Talousmatematiikka (3 op)

Tero Vedenjuoksu

Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos

2011

Talousmatematiikka 2011

- Yhteystiedot:

  Tero Vedenjuoksu
  tero.vedenjuoksu@oulu.fi
  Työhuone M231

- Kurssin kotisivu

  http://cc.oulu.fi/∼tvedenju/talousmatematiikka/

- Luennot salissa L7
- Laskariryhmät:
  - ma 8-10 M101
  - ti 10-12 KO143
  - pe 10-12 BK122

Kurssin suoritus

1. Loppukoe/päättökoe (ajankohta sovitaan myöhemmin)
2. Kurssin jälkeen pidettävään päättökokeeseen luetaan hyväksi myös laskuharjoituksista saatavat pisteet.
3. Laskuharjoituspisteitä saa seuraavan taulukon mukaisesti:

Harjoituspisteet

Tehdyt tehtävät	Pisteet
alle 25%	0 p.
25%-50%	1 p.
50%-75%	2 p.
yli 75%	4 p.

Sisältö

Sisältö

Kurssin opiskelusta

Huomio

a) Älä opettele kaavoja ulkoa.
b) Yritä liittää esitetty teoria/kaava aina johonkin esimerkkiin.
c) Kysy tarvittaessa!
d) Tee harjoitustehtäviä!

Kysymyksiä joihin osataan pian vastata

Kysymyksiä

a) Miten selvittää talletettavan rahamäärän suuruus kun halutaan säästää tietty summa esimerkiksi 5 vuodessa?
b) Kuinka lasketaan lainan kuukausierän suuruus kun laina-aikana on 20 vuotta?
c) Kuinka paljon laina/luotto oikeasti “maksaa”?
d) Miten tutkia investoinnin kannattavuutta?
e) Miten rahan arvon muutoksia seurataan?
f) Miten seurata erilaisten hyödykkeiden kulutuksen muutoksia?

KORKOLASKENTAA

Prosenttilaskua

Jos luku a *kasvaa* $p\%$, niin uusi arvo on

$$a + \frac{p}{100} \cdot a.$$

Jos luku a *vähenee* $p\%$, niin uusi arvo on

$$a - \frac{p}{100} \cdot a.$$

Prosenttilaskua

Esimerkki 1

Paljonko on 1500€ maksava tuote 15% alennusmyynnissä?

$$1500\,e - \frac{15}{100} \cdot 1500\,e = 1275\,e \quad (= 0,85 \cdot 1500\,e)$$

Prosenttilaskua

Montako prosenttia luku a on luvusta b?

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%$$

Prosenttilaskua

Esimerkki 2

Montako prosenttia luku a on luvusta b?

a) $a = 15,\ b = 90$

b) $a = 90,\ b = 15$

a)

$$\frac{15}{90} \cdot 100\% = 16,7\% \quad (= 0,1666666\ldots \approx 0,167)$$

b)

$$\frac{90}{15} \cdot 100\% = 600\% \quad (= 6,00)$$

Prosenttilaskua

Kuinka monta prosenttia p luku a on suurempi (pienempi) kuin luku b?

$$p = \frac{a-b}{b} \cdot 100\%$$

Prosenttilaskua

Esimerkki 3

a) *Kuinka monta % luku 160 on suurempi kuin 20 ?*
b) *Kuinka monta % luku 25 on pienempi kuin 175?*
c) *Kuinka monta % luku 20 on pienempi kuin 160 ?*

a)

$$\frac{160-20}{20} = 7 \qquad Vast.\ 700\%$$

b)

$$\frac{175-25}{175} = 0,857 \qquad Vast.\ 85,7\%$$

c)

$$\frac{160-20}{160} = 0,875 \qquad Vast.\ 87,5\%$$

Prosenttilaskua

Esimerkki 4

a) *Mistä luvusta 24 on 32%?*
b) *Mitä lukua 80 on 20% pienempi?*
c) *Mikä luku on 15 % suurempi kuin 50?*
d) *Mikä luku on 10% pienempi kuin 30?*
e) *Mikä luku on 32% luvusta 24?*

a)

$$\frac{24}{x} = 0,32 \quad \Leftrightarrow \quad 0,32x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{24}{0,32} = 75$$

Prosenttilaskua

b) (Mitä lukua 80 on 20% pienempi?)

