I_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

*Această formulă împreună cu egalitățile  $I_0 = x$  și  $I_1 = \sin x$  conduc la evaluarea primitivei  $I_n$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$ .*

## 45.2 Schimbarea de variabilă

**Propoziția 45.1.** *Dacă funcția  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  este surjectivă, este derivabilă cu derivata  $g'$  continuă pe  $I$  și diferită de zero, și dacă funcția  $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe  $J$  atunci are loc egalitatea:*

$$\left( \int f(x) dx \right) \circ g = \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$$

unde simbolul  $\left( \int f(x) dx \right) \circ g$  reprezintă mulțimea de funcții ce se obține compunând primitivele funcției  $f$  cu funcția  $g$ , iar simbolul  $\int (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$  reprezintă mulțimea primitivelor funcției  $(f \circ g) \cdot g'$ .

*Demonstrație.* Fie  $G \in \left( \int f(x) dx \right) \circ g$ . Există  $F \in \int f(x) dx$  astfel încât  $G = F \circ g$ . Funcția  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă și :

$$G'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) = (f \circ g)(t) \cdot g'(t)$$

Această egalitate demonstrează apartenența  $G \in \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$ .

Fie acum  $G \in \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$ . Funcția  $g : I \rightarrow J$  este bijectivă și inversa  $g^{-1} : J \rightarrow I$  este derivabilă, funcția derivată  $(g^{-1})'$  este continuă și verifică:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(t)} \quad \text{unde } x = g(t)$$

Se consideră funcția  $F = G \circ g^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Funcția  $F$  este derivabilă și verifică:

$$F'(x) = G'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = (f \circ g)(g^{-1}(x)) [(g^{-1})'(x)]^{-1} \cdot (g^{-1})'(x) = f(x)$$

Prin urmare,  $F \in \int f(x) dx$ . Din definiția lui  $F$  avem  $G = F \circ g$  și se obține astfel apartenența  $G \in \left( \int f(x) dx \right) \circ g$ . □

**Consecința 45.2.** *Dacă  $f$  și  $g$  satisfac condițiile din Propoziția 45.1 și dacă  $[a, b] \subset I$  și  $[\alpha, \beta] \subset J$  verifică  $g([a, b]) = [\alpha, \beta]$  atunci are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

**Exemplu 45.2.** *Pentru a găsi mulțimea de funcții  $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$  considerăm  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ ,  $x > 0$  și  $g(t) = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Suntem în condițiile Propoziției 45.1 și avem:*

$$\left( \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \right) \circ g = \int \frac{e^t}{t \cdot e^t} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C \quad \forall t > 0$$

Rezultă de aici egalitatea:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln(\ln x) + C$$

**Remarca 45.1.** Tehnica schimbării de variabilă se numește adesea *integrare prin substituție*, unde  $x = g(t)$  definește substituția.

**Remarca 45.2.** Formula de schimbare a variabilei:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

rămâne adevărată și în ipoteza în care funcția  $f$  este continuă pe porțiuni, iar  $g$  satisface condițiile din Propoziția 45.1 și este strict crescătoare ( $g(a) = \alpha$  și  $g(b) = \beta$ ).

**Remarca 45.3.** Dacă  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe porțiuni și este simetrică ( $f(-x) = f(x)$ ) atunci:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

iar dacă  $f$  este antisimetrică ( $f(-x) = -f(x)$ ) atunci:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

În ambele cazuri se prezintă integrala  $\int_{-a}^a f(x) dx$  sub forma:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

și apoi se aplică primei integrale substituția  $x = -t$ .

**Remarca 45.4.** Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este periodică de perioadă  $T$  și este continuă pe porțiuni atunci pe orice interval de lungime  $T$  integrala acestei funcții are aceeași valoare:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Pentru demonstrație se scrie:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

În integrala  $\int_T^{a+T} f(x) dx$  se aplică schimbarea de variabilă  $x = t + T$  și se obține:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = - \int_a^0 f(x) dx$$

## 46 Integrale improprii.

Integrala Riemann-Darboux a fost definită numai pentru funcții mărginite definite pe un interval mărginit.

În această secțiune relaxăm aceste condiții și definim *integralele improprii*.

**Definiția 46.1.** Fie  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită și integrabilă Riemann-Darboux pe intervalul  $[a, b]$  pentru orice  $b > a$ . Dacă limita

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

există și este finită atunci zicem că integrala  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge ( $f$  este integrabilă pe  $[a, +\infty)$ ) și prin definiție:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Dacă limita  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  nu există sau nu este finită zicem că integrala  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  este divergentă ( $f$  nu este integrabilă pe  $[a, +\infty)$ ).

**Remarca 46.1.** Pentru  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită și integrabilă Riemann-Darboux pe orice  $[a, b]$ ,  $a < b$ , integrala  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  se definește în mod analog:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

**Remarca 46.2.** Pentru a păstra aditivitatea în cazul integralelor improprii, integrala pe  $\mathbb{R}$  se definește astfel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

cu condiția ca ambele integrale din membrul drept al egalității să fie convergente.

În continuare vom defini integrala unei funcții pe un interval mărginit atunci când funcția nu este mărginită pe interval. Aceste integrale se numesc *integrale improprii de speța a doua*.



**Definiția 46.2.** Fie  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a + \varepsilon, b]$  pentru orice  $\varepsilon \in (0, b - a)$ . Dacă limita:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

există și este finită atunci zicem că integrala  $\int_a^b f(x) dx$  converge ( $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ ) și prin definiție:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

**Remarca 46.3.** Pentru  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann-Darboux pe  $[a, b - \varepsilon]$  pentru orice  $\varepsilon \in (0, b - a)$ , integrala  $\int_a^b f(x) dx$  se definește în mod analog:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

**Propoziția 46.1** (Criteriu de comparație pentru integrale improprii). Fie  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funcții mărginite și integrabile Riemann-Darboux pe  $[a, b]$  pentru orice  $b > a$ . Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- 1)  $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq a$
- 2)  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge

atunci integrala  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge de asemenea și are loc inegalitatea:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

*Demonstrație.* Pentru orice  $b > a$  avem:

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Funcția  $b \mapsto \int_a^b g(x) dx$  este crescătoare și mărginită:

$$\int_a^b g(x) dx \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Prin urmare funcția crescătoare  $b \mapsto \int_a^b f(x) dx$  este mărginită și deci integrala  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  este convergentă.  $\square$

Un criteriu de comparație pentru integrale improprii de speța a doua se formulează și se demonstrează prin analogie.

**Propoziția 46.2.** Fie  $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile Riemann-Darboux pe  $[a + \varepsilon, b]$  pentru orice  $\varepsilon \in (0, b - a)$ . Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

$$1) 0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$$

$$2) \int_a^b g(x) dx \text{ este convergentă}$$

atunci integrala  $\int_a^b f(x) dx$  converge de asemenea și are loc inegalitatea:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

## 47 Serii Fourier.

Pentru ca o funcție  $f$  să fie dezvoltabilă în serie Taylor este necesar ca  $f$  să fie indefinit derivabilă. Această restricție este severă. Chiar dacă se folosește *formula lui Taylor cu rest* pentru reprezentarea funcției, funcția trebuie să fie derivabilă de un număr finit de ori. Această din urmă condiție implică continuitatea funcției. Multe funcții însă, care descriu fenomene fizice importante, nu sunt continue și nu pot fi reprezentate nici cu formula lui Taylor. De exemplu, funcția care descrie evoluția în timp a tensiunii într-un circuit electric în care apar comutări de contacte, nu este continuă.

*Seriile Fourier* oferă posibilitatea de reprezentare a funcțiilor continue și continue pe porțiuni. Aceasta întrucât pentru a construi seria Fourier, funcția trebuie să fie doar integrabilă Riemann-Darboux.

**Definiția 47.1.** Fie  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe porțiuni. *Seria Fourier a lui  $f$  este, prin definiție, seria de funcții:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

în care coeficienții Fourier  $a_n, b_n$  sunt calculați cu formulele:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Remarca 47.1.** În mod tradițional, până când problema convergenței seriei Fourier nu este tranșată, relația dintre funcția  $f$  și seria Fourier a lui  $f$  se notează cu semnul  $\sim$  în loc de egalitate.

Rezultatul fundamental care va fi stabilit în această secțiune se referă la convergența seriei Fourier a unei funcții continue pe porțiuni și la suma seriei. Acest rezultat se bazează pe alte două rezultate care au importanța lor în sine și le vom prezenta sub forma a două leme.

**Lema 47.1.** [de reprezentare integrală a sumei parțiale  $S_n(x)$ ] *Suma parțială de ordinul  $n$ ,  $S_n(x)$ , a seriei Fourier a unei funcții  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continue pe porțiuni și prelungită prin periodicitate la  $\mathbb{R}$  poate fi reprezentată sub forma:*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} \, du \quad x \in \mathbb{R}$$

*Demonstrație.* Considerăm suma parțială  $S_n(x)$  a seriei Fourier a funcției  $f$ :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

În virtutea definiției coeficienților Fourier  $a_k, b_k$  putem scrie:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n [\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt]$$

Introducând  $\cos kx$  și  $\sin kx$  sub semnul de integrală și folosind identitatea trigonometrică:

$$\cos k(x-t) = \cos kx \cdot \cos kt + \sin kx \cdot \sin kt$$

obținem:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] dt$$

Aplicând identitatea:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2 \sin \frac{1}{2}(x-t)}$$

și introducând  $u = x - t$ ,  $S_n(x)$  devine:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

Integrandul este o funcție de  $u$  periodică de perioadă  $2\pi$  și prin urmare:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

□

**Lema 47.2.** Dacă  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe porțiuni atunci sunt adevărate următoarele egalități:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x dx = 0 \text{ dacă } -\pi \leq a < b \leq \pi$$

unde  $a_n$  și  $b_n$  sunt coeficienții Fourier ai funcției  $f$ .

*Demonstrație.* Se consideră identitatea:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(x)]^2 dx$$

Prin calcul se arată că avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

Ținând seama de această egalitate din urmă, identitatea considerată devine:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

De aici se deduce inegalitatea:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

valabilă pentru orice  $n$  și cunoscută sub denumirea de *inegalitatea lui Bessel*. Din inegalitatea lui Bessel rezultă că seria numerică:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

este convergentă și , prin urmare,  $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  și  $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .  
Remarcăm aici faptul că dacă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0$$

atunci are loc egalitatea:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

numită *egalitatea lui Parseval*.

Convergența:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0$$

se numește *convergența în medie a șirului de sume parțiale  $S_n(x)$  la funcția  $f(x)$* .  
Trecem acum să arătăm că pentru  $a < b, a, b \in [-\pi, \pi]$  avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx = 0$$

Remarcăm la început că pentru  $\alpha < \beta$  avem:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx \right| = \left| \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}{n + \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{2}{n + \frac{1}{2}}$$

Fie  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$  o partiție a segmentului  $[a, b]$  și descompunerea corespunzătoare a integralei:

$$\int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$$

Notăm:

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

și reprezentăm integrala  $\int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$  în forma următoare:

$$\int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - m_i] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx + \sum_{i=0}^{p-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$$

Pentru  $\omega_i = M_i - m_i$ , unde  $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ , avem:

$$f(x) - m_i \leq M_i - m_i = \omega_i \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{și } i = 0, \dots, p-1$$

De aici rezultă:

$$\left| \int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx \right| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{n + \frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{p-1} |m_i|$$

Pentru  $\varepsilon > 0$  alegem partiția astfel încât să avem:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Acest lucru este posibil pentru că funcția  $f$  este continuă pe porțiuni și este integrabilă. Acum putem lua  $n > \frac{4}{\varepsilon} M(b-a)$ , unde  $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$  și pentru asemenea valori ale lui  $n$  obținem inegalitatea:

$$\left| \int_a^b f(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

**Teorema 47.1. [Fourier]** Fie  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe porțiuni care se prelungește prin periodicitate la toată axa reală. Dacă  $f$  are derivate laterale finite în punctele ei de discontinuitate atunci următoarele afirmații sunt adevărate:

a) dacă  $x_0$  este un punct de continuitate a lui  $f$  atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

b) dacă  $x_0$  este punct de discontinuitate a lui  $f$  atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

*Demonstrație.* Facem demonstrația în cazul în care  $f$  nu este continuă într-un punct  $x_0$ . Considerăm:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ și } f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Conform lemei 47.1 avem:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - u) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

Avem de asemenea:

$$\frac{1}{2} \cdot f(x_0^+) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0^+) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

$$\frac{1}{2} \cdot f(x_0^-) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0^-) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

și, prin urmare:

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 - u) - f(x_0^+)] \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 - u) - f(x_0^-)] \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

Integranzii sunt bine definiți peste tot, cu excepția lui  $u = 0$  unde trebuie făcută o analiză. Primul integrand poate fi scris sub forma:

$$F_1(u) \cdot \sin(n + \frac{1}{2})u$$

unde

$$F_1(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0^+)}{u} \cdot \frac{\frac{1}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u}$$

Pentru  $u \rightarrow 0^-$ , cel de-al doilea factor tinde la 1 și produsul tinde la  $-f'(x_0^+)$ . Astfel dacă punem  $F_1(0) = -f'(x_0^+)$  integrandul este bine definit în  $u = 0$ .

În mod similar, avem:

$$F_2(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0^-)}{-u} \cdot \frac{-\frac{1}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u}$$

are limita  $+f'(x_0^-)$  și dacă punem  $F_2(0) = +f'(x_0^-)$  cel de-al doilea integrand este bine definit.

Prin urmare avem:

$$S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 F_1(u) \cdot \sin(n + \frac{1}{2})u du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_2(u) \cdot \sin(n + \frac{1}{2})u du$$

și aplicând lema 47.2 concluzionăm că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

Pe firul acestei demonstrații se arată ușor că dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0)$$

□

## 48 Diferite forme ale seriei Fourier.

**Teorema 48.1.** [schimbarea originii intervalului fundamental  $[-\pi, \pi]$ ] Dacă  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe porțiuni și este prelungită pe  $\mathbb{R}$  prin periodicitate, atunci pentru orice  $\alpha$ , coeficienții Fourier  $a_n, b_n$  ai lui  $f$  verifică relațiile:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha - \pi}^{\alpha + \pi} f(x) \cdot \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

și

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

în orice punct de continuitate  $x \in [\alpha - \pi, \alpha + \pi]$ .

*Demonstrație.* Funcțiile  $f(x) \cdot \cos nx$ ,  $f(x) \cdot \sin nx$  sunt periodice de perioadă  $2\pi$ . Rezultă că integralele lor sunt aceleași pe orice interval de lungime  $2\pi$ . Se obțin în acest fel egalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = a_n \\ \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = b_n \end{aligned}$$

Pentru egalitatea:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

considerăm șirul  $y_k = x - 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Există  $k_0 \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $y_{k_0} \in [-\pi, \pi]$  și pentru  $k_0$  avem:  $f(y_{k_0}) = f(x - 2k_0\pi) = f(x)$ , precum și:

$$f(y_{k_0}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos ny_{k_0} + b_n \cdot \sin ny_{k_0}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

□

**Remarca 48.1.** În condițiile Teoremei 48.1, dacă  $x$  este un punct de discontinuitate a prelungirii lui  $f$  prin periodicitate, atunci are loc:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

Această egalitate se demonstrează asemănător cu egalitatea din Teorema 48.1.

**Teorema 48.2.** [schimbarea lungimii intervalului] Dacă  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe porțiuni, atunci pentru orice  $x \in [-L, L]$  are loc:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{dacă } f \text{ este continuă în } x$$

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{dacă } f \text{ nu este continuă în } x$$



în care:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*Demonstrație.* Considerăm funcția  $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow [-L, L]$  definită prin  $\varphi(y) = \frac{L}{\pi} \cdot y$  și funcția  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $g = f \circ \varphi, g(y) = f(\varphi(y)) = f(\frac{Ly}{\pi})$ .

Remarcăm că funcția  $g$  este continuă pe porțiuni și punctele de discontinuitate  $y_d$  ale lui  $g$  se obțin din punctele de discontinuitate  $x_d$  ale lui  $f$  cu formula  $y_d = \frac{\pi x_d}{L}$ .

Dacă într-un punct  $y$  funcția  $g$  este continuă atunci:

$$g(y) = \frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(g)} \cdot \cos ny + b_n^{(g)} \cdot \sin ny)$$

iar dacă  $g$  este discontinuă în  $y$ , atunci:

$$\frac{1}{2}[g(y^+) + g(y^-)] = \frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(g)} \cdot \cos ny + b_n^{(g)} \cdot \sin ny)$$

unde:

$$a_n^{(g)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \cos ny dy \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n^{(g)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \sin ny dy \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prin schimbarea de variabilă  $y = \frac{\pi x}{L}$  pentru  $a_n^{(g)}$  și  $b_n^{(g)}$  obținem:

$$a_n^{(g)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \cos ny dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n^{(g)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cdot \sin ny dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L g\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

și astfel avem:

$$\frac{a_0^{(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(g)} \cdot \cos ny + b_n^{(g)} \cdot \sin ny) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Dacă  $x$  este punct de continuitate pentru  $f$  atunci  $f(x) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right) = g(y)$  și dacă  $x$  este punct de discontinuitate pentru  $f$  atunci:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2}[g(y^+) + g(y^-)]$$

$$\text{cu } y^+ = \frac{\pi x^+}{L}, y^- = \frac{\pi x^-}{L}.$$

Rezultă în acest fel egalitățile din enunț. □

**Remarca 48.2.** Dacă  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție pară ( $f(-x) = f(x)$ ) atunci funcția  $f(x) \cdot \cos nx$  este funcție pară și funcția  $f(x) \cdot \sin nx$  este funcție impară. Coeficienții Fourier  $a_n, b_n$  în acest caz sunt:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prin urmare, dacă funcția  $f$  este pară atunci dezvoltarea ei în serie Fourier conține doar funcția cosinus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Această dezvoltare se numește dezvoltare Fourier în serie de cosinusuri a funcției pare  $f(x)$ .

**Remarca 48.3.** Dacă  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție impară ( $f(-x) = -f(x)$ ) atunci funcția  $f(x) \cdot \cos nx$  este funcție impară și funcția  $f(x) \cdot \sin nx$  este funcție pară. Coeficienții Fourier  $a_n, b_n$  în acest caz sunt:

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prin urmare, dacă funcția  $f$  este impară atunci dezvoltarea ei în serie Fourier conține doar funcția sinus:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Această dezvoltare se numește dezvoltare Fourier în serie de sinusuri a funcției impare  $f(x)$ .

**Remarca 48.4.** Aceste rezultate pot fi folosite pentru o funcție oarecare  $f(x)$  care trebuie dezvoltată în serie Fourier pe intervalul  $[0, \pi]$ . Definind o funcție nouă  $g(x)$  cu regula:

$$g(x) = \begin{cases} f(-x), & \text{pentru } -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{pentru } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

obținem o funcție pară care coincide cu funcția inițială  $f$  pe intervalul  $[0, \pi]$ . Funcția  $g$  se dezvoltă în serie Fourier de cosinusuri:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

și coeficienții  $a_n$  se obțin cu formula:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Astfel se obține o dezvoltare în serie de cosinusuri a funcției  $f$  pe  $[0, \pi]$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

cu:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Remarca 48.5.** Aceeași funcție  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  care trebuie dezvoltată poate fi extinsă pe  $[-\pi, \pi]$  prin imparitate:

$$h(x) = \begin{cases} -f(-x), & \text{pentru } -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & \text{pentru } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Funcția  $h$  fiind impară se dezvoltă în serie de sinusuri pe  $[-\pi, \pi]$ :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

cu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De aici rezultă dezvoltarea lui  $f$  în serie de sinusuri pe intervalul  $[0, \pi]$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

cu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Am obținut astfel următorul rezultat:

**Teorema 48.3.** Dacă  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă pe porțiuni, atunci funcția  $f$  poate fi dezvoltată pe  $[0, \pi]$  în serie de cosinusuri sau în serie de sinusuri:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx \quad \text{sau} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

unde:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## Partea III

# Calcul diferențial și integral pentru funcții de $n$ variabile reale

## 49 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 49.1.** Mulțimea  $\mathbb{R}^n$  este prin definiție mulțimea tuturor sistemelor ordonate  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  numere reale.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^1\}$$

**Definiția 49.2.** O funcție reală de  $n$  variabile reale este o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Exemplu 49.1.** Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  este o funcție reală de două variabile.

**Definiția 49.3.** O funcție vectorială de  $n$  variabile reale este o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Exemplu 49.2.** Funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

este o funcție vectorială de trei variabile.

O funcție vectorială de  $n$  variabile  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  poate fi scrisă sub forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Funcțiile reale de  $n$  variabile  $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  care apar în această reprezentare a lui  $f$  se numesc componentele scalare ale funcției  $f$ .

La investigarea funcțiilor reale de o singură variabilă reală s-au considerat numere  $x$  care sunt aproape de numărul  $a$ . Aceasta a condus la considerarea modulului  $|x - a|$ , care reprezintă distanța dintre  $x$  și  $a$ .

O distanță analogă poate fi introdusă în  $\mathbb{R}^n$  în felul următor:

Cu operațiile:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &\quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ și } (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \\ k \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (kx_1, kx_2, \dots, kx_n), \quad k \in \mathbb{R}^1, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mulțimea  $\mathbb{R}^n$  se structurează ca spațiu vectorial real  $n$ -dimensional.

Pentru vectorul  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se definește **norma** (sau lungimea) lui  $x$  prin

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Pentru doi vectori  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  se definește distanța cu formula:

$$\|x - a\| = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}.$$

**Definiția 49.4.** O vecinătate a vectorului  $a \in \mathbb{R}^n$  este o mulțime  $V \subset \mathbb{R}^n$  cu următoarea proprietate:

$\exists r > 0$  a.î. mulțimea  $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$  este inclusă în  $V$ :  $S_r(a) \subset V$ .

