Band 1

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

I

Erster Band.
1890—91.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1890—91, Bericht über die auf der Versammlung in Halle a. S. 1891 gehaltenen Vorträge, sowie einen ausführlichen

Bericht über die
Fortschritte der projectiven Invariantentheorie
im letzten Vierteljahrhundert,

von Dr. **W. Franz Meyer,**
Prof. der Mathematik a. d. Kgl. Bergakademie Clausthal.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Cantor in Halle a. S. **W. Dyck** in München **E. Lampe** in Berlin.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1892.

II

III

Inhalt.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Bericht über die wissenschaftlichen Sitzungen

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Verbindung mit der ersten Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, abgehalten auf der Versammlung zu Halle, 22—26. September 1891.

Inhaltsverzeichnis.

Druckfehler.

(Ohne nähere Angabe bedeutet Z. Zeile des Textes.)

Seite 88	Anm. ***) Z. 3.	Statt 1892 ist zu lesen 1891.
- 94	Z. 7 von oben.	Statt: „einer binären Form“ ist zu lesen: „von binären Formen“.
- 101	Letzte Z. der Anm.	Hinter „Fricke“ ist zu ergänzen „Bianchi, Stouff“.
- 103	Z. 13 von unten.	Statt: „man unterwirft“ ist zu lesen „unterwirft man“.
- 106	- 11 - unten.	Es fehlt die Bezeichnung I. A, sowie darüber der Haupttitel: I. Aequivalenz.
- 107	- 10,11 - unten.	Hinter „Reduction“ und „Form“ gehört je ein Komma.
- 109	- 5 - unten.	Vor „1868“ gehört ein Komma.
- 118	- 6 - oben.	Statt „verwendete“ ist zu lesen „verwendeten“.
- 118	- 11 - oben.	Es fehlt der Haupttitel: I. B. Weitere Formen.
- 123	- 7, 11, 14.	Das Zeichen †) ist zu streichen, dagegen ††) in †), und †††) in ††) zu ändern.
- 127	- 2 - unten.	Statt „Gordan“ ist zu setzen „Gordan“.
- 133	Anm. ***) Z. 1.	Statt r_n ist zu lesen r^n.
- 144	Z. 1 von oben.	Der Buchstabe „G“ ist zu streichen.
- 156	Anm. ***) Z. 4.	Statt „XLI S. 1—24“ ist zu lesen: XL S. 503 bis 526.
- 158	Z. 11 von unten.	Anstatt „$F = F_n(x_1, x_2, x_3)$ etwa“ ist zu lesen „etwa $F = F_n(x_1, x_2, x_3)$“.
- 160	- 2 - oben.	Hinter „y“ gehört ein Komma.
- -	- 2 - unten.	Statt „β^x“ ist zu lesen „β_x“.
- 161	- 12 - oben.	Statt: „Tschirnhaus“ ist zu lesen: „Tschirnhausen“.
- 190	- 7 - oben.	Das Wort „einer“ ist zu streichen.
- 191	- 2 - oben.	Statt „σ“ ist zu lesen „b“.
- 194	- 13,14 - oben.	Statt „von Study,“ ist zu lesen „, von Study“.
- 203	- 5 - oben.	Statt „b_y“ ist zu lesen „b_x“.
- 221	- 11 - unten.	Statt „.“ ist zu lesen „$= 0.$“.
- 223	- 13 - unten.	Statt „m“ ist zu lesen „2n“.
- 245	- 4 der Anm. **)	Die Zahl „4“ ist zu streichen.
- 254	- 2 der Anm. ***) von unten.	Es ist einzufügen: „(2) XLVIII S. 530—549 (1879)“.
- 267	- 3 der Anm. †).	Statt „(1854), Cambr. a. Dublin M. J. IX S. 32“ ist zu lesen „(1850), Cambr. a Dublin M. J. V“.

Selbständig erschienene Monographien über Invariantentheorie.

G. Salmon. Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin I ed. 1859; IV ed. 1885. (Hauptsächlich binäre Formen.)

In deutscher Bearbeitung unter dem Titel:

G. Salmon. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Leipzig. I. Aufl. 1863; II. Aufl. 1877.

F. Brioschi. Teorica dei Covarianti. Roma 1861. (Binäre Formen.)

W. Fiedler. Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Leipzig. 1862.

A. Clebsch. Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig. 1872.

A. Clebsch. Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. I. Band, 1. Teil. Leipzig 1875. 3. Abteilung. (Elemente der binären und ternären Formen.)

Faà di Bruno. Théorie des formes binaires. Turin 1876.

In deutscher Bearbeitung unter dem Titel:

Faà di Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von M. Noether deutsch bearbeitet von Th. Walter. Leipzig. 1881.

P. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von G. Kerschensteiner. I. Band. Determinanten. Leipzig. 1885. II. Band. Binäre Formen. Leipzig. 1887.

G. Rubini. Teoria delle forme in generale, e specialmente delle binarie. Parte prima. Esposizione dell' algoritmo fondamentale di questa teoria. Lecce. 1886.

E. Study. Methoden zur Theorie der ternären Formen. Leipzig. 1889.

Toledo y Zulueta. Elementos de la teoria de las formas. Madrid. 1889.

J. Deruyts. Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Bruxelles. 1891.

Chronik
der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Wir eröffnen die Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit dem Abdruck des Einladungsschreibens, mit welchem die auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Bremen 1890 ins Leben getretene Vereinigung die Fachgenossen zum Beitritt aufgefordert hat. Zusammen mit dem in der Anlage dieses Schreibens abgedruckten „Heidelberger Aufruf“ und den „Bremer Beschlüssen“ bezeichnen sie die Entstehungsgeschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, welche nunmehr auf der Versammlung in Halle eine feste Organisation gewonnen hat.

Mögen die in unseren Statuten, wie in jenen ersten Aufforderungsschreiben zum Ausdruck gelangten Wünsche und Ziele in unserer Vereinigung allezeit Vertretung und Förderung finden!

December 1890.

Der Wunsch, einen engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenhang unter den deutschen Mathematikern herzustellen, besteht seit vielen Jahren, und es sind wiederholt Versuche gemacht worden, eine Form für die Verwirklichung dieses Wunsches zu finden. Anfangs der dreissiger Jahre tagte in Berlin eine Mathematiker-Versammlung, an welcher unter Anderen C. G. J. Jacobi, Minding und die beiden Brüder Ohm teilnahmen; in den Osterferien des Jahres 1873 fand eine solche in Göttingen statt. Zu einer dauernden Einrichtung haben beide Versammlungen nicht geführt. Bezeugt dies auch die Schwierigkeit, eine solche Organisation zu schaffen, so liegen doch keine triftigen Gründe vor, sich durch die bisher missglückten Versuche von einem Vorhaben abschrecken zu lassen, dessen

Zweck es ist: in gemeinsamer zielbewusster Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben des deutschen Volkes nach Gebühr zu heben, ihren

Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, entschlossen sich am 21. September 1889 zu Heidelberg zwanzig auf der dortigen Naturforscherversammlung vereinigte Mathematiker zu einem Aufruf an die deutschen Fachgenossen, welchen wir als Anlage I im Wortlaute unten folgen lassen.

Dieses Rundschreiben, welches nach Möglichkeit allgemein zur Versendung gelangt ist, wurde in zustimmendem Sinne von mehreren Fachgenossen beantwortet, unter denen wir besonders die Herren Brill, Kiepert, F. Klein, Kronecker, Lampe, Lüroth, Schubert, Weierstrass zu nennen haben.

Die auf der Naturforscherversammlung dieses Jahres in Bremen zusammengekommenen Mathematiker sind der in dem Heidelberger Aufruf gegebenen Anregung gefolgt und nach eingehenden Beratungen am 18. September 1890 zu einer

„Vereinigung deutscher Mathematiker“

zusammengetreten.

Die Bildung der Vereinigung erfolgte, unter vorläufigem Verzicht auf geschriebene Satzungen, durch Unterzeichnung eines Schriftstückes, in welchem die leitenden Gesichtspunkte und Grundsätze in Form von Beschlüssen ausgesprochen worden sind. Wir geben diese „Bremer Beschlüsse“ unten als Anlage II, versehen mit den Unterschriften der Zustimmenden der in Bremen versammelten Abteilung; zur Orientirung mögen aber einige Punkte hier noch besonders hervorgehoben werden.

Die „Vereinigung deutscher Mathematiker“ hat sich an die „Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte“ äusserlich so angeschlossen, dass die fünf Mitglieder ihres Vorstandes gleichzeitig Mitglieder der „G. d. N. u. Ae.“ sein müssen; hier bilden sie den nach § 16 der Statuten dieser Gesellschaft zu wählenden Vorstand der ersten Abteilung für das laufende Geschäftsjahr.

Die nächstliegende Aufgabe dieses Vorstandes besteht in der eingehenden Vorbereitung und zweckmässigen Ausgestaltung der wissenschaftlichen Verhandlungen in der Abteilung für Mathematik und Astronomie der „G. d. N. u. Ae.“

Die „Vereinigung deutscher Mathematiker“ setzt sich auch die thatkräftige Förderung des in Berlin bei Reimer erscheinenden „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik“ zur Aufgabe.

Bei der am 18. September erfolgten Wahl des Vorstandes der Vereinigung wurden gewählt die Herren:

G. Cantor (Halle), zugleich als Vorsitzender, W. Dyck (München) Schriftführer, E. Lampe (Berlin), Th. Reye (Strassburg), H. Schubert (Hamburg).

Wir erlauben uns, alle deutschen Fachgenossen, welche den Zweck der „Vereinigung deutscher Mathematiker“ billigen, hiermit aufzufordern, sich derselben anzuschliessen, und ihren Beitritt dadurch zu erklären, dass sie den Mitgliederbeitrag von zwei Mark für das laufende Geschäftsjahr an Herrn W. Dyck, München, Hildegardstrasse $1^1/_2$, einsenden.

Von den laufenden Angelegenheiten der „Vereinigung deutscher Mathematiker" werden alle ihre Mitglieder rechtzeitig durch den Vorstand in Kenntnis gesetzt werden, insbesondere wird derselbe im Januar 1891 ein erstes Mitgliederverzeichnis zur Versendung gelangen lassen.

Im Auftrag der in Bremen constituirten

„Vereinigung deutscher Mathematiker."

Der Vorstand:

G. Cantor. W. Dyck. E. Lampe. Th. Reye. H. Schubert.

Anlage I.

„Heidelberger Aufruf."

Heidelberg, den 21. September 1889.

Hochgeehrter Herr!

Auf der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Heidelberg gelangte in der mathematisch-astronomischen Section der Wunsch nach einer engeren Vereinigung der deutschen Mathematiker zum Ausdruck. Die Unterzeichneten glauben, auf diesen Zweck gerichtete Beratungen am besten dadurch einleiten zu können, dass sie mit gegenwärtigem Circular die übrigen Fachgenossen ersuchen, sich möglichst zahlreich an der nächstjährigen Naturforscherversammlung zu Bremen zu beteiligen, um dort der Frage näher zu treten, in welcher Weise eine auf jenes Ziel gerichtete Organisation verwirklicht werden könnte.

L. Burmester (München),
G. Cantor (Halle),
M. Cantor (Heidelberg),
W. Dyck (München),
L. Heffter (Giessen),
C. Köhler (Heidelberg),
L. Königsberger (Heidelberg),
M. Krause (Dresden),
E. Netto (Giessen),
M. Nöther (Erlangen),
E. Papperitz (Dresden),
A. Pringsheim (München),
C. Reuschle (Stuttgart),
Th. Reye (Strassburg),
H. Schapira (Heidelberg),
A. Schönflies (Göttingen),
E. Schröder (Karlsruhe),
A. Voss (München),
H. Weber (Marburg),
M. Wolf (Heidelberg).

Anlage II.

„Bremer Beschlüsse."

Bremen, am 18. September 1890.

I. Abteilung

für Mathematik und Astronomie

der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

Die in der mathematisch-astronomischen Abteilung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte am 18. September versammelten Herren beschliessen, auf Grund der in Heidelberg gegebenen Anregung zur Herbeiführung einer engeren Vereinigung der deutschen Mathematiker, was folgt:

1) Es soll der Plan einer Vereinigung der deutschen Mathematiker im Anschluss an die Organisation der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zur Verwirklichung gebracht werden.

2) Die mathematisch-astronomische Abteilung der Gesellschaft soll dementsprechend einen erweiterten Kreis ihrer Bethätigung erhalten, welcher die gesamten wissenschaftlichen Interessen der Mathematik umfasst.

Es sollen die Verhandlungen der Jahres-Versammlung wissenschaftlich in eingehenderer Weise als bisher vorbereitet und der Abteilung bleibende Aufgaben zugewiesen werden.

In erster Richtung scheinen beispielsweise eine Eröffnungsrede, sowie ausführliche Referate über gemeinsam interessirende Gebiete der Mathematik besonders wünschenswert. In letzterer Hinsicht wird unter Anderem eine enge Bezugnahme zu dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" in Aussicht genommen werden können.

3) Die Abteilung beauftragt mit den hieraus sich ergebenden Aufgaben den nach § 16 der Statuten der Gesellschaft alljährlich zu wählenden Abteilungsvorstand, dessen Mitglieder der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte als Mitglieder angehören müssen, eventuell bei Annahme der Wahl die Mitgliedschaft erwerben.

4) Dieser Vorstand soll alle Vollmacht haben, im Einzelnen die im Vorstehenden ausgedrückten Absichten der Abteilung in geeigneter Weise zur Ausführung zu bringen, und kann sich, wenn erforderlich, durch Cooptation verstärken.

5) Die Abteilung spricht den Wunsch aus, dass der von ihr zu wählende Ausschuss mit dem Vorstande der Gesellschaft in eine geregelte geschäftliche Beziehung tritt. Es soll über die Form derselben in der (morgigen) dritten allgemeinen Sitzung eine Verhandlung eingeleitet werden, etwa mit dem Vorschlage an die Gesellschaft, es möge der Vorstand derselben sich durch einen Central-Ausschuss ergänzen, bestehend aus je einem Delegirten jeder Abteilung.

> (Bemerkung.) Der hier ausgesprochene Wunsch wurde (durch Herrn F. Klein) in der erwähnten allgemeinen Sitzung zur Sprache gebracht und fand dort vielseitige Zustimmung; es wird Beschlussfassung darüber auf die Tagesordnung der nächstjährigen, Hallenser Versammlung gesetzt werden (vgl. Verhandlungen der „G. d. N. u. Ae." zu Bremen, I. Teil, pag. XXXI).

6) Für erwachsende Auslagen stellen die Zustimmenden einen Beitrag von je 2 Mark zu Handen des zu wählenden Vorstandes.

7) Der von der Abteilung zu wählende Vorstand hat den deutschen Fachgenossen durch einen Bericht von den gegenwärtigen Verhandlungen und Beschlüssen Kenntnis zu geben.

Die unterzeichneten Teilnehmer der mathematisch-astronomischen Abteilung der 63. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte erklären ihre Zustimmung zu den obigen Beschlüssen.

F. S. Archenhold (Charlottenburg),
H. Burkhardt (Göttingen),
G. Cantor (Halle),
W. Dyck (München),
P. Gordan (Erlangen),
L. Heffter (Giessen),
L. Henneberg (Darmstadt),
D. Hilbert (Königsberg),
R. Hoppe (Berlin),
E. Jürgens (Aachen),
H. Kasten (Bremen),
L. Kiepert (Hannover),
F. Klein (Göttingen),
F. Klemm (Bremen),
E. Lampe (Berlin),
A. Mayer (Leipzig),
Fr. Meyer (Clausthal),
G. Meyer (Bremen),
H. Minkowski (Bonn),
R. Müller (Braunschweig),
E. Papperitz (Dresden),
A. Ritter (Aachen),
C. Rodenberg (Hannover),
C. Runge (Hannover),
C. Schilling (Bremen),
E. Schröder (Karlsruhe),
H. Schubert (Hamburg),
E. Study (Marburg),
R. Sturm (Münster),
H. Weber (Marburg),
H. Wellmann (Bremen),
H. Wiener (Halle),
E. Wiltheiss (Halle).

Die zahlreichen Beitrittserklärungen, die auf diese Einladung hin von Seiten der Lehrer an Hoch- und Mittelschulen erfolgten, bewiesen die Zustimmung, welche die Zwecke und Ziele der Vereinigung allseitig fanden.