$$\frac{x-80}{x} = 0,2 \Leftrightarrow 0,2x = x - 80 \Leftrightarrow 0,8x = 80 \Leftrightarrow x = 100$$

c) (Mikä luku on 15 % suurempi kuin 50?)

$$\frac{x-50}{50} = 0,15 \quad \Leftrightarrow \quad x - 50 = 7,5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 57,5$$

d) (Mikä luku on 10% pienempi kuin 30?)

$$\frac{30-x}{30} = 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad 30 - x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 27$$

Prosenttilaskua

e) (Mikä luku on 32% luvusta 24?)

$$\frac{x}{24} = 0,32 \quad \Leftrightarrow \quad x = 24 \cdot 0,32 = 7,68$$

Yksinkertainen korkolasku

- *Korko* on korvaus lainaksi saadusta/annetusta rahapääomasta (esim. luotto tai talletus).
- *Korkokanta* i on prosenttiluku, joka ilmoittaa kuinka prosenttia (%) pääoma kasvaa korkojakson aikana.

Korkojakso	Korkokanta
1 vuosi	i pa. (*per annum*)
6 kk	i ps. (*per semester*)
3 kk	i pq. (*per quartal*)
1 kk, 2 kk	i per (1) kk, i per 2 kk

Yksinkertainen korkolasku

- Yksinkertaista korkolaskua sovelletaan *ainoastaan yhden korkojakson sisällä*.

Yksinkertainen korko

Pääoma ajanhetkellä t $(0 \leq t \leq 1)$ on

$$K_t = K_0 \cdot (1 + it), \tag{1}$$

missä

$$\begin{cases} K_0 = \text{alkupääoma}(t = 0) \\ i = \text{korkokanta} \\ t = \frac{\text{jaksosta kulunut aika}}{\text{korkojakson pituus}} (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

- *Korko* ajanhetkellä t on $K_t - K_0 = K_0 it$.

Yksinkertainen korkolasku

- Korko on siis suoraan verrannollinen kuluneeseen aikaan korkojakson sisällä, koska

$$K_0 it = ct,$$

missä $c = K_0 i =$vakio.

- Pääoman kasvu on siis lineaarista korkojakson sisällä. (vrt. kuva)

Kysymys

Mitä tapahtuu korkojakson lopussa?

Vastaus

Korkojakson lopussa *korko liitetään pääomaan* eli realisoidaan. Uusi kasvanut pääoma toimii seuraavan korkojakson alkupääomana.

Yksinkertainen korkolasku

- Yksinkertaista korkolaskua käyttävät esim. pankit (korko talletuksille).
- Prolongointi: "pääomaa siirretään ajassa eteenpäin".

Esimerkki 5

Talletetaan 25 000€ korkokannalla 6% pa. Määrää talletuksen arvo a) vuoden b) 8 kk:n c) 16 kk:n kuluttua? d) 16 kk:n kuluttua, ilman että korko realisoidaan pääomaan aina korkojakson lopussa.

a)

$$
\begin{aligned}
K_0 &= 25000\, e \\
i &= 0,06 pa \quad (\Rightarrow \text{ korkojakson pituus 1 vuosi}) \\
t &= 1 \\
\Rightarrow K_t &= K_0(1+it) = 25000\, e \cdot (1 + 0,06 \cdot 1) \\
&= 25000\, e \cdot 1,06 = 26500\, e
\end{aligned}
$$

b) (aika 8 kk)

$$
\begin{aligned}
K_0 &= 25000\, e \\
i &= 0,06 pa \quad (\Rightarrow \text{ korkojakson pituus 1 vuosi eli 12 kk}) \\
t &= \frac{8}{12} \\
\Rightarrow K_t &= K_0(1+it) = 25000\, e \cdot (1 + 0,06 \cdot \frac{8}{12}) \\
&= 26000\, e
\end{aligned}
$$

Yksinkertainen korkolasku

c) (aika $16kk = 1v + 4kk$)

$$K_0 = 25000\,e$$
$$i = 0,06pa \quad (\Rightarrow \text{ korkojakson pituus 1 vuosi eli 12 kk})$$

Nyt aika menee korkojakson yli, joten joudutaan laskemaan osissa:

$$K_1 = 25000\,e \cdot (1 + 0,06 \cdot 1) = 26500\,e$$

Realisoidaan korko pääomaan, jolloin

$$K_2 = 26500\,e \cdot (1 + 0,06 \cdot \frac{4}{12}) = 27030\,e$$

Yksinkertainen korkolasku

c) (aika $16kk = 1v + 4kk$) Lasketaan ilman, että realisoidaan pääomaa.

$$K_0 = 25000\,e$$
$$i = 0,06pa \quad (\Rightarrow \text{ korkojakson pituus 1 vuosi eli 12 kk})$$
$$t = \frac{16}{12}$$
$$\Rightarrow K_t = 25000\,e \cdot (1 + 0,06 \cdot \frac{16}{12}) = 27000\,e$$

Huom. 30 € erotus c) kohtaan verrattuna. (Miksi?)