**Definiția 49.5.** Mulțimea  $S_r(a)$  definită prin

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

se numește sferă deschisă centrată în punctul  $a$ .

**Definiția 49.6.** O funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește șir de puncte din  $\mathbb{R}^n$ .

Ca și în cazul șirurilor de numere reale  $f(k) = a_k$  se numește termenul de rang  $k$  al șirului de vectori din  $\mathbb{R}^n$  și tot șirul se notează cu  $(a_k)$ .

**Definiția 49.7.** Șirul de puncte  $(a_k)$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^n$  converge la punctul  $a \in \mathbb{R}^n$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$  a.î.  $\forall k > N \Rightarrow \|a_k - a\| < \varepsilon$ .

Faptul că șirul de puncte  $(a_k)$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^n$  converge la punctul  $a \in \mathbb{R}^n$  se notează cu:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \text{sau} \quad a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$$

iar numărul  $a$  este limita șirului.

**Propoziția 49.1.** Dacă un șir de puncte  $(a_k)$  din  $\mathbb{R}^n$  este convergent atunci limita este unică.

*Demonstrație.* Ca și pentru șiruri de numere reale. □

**Propoziția 49.2.** Dacă un șir de puncte  $(a_k)$  din  $\mathbb{R}^n$  este convergent atunci șirul  $(a_k)$  este mărginit. Adică:  $\exists M > 0$  a.î.  $\|a_k\| < M \forall k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstrație.* Ca și pentru șiruri de numere reale. □

**Propoziția 49.3.** Dacă șirul  $(a_k)$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^n$  converge la  $a \in \mathbb{R}^n$  atunci orice subșir al șirului  $(a_k)$  converge la  $a$ .

*Demonstrație.* Ca și pentru șiruri de numere reale. □

**Propoziția 49.4.** Șirul de puncte  $(a_k)$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^n$  converge la  $a \in \mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă șirurile de numere reale  $(a_{i,k})$  converg la numerele  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Unde  $a_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})$ .

*Demonstrație.* Dacă  $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$  atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$  a.î.  $\|a_k - a\| < \varepsilon \forall k > N(\varepsilon)$ . Rezultă de aici că  $|a_{ik} - a_i| < \varepsilon \forall k > N(\varepsilon), i = \overline{1, n}$ . Prin urmare  $a_{ik} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a_i, i = \overline{1, n}$ .

Dacă  $a_{ik} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a_i, i = \overline{1, n}$  atunci  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_i = N_i(\varepsilon)$  a.î.  $|a_{ik} - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}, \forall k > N_i$ . Rezultă de aici că pentru orice  $k > \max\{N_1, \dots, N_n\}$  avem  $\|a_k - a\| < \varepsilon$ . Adică  $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$ .  $\square$

**Propoziția 49.5.** (Weierstrass-Bolzano) Dacă șirul de puncte  $(a_k)$  din  $\mathbb{R}^n$ ;  $(a_k) \in \mathbb{R}^n$ ; este mărginit atunci conține un subșir convergent.

*Demonstrație.* Dacă șirul  $(a_k)$  este mărginit atunci șirurile de coordonate  $(a_{ik})$  sunt mărginite și se aplică Weierstrass-Bolzano pentru șiruri de numere reale.  $\square$

**Criteriul de convergență Cauchy.** Șirul de puncte  $(a_k)$  din  $\mathbb{R}^n$  este convergent dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$  a.î.  $\forall p, q > N \Rightarrow \|a_p - a_q\| < \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Se aplică criteriul lui Cauchy pentru șirurile de coordonate  $(a_{ik})$ .  $\square$

**Definiția 49.8.** Un punct  $x \in \mathbb{R}^n$  este punct interior al mulțimii  $A$  dacă există o sferă deschisă  $S_r(x)$  cu proprietatea  $S_r(x) \subset A$ .

Un punct  $y$  din sfera deschisă  $S_r(x)$  este punct interior al mulțimii  $S_r(x)$ .

**Definiția 49.9.** Interiorul unei mulțimi  $A \subset \mathbb{R}^n$  este mulțimea formată cu toate punctele interioare ale lui  $A$ . Tradițional interiorul mulțimii  $A$  se notează cu  $\overset{\circ}{A}$  sau cu  $\text{Int}(A)$ .

Dacă mulțimea  $A$  este o sferă deschisă  $S_r(a)$ , atunci  $\overset{\circ}{A} = A$ .

**Definiția 49.10.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  este deschisă dacă  $\overset{\circ}{A} = A$ .

O sferă deschisă  $S_r(x)$  este o mulțime deschisă.

O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  este deschisă dacă și numai dacă orice element al mulțimii  $A$  îi aparține cu o întreagă vecinătate.

Reuniunea unei familii de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Mulțimile  $\mathbb{R}^n$  și  $\emptyset$  sunt deschise.

**Definiția 49.11.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  este închisă dacă mulțimea  $C_{\mathbb{R}^n} A$  este deschisă.

Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Reuniunea unui număr finit de mulțimi închise este mulțime închisă.

Mulțimile  $\mathbb{R}^n$  și  $\emptyset$  sunt închise.

Sfera închisă de rază  $r, \overline{S}_r(a)$ , centrată în  $a \in \mathbb{R}^n$  este definită prin:

$$\overline{S}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

**Definiția 49.12.** Un punct  $a \in \mathbb{R}^n$  este punct limită (sau punct de acumulare) al mulțimii  $A \subset \mathbb{R}^n$  dacă orice vecinătate redusă  $V^0 = V - \{a\}$  a lui  $a$  intersectează mulțimea  $A$ .

**Definiția 49.13.** Închiderea  $\bar{A}$  a mulțimii  $A \subset \mathbb{R}^n$  este intersecția tuturor mulțimilor închise care conțin mulțimea  $A$ .

Mulțimea punctelor din  $\bar{A}$  care nu sunt în interiorul mulțimii  $A$  este frontiera mulțimii  $A$  și se notează tradițional cu  $\partial A$  sau *Front* ( $A$ );  $\partial A = \bar{A} - A$

Operația de închidere a mulțimilor are următoarele proprietăți::

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ;
- $\bar{A} \supset A$ ;
- $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ ;
- $\bar{A} = A \iff A$  este închisă;
- $x \in \bar{A} \iff \forall V_x, V_x \cap A \neq \emptyset$ .

**Definiția 49.14.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este mărginită dacă există  $r > 0$  astfel încât  $A \subset S_r(0)$ .

Altfel spus:  $\|a\| < r, \forall a \in A$

**Definiția 49.15.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este compactă dacă este mărginită și închisă.

O sferă închisă  $\bar{S}_a(r)$  este compactă.

**Exemplu 49.3.** Mulțimea  $D$  definită prin:

$$D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1 \text{ și } x \geq 0 \text{ și } y \geq 0\}$$

este compactă.

*Soluție:* În adevăr, mulțimea  $D$  este mărginită pentru că este inclusă în sfera  $S_2(0) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$ .

Pe de altă parte, dacă  $a \in C_{\mathbb{R}^2}D$ , atunci  $a$  se află la o distanță  $r > 0$  de cel puțin una din dreptele  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Rezultă că sfera deschisă  $S_r(a)$  este inclusă în una din regiunile  $x + y > 1$ ,  $x < 0$  sau  $y < 0$ . Deci  $S_r(a) \subset C_{\mathbb{R}^2}D$ , și prin urmare mulțimea  $C_{\mathbb{R}^2}D$  este deschisă. Rezultă astfel că mulțimea  $D$  este închisă.

**Remarca 49.1.** Dacă mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este compactă, atunci orice șir  $(x_k)$  de elemente din  $A$  ( $x_k \in A$ ) conține un subșir  $(x_{k_l})$  care converge la un punct  $x_0 \in A$ .

**Definiția 49.16.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  este conexă dacă nu există două mulțimi deschise  $G_1, G_2$  care să aibe următoarele proprietăți:

$$A \subset G_1 \cup G_2, A \cap G_1 \neq \emptyset, A \cap G_2 \neq \emptyset, \text{ și } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

## 50 Limita într-un punct a unei funcții de $n$ variabile.

Fie  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  o funcție reală de  $n$  variabile și  $a \in \mathbb{R}^n$  un punct de acumulare pentru mulțimea  $A$  (orice vecinătate  $V$  a punctului  $a$  conține cel puțin punctul  $x'$  cu următoarele proprietăți:  $x' \neq a$  și  $x' \in V \cap A$ ).

**Definiția 50.1.** Funcția  $f$  are limita  $L \in \mathbb{R}^1$  în punctul  $a$  dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  a.î.  $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Faptul că funcția  $f$  are limita  $L$  în  $a$  se notează tradițional în felul următor:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{sau} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$$

Ca și în cazul funcțiilor reale de o singură variabilă verificarea faptului că funcția  $f$  are limita  $L$  în  $a$ , pe baza definiției 50.1 este anevoioasă. De aceea se folosesc de obicei reguli referitoare la sumă, produs, cât etc care se obțin pe o cale asemănătoare cu cea de la funcții de o singură variabilă. Utilizarea acestor reguli este ilustrată în exemplul următor:

**Exemplu 50.1.** Să se determine  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$  unde  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; (x, y) \neq (0, 0)$ .

**Soluție:**  $x \rightarrow 2$  și  $y \rightarrow 1 \Rightarrow x^2 - y^2 \rightarrow 3$  și  $x^2 + y^2 \rightarrow 5 \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{3}{5}$ .

**Definiția 50.2.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  are limita  $L \in \mathbb{R}^m$  în punctul de acumulare  $a$  al lui  $A$  dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  a.î.  $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ . Faptul că funcția  $f$  are limita  $L$  în  $a$  se notează tradițional în felul următor:

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{sau} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$$

Dacă  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  și  $L = (L_1, \dots, L_m)$  atunci are loc:

**Propoziția 50.1.**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i \quad i = \overline{1, m}.$$

*Demonstrație.* imediată □

**Exemplu 50.2.** Să se determine limita  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$  unde  $f(x, y) = \left( \frac{xy}{x^2 + y^2}, x - y \right); (x, y) \neq (0, 0)$ .

**Soluție:**  $\frac{xy}{x^2 + y^2} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}]{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{3}{5}; \quad x - y \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}]{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} 1 \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( \frac{3}{5}, 1 \right)$ .



### Criteriul lui Heine pentru limite:

Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  are limită în punctul de acumulare  $x = a$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_k)$  având proprietățile:  $x_k \in A$ ,  $x_k \neq a$ , și  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$  șirul  $(f(x_k))$  este convergent.

*Demonstrație.* Aceeași ca pentru funcții de o singură variabilă.  $\square$

Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  are limită în punctul de acumulare  $x = a$  dacă și numai dacă pentru orice șir  $(x_k)$  având proprietățile:  $x_k \in A$ ,  $x_k \neq a$ , și  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$  pentru  $k \rightarrow \infty$  șirul  $(f(x_k))$  este convergent.

*Demonstrație.* Se aplică același criteriu valabil pentru componentele  $f_1, \dots, f_m$  ale lui  $f$ .  $\square$

### Criteriul Cauchy-Bolzano pentru limite:

Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  are limită pentru  $x \rightarrow a$  dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  a.î.  $0 < \|x' - a\| < \delta$  și  $0 < \|x'' - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .

*Demonstrație.* Pentru  $m = 1$  criteriul se demonstrează la fel ca pentru funcții de o singură variabilă.

Pentru  $m > 1$  criteriul se demonstrează aplicând același criteriu pentru componentele  $f_1, \dots, f_m$  ale lui  $f$ .  $\square$

## 51 Continuitatea funcțiilor de $n$ variabile.

**Definiția 51.1.** Funcția reală de  $n$  variabile reale  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă în  $a \in A$  dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

În această definiție se cere ca:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  să existe;  $f(a)$  să fie definită și cele două valori să coincidă.

În termeni de  $\varepsilon, \delta$  această definiție este echivalentă cu următoarea:

**Definiția 51.2.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă în  $a \in A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  cu următoarea proprietate:

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Definiția 51.3.** Funcția vectorială de  $n$  variabile reale  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă în  $a \in A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  cu următoarea proprietate:

$$x \in A \text{ și } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

**Teorema 51.1.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  este continuă în  $a \in A$  dacă și numai dacă funcțiile  $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  sunt continue în  $a$ .

**Exemplu 51.1.** Folosind condiția de continuitate formulată în termeni de  $\varepsilon, \delta$  arătați că funcțiile următoare sunt continue în punctele menționate:

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  în  $x = y = 0$ ;
- b)  $f(x, y) = (x^2 - y^2, x \cdot y)$  în  $x = 1, y = 1$ ;
- c)  $f(x, y, z) = x + y + z$  în  $x = y = z = 0$ ;
- d)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$  în  $x = y = z = 1$ .

Regulile de continuitate formulate pentru funcții reale de o singură variabilă pot fi transpuse cu ușurință la funcții de  $n$  variabile. Aceste reguli sunt formulate în următoarele teoreme.

**Teorema 51.2.** Dacă funcțiile  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  sunt continue în  $a \in A$  atunci:

- i) funcția  $f + g$  este continuă în  $a$ ;
- ii) funcția  $f \cdot g$  este continuă în  $a$ ;
- iii) dacă  $f(x) \neq 0 \forall x \in A$  atunci funcția  $\frac{1}{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă în  $a$ .

**Teorema 51.3.** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$  este continuă în  $a \in A$  și  $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  este continuă în  $b = f(a) \in \mathbb{R}^p$  atunci funcția compusă  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$  este continuă în  $a \in A$ .

**Exemplu 51.2.** Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin  $f(x, y) = x^2 + y^2$  este continuă în orice punct  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplu 51.3.** Examinați continuitatea în  $(0, 0)$  a funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

**Soluție:** Deoarece

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2}$$

funcția  $f$  nu are limită în  $(0, 0)$ . Rezultă că funcția  $f$  nu este continuă în  $(0, 0)$ .

**Exemplu 51.4.** Analizați continuitatea în  $(0, 0)$  a funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

**Soluție:** Pentru orice  $m \in \mathbb{R}^1$  avem

$$f(x, mx) = \frac{m^3 x^2}{1 + m^6 x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Cu toate acestea funcția  $f$  nu este continuă în  $(0, 0)$  pentru că

$$f(x, \sqrt[3]{x}) = \frac{x^2}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

De fapt,  $f$  nu are limită în  $(0, 0)$ .

**Teorema 51.4. [Criteriul de continuitate a lui Heine]** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă în  $a \in A$  dacă pentru orice șir de puncte  $(x_k)$  cu proprietățile  $x_k \in A$ ,  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ , șirul de puncte  $(f(x_k))$  converge la  $f(a)$ .*

**Teorema 51.5. [Criteriul de continuitate Cauchy-Bolzano]** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă în  $a \in A$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  cu următoarea proprietate:*

$$x', x'' \in A, \quad \|x' - a\| < \delta \text{ și } \|x'' - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

**Observația 51.1.** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă în  $a \in A$  atunci funcția  $\|f\| : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^1$  definită prin  $\|f\|(x) = \|f(x)\|$  este continuă în  $a$ .

**Observația 51.2.** Generalizarea teoremelor stabilite pentru funcții continue de o singură variabilă apelează la considerații topologice  $n$  dimensionale.

## 52 Proprietăți remarcabile ale funcțiilor continue de $n$ variabile.

**Teorema 52.1. [mărginirea]** *Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă pe mulțimea compactă  $A$ , atunci:*

- a) mulțimea  $f(A)$  este mărginită.
- b) există  $a \in A$  astfel încât  $\|f(a)\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ .

*Demonstrație.* a) Să presupunem prin absurd că mulțimea  $f(A)$  este nemărginită. În această ipoteză pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  există  $x_k \in A$  astfel încât  $\|f(x_k)\| > k$ . Șirul  $(x_k)$  este mărginit și prin urmare există un subșir  $(x_{k_l})$  al șirului  $(x_k)$  convergent la un punct  $x_0 \in A$ ,  $x_{k_l} \xrightarrow{k_l \rightarrow \infty} x_0$ . Rezultă de aici că  $f(x_{k_l}) \xrightarrow{k_l \rightarrow \infty} f(x_0)$ .

Prin urmare există  $N$  astfel încât pentru  $k_l > N$  avem:  $\|f(x_{k_l})\| \leq \|f(x_0)\| + 1$ . Absurd.

b) Considerăm  $R = \sup \|f(A)\|$  și observăm că pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  există  $x_k \in A$  astfel încât

$$R - \frac{1}{k} < \|f(x_k)\| \leq R.$$

Pentru șirul  $(x_k)$  există un subșir  $x_{k_l}$  convergent la  $x_0 \in A$ :  $x_{k_l} \xrightarrow[k_l \rightarrow \infty]{} x_0$ . Rezultă  $f(x_{k_l}) \xrightarrow[k_l \rightarrow \infty]{} f(x_0)$  și deci  $\|f(x_{k_l})\| \xrightarrow[k_l \rightarrow \infty]{} \|f(x_0)\|$ . Din inegalitatea

$$R - \frac{1}{k_l} < \|f(x_{k_l})\| \leq R.$$

rezultă că  $\|f(x_0)\| = R$ . □

**Consecința 52.1.** *Dacă  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este funcție continuă și  $A$  este mulțime compactă, atunci:*

a) *există  $m, M \in \mathbb{R}^1$  astfel încât*

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in A\} \quad M = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$$

b) *există  $c$  și  $d$  în  $A$  astfel încât  $f(c) = m$  și  $f(d) = M$ .*

**Definiția 52.1.** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este uniform continuă pe  $A$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru  $x', x'' \in A$  avem:*

$$\|x' - x''\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

**Teorema 52.2.** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este uniform continuă pe  $A$  dacă și numai dacă componentele scalare  $f_1, f_2, \dots, f_m$  ale lui  $f$  sunt uniform continue.*

**Teorema 52.3.** *Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este uniform continuă pe  $A$  și  $A$  este o mulțime compactă, atunci  $f$  este uniform continuă pe  $A$ .*

**Teorema 52.4.** *Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A' \subset \mathbb{R}^m$  și  $f : A \rightarrow A'$  surjectivă. Funcția  $f$  este continuă pe  $A$  dacă și numai dacă pentru orice mulțime deschisă  $G' \subset \mathbb{R}^m$  există o mulțime deschisă  $G \subset \mathbb{R}^n$  cu proprietatea:*

$$G \cap A = f^{-1}(G' \cap A').$$

**Consecința 52.2.** *Funcția  $f$  este continuă pe  $A$  dacă și numai dacă pentru orice mulțime închisă  $F' \subset \mathbb{R}^m$ , există o mulțime închisă  $F \subset \mathbb{R}^n$  astfel încât:*

$$F \cap A = f^{-1}(F' \cap A').$$

**Teorema 52.5.** *Dacă mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este conexă și funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă, atunci mulțimea  $f(A)$  este conexă.*

**Consecința 52.3.** *Dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime compactă și conexă și funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este continuă, atunci  $f(A)$  este un interval închis.*

## 53 Diferențiabilitatea funcțiilor de $n$ variabile.

În această secțiune vom defini ce înțelegem prin aceea că o funcție de  $n$  variabile este diferențiabilă. Vom începe cu analiza conceptului de derivabilitate (diferențiabilitate) parțială.

**Definiția 53.1.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  are derivata parțială în raport cu variabila  $x_i$  într-un punct  $a \in \hat{A}$  dacă există limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

și este finită.

Valoarea acestei limite se notează tradițional cu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  și se numește derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu variabila  $x_i$ , în punctul  $a$ .

**Definiția 53.2.** Dacă funcția  $f$  are derivată parțială în raport cu variabila  $x_i$  într-o vecinătate  $V$  a punctului  $a$  atunci funcția  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  definită pentru  $x \in V$  se numește derivata parțială a funcției  $f$  în raport cu  $x_i$ .

**Observația 53.1.** Pentru a calcula derivata parțială în raport cu  $x_i$  se derivează în mod obișnuit în raport cu  $x_i$  considerând celelalte variabile constante. În acest scop se folosesc regulile obișnuite de derivare a sumei, produsului și a câtului de la funcții de o singură variabilă.

**Exemplu 53.1.** În cazul funcției  $f(x, y, z) = x^2y + x \cdot \sin y + \frac{y}{z}$ ;  $z \neq 0$  derivatele parțiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y + \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$$

În cazul funcției  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  derivatele parțiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + a_{jk}) x_j.$$

**Definiția 53.3.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  are derivată parțială în raport cu variabila  $x_i$  într-un punct  $a \in \hat{A}$  dacă componentele scalare  $f_1, \dots, f_m$  ale funcției  $f$  au derivate parțiale în raport cu  $x_i$  în  $a$ . Vectorul  $\left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right)$  se numește derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x_i$  în  $a$  și se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right).$$

Dacă funcția  $f = (f_1, \dots, f_m)$  are derivată parțială în raport cu variabila  $x_i$  pe o vecinătate  $V$  a lui  $a$  atunci funcția  $V \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  se numește derivata parțială a lui  $f$  în raport cu  $x_i$ :

$$V \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \right).$$

**Exemplu 53.2.** În cazul funcției  $f(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$ , derivatele parțiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, y + z, yz); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1, x + z, xz); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = (1, x + y, xy).$$

**Definiția 53.4.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este derivabilă după direcția  $u \in \mathbb{R}^n$  ( $\|u\| = 1$ ) într-un punct  $a \in \overset{\circ}{A}$  dacă există limita:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

și este finită.

Valoarea acestei limite se notează tradițional cu  $\nabla_u f(a)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$  și se numește derivata după  $u$  a lui  $f$  în  $a$ .

**Observația 53.2.** Fie  $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Derivata funcției  $f$  după direcția  $e_i$  în  $a$  este:

$$\nabla_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i = \overline{1, n}.$$

Prin urmare derivatele parțiale sunt cazuri particulare de derivate după direcție.