Das erste im März 1891 ausgegebene Mitgliederverzeichnis weist 160 Namen auf.

Für die im Herbst 1891 zu Halle angesetzte Versammlung konnte ein reiches Programm von wissenschaftlichen Vorträgen auf die Tagesordnung gesetzt werden.

Herr L. Kronecker sollte einen Eröffnungsvortrag halten, in dem er einmal die Erwartungen, die sich an die Vereinigung knüpfen können, bezeichnen wollte, und der weiter eine Gedächtnisrede auf Eisenstein beabsichtigte. Leider traf Kronecker im August ein schwerer Schicksalsschlag durch den Tod seiner Gattin; so war es ihm unmöglich, nach Halle zu kommen; in einem Schreiben an Herrn G. Cantor aber gab er seinen Anteil an der Versammlung und in kurzen Umrissen den Plan seines Vortrages kund. — Nun beabsichtigte er, in breiter Ausführung diesen Vortrag der Vereinigung als die Einleitung des ersten Jahresberichtes zu überlassen — es sollte nicht dazu kommen. Am 29. Dezember 1891 wurde die wissenschaftliche Welt durch die Nachricht von dem Tode Kronecker's erschüttert. Die Influenza und eine dazutretende Lungenentzündung hatten in wenigen Tagen seinem reichen, fruchtbringenden Leben ein Ende gemacht. Wir verzichten hier, näher einzugehen auf die Grösse und Bedeutung dieses Verlustes für die Wissenschaft. Eine auf der kommenden Versammlung in Nürnberg zu haltende Gedächtnisrede soll von Kronecker's Wirken handeln. Hier geben wir Ausdruck den Gefühlen aufrichtigen Dankes, welchen unsere junge Vereinigung, deren Plänen und Zielen er von Anfang an ein warmes Interesse entgegenbrachte, ihm schuldet. An der Spitze der Vorträge der Versammlung in Halle aber stehe, als ein Vermächtnis an unsere Vereinigung, der erwähnte Brief. —

Von den in Halle gehaltenen Vorträgen sei hier besonders der umfangreiche Bericht des Herrn Franz Meyer hervorgehoben: „Ueber die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert“. Er verwirklicht den schon in Heidelberg ausgesprochenen Wunsch, eine Hauptaufgabe der Vereinigung in ausführlichen Referaten über gemeinsam interessirende Gebiete der Mathematik zu suchen. Der dritte Teil des gegenwärtigen Berichtes umfasst das weiter ausgeführte Referat, für dessen opferwillige, den Interessen des Ganzen dienende Abfassung namens der Vereinigung an dieser Stelle dem Verfasser der gebührende Dank ausgesprochen sei.

Ueber die weiteren in Halle gehaltenen Vorträge ist im zweiten Teil durch die Verfasser kurzer Bericht erstattet. Die Herren C. Neumann und R. Dedekind waren am persönlichen Erscheinen verhindert; über ihre Vorträge wurde von Seiten Herrn G. Cantor's referirt.

Bezüglich der geschäftlichen Sitzungen verweisen wir auf das am Schlusse des Berichts abgedruckte Protokoll, welchem auch die Statuten und die Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, wie sie in Halle beschlossen wurden, beigedruckt sind.

Wir haben die traurige Pflicht, unsere Mitteilungen mit den Nekrologen zweier Mitglieder zu schliessen, welche unsere junge Vereinigung im verflossenen Jahre verloren hat.

Herr Benno Klein, Professor a. d. Universität Marburg starb am 26. März 1891 zu Schöneberg bei Berlin. Ihm widmete G. Cantor in seiner Eröffnungsrede in Halle Worte des Andenkens und der Anerkennung. Der nachfolgende Nekrolog ist dem Jahresbericht der Universität Marburg entnommen.

Herr Paul Günther, Privatdocent an der Universität Berlin erlag am 27. September 1891 zu Berlin einem schweren Leiden. Die ihm gewidmeten Zeilen rühren von der Hand seines Freundes K. Hensel her.

Des Todes von Leopold Kronecker haben wir schon oben gedacht. Der Anfang des neuen Jahres fügte zu diesem Verluste den von Heinrich Schröter, der am 3. Januar gleichfalls vorzeitig aus einer reichen wissenschaftlichen Thätigkeit abberufen wurde. Seinem Andenken soll, wie dem von Kronecker, auf der Versammlung in Nürnberg eine Gedächtnisrede gewidmet werden.

Endlich verschied am 2. Februar 1892 im 62. Lebensjahre Herr Heinrich Gretschel, Bergrat und Professor der Mathematik an der Bergakademie zu Freiberg in Sachsen. Ein Nekrolog wird im nächsten Jahresbericht gegeben werden.

Benno Klein.

Benno Klein ist am 5. October 1846 in Stolp in Pommern geboren, wo sein Vater Rabbiner war. Er besuchte das dortige Gymnasium, bis die Eltern im Jahre 1859 nach Glogau übersiedelten. Dort besuchte er das Gymnasium weiter bis zum Jahre 1863 und verliess es ein halbes Jahr vor dem Abiturientenexamen um auf Wunsch der Eltern sich dem Kaufmannsstande zu widmen. Er fühlte sich aber in diesem Berufe so unglücklich und unbefriedigt, dass er noch spät den Entschluss fasste, zu studiren. Von 1871 an bereitete er sich mit Hilfe von Freunden zur Maturitätsprüfung vor, die er zu Ostern 1872 am Gymnasium zu Guben bestand.

Er betrieb nun eifrig das Studium der Mathematik und Physik zunächst in Berlin, dann in Marburg und zuletzt in Strassburg, wo er im Juli 1876 zum Doctor promovirt wurde. Da er sich noch nicht hinreichend reif fühlte, um die akademische Lehrthätigkeit zu beginnen, so kehrte er nach Berlin zurück, wo er bis zum Jahre 1881 privaten Studien oblag. Im Jahre 1881 habilitirte er sich in Marburg und wurde hier am 13. Dez. 1890 zum ausserordentlichen Professor ernannt. Seit dem Jahre 1874 hatte Klein mit einem Augenleiden zu kämpfen, das der Anfang und Vorbote einer tieferen Erkrankung war, der er am 26. März 1891 erlegen ist. Trotz der Schwierigkeiten, die ihm aus diesem Leiden erwuchsen, und die ihm den Gebrauch von fremder Hilfe nötig machten, war Klein in der Wissenschaft und als Lehrer unausgesetzt und mit Erfolg thätig.

Schriften von B. Klein.

Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene. Inaugural-Dissertation, Berlin 1876.

Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Habilitationsschrift, Marburg, Elwert, 1881.

Ueber das Doppelverhältnis von vier Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe erster Ordnung. Schlömilch Z. Bd. 28. 1883.

Ueber den Fundamentalsatz der Geometrie der Lage. Sitzber. d. Marb. Ges. v. 1. Febr. 1887, 4. Sept. 1887, 27. Jan. 1888.

Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde. Teil I, Annali di Matematica, ser. IIa tomo XVIII (1890). Teil II, ebenda, tomo XIX (1891). Teil III, ebenda, tomo XIX (1891).

Paul Günther.

Paul Günther ist am 2. April 1867 in Bernburg geboren, wo sein Vater Gymnasialdirector war. Nachdem er in seiner Vaterstadt das Gymnasium absolvirt hatte, kam er im Frühjahr 1884 nach Berlin, wo er hauptsächlich unter Leitung von Kronecker, Weierstrass und Fuchs studirte; auch von Hamburger hat er viele wissenschaftliche und persönliche Anregung empfangen. Im Jahre 1889 promovirte er auf Grund seiner im Journal für Mathematik Bd. 105 veröffentlichten Arbeit „Ueber lineare Differentialgleichungen, deren Integrale nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen und im Unendlichen sich regulär verhalten“.

Seine weiteren (ebenfalls im Journal f. die reine und angew. Math. veröffentlichten Arbeiten) sind:

Ueber eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen (Bd. 106, 1890).

Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Bd. 107, 1891).

Zur Theorie der elliptischen Functionen (Bd. 108 und Bd. 109, 1891).

Ueber die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen Veränderlichen (Bd. 109, 1892).

Ueber das Additionstheorem der elliptischen Functionen (Bd. 109, 1892).

Die letzten Aufsätze sind erst nach dem Tode des Verfassers erschienen.

Im Sommer 1890 habilitirte sich Günther an der Berliner Universität, konnte jedoch nur im darauffolgenden Wintersemester lesen; denn schon im Frühjahr 1891 erkrankte er an einer Drüsengeschwulst so bedenklich, dass seine Freunde schnell ihre zuerst gehegten Hoffnungen auf baldige Besserung seines Zustandes schwinden sahen. Er suchte in Tölz, dann in Cudowa Heilung, kehrte jedoch im September in einem so hoffnungslosen Zustande zurück, dass auch ein operativer Eingriff nicht mehr gewagt werden konnte. Am 27. September 1891 starb er.

Die Wissenschaft verliert in Günther einen vielseitig und reich begabten jungen Gelehrten, der zu den schönsten Hoffnungen berechtigte; seine Freunde betrauern den Verlust eines lauteren, rein empfindenden und geistig hochstehenden Menschen.

Bericht
über die geschäftlichen Sitzungen der Versammlung zu Halle mit Rechnungsablage des Vorstandes.

1. In der Sitzung vom 24. September legt der Schriftführer, Herr Dyck, das neu gegründete Archiv der Vereinigung vor und erstattet den Kassenbericht über das verflossene Vereinsjahr, der hier folgt:

Kassenbericht.

Einnahmen	*M.*	*Pf.*	Ausgaben	*M.*	*Pf.*
Rest von der Bremer Versammlung . . .	1	10	Drucksachen	57	30
Beiträge von 179 Mitgliedern (darunter ein Beitrag für $2^1/_2$ Jahre)	364	—	Verzeichnisanfertigung und Schreibarbeiten .	60	—
			Buchbinder	16	86
			Papier und Utensilien	11	70
			Adressbücher	10	70
			Postporto	44	38
	365	10		200	94

Kassenbestand pro 1892: M. 164.16.

W. Dyck als Kassenführer; K. Rohn, G. Hettner als Revisoren.

2. In den Sitzungen vom 24. und 26. September werden die vom Vorstande ausgearbeiteten Statuten, die Geschäftsordnung und notwendige Uebergangsbestimmungen beraten, welche in der beschlossenen Fassung unten folgen.

3. Schon im Vorjahre hat der Vorstand der Vereinigung einleitende Schritte gethan betreffs der auf die Tagesordnung der Versammlung im Herbst 1892 (zu Nürnberg) zu setzenden Referate. Die hiefür entworfenen Pläne werden eingehend besprochen, und von Seiten der Versammlung der Wunsch ausgedrückt, es sollen nach Möglichkeit in Aussicht genommen werden:

a. Referate und Uebersichten über moderne Arbeiten aus den Gebieten der angewandten Mathematik, die sich einmal auf technische Mechanik, dann auf Astronomie und auf moderne physikalische Fragen beziehen.

b. Aus dem Gebiete der reinen Mathematik, Referate über die Theorie der algebraischen Functionen und der Modulsysteme.

c. Mit der Nürnberger Versammlung soll ferner eine umfassende Ausstellung von mathematischen und mathematisch-physikalischen Modellen und Apparaten verbunden werden.

4. Die vorgenommene Neuwahl des Vorstandes ergiebt als Vorstandsmitglieder folgende Herren: G. Cantor, W. Dyck, P. Gordan, L. Kronecker, E. Lampe, H. Schubert.

Der Vorstand wählt von diesen für 1892 die Herren: G. Cantor zum Vorsitzenden, W. Dyck zum Schriftführer, sowie die Herren G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe als Redactionscommission für den Jahresbericht.

Statuten
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891 gefassten Beschlüssen.)

§ 1.

Zweck der Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellt sich die Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

§ 2.

Jahres-Versammlung.

Die Vereinigung hält alljährlich eine Versammlung ab, in Gemeinschaft mit der „I. Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte“.

§ 3.

Vorstand der Vereinigung.

In der Jahresversammlung wählen die dort anwesenden Mitglieder der Vereinigung einen Vorstand von sechs Mitgliedern. Derselbe darf sich nötigenfalls durch Cooptation auf sechs ergänzen.

Die Wahl der Vorstandsmitglieder geschieht je auf drei Jahre.

Dabei scheiden alljährlich zwei Mitglieder aus und werden durch Neuwahl ersetzt. Das Ausscheiden geschieht in der Reihenfolge des Eintritts. Die Ausscheidenden können erst nach zwei Jahren wieder gewählt werden — nur der Schriftführer (§ 5) ist sofort wieder wählbar. Der Amtsantritt fällt auf den 1. Januar.

§ 4.

Aufgaben des Vorstandes. Jahresbericht.

Der Vorstand ist beauftragt mit der Vertretung der gesamten Interessen der Vereinigung.

Im Einzelnen hat er die Aufgabe, die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programms, in welches womöglich Referate über die Entwickelung einzelner Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind.

Weiter veröffentlicht der Vorstand den Jahresbericht der Vereinigung über den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen. Derselbe ist den Mitgliedern zu ermässigtem Preise zugänglich zu machen; die Liste der Mitglieder und die Jahresrechnung sind ihm beizudrucken.

§ 5.

Geschäftsführung im Vorstande.

Der Vorstand wählt jährlich aus seiner Mitte:

a) den Vorsitzenden, in jährlichem obligatorischen Wechsel. Derselbe leitet die Sitzungen des Vorstandes und die geschäftlichen Sitzungen der Vereinigung;

b) den Schriftführer, gleichzeitig mit der Führung der Kasse und des Archivs der Vereinigung beauftragt;

c) die engere Commission für die Redaction des Jahresberichtes.

§ 6.

Mitgliedschaft.

Die Mitgliedschaft zur Vereinigung wird erworben durch Anmeldung bei dem Schriftführer. Mit ihr ist die Verpflichtung zur Zahlung eines Jahresbeitrages von zwei Mark für das laufende Kalenderjahr verbunden. Der jährliche Beitrag kann durch eine einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Geschäftsordnung
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891 gefassten Beschlüssen.)

§ 1.

Die Redaction des „Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ übernimmt der Vorstand, welcher mit der speziellen Ausführung die in § 5 der Statuten erwähnte engere Commission beauftragt.

Alle auf den Jahresbericht bezüglichen Zusendungen sind an den Schriftführer der Vereinigung zu richten.

§ 2.

Im Jahresberichte sind zu unterscheiden:

a) Die Mitteilungen über die in der Jahresversammlung gehaltenen Spezialvorträge.

b) Die grösseren wissenschaftlichen Referate.

a) Die ersteren dürfen den Raum von zwei Druckseiten für einen Vortrag nicht überschreiten; sie sind noch auf der Jahresversammlung selbst der Redactionscommission einzuhändigen.

b) Der Umfang der wissenschaftlichen Referate ist innerhalb der mit dem Verleger einzuhaltenden Verträge nicht beschränkt. Für die Einsendung der Manuscripte dieser Referate wird ein Zeitraum von sechs Wochen nach Schluss der Versammlung festgesetzt.

§ 3.

Das vom Verleger für die Publication des Berichtes gezahlte Honorar fliesst in die Kasse der Vereinigung. Die wissenschaftlichen Referate (§ 2b) werden den betreffenden Berichterstattern gemäss dem vom Verleger pro Bogen gezahlten Betrage honorirt. Jeder Referent und ebenso die Autoren der übrigen Mitteilungen erhalten ausserdem 25 Separatabzüge ihres Berichtes. Weitere Separatabzüge können sich dieselben auf ihre Kosten, nach Vereinbarung mit dem Verleger, machen lassen.

Uebergangsbestimmungen.

(Nach den Festsetzungen der Geschäftssitzung vom 24. September 1891 mit den Ergänzungen vom 26. September.)

1. Wahl des Vorstandes für die nächsten beiden Jahre.

In den nächsten beiden Jahren wird das Ausscheiden je zweier Mitglieder des Vorstandes durch das Los geregelt.

Nachdem die am 24. September 1891 vorgenommene Vorstandswahl einmal die Herren:

Cantor, Dyck, Lampe, Schubert

des bisherigen Vorstandes und weiter die Herren

Gordan, Kronecker

als Neueintretende ergeben hat, sind die letzteren beiden als auf drei Jahre gewählt zu betrachten.

Im Jahre 1892 bestimmt das Los unter den vier erstgenannten die beiden durch Neuwahl zu Ersetzenden. Im Jahre 1893 scheiden die letzten beiden Mitglieder des bisherigen Vorstandes aus.

