A FÓRMULA DE CARDANO ALÉM DAS CÚBICAS

José Cloves Verde Saraiva, São Luis – MA

♦ Nível Avançado.

INTRODUÇÃO:

Motivado pela leitura do trabalho Equação do Terceiro Grau do Professor Alberto de Azevedo [1], ocorreu-me a curiosidade de saber as fórmulas das raízes calculadas por radicais de uma equação polinomial do 5º grau, solúvel, que não fosse a trivial $x^5 + a = 0$, que todos conhecem. Daí então, seguindo os mesmos passos da dedução da fórmula de Cardano para as equações polinomiais cúbicas foi possível provar que a $x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2x - r = 0$, já estudada por DE MOIVRE, tem raízes dadas por uma fórmula análoga a de Cardano. Além desta, outras fórmulas semelhantes são possíveis deduzir para graus maiores que o quinto.
Deixamos para o leitor essa generalização!.

A FÓRMULA DE CARDANO:

É fascinante toda a história da resolução das equações polinomiais do 3º grau. Em resumo a referência [2] apresenta o seguinte:
"O descobridor do método foi Scipione del Ferro (1465 - ≈ 1562), matemático italiano, que antes de morrer o revelou aos discípulos Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave".
"Houve uma disputa matemática entre Fior contra Niccolo Fontana (1500 – 1557), conhecido pelo apelido de Tartaglia (gago, em italiano). A vitória deste último, muito divulgada, foi do conhecimento do médico e professor Girolano Cardano (1501 – 1576) que conseguiu lhe atrair para ensinar a regra de resolução sob o juramento de jamais publicá-la. Cardano procurou a demonstração da regra - e achou - e ainda motivou seu discípulo Ludovico Ferrari (1522 – 1565) a descobrir solução para as equações do quarto grau."
"Cardano, numa visita a Della Nave, soube do manuscrito de Del Ferro contendo a regra de Tartaglia que já existia há 30 anos. Motivo que o levou quebrar o juramento. Publicou os métodos no seu famoso livro *Ars Magna*, em 1545, onde não deixou de fazer referência aos descobridores, embora a contragosto de Tartaglia que se considerou traído."
Podemos representar a equação geral do 3º grau na forma $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ e por uma mudança de variável $x = y - \frac{a_1}{3}$ a equação fica mais simples na forma $y^3 - py - q = 0.$ Calculando o cubo de um binômio $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$, e pondo em evidência $3uv$, temos:

$$(*)\ (u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3 + v^3)$$

ou melhor,

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$$

isto é, $y = u + v$ é uma raiz para valores de $p = 3uv$ e $q = u^3 + v^3$, onde podemos elevar ao cubo a primeira e ter $\frac{p^3}{27} = u^3v^3$ e $q = u^3 + v^3$ e cair num problema onde u^3 e v^3 são as raízes de uma equação do 2º grau conhecendo a soma e o produto das raízes, cuja solução é conhecida:

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

donde obtemos a famosa fórmula de Cardano:

$$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

A FÓRMULA DE CARDANO ALÉM DAS CÚBICAS:

O resultado principal destas notas foi motivado por uma analogia da dedução na fórmula de Cardano. Vamos provar que: a equação $x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2 x - r = 0$ tem uma de suas raízes dada pela fórmula:

$$x = u + v = \sqrt[5]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^5}{3125}}} + \sqrt[5]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^5}{3125}}}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Considere $x^5 - px^3 - qx - r = 0$. Calculemos polinômios do binômio:

$$(u+v)^5 = u^5 + 5u^4 v + 10u^3 v^2 + 10u^2 v^3 + 5uv^4 + v^5$$

pondo em evidência obtemos:

$$(u+v)^5 = 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2 v^2 (u+v) + (u^5 + v^5)$$

da igualdade (*) obtemos que:

$$(u^3 + v^3) = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$$

para substituir no desenvolvimento donde obtemos que:

$$(u+v)^5 = 5uv(u+v)^3 - 15u^2 v^2 (u+v) + 10u^2 v^2 (u+v) + (u^5 + v^5),$$

isto é,

$$(u+v)^5 = 5uv(u+v)^3 - 5u^2 v^2 (u+v) + (u^5 + v^5)$$

o que permite obter as igualdades: $p = 5uv$; $q = -5u^2v^2$ e $r = u^5 + v^5$.

Estabelecemos $p^2 = 25u^2 v^2$, logo temos que $q = -\frac{p^2}{5}$ faz com que a equação seja da forma

$x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2 x - r = 0,$ se $x = u + v$ for uma raiz.

Verificar as relações $\begin{cases} r = u^5 + v^5 \\ p = 5uv \end{cases}$ nos leva ao já estudado na dedução da fórmula de Cardano

$r = u^5 + v^5$ e $\left(\frac{p}{5}\right)^5 = u^5 v^5$, da mesma forma as raízes são:

$$u^5 = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^5}{5^5}} \quad \text{e} \quad v^5 = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^5}{5^5}}$$

de onde concluímos que a raiz $x = u + v$ é dada pela fórmula:

$$x = \sqrt[5]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^5}{3125}}} + \sqrt[5]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{p^5}{3125}}}.$$

OBSERVAÇÕES FINAIS:

Esta fórmula torna mais fácil a determinação das raízes do que a indicada por De Moivre estudada na referência [3], onde uma análise completa das raízes e o estudo dos Grupos de Galois nos diversos casos é feito.

Como exercício estude a sétima $x^7 + px^5 - qx^3 + rx + s = 0$ e generalize.

Finalizando, seria interessante o leitor paciente calcular todas as raízes da equação abaixo estudada por Adriaan van Roomen (1561 – 1615) por polinômios trigonométricos.

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740259x^{35} + 3764565x^{33} -$$
$$- 14945040x^{31} + 46955700x^{29} - 117679100x^{27} + 236030652x^{25} - 378658800x^{23} +$$
$$+ 483841800x^{21} - 488494125x^{19} + 384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x^{13} -$$
$$- 34512075x^{11} + 7811375x^{9} - 1138500x^{7} + 95634x^{5} - 3795x^{3} + 45x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

(Ver referência [4], pp 154).

REFERÊNCIAS:

[1] Alberto de Azevedo, *Equação do 3º grau*, Depto. Matemática, UNB, 2002.
[2] César Polcino Milies, *A Resolução das equações de terceiro e quarto graus*, Notas de aula, IME-USP, 2000.
[3] R.L. Borger, *On De Moivre' s Quintic, American Math. Monthly*, pp. 171 - 174, vol. 15, 1908.
[4] Paulo A. Martin, *Introdução à Teoria dos Grupos e a Teoria de Galois*, IME-USP, 1996.