**Exemplu 53.3.** Dacă  $u = (u_x, u_y)$  și  $f(x, y) = x \cdot y$  atunci

$$\nabla_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_y = y \cdot u_x + x \cdot u_y.$$

**Definiția 53.5.** Funcția  $f = (f_1, \dots, f_m)$  este derivabilă după direcția  $u \in \mathbb{R}^n$  ( $\|u\| = 1$ ) într-un punct  $a \in \overset{\circ}{A}$  dacă există limita:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

Această limită se numește derivata după  $u$  a lui  $f$  în  $a$  și se notează cu  $\nabla_u f(a)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ .

Se vede ușor că are loc egalitatea:

$$\nabla_u f(a) = (\nabla_u f_1(a), \dots, \nabla_u f_m(a)).$$

**Observația 53.3.** Derivata după direcția  $u$ :  $\nabla_u f(a)$  există dacă și numai dacă derivatele componentelor scalare  $f_1, \dots, f_m$  ale lui  $f$  după direcția  $u$ :  $\nabla_u f_1(a), \dots, \nabla_u f_m(a)$  există.

**Exemplu 53.4.** Derivata după direcția  $u = (u_x, u_y, u_z)$  a funcției  $f(x, y, z) = (xy + xz + yz, xyz)$  în  $(x, y, z)$  este:

$$\nabla_u f(x, y, z) = ((y + z)u_x + (x + z)u_y + (x + y)u_z, yz \cdot u_x + xz \cdot u_y + xy \cdot u_z).$$

**Teorema 53.1.** Dacă derivatele parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  ale funcției  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  există pe o vecinătate  $V$  a punctului  $a \in \overset{\circ}{A}$  și sunt funcții continue în punctul  $a$  ( $V \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  funcții continue) atunci are loc următoarea egalitate:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \left[ f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right] = 0.$$

*Demonstrație.* Se consideră punctele  $v_j = (a_1, a_2, \dots, a_j + h_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \dots, a_n + h_n)$  pentru  $j = \overline{1, n}$  precum și  $v_{n+1} = a$  și se reprezintă diferența  $f(a+h) - f(a)$  sub forma:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{j=1}^n [f(v_j) - f(v_{j+1})] = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(v_{j+1} + \theta_j \cdot h_j \cdot e_j) \cdot h_j \end{aligned}$$

cu  $\theta_j \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, n}$  și  $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ .

De aici rezultă:

$$\frac{1}{\|h\|} \left[ f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right] = \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right] \cdot h_i.$$

Observăm acum că  $\|v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i - a\| \leq \|h\|$ ,  $i = \overline{1, n}$  și de aici rezultă că dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  cu proprietatea

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(v_{i+1} + \theta_i \cdot h_i \cdot e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = \overline{1, n}$$

atunci

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{1}{\|h\|} \left| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right| < \varepsilon.$$

□

**Comentariu:** În condițiile teoremei 53.1 funcția  $f$  este derivabilă după orice direcție  $u = (u_1, \dots, u_n)$  în  $a$  și are loc egalitatea  $\nabla_u f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot u_i$ , iar pe o vecinătate a punctului "a" funcția  $f$  se poate aproxima cu un polinom de  $n$  variabile de gradul întâi:

$$f(a+h) \approx f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i.$$

**Definiția 53.6.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este diferențiabilă în  $a \in \overset{\circ}{A}$  dacă are derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă  $x_i$  în punctul  $a$  și

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \left[ f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right] = 0.$$

Funcția  $d_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  definită prin

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \quad h \in \mathbb{R}^n$$

se numește *diferențiala Fréchet (derivata Fréchet)* a lui  $f$  în  $a$ .

**Observația 53.4.** Diferențiala Fréchet a lui  $f$  în " $a$ " este un polinom omogen de gradul întâi în variabilele  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Pentru orice  $h \in \mathbb{R}^n$  cu  $\|h\| = 1$  are loc egalitatea  $d_a(h) = \nabla_h f(a)$ .

**Exemplu 53.5.** Următoarele funcții sunt diferențiabile Fréchet și diferențialele lor Fréchet sunt:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad d_{(x,y)} f(h_x, h_y) = 2x \cdot h_x + 2y \cdot h_y$

b)  $f(x, y) = x \cdot y, \quad d_{(x,y)} f(h_x, h_y) = y \cdot h_x + x \cdot h_y$

c)  $f(x, y, z) = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z, \quad d_{(x,y,z)} f(h_x, h_y, h_z) = (y+z) \cdot h_x + (x+z) \cdot h_y + (x+y) \cdot h_z.$

**Observația 53.5.** Dacă funcția  $f : \mathbb{C} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  este diferențiabilă în  $a \in \mathring{A}$  atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

**Definiția 53.7.** Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este diferențiabilă în  $a \in \mathring{A}$  dacă fiecare componentă scalară  $f_1, \dots, f_m : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a lui  $f$  este diferențiabilă în  $a$ .

Funcția  $d_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definită cu egalitatea:

$$d_a f(h) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) \cdot e_j \quad h \in \mathbb{R}^n$$

este diferențiala (derivata) Fréchet a lui  $f$  în  $a$ . Unde  $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ .

Diferențiala Fréchet a lui  $f$  în " $a$ " este un sistem ordonat de  $m$  polinoame omogene de gradul întâi în variabilele  $h_1, h_2, \dots, h_n$  care sunt diferențialele Fréchet ale componențelor scalare a lui  $f$ .

**Exemplu 53.6.** Funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită cu formula

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

este diferențiabilă Fréchet în orice punct  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  și are loc egalitatea

$$d_{x_1, x_2, x_3} f(h_1, h_2, h_3) = (x_2 x_3 h_1 + x_1 x_3 h_2 + x_1 x_2 h_3, 2x_1 h_1 + 2x_2 h_2 + 2x_3 h_3), \quad \forall (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$$

**Definiția 53.8.** Matricea aplicației liniare  $d_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se numește *matricea Jacobi* a lui  $f$  în  $a$ . Aceasta este o matrice  $m \times n$  și elementele sale sunt date de:

$$J_a(f) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{m \times n}$$

$$d_a f(h) = J_a(f) \cdot h.$$



**Exemplu 53.7.** Funcția  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definită cu formula:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \cdot e_i$$

este diferențiabilă Fréchet în orice  $x \in \mathbb{R}^n$  și au loc următoarele egalități:

$$d_x f(h) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \right) \cdot e_i$$

$$J_a(f) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

**Observația 53.6.** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este diferențiabilă în  $a \in \mathring{A}$  atunci  $f$  este continuă în  $a$ .

**Teorema 53.2.** Dacă  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$  este diferențiabilă în  $a \in \mathring{A}$  și  $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  este diferențiabilă în  $b = f(a) \in \mathring{B}$  atunci  $h = g \circ f$  este diferențiabilă în  $a$  și are loc egalitatea:

$$d_a h = d_b g \circ d_a f.$$

*Demonstrație.*  $f$  este diferențiabilă în  $a \in \mathring{A} \Rightarrow$

$$f(x) - f(a) = d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x - a\| \quad \text{cu} \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$g$  este diferențiabilă în  $b = f(a) \Rightarrow$

$$g(y) - g(b) = d_b g(y - b) + \varepsilon_2(y) \cdot \|y - b\| \quad \text{cu} \quad \varepsilon_2(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} 0$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) &= g(f(x)) - g(f(a)) = d_b g(f(x) - f(a)) + \varepsilon_2(f(x)) \cdot \|f(x) - f(a)\| \\ &= d_b g(d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x - a\|) + \varepsilon_2(f(x)) \cdot \|d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x - a\|\| \\ &= d_b g \circ d_a f(x - a) + \|x - a\| d_b g(\varepsilon_1(x)) + \|d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x) \|x - a\|\| \cdot \varepsilon_2(f(x)). \end{aligned}$$

Prin urmare avem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x) &= \frac{h(x) - h(a) - d_b g \circ d_a f(x - a)}{\|x - a\|} \\ &= d_b g(\varepsilon_1(x)) + \frac{\|d_a f(x - a) + \varepsilon_1(x) \cdot \|x - a\|\|}{\|x - a\|} \cdot \varepsilon_2(f(x)) \end{aligned}$$

și astfel:

$$\|\varepsilon_3(x)\| \leq \|d_b g\| \cdot \|\varepsilon_1(x)\| + (\|d_a f\| + \|\varepsilon_1(x)\|) \cdot \|\varepsilon_2(f(x))\|$$

De aici rezultă egalitatea:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_3(x) = 0.$$

□

**Observația 53.7.** Matricea Jacobi a funcției  $h$  în  $a$  este produsul matricei Jacobi a lui  $g$  în  $b$  și a lui  $f$  în  $a$ :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, n}.$$

**Exemplu 53.8.** Se consideră  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită cu formula  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2)$  și  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită cu formula  $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Să se determine  $h(\rho, \theta) = (f \circ g)(\rho, \theta)$  și  $\frac{\partial h}{\partial \rho}, \frac{\partial h}{\partial \theta}$ .

**Consecința 53.1.** Dacă bijecția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$  de la mulțimea deschisă  $A$  la mulțimea deschisă  $B$  este diferențiabilă în  $a \in A$  și  $f^{-1} : B \rightarrow A$  este diferențiabilă în  $b = f(a)$  atunci  $d_a f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un izomorfism și

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}.$$

Această afirmație rezultă din egalitatea  $f^{-1} \circ f = I_A$  folosind regula de diferențiere a funcțiilor compuse.

## 54 Proprietăți fundamentale ale funcțiilor diferențiabile.

**Teorema de medie (Lagrange) (creșterilor finite)** Fie  $x, h \in \mathbb{R}^n$  și mulțimea  $[x, x+h]$  definită prin:

$$[x, x+h] = \{x + th \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

Această mulțime se numește segment închis care unește  $x$  cu  $x+h$ .

Considerăm o funcție  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $A = \overset{\circ}{A}$  și  $x, x+h \in A$ .

**Teorema 54.1.** Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- a)  $[x, x+h] \subset A$
- b)  $f$  este diferențiabilă în toate punctele segmentului  $[x, x+h]$

atunci există  $t_0 \in (0, 1)$  cu următoarea proprietate:

$$f(x+h) - f(x) = d_{x+t_0 h} f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+t_0 h) \cdot h_i$$

*Demonstrație.* Se consideră funcția  $\varphi(t) = f(x+th)$  pentru  $t \in [0, 1]$ . Funcția  $\varphi$  este derivabilă în orice punct  $t \in (0, 1)$  și  $\varphi'(t) = d_{x+th} f(h)$ . Deoarece  $f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$  aplicăm teorema Lagrange (creșterilor finite) funcției  $\varphi$  pe segmentul  $[0, 1]$  și obținem că există  $t_0 \in (0, 1)$  cu proprietatea:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) = d_{x+t_0 h} f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+t_0 h) \cdot h_i$$

□

**Observația 54.1.** Dacă funcția de  $n$  variabile este vectorială;  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$  atunci teorema precedentă nu mai este adevărată. Astfel de exemplu pentru funcția  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ( $n = 1, m = 2$ ) teorema nu este adevărată pentru că  $f(2\pi) - f(0) \neq f'(t_0) \cdot 2\pi$  pentru orice  $t_0 \in [0, 2\pi]$ .

În cazul funcțiilor vectoriale de  $n$  variabile,  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  teorema lui Lagrange (a creșterilor finite) este următoarea:

**Teorema 54.2.** *Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:*

- a)  $[x, x + h] \subset A$
- b)  $f$  este diferențiabilă în toate punctele segmentului  $[x, x + h]$
- c)  $\|d_{x+th}f\| \leq M, \quad \forall t \in [0, 1]$

atunci  $\|f(x + h) - f(x)\| \leq M \cdot \|h\|$ .

*Demonstrație.* Se consideră din nou funcția  $\varphi(t) = f(x + th)$ ,  $t \in [0, 1]$  și  $\psi(t) = \sum_{i=1}^n (\varphi_i(1) - \varphi_i(0)) \cdot \varphi_i(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Pentru funcția  $\psi$  există  $t_0 \in [0, 1]$  cu proprietatea:  $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_0)$ . De aici rezultă:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)]^2 &= \sum_{i=1}^m [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)] \cdot \varphi'_i(t_0) \leq \\ &\leq \left[ \sum_{i=1}^m [\varphi_i(1) - \varphi_i(0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^m [\varphi'_i(t_0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \|h\| \cdot \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \end{aligned}$$

Rezultă în acest fel inegalitatea:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M \cdot \|h\|$$

□

### Extreme locale (Teorema Fermat; punct staționar)

**Definiția 54.1.** *Funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  are un maxim local în  $a \in A$  dacă există o vecinătate deschisă  $V_a \subset A$  a punctului  $a$  cu proprietatea:  $f(x) \leq f(a)$ ,  $\forall x \in V_a$ . Dacă  $f(x) \geq f(a)$ ,  $\forall x \in V_a$ , atunci  $f$  are în  $a$  un minim local.*

**Teorema 54.3.** *Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă într-un punct  $a \in A$  și punctul  $a$  este un extrem local pentru  $f$  atunci  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$  pentru  $i = \overline{1, n}$ .*

*Demonstrație.* Pentru  $h \in \mathbb{R}^n$  și  $t \in \mathbb{R}^1$  suficient de aproape de 0 considerăm funcția  $\varphi(t) = f(a + th)$ . Funcția  $f$  are în  $t = 0$  un maxim sau un minim local și este funcție derivabilă. Rezultă că  $\varphi'(0) = 0$  adică

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Rezultă de aici egalitățile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

□

Condițiile  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = \overline{1, n}$  nu sunt suficiente pentru ca punctul  $a$  să fie punct de maxim sau minim local pentru  $f$ .

**Exemplu 54.1.** Dacă  $f(x, y) = xy$  atunci  $\frac{\partial f}{\partial x} = y$  și  $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ . De aici rezultă că punctul  $0 = (0, 0)$  este singurul punct care ar putea fi punct de extrem local pentru  $f$ . Pe de altă parte pentru orice  $\delta > 0$  avem  $f(\delta, \delta) = \delta^2$  și  $f(-\delta, \delta) = -\delta^2 < 0$ . Prin urmare în orice vecinătate a lui  $0$ ,  $f$  are valori pozitive și negative. Rezultă de aici că  $(0, 0)$  nu este nici maxim nici minim local pentru  $f$ .

**Definiția 54.2.** Un punct  $c$  este staționar pentru  $f$  dacă  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$  pentru  $i = \overline{1, n}$ .

Ca și în cazul funcțiilor de o singură variabilă punctele staționare se clasifică cu ajutorul aproximării Taylor.

**Definiția 54.3.** Dacă derivatele parțiale  $A \ni x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$  ale funcției  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sunt continue atunci funcția  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $A$ .

**Teorema 54.4** (de inversare locală). Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe mulțimea deschisă  $A$  și matricea Jacobi  $J_a(f) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{n \times n}$  este nesingulară (adică  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \neq 0$ ), atunci există o vecinătate deschisă  $U_a$  a punctului  $a$  și o vecinătate deschisă  $V_b$  a punctului  $b = f(a)$  cu proprietatea:  $f : U_a \rightarrow V_b$  este bijectivă. Mai mult, funcția inversă  $f^{-1} : V_b \rightarrow U_a$  este diferențibilă în  $b = f(a)$  și are loc egalitatea:

$$d_b f^{-1} = (d_a f)^{-1}.$$

*Demonstrație.* demonstrația este tehnică și va fi omisă. □

**Exemplu 54.2.** Funcția  $f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  definită pentru  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \neq 0$  este local inversabilă.

Funcția  $f(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$  definită pentru  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3, \rho \neq 0$  este local inversabilă.

**Funcții implicite:** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $B \subset \mathbb{R}^m$  două mulțimi deschise și  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție. Notăm cu  $f_1, f_2, \dots, f_m$  componentele scalare ale funcției  $f : f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  și considerăm sistemul de ecuații:

$$(*) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

**Definiția 54.4.** O funcție  $\varphi : A' \subset A \rightarrow B$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  care verifică egalitățile:

$$(**) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \end{cases}$$

pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A'$  se numește funcție definită implicit de sistemul de ecuații (\*).

Sistemul de ecuații (\*) poate fi scris sub forma

$$f(x, y) = 0$$

unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

**Teorema 54.5** (de existență și unicitate a funcției implicite). Dacă funcția  $f$  are următoarele proprietăți:

- 1)  $\exists a \in A$  și  $b \in B$  a.î.  $f(a, b) = 0$
- 2)  $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $A \times B$
- 3) diferențiala Fréchet  $d_b f_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  este izomorfism (unde  $f_a : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  este definită prin  $f_a(y) = f(a, y)$ ), atunci există o vecinătate deschisă  $U_a$  a lui "a", o vecinătate deschisă  $V_b$  a lui "b" și o funcție  $\varphi : U_a \rightarrow V_b$  care are următoarele proprietăți:

- i)  $\varphi(a) = b$
- ii)  $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U_a$
- iii)  $\varphi$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe  $U_a$  și diferențiala lui  $\varphi$  este dată de:

$$d_x \varphi = -(d_y f_x)^{-1} \circ (d_x f_y)$$

unde:  $f_x(y) = f(x, y)$ ,  $f_y(x) = f(x, y)$  și  $y = \varphi(x)$ .

Trebuie subliniat faptul că funcția  $\varphi$  definită implicit, în general, nu poate fi exprimată în mod explicit.

### Aplicație 54.1

- a) Găsiți funcția  $y = \varphi(x)$  definită implicit de ecuația  $x^2 + y^2 = 1$ .
- b) Arătați că ecuația  $y^5 + y - x = 0$  definește implicit o funcție  $y = \varphi(x)$ .

## 55 Diferențială de ordin superior.

Fie funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție care are derivate parțiale pe mulțimea deschisă  $A$ , în raport cu fiecare variabilă  $x_j, j = \overline{1, n}$ .

**Definiția 55.1.** *Funcția  $f$  are derivate parțiale de ordinul al doilea în  $a$  în raport cu fiecare variabilă  $x_k$  dacă fiecare derivată parțială  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$  este derivabilă parțial în  $a \in A$  în raport cu fiecare variabilă  $x_k$ ,*

*Derivata parțială în raport cu variabila  $x_k$  a derivatei parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  se notează cu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$ , i.e.  $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$  și se numește derivata parțială de ordinul al doilea al funcției  $f$ .*

Există  $n^2$  derivate parțiale de ordinul al doilea.

**Exemplu 55.1.** Considerăm funcția  $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^x \cos y$ , pentru care există derivatele parțiale de ordinul întâi în fiecare punct  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  și sunt date de:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + e^x \cos y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - e^x \sin y$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$  au la rândul lor derivate parțiale și în fiecare punct  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + e^x \cos y & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - e^x \cos y \end{aligned}$$

Aceste derivate parțiale sunt derivatele parțiale de ordinul al doilea.

**Definiția 55.2.** *În general, funcția  $f$  are derivate parțiale de ordin  $k$  în  $a \in A$  în raport cu toate variabilele, dacă  $f$  are derivate parțiale de ordin  $(k - 1)$  în raport cu toate variabilele pe o vecinătate deschisă a punctului  $a$  și fiecare derivată parțială de ordinul  $(k - 1)$ :  $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}$  are derivate parțiale în  $a$  prin raport cu toate variabilele  $x_{j_k}$ .*

*Derivata parțială  $\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}})(a)$  va fi numită derivată parțială de ordinul  $k$  a lui  $f$  și va fi notată cu:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}})(a)$$

**Exemplu 55.2.** Să se determine derivatele parțiale de ordinul 4 ale funcției  $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^x \cos y$ .

**Definiția 55.3.** *Dacă derivatele parțiale  $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  sunt diferențiabile în punctul  $a \in A$  atunci  $f$  este diferențiabilă de două ori în punctul  $a$ .*

**Definiția 55.4.** Derivata (diferențiala) Fréchet de ordinul al doilea a funcției  $f$  în punctul  $a$  este prin definiție funcția  $d_a^2 f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definită cu formula:

$$d_a^2 f(u)(v) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) \cdot u_j \cdot v_k \right) e_i$$

$u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

$d_a^2 f$  este un sistem ordonat de  $m$  forme biliniare în variabilele  $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Teorema 55.1.** Derivata (diferențiala) Fréchet de ordinul al doilea are proprietatea:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\|u\|} \|d_{a+u} f(v) - d_a f(v) - d_a^2 f(u)(v)\| = 0, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

Polinomul  $d_{a+u} f$  se poate aproxima cu polinomul  $d_a f + d_a^2 f(u)$ .

**Teorema 55.2. [de intervertire a ordinii de derivare; Schwarz.]** Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă de două ori în  $a$ , atunci au loc următoarele egalități:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) \quad i = \overline{1, m} \quad j, k = \overline{1, n}$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Exemplu 55.3.** În cazul funcției  $f(x, y, z) = (xy + xz + yz, xyz)$  verificați egalitățile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

**Teorema 55.3. [Criteriu de diferențiabilitate de ordinul al doilea.]** Dacă derivatele parțiale de ordinul al doilea  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$  există pe o vecinătate deschisă a punctului  $a$  și dacă acestea sunt funcții continue în  $a$ , atunci  $f$  este diferențiabilă de două ori în  $a$ .

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Definiția 55.5.** Dacă derivatele parțiale de ordinul  $k - 1$ :  $x \rightarrow \frac{\partial^{k-1} f_i}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}$  sunt diferențiabile în  $a \in A$ , atunci zicem că  $f$  este diferențiabilă de  $k$  ori în  $a$  și derivata Fréchet de ordinul  $k$  a lui  $f$  în  $a$  este prin definiție funcția  $d_a^k f : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$d_a^k f(u^1)(u^2) \cdots (u^k) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}}(a) \cdot u_{j_1}^1 u_{j_2}^2 \cdots u_{j_k}^k \right) e_i$$

**Teorema 55.4.** Derivata Fréchet de ordinul  $k$  are următoarea proprietate:

$$\lim_{\|u^k\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|u^k\|} \|d_{a+u^k}^{k-1} f(u^1)(u^2) \cdots (u^{k-1}) - d_a^{k-1} f(u^1)(u^2) \cdots (u^{k-1}) - d_a^k f(u^1)(u^2) \cdots (u^k)\| = 0$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Teorema 55.5. [de permutare a ordinii de derivare]** Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă de  $k$ -ori în  $a$ , atunci au loc următoarele egalități:

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(a) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{\sigma(j_1)} \partial x_{\sigma(j_2)} \cdots \partial x_{\sigma(j_k)}}(a)$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Teorema 55.6. [Criteriu de diferențiabilitate de ordin  $k$ .]** Dacă funcția  $f$  are derivate parțiale de ordinul  $k$  într-o vecinătate a punctului  $a$  și acestea sunt funcții continue în  $a$ , atunci  $f$  este diferențiabilă de  $k$ -ori în  $a$ .