2. Veröffentlichung des Jahresberichtes.

Der Vorstand wird ermächtigt, betreffs der Herausgabe des Jahresberichtes mit einem Verleger einen Vertrag abzuschliessen auf Grund der in den Statuten und der Geschäftsordnung enthaltenen Bestimmungen. Und zwar sollen die Verhandlungen zunächst mit der Verlagsbuchhandlung von G. Reimer in Berlin, dem Verleger des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, geführt werden.

Zusätze
zu den vorstehenden geschäftlichen Mitteilungen.

1. Nachdem durch den Tod von L. Kronecker die Vorstandsmitglieder sich auf 5 reducirten, beschlossen diese einstimmig, von dem Rechte der Cooptation Gebrauch machend, Herrn Th. Reye zum Wiedereintritt in den Vorstand aufzufordern. Wir sind Herrn Reye Dank schuldig, dass er unserem Ansuchen willfahren hat.

2. Von den vorstehend abgedruckten Uebergangsbestimmungen ist die erste, auf die Vorstandswahlen der nächsten beiden Jahre bezügliche, durch einen in Nürnberg zu fassenden Beschluss entsprechend abzuändern.

3. Bezüglich der Herausgabe des Jahresberichts wurde der Vertrag mit Herrn Ernst Reimer, dem Inhaber der Verlagsbuchhandlung Georg Reimer in Berlin, in der ersten Hälfte des Monats Mai 1892 abgeschlossen.

Mitglieder-Verzeichnis

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

nach dem Stande vom 1. Juni 1891.

Archenhold, F. S., Charlottenburg.
Bacharach, J., Reallehrer an der Realschule, Erlangen.
Bauer, G., Professor an der Universität, München.
Beck, A., Professor am Polytechnicum, Riga.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Böger, R., Oberlehrer an der höheren Bürgerschule, Hamburg.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, München.
Braunmühl, A. v., Professor an der technischen Hochschule, München.
Brill, A., Professor an der Universität, Tübingen.
10. Brunn, H., Privatdocent an der Universität, München.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig.
Buka, F., Professor am Realgymnasium, Charlottenburg, und an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Burkhardt, H., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
Burmester, L., Professor an der technischen Hochschule, München.
Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor, G., Professor an der Universität, Halle.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
Carajianides, A., Göttingen.
Czuber, E., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
20. Dantscher v. Kollesberg, Professor an der Universität, Graz.
Dingeldey, F., Privatdocent an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München.
Dörgens, R., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Dyck, W., Professor an der technischen Hochschule, München.
Dziobek, O., Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Eberhard, V., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.

Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig.
Färber, C., Lehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin.
30. Finger, J., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Fink, K., Professor an der Realschule, Tübingen.
Finsterwalder, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Franklin, F., Professor an der Johns Hopkins Universität, Baltimore.
Franz, J., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Fricke, R., Privatdocent an der Universität, Kiel.
Frobenius, G., Professor am Polytechnicum, Zürich.
Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin.
Fuhrmann, A., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Halle a. S.
40. Gierster, J., Studienlehrer am Wilhelms-Gymnasium, München.
Götting, E., Lehrer am Gymnasium, Göttingen.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Grassmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Halle a. S.
Günther, S., Professor an der technischen Hochschule, München.
Gutzmer, A., Berlin.
Häntzschel, E., Oberlehrer an der dritten höheren Bürgerschule, Berlin.
Hamburger, M., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
50. Hauck, G., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Hecht, Professor, Studienlehrer am Melanchthon Gymnasium, Nürnberg.
Heffter, L., Professor an der Universität, Giessen.
Helm, G., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin.
Henneberg, L., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin.
Hermes, J., Oberlehrer am Progymnasium, Königsberg i. Pr.
Hertzer, H., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Herz, N., Wien.
60. Hess, E., Professor an der Universität, Marburg.
Hettner, G., Professor an der Universität, Berlin.
Hilbert, D., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr.
Hölder, O., Professor an der Universität, Tübingen.
Holländer, E., Lehrer an der Realschule, Mülheim a. d. Ruhr.
Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin.
Horn, J., Privatdocent an der Universität, Freiburg i. B.
Hurwitz, A., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg.
Jürgens, E., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
70. Junker, F., Professorats-Candidat, Schorndorf (Württemberg).

Kasten, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, S., Göttingen.
Kiepert, L., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Killing, W., Professor am Lyceum Hosianum, Braunsberg.
Klein, F., Professor an der Universität, Göttingen.
Klein, G., Professor am Realgymnasium, München.
Klemm, F., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat.
80. Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin.
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg.
Königsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg.
Köpke, A., o. Lehrer an der Realschule, Ottensen.
Kötter, E., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Kötter, F., Docent an der Berg-Akademie, Berlin.
Kohn, G., Privatdocent an der Universität, Wien.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kraft, F., Privatdocent am eidgen. Polytechnicum, Zürich.
Krause, M., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
90. Krazer, L., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Kullrich, Adjunct am Joachimsthaler Gymnasium, Charlottenburg.
Lampe, E., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Lerch, M., Privatdocent an der Universität, Prag.
Ligowski, W., Professor an der Marine-Akademie, Kiel.
Lommel, E., Professor an der Universität, München.
London, F., Privatdocent an der Universität, Breslau.
Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Mangoldt, H. v., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Maurer, L., Privatdocent an der Universität, Strassburg.
100. Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig.
Mehmke, R., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Meyer, A., Professor an der Universität, Zürich.
Meyer, F., Professor an der Berg-Akademie, Clausthal.
Meyer, G., Lehrer an der Realschule, Bremen.
Meyer, G. F., Professor am Realgymnasium, München.
Minkowski, H., Privatdocent an der Universität, Bonn.
Müller, F., Professor am Luisen-Gymnasium, Berlin.
Müller, R., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig.
Müller, R., Lehrer an der Königl. Realschule, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
110. Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig.
Netto, E., Professor an der Universität, Giessen.
Nöther, M., Professor an der Universität, Erlangen.
Papperitz, E., Professor an der Berg-Akademie, Freiberg i. S.
Pasch, M., Professor an der Universität, Giessen.

Pelz, C., Professor an der technischen Hochschule, Graz.
Peschka, A. v., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Piltz, A., Privatdocent an der Universität, Jena.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel.
Pockels, F., Privatdocent an der Universität, Göttingen.
120. Pringsheim, A., Professor an der Universität, München.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Reinhardt, C., Oberlehrer an der Fürstenschule, Meissen.
Reuschle, C., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart.
Reye, Th., Professor an der Universität, Strassburg i. E.
Richarz, Privatdocent an der Universität, Bonn.
Richter, Lehrer am Gymnasium, Quedlinburg.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Ritter, A., Professor an der technischen Hochschule, Aachen.
Ritter, E., Cassel.
130. Rodenberg, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Rogel, F., Lehrer an der Staats-Gewerbeschule, Brünn.
Rohn, K., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau.
Rosenow, H., Rector an der 9. höheren Bürgerschule, Berlin.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich.
Runge, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Schapira, H., Professor an der Universität, Heidelberg.
140. Scheffers, G., Privatdocent an der Universität, Leipzig.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig.
Schell, W., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schilling, C., Professor an der Navigationsschule, Bremen.
Schlegel, V., Oberlehrer an der Gewerbeschule, Hagen i. W.
Schlesinger, L., Privatdocent an der Universität, Berlin.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden.
Schmidt, M., Professor an der technischen Hochschule, München.
Schönflies, A., Professor an der Universität, Göttingen.
Schottky, F., Professor am Polytechnicum, Zürich.
150. Schröder, E., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg.
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg.
Schultz, E., Lehrer am Realgymnasium, Stettin.
Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.
Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg.
Schur, F., Professor an der Universität, Dorpat.
Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Schwering, K., Director am Gymnasium, Düren.
Seelhoff, P., Professor an der Navigationsschule, Bremen.
160. Seeliger, H., Professor an der Universität, München.

Seidel, Ph. L. von, Professor an der Universität, München.
Servus, H., o. Lehrer an dem Friedrichs-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Siebert, A., Lehrer an der Hauptcadetten-Anstalt, Gross-Lichterfelde.
Sievert, H., Studienlehrer am neuen Gymnasium, Nürnberg.
Simon, H., Assistent an der Universitätsbibliothek, Berlin.
Simon, M., Professor am Lyceum, Strassburg i. E.
Sinram, H. Th., Hamburg.
Sprung, A., Professor am Meteor. Inst., Berlin.
Stäckel, P., Privatdocent an der Universität, Halle.
170. Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Staude, O., Professor an der Universität, Rostock.
Stern, M. A., Professor a. D. der Universität Göttingen, Zürich.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck.
Study, E., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Valentin, G., Custos an der Königl. Bibliothek, Berlin.
Van Vleck, E. B., Göttingen.
180. Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel.
Voss, A., Professor an der Universität, Würzburg.
Walder, E., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle.
Weber, H., Professor an der Universität, Göttingen.
Weierstrass, C., Professor an der Universität, Berlin.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich.
Weingarten, J., Professor an der technischen Hochschule, Berlin-Charlottenburg.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forst-Akademie, Tharand.
190. Wellmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Weltzien, C., ord. Lehrer an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin.
Westermann, H., Oberlehrer an der Vorschule der technischen Hochschule, Riga.
Weyer, G. D., Professor an der Universität, Kiel.
Weyr, Em., Professor an der Universität, Wien.
Wiener, Chr., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.
Wiener, H., Privatdocent an der Universität, Halle.
Wiltheiss, E., Professor an der Universität, Halle.
Wirtinger, W., Privatdocent an der Universität, Wien.
Wölffing, E., Professorats-Candidat, Stuttgart.
200. Wolf, M., Privatdocent an der Universität, Heidelberg.
Worpitzky, J., Professor am Friedrichs-Werderschen Gymnasium und an der Kriegsakademie, Berlin.

Zillmer, Grosslichterfelde.
Ziwet, A., Assistant Professor, University of Michigan, Annarbor, Mch. U. S. A.
Zorawski, K., Göttingen.
Züge, Oberlehrer am Gymnasium, Lingen a. d. Ems.

Verstorbene Mitglieder.

H. Gretschel, Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S.
P. Günther, Privatdocent an der Universität, Berlin.
B. Klein, Professor an der Universität, Marburg.
L. Kronecker, Professor an der Universität, Berlin.
H. Schröter, Professor an der Universität, Breslau.

Bericht
über die wissenschaftlichen Sitzungen
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

in Verbindung mit der ersten Abteilung
für Mathematik und Astronomie
der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte
abgehalten auf der Versammlung zu Halle
22.—26. September 1891.

Auszug

aus einem Briefe von L. Kronecker
an Herrn Prof. G. Cantor*).

Jugenheim a. d. Bergstrasse, 18. IX. 91.

Geehrtester Freund und College!

Gleich nach dem schweren, schweren Schlage, der das Glück meines Lebens zerstört hat, habe ich Ihnen geschrieben, dass ich nun natürlich nicht im Stande bin, am 21. d. M. den übernommenen Eröffnungsvortrag in der Abteilung für Mathematik und Astronomie zu halten. Aber ich will Ihnen heute doch noch ein Paar Worte über dasjenige Thema sagen, was ich in dem Vortrage zu behandeln gedachte.

Einleiten wollte ich den Vortrag mit einigen Bemerkungen über das, was meiner Meinung nach von der „Vereinigung deutscher Mathematiker" erwartet werden kann. Denn, nachdem ich den ehrenvollen Antrag, den Sie mir gestellt haben, angenommen habe, glaubte ich, dem reinen Fachvortrage die Darlegung meiner Ansichten über Mathematiker-Vereinigungen gerade deshalb vorausschicken zu sollen, weil deren Bedeutung notwendig eine ganz andere sein muss, als die der Vereinigungen anderer Fachgenossen. Während andere Disciplinen mancherlei Arbeiten erfordern, die den Bearbeitern „aufgegeben" werden können, und auch solche, die geradezu von vereinten Kräften geleistet werden müssen (die Astronomie bietet ja hierfür viele Beispiele), während es also in fast allen anderen naturwissenschaftlichen Disciplinen vorkommt, dass, „wenn die Könige bauen, die Kärrner zu thun haben", muss bei uns jeder Forscher König und Kärrner zugleich sein. Darum geben wir Mathematiker eigentlich das Beispiel einer echten Gelehrtenrepublik, in welcher jeder einzelne seine volle Forscherselbständigkeit bewahrt. Ich mag auch deshalb bei uns nicht den Ausdruck „Schüler" gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen fort, die uns ein

*) Vergl. Chronik S. 7—8.

Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesen Wegen weitere Ziele erreichen zu können. „Wir wollen und brauchen keine Schule“, weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit wertlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt. Wir können deshalb aber auch durchaus nichts Förderliches von einer in der Weise „gemeinsamen Arbeit“ erwarten, die — wie die andern Disciplinen — sich mit speciellen Thematen beschäftigt. Im Gegenteil, solcherlei Arbeit kann nur den Fortschritt der Mathematik hindern. Der Mathematiker muss frei von jeglichem Vorurteil sich gedanklich in seiner Forschungssphäre heimisch machen, darin frei Umschau halten und Entdeckungen nachgehen; — eine Gesellschaft, etwa gar geführt von einem noch so trefflichen Lehrer, wird niemals im Stande sein, das Gebiet unserer Kenntnis merklich zu erweitern. So sehr ich hiernach „Vereinigung von Mathematikern“ zu speciellen Arbeitszwecken perhorresciren möchte, so sehr möchte ich einer allgemein freien Vereinigung das Wort reden. Deren Erfolg kann freilich nicht genau präcisirt werden, und auch an der Wortfassung der „Zwecke“ in Ihrer Publication vom December 1890 würde ich manches modificirt wünschen. Aber es kommt wenig darauf an. Die Hauptsache ist die Gelegenheit zur Einleitung persönlicher Verbindungen, zur mündlichen Discussion, zum lebendigen Austausch der in der Forschung gemachten Erfahrungen, zur gegenseitigen Mitteilung der auf Grund von Untersuchungen erlangten Ansichten. Niemand wird ja Wert und Bedeutung der mündlichen Vorträge in der Mathematik auf den Hochschulen unterschätzen, wie sehr auch die Studirenden daneben auf das Studium der Lehrbücher, Originalwerke und Abhandlungen zu verweisen sind; denn in diesen fehlt es z. B. stets an den Angaben, welche Irrwege und „Holzwege“ zu vermeiden sind. Nun hört ja der Mathematiker nicht zu studiren auf, wenn seine Studentenzeit abgelaufen ist; aber er ist dann ausschliesslich auf die litterarische Belehrung angewiesen, falls ihm nicht besonders glückliche Umstände noch die Fortsetzung mündlicher Belehrung durch persönlichen wissenschaftlichen Verkehr gestatten. Das Glück eines solchen habe ich in reichlichem Masse genossen und weiss es also aus Erfahrung zu schätzen; die etwa 20 Jahre von 1856 bis nahe 1876, in denen wir drei, Kummer, Weierstrass und ich, des engsten und lebhaftesten wissenschaftlichen Verkehrs uns erfreuten, haben nicht bloss uns selbst, sondern auch vielen andern, die ab und zu an unserem Verkehr teilnahmen, reiche Früchte und den Segen wahrer geistiger Erbauung gebracht. Ich sehe den

Hauptzweck der „Vereinigung deutscher Mathematiker" darin, dass sie nach solchem Muster persönlichen wissenschaftlichen Verkehr ermöglicht. Wie verschieden wir drei Berliner Mathematiker auch in unseren Arbeitsrichtungen, ja selbst zum Teil in unseren Ansichten über Begründung und Zielpunkte gewesen und geblieben sind, der gegenseitige Einfluss war stets heilsam und wohlthuend.