Yksinkertainen korkolasku

Esimerkki 6

Mikä on alkupääoman 18 000€ arvo 10 kk kuluttua, kun korkokantana on a) 8% pa. b) 5% ps.? c) 5% ps. (ilman koron realisointia pääomaan)?

a) Korkojaksona 12 kk, joten 10 kk kuluttua pääoman arvo on

$$K_t = K_0(1 + it) = 18000\,e(1 + 0,08 \cdot \frac{10}{12}) = 19200\,e$$

b) Korkojaksona 6 kk ($<$ 10kk), joten lasketaan osissa:

$$0 \to 6\ kk: \quad K_1 = 18000\,e(1 + 0,05 \cdot 1) = 18900\,e$$

$$6 \to 10\ kk: \quad K_t = 18900\,e(1 + 0,05 \cdot \frac{4}{6}) = 19530\,e$$

Yksinkertainen korkolasku

c) Korkojaksona 6 kk eikä realisoida korkoa pääomaan

$$K_t = K_0(1 + it) = 18000\,e(1 + 0,05 \cdot \frac{10}{6}) = 19500\,e$$

Huom. 30€ erotus b) kohtaan verrattuna.

Yksinkertainen korkolasku

Esimerkki 7

Mikä korkokanta i% pa. vastaa pääoman 7 % kasvua 3 kuukaudessa?

Nyt K_0 = alkupääoma, korkojakso $= 12kk$ ja $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} K_0(1 + i\frac{1}{4}) &= 1,07 \cdot K_0 \\ 1 + i\frac{1}{4} &= 1 + \frac{7}{100} \\ i &= 4 \cdot \frac{7}{100} = \frac{28}{100} = 28\% \end{aligned}$$

Yksinkertainen korkolasku

Esimerkki 8

Missä ajassa pääoma kasvaa 8%, kun korkokanta on a) 10% pa. b) 5% ps.?

a) Korkojakson pituus 12 kk.

$$\begin{aligned} K_0(1 + 0,1t) &= 1,08 \cdot K_0 \\ 1 + 0,1t &= 1,08 \\ 0,1t &= 0,08 \\ t &= \frac{0,08}{0,1} = 0,8 \end{aligned}$$

Siis kysytty aika on $0,8 \cdot 12kk = 9,6kk$.

b) Nyt korkokantana on 5% ps., joten yksi korkojakso ei riitä 8% kasvuun.
Pääoman K_0 arvo 1. jakson lopussa:

$$K_1 = K_0(1 + 0,05 \cdot 1) = 1,05 \cdot K_0$$

Pääoman K_0 arvo 2. jakson hetkellä t:

$$K_t = K_1(1 + 0,05 \cdot t) = 1,05 \cdot (1 + 0,05t)K_0$$

Siis onko mahdollista 2. jaksossa, että $K_t = 1,08 \cdot K_0$?

$$\begin{aligned} 1,05 \cdot (1 + 0,05t)K_0 &= 1,08 \cdot K_0 \\ 1,05 + 1,05 \cdot 0,05t &= 1,08 \\ 1,05 \cdot 0,05t &= 1,08 - 1,05 \\ t &= \frac{0,03}{1,05 \cdot 0,05} = 0,571 (< 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kysytty aika: $6kk + 0,571 \cdot 6kk \approx 9,4kk$.

- Yksinkertaista korkolasku *yhden korkojakson sisällä* ajanhetkellä t $(0 \leq t \leq 1)$ on

$$K_t = K_0 \cdot (1 + it), \tag{2}$$

missä

$$\begin{cases} K_0 = \text{alkupääoma}(t = 0) \\ i = \text{korkokanta} \\ t = \frac{\text{jaksosta kulunut aika}}{\text{korkojakson pituus}} (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

- Entä jos halutaan määrätä tunnettua (tulevan) ajanhetken $t > 0$ pääomaa K_t vastaava alkupääoman arvo K_0?