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

## 56 Teoremele lui Taylor.

**Teorema 56.1. [formula lui Taylor cu rest integral]** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  are derivate parțiale de ordinul  $m + 1$  continue pe mulțimea deschisă  $A$  ( $A = \overset{\circ}{A}$ ) și segmentul închis  $[x, x + h]$  este inclus în  $A$ , atunci:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + \frac{1}{1!} d_x f(h) + \frac{1}{2!} d_x^2 f(h)(h) + \cdots + \frac{1}{m!} d_x^m \overbrace{f(h) \cdots (h)}^m + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \cdot d_{x+th}^{m+1} \overbrace{f(h) \cdots (h)}^{m+1} dt \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Funcția  $g(t) = f(x + th)$  pentru  $t \in [0, 1]$  verifică relațiile:

$$\frac{d^k g}{dt^k} = g^{(k)}(t) = d_{x+th}^k \overbrace{f(h) \cdots (h)}^k \quad k = \overline{1, m+1}$$

Pe de altă parte ea verifică și relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [g(t) + \frac{1-t}{1!} g'(t) + \cdots + \frac{(1-t)^m}{m!} g^m(t)] &= \frac{(1-t)^m}{m!} g^{m+1}(t) \\ g(1) - [g(0) + \frac{1}{1!} g'(0) + \cdots + \frac{1}{m!} g^m(0)] &= \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \cdot g^{m+1}(t) dt \end{aligned}$$

De aici rezultă egalitatea:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + \frac{1}{1!} d_x f(h) + \frac{1}{2!} d_x^2 f(h)(h) + \cdots + \frac{1}{m!} d_x^m \overbrace{f(h) \cdots (h)}^m + \\ &+ \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \cdot d_{x+th}^{m+1} \overbrace{f(h) \cdots (h)}^{m+1} dt \end{aligned}$$

□



**Teorema 56.2.** [formula lui Taylor cu restul lui Lagrange] Dacă funcția este diferentiabilă de  $m + 1$  ori pe mulțimea deschisă  $A$ :  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  și  $\|d_x^{m+1}f\| \leq M$  pe segmentul  $[x, x + h] \subset A$  atunci are loc inegalitatea:

$$\|f(x + h) - f(x) - \frac{1}{1!}d_x f(h) - \dots - \frac{1}{m!}d_x^m f(\overbrace{h \cdots h}^m)\| \leq M \cdot \frac{\|h\|^{m+1}}{(m+1)!}$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Teorema 56.3.** [formula lui Taylor cu restul 0 ( $\|h\|^m$ ).] Dacă funcția  $f$  este diferentiabilă de  $(m - 1)$  ori pe mulțimea deschisă  $A$ , este diferentiabilă de  $m$ -ori în  $x \in A$  și segmentul  $[x, x + h]$  este inclus în  $A$ , atunci are loc inegalitatea:

$$\|f(x + h) - f(x) - \frac{1}{1!}d_x f(h) - \dots - \frac{1}{m!}d_x^m f(\overbrace{h \cdots h}^m)\| = O(\|h\|^m)$$

*Demonstrație.* Prin inducție după  $m$ . □

## 57 Teoreme de clasificare a extremelor locale.

**Teorema 57.1.** Dacă funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  are derivate parțiale continue de ordinul al doilea pe mulțimea deschisă  $A$  și  $d_a f = 0$  în punctul  $a \in A$ , atunci:

- i) dacă  $f$  are în  $a$  un minim local, atunci  $d_a^2 f(h)(h) \geq 0$
- ii) dacă  $f$  are în  $a$  un maxim local, atunci  $d_a^2 f(h)(h) \leq 0$

*Demonstrație.* Considerăm formula lui Taylor:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!}d_a f(h) + \frac{1}{2!}d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2)$$

și o scriem sub forma:

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2!}d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2)$$

- i) dacă  $a$  este un punct de minim local pentru  $f$ , atunci există  $r > 0$  cu proprietatea:

$$\|r\| < h \implies f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2!}d_a^2 f(h)(h) + O(\|h\|^2) \geq 0$$

pentru  $h \in \mathbb{R}^n (h \neq 0)$  și  $t \in \mathbb{R}^1$  cu proprietatea  $|t| < \frac{r}{\|h\|}$  avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!}d_a^2 f(th)(th) + O(\|th\|^2) &\geq 0 \\ t^2 \left[ \frac{1}{2!}d_a^2 f(h)(h) + \|h\|^2 \cdot \frac{O(\|th\|^2)}{\|th\|^2} \right] &\geq 0 \\ d_a^2 f(h)(h) + \|h\|^2 \cdot \frac{O(\|th\|^2)}{\|th\|^2} &\geq 0 \end{aligned}$$

De aici rezultă inegalitatea  $d_a^2 f(h)(h) \geq 0$ .

ii) Cea de-a doua afirmație se demonstrează analog.

□

**Teorema 57.2. [condiție suficientă de extrem local]** Presupunem că funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  are derivate parțiale continue de ordinul al doilea pe mulțimea deschisă  $A$  și  $d_a f = 0$  într-un punct  $a \in A$ .

i) Dacă  $d_a^2 f(h)(h) \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$  și  $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0$ , atunci  $f$  are în  $a$  un minim local;

ii) Dacă  $d_a^2 f(h)(h) \leq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$  și  $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0$ , atunci  $f$  are în  $a$  un maxim local.

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă.

□

**Exemplu 57.1.** Determinați și clasificați punctele staționare ale funcției:

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 2(x^2 - y^2)$$

**Exemplu 57.2.** Determinați valorile lui  $k$  pentru care funcția

$$f(x, y) = k(e^y - 1) \sin x - \cos x \cos 2y + 1$$

are minim local în  $O = (0, 0)$ .

**Exemplu 57.3.** Determinați și găsiți natura punctelor staționare ale funcțiilor următoare:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10$ ;

b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ;

c)  $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \cos y + \sin^2 y \cdot \cos x, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ .

## 58 Extreme condiționate.

Fie funcția  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , definită pe mulțimea deschisă  $A$  și  $\Gamma \subset A$  mulțimea::

$$\Gamma = \{x \in A \mid g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, p}\}$$

unde  $g_i$  sunt funcții  $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}^1, p < n$ .

Presupunem că  $f$  și  $g_i, i = \overline{1, p}, (p < n)$  au derivate parțiale continue pe  $A$ .

**Definiția 58.1.** Dacă restricția  $f|_{\Gamma}$  are extrem local într-un punct  $a \in \Gamma$ , zicem că acest extrem este un extrem condiționat (legat) (de ecuațiile  $g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, p}$ ).

**Teorema 58.1.** Dacă diferențialele  $d_a g_1, \dots, d_a g_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  sunt liniar independente și  $f$  are în punctul  $a$  un extrem legat, atunci există  $p$  constante  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  cu următoarea proprietate:

$$d_a f = \sum_{i=1}^p \lambda_i d_a g_i$$

sau echivalent

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \quad k = \overline{1, n}$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică și este omisă. □

**Exemplu 58.1.** Determinați extremele legate în următoarele cazuri:

- a)  $f(x, y) = x^3, g(x, y) = x^2 + 6xy + y^2 - 1$
- b)  $f(x, y) = xy, g(x, y) = 2x + 3y - 1$
- c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, g(x, y, z) = x + y + z - 1$

## 59 Integrala Riemann-Darboux dublă pe un interval bidimensional.

Integrala Riemann-Darboux pe un segment  $[a, b]$  prezentată pentru funcții reale de o variabilă reală poate fi generalizată cu ușurință la integrala Riemann-Darboux dublă pe un interval bidimensional pentru funcții reale de două variabile reale.

**Definiția 59.1.** Se numește interval bidimensional real o mulțime  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  care are proprietatea:

$$\Delta = [a, b] \times [c, d]$$

unde  $[a, b]$  și  $[c, d]$  sunt segmente pe axa reală.

**Definiția 59.2.** O partiție  $P$  a intervalului bidimensional  $\Delta$  este o mulțime finită de intervale bidimensionale  $\Delta_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , de forma:

$$\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

unde:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{și} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

Fie  $f$  o funcție  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  mărginită pe  $\Delta$  și  $m, M$  astfel încât:

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in \Delta$$

Funcția  $f$  este mărginită pe fiecare subinterval  $\Delta_{ij}$  și notăm cu:

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

**Definiția 59.3.** Suma superioară Darboux corespunzătoare partiției  $P$  este prin definiție numărul:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

**Definiția 59.4.** Suma inferioară Darboux corespunzătoare partiției  $P$  este prin definiție numărul:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

**Propoziția 59.1.** Oricare ar fi partiția  $P$  a intervalului bidimensional  $\Delta$  au loc următoarele inegalități:

$$m(b-a)(d-c) \leq L_f(P) \leq U_f(P) \leq M(b-a)(d-c)$$

*Demonstrație.* analogă cu cea din cazul unidimensional. □

**Remarca 59.1.** Propoziția 59.1 arată că mulțimile

$$L_f = \{L_f(P) | P \text{ partiție a intervalului } \Delta\}$$

$$U_f = \{U_f(P) | P \text{ partiție a intervalului } \Delta\}$$

sunt mărginite.

Fie  $\mathcal{L}_f = \sup L_f$  și  $\mathcal{U}_f = \inf U_f$ .

**Propoziția 59.2.** Are loc inegalitatea:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

*Demonstrație.* asemănătoare cu cea din cazul unidimensional. □

**Definiția 59.5.** O funcție mărginită  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\Delta$  dacă  $\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$ . Această valoare comună se notează cu:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

și se numește integrala dublă Riemann-Darboux a funcției  $f$  pe intervalul  $\Delta$ .

**Teorema 59.1.** Dacă funcțiile mărginite  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile Riemann-Darboux pe  $\Delta$  atunci toate integralele care apar în relațiile următoare există și relațiile sunt adevărate:

$$(1) \iint_{\Delta} (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_{\Delta} f dx dy + \beta \iint_{\Delta} g dx dy$$

$$(2) \iint_{\Delta} f dx dy = \iint_{\Delta_1} f dx dy + \iint_{\Delta_2} f dx dy$$

pentru orice descompunere  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ,  $\Delta_1, \Delta_2$  intervale cu  $\overset{\circ}{\Delta}_1 \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset$

(3) dacă  $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in \Delta$  atunci  $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$

(4)  $|\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dx dy$

*Demonstrație.* analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

**Remarca 59.2.** Dacă  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  este mărginită și integrabilă pe  $\Delta$  atunci  $f$  este integrabilă pe orice subinterval  $\Delta' \subset \Delta$ . Mai mult, dacă  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n$ , unde  $\Delta_i$  sunt intervale cu proprietatea  $\Delta_i^\circ \cap \Delta_j^\circ = \emptyset, \forall i \neq j$  atunci:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta_i} f(x, y) dx dy$$

**Teorema 59.2.** Dacă  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $\Delta$  atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\Delta$ .

*Demonstrație.* analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

**Definiția 59.6.** O funcție  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  se zice continuă pe porțiuni dacă există o partiție  $P = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  a intervalului  $\Delta$  și funcțiile continue  $f_i : \Delta_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$  astfel încât  $f(x, y) = f_i(x, y), \forall (x, y) \in \Delta_i$ .

**Teorema 59.3.** O funcție continuă pe porțiuni este integrabilă Riemann-Darboux și are loc egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta_i} f_i(x, y) dx dy$$

*Demonstrație.* analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

**Teorema 59.4** (Teorema de medie in cazul bidimensional). Dacă funcțiile  $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue și  $g(x, y) \geq 0$  oricare ar fi  $(x, y) \in \Delta$  atunci există  $(\xi, \eta) \in \Delta$  astfel încât:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \cdot g(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \iint_{\Delta} g(x, y) dx dy$$

*Demonstrație.* analoagă cu cea din cazul unidimensional. □

**Consecința 59.1.** Dacă  $f$  este continuă pe  $\Delta$  atunci există  $(\xi, \eta) \in \Delta$  astfel încât:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)(b-a)(d-c)$$

## 60 Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe un interval bidimensional.

Dorim să arătăm că în anumite condiții calculul integralei duble pe un interval bidimensional se reduce la calcularea succesivă a integralelor unor funcții de o singură variabilă. Fie  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$  un interval bidimensional și  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 60.1.** *Dacă funcția  $f$  este integrabilă pe  $\Delta$  și dacă pentru orice  $x \in [a, b]$  ( $x$  - fixat) funcția  $f_x(y) = f(x, y)$  este integrabilă pe  $[c, d]$ , adică:*

$$I(x) = \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy$$

există, atunci integrala succesivă:

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

există de asemenea și are loc egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

*Demonstrație.* Se consideră partițiile:

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\} \text{ a lui } [a, b]$$

și

$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\} \text{ a lui } [c, d]$$

Mulțimea de intervale bidimensionale  $P = \{\Delta_{ij}\}$ , unde  $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , este o partiție a lui  $\Delta$ .

Notăm:

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | (x, y) \in \Delta_{ij}\}$$

Pentru  $(x, y) \in \Delta_{ij}$  avem  $m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

Rezultă:

$$m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1})$$

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, x \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Deducem de aici inegalitățile:

$$\begin{aligned}
 m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) &\leq \inf_x \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \right\} \leq \\
 &\leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq \sup_x \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \right\} \leq \\
 &\leq M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1})
 \end{aligned}$$

și înmulțind cu  $(x_i - x_{i-1})$  obținem:

$$\begin{aligned}
 m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) &\leq (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_x \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \right\} \leq \\
 &\leq (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq \\
 &\leq (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_x \left\{ \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \right\} \leq \\
 &\leq M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}).
 \end{aligned}$$

Prin însumare după  $i, j$  rezultă:

$$L_f(P) \leq L_{I(x)}(P_x) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq U_{I(x)}(P_x) \leq U_f(P)$$

Întrucât:

$$\sup L_f(P) = \inf U_f(P) = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

rezultă că:

$$\sup L_{I(x)}(P_x) = \inf U_{I(x)}(P_x) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

și obținem egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

□

**Remarca 60.1.** Schimbând rolul lui  $x$  cu rolul lui  $y$  obținem următoarea afirmație:  
 Dacă  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\Delta$  și dacă pentru orice  $y$  fixat funcția

$f_y(x) = f(x, y)$  este integrabilă pe  $[a, b]$  atunci integrala succesivă  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$  există și are loc egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

**Teorema 60.2.** Dacă  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă atunci funcția:

$$F(x, y) = \iint_{[a, x] \times [c, y]} f(u, v) du dv$$

definită pentru  $(x, y) \in \Delta$  este de clasă  $C^1$  pe  $\Delta$ .

În plus, derivata parțială de ordinul al doilea  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  există și are loc egalitatea:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta$$

*Demonstrație.* Funcția  $F(x, y)$  se reprezintă sub forma:

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) du dv = \int_a^x \left( \int_c^y f(u, v) dv \right) du = \int_c^y \left( \int_a^x f(u, v) du \right) dv$$

□

**Teorema 60.3.** Dacă există o funcție  $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

atunci are loc egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \Phi(a, c) - \Phi(b, c) + \Phi(b, d) - \Phi(a, d)$$

*Demonstrație.* Se consideră partițiile:

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\} \text{ a lui } [a, b]$$

și

$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\} \text{ a lui } [c, d]$$

și apoi partiția  $P = \{\Delta_{ij}\}$ ,  $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Pentru evaluarea expresiei:

$$E = \Phi(x_i, y_j) - \Phi(x_i, y_{j-1}) - \Phi(x_{i-1}, y_j) + \Phi(x_{i-1}, y_{j-1})$$



se aplică de două ori Teorema de medie și se obține:

$$E = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

unde  $x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i$  și  $y_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq y_j$ .

De aici rezultă:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Phi(a, c) - \Phi(b, c) + \Phi(b, d) - \Phi(a, d)$$

și egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \Phi(a, c) - \Phi(b, c) + \Phi(b, d) - \Phi(a, d)$$

□

## 61 Integrala Riemann-Darboux dublă pe o mulțime măsurabilă Jordan.

Vom prezenta o cale de extindere a conceptului de integrală Riemann-Darboux dublă pe mulțimi care nu sunt neapărat intervale bidimensionale. Întrucât acest concept (deja creionat în cazul intervalelor bidimensionale) utilizează aria dreptunghiului (intervalului bidimensional) va trebui să luăm în considerare submulțimi ale lui  $\mathbb{R}^2$  care au arie și partiții ale căror elemente au arie. Vom identifica o clasă de submulțimi ale lui  $\mathbb{R}^2$  care au această proprietate și le vom numi *mulțimi măsurabile Jordan*.

Considerăm mulțimea intervalelor unidimensionale mărginite deschise (forma  $(a, b)$ ), închise (forma  $[a, b]$ ), deschise la stânga și închise la dreapta (forma  $(a, b]$ ), închise la stânga și deschise la dreapta (forma  $[a, b)$ ). Produsul cartezian  $\Delta = I^1 \times I^2$  a două intervale  $I^1, I^2$  de acest fel va fi numit interval bidimensional sau dreptunghi. Astfel, mulțimile  $\Delta_1 = (a, b) \times [c, d]$ ,  $\Delta_2 = [a, b) \times (c, d]$ ,  $\Delta_3 = (a, b) \times (c, d)$ ,  $\Delta_4 = [a, b) \times [c, d]$  etc sunt dreptunghiuri în  $\mathbb{R}^2$ . Aria dreptunghiului  $\Delta = I^1 \times I^2$  este prin definiție  $\text{Aria}\Delta = \text{lungimea}I^1 \cdot \text{lungimea}I^2$ ,  $\text{Aria}\Delta_1 = (b - a) \cdot (d - c)$ ;  $\text{Aria}\Delta_2 = (b - a) \cdot (d - c)$ .

Considerăm mulțimea  $\mathcal{C}$  a reuniunilor finite de intervale bidimensionale  $\Delta$ :

$$\mathcal{C} = \left\{ C \mid C = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i, \Delta_i - \text{interval bidimensional} \right\}$$

**Propoziția 61.1.** *Mulțimea  $\mathcal{C}$  are următoarele proprietăți:*

a)  $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$ ;

b)  $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{C}$ ;

c)  $\forall C \in \mathcal{C}$  există un număr finit de intervale bidimensionale  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  astfel ca

$$C = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \text{ și } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

*Demonstrație.* a) Este evidentă;

b) Se reduce la a arăta că diferența a două intervale bidimensionale este o reuniune finită de intervale bidimensionale.

c) este tehnică și este omisă.

□

**Definiția 61.1.** Pentru  $C \in \mathcal{C}$  definim aria cu formula:

$$\text{aria}(C) = \sum_{i=1}^n \text{aria}(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \cdot (d_i - c_i)$$

unde  $C = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$  și  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Această definiție a ariei nu depinde de reprezentarea lui  $C$  sub formă de reuniune finită de intervale bidimensionale disjuncte.

**Propoziția 61.2.** Aria definită în acest fel pentru orice  $C \in \mathcal{C}$  are următoarele proprietăți:

1)  $\text{aria}(C) > 0$  pentru orice  $C \in \mathcal{C}$ ;

2) dacă  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  și  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  atunci  $\text{aria}(C_1 \cup C_2) = \text{aria}(C_1) + \text{aria}(C_2)$

*Demonstrație.* Imediată

□

**Definiția 61.2.** Pentru o mulțime mărginită  $A \subset \mathbb{R}^2$  definim aria interioară  $\text{aria}_i(A)$  și aria exterioară  $\text{aria}_e(A)$  astfel:

$$\text{aria}_i(A) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \{\text{aria}(C) \mid C \subset A\} \text{ și } \text{aria}_e(A) = \inf_{C \in \mathcal{C}} \{\text{aria}(C) \mid C \supset A\} .$$

**Definiția 61.3.** O mulțime mărginită  $A \subset \mathbb{R}^2$  este măsurabilă Jordan dacă:

$$\text{aria}_i(A) = \text{aria}_e(A)$$

**Definiția 61.4.** Dacă mulțimea mărginită  $A \subset \mathbb{R}^2$  este măsurabilă Jordan atunci aria mulțimii  $A$ ,  $\text{aria}(A)$ , este prin definiție numărul:

$$\text{aria}(A) = \text{aria}_i(A) = \text{aria}_e(A)$$

**Propoziția 61.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1)  $A$  este măsurabilă Jordan.

2)  $\forall \varepsilon > 0$  există  $C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^2 \in \mathcal{C}$  astfel încât  $C_\varepsilon^1 \subset A \subset C_\varepsilon^2$  și

$$\text{aria}(C_\varepsilon^2) - \text{aria}(C_\varepsilon^1) < \varepsilon .$$

3) există două șiruri  $(C_n^1), (C_n^2), C_n^1, C_n^2 \in \mathcal{C}$  astfel încât  $C_n^1 \subset A \subset C_n^2$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(C_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(C_n^2)$$

4)  $\text{aria}(\text{Fr } A) = 0$

5)  $\forall \varepsilon > 0$  există  $A_\varepsilon, B_\varepsilon$  măsurabile Jordan astfel încât  $A_\varepsilon \subset A \subset B_\varepsilon$  și

$$\text{aria}(B_\varepsilon) - \text{aria}(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

6) există două șiruri  $(A_n), (B_n)$  de mulțimi măsurabile Jordan astfel încât  $A_n \subset A \subset B_n$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{aria}(B_n)$$

*Demonstrație.* Aceste echivalențe au demonstrație tehnică. □

**Propoziția 61.4.** Dacă mulțimile  $A_1$  și  $A_2$  sunt măsurabile Jordan, atunci mulțimile  $A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2$  și  $A_1 \cap A_2$  sunt măsurabile Jordan și dacă  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , atunci:

$$\text{aria}(A_1 \cup A_2) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2)$$

*Demonstrație.* Este demonstrație tehnică. □

Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime mărginită, măsurabilă Jordan.