Doch genug davon! Sie ersehen ja aus Vorstehendem den ungefähren Inhalt der einleitenden Bemerkungen, die ich meinem Eröffnungsvortrage vorausschicken wollte. Der Vortrag selbst sollte kurzweg den Titel haben „Ueber Eisenstein" oder auch „Zum Gedächtnis von Eisenstein". Ich wollte darin nur ganz kurz über die Zeit berichten, in der ich mit ihm persönlich bekannt war, auch einige Briefe wissenschaftlichen Inhalts, die ich von ihm besitze, mitteilen und danach — wie etwa in einer Gedenkrede — über seine Arbeiten sprechen. Dabei mussten dann ausser den rein arithmetischen und analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Functionen hervorgehoben werden, welche dem Bewusstsein der Jeztzeit ganz abhanden gekommen sind, auf welche ich aber bei meinen neuesten Arbeiten habe zurückkommen müssen. Jetzt in diesen meinen Arbeiten haben sich die eigentlichen Ursachen der „Unebenheiten" gefunden, welche Eisenstein in seiner Theorie — wie sich deutlich erkennen lässt — unangenehm aufgefallen sind. Auch hierauf wollte ich näher eingehen. Ich hoffe, die Ausarbeitung des ganzen Vortrags, für den ich bis jetzt nur einige vorläufige Aufzeichnungen gemacht habe, noch durchführen zu können. Falls dies geschieht, kann der Vortrag vielleicht, wenn es Ihnen und der mathematischen Abteilung, welcher Sie präsidiren, angemessen erscheint, mit den wirklich gehaltenen Vorträgen (unter Hinzufügung einer geeigneten Vorbemerkung) gedruckt werden. Auch stelle ich Ihnen anheim, aus diesem Briefe, soviel Sie davon für geeignet halten, der mathematischen Abteilung auszugsweise mitzuteilen. Jedenfalls bitte ich, meine collegialischen Grüsse in einer der Verhandlungen auszurichten und dabei meinem tiefen Bedauern Ausdruck zu geben, dass ich durch mein Unglück am persönlichen Erscheinen verhindert bin. . . .

Einfacher Beweis eines F. Neumann'schen Satzes*)

von

C. Neumann (Leipzig).

Es sei ein Magnet gegeben von beliebiger Gestalt und Beschaffenheit. Wir stellen uns die Aufgabe, im Innern und an der Oberfläche des Magneten ein System elektrischer Ströme zu construiren, welches auf jedweden ausserhalb des Magneten befindlichen Magnetpol genau dieselbe Wirkung ausübt, wie der Magnet selber.

Zuvörderst mag eine gewisse Umgestaltung des Biot-Savart'schen Gesetzes ausgeführt werden. Bezeichnen x, y, z den Ort, und dx, dy, dz die Componenten eines linearen Stromelementes von der Stromstärke J, so werden nach jenem Gesetz die Componenten X, Y, Z der von diesem Element auf einen Magnetpol (x_1, y_1, z_1) ausgeübten Kraft die Werte haben:

$$(1)\quad \begin{cases} X = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dy - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dz\right), \\[2ex] Y = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dz - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dx\right), \\[2ex] Z = AJ\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dy\right), \end{cases}$$

wo $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ ist, und wo A eine Constante vorstellt, deren Wert verschieden ist je nach dem zu Grunde gelegten Mass-System. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Magnetpol (x_1, y_1, z_1) die magnetische Masse Eins hat, und dass das angewendete Coordinatensystem ein positives ist.

An Stelle von r mögen nun drei Functionen f, g, h eingeführt werden, die zu r in der Beziehung stehen:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial h}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

---

*) In Verhinderung des Verfassers durch Herrn G. Cantor vorgelegt.

Derartige Functionen existiren unendlich viele, so z. B. folgende:

$$(3) \qquad f = 0, \quad g = -\frac{\xi\zeta}{(\eta^2+\zeta^2)r}, \quad h = +\frac{\xi\eta}{(\eta^2+\zeta^2)r},$$

wo ξ, η, ζ zur Abkürzung stehen für $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$. Bei dieser besondern Wahl der Functionen f, g, h haben, wie man aus (2) ersieht, die Ableitungen derselben nach x die Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y};$$

so dass also die erste der Formeln (1) auch so darstellbar ist:

$$X = AJ\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial x} dy + \frac{\partial h}{\partial x} dz\right),$$

oder auch so:

$$(4) \qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{AJ(f dx + g dy + h dz)\}.$$

In analoger Weise sind offenbar auch die zweite und dritte der Formeln (1) darstellbar; nur sind dabei statt der speciellen Functionen f, g, h (3) jedesmal andere specielle Functionen f, g, h anzuwenden.

Nimmt man statt des bisher betrachteten linearen Stromelementes irgend ein körperliches Stromelement vom Volumen $d\tau$ und mit den Strömungscomponenten u, v, w, so erhält man an Stelle der Formel (4) folgende Formel:

$$(4a) \qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{A(fu + gv + hw)d\tau\}.$$

Desgleichen ergiebt sich für ein flächenhaftes Stromelement die Formel:

$$(4b) \qquad X = -\frac{\partial}{\partial x_1}\{A(f\bar{u} + g\bar{v} + h\bar{w})d\sigma\},$$

wo $d\sigma$ die Fläche des Elementes und $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die in demselben enthaltenen Flächenströmungen vorstellen.

Dies vorausgeschickt, gehen wir jetzt über zu unserer Aufgabe. Das Potential des gegebenen Magneten auf einen äusseren Magnetpol (x_1, y_1, z_1) hat bekanntlich den Wert:

$$(5) \qquad \Omega = \int\left(a\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + b\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + c\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumenelemente $d\tau$ des Magneten. Dabei sind a, b, c gegebene Functionen von x, y, z. Und zwar repräsentiren a, b, c die magnetischen Momente in demjenigen Punkte (x, y, z), in welchem das Element $d\tau$ sich befindet. Ueberdies bezeichnet r den Abstand dieses Punktes vom Pole (x_1, y_1, z_1).

Substituirt man in (5) die Ausdrücke (2), so folgt:

$$\Omega = -\int \left[\left(c \frac{\partial f}{\partial y} - b \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \cdots \right] d\tau,$$

d. i.

$$\Omega = -\int \left[\left(\frac{\partial cf}{\partial y} - \frac{\partial bf}{\partial z} \right) + \cdots \right] d\tau + \int \left[f \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \cdots \right] d\tau,$$

d. i.

$$(6) \qquad \Omega = +\int [f(c\beta - b\gamma) + \cdots] d\sigma + \int \left[f \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \cdots \right] d\tau.$$

In dieser letzten Formel ist das erste Integral ausgedehnt über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Magneten. Dabei bezeichnen α, β, γ die Richtungscosinus der auf $d\sigma$ errichteten inneren Normale.

Wir führen jetzt sechs neue Functionen ein: u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, definirt durch die Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} A\bar{u} = c\beta - b\gamma, & Au = \dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z}, \\[2ex] A\bar{v} = a\gamma - c\alpha, & Av = \dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x}, \\[2ex] A\bar{w} = b\alpha - a\beta, & Aw = \dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y}. \end{cases}$$

Alsdann geht die Formel (6) über in:

$$(8) \qquad \Omega = A\int (f\bar{u} + g\bar{v} + h\bar{w}) d\sigma + A\int (fu + gv + hw) d\tau.$$

Hieraus ergiebt sich z. B. für die x-Componente der von dem Magneten auf den Pol (x_1, y_1, z_1) ausgeübten Kraft der Wert:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ A\int (f\bar{u} + g\bar{v} + h\bar{w}) d\sigma + A\int (fu + gv + hw) d\tau \right\}.$$

Und hieraus ergiebt sich in Anbetracht der Formeln (4a, b), dass diese x-Componente genau ebenso gross ist, wie die x-Componente derjenigen Wirkung, welche das durch u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ dargestellte Stromsystem auf jenen Pol (x_1, y_1, z_1) ausüben würde.

Die Formeln (7) repräsentiren daher die Lösung der gestellten Aufgabe. D. h. sie repräsentiren dasjenige Stromsystem u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, welches den gegebenen Magneten, was seine Einwirkung auf äussere Magnetpole betrifft, zu ersetzen im Stande ist.

Der durch die Formeln (7) ausgesprochene Satz dürfte wohl zum ersten Mal von meinem Vater aufgestellt sein. Man vergl. F. Neumann's Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von Von der Mühll, Leipzig, 1884, Seite 178, 179. Die dortigen Formeln (3), (4) bieten, den hier abgeleiteten Formeln (7) gegenüber, gewisse kleine Unterschiede dar, welche sich daraus erklären, dass die Constante A dort $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ gesetzt ist, ferner daraus, dass statt des positiven ein negatives Coordinatensystem benutzt ist, endlich daraus, dass dort statt der inneren Normale (α, β, γ) die äussere Normale n eingeführt ist.

Die dort gegebene Ableitung des Satzes ist eine recht mühsame und beschwerliche. Allerdings könnte gegen die hier gegebene einfachere Ableitung ein Einwand erhoben werden, wenn auch nicht auf Grund des Biot-Savart'schen, so doch auf Grund des Ampère'schen Gesetzes. Nach der Ampère'schen Vorstellung sind nämlich Magnetpole nichts anderes als Solenoidpole. Und nach dem Ampère'schen Gesetz hat die von einem Stromelement auf einen solchen Magnetpol oder Solenoidpol ausgeübte Kraft allerdings die in (1) angegebenen Componenten X, Y, Z; — nur befindet sich der Angriffspunkt dieser Kraft nicht im Pole selber, sondern in einem Punkte, der dem Stromelement unendlich nahe liegt, und der mit jenem Pole durch einen starren Arm verbunden zu denken ist.

Oder man kann auch so sagen: Die Wirkung des Stromelementes auf den Magnet- oder Solenoid-Pol wird, bei Zugrundelegung des Ampère'schen Gesetzes, dargestellt sein erstens durch die den Pol selber erfassende Kraft:

$$\text{(p)} \qquad X,\ Y,\ Z$$

und zweitens durch ein den Pol erfassendes Drehungsmoment Δ, dessen Componenten die Werte haben:

$$\text{(q)} \qquad \Delta_x = \eta Z - \zeta Y, \quad \Delta_y = \zeta X - \xi Z, \quad \Delta_z = \xi Y - \eta X,$$

wo alle Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie bisher; so dass z. B. ξ, η, ζ Abbreviaturen sind für $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$.

Was nun das in (7) angegebene Stromsystem u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$

betrifft, so ist im Vorhergehenden nachgewiesen, dass die von diesem Stromsystem auf den Pol ausgeübten Kräfte (p) zusammengenommen eine Wirkung ergeben, die identisch ist mit der vom Magneten selber auf den Pol ausgeübten.

Es bleibt also nur noch zu zeigen übrig, dass die vom Stromsystem $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ auf jenen Pol ausgeübten Drehungsmomente (q) zusammengenommen ein Drehungsmoment ergeben, welches $= 0$ ist.

Nun ist nach (1):

$$X = -AJ\frac{\zeta dy - \eta dz}{r^3},$$

$$Y = -AJ\frac{\xi dz - \zeta dx}{r^3},$$

$$Z = -AJ\frac{\eta dx - \xi dy}{r^3},$$

woraus z. B. folgt:

$$\Delta_x = \eta Z - \zeta Y = AJ\frac{\xi(\eta dy + \zeta dz) - (\eta^2 + \zeta^2)dx}{r^3},$$

d. i.

$$\Delta_x = AJ\left(\frac{\xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz)}{r^3} - \frac{dx}{r}\right).$$

Bezeichnet man also die Summe der von den Strömen u, v, w und $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ausgeübten Δ_x respective mit D_x und $\bar{D}_x$, so ergiebt sich sofort:

$$D_x = A\int\left(\frac{\xi(\xi u + \eta v + \zeta w)}{r^3} - \frac{u}{r}\right)d\tau,$$

$$\bar{D}_x = A\int\left(\frac{\xi(\xi\bar{u} + \eta\bar{v} + \zeta\bar{w})}{r^3} - \frac{\bar{u}}{r}\right)d\sigma,$$

das eine Integral ausgedehnt über alle Volumenelemente $d\tau$ des Magneten, das andere über all' seine Oberflächenelemente $d\sigma$. Führt man nun neben D_x, $\bar{D}_x$, und mit diesen Grössen in analogem Sinn, die Bezeichnungen D_y, $\bar{D}_y$ und D_z, $\bar{D}_z$ ein, so wird zu zeigen sein, dass

$$D_x + \bar{D}_x = 0,$$

$$D_y + \bar{D}_y = 0,$$

$$D_z + \bar{D}_z = 0$$

ist. Uebrigens wird nur die erste dieser Formeln zu beweisen sein;

denn der Beweis der beiden andern wird sich alsdann in analoger Art führen lassen.

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\xi^2}{r^3} - \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\xi\eta}{r^3} \qquad = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \\ \mathfrak{C} = \dfrac{\xi\zeta}{r^3} \qquad = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \end{cases}$$

so gewinnen die Ausdrücke der Momente D_x und $\overline{D}_x$ die einfachere Gestalt:

$$D_x = A\int(\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)d\tau,$$

$$\overline{D}_x = A\int(\mathfrak{A}\overline{u} + \mathfrak{B}\overline{v} + \mathfrak{C}\overline{w})d\sigma.$$

Hieraus folgt, wenn man für $u, v, w, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ die Werte (7) einsetzt, sofort:

$$(\mathrm{II})\qquad D_x = \int\left[\left(\mathfrak{C}\frac{\partial b}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \cdots\right]d\tau,$$

$$(\mathrm{III})\qquad \overline{D}_x = \int[(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)\alpha + \cdots]d\sigma.$$

Die Formel (II) ist aber, in Anbetracht der aus (I) entspringenden Relationen:

$$\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}, \quad \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y},$$

und so darstellbar:

$$D_x = \int\left[\frac{\partial(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)}{\partial x} + \cdots\right]d\tau.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(\mathrm{IV})\qquad D_x = -\int[(\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)\alpha + \cdots]d\sigma.$$

Endlich folgt aus (III) und (IV): $D_x + \overline{D}_x = 0$. — Q. e. d.

Bemerkung. — Die Wirkung eines einzelnen Stromelementes auf einen Magnetpol entspricht dem Biot-Savart'schen Gesetz, und besitzt daher kein Potential. Trotzdem aber wird ein solches Potential existiren, falls man nur voraussetzt, dass das Element einem geschlossenen linearen Strom angehört. —' Um diese Behauptung zu rechtfertigen, gehen wir aus von dem bekannten Satz, dass das Potential V eines geschlossenen linearen Stromes J auf einen Magnetpol (von der magnetischen Masse Eins) den Wert hat:

$$V = AJ\varepsilon K = AJ\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $d\sigma$ der Stromfläche. Hier bezeichnet ν die auf $d\sigma$ errichtete positive Normale und r den Abstand des Elementes $d\sigma$ vom Pol. Ueberdies präsentirt εK die sogenannte reducirte Kegelöffnung. [Vgl. mein Werk: die elektrischen Kräfte, Leipzig, 1873 Seite 256 u. 242.] Dieser Wert des Potentials V ist offenbar auch so darstellbar:

$$V = AJ\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\gamma\right) d\sigma,$$

wo x, y, z die Coordinaten von $d\sigma$, und α, β, γ die Richtungscosinus der Normale ν bezeichnen. — Hieraus folgt nun mittelst der Substitution (2.):

$$V = AJ\int\left[\left(\beta\frac{\partial f}{\partial z} - \gamma\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\gamma\frac{\partial g}{\partial x} - \alpha\frac{\partial g}{\partial z}\right) + \left(\alpha\frac{\partial h}{\partial y} - \beta\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] d\sigma,$$

oder durch Anwendung eines bekannten Satzes [vgl. das citirte Werk, Seite 90, Nr. (22)]:

$$K = AJ\int(f\,dx + g\,dy + h\,dz),$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente dx, dy, dz der gegebenen in sich zurücklaufenden Stromcurve.

Obwohl also die Wirkung eines einzelnen Stromelementes auf einen Magnetpol im allgemeinen kein Potential besitzt, so wird trotzdem, wie die letzte Formel zeigt, ein solches Potential angebbar, und durch

$$AJ(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

dargestellt sein, falls man nur voraussetzt, dass das Element einem geschlossenen linearen Strom angehört. Dabei bezeichnen f, g, h drei den Bedingungen (2) entsprechende, im übrigen aber beliebig zu wählende Functionen.

Ueber Gleichungen mit rationalen Coefficienten*).

Von
R. Dedekind (Braunschweig).