**Definiția 61.5.** O partiție  $P$  a mulțimii  $A$  este o mulțime finită de submulțimi  $A_i, i = 1, 2, \dots, n$  a mulțimii  $A$  care satisface următoarele condiții:

1)  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i;$

2) fiecare mulțime  $A_i$  este măsurabilă Jordan;

3) dacă  $i \neq j$  atunci  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

Norma partiției  $P$  este numărul  $\nu(P) = \max\{d_1, \dots, d_n\}$ , unde  $d_i = \sup_{x, y \in A_i} \|x - y\|$ .

Fie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită și  $m, M$  astfel încât:

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in A$$

Funcția  $f$  este mărginită pe fiecare mulțime  $A_i \in P$  și fie

$$m_i = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i\}$$

**Definiția 61.6.** *Suma superioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este:*

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \text{aria}(A_i)$$

*Suma inferioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este:*

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \text{aria}(A_i)$$

**Definiția 61.7.** *Suma Riemann a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este numărul:*

$$\sigma_f(P) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(A_i).$$

**Remarca 61.1.** Suma Riemann  $\sigma_f(P)$  depinde și de alegerea punctelor  $(\xi_i, \eta_i) \in A_i$ . Indiferent însă de alegerea acestor puncte avem:

$$m \cdot \text{aria}(A) \leq L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P) \leq M \cdot \text{aria}(A)$$

Rezultă din aceste inegalități că mulțimile:

$$L_f = \{L_f(P) \mid P \text{ este partiție a lui } A\}$$

$$U_f = \{U_f(P) \mid P \text{ este partiție a lui } A\}$$

sunt mărginite.

Fie  $\mathcal{L}_f = \sup L_f$  și  $\mathcal{U}_f = \inf U_f$ .

**Propoziția 61.5.** *Are loc inegalitatea:*

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

*Demonstrație.* Fie  $P$  o partiție a lui  $A$  și  $P'$  partiția  $P' = P \cup \{A_i', A_i''\}$ , unde  $A_i' \cup A_i'' = A_i$  pentru un anumit  $i$  fixat,  $A_i', A_i''$  sunt măsurabile Jordan și  $A_i' \cap A_i'' = \emptyset$ . Vom arăta că au loc următoarele inegalități:

$$L_f(P) \leq L_f(P') \text{ și } U_f(P) \geq U_f(P')$$

Considerăm în acest scop numerele:

$$M_i' = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i'\} \quad M_i'' = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in A_i''\}$$

și remarcăm că  $M_i' \leq M_i, M_i'' \leq M_i$ . Rezultă:

$$\begin{aligned} U_f(P') &= \sum_{j=1}^{i-1} M_j \cdot \text{aria}(A_j) + M_i' \cdot \text{aria}(A_i') + M_i'' \cdot \text{aria}(A_i'') + \sum_{j=i+1}^n M_j \cdot \text{aria}(A_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} M_j \cdot \text{aria}(A_j) + M_i \cdot \text{aria}(A_i') + M_i \cdot \text{aria}(A_i'') + \sum_{j=i+1}^n M_j \cdot \text{aria}(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^n M_j \cdot \text{aria}(A_j) = U_f(P) \end{aligned}$$

Asemănător se arată că are loc:

$$L_f(P) \leq L_f(P')$$

Rezultă pe această bază că dacă  $P'' = P \cup \{A_{i_1}'', \dots, A_{i_m}''\}$ , atunci:

$$L_f(P) \leq L_f(P'') \quad \text{și} \quad U_f(P'') \leq U_f(P)$$

Dacă  $P_1$  și  $P_2$  sunt două partiții ale lui  $A$ :

$$P_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad \text{și} \quad P_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

atunci considerăm partiția:

$$P_3 = \{A_i \cap B_j \mid i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$$

Rezultă

$$L_f(P_1) \leq L_f(P_3) \leq U_f(P_3) \leq U_f(P_2)$$

Cu alte cuvinte, suma inferioară corespunzătoare unei partiții a lui  $A$  nu poate depăși suma superioară corespunzătoare la orice partiție a lui  $A$ . Orice sumă inferioară este margine inferioară pentru mulțimea sumelor superioare.

Astfel,  $L_f(P) \leq U_f(P)$  pentru orice partiție  $P$ . De aici rezultă:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

□

**Definiția 61.8.** *Funcția mărginită  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă*

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

*Această valoare comună se numește integrala Riemann-Darboux dublă a lui  $f$  și se notează cu*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

**Teorema 61.1.** *Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o partiție  $P$  astfel încât să avem:*

$$U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat în baza Propoziției 61.5

□

**Teorema 61.2.** *Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă și numai dacă există un număr  $I$  cu proprietatea că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice partiție  $P$  cu  $\nu(P) < \delta$  rezultă că suma Riemann  $\sigma_f(P)$  are proprietatea:*

$$|\sigma_f(P) - I| < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Afirmatia rezultă în baza teoremei precedente și a inegalității

$$L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P)$$

□

**Remarca 61.2.** Funcția constantă  $f(x, y) = 1$  este integrabilă Riemann-Darboux pe o mulțime măsurabilă Jordan  $A$  și are loc:

$$\iint_A dx dy = \text{aria}(A)$$

**Teorema 61.3.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt integrabile Riemann-Darboux pe mulțimea măsurabilă Jordan  $A$ , atunci toate integralele care apar în relațiile de mai jos există și relațiile sunt adevărate:

$$(1) \iint_A (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g$$

$$(2) \iint_A f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f, \text{ unde } A_1 \cup A_2 = A \text{ și } A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

(3) dacă  $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$  atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy$$

$$(4) \left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy$$

*Demonstrație.* Analoagă cu cea făcută pentru integrale pe interval bidimensional.  $\square$

**Remarca 61.3.** Dacă  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și mulțimea  $A_1 \subseteq A$  este măsurabilă Jordan, atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A_1$ .

Mai mult, dacă  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  și  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , atunci:

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f$$

**Teorema 61.4.** Dacă  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\bar{A}$  este măsurabilă Jordan atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\bar{A}$ .

*Demonstrație.* Analoagă cu cea făcută pentru intervale bidimensionale.  $\square$

**Definiția 61.9.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se zice continuă pe porțiuni dacă există o partiție  $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  a lui  $A$  și funcțiile continue  $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, n$ , astfel încât:

$$f(x, y) = f_i(x, y) \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{A}_i$$

**Teorema 61.5.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe porțiuni este integrabilă Riemann-Darboux pe mulțimea măsurabilă Jordan  $A$  și are loc egalitatea:

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f_i$$

*Demonstrație.* Analoagă cu cea pentru integrala pe intervale bidimensionale. □

**Teorema 61.6.** *Dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$ , atunci:*

$$m \cdot \text{aria}(A) \leq \iint_A f \leq M \cdot \text{aria}(A)$$

unde:

$$m = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in A\} \quad M = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in A\}$$

*Demonstrație.* Imediată. □

**Remarca 61.4.** Teorema de medie enunțată pentru integrala dublă pe un interval bidimensional nu mai este adevărată.

De exemplu, fie  $A = [0, 1] \times [0, 1] \cup [2, 4] \times [2, 4]$  și funcția  $f(x, y) = 1$  pentru  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  și  $f(x, y) = 2$  pentru  $(x, y) \in [2, 4] \times [2, 4]$ . Avem:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,1]} f + \iint_{[2,4] \times [2,4]} f = 1 + 8 = 9$$

iar  $\text{aria}(A) = 1 + 4 = 5$ .

Egalitatea  $\iint_A f = f(\xi, \eta) \cdot \text{aria}(A)$  ar însemna

$$9 = f(\xi, \eta) \cdot 5 \quad \text{adică} \quad f(\xi, \eta) = \frac{9}{5},$$

imposibil.

## 62 Calculul integralei Riemann-Darboux duble pe o mulțime măsurabilă Jordan.

Dorim să arătăm că în anumite condiții calculul integralei duble pe o mulțime măsurabilă Jordan se reduce la calcularea succesivă a integralelor unor funcții de o singură variabilă.

Fie  $A$  o mulțime măsurabilă Jordan cu proprietatea următoare: există  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue astfel încât  $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$  și

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \quad \text{și} \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

**Teorema 62.1.** *Dacă funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și dacă pentru orice  $x \in [a, b]$ ,  $x$  - fixat, funcția  $f_x(y) = f(x, y)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[g(x), h(x)]$ , adică există*

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f_x(y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

atunci integrala succesivă:

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

există de asemenea și are loc egalitatea:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

*Demonstrație.* Putem demonstra această afirmație reducând-o la cazul intervalelor bidimensionale pentru care am văzut că ea este adevărată. Iată cum procedăm: Considerăm

$$m = \inf\{g(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{și} \quad M = \sup\{h(x) \mid x \in [a, b]\}$$

și intervalul bidimensional  $[a, b] \times [m, M] = \Delta$ .

Pe acest interval  $\Delta$  considerăm funcția  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  definită astfel:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{dacă } (x, y) \in A \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in \Delta \setminus A \end{cases}$$

Funcția  $F$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\Delta$  și avem:

$$\iint_{\Delta} F = \iint_A F + \iint_{\Delta \setminus A} F$$

În continuare pentru funcția  $F$  aplicăm teorema de integrare succesivă stabilită în cazul intervalelor bidimensionale și găsim:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} F(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_m^M F(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_m^{g(x)} F(x, y) dy + \int_{g(x)}^{h(x)} F(x, y) dy + \int_{h(x)}^M F(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Rezultă în acest fel egalitatea:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

□



**Remarca 62.1.** Fie  $A$  o mulțime măsurabilă Jordan cu următoarea proprietate: există  $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue astfel încât  $g(y) \leq h(y) \quad \forall y \in [c, d]$  și

$$A = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \text{ și } g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Dacă o funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și are proprietatea că pentru orice  $y \in [c, d]$ ,  $y$  - fixat, funcția  $f_y(x) = f(x, y)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[g(y), h(y)]$ , adică există

$$I(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx$$

atunci integrala succesivă:

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

există de asemenea și are loc egalitatea:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Remarca 62.2.** Fie  $A$  o mulțime măsurabilă Jordan cu următoarele proprietăți:

- există  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue astfel încât  $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$  și

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ și } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

- există  $l, k : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue astfel încât  $l(y) \leq k(y) \quad \forall y \in [c, d]$  și

$$A = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \text{ și } l(y) \leq x \leq k(y)\}$$

Oricare ar fi funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  cu proprietatea că pentru orice  $x \in [a, b]$ ,  $x$  - fixat, funcția  $f_x(y) = f(x, y)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[g(x), h(x)]$  și pentru orice  $y \in [c, d]$ ,  $y$  - fixat, funcția  $f_y(x) = f(x, y)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $[l(y), k(y)]$ , integralele succesive

$$\int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{și} \quad \int_c^d \left( \int_{l(y)}^{k(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

există și au loc egalitățile:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_{l(y)}^{k(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**Teorema 62.2** (Calculul ariei lui  $g(A)$ ). Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime deschisă măsurabilă Jordan și  $g : A \rightarrow g(A) = B \subset \mathbb{R}^2$  o funcție bijectivă  $g$  de clasă  $C^1$  și cu inversa de clasă  $C^1$ . Mulțimea deschisă  $B$  este măsurabilă Jordan și are loc egalitatea:

$$\text{aria}(B) = \iint_A \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right| dx dy$$

*Demonstrație.* Notăm cu  $g^x, g^y$  componentele scalare ale difeomorfismului  $g$ ,  $g(x, y) = (g^x(x, y), g^y(x, y))$  și considerăm determinantul matricii Jacobi a difeomorfismului  $g$ , adică determinantul:

$$\frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g^x}{\partial x} & \frac{\partial g^x}{\partial y} \\ \frac{\partial g^y}{\partial x} & \frac{\partial g^y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dacă  $P_A = \{A_1, \dots, A_n\}$  este o partiție a lui  $A$ , atunci  $P_B = \{B_1, \dots, B_n\}$ ,  $B_i = g(A_i)$ , este o partiție a mulțimii  $B = g(A)$ . În plus, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o partiție  $P_A$  (suficient de fină) astfel încât să avem:

$$\left| \sum_{i=1}^n \text{aria}(B_i) - \sum_{i=1}^n \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right|(\xi_i, \eta_i) \text{aria}(A_i) \right| < \varepsilon$$

unde  $(\xi_i, \eta_i) \in A_i$ . Rezultă de aici egalitatea din enunț. □

**Teorema 62.3** (Schimbarea de variabilă). Fie  $A \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime deschisă măsurabilă Jordan și  $g : A \rightarrow g(A) = B \subset \mathbb{R}^2$  o funcție bijectivă  $g$  de clasă  $C^1$  și cu inversa de clasă  $C^1$ . Dacă funcția  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $B$ , atunci funcția  $(f \circ g) \cdot \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right| : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și are loc egalitatea:

$$\iint_B f(X, Y) dX dY = \iint_A f(g^x(x, y), g^y(x, y)) \cdot \left| \frac{D(g^x, g^y)}{D(x, y)} \right| dx dy$$

*Demonstrație.* Asemănătoare cu cea a Teoremei 62.2. □

## 63 Integrala Riemann-Darboux pe o mulțime $n$ -dimensională măsurabilă Jordan.

Vom prezenta o cale de extindere a conceptului de integrală pe o mulțime bidimensională măsurabilă Jordan pe mulțimi  $n$ -dimensionale. Întrucât în dimensiunea doi conceptul de integrală Riemann-Darboux utilizează conceptul de arie va trebui să luăm în considerare submulțimi ale lui  $\mathbb{R}^n$  care au "volum" și partiții ale căror elemente au "volum". La început vom identifica o clasă de asemenea mulțimi și le vom numi mulțimi  $n$ -dimensionale măsurabile Jordan.

Considerăm mulțimea intervalelor unidimensionale mărginite deschise (forma  $(a, b)$ ), închise (forma  $[a, b]$ ), deschise la stânga și închise la dreapta (forma  $(a, b]$ ), închise la stânga și deschise la dreapta (forma  $[a, b)$ ). Produsul cartezian  $\Delta = I^1 \times I^2 \times \dots \times I^n$  a  $n$  intervale  $I^1, I^2, \dots, I^n$  de acest fel va fi numit interval  $n$  dimensional sau paralelipiped. Astfel mulțimile  $\Delta_1 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ ,  $\Delta_2 = (a_1, b_1) \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  etc. sunt paralelipipezi în  $\mathbb{R}^n$ . Volumul paralelipipedului  $\Delta = I^1 \times I^2 \times \dots \times I^n$  este prin definiție  $vol(\Delta) = lung(I^1) \cdot lung(I^2) \cdot \dots \cdot lung(I^n)$ ,  $vol(\Delta_1) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ ,  $vol(\Delta_2) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$ .

Notăm cu  $\mathcal{C}$  mulțimea reuniunilor finite de intervale  $n$ -dimensionale  $\Delta$ :

$$\mathcal{C} = \{C \mid C = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i, \quad \Delta_i - \text{interval } n \text{ dimensional}\}$$

**Propoziția 63.1.** *Mulțimea  $\mathcal{C}$  are următoarele proprietăți:*

- a)  $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$ ;
- b)  $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{C}$ ;
- c)  $\forall C \in \mathcal{C}$  există un număr finit de intervale  $n$ -dimensionale  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  astfel ca  $C = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$  și  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

*Demonstrație.* a) Este evidentă.

b) Revine la a arăta că diferența a două intervale  $n$ -dimensionale este o reuniune finită de intervale  $n$ -dimensionale.

c) este tehnică și este omisă.

□

**Definiția 63.1.** *Pentru  $C \in \mathcal{C}$  definim volumul cu formula*

$$vol(C) = \sum_{i=1}^m vol(\Delta_i)$$

unde  $C = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$  și  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  pentru  $i \neq j$ .

Acest concept de volum nu depinde de reprezentarea lui  $C$  sub formă de reuniune finită de intervale  $n$ -dimensionale disjuncte.

**Propoziția 63.2.** *Volumul definit în acest fel pentru orice  $C \in \mathcal{C}$  are următoarele proprietăți:*

- 1)  $vol(C) > 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}$ ;
- 2) dacă  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  și  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  atunci

$$vol(C_1 \cup C_2) = vol(C_1) + vol(C_2)$$

*Demonstrație.* Imediată. □

**Definiția 63.2.** Pentru o mulțime mărginită  $A \subset \mathbb{R}^n$  definim volumul interior  $vol_i(A)$  și volumul exterior  $vol_e(A)$  astfel

$$vol_i(A) = \sup_{C \in \mathcal{C}, C \subset A} vol(C) \quad vol_e(A) = \inf_{C \in \mathcal{C}, C \supset A} vol(C)$$

**Definiția 63.3.** O mulțime mărginită  $A \subset \mathbb{R}^n$  este măsurabilă Jordan dacă

$$vol_i(A) = vol_e(A)$$

**Definiția 63.4.** Dacă mulțimea mărginită  $A \subset \mathbb{R}^n$  este măsurabilă Jordan, atunci "volumul" mulțimii  $A$ ,  $vol(A)$  este, prin definiție, numărul

$$vol(A) = vol_i(A) = vol_e(A)$$

**Propoziția 63.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1)  $A$  este măsurabilă Jordan.

2)  $\forall \varepsilon > 0$  există  $C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^2 \in \mathcal{C}$  astfel încât  $C_\varepsilon^1 \subset A \subset C_\varepsilon^2$  și

$$vol(C_\varepsilon^2) - vol(C_\varepsilon^1) < \varepsilon.$$

3) există două șiruri  $(C_k^1), (C_k^2), C_k^1, C_k^2 \in \mathcal{C}$  astfel încât  $C_k^1 \subset A \subset C_k^2$  și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} vol(C_k^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} vol(C_k^2)$$

4)  $vol(Fr A) = 0$

5)  $\forall \varepsilon > 0$  există  $A_\varepsilon, B_\varepsilon$  măsurabile Jordan astfel încât  $A_\varepsilon \subset A \subset B_\varepsilon$  și

$$vol(B_\varepsilon) - vol(A_\varepsilon) < \varepsilon$$

6) există două șiruri  $(A_k), (B_k)$  de mulțimi măsurabile Jordan astfel încât  $A_k \subset A \subset B_k$  și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} vol(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} vol(B_k)$$

**Propoziția 63.4.** Dacă mulțimile  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$  sunt măsurabile Jordan, atunci mulțimile  $A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2, A_1 \cap A_2$  sunt măsurabile Jordan și, dacă  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , atunci:

$$vol(A_1 \cup A_2) = vol(A_1) + vol(A_2)$$

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime mărginită și măsurabilă Jordan.

**Definiția 63.5.** O partiție  $P$  a mulțimii  $A$  este o mulțime finită de submulțimi  $A_i, i = 1, 2, \dots, m$  ale mulțimii  $A$  care satisfac următoarele condiții:

1)  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ;

2) fiecare mulțime  $A_i$  este măsurabilă Jordan;

3) dacă  $i \neq j$  atunci  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

Norma partiției  $P$  este numărul  $\nu(P) = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  unde  $d_i = \sup_{x, y \in A_i} \|x - y\|$ .

Fie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție mărginită și

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in A\} \quad M = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$$

Funcția  $f$  este mărginită pe fiecare mulțime  $A_i \in P$  și fie:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$$

**Definiția 63.6.** Suma superioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^m M_i \cdot \text{vol}(A_i)$$

Suma inferioară Darboux a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^m m_i \cdot \text{vol}(A_i)$$

**Definiția 63.7.** Suma Riemann a funcției  $f$  corespunzătoare partiției  $P$  este numărul:

$$\sigma_f(P) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot \text{vol}(A_i)$$

unde  $\xi_i \in A_i$ .

**Remarca 63.1.** Suma Riemann  $\sigma_f(P)$  depinde și de alegerea punctelor  $\xi_i \in A_i$ . Indiferent însă de alegerea acestor puncte avem:

$$m \cdot \text{vol}(A) \leq L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P) \leq M \cdot \text{vol}(A)$$

Rezultă din aceste inegalități că mulțimile:

$$L_f = \{L_f(P) \mid P \text{ este partiție a lui } A\}$$

$$U_f = \{U_f(P) \mid P \text{ este partiție a lui } A\}$$

sunt mărginite.

Fie  $\mathcal{L}_f = \sup L_f$  și  $\mathcal{U}_f = \inf U_f$ .

**Propoziția 63.5.** Are loc inegalitatea:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f$$

*Demonstrație.* Analoagă cu cea făcută în dimensiunea doi. □

**Definiția 63.8.** Funcția mărginită  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

Această valoare comună se numește integrala Riemann-Darboux  $n$ -dimensională a lui  $f$  pe  $A$  și se notează cu

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ ori}} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f$$

**Teorema 63.1.** Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o partiție  $P$  astfel încât să avem:

$$U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat în baza Propoziției 63.5. □

**Teorema 63.2.** Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  dacă și numai dacă există un număr  $I$  cu proprietatea că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice partiție  $P$  și cu  $\nu(P) < \delta$  suma Riemann  $\sigma_f(P)$  verifică:

$$|\sigma_f(P) - I| < \varepsilon$$

*Demonstrație.* Afirmația rezultă în baza teoremei precedente și a inegalității

$$L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P)$$

□

**Remarca 63.2.** Funcția constantă  $f(x_1, \dots, x_m) = 1$  este integrabilă Riemann-Darboux pe o mulțime măsurabilă Jordan  $A$  și are loc:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ ori}} dx_1 \dots dx_m = \text{vol}(A)$$

**Teorema 63.3.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt integrabile Riemann-Darboux pe mulțimea măsurabilă Jordan  $A$ , atunci toate integralele care apar în relațiile de mai jos există și relațiile sunt adevărate:

$$(1) \underbrace{\int \cdots \int}_A (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \underbrace{\int \cdots \int}_A f + \beta \underbrace{\int \cdots \int}_A g$$

$$(2) \underbrace{\int \cdots \int}_A f = \underbrace{\int \cdots \int}_{A_1} f + \underbrace{\int \cdots \int}_{A_2} f, \text{ unde } A_1 \cup A_2 = A \text{ și } A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

(3) dacă  $f \leq g$  pe  $A$  atunci

$$\underbrace{\int \cdots \int}_A f \leq \underbrace{\int \cdots \int}_A g$$

$$(4) \quad \underbrace{\int \cdots \int}_A f \leq \underbrace{\int \cdots \int}_A |f|$$

*Demonstrație.* Analoagă cu cea făcută pentru integrale duble.  $\square$

**Remarca 63.3.** Dacă  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și mulțimea  $A_1 \subseteq A$  este măsurabilă Jordan, atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A_1$ .

Mai mult, dacă  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$  și  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , atunci:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_A f = \sum_{i=1}^m \underbrace{\int \cdots \int}_{A_i} f$$

**Teorema 63.4.** Dacă  $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și  $\bar{A}$  este măsurabilă Jordan, atunci  $f$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\bar{A}$ .

*Demonstrație.* Analoagă cu cea făcută pentru integrale duble.  $\square$

**Definiția 63.9.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se zice continuă pe porțiuni dacă există o partiție  $P = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  a lui  $A$  și funcțiile continue  $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, m$ , astfel încât:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \overset{\circ}{A}_i$$

**Teorema 63.5.** O funcție  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continuă pe porțiuni este integrabilă Riemann-Darboux pe mulțimea măsurabilă Jordan  $A$  și are loc egalitatea:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_A f = \sum_{i=1}^m \underbrace{\int \cdots \int}_A f_i$$

*Demonstrație.* Analoagă cu cea pentru integrala pentru integrale duble.  $\square$

**Teorema 63.6.** Dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$ , atunci:

$$m \cdot \text{vol}(A) \leq \underbrace{\int \cdots \int}_A f \leq M \cdot \text{vol}(A)$$

unde:

$$m = \inf\{f(x_1, \dots, x_m) \mid (x_1, \dots, x_m) \in A\} \quad M = \sup\{f(x_1, \dots, x_m) \mid (x_1, \dots, x_m) \in A\}$$

*Demonstrație.* Imediată.  $\square$

## 64 Calculul integralei Riemann-Darboux pe o mulțime $n$ -dimensională măsurabilă Jordan.

Dorim să arătăm că în anumite condiții calculul integralei Riemann-Darboux pe o mulțime  $n$ -dimensională măsurabilă Jordan se reduce la calcularea succesivă a unor integrale Riemann-Darboux pentru funcții de o singură variabilă.

Considerăm la început cazul în care mulțimea  $A$  este un interval  $n$ -dimensional de forma:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Teorema 64.1.** *Dacă funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și dacă pentru orice  $x_1 \in [a_1, b_1]$ , funcția  $f_{x_1}$  definită prin  $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A_1 = [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , adică integrala*

$$I(x_1) = \int_{A_1} \dots \int f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

există, atunci integrala iterată

$$\int_{a_1}^{b_1} I(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) dx_1$$

există de asemenea și are loc egalitatea:

$$\int_A \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) dx_1$$

*Demonstrație.* Este similară cu cea făcută pentru integrale duble. □

**Remarca 64.1.** Această teoremă reduce calculul integralei  $\int_A \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

la calculul succesiv a  $n$  integrale Riemann-Darboux pentru funcții de o singură variabilă:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \dots dx_1$$

**Remarca 64.2.** Teorema 64.1 este adevărată și în cazul unor mulțimi  $n$ -dimensionale  $A$  mai complicate, ca și în cazul bidimensional.

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime măsurabilă Jordan cu proprietatea că are loc egalitatea:

$$A = \bigcup_{x_1 \in [a_1, b_1]} \{x_1\} \times \Omega_{x_1}$$

unde  $\Omega_{x_1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  este o mulțime măsurabilă Jordan pentru orice  $x_1 \in [a_1, b_1]$ .



**Teorema 64.2.** Dacă funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și dacă pentru orice  $x_1 \in [a_1, b_1]$ , funcția  $f_{x_1} : \Omega_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $\Omega_{x_1}$ , adică integrala

$$I(x_1) = \int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

există, atunci integrala iterată

$$\int_{a_1}^{b_1} I(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) dx_1$$

există de asemenea și are loc egalitatea:

$$\int_A \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int \cdots \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) dx_1$$

*Demonstrație.* Este similară cu cea făcută pentru integrale duble. □

**Teorema 64.3.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă, măsurabilă Jordan și  $g : A \rightarrow g(A) = B \subset \mathbb{R}^n$  o funcție bijectivă de clasă  $C^1$  definită pe  $A$  având inversa de clasă  $C^1$ . Mulțimea  $B$  este măsurabilă Jordan și are loc egalitatea:

$$\text{vol}(B) = \int_A \cdots \int \left| \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n$$

*Demonstrație.* Este similară cu cea din cazul bidimensional. □

**Teorema 64.4** (Schimbarea de variabilă). Fie  $A$  o mulțime deschisă, măsurabilă Jordan și  $g : A \rightarrow g(A) = B \subset \mathbb{R}^n$  o bijecție de clasă  $C^1$  definită pe  $A$  cu inversa de clasă  $C^1$ . Dacă funcția  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $B$ , atunci funcția  $f \circ g \cdot \left| \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| : A \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă Riemann-Darboux pe  $A$  și are loc egalitatea:

$$\int_B \cdots \int f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_A \cdots \int f(g(x_1, \dots, x_n)) \cdot \left| \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n$$

*Demonstrație.* Este similară cu cea din cazul bidimensional. □

## 65 Curbe simple și curbe simple închise.

Integralele curbilinii pot fi definite asemănător cu integralele definite. Pentru a face acest lucru este însă nevoie să introducem conceptul de curbă și cel de lungime a unui arc de curbă. Vom prezenta aceste concepte într-un cadru particular care poate fi extins într-un mod natural la unul mai general.

**Definiția 65.1.** *Curba simplă (arc simplă) este o mulțime de puncte  $C \subset \mathbb{R}^3$  cu proprietatea că există un segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și o funcție  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  care are următoarele proprietăți:*

- a)  $\varphi$  este bijectivă;
- b)  $\varphi$  este de clasă  $C^1$  și  $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ .

Punctele  $A = \varphi(a)$  și  $B = \varphi(b)$  de pe curbă se numesc extremități sau capete, iar  $\varphi$  se numește reprezentarea parametrică a curbei simple  $C$ . Vectorul  $\varphi'(t)$  este tangent la curbă în punctul  $\varphi(t)$ .

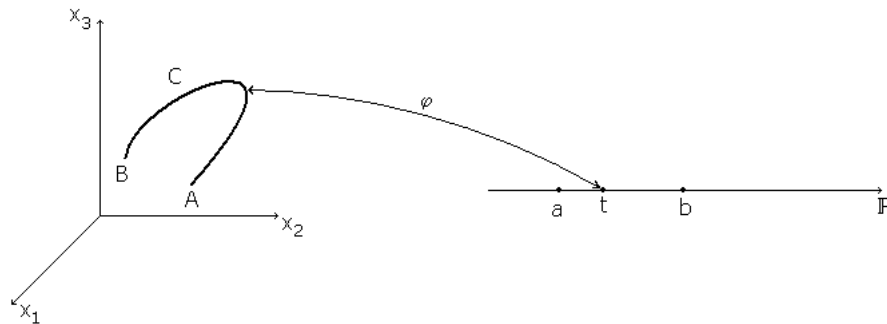


Figura 65.1:

**Definiția 65.2.** *Curba simplă închisă este o mulțime de puncte  $C \subset \mathbb{R}^3$  cu proprietatea că există un segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și o funcție  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  care are următoarele proprietăți:*

- a)  $\varphi$  este bijectivă de la  $[a, b)$  la  $C$  și  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ;
- b)  $\varphi$  este de clasă  $C^1$  și  $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ .

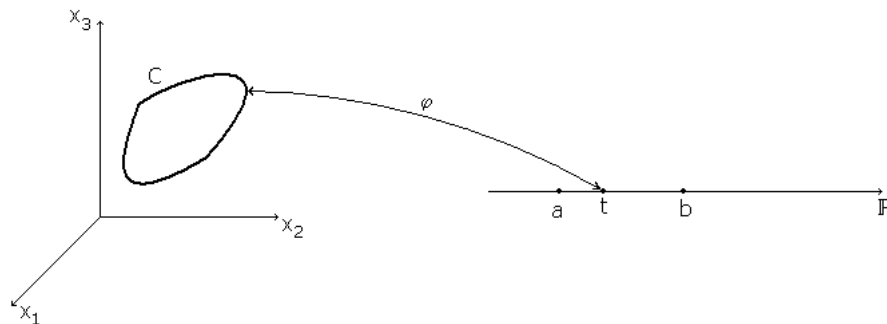


Figura 65.2:

Funcția  $\varphi$  se numește reprezentarea parametrică a curbei închise  $C$ . Vectorul  $\varphi'(t)$  este tangent la curbă în punctul  $\varphi(t)$ .

**Exemplu 65.1.** Dacă  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  și  $h = (h_1, h_2, h_3)$  sunt două puncte din  $\mathbb{R}^3$ , atunci segmentul  $[x^0, x^0 + h]$  care unește punctele  $x^0, x^0 + h$  este o curbă simplă  $C$ . În acest caz, segmentul  $[a, b]$  este  $[0, 1]$ , iar funcția  $\varphi : [0, 1] \rightarrow C$  este:

$$\varphi(t) = (x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, x_3^0 + th_3)$$

**Exemplu 65.2.** Cercul  $C$  definit prin:

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

este o curbă simplă închisă. În acest caz, segmentul  $[a, b]$  este  $[0, 2\pi]$ , iar funcția  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow C$  este:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

**Remarca 65.1.** Orice curbă simplă sau curbă simplă închisă are o infinitate de reprezentări parametrice.

**Remarca 65.2.** Punctele  $A, B$ , numite extremitățile curbei simple, nu depind de reprezentarea parametrică a curbei. Prin aceasta înțelegem că dacă  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  este o altă reprezentare parametrică a curbei simple  $C$ , atunci mulțimea de puncte  $\{\psi(c), \psi(d)\}$  coincide cu mulțimea  $\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{A, B\}$ . Acest fapt poate fi demonstrat prin reducere la absurd. Presupunând, de exemplu, că  $\psi(c) \notin \{A, B\}$ , se poate arăta că există  $\tau_1 \in [c, d]$  astfel încât  $\psi'(\tau_1) = 0$ .

Astfel, oricare ar fi reprezentarea parametrică a segmentului  $[x^0, x^0 + h]$  ce leagă punctele  $A = x^0$  și  $B = x^0 + h$ , capetele sunt punctele  $A$  și  $B$ : de exemplu:  $\psi(\tau) = x^0 + (2 - \tau)h$ ,  $\tau \in [1, 2]$ ,  $\psi(1) = x^0 + h = B$ ;  $\psi(2) = x^0 = A$ .

Folosind o reprezentare parametrică, putem defini lungimea curbei simple și a curbei simple închise.

**Definiția 65.3.** Lungimea curbei simple (a curbei simple închise) este, prin definiție, numărul  $l$ , definit prin:

$$l = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)} dt$$

unde  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$  și  $\dot{\varphi}_i(t) = \frac{d\varphi_i}{dt}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Remarca 65.3.** Această definiție este independentă de reprezentarea parametrică a curbei  $C$ . Altfel spus, dacă  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  este o a doua reprezentare parametrică a curbei  $C$ , atunci numărul

$$\int_c^d \|\psi'(\tau)\| d\tau$$

este egal cu numărul

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$$

Egalitatea rezultă din teorema de schimbare de variabilă pentru funcții de o singură variabilă, care se poate aplica ținând seama de faptul că  $\varphi'(t) \neq 0$  și  $\psi'(\tau) \neq 0$  pentru orice  $t$  și pentru orice  $\tau$ .

**Exemplu 65.3.** Lungimea segmentului  $[x^0, x^0 + h]$  este

$$l = \int_0^1 \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} dt = \|h\|$$

iar lungimea cercului  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  este

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi$$

**Exemplu 65.4** (Ilustrează independența lungimii de reprezentarea parametrică). Pentru cercul  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  alegem  $\varphi : [0, \pi] \rightarrow C$  definită astfel

$$\varphi(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$$

Utilizând această reprezentare obținem:

$$l = \int_0^\pi 2\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} dt = 2\pi$$

aceeași valoare ca și cea obținută în cazul reprezentării

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Remarca 65.4.** Condiția  $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$  asigură faptul că o curbă simplă are doar două capete, acestea nedepinzând de reprezentarea parametrică. Altfel spus, există două puncte  $A, B \in C$  astfel încât oricare ar fi reprezentarea parametrică  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  a lui  $C$  avem:  $\{\psi(c), \psi(d)\} = \{A, B\}$ .

În cazul  $\psi(c) = A$  și  $\psi(d) = B$  dacă  $\tau$  parcurge segmentul  $[c, d]$  de la  $c$  la  $d$ , atunci  $\psi(\tau)$  parcurge curba  $C$  de la  $A$  la  $B$ .

În cazul  $\psi(c) = B$  și  $\psi(d) = A$  dacă  $\tau$  parcurge segmentul  $[c, d]$  de la  $c$  la  $d$ , atunci  $\psi(\tau)$  parcurge curba  $C$  de la  $B$  la  $A$ .

Cele două sensuri de parcurs pe  $C$ , de la  $A$  la  $B$  sau de la  $B$  la  $A$  se numesc orientări pe curba simplă și din cele arătate până acum rezultă că pe o curbă simplă există două orientări și oricare ar fi reprezentarea parametrică sensul de parcurs dat de  $\varphi$  este una din cele două orientări. Altfel spus mulțimea reprezentărilor parametrice ale curbei simple se descompune în două clase (submulțimi) disjuncte. Pentru toate reprezentările dintr-o clasă avem un sens de parcurs (o orientare) pentru toate reprezentările de cealaltă clasă avem sensul de parcurs opus (cealaltă orientare).

Considerăm o curbă simplă  $C$  având reprezentarea  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  a lui  $C$  pentru care sensul de parcurs este de la  $A$  la  $B$  ( $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ ).

Dacă în formula lungimii curbei

$$l = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau$$

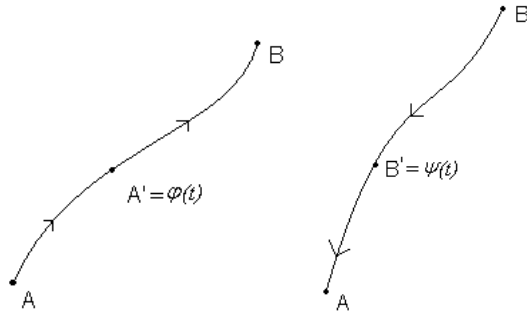


Figura 65.3:

înlocuim limita superioară  $b$  cu  $t$  obținem o funcție care depinde de  $t$ ,  $s_A(t)$ , dată de

$$s_A(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau$$

Valoarea  $s_A(t)$  reprezintă lungimea arcului de curbă  $AA' \subset C$ , unde  $A' = \varphi(t)$  ( $AA'$  este doar o parte a curbei  $C$ ).

Funcția  $s_A$  este definită pe intervalul închis  $[a, b]$  și este o bijecție de la  $[a, b]$  la  $[0, l]$ ,  $s_A(a) = 0$  și  $s_A(b) = l$ . Mai mult,  $s_A$  și  $s_A^{-1}$  sunt funcții de clasă  $C^1$ .

Funcția  $s_A^{-1}$  poate fi folosită pentru a construi o reprezentare parametrică remarcabilă a curbei simple: anume  $\tilde{x}_A : [0, l] \rightarrow C$ ,  $\tilde{x}_A = \varphi \circ s_A^{-1}$ . În această reprezentare parametrică a lui  $C$ ,  $s \in [0, l]$  este parametrul și  $\tilde{x}_A(0) = A$ ,  $\tilde{x}_A(l) = B$ , iar dacă  $s$  parcurge  $[0, l]$  de la 0 la  $l$ , atunci  $\tilde{x}_A(s)$  parcurge  $C$  de la  $A$  la  $B$ . Reprezentarea  $\tilde{x}_A$  este canonică în cazul orientării de la  $A$  la  $B$ . Parametrul  $s$  este lungimea arcului de curbă  $A\tilde{x}_A(s)$ . Nu mai există o altă reprezentare parametrică cu aceste proprietăți.

Dacă pentru aceeași curbă simplă  $C$  cu capetele  $A, B$  se consideră o reprezentare  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  pentru care sensul de parcurs este de la  $B$  la  $A$  ( $\psi(c) = B$  și  $\psi(d) = A$ ) și dacă în formula lungimii curbei

$$l = \int_c^d \|\psi'(\tau)\| d\tau$$

înlocuim limita superioară  $d$  cu  $t$ , obținem o funcție care depinde de  $t$ ,  $s_B(t)$ , dată de

$$s_B(t) = \int_c^t \|\psi'(\tau)\| d\tau$$

Valoarea  $s_B(t)$  reprezintă de data aceasta lungimea arcului de curbă  $BB' \subset C$ , unde  $B' = \psi(t)$ .

Funcția  $s_B : [c, d] \rightarrow [0, l]$  este bijectivă,  $s_B(c) = 0$ ,  $s_B(d) = l$  și  $s_B$ ,  $s_B^{-1}$  sunt funcții de clasă  $C^1$ . Reprezentarea parametrică  $\tilde{x}_B = \psi \circ s_B^{-1}$  a curbei simple  $C$  are proprietatea  $\tilde{x}_B(0) = B$ ,  $\tilde{x}_B(l) = A$  și dacă  $s$  parcurge  $[0, l]$  de la 0 la  $l$ , atunci  $\tilde{x}_B(s)$  parcurge  $C$  de la  $B$  la  $A$ . Reprezentarea  $\tilde{x}_B$  este canonică în cazul orientării de la  $B$  la  $A$ , parametrul  $s$

fiind în acest caz lungimea arcului  $B\tilde{x}_B(s)$  (este unica reprezentare parametrică cu aceste proprietăți).

**Exemplu 65.5.** În cazul segmentului  $[x^0, x^0 + h]$  ce leagă punctele  $A = x^0$  și  $B = x^0 + h$ , dacă se consideră reprezentarea parametrică  $\varphi(t) = x^0 + th$ ,  $t \in [0, 1]$ , atunci sensul de parcurs este de la  $A$  la  $B$ , iar dacă se consideră reprezentarea parametrică  $\psi(\tau) = x^0 + (2 - \tau)h$ ,  $\tau \in [1, 2]$ , atunci sensul de parcurs este de la  $B = x^0 + h$  la  $A = x^0$ .

Cu reprezentarea  $\varphi$ , lungimea arcului de curbă  $AA'$  este dată de

$$s_A(t) = \int_0^t \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} d\tau = t \cdot \|h\|$$

cu  $s_A(0) = 0$  și  $s_A(1) = \|h\|$ .

Funcția  $s_A^{-1} : [0, \|h\|] \rightarrow [0, 1]$  este dată de  $s_A^{-1}(s) = \frac{s}{\|h\|}$ , iar reprezentarea canonică  $\tilde{x}_A : [0, \|h\|] \rightarrow C$  este

$$\tilde{x}_A(s) = (\varphi \circ s_A^{-1})(s) = x^0 + \frac{1}{\|h\|} \cdot s \cdot h.$$

Cu reprezentarea  $\psi$ , lungimea arcului de curbă  $BB'$  este dată de

$$s_B(t) = \int_1^t \|\psi'(\tau)\| d\tau = \int_1^t \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} d\tau = (t - 1) \cdot \|h\|$$

cu  $s_B(1) = 0$  și  $s_B(2) = \|h\|$ .

Funcția  $s_B^{-1} : [0, \|h\|] \rightarrow [1, 2]$  este dată de  $s_B^{-1}(s) = 1 + \frac{s}{\|h\|}$ , iar reprezentarea canonică  $\tilde{x}_B : [0, \|h\|] \rightarrow C$  este

$$\tilde{x}_B(s) = (\psi \circ s_B^{-1})(s) = x^0 + (2 - 1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h = x^0 + (1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h$$

Reprezentarea  $\tilde{x}_A(s) = x^0 + \frac{1}{\|h\|} \cdot s \cdot h$  este canonică în cazul orientării de la  $A$  la  $B$ , iar reprezentarea  $\tilde{x}_B(s) = x^0 + (1 - \frac{s}{\|h\|}) \cdot h$  este canonică în cazul orientării de la  $B$  la  $A$ . În ambele reprezentări, parametrul  $s$  parcurge segmentul  $[0, l]$ .

La o curbă simplă închisă  $C$  nu mai avem două capete  $A$  și  $B$ , ca să putem vorbi de parcurgerea curbei de la  $A$  la  $B$  sau de la  $B$  la  $A$ . Cu toate acestea, și în cazul unei curbe simple închise, putem introduce două orientări care corespund la două sensuri de parcurgere a curbei. Calea este următoarea:

Pentru curba simplă închisă  $C$  considerăm o reprezentare parametrică  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  și punctul  $A = \varphi(a)$  de pe  $C$ .