Dass solche Sätze über Gleichungen, die für jeden endlichen Grad gelten, nicht ohne weiteres für Gleichungen von unendlich hohem Grade in Anspruch zu nehmen sind, wird zu unserer Zeit wohl von fast allen Mathematikern anerkannt. Da aber die Entscheidung über eine solche Frage bisweilen nicht leicht zu finden ist, so erlaube ich mir im folgenden einen besonderen, nicht unwichtigen Fall zu behandeln. In der Lehre von denjenigen Gleichungen, welche einen endlichen Grad und lauter rationale Coefficienten haben, wird der bekannte Satz bewiesen:

1. Hat die irreducible Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel gemein mit der Gleichung $\psi(x) = 0$, so ist jede Wurzel der ersteren Gleichung auch eine Wurzel der letzteren.

Dieser Satz verliert aber, wenn die Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade ist, seine allgemeine Gültigkeit, und zwar selbst für solche Gleichungen, deren linke Seite $\psi(x)$ eine für alle Werthe von x convergirende Potenzenreihe mit rationalen Coefficienten ist. Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Satze:

2. Ist α irgend eine reelle Zahl, so giebt es eine solche Gleichung $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem oder auch endlichem Grade, welche α als einzige reelle Wurzel besitzt.

Ist nämlich dies bewiesen, so folgt daraus jedesmal ein offenbarer Widerspruch mit dem Satze 1., wenn man für α eine Wurzel einer irreduciblen Gleichung $\varphi(x) = 0$ (z. B. $x^2 - 2 = 0$) wählt, die mindestens zwei reelle Wurzeln α, β hat. Es kommt also nur noch darauf an, den Satz 2. zu beweisen, und hierbei darf man sich auf den Fall einer positiven Zahl α beschränken, weil auf diesen der entgegengesetzte Fall durch Verwandlung von x in $-x$ zurückgeführt wird; im Falle $\alpha = 0$ kann man natürlich $\psi(x) = x$ nehmen.

Aus jeder positiven Zahl α entsteht — in ähnlicher Weise und mit derselben Bestimmtheit, wie bei der Entwicklung in einen gemeinen Kettenbruch — immer eine Reihe von ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und eine Reihe von zugehörigen Resten, d. h. solchen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, welche alle der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

genügen, nach folgender Regel: zunächst setze man

*) In Verhinderung des Verfassers durch Herrn G. Cantor vorgelegt.

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \varepsilon_1,$$

wodurch a_1 als die grösste in $\frac{1}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl, also auch ε_1 als Rest bestimmt ist; für jeden grösseren Index n aber setze man

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

wodurch auch alle folgenden Zahlen a als grösste Ganze und alle Reste ε vollständig bestimmt sind; zugleich leuchtet ein, dass von den Zahlen a keine negativ ist. Dann besitzt die vollkommen definirte Function

$$\psi(x) = -1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} + \cdots$$

alle im Satze 2. angegebenen Eigenschaften. In der That:

1) Die Coefficienten von $\psi(x)$ sind sämtlich rationale Zahlen.

2) Da $\varepsilon_{n-1} < 1$, also $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, so ist das allgemeine Glied der Reihe $\psi(x)$ absolut kleiner als

$$\frac{x}{\alpha^2} \cdot \frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

woraus bekanntlich folgt, dass die Reihe $\psi(x)$ (wie die Exponentialreihe) für jeden Wert von x convergirt.

3) Aus den Definitionen der Zahlen a und ε folgt, dass die aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Summe

$$-1 + a_1 \frac{\alpha}{1} + a_2 \frac{\alpha^3}{1.2} + a_3 \frac{\alpha^5}{1.2.3} + \cdots + a_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)} = -\varepsilon_n \frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

ist, und da die rechte Seite mit unendlich wachsendem n unendlich klein wird, so folgt $\psi(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $\psi(x) = 0$.

4) Da von den Zahlen a keine negativ, wohl aber mindestens eine positiv ist (wie aus $\psi(\alpha) = 0$ hervorgeht), da ferner, abgesehen von dem constanten Gliede -1, die Variable x in der Reihe $\psi(x)$ nur in Potenzen mit ungeraden Exponenten auftritt, so wird gleichzeitig mit x auch $\psi(x)$ das ganze reelle Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$ stets wachsend durchlaufen und folglich auch nur für den einzigen Wert $x = \alpha$ den Wert Null erhalten; d. h. die Gleichung $\psi(x) = 0$ hat ausser α keine reelle Wurzel, w. z. b. w.

Hiermit ist die Unzuverlässigkeit des Satzes 1. für Gleichungen $\psi(x) = 0$ von unendlich hohem Grade erwiesen. Dieser Nachweis ist wohl nicht ganz wertlos, weil verschiedene Mathematiker auf den Gedanken gekommen sind, durch Anwendung dieses unzuverlässigen Satzes auf das Beispiel $\psi(x) = \sin x$ einen Beweis für die Transcendenz der Zahl π zu gewinnen, der offenbar nur wenige Zeilen erfordern würde.

Der Beweis des Satzes 2. lässt sich, wie man leicht sieht, in der mannigfaltigsten Weise abändern; zugleich leuchtet ein, dass dieser Satz auch für jede endliche Anzahl von vorgeschriebenen reellen Wurzeln α gilt.

Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik.

Von
Felix Klein (Göttingen).

Der unterscheidende Charakterzug der englischen Arbeiten über Mechanik den continentalen Arbeiten gegenüber ist dem Vortragenden zufolge ihre auf unmittelbare Erfassung der Wirklichkeit gerichtete Tendenz und die durchgängige Anschaulichkeit ihrer Entwickelungen. Infolgedessen müssen diese Arbeiten dem an abstractere Gedankenfolgen gewöhnten Mathematiker besonders anregend sein, und es verschlägt in dieser Hinsicht nichts, oder es ist vielmehr geradezu nützlich, dass besagte Untersuchungen zumeist nicht so methodisch oder so streng durchgeführt sind, wie wir dies zu verlangen gewohnt sind. Unter den Einzelheiten, welche Vortragender ausführt, dürfte eine Bemerkung über die Entstehungsgeschichte von Hamilton's Integrationstheorie der Mechanik allgemeineres Interesse beanspruchen. Die Sache scheint völlig unbekannt zu sein, trotzdem sich Hamilton darüber an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten, insbesondere in seiner ersten Abhandlung über Strahlensysteme (1824), mit hinreichender Deutlichkeit äussert. Hamilton fand die Auffassung der Emissionstheorie vor, nach welcher die Bestimmung des Lichtstrahles, der irgend welches inhomogene (aber isotrope) Medium durchsetzt, ein Specialfall eines gewöhnlichen, auf die Bewegung eines Massenpunktes bezüglichen mechanischen Problemes ist; wir können gleich zusetzen, dass die dabei vorliegende Specialisirung keine wesentliche ist, dass man vielmehr, indem man zu höheren Räumen schreitet, jedes mechanische Problem auf die Bestimmung des in einem geeigneten Medium verlaufenden Lichtstrahles zurückführen kann. Und nun ruht Hamilton's Entdeckung, nach welcher die Integration der dynamischen Differentialgleichungen mit der Integration einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in Verbindung steht, einfach darauf, dass Hamilton, im Anschluss an die grosse physikalische Bewegung seiner Zeit, unternahm, die in emissiver Form bekannten Resultate der geometrischen Optik vom Standpunkte der Undulationstheorie abzuleiten. Hamilton's Integrationstheorie der dynamischen Differentialgleichungen ist zunächst nichts anderes, als eine analytisch allgemeine Formulirung der in physikalischer Form wohlbekannten Beziehung zwischen Lichtstrahl und Lichtwelle. — Vermöge des hiermit gegebenen Ausgangspunktes wird auch die unnötig particuläre Form verständlich, in der Hamilton seine Theorie veröffentlichte und über die dann Jacobi hinausging. Hamilton hatte bei seinen Untersuchungen über Strahlensysteme zunächst durchaus praktische Fragen der Instrumentenkunde im Auge. Daher operirt er ausschliesslich mit solchen Lichtwellen, welche von einzelnen Punkten ausgehen. Jacobi's Verallgemeinerung läuft darauf hinaus, dass man zur Definition des Strahles ebensowohl beliebige andere Lichtwellen gebrauchen darf. Von den speciellen Wellen aus construirt man in der Optik die allgemeinen bekanntlich vermöge des sogenannten Huygens'schen Princips; diese Construction ist ein genaues Aequivalent für den analytischen Process, vermöge dessen man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von irgend welcher „vollständigen" Lösung zur „allgemeinen" Lösung aufsteigt.

Ueber das System der rein mathematischen Wissenschaften.

Von
E. Papperitz (Dresden).

Der Vortrag bezweckte die Klarstellung der logischen Principien, welche zu einer organischen Systematik der rein mathematischen Disciplinen führen können.

1. Das erste Erfordernis ist die genaue Umgrenzung des Begriffes der Mathematik und insbesondere der reinen Mathematik. Erstere hat es als formale und deductive Wissenschaft mit der Untersuchung der Begriffe zu thun, welche die Beziehungen beliebiger Objecte zu einander ausdrücken. In der reinen Mathematik aber müssen diese Begriffe unabhängig von der Substanz der Objecte, folglich ohne Beziehung auf ein Reales ausser uns gedacht werden können. Hieraus ergiebt sich die Erklärung: Den Gegenstand der reinen Mathematik bilden die Beziehungen, welche zwischen irgend welchen gedachten Elementen begrifflich herstellbar sind, indem wir sie als in einer geordneten Mannigfaltigkeit enthalten setzen; das Ordnungsgesetz dieser Mannigfaltigkeit muss unserer Wahl unterliegen; und letzteres ist bei den beiden allein denkbaren Arten von Mannigfaltigkeiten, bei den discreten sowohl wie bei den stetigen, der Fall.

2. Mithin ergeben sich als oberste mathematische Begriffe zwei: die Zahl und die Lage. Beide drücken die gegenseitige Beziehung zweier beliebigen Elemente in einer geordneten Mannigfaltigkeit aus, die Zahl im Gebiete des discret, die Lage im Gebiete des stetig Gedachten. Die reine Mathematik umfasst also eine Wissenschaft von der Zahl und eine Wissenschaft von der Lage. — Die Mechanik ist der angewandten Mathematik zuzuweisen. — Die erste jener beiden Wissenschaften heisst Analysis; wird es gestattet, die zweite als Geometrie zu bezeichnen, so ist daran zu erinnern, dass man sie sich ebenso wie jene als frei von Axiomen, lediglich auf Nominaldefinitionen und der Anwendung des Begriffs der Gleichheit beruhend vorzustellen hat. (Gleich heissen zwei Beziehungen, die einander in jedem Urteil substituirt werden können.)

3. Hiernach kann auch die philosophische Frage beantwortet werden, welche Stellung zur Mathematik die (auf Reales bezogenen) Anschauungsbegriffe der Zahl, des Raumes und der Zeit einnehmen. Die beiden ersten liefern das ursprüngliche (den historischen Ausgangspunkt bildende) Begriffsmaterial, welches aber der Ergänzung fähig und bedürftig ist. Man könnte die Lehre vom gemeinen Zahl- und Raumbegriff als „actuelle“ Mathematik bezeichnen und ihr die weitergreifenden Disciplinen als „transcendentale“ Mathematik gegenüberstellen. Aber diese Unterscheidung ist wenig zweckmässig, denn über die Grenzen des Anschauungsgemässen kann gestritten werden, nicht aber über das, was denkbar (widerspruchsfrei) ist. Daher genüge es, zu sagen, dass die reine Mathematik auf die Begriffe anwendbar ist, welche die Beziehungen der realen Objecte darstellen. Der Zeitbegriff veranlasst überdies die Einführung eines neuen Einteilungsprincipes, weil er die Gegensätze des Beständigen und Veränderlichen einschliesst: man unterscheidet eine Analysis der beständigen und der veränderlichen Zahlen, eine Geometrie der beständigen und der veränderlichen Lage. — Herrschend aber werden in der reinen Mathematik nur die Begriffe, welche ihren Ursprung in unserem Denken selbst haben: der subjective Zeitbegriff als Form des discursiven Denkens (der successiven Gedankenverbindung) und der subjective Mannigfaltigkeitsbegriff als Form des combinatorischen Denkens (der simultanen Gedankenverbindung).

4. Die Entwickelung der Grundbegriffe vollzieht sich in der Analysis einerseits und in der Geometrie andererseits nach einem bemerkenswerten dualistischen Gegensatz. In der Analysis erzeugt man zuerst aus einer gedachten Einheit (z. B. einem individuellen Ding)

synthetisch die Reihe der positiven ganzen Zahlen, geht dann zu analytischen Operationen über und wird durch die Forderung ihrer unbeschränkten Anwendbarkeit zu allgemeinen Zahlbegriffen geführt, welche durch die Wahl der permanent zu erhaltenden formalen Gesetze bestimmt sind. In der Geometrie gelangt man von einem gedachten Raume (z. B. dem Raume der Sinnengegenstände) zuerst durch unterscheidende Operationen, also analytisch zu den allgemeinen Begriffen beliebiger Flächen, Linien und zuletzt zum Punkte, dann synthetisch zu speciellen Raumbegriffen, welche wiederum durch gewisse permanente formale Gesetze bestimmt werden. — Das ursprünglich erhaltene Begriffsmaterial liefert jedesmal bereits den Stoff zu einer selbständigen Wissenschaft. Dies ist hier die specielle Lehre von den discreten Zahlen (Zahlentheorie), dort die allgemeine Lehre von den stetigen Räumen (Topologie).

5. In beide Hauptzweige der Mathematik greift eine dritte unabhängige Wissenschaft ein, die Combinatorik. Diese untersucht die Beziehungen, welche zwischen den denkbaren Zuständen irgend welcher Objecte bestehen, bezw. zwischen den Operationen, welche diese Zustände ineinander überführen. Der principielle Teil der Combinatorik ist die abstracte Operationenlehre (Gruppentheorie); die combinatorischen und speciell gruppentheoretischen Teile der Analysis und der Geometrie erscheinen als Anwendungen derselben auf einzelne Begriffsklassen.

6. Der oben als Einteilungsgrund benutzte Gegensatz der Begriffe discret und stetig ist ein fliessender. Discretes kann verbunden, Stetiges gesondert werden. In beiden Fällen gelangt man zum Begriffe der Grösse; im ersten zur intensiven, im zweiten zur extensiven Grösse. Jene enthält gleichartige, diese ungleichartige Elemente; in der That ist es unumgänglich, discrete Elemente in mindestens einer Beziehung gleich, stetige verschieden zu setzen. — Den principiellen Teil der Grössenlehre bildet die Metrik, welcher ebenso wie der Combinatorik eine mittlere Stellung zugewiesen werden muss; denn der Grössenbegriff ist in beiden Hauptzweigen der Mathematik zulässig. Hierbei ergiebt sich aber insofern Neues, als die Gesichtspunkte der Geometrie auf die Analysis und umgekehrt die der letzteren auf die Raumlehre anwendbar werden, indem man Zahlgrössen durch Raumgebilde, also intensive Grössen durch extensive, darstellt und umgekehrt. Die neuen Disciplinen sind die geometrische Functionentheorie und die analytische Geometrie.

7. Für die weitere Teilung der Disciplinen ist von besonderer Wichtigkeit ein Klassificationsprincip, welches sich auf die Art der De-

finition ihrer Objecte bezieht. Hierzu kann nämlich entweder eine endliche Anzahl der Grundoperationen genügen — algebraische Definition —, oder aber ein aus einer unendlichen Anzahl derselben zusammengesetzter Process erforderlich sein — transcendente Definition —; im letzteren Falle ist der vorherige Nachweis der Existenz einer Grenze nötig. Obwohl die Unterscheidung zwischen algebraischer und transcendenter Definition in der gesamten Mathematik zulässig ist, tritt sie doch mit voller Schärfe bisher nur in der Analysis hervor.

8. Es erscheint statthaft und für die Systematik zweckmässig, in den einzelnen Wissenschaften die Methodenlehre von den Theorien zu trennen, welche den eigentlichen Inhalt der betreffenden Disciplin darstellen.

Hiermit sind die wichtigsten der besprochenen Fragen kurz charakterisirt; ihre breitere Entwickelung und Begründung muss einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben. An den Vortrag schloss sich die Vorlegung eines „Entwurfes zu den Grundzügen eines Systemes der rein mathematischen Wissenschaften“, in welchem (wesentlich unter Einschränkung der Betrachtung auf das gemeine complexe Zahlensystem und den euklidischen Raum) versucht wurde, eine Probe der Zweckmässigkeit der entwickelten Einteilungsprincipien zu geben. Die ersten Umrisse dieses Systementwurfes sind aus nachstehendem Schema erkennbar.