Deoarece  $\varphi'(t) \neq 0$  dacă  $t$  crește de la  $a$  la  $b$  atunci  $\varphi(t)$  descrie curba parcurgând-o într-un sens. Această mișcare a lui  $\varphi(t)$  este o orientare pe curbă. Mișcarea opusă pe  $C$  este orientarea opusă. Dacă  $\psi : [c, d] \rightarrow C$  este o reprezentare parametrică oarecare a lui

$C$  atunci dacă  $t$  crește de la  $c$  la  $d$  mișcarea lui  $\psi(t)$  se face conform uneia din cele două orientări: dacă  $\frac{d}{d\tau}(\varphi \circ \psi^{-1}(\tau)) = \frac{dt}{d\tau} > 0$  atunci  $\varphi(t)$  și  $\psi(\tau)$  se mișcă în același sens dacă  $t$  crește de la  $a$  la  $b$  și  $\tau$  crește de la  $c$  la  $d$ ; dacă  $\frac{d}{d\tau}(\varphi \circ \psi^{-1}(\tau)) = \frac{dt}{d\tau} < 0$  atunci  $\varphi(t)$  și  $\psi(\tau)$  se mișcă în sensuri opuse când  $t$  crește de la  $a$  la  $b$  și  $\tau$  crește de la  $c$  la  $d$ .

Și în cazul curbei simple închise  $C$  putem considera funcția  $s_A : [a, b] \rightarrow [0, l]$  definită prin:

$$s_A(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau$$

$s_A(t)$  este lungimea arcului  $A\varphi(t)$  descris de  $\varphi(\tau)$  când  $\tau$  crește de la  $a$  la  $t$ .

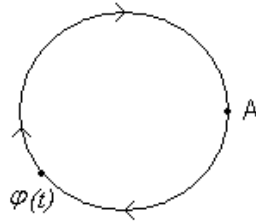


Figura 65.4:

Funcția  $s_A : [a, b] \rightarrow [0, l]$  e o bijecție și poate fi folosită pentru a defini o nouă reprezentare a lui  $C$ :  $\tilde{x} : [0, l] \rightarrow C, \tilde{x}_A = \varphi \circ s_A^{-1}$ . În aceasta reprezentare a lui  $C$ ,  $s \in [0, l]$  este parametrul și  $\tilde{x}_A(0) = \tilde{x}_A(l) = A$ , iar dacă  $s$  crește de la 0 la  $l$  atunci  $\tilde{x}_A(s)$  se mișcă pe  $C$  și descrie curba  $C$  mișcându-se în același sens ca  $\varphi(t)$ . această reprezentare este canonică modulo punctul  $A$  (unică modulo  $A$ ). Funcția  $\tilde{x}_A : [0, l] \rightarrow C$  definită prin  $\tilde{x}_A(s) = \tilde{x}_A(l - s)$  este reprezentarea parametrică canonică care corespunde orientării opuse.

De exemplu în cazul cercului:

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

pentru reprezentarea parametrică  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  cu  $t \in [0, 2\pi]$  avem:  $\varphi(0) = (1, 0, 0) = A$ ,  $s_A(t) = \int_0^t d\tau = t$ ;  $\tilde{x}_A(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ,  $s \in [0, \pi]$ ;  $\tilde{x}_A(0) = (1, 0, 0) = A$ ;  $\tilde{x}_A(s)$  se mișcă pe cerc ca în figura 65.4, iar  $\tilde{x}_A(s) = (\cos(2\pi - s), \sin(2\pi - s), 0)$  și se mișcă pe cerc ca în figura 65.5:

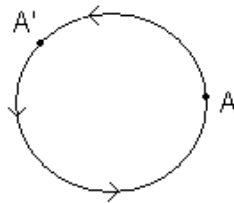


Figura 65.5:

Rezultă că o curbă simplă și o curbă simplă închisă poate fi reprezentată parametric astfel:

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)), \quad 0 \leq s \leq l$$

unde  $l$  este lungimea curbei și  $s \in [0, l]$  este lungimea arcului de curbă  $x(0)x(s) \subset C$ .

Pentru o curbă simplă  $C$  există două reprezentări de acest fel ce corespund la cele două orientări ale lui  $C$ . Pentru o curbă simplă închisă  $C$  dacă se fixează un punct  $A$  pe  $C$  atunci avem de asemenea două reprezentări corespunzătoare la cele două orientări ale curbei.

## 66 Integrala curbilinie de speța întâi.

Fie  $C$  o curbă simplă și  $x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  una din reprezentările parametrice ale ei în funcție de arcul  $s \in [0, l]$ . Există doar două reprezentări de acest fel care corespund la cele două orientări ale lui  $C$ . Pentru a face o alegere să presupunem că reprezentarea considerată  $\bar{x}(s)$  este cea corespunzătoare parcurgerii lui  $C$  de la  $A$  la  $B$ .

Fie acum  $f$  o funcție reală de trei variabile,  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită pe mulțimea deschisă  $\Omega$  care include curba simplă,  $f$  continuă în punctele curbei, adică  $f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  este continuă.

Considerăm o partiție  $P = \{A = Q_0, Q_1, \dots, Q_m = B\}$  a curbei  $C$  ( $A$  și  $B$  sunt capetele lui  $C$ )

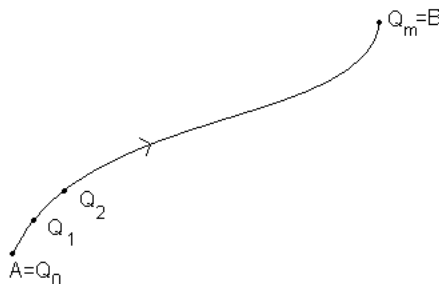


Figura 66.1:

și valorile corespunzătoare ale lungimilor arcelor determinate de punctele partiției:  $s_i =$  lungimea arcului  $AQ_i$ :

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = l$$

Alegem un punct oarecare pe fiecare porțiune de curbă:

$$R_1 \text{ între } Q_0, Q_1, R_2 \text{ între } Q_1, Q_2, \dots, R_m \text{ între } Q_{m-1}, Q_m$$

$$R_i = (x_1(s'_i), x_2(s'_i), x_3(s'_i)); \quad s'_i \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = 1, \dots, m$$

și considerăm suma

$$I_m = \sum_{i=1}^m f(R_i) \cdot (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(x_1(s'_i), x_2(s'_i), x_3(s'_i)) \cdot (s_i - s_{i-1})$$



Această sumă  $I_m$  depinde de partiția considerată și de alegerea punctelor  $R_i$ . Dacă însă norma partiției

$$\Delta P = \max\{s_i - s_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, m\}$$

tinde la zero, atunci indiferent de alegerea punctelor intermediare  $R_i$ , suma  $I_m$  tinde la un număr real  $I$  care se numește *integrala curbilinie de speța întâi a lui  $f$  pe curba  $C$*  și se notează cu

$$\int_C f ds$$

Acest fapt este imediat dacă observăm că funcția  $s \rightarrow f(x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  este continuă și suma  $I_m$  este suma Riemann a acestei funcții continue.

Din această observație rezultă și egalitatea:

$$\int_C f ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) ds$$

De aici rezultă în continuare că dacă  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  este o reprezentare parametrică oarecare a curbei  $C$ , atunci are loc egalitatea:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt$$

De aici rezultă și independența de orientare a integralei curbilinie de speța întâi.

Prin urmare, integrala curbilinie este egală cu o integrală Riemann obișnuită într-o singură dimensiune și are proprietăți similare cu aceasta.

**Propoziția 66.1.** *Au loc următoarele egalități:*

$$a) \int_C k \cdot f ds = k \cdot \int_C f ds$$

$$b) \int_C (f + g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds$$

$$c) \int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

unde curba  $C$  este reuniunea arcelor disjuncte  $C_1, C_2$ .

Toate aceste integrale sunt independente de orientarea curbei  $C$ .

Integralele curbilinie de speța întâi pe curbe simple închise se definesc în mod analog.

Pentru integrale curbilinie pe curbe închise  $C$  se folosește adesea și simbolul

$$\oint_C f ds$$

Pentru a calcula integrala curbilinie de speța întâi a unei funcții  $f$  pe o curbă simplă sau pe o curbă simplă închisă  $C$  se alege o reprezentare parametrică a curbei.

- Dacă această reprezentare este una canonică (în funcție de elementul de arc  $s$ )

$$\bar{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad 0 \leq s \leq l$$

atunci avem:

$$\int_C f ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) ds$$

- Dacă reprezentarea este dată de funcția  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$ , atunci:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt$$

**Remarca 66.1.** Integralele curbilinii ale funcțiilor care sunt date numeric sau care conduc la integrale definite complicate se calculează numeric.

## 67 Integrala curbilinii de speța a doua.

În diferite domenii ale fizicii (mecanică, electricitate etc.) și ale chimiei, se consideră integrale curbilinii de speța întâi pe curbe orientate din funcții care depind de curbă de orientarea acestora și sunt de forma:

$$f \cdot \frac{dx_1}{ds}, \quad g \cdot \frac{dx_2}{ds}, \quad h \cdot \frac{dx_3}{ds}$$

unde  $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$  sunt derivatele funcțiilor care apar în reprezentarea parametrică în funcție de lungimea arcului  $s$ .

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$$

a curbei orientate.

Aceste integrale curbilinii se numesc *integrale curbilinii de speța a doua* și se notează astfel:

$$\int_C f \frac{dx_1}{ds} ds = \int_C f dx_1$$

$$\int_C g \frac{dx_2}{ds} ds = \int_C g dx_2$$

$$\int_C h \frac{dx_3}{ds} ds = \int_C h dx_3$$

În termenii reprezentării parametrică considerate aceste integrale de speța a doua sunt egale cu următoarele integrale Riemann:

$$\int_C f dx_1 = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \frac{dx_1}{ds} ds = \int_0^l f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \alpha(s) ds$$

$$\int_C g dx_2 = \int_0^l g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \frac{dx_2}{ds} ds = \int_0^l g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \beta(s) ds$$

$$\int_C h dx_3 = \int_0^l h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \frac{dx_3}{ds} ds = \int_0^l h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \gamma(s) ds$$

unde  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$  sunt unghiurile tangentei la curbă cu axele de coordonate  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ .

În termenii unei reprezentări parametrice oarecare  $\varphi : [a, b] \rightarrow C$  care corespunde aceleiași orientări a curbei aceste integrale de speța a doua sunt egale cu următoarele integrale Riemann:

$$\int_C f dx_1 = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)}} dt$$

$$\int_C g dx_2 = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot{\varphi}_2(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)}} dt$$

$$\int_C h dx_3 = \int_a^b h(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot{\varphi}_3(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)}} dt$$

Toate aceste integrale depind de orientarea curbei  $C$ . Dacă orientarea curbei se schimbă valoarea integralei schimbă semnul.

Pentru suma celor trei integrale de speța a doua adesea se folosește notația simplificată:

$$\oint_C f dx_1 + g dx_2 + h dx_3$$

și aceasta în termeni de integrală Riemann este

$$\int_0^l [f(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \alpha(s) + g(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \beta(s) + h(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \cdot \cos \gamma(s)] ds$$

## 68 Transformarea integralelor duble în integrale curbilinii.

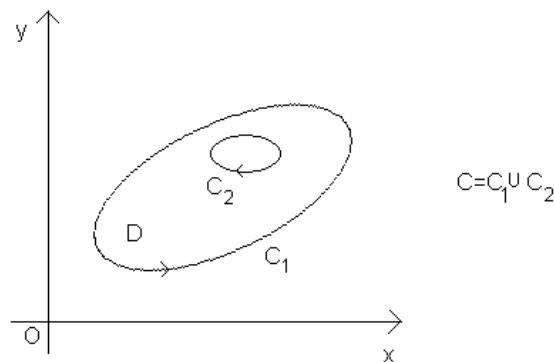
Integrala dublă pe un domeniu plan poate fi transformată în integrală curbilinie pe frontiera domeniului și reciproc. Această transformare are atât importanță teoretică cât și importanță practică și se bazează pe teorema următoare.

**Teorema 68.1** (Teorema lui Green în plan). *Fie  $D$  un domeniu mărginit în  $\mathbb{R}^2$  a cărui frontieră  $\partial D$  este o reuniune finită de curbe simple închise. Fie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de*

clasă  $C^1$ , definite pe un domeniu  $\Omega$  care conține  $\overline{D}$ ,  $\overline{D} \subset \Omega$ . În aceste ipoteze, are loc egalitatea:

$$\iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C f dx + g dy = \oint_C (f \cdot \cos \alpha + g \cdot \cos \beta) ds.$$

unde  $C$  este frontiera domeniului  $D$  și pe fiecare componentă a lui  $C$  (care, prin ipoteză, este o curbă simplă închisă) orientarea este aleasă astfel încât domeniul  $D$  este în stânga atunci când parcurgem această componentă în sensul orientării alese.

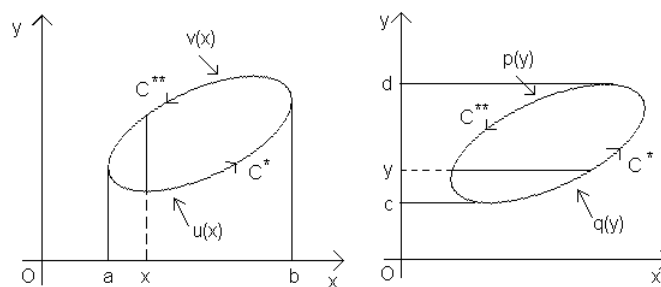


*Demonstrație.* Facem demonstrația teoremei în cazul particular în care domeniul  $D$  poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ și } y \in [u(x), v(x)]\}$$

și

$$D = \{(x, y) \mid y \in [c, d] \text{ și } x \in [p(y), q(y)]\}$$



În acest caz, avem:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [f(x, v(x)) - f(x, u(x))] dx \\
 &= - \int_a^b f(x, u(x)) dx - \int_b^a f(x, v(x)) dx = - \int_{C^*} f(x, y) dy - \int_{C^{**}} f(x, y) dx \\
 &= - \oint_C f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

deoarece  $y = u(x)$ ,  $x = x$  este reprezentarea parametrică a curbei orientate  $C^*$  și  $y = v(x)$ ,  $x = x$  este reprezentarea parametrică a curbei orientate  $C^{**}$ .

În cazul în care domeniul  $D$  nu are proprietatea menționată la începutul demonstrației, dar poate fi descompus într-o reuniune de subdomenii cu proprietatea menționată, se aplică egalitatea stabilită pe subdomenii și apoi se adună aceste egalități. Membrul drept al egalității obținute în acest fel conține integrala curbilinie pe  $C$  și integrale pe curbe introduse pentru a partiționa  $D$  în subdomenii. Fiecare din aceste integrale din urmă apare de două ori: o dată într-un sens de parcurs și o dată în sensul opus. Prin urmare, aceste integrale curbilinii se reduc și rămâne integrala curbilinie pe  $C$ .  $\square$

Acum prezentăm o a doua teoremă a lui Green, care se referă la transformarea integralei duble a Laplacianului unei funcții în integrala curbilinie a derivatei normale a funcției.

Fie  $w(x, y)$  o funcție de clasă  $C^2$  într-un domeniu  $\Omega$ .

**Definiția 68.1.** Laplacianul funcției  $w$  este, prin definiție, funcția  $\Delta w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:

$$\Delta w(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Să presupunem acum că  $\Omega$  conține un domeniu  $D$  de tipul celui considerat în teorema lui Green.

**Teorema 68.2.** Are loc următoarea egalitate:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \Delta w dx dy &= \oint_C \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} ds = \oint_C \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot n_2 \right) ds \\
 &= \oint_C \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha_2 \right) ds
 \end{aligned}$$

*Demonstrație.* În egalitățile de mai sus, expresiile

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot n_2 = \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha_2$$

sunt diferite exprimări ale derivatei normale.

Pentru demonstrație, considerăm  $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $g = \frac{\partial w}{\partial x}$  și remarcăm egalitatea

$$\Delta w = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Aplicăm teorema lui Green și obținem:

$$\begin{aligned} \iint_D \Delta w \, dx \, dy &= \oint_C -\frac{\partial w}{\partial y} \, dx + \frac{\partial w}{\partial x} \, dy = \oint_C \left[ -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} \right] ds \\ &= \oint_C \operatorname{grad} w \cdot \bar{n} \, ds \end{aligned}$$

unde:

$$\operatorname{grad} w = \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \text{și} \quad \bar{n} = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$$

Vectorul  $\bar{n}$  este versorul normalei exterioare la  $C$ . Aceasta pentru că vectorul  $\bar{\tau} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$  este versorul tangentei la  $C$  și  $\bar{\tau} \cdot \bar{n} = 0$ .

Produsul scalar  $\operatorname{grad} w \cdot \bar{n}$  este derivata normală  $\frac{\partial w}{\partial \bar{n}}$ . Am obținut astfel egalitatea:

$$\iint_D \Delta w \, dx \, dy = \oint_C \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} \, ds$$

□

Fie  $\bar{v} = \bar{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  o funcție vectorială de două variabile reale  $x, y$ , definită pe un domeniu  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de clasă  $C^1$ .

**Definiția 68.2.** Divergența lui  $\bar{v}$  este, prin definiție, funcția reală  $\operatorname{div} \bar{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

**Teorema 68.3.** Dacă  $\Omega$  conține un domeniu  $D$  de tipul celui considerat în teorema lui Green, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_D \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy = \oint_C \bar{v} \cdot \bar{n} \, ds$$

unde  $\bar{n}$  este versorul normalei exterioare la  $C$ .

*Demonstrație.* Aplicând Teorema 68.1, obținem:

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{div} \bar{v} \, dx \, dy &= \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_C -g \, dx + f \, dy \\ &= \oint_C \bar{v} \cdot \bar{n} \, ds \end{aligned}$$

□

## 69 Suprafețe simple.

Pentru a prezenta integralele de suprafață este nevoie să prezentăm în prealabil câteva elemente de bază privind suprafețele.

**Definiția 69.1.** O mulțime  $S \subset \mathbb{R}^3$  se numește suprafață simplă dacă există o mulțime mărginită  $D \subset \mathbb{R}^2$  deschisă și simplu conexă și o funcție  $\varphi : D \rightarrow S$  cu următoarele proprietăți:

a)  $\varphi$  este bijectivă;

b)  $\varphi$  este de clasă  $C^1$  și vectorul

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \overline{N}_\varphi = \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)$$

este nenul pentru orice  $(u, v) \in D$ .

Funcția  $\varphi$  se numește reprezentare parametrică a suprafeței simple  $S$ . Vectorii  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sunt tangenți la  $S$  în punctul  $\varphi(u, v)$ .

Vectorul  $\overline{N}_\varphi$  este vector normal la suprafață și vectorul  $\overline{n}_\varphi = \frac{\overline{N}_\varphi}{\|\overline{N}_\varphi\|}$  se numește versorul vectorului normal  $\overline{N}_\varphi$ .

**Exemplu 69.1.** Mulțimea  $S = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$  este o suprafață simplă. O mulțime mărginită  $D \subset \mathbb{R}^2$  deschisă și simplu conexă și o funcție  $\varphi : D \rightarrow S$  care are proprietățile a) și b) sunt:

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 1, 0 < v < 1\} \quad \text{și} \quad \varphi(u, v) = (u, v, 1)$$

Vectorul  $\overline{N}_\varphi = (0, 0, 1)$  este normal la suprafața simplă  $S$  și versorul vectorului normal  $\overline{N}_\varphi$  este  $\overline{n}_\varphi = (0, 0, 1)$ .

**Exemplu 69.2.** Mulțimea  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0, 0 < x_3 < 1\}$  este o suprafață simplă. O mulțime mărginită  $D \subset \mathbb{R}^2$  deschisă și simplu conexă și o funcție  $\varphi : D \rightarrow S$  care are proprietățile a) și b) sunt:

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 1\} \quad \text{și} \quad \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Vectorul  $\overline{N}_\varphi = (\cos u, \sin u, 0)$  este normal la suprafața simplă  $S$  și versorul vectorului normal  $\overline{N}_\varphi$  este  $\overline{n}_\varphi = (\cos u, \sin u, 0)$ .

**Exemplu 69.3.** Mulțimea  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$  este o suprafață simplă. O mulțime mărginită  $D \subset \mathbb{R}^2$  deschisă și simplu conexă și o funcție  $\varphi : D \rightarrow S$  care are proprietățile a) și b) sunt:

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \frac{\pi}{2}\} \quad \text{și} \quad \varphi(u, v) = (\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v).$$

Vectorul  $\overline{N}_\varphi = -\sin v \cdot (\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v)$  este normal la suprafața simplă  $S$  și versorul vectorului normal  $\overline{N}_\varphi$  este  $\overline{n}_\varphi = -(\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v)$ .

**Remarca 69.1.** O suprafață simplă  $S$  are o infinitate de reprezentări parametrice.

- Direcția vectorului normal  $\bar{N}$  nu depinde de reprezentarea parametrică, dar sensul vectorului normal  $\bar{N}$  depinde de reprezentarea parametrică a suprafeței  $S$ . Dacă în locul reprezentării parametrice  $\bar{x} = \varphi(u, v)$ , cu  $(u, v) \in D$  se consideră reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \psi(u', v')$ , unde  $\bar{x} = \psi(u', v') = \varphi(-u', v')$  cu  $(u', v') \in D'$  obținut din  $D$  prin transformarea  $T : D \rightarrow D'$  definită prin  $T(u, v) = (-u, v)$ , atunci sensul vectorului normal  $\bar{N}_\varphi$  construit cu reprezentarea parametrică  $\varphi$  este contrar sensului vectorului normal  $\bar{N}_\psi$  construit cu reprezentarea parametrică  $\psi$ .
- În general, dacă  $\bar{x} = \varphi(u, v)$  cu  $(u, v) \in D$  și  $\bar{x} = \psi(u', v')$  cu  $(u', v') \in D'$  sunt două reprezentări parametrice ale suprafeței  $S$ , atunci:
  - dacă Jacobianul transformării  $T = \psi^{-1} \circ \varphi$ ,  $T : D \rightarrow D'$ ,  $T(u, v) = (u', v')$  este pozitiv, atunci vectorii normalei  $\bar{N}_\varphi$  și  $\bar{N}_\psi$  au același sens;
  - dacă Jacobianul transformării  $T = \psi^{-1} \circ \varphi$ ,  $T : D \rightarrow D'$ ,  $T(u, v) = (u', v')$  este negativ, atunci vectorii normalei  $\bar{N}_\varphi$  și  $\bar{N}_\psi$  sunt de sens contrar.