In der Einleitung des Vortrages wurde auf die praktische Bedeutung hingewiesen, welche die Fragestellung bei litterarischen Unternehmungen gewinnt, welche der Mathematik eine geordnete Bibliographie und einheitliche Terminologie verschaffen sollen.

(Hierzu Tabelle auf Seite 40.)

Ueber das Parallelenaxiom.

Von
Max Simon (Strassburg).

Den Ausgangspunkt des Vortrags bildet der Gedanke, dass unsere Raumvorstellungen sich auf Grund unserer körperlichen Organisation entwickelt haben und mit eben dieser in allmählicher Veränderung begriffen sind. Der erste, welcher nachweisbar erkannte, dass unser Parallelenaxiom keine Denknotwendigkeit sei, war Gauss (etwa um 1792), von ihm sind die Bolyai und Lobatschewsky beeinflusst.

Es seien g und h zwei Gerade, welche auf derselben dritten in A und B senkrecht stehen, dann sind zwei Hauptfälle denkbar, welche sich

Reine Mathematik.

A. Zahlenlehre.	B. Raumlehre.
I. P.T. Zahlbegriff. Arithmet. Grundoperationen.	I. P.T. Lagebegriff. Geometr. Grundoperationen.
II. Spec. L. v. d. discreten Zahlen. (Höh. Arithmet. od. Zahlentheorie.)	II. Allgem. L. v. d. stetigen Räumen. (Topologie. Analysis situs.)
III. Allgem. Zahlenlehre.	III. Spec. Raumlehre.

Combinatorik.

P.T. Abstracte Operationenlehre oder Gruppentheorie.

a) L. v. d. beständig. Zahlen.	b) L. v. d. veränderl. Zahlen.	a) L. v. d. beständig. Lage.	b) L. v. d. veränderl. Lage.
α_1) M.L. Allgem. Arithmetik.	β_1) M.L. Infinites. Rechnung.	α_1) M.L. Project. Verwandtsch.	β_1) M.L. Synthese d. Bewegung.
α_2) Combinatorik const. Elem.	β_2) Variationsrechnung.	α_2) Abzählende Geometrie.	β_2) Kinemat. Ketten. Zwangläufigkeit.
α_3) Substitutions-Gr.	β_3) Transformations-Gr.	α_3) Configurations-Gr.	β_3) Bewegungs-Gr.
α) Analysis d. Bestimmten.	β) Analysis d. Veränderl.	α) Geometrie d. Lage.	β) Geometrie d. Beweg.
A.T. Algebr. Lösung d. Gleichungen; Determinanten, Gleichgs.-Systeme, Elimination; Algebr. Formen u. Invarianten.	A.T. Algebraische und T.T. transcendente Functionen einer oder mehrerer Variablen.	Spec. Geometrie der Grundgebilde verschiedener Stufen und verschiedener Erzeugung.	Theorie der beweglichen starren Systeme, der Trajectorien, Hüllbahncurven und Flächen.
T.T. Analysis d. Unendlichen.			

Metrik.

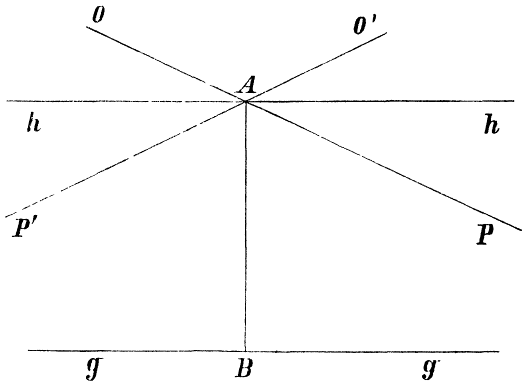
P.T. Massbegriff. Metrische Grundoperationen.

Längen-, Winkel-, Flächen-, Körpermessung. Phorometrie.

β') Geometrische Functionentheorie.	α') Analytische Geometrie.
P.T. Geometr. Darstellbarkeit veränderlicher Zahlen. Topologische Analyse d. stetigen Zahlgebilde (Riemann'sche Flächen, etc.).	P.T. Analyt. Darstellbarkeit der Raumgebilde. Zählende Synthese d. discreten Raumgrössen (Cantor'sche Mengen, etc.)
M.L. Geometr. Theorie d. analyt. Transformationen (Abbildung). Darstellungsmethoden. Bestimmung d. Functionen aus geometrisch gegebenen Bedingungen.	M.L. Analyt. Theorie d. geometr. Verwandtschaften. Darstellungsmethoden. Anwendungen der Infinitesimalrechnung.
A.T. Algebr. Functionen.	A.T. Algebraische Gebilde.
T.T. Transcend. Functionen.	T.T. Transcend. Gebilde.

Abkürzungen: L. = Lehre, M.L. = Methodenlehre, P.T. = Principieller Teil, A.T. = Algebraischer Teil, T.T. = Transcendenter Teil, Gr. = Gruppen.

wieder in je 2 Unterfälle spalten. g und h können sich nicht schneiden oder können sich schneiden. Im Falle 1) kann a) h die einzige Nichtschneidende (Gerade) zu g durch A sein, b) kann ein ganzes Bündel Nichtschneidender existiren, gehälftet von h, welches von den Schnei-



denden durch 2 symmetrisch zu AB gelegene Grenzgerade — die beiden Parallelen — getrennt wird. Im Falle 2) können g und h sich a) in einem Punkte x schneiden, der dann links und rechts gleichweit von AB entfernt ist, oder b) in zwei Punkten x und y, symmetrisch zu AB gelegen. Es wurde nun der Satz bewiesen: Wenn einer dieser Fälle einmal eintritt, so muss eben dieser immer eintreten. Der Beweis setzt nur voraus, dass jede Strecke AB eine Mitte hat; dies wird mittelst eines Grenzüberganges bewiesen, welcher in „Simon, Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die abs. Geom., Strassburg 1890" mitgeteilt ist. Je nachdem einer der 4 Fälle eintritt, werden 4 Geometrien des einfach zusammenhängenden Raumes als euklidische, absolute, Klein'sche und Riemann'sche unterschieden. Es folgte eine Kritik der 4 bekanntesten Beweise des Parallelenaxioms, welche die Schwächen jedes einzelnen hervorhob.

Ueber die Bilder dioptrischer Systeme grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes.

Von
S. Finsterwalder (München).

Die elementare Theorie der centrirten Linsensysteme, wie sie von Gauss zum Abschluss gebracht wurde, lässt sich im wesentlichen durch den Satz charakterisiren, dass, für Strahlen einer Farbe wenigstens, jedes noch so complicirte dioptrische System durch eine einzige Linse insofern ersetzt werden kann, als diese Linse zu jedem Object ein Bild von gleicher Grösse und Lage liefert, wie jenes Linsensystem. Dieser Satz gilt nur in den engen Grenzen einer ersten Annäherung, und in Wirklichkeit bilden Linsensysteme scharfe leuchtende Punkte nicht wieder als solche ab und ebensowenig genau an der Stelle, welche aus der Gauss'schen Theorie folgt. Will man sich über den Betrag der Unschärfe der Bilder und über deren Verzerrung unterrichten, so muss man die nächsten, in den Gauss'schen Entwickelungen bereits vernachlässigten Glieder mit berücksichtigen und erhält dann eine Formelserie, welche den Gang eines Strahles durch ein dioptrisches System so genau darstellt, dass auch der Grad der Unschärfe der Bilder und die Verzerrung in erster Annäherung daraus gefolgert werden kann. Eine solche Formelserie, welche die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf das Gesichtsfeld und in Bezug auf die Oeffnung in Betracht zieht, hat zuerst L. von Seidel (1856. Astron. Nachrichten, Nr. 1027) aufgestellt. Aus dieser Formelserie kann die Art des Strahlensystems, welches durch die Brechung eines gewöhnlichen Strahlenbündels in einem dioptrischen System entsteht, erschlossen werden. Wenn der leuchtende Punkt sich ausserhalb der optischen Axe des Linsensystems befindet, ist das System der gebrochenen Strahlen von der 5. Ordnung und 4. Klasse und dessen Brennfläche von der 9. Ordnung. Dies gilt im allgemeinen. Ist dagegen das Linsensystem in der optischen Axe in Bezug auf die sphärische Aberration corrigirt, so reducirt sich die Ordnung des Systems der gebrochenen Strahlen auf 4 und die der Brennfläche auf 8. Im allgemeinen Fall kann das System der gebrochenen Strahlen auch mechanisch erzeugt werden. Bewegt sich nämlich ein Stab derart, dass drei auf ihm fest angenommene Punkte in drei zu einander senkrechten Ebenen gleiten, so beschreibt derselbe in seinen verschiedenen Lagen ein Normalensystem, das mit dem System der gebrochenen Strahlen dann zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, wenn die Distanz zweier der festen Punkte des Stabes sehr klein gegenüber der Entfernung des dritten angenommen wird. Aus der in diesem Satze begründeten geometrischen Einsicht in die Natur des Systems der gebrochenen Strahlen lassen sich nun alle Eigentümlichkeiten der diffusen Lichtflecke, die an Stelle scharfer Bilder auftreten, ermitteln, so namentlich die Helligkeitsverteilung durch Isophoten und die Begrenzungscurven, welche durch die Abblendung der einfallenden Strahlen bedingt sind. Durch Einführung elliptischer Coordinaten in die Seidel'schen Formeln werden besonders einfache Gleichungen für die erwähnten Curven gefunden, die dann zu einer bemerkenswerten Abbildung der Schirmebene, in der der Lichtfleck aufgefangen wird, führen. Bei dieser Abbildung gehen die Brennlinien des Lichtfleckes in Geraden, die Isophoten in Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben, und die Grenzcurven für verschieden grosse Blenden in eine andere Hyperbelschar über. Alle diese Verhältnisse sind durch Zeichnungen erläutert worden, die sich teils auf eine unsymmetrisch gebaute Convexlinse, theils auf das Königsberger Heliometerobjectiv beziehen. Eine ausführliche Publication der Resultate erscheint demnächst in den Abhandlungen der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften in München (II. Cl., 17. Bd., 3. Abth., Seite 517—588).

Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordnung und ihrer Developpabeln.

Von

C. Rohn (Dresden).

Den Gegenstand des Vortrags bildete die Darlegung einer Anzahl Modelle der rationalen Raumcurven 4. Ordnung und ihrer abwickelbaren Flächen, die der Vortragende im Anschluss an zwei Publicationen in den Berichten der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (am 9. Juni 1890 und am 12. Januar 1891) hat anfertigen lassen.

Jede solche Raumcurve liegt auf einem Hyperboloide, dessen eine Schar die Curve je ein Mal und dessen andere Schar sie je drei Mal trifft. Die Curve ist deshalb auf dem Hyperboloid durch eine ein-dreideutige Beziehung bestimmt. Es giebt nun auf dem Hyperboloid einen ganz bestimmten Kegelschnitt, den Hauptkegelschnitt, und auf ihm ein ganz bestimmtes Punktquadrupel, die Hauptpunkte, — seine Schnittpunkte mit der Raumcurve 4. Ord., die zu der Curve in fundamentaler Beziehung stehen und die ein-dreideutige Beziehung völlig definiren. Legt man nämlich durch die Hauptpunkte vier Erzeugende, die der Schar der einfachen Secanten angehören, und bestimmt zu allen Punkten des Hauptkegelschnitts die erste Polare in Bezug auf das Quadrupel dieser Erzeugenden (indem man jedes Mal eine Erzeugende der andern Schar zieht und die erste Polare in Bezug auf die vier Schnittpunkte construirt), so gewinnt man die Raumcurve 4. Ord. Die nämliche Curve erhält man auch, wenn man durch die Hauptpunkte vier Erzeugende legt, die der Schar der Trisecanten angehören, und zu allen Punkten des Hauptkegelschnitts die lineare Polare in Bezug auf das Quadrupel dieser Erzeugenden bestimmt. Da das Quadrupel der Hauptpunkte drei lineare Transformationen in sich zulässt, so geht auch die Raumcurve 4. Ord. durch drei lineare Raumtransformationen in sich über.

Auf der Raumcurve liegen nun ausser dem Quadrupel der Hauptpunkte, noch zwei weitere Quadrupel, die für die Curve und ihre abwickelbare Fläche von besonderer Bedeutung sind und die im wesentlichen deren Gestalten bedingen. Es sind dieses die 4 Punkte mit Wendeebenen, in denen die Schmiegungsebene vier consecutive Punkte mit der Raumcurve gemein hat, und die Schnittpunkte der 4 berührenden Trisecanten. Die gestaltliche Wirkung dieser Vorkommnisse ist sofort evident. In der Nähe der Berührungspunkte der Wendeebenen liegt die Raumcurve ganz auf einer Seite derselben, in Folge dessen durchsetzen sich dort die beiden Mäntel der abwickelbaren Fläche. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche verläuft durch die Punkte mit Wendeebenen, welche als Pinch-points erscheinen. Längs der berührenden Trisecanten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid, indem die benachbarten Curventangenten teils ausserhalb, teils innerhalb desselben liegen. Die abwickelbare Fläche durchschneidet dabei zugleich die Raumcurve 4. Ordnung und damit die in ihr als Rückkehrcurve zusammenhängenden Flächenmäntel; d. h. in den einfachen Punkten der berührenden Trisecanten besitzt die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche Spitzen.

Was nun die Realitätsverhältnisse anlangt, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist reell, dann sind die Punkte mit Wendeebenen und die berührenden Trisecanten imaginär. Hieraus ergiebt sich dann weiter, dass keine Curventangente eine andere treffen kann, dass also die Doppelcurve der Developpabeln ganz imaginär sein und dass diese ganz auf einer Seite des Hyperboloides liegen muss. Es kann hier keine Ebene geben, die die Raumcurve nicht schneidet, diese verläuft also nothwendig durch's Unendliche. Jede Trisecante trifft die Curve in drei reellen Punkten.

2. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist imaginär, die Punkte mit Wendeebenen sind reell, die berührenden Trisecanten dagegen imaginär. Die Developpable liegt auch hier ganz auf einer Seite des Hyperboloides, ihre Doppelcurve ist reell, indem jede Curventangente zwei andere trifft. Das Hyperboloid teilt die Doppelcurve in vier Stücke, von denen zwei isolirt verlaufen, während die beiden andern auf der abwickelbaren Fläche liegen und von den Pinch-points begrenzt werden. Jede Trisecante trifft die Curve nur in einem reellen Punkte.

3. Das Quadrupel der Hauptpunkte ist imaginär, die berührenden Trisecanten sind reell, dagegen die Punkte mit Wendeebenen imaginär. Die Developpable liegt zu beiden Seiten des Hyperboloides; ihre Doppelcurve liegt ganz reell auf ihr und trifft in 4 Spitzen auf das Hyperboloid auf, liegt jedoch ganz auf einer Seite desselben. Die Trisecanten treffen die Curve teils in einem Punkte.

Als Uebergangsfall zwischen 2. und 3. dient die Raumcurve mit zwei osculirenden Trisecanten; ihre abwickelbare Fläche besitzt dann eine Doppelcurve 4. Ord. von gleicher Eigenschaft; jene Trisecanten sind Rückkehrkanten dieser Fläche und auch Trisecanten der Doppelcurve. Der Uebergang ist an den Modellen bequem zu übersehen.

4. Zwei Hauptpunkte sind reell, dann giebt es auch zwei reelle berührende Trisecanten und zwei reelle Punkte mit Wendeebenen. Hier liegt die abwickelbare Fläche wieder zu beiden Seiten des Hyperboloides. Auf der reellen Doppelcurve giebt es zwei reelle Spitzen und zwei reelle Pinch-points; in letzteren durchsetzt die Doppelcurve das Hyperboloid und verläuft dann isolirt, in den ersteren ruht sie auf dem Hyperboloid auf.

Im speciellen Fall können hier die berührenden Trisecanten durch die Punkte mit Wendeebenen hindurchgehen; dann besitzt die Developpable einen dreifachen Kegelschnitt, der in zwei Pinch-points das Hyperboloid durchdringt. Durch den einen Teil desselben schickt die Fläche einen, durch den andern drei Mäntel. Hierzu ist auch die dualistische Fläche modellirt.

5. Das Hyperboloid und mit ihm die ganze Raumcurve 4. Ord. ist imaginär; dann ist auch die Developpable imaginär, ihre Doppelcurve jedoch reell.

In den Fällen 1., 2., 3., 5. sind die drei linearen Raumtransformationen, welche die Raumcurve und ihre Developpable in sich überführen, reell; zugleich giebt es vier reciproke Raumtransformationen, die die Raumcurve in die Doppelcurve und umgekehrt verwandeln; sie sind imaginär. Im Falle 4. ist eine Transformation der Raumcurve in sich reell, und zugleich sind zwei der andern Transformationen reell.

Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie.

Von

H. Wiener (Halle).

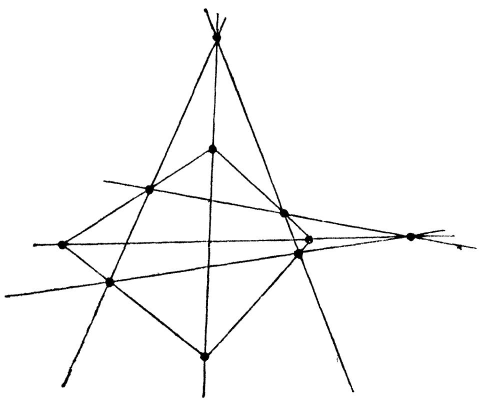
Man kann von dem Beweise eines mathematischen Satzes verlangen, dass er nur diejenigen Voraussetzungen benutzt, von denen der Satz wirklich abhängt. Die geringsten denkbaren Voraussetzungen sind das Vorhandensein von gewissen Objecten und von gewissen Operationen, durch die diese Objecte unter einander verknüpft werden. Ist es möglich, derartige Objecte und Operationen ohne Zufügen neuer Voraussetzungen so an einander zu reihen, dass Sätze entstehen, so erhält man in diesen Sätzen ein in sich begründetes Gebiet der Wissenschaft. Ein solches ist z. B. die Arithmetik.

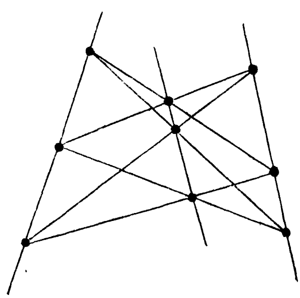
Auch für die Geometrie ist ein derartiges Zurückgehen auf die einfachsten Objecte (Elemente) und Operationen von Bedeutung, da man dann umgekehrt wieder aus diesen eine abstracte Wissenschaft aufbauen kann, die von den Axiomen der Geometrie unabhängig ist, deren Sätze aber Schritt für Schritt mit den Sätzen der Geometrie parallel gehen.

Ein Beispiel hierzu liefert die projective Geometrie der Ebene. Die Objecte seien Punkte und Geraden, die Operationen das Verbinden und Schneiden; Objecte und Operationen seien nur in endlicher Anzahl vorausgesetzt. Oder, vom geometrischen Gewande losgelöst: es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimmt, dass die Verknüpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe. Die geometrischen Sätze, die hierbei auftreten — wenn man von den auf die Anzahl der Elemente sich beziehenden combinatorischen Sätzen absieht — sind Schliessungssätze, worunter hier solche Sätze zu verstehen sind, in denen jede in dem Satze vorkommende Gerade wenigstens drei ebensolche Punkte trägt, und jeder Punkt auf wenigstens drei Geraden liegt. Beispiele:

1) Der Satz von Desargues über perspective Dreiecke.

2) Der auf das Geradenpaar bezogene Pascal'sche Satz.





Der Beweis dieser Sätze kann nicht aus den gegebenen Objecten und Operationen geführt werden, d. h. dieses Gebiet der Geometrie ist kein in sich begründetes. Entnimmt man aber den Beweis irgend eines solchen Satzes (oder auch mehrerer) einem anderen Gebiete, so lässt sich durch Wiederholung dieses Satzes (bezw. der Sätze) ein begrenztes Gebiet der ebenen Geometrie herleiten. So erhält man aus dem erstgenannten Schliessungssatz (dessen Beweis in der räumlichen Geometrie geführt wird) ein Gebiet, das die sonst durch Strecken- (bezw. Punkt-) Addition gewonnenen Sätze umfasst. Den zweitgenannten Schliessungssatz aus dem ersten abzuleiten, ist nicht geglückt; eine weitere Möglichkeit wäre, ihn durch Projection aus drei oder mehr Dimensionen herzuleiten, oder — was leicht ist — durch Einführung des Stetigkeitsbegriffs. Diese beiden Schliessungssätze aber genügen, um ohne weitere Stetigkeitsbetrachtungen oder unendliche Processe den Grundsatz der projectiven Geometrie zu beweisen, und damit die ganze lineare projective Geometrie der Ebene zu entwickeln.

Wie in der Ebene, so lässt sich auch im Raume eine auf den Grundelementen (Objecten) Punkt, Gerade, Ebene beruhende Geometrie aufbauen. Hier giebt es aber in sich begründete Gebiete. In entsprechender Weise kann man auch in höhere Dimensionen aufsteigen. Wichtiger ist es, noch von der Ebene eine Stufe abwärts zur Geometrie der Geraden überzugehen. Als einziges Element hat man hier den Punkt, von Verbinden und Schneiden kann nicht mehr die Rede sein. Wir müssen also sogar eine Operation aus einem anderen Gebiet entnehmen, und es bieten sich hierzu Constructionen dar, die in der Ebene geführt werden können, aber nur Punkte unserer Geraden betreffen, und zwar vor allem die Construction projectiver, involutorischer und harmonischer Punktgruppen. Es ergiebt sich, dass man sich auf die letztgenannte beschränken kann, da der Satz gilt: Sind in einer Geraden von einer Involution zwei Paare, oder von einer Projectivität drei Paare entsprechender Punkte gegeben, so kann man zu jedem beliebigen weiter gegebenen Punkte den entsprechenden Punkt aus den gegebenen durch eine **endliche** Anzahl von Constructionen harmonischer Punkte finden*).

Andere Gebiete erhält man durch Annahme neuer Voraussetzungen. Die Geometrie der Ordnung setzt u. a. den Satz voraus, dass auf einer geschlossenen Linie vier Punkte sich auf eine angebbare Weise in zwei

*) Der Beweis dieses Satzes ist inzwischen veröffentlicht in den Berichten der K. sächs. Ges. d. Wiss. 1891, S. 669, ff.

Paare zerlegen, die sich trennen. Weitere Gebiete beruhen auf der Voraussetzung der Stetigkeit der Elemente, sei es nun die analytische Stetigkeit der Grenzprocesse, oder die geometrische Stetigkeit, die ihren Ausdruck in dem Aufeinandertreffen von Punkten findet, welche sich in gewisser Weise gleichzeitig in einer Linie bewegen.

Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie „p"-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades.

Von

H. Schubert (Hamburg).

Da die abzählende Geometrie, wie sie sich bisher entwickelt hat, im wesentlichen algebraischer Natur ist, so hat man seit einigen Jahren angefangen, ihre Resultate von drei auf n Variabeln auszudehnen. Was zunächst die „p"-dimensionalen Räume ersten Grades anbetrifft, so besitzen die von ihnen erzeugten Systeme im allgemeinen nicht eine Gradzahl, sondern viele Gradzahlen, welche sämtlich aus dem von dem Vortragenden eingeführten und von Herrn Segre und anderen adoptirten Bedingungs-Symbol $(a_0 a_1 a_2 \dots a_p)$ hervorgehen, das auf folgende Weise definirt werden kann. Versteht man unter einer eckigen Klammer, in der eine Zahl steht, immer einen linearen Raum, dessen Dimension gleich dieser Zahl ist, so denke man sich einen $[a_0]$, $[a_1]$, u. s. w. bis $[a_p]$ derartig, dass immer der $[a_i]$ in dem $[a_{i+1}]$ liegt. Dann bezeichnet für den $[p]$ das Symbol $(a_0 a_1 a_2 \dots a_p)$ die Bedingung, dass der $[p]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemein hat. Z. B. für den Strahl bedeutet (03) die Bedingung, in einem dreidimensionalen linearen Raume zu liegen und durch einen in diesem Raume gegebenen Punkt zu gehen. Damit $(a_0 a_1 a_2 \dots a_p)$ Sinn hat, muss

$$0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p \leqq n$$

sein. Nachdem jene Bedingung als charakteristisch erkannt war, handelte es sich darum, die Anzahlen allgemein auszudrücken, welche angeben, wie viel $[p]$ hinreichend viele derartige Bedingungen erfüllen. Eins der interessantesten in dieser Untersuchungsrichtung liegenden Resultate hat der Vortragende im VIII. Bande der Acta Mathematica veröffentlicht. Dort ist die Anzahl derjenigen $[p]$ berechnet, welche ausser der Bedingung $(a_0 a_1 a_2 \dots a_p)$ noch hinreichend oft, nämlich $a_0 + a_1 + \dots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$ Male, die einfache Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2,\ \dots,\ n)$$

erfüllen, d. h. die, einen gegebenen $[n-p-1]$ einpunktig zu treffen.

Diese Anzahl ist gleich

$$\frac{(a_0+a_1+\cdots+a_p-\frac{1}{2}p(p+1))!D}{a_0!a_1!\ldots a_p!},$$

wo D die bekannte Determinante ist, welche das Product aller möglichen Differenzen je zweier der Zahlen a_0 bis a_p ist. Auf einen Specialfall dieser Formel, nämlich

$$p=1, \quad a_0=n-1, \quad a_1=n$$

waren auch die Herren F. Meyer und Stephanos von invariantentheoretischer Seite gestossen. Von den analogen, auf Räume zweiten Grades bezüglichen Fragen, zu denen der Vortragende dann überging, sei der Kürze wegen hier nur die Frage nach der Anzahl derjenigen $(p-1)$-dimensionalen Räume zweiten Grades erwähnt, welche den $[p]$, in dem sie liegen, die Bedingung $(a_0 a_1 \ldots a_p)$ erfüllen lassen, und welche selbst $a_0+a_1+\cdots+a_p+p$ gegebene $[n-1]$ tangiren. Die gesuchte Zahl ist eine Function $f(a_0, \ldots, a_p)$ der gegebenen $p+1$ ganzen Zahlen und auf folgende Weise arithmetisch definirbar: $f(x)$ sei gleich 2^x und $f(x, y)$ sei gleich $(x+y)_{x+1}+(x+y)_{x+2}+\cdots+(x+y)_y$, wo die $y-x$ Addenden Binomialcoefficienten sind, deren Basis $x+y$ ist, und deren Indices $x+1$, $x+2$ u. s. w. bis y sind. Dann ist

$$f(x, y, z) = f(x).f(y, z)-f(y).f(x, z)+f(z).f(x, y),$$

ferner

$$f(x, y, z, u) = f(x, y).f(z, u)-f(x, z).f(y, u)+f(x, u).f(y, z),$$

sowie

$$f(x, y, z, u, v) = f(x).f(y, z, u, v)-\cdots+f(v)f(y, z, u, v)$$

u. s. w. So ist die Function f für beliebig viele Argumente definirt und leicht berechenbar, z. B.:

$$f(1, 3, 4, 5) = (4_2+4_3)9_5$$
$$-(5_2+5_3+5_4).(8_4+8_5)+(6_2+6_3+6_4+6_5)7_4 = 70.$$

Für $f(x, x+1, \ldots, x+y)$ fand der Vortragende bei ungeradem y den Ausdruck:

$$\frac{[0!2!\ldots(y-1)!][(2x+1)!(2x+3)!\ldots(2x+y)!]}{x!(x+1)!\ldots(x+y)!}$$

und bei geradem y den Ausdruck

$$\frac{[1!3!\ldots(y-1)!]2^x[(2x+2)!(2x+4)!\ldots(2x+y)!]}{(x+1)!(x+2)!\ldots(x+y)!}.$$

Grundzüge einer Gestaltenlehre der Polyeder.

Von
V. Eberhard (Königsberg i. Pr.).

Bei der ausserordentlichen Mannigfaltigkeit körperlicher Formen, welche die Natur dem Beschauer darbietet, ist es schwer erklärlich, dass die vergleichsweise Betrachtung der verschiedenen Gestalten räumlicher Gebilde und deren systematische Beschreibung in der Entwickelung der geometrischen Theorien nur untergeordnetes Interesse gefunden hat. Erst in neuester Zeit hat sich das lebhafte Bestreben geltend gemacht, diese Lücke auszufüllen und so auf dem Boden der unmittelbaren Anschauung der geometrischen Forschung ein neues Arbeitsfeld zu erschliessen. Es zeugen hierfür die zahlreichen Arbeiten auf topologischem Gebiete, speciell diejenigen über die Typen algebraischer Curven und Flächen.

Aus gleichen Gesichtspunkten habe ich die einfachsten räumlichen Gestaltungen, die Polyeder, einer eingehenden vergleichenden Betrachtung unterzogen *). Mich von vorn herein auf die convexen oder Euler'schen Polyeder beschränkend, stellte ich mir die Aufgabe, unter allen denkbaren polyedrischen Körpern, wenn möglich, diejenigen aufzufinden, welche durch bestimmte, vorerst noch unbekannte Eigenschaften so ausgezeichnet sind, dass sie selbst als die ursprünglichen, alle übrigen als die aus ihnen abgeleiteten Formen erscheinen. Die nachfolgenden Ausführungen mögen darlegen, in wie weit es mir gelungen ist, einen derartigen systematischen Zusammenhang der verschiedenen Bildungen nachzuweisen.

Die Betrachtung geht aus von den Begriffen des Iso- und Allomorphismus convexer Polyeder. Zwei von je n Ebenen abgegrenzte Körper erscheinen als isomorph, falls unter allen möglichen Bezeichnungen ihrer 2n Grenzflächen durch resp.

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n \qquad \text{und} \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

eine von der Beschaffenheit existirt, dass die Schnittgeraden entsprechender Ebenenpaare

$$\alpha_i, \quad \alpha_k \qquad \text{und} \qquad \beta_i, \quad \beta_k,$$

wenn überhaupt, stets gleichzeitig Kanten ihrer Polyeder sind; dagegen werden Polyeder, welche dieser Bedingung nicht genügen, als allomorph aufgefasst.

Es ergeben sich hiernach als charakteristische Merkmale der Gestalt eines convexen Polyeders:

---

*) V. Eberhard, Morphologie der Polyeder. Leipzig, B. G. Teubner. 1891.

1) die Formen, d. h. die Seitenanzahlen seiner einzelnen ebenen Grenzpolygone, und

2) die Art des Zusammenschlusses letzterer zu der vollständigen Oberfläche.

Die beiden aufgestellten Begriffe sind unmittelbar auch auf offene, nämlich ein- oder mehrfach berandete polyedrische Flächen auszudehnen.

Nachdem so jedes Polyeder als Vertreter einer durch unendlich viele Individuen veranschaulichten charakteristischen Form erkannt ist, führt der erste Schritt in der vergleichenden Betrachtung allomorpher Typen zu einer wesentlichen Unterscheidung. Man stösst einerseits auf Polyeder, welche bei jeder genügend kleinen stetigen Variation der sie bestimmenden Grenzebenen die Gestalt bewahren, andererseits auf solche, welche bei noch so kleinen stetigen Bewegungen ihrer Grenzebenen in allomorphe Körper übergehen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten des ersten Falles bestehen darin, dass in jeder Ecke des Polyeders genau drei Grenzflächen zusammenstossen; dagegen hat der zweite Fall statt, wenn auch nur durch eine Ecke mehr als drei Flächen gehen. Die Polyeder der ersten Art sollen als allgemeine, die der zweiten als singuläre angesehen werden. Genauer wird als Grad der Singularität eines convexen Polyeders der Ueberschuss definirt, welchen die Anzahl der in den einzelnen singulären Ecken zusammenstossenden Grenzflächen über die dreifache Zahl dieser Ecken ergiebt.

Aus der letzten Bemerkung fliesst ein für die systematische Auffassung der polyedrischen Formen fundamentaler Satz. Es besteht nämlich, wenn x_h die Anzahl der h-seitigen ebenen Grenzpolygone und ρ den Grad der Singularität irgend eines konvexen Polyeders angiebt, die wichtige Relation

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12 + 2\rho.$$

Da nach derselben der Wert des Ausdrucks $x_3 + x_4 + x_5$ wenigstens 4 beträgt, so folgt, dass unter den Grenzflächen eines konvexen Polyeders stets 4 oder mehr Flächen vorhanden sind, welche weniger als je 6 Seiten besitzen. Man schliesst hieraus auf die Fähigkeit, alle convexen Polyeder aus einem Tetraeder durch successive Anwendung von nur drei-, vier- und fünfseitigen Schnitten herzustellen.