**Remarca 69.2.** Fie o suprafață simplă  $S$  dată prin reprezentarea parametrică  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ ,  $x = \varphi(u, v)$ . O curbă simplă  $C$  situată pe  $S$  ( $C \subset S$ ) poate fi obținută din curba simplă  $C' = \varphi^{-1}(C)$ ,  $C' \subset D$ . O reprezentare parametrică  $u = g(t)$ ,  $v = h(t)$  cu  $t \in [a, b]$  și  $(u, v) \in D$  a curbei  $C'$ , generează reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \varphi(g(t), h(t))$  a curbei  $C$ .

**Exemplu 69.4.** În cazul suprafeței simple

$$S = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

reprezentată parametric prin  $\varphi(u, v) = (u, v, 1)$ , unde  $(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1) = D$ , mulțimea

$$C = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_3 = 1, x_1 \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \right\}$$

este o curbă simplă situată pe suprafața  $S$ . Această curbă simplă se obține din curba simplă  $C' = \varphi^{-1}(C) \subset D$  având reprezentarea parametrică:  $u = t, v = t, t \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$ . Reprezentarea parametrică a curbei  $C$  obținută pe această cale este  $\bar{x}(t) = (t, t, 1)$ .

**Exemplu 69.5.** În cazul suprafeței simple

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0, 0 < x_3 < 1\}$$

reprezentată parametric prin  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , unde  $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 1\}$ , mulțimea

$$C = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} < x_2 < \frac{1}{2} \right\}$$

este o curbă simplă situată pe suprafața  $S$ . Această curbă simplă se obține din curba simplă  $C' = \varphi^{-1}(C) \subset D$  având reprezentarea parametrică:  $u = t, v = \frac{1}{2}$ ,  $t \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$ . Reprezentarea parametrică a curbei  $C$  obținută pe această cale este  $\bar{x}(t) = \left( \cos t, \sin t, \frac{1}{2} \right)$ .



**Remarca 69.3.** Din formula de reprezentare parametrică  $\bar{x} = \varphi(u(t), v(t))$  a lui  $C \subset S$ , rezultă că tangenta la curba  $C$  este dată de:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \right)$$

Vectorii:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u} = \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \right) \quad \text{și} \quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial v} = \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \right)$$

sunt vectori tangenți la suprafața  $S$ , ei sunt liniar independenți și  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$ .

În cazul din Exemplul 69.4, tangenta la curbă este vectorul  $\frac{d\bar{x}}{dt} = (1, 1, 0)$  iar vectorii tangenți la suprafață  $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$  sunt vectorii  $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (1, 0, 0), \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 1, 0)$ .

În cazul din Exemplul 69.5, tangenta la curbă este vectorul  $\frac{d\bar{x}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0)$  iar vectorii tangenți la suprafață  $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$  sunt vectorii  $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0), \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 0, 1)$ .

Vectorul normal la suprafață  $\vec{N}$  considerat în Definiția 69.1 este de fapt produsul vectorial al vectorilor tangenți  $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ , adică:

$$\vec{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

și este perpendicular pe toți vectorii din planul tangent în punctul  $\bar{x} = \varphi(u, v)$  la suprafața  $S$ .

Dacă suprafața  $S$  este dată prin reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \varphi(u, v)$  cu  $(u, v) \in D$  și curba  $C$  situată pe  $S$  ( $C \subset S$ ) este dată prin reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \varphi(u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , atunci lungimea  $l$  a curbei  $C$  este dată de formula:

$$l = \int_a^b \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} dt$$

în care:

$$E = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t), v(t)) \right\|^2 \quad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t), v(t))$$

$$G = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\|^2 \quad \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

Expresia  $E \cdot \dot{u}^2 + 2F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2$  de sub radical se numește *prima formă fundamentală a suprafeței*  $S$ . Importanța ei rezidă în faptul că permite calcularea lungimii curbelor situate pe  $S$  și a unghiului dintre două curbe situate pe  $S$ .

Am văzut deja cum se calculează lungimea curbei  $C$  situată pe  $S$ . Pentru a vedea cum se calculează unghiul dintre două curbe situate pe  $S$  (curbe care se intersectează) considerăm curbele  $C_1$  și  $C_2$  situate pe  $S$  date prin reprezentările parametriche:

$$C_1 : \quad \bar{x} = \varphi(g(t), h(t)) \quad C_2 : \quad \bar{x} = \varphi(p(t), q(t))$$

cu  $t \in [a, b]$  și presupunem că aceste curbe se intersectează într-un punct  $P \in S$ ,  $P = \varphi(g(t_0), h(t_0)) = \varphi(p(t_0), q(t_0))$ .

Vectorul tangent în  $P$  la curba  $C_1$  este  $\overline{T}_1$  și vectorul tangent în  $P$  la curba  $C_2$  este  $\overline{T}_2$ :

$$\overline{T}_1 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot \dot{h}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \cdot \dot{h}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \dot{g} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \cdot \dot{h} \right)$$

$$\overline{T}_2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot \dot{q}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \cdot \dot{q}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \dot{p} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \cdot \dot{q} \right)$$

Unghiul în punctul de intersecție  $P$  dintre  $C_1$  și  $C_2$  este, prin definiție, unghiul  $\gamma$  dintre  $\overline{T}_1$  și  $\overline{T}_2$  în  $P$  și astfel:

$$\cos \gamma = \frac{\overline{T}_1 \cdot \overline{T}_2}{\|\overline{T}_1\| \cdot \|\overline{T}_2\|}$$

Întrucât:

$$\overline{T}_1 \cdot \overline{T}_2 = E \cdot \dot{g} \cdot \dot{p} + F(\dot{g} \cdot \dot{q} + \dot{h} \cdot \dot{p}) + G \cdot \dot{h} \cdot \dot{q}$$

$$\|\overline{T}_1\| = \sqrt{E \cdot \dot{g}^2 + 2F \cdot \dot{g} \cdot \dot{h} + G \cdot \dot{h}^2}$$

$$\|\overline{T}_2\| = \sqrt{E \cdot \dot{p}^2 + 2F \cdot \dot{p} \cdot \dot{q} + G \cdot \dot{q}^2}$$

obținem că unghiul dintre cele două curbe se exprimă în termeni de  $E, F, G$  și derivatele funcțiilor care reprezintă curbele.

Vom arăta în continuare cum se calculează aria unei porțiuni de pe suprafața  $S$ .

Aria  $A$  a unei porțiuni  $S'$  de pe suprafața simplă  $S$ , reprezentată parametric prin  $\overline{x} = \varphi(u, v)$  cu  $(u, v) \in D$ , este dată de:

$$A = \iint_R \sqrt{EG - F^2} du dv$$

unde  $R$  este partea din  $D$  ce corespunde porțiunii  $A$ .

Formula aceasta a ariei provine din egalitatea:

$$\Delta A = \sqrt{EG - F^2} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

în care  $\Delta A$  reprezintă aria unui paralelogram având laturile

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} \cdot \Delta u \quad \text{și} \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} \cdot \Delta v$$

Această din urmă egalitate provine din definiția produsului vectorial:

$$\Delta A = \left| \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} \cdot \Delta u \times \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} \cdot \Delta v \right| = \left| \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v = \sqrt{EG - F^2} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

Aria porțiunii  $S'$  se obține împărțind  $S'$  în părți mici  $S_1, S_2, \dots, S_n$  și aproximând aria fiecărei părți  $S_k$  prin aria paralelogramului din planul tangent la  $S$  într-un punct din  $S_k$  și făcând suma ariilor aproximative. Aceasta se face pentru  $n = 1, 2, \dots$  astfel ca dimensiunile

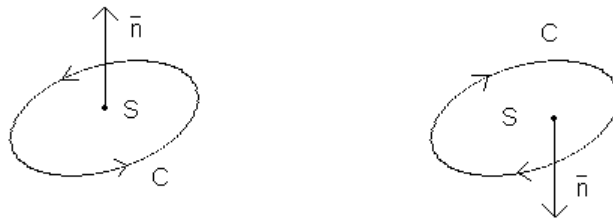
celui mai mare  $S_k$  să tindă la zero atunci când  $n \rightarrow \infty$ . Limita acestor sume este integrala.

În diverse aplicații apar integrale de suprafață pentru care conceptul de orientare a suprafeței este esențial.

În cazul unei suprafețe simple  $S$  pentru versorul normal  $\bar{n}$  există două sensuri posibile și la fiecare din aceste sensuri asociem o orientare a suprafeței, așa cum am făcut la orientarea curbelor cu ajutorul sensului de parcurs.

Mulțimea reprezentărilor parametrice ale suprafeței simple se descompune în două clase (submulțimi) disjuncte. Pentru toate reprezentările dintr-o clasă avem una din cele două sensuri ale normalei (o orientare) pentru toate reprezentările din cealaltă clasă avem orientarea opusă a normalei (cealaltă orientare).

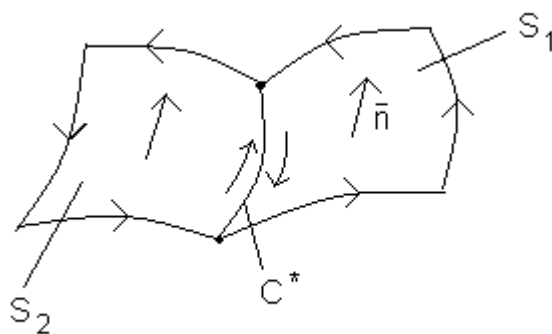
Dacă frontiera lui  $S$  este o curbă simplă închisă  $C$ , atunci putem asocia celor două orientări posibile ale suprafeței simple  $S$  câte o orientare a lui  $C$ , așa cum este reprezentat pe figura următoare:



Regula este următoarea: privind din vârful versorului normalei, sensul de parcurs pe curbă este contrar acelor de ceasornic.

Folosind acest concept putem extinde conceptul de orientare la suprafețe care pot fi descompuse în suprafețe simple (sunt suprafețe simple pe porțiuni).

O suprafață  $S$  care se descompune în suprafețe simple este orientabilă dacă putem orienta fiecare parte simplă astfel încât de-a lungul curbelor  $C^*$ , care sunt frontiere comune a două părți  $S_1, S_2$ , direcția pozitivă pe  $C^*$  relativ la  $S_1$  să fie contrară direcției pozitive pe  $C^*$  relativ la  $S_2$ .



**Exemplu 69.6.** Suprafața unui paralelipiped este o suprafață netedă pe porțiuni, orientabilă.

**Definiția 69.2.** O suprafață  $S$  este orientabilă dacă pentru orice  $P_0 \in S$  și orice curbă simplă închisă  $C \subset S$  care trece prin  $P_0$  sensul normalei nu se inversează atunci când aceasta se deplasează pe  $C$  de la  $P_0$  și revine în  $P_0$ .

**Remarca 69.4.** O suprafață simplă  $S$  este întotdeauna orientabilă. Există însă suprafețe care nu sunt orientabile, cum este *banda lui Möbius*.

## 70 Integrale de suprafață de speța întâi.

Fie  $S$  o suprafață simplă de arie finită dată prin reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \varphi(u, v)$  cu  $(u, v) \in D$  și  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă cu proprietatea  $\Omega \subset S$ .

Împărțim suprafața  $S$  în  $n$  suprafețe mai mici  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , având ariile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . În fiecare parte  $S_k$  alegem un punct oarecare  $P_k$  și considerăm suma:

$$I_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \cdot A_k$$

**Definiția 70.1.** Dacă  $n$  crește și  $S_1, S_2, \dots, S_n$  sunt astfel încât cel mai mare  $S_k$  tinde la un punct pentru  $n \rightarrow \infty$ , atunci șirul de numere  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  tinde la un număr care nu depinde de diviziune și de alegerea punctelor  $P_k$ . Această limită se numește integrala de suprafață de speța întâi a funcției  $f$  pe  $S$  și se notează cu

$$\iint_S f(x_1, x_2, x_3) dS$$

De fapt, șirul  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  tinde la integrala dublă

$$\iint_D f(\varphi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

și valoarea acestei integrale duble este integrala de suprafață de speța întâi a lui  $f$  pe  $S$ :

$$\iint_S f(x_1, x_2, x_3) dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Valoarea integralei de suprafață de speța întâi nu depinde de reprezentarea parametrică a suprafeței.

## 71 Integrale de suprafață de speța a doua.

Fie  $S$  o suprafață simplă având reprezentarea parametrică  $\bar{x} = \varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ . Orientăm  $S$  cu versorul normalei  $\bar{n}$ ,  $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|}$ , dat de această reprezentare.

$$\bar{N} = \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \quad (u, v) \in D$$

Notăm cu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  unghiurile dintre  $\bar{n}$  și direcțiile pozitive ale axelor de coordonate  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  și avem:

$$\bar{n} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$$

Fie acum funcțiile  $W_1 = W_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $W_2 = W_2(x_1, x_2, x_3)$ ,  $W_3 = W_3(x_1, x_2, x_3)$  definite și continue în orice punct din  $S$ .

**Definiția 71.1.** *Integralele de suprafață notate cu*

$$\iint_S W_1 dx_2 dx_3 \quad \iint_S W_2 dx_3 dx_1 \quad \iint_S W_3 dx_1 dx_2$$

definite prin:

$$\begin{aligned} \iint_S W_1 dx_2 dx_3 &= \iint_S W_1 \cdot \cos \alpha_1 dS \\ \iint_S W_2 dx_3 dx_1 &= \iint_S W_2 \cdot \cos \alpha_2 dS \\ \iint_S W_3 dx_1 dx_2 &= \iint_S W_3 \cdot \cos \alpha_3 dS \end{aligned}$$

se numesc integrale de suprafață de speța a doua.

Integralele de suprafață de speța a doua sunt integrale de suprafață de speța întâi din funcții care depind de suprafață și de orientarea suprafeței.

Este clar că valoarea unei asemenea integrale depinde de  $\bar{n}$  (de reprezentarea parametrică) care definește o orientare a lui  $S$ . Trecerea la orientarea opusă corespunde înmulțirii cu  $-1$  a integralei, deoarece componentele  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$  ale lui  $\bar{n}$  se înmulțesc cu  $-1$ .

Suma celor trei integrale de suprafață de speța a doua poate fi scrisă într-o formă simplă alegând o notație vectorială:

$$\bar{W} = (W_1(x_1, x_2, x_3), W_2(x_1, x_2, x_3), W_3(x_1, x_2, x_3))$$

și obținem:

$$\begin{aligned} \iint_S W_1 dx_2 dx_3 + W_2 dx_3 dx_1 + W_3 dx_1 dx_2 &= \iint_S (W_1 \cdot \cos \alpha_1 + W_2 \cdot \cos \alpha_2 + W_3 \cdot \cos \alpha_3) dS \\ &= \iint_S \overline{W} \cdot \overline{n} dS \end{aligned}$$

Fiecare integrală de suprafață de speța a doua se exprimă ca o integrală dublă în termenii reprezentării parametrice:

$$\begin{aligned} \iint_S W_1 dx_2 dx_3 &= \iint_D W_1(\varphi(u, v)) \cdot \frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v)} du dv \\ \iint_S W_2 dx_3 dx_1 &= \iint_D W_2(\varphi(u, v)) \cdot \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(u, v)} du dv \\ \iint_S W_3 dx_1 dx_2 &= \iint_D W_3(\varphi(u, v)) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)} du dv \end{aligned}$$

## 72 Proprietăți ale integralelor de suprafață.

Integralele de suprafață de speța întâi și cele de speța a doua sunt liniare și aditive. Aceasta întrucât ele se reduc la integrale duble care au aceste proprietăți. Astfel avem:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \iint_S k \cdot f dS &= k \cdot \iint_S f dS \\ \text{b)} \quad \iint_S (f + g) dS &= \iint_S f dS + \iint_S g dS \\ \text{c)} \quad \iint_S f dS &= \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS \end{aligned}$$

Pe lângă aceste proprietăți, integralele de suprafață au următoarele proprietăți importante.

Fie  $A$  o mulțime mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^3$  a cărei frontieră este o suprafață orientabilă  $S$ , simplă pe porțiuni.

**Teorema 72.1** (teorema de divergență a lui Gauss). *Dacă funcția vectorială  $\overline{u}$  este de clasă  $C^1$  pe un domeniu care conține mulțimea  $A$ , atunci are loc egalitatea:*

$$\iiint_A \operatorname{div} \overline{u} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S \overline{u} \cdot \overline{n} dS$$

unde  $\overline{n}$  este versorul normalei exterioare la  $S$ .

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică. □

**Consecința 72.1.** Dacă  $\bar{u} = \text{grad } f$ , atunci:

$$\iiint_A \Delta f \, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \, dS$$

și pentru  $\Delta f = 0$  avem:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \, dS = 0$$

**Consecința 72.2.** Dacă  $\bar{u} = f \cdot \text{grad } g$ , atunci:

$$\text{div } \bar{u} = f \cdot \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g$$

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = f \cdot (\bar{n} \cdot \text{grad } g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{n}}$$

și

$$\iiint_A (f \cdot \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) \, dV = \iint_S f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} \, dS$$

Această egalitate poartă numele de prima formulă a lui Green.

Schimbând rolurile lui  $f$  și  $g$  și scăzând se obține egalitatea:

$$\iiint_A (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, dV = \iint_S (f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{n}}) \, dS$$

care poartă denumirea de cea de a doua formulă a lui Green.

Fie  $S$  o suprafață simplă orientată, a cărei frontieră este o curbă simplă închisă  $C$  orientată conform regulii descrise după Remarca 69.4

**Teorema 72.2** (Stokes). Dacă funcția vectorială  $\bar{v} = \bar{v}(x_1, x_2, x_3)$  este de clasă  $C^1$  într-un domeniu care conține suprafața  $S$ , atunci:

$$\iint_S (\text{rot } \bar{v}) \cdot \bar{n} \, dS = \int_C \bar{v} \cdot \bar{t} \, ds$$

unde:  $\text{rot } \bar{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$ ,  $\bar{n}$  este versorul normalei la  $S$ , iar  $\bar{t}$  este versorul tangentei la  $C$ .

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică. □

## 73 Derivarea integralelor cu parametru.

Există situații în care funcția care se integrează depinde nu numai de variabila de integrare  $x$ , ci și de un parametru real  $t$  (de exemplu, timpul). Mai mult, domeniul pe care se calculează integrala depinde și el de timpul  $t$ . În aceste cazuri valoarea integralei depinde și ea de parametrul real  $t$ .

În această secțiune vom prezenta condiții suficiente de derivabilitate în raport cu parametrul  $t$  a unei asemenea integrale.

Mai întâi considerăm cazul 1-dimensional:

$$I(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$$

**Teorema 73.1.** *Dacă funcțiile  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt derivabile pe  $[c, d]$  ( $\varphi(t) < \psi(t)$ ,  $\forall t \in [c, d]$ ) și funcția  $f(t, x)$  este continuă în raport cu  $x$  pe intervalul  $[\varphi(t), \psi(t)]$  și este de clasă  $C^1$  în raport cu  $t$ , atunci funcția  $I(t)$  este derivabilă și avem:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx = \psi'(t) \cdot f(t, \psi(t)) - \varphi'(t) \cdot f(t, \varphi(t)) + \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică. □

**Consecința 73.1.** *Dacă funcția  $f(t, x)$  este continuă în raport cu  $x$  pe intervalul  $[a, b]$  și este de clasă  $C^1$  în raport cu  $t$ , atunci:*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

Fie acum  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu și  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  un interval deschis. Considerăm o funcție  $\bar{x} : (a, b) \times D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clasă  $C^1$  și o submulțime mărginită  $\omega_0 \subset D$  a cărei frontieră  $S_0$  este o suprafață simplă pe porțiuni.

Pentru un  $t$  arbitrar, dar fixat, notăm cu  $\omega(t)$  mulțimea:

$$\omega(t) = \{\bar{x}(t, \xi) \mid \xi \in \omega_0\}$$

și presupunem că jacobianul  $\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$  funcției  $\bar{x}_t : \omega_0 \rightarrow \omega(t)$  definită prin  $\bar{x}_t(\xi) = \bar{x}(t, \xi)$  este nenul.

Considerăm acum o funcție  $F : (a, b) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$  și integrala:

$$I(t) = \iiint_{\omega(t)} F(t, x) dx_1 dx_2 dx_3$$



**Teorema 73.2.** *Funcția  $I(t)$  este de clasă  $C^1$  și are loc egalitatea:*

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3 + \iint_{S(t)} F \cdot \bar{v} \cdot \bar{n} dS$$

unde  $S(t)$  este frontiera lui  $\omega(t)$ ,  $\bar{v} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$  și  $\bar{n}$  este versorul normalei exterioare a lui  $S(t)$ .

*Demonstrație.* Demonstrația este tehnică. □

## BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Haggarty, *Fundamentals of Mathematical Analysis*; Addison-Wesley, 1989, Oxford
- [2] A. B. Israel, R. Gilbert, *Computer-Supported Calculus*; Springer Wien New York, 2001, RISC Johannes Kepler University, Linz, Austria
- [3] C. Lanczos, *Applied Analysis*; Sir Isaac Pitman, 1967, London
- [4] F. Ayres, J. Cault, *Differential and Integral Calculus in Simetric Units*; Mc.Grow-Hill, 1988
- [5] A. Jeffrey, *Mathematics for engineers ad scientists*; Van Nostrand, 1961
- [6] E. Kreiszig, *Advanced engineering mathematics*; Wiley & Sons, 1967
- [7] O. V. Manturov, N. M. Matveev, *A course of higher mathematics*; Mir, 1989