Mit den bisherigen mehr vorbereitenden Betrachtungen sind die erforderlichen Hülfsmittel gewonnen, die eigentliche anfangs gekennzeichnete Aufgabe in Angriff zu nehmen. Die für jedes allgemeine Polyeder gültige Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12$$

deutet durch ihre Unabhängigkeit von der Anzahl x_6 der Grenzsechsecke und der Zahl n der Seitenflächen des jeweiligen Polyeders auf die Möglichkeit einer Einschaltung von Grenzsechsecken in dessen Oberfläche hin. Die Theorie dieser als Elementarerweiterungen der Polyeder einzuführenden Umformungsprocesse geht aus von den Grundbegriffen des enthaltenen und des enthaltenden Polyeders.

Wenn die Oberfläche eines n-flächigen Polyeders A_n in m einander ausschliessende einfach berandete Bestandteile $S_1, S_2, \ldots$ zerlegt ist, welche ebensovielen einander nicht überdeckenden Bestandteilen $S'_1, S'_2, \ldots$ eines $(n+\nu)$-flächigen Polyeders $A_{n+\nu}$ isomorph sind, so fasse ich A_n als ein in $A_{n+\nu}$ enthaltenes, $A_{n+\nu}$ als ein A_n enthaltendes Polyeder auf. Das auf A_n von den m Randpolygonen der Bestandteile S_i gebildete Netz wird als ein Erweiterungsnetz dieses Polyeders, die nach Ausscheidung der Flächen S'_i aus der Oberfläche von $A_{n+\nu}$ resultirende Fläche aber als eine zu jenem Netze gehörige Einschaltungsfläche bezeichnet.

Es sei die Anzahl der h-seitigen Grenzpolygone des Polyeders A_n durch x_h, die entsprechende Anzahl für die Einschaltungsfläche durch y_h gegeben, so gelten in Bezug auf die beiden Polyeder die Gleichungen:

$$(1)\quad 3x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-3x_9-\cdots = 12,$$

$$(2)\quad 3(x_3+y_3)+2(x_4+y_4)+(x_5+y_5)$$
$$-(x_7+y_7)-2(x_8+y_8)-3(x_9+y_9)-\cdots = 12.$$

Aus denselben folgt

$$(3)\quad 3y_3+2y_4+y_5-y_7-2y_8-3y_9-\cdots = 0$$

als die für die Einschaltungsfläche geltende Beziehung.

Die einfachste positive und ganzzahlige Lösung der dritten Gleichung ist:

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = y_9 = \cdots = 0.$$

Derselben entspricht, wenn überhaupt, eine durchweg aus Sechsecken gebildete Fläche. Das auf dem Polyeder A_n gegebene Erweiterungsnetz soll alsdann ein Elementarnetz, die zugehörige Einschaltungsfläche eine Elementarfläche genannt werden.

Es drängen sich hier naturgemäss zwei Fragen auf, nämlich:

1) Wie werden für ein gegebenes allgemeines Polyeder alle etwaigen Elementarnetze gefunden?

2) Wie werden zu einem gegebenen Elementarnetze die sämtlichen Einschaltungsflächen construirt?

Die Beantwortung derselben führt zu folgenden Sätzen:

Liegt auf einem allgemeinen Polyeder irgend ein Netz von Kantenpolygonen vor, so entscheidet stets eine endliche Anzahl nach einer allgemeinen Vorschrift auszuführender Constructionen darüber, ob das Netz ein Elementarnetz ist oder nicht. Jedes Polyeder besitzt eine bestimmte Anzahl von Elementarnetzen, und zwar ist ein solches durch das jedesmalige System der Grenzflächen dargestellt. Schliesslich gehören zu jedem beliebigen Elementarnetze zwar unendlich viele Elementarflächen, unter denselben ist aber nur eine endliche Anzahl elementar irreducibler Individuen vorhanden.

Mit der Erkenntnis der elementaren Erweiterungsfähigkeit des allgemeinen convexen Polyeders und der daraus folgenden relativen Unterordnung seiner sechsseitigen gegenüber den andersförmigen Grenzpolygonen gewinnen für die erstrebte Einteilung der Polyeder die positiven und ganzzahligen Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12$$

ein erhöhtes Interesse. Indem man dieselbe durch die beiden anderen ersetzt

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots,$$

und den aufsteigenden Werten $m = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechend der Reihe nach die verschiedenen Lösungen auf ihre Construirbarkeit hin prüft, gelangt man zu folgenden allgemeinen Sätzen:

Jede positive ganze Zahl m incl. 0 bestimmt einen Bereich allgemeiner convexer Polyeder. Innerhalb eines beliebigen Bereiches definirt jede positive und ganzzahlige Lösung der Bereichsgleichungen einen Stamm analoger Körper. Endlich umfasst jeder Stamm nur eine endliche Anzahl elementar irreducibler Individuen, sogenannter Stammpolyeder, aus welchen sich alle übrigen durch Elementarerweiterung ableiten lassen.

Es sei noch bemerkt, dass die angegebenen auf den Fall $\rho = 0$ bezüglichen Resultate in dem allgemeinen Falle eines beliebigen ρ sich in entsprechender Weise modificiren.

Ueber ein mechanisches Modell zur Versinnlichung der Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Wärme- und Elektricitätslehre.

Von

L. Boltzmann (München).

Seien: p generalisirte Coordinaten eines materiellen Systems, $\dot{p}$ deren Ableitungen nach der Zeit, T die lebendige Kraft des Systems als Function von p und $\dot{p}$, endlich P die nach p wirkende Kraft, so dass $\Sigma P \delta p$ die Arbeit ist; so hat man:

$$P = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial T}{\partial p}.$$

In gewissen Aufgaben der Elektricitäts- und Wärmelehre zerfallen nun die Coordinaten in zwei Gruppen. Für die erste Gruppe (langsam veränderliche Parameter, nach wie vor von uns mit p bezeichnet) kann $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}$ vernachlässigt werden; die der zweiten Gruppe (cyklische Coordinaten, für welche wir die Buchstaben p und P mit q und Q vertauschen wollen) sind dadurch charakterisirt, dass sie nicht explicit, sondern nur ihre Ableitungen nach der Zeit in T vorkommen. Dann erhalten wir also an Stelle der obigen Gleichungen:

$$P = -\frac{\partial T}{\partial p}, \quad Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Ein noch speciellerer Fall ist der, dass die Geschwindigkeit eines jeden Massenteilchens m_l eine lineare Function der $\dot{q}$, also etwa gleich $\Sigma_k a_{k,l}\dot{q}_k$ ist, wobei die Coefficienten $a_{k,l}$ Functionen der p sind. Setzen wir dann

$$A_{k,k} = \Sigma_l m_l a_k^2,$$

dagegen für ungleiche Indices des A

$$A_{k,h} = \Sigma_l m_l a_{k,l} a_{h,l},$$

so wird

$$2T = \Sigma_k \Sigma_h A_{k,h} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

wo jeder Wert des h mit jedem des k zu combiniren ist, und folglich wegen $A_{k,h} = A_{h,k}$

$$P_i = -\tfrac{1}{2}\Sigma_k \Sigma_h \dot{q}_k \dot{q}_h \frac{\partial A_{k,h}}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{d\Sigma_k A_{k,i}\dot{q}_k}{dt}.$$

Die wesentlichsten Eigenschaften dieser Gleichungen, wie sie in der mechanischen Wärmetheorie in Anwendung kommen, sind schon zu ersehen, wenn eine Masse m mit einer einzigen cyklischen Coordinate q und einer langsam veränderlichen p vorhanden ist. Ein Beispiel bietet eine rasch rotirende Röhre, mit welcher eine Masse m mitrotirt. Alles Uebrige ist natürlich massenlos. q ist der Winkel, um den sich die Röhre, von einer gegebenen Anfangslage ausgehend, gedreht hat; p ist die Entfernung der Masse von der Drehungsaxe. An der Masse ist ein Faden befestigt, welcher über eine Rolle und dann in der Axe der Röhre fortläuft. Eine an seinem Ende angreifende Kraft kann sich während der Drehung p langsam verändern. Dies ist also die Kraft P, während Q an einer mit der Röhre verbundenen Kurbel angreift.

Um dagegen die Anwendung derselben Gleichungen auf die Theorie der elektrischen Ströme zu versinnlichen, sind drei Massen erforderlich, welche in analoger Weise an drei coaxialen Röhren befestigt sind. Die oberste und unterste Röhre, welche die gleichen Massen m_1 und m_2 tragen, sind wieder durch Kurbeln drehbar, an denen die Kräfte Q_1 und Q_2 angreifen. Durch Zahnräder aber wird bewirkt, dass die Winkeldrehung q_3 der mittleren Röhre, woran die Masse $m_3 = 4m_1$ befestigt ist, das arithmetische Mittel der beiden Winkeldrehungen q_1 und q_2 der übrigen Röhren ist. Drei aus dem Röhrensysteme heraushängende Fäden reguliren wie oben die drei Distanzen l_1, l_2 und l_3 der Massen von der Drehungsaxe. Dann wird

$$A_{11} = m_1(l_1^2 + l_3^2), \quad A_{22} = m_1(l_2^2 + l_3^2), \quad A_{12} = m_1 l_3^2.$$

Denkt man sich daher 3 Handgriffe durch ein Gestänge so mit den 3 Fäden verbunden, dass bei Bewegung des 1. resp. 2. um die Stücke p_1 resp. p_2 nur l_1 resp. l_2 sich ändern, bei Bewegung des 3. um p_3 aber sich alle l so ändern, dass $l_1^2 + l_3^2$ und $l_2^2 + l_3^2$ constant bleiben, so sind die auf die Handgriffe wirkenden Kräfte

$$P_1 = -\tfrac{1}{2}\dot{q}_1^2 \frac{\partial A_{11}}{\partial p_1}, \quad P_2 = -\tfrac{1}{2}\dot{q}_2^2 \frac{\partial A_{22}}{\partial p_2}, \quad P_3 = -\dot{q}_1 \dot{q}_2 \frac{\partial A_{12}}{\partial p_3},$$

während die auf die beiden Kurbeln wirkenden Kräfte sind

$$Q_1 = \frac{d}{dt}(A_{11}\dot{q}_1 + A_{12}\dot{q}_2), \quad Q_2 = \frac{d}{dt}(A_{12}\dot{q}_1 + A_{22}\dot{q}_2).$$

Die Gleichungen haben vollkommen dieselbe Form, wie die von Thomson für zwei elektrische Ströme mit den Intensitäten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$, und den Selbstinductionscoefficienten A_{11} und A_{22} gefundenen. A_{12} ist ihr wechselseitiger Inductionscoefficient, p_1, p_2 und p_3 sind Coordinaten, von denen nur A_{11} resp. A_{22} und A_{12} abhängen.

Ein vom Mechaniker Gasteiger in Graz verfertigter Apparat, an welchem diese Bedingungen realisirt waren (es konnte jedoch nur p_3, nicht p_1 und p_2 verändert werden), und welcher in der That alle an zwei elektrischen Strömen beobachteten Erscheinungen mechanisch nachzuahmen gestattete, wurde vom Vortragenden vorgezeigt. Die Fäden waren durch eine Stange ersetzt, an welcher die drei Massen durch Parallelogrammführungen befestigt waren, wie sie beim Centrifugalregulator der Dampfmaschine vorkommen. Bezüglich der Details mag verwiesen werden auf: „Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes“, Leipzig bei J. A. Barth 1891, sechste Vorlesung.

Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Function einer Variabeln.

Von

K. Hensel (Berlin).

Ist u eine unbestimmte, aber endliche Grösse, so sind die beiden Formen:

$$(1) \qquad x_1 = \frac{x}{x-u}, \quad x_2 = \frac{1}{x-u}$$

für jeden Wert von x endlich. Durch die Gleichung $x = \frac{x_1}{x_2}$ ist somit x als Quotient zweier allenthalben endlichen Formen dargestellt, deren Zähler offenbar nur für $x = 0$, der Nenner nur für $x = \infty$ verschwindet.

Eine entsprechende Darstellung als Quotient zweier allenthalben endlichen Formen erhält man für rationale und für algebraische Functionen von x. Ist nämlich y mit x durch die ganze algebraische Gleichung:

$$(2) \qquad f(\overset{n}{y}, \overset{m}{x}) = 0$$

verbunden, so ergiebt sich für x und y folgende simultane Darstellung in der verlangten Form:

$$(3) \qquad y = \frac{\eta}{x_2^m}, \quad x = \frac{x_1}{x_2},$$

denn die analytische Function η wird niemals unendlich gross; dieselbe kann als eine „ganze homogene algebraische Form von (x_1, x_2)“ bezeichnet werden.

Betrachtet man jetzt an Stelle der rationalen Functionen von (x, y) die sogenannten „homogenen Formen von (x_1, x_2, η)“, so ergiebt sich der Satz:

Jede rationale Function von (x, y) kann als Quotient von zwei ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η) derselben „Dimension“ dargestellt werden, und umgekehrt ist jeder derartige Quotient einer Function der durch (2) bestimmten Klasse algebraischer Functionen gleich.

Bei dieser Darstellung werden Zähler und Nenner niemals unendlich, und sie verschwinden nur für die Null- beziehungsweise für die Unendlichkeitsstellen der betreffenden algebraischen Function.

Die Fundamentalaufgabe dieser Theorie besteht nun darin, alle ganzen Formen von (x_1, x_2, η) vollständig aufzustellen, und diese ist völlig identisch mit der folgenden:

Es soll ein vollständiges System von rational unabhängigen ganzen homogenen Formen

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_{n-1}$$

gefunden werden, dessen Gesamtdimension

$$M = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}$$

eine möglichst kleine ganze Zahl ist.

Die Aufstellung eines solchen „Fundamentalsystems" ergiebt sich nun auf rationalem Wege, nämlich allein mit Hülfe des euklidischen Verfahrens. Mit seiner Hülfe beherrscht man vollständig die ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η). Es besteht nämlich der wichtige Satz:

Alle ganzen homogenen Formen von (x_1, x_2, η) und nur sie lassen sich in der Form:

$$u_0 \eta_0 + u_1 \eta_1 + \cdots + u_{n-1} \eta_{n-1}$$

darstellen, wo $u_0, \ldots, u_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) allein sind.

Mit Berücksichtigung des vorigen Satzes folgt hieraus unmittelbar:

Jede algebraische Function $\varphi(x, y)$ lässt sich in der Form:

$$\varphi(x, y) = \frac{u_0 \eta_0 + \cdots + u_{n-1} \eta_{n-1}}{v_0 \eta_0 + \cdots + v_{n-1} \eta_{n-1}}$$

darstellen, wo $u_0, \ldots, u_{n-1}, v_0, \ldots, v_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) allein sind.

Eine unmittelbare Folge dieses Resultats ist z. B. der sogenannte Riemann-Roch'sche Satz.

Den ganzen oder allenthalben endlichen algebraischen Formen, die man durch die obige Darstellung durch das Fundamentalsystem völlig beherrscht, steht am nächsten eine grössere Klasse von Formen, welche ich als „algebraische Formen erster Gattung" bezeichnen möchte. Sie haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie zwar unendlich werden können, aber nirgends von so hoher Ordnung als irgend eine rationale Form von (x_1, x_2) allein, deren Nenner an derselben Stelle verschwindet. Vermittelst dieser Eigenschaft der Formen erster Gattung, durch welche sie ihren Platz zwischen den rationalen ganzen und den rationalen gebrochenen Formen angewiesen erhalten, kann man sie nun ebenfalls vollständig mit Hülfe eines Fundamentalsystems darstellen. Aus dem Fundamentalsystem

$$(8) \qquad \eta_0, \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_{n-1}$$

für die ganzen Formen kann man nämlich wieder auf rationalem Wege ein solches System algebraischer Formen erster Gattung

$$(8a) \qquad \bar{\eta}_0, \quad \bar{\eta}_1, \quad \ldots, \quad \bar{\eta}_{n-1}$$

ableiten, dass jede Form $\bar{w}$ der ersten Gattung eindeutig in der Form:

$$\bar{w} = \bar{u}_0 \bar{\eta}_0 + \cdots + \bar{u}_{n-1} \bar{\eta}_{n-1}$$

dargestellt werden kann, deren Coefficienten $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{n-1}$ ganze homogene Formen von (x_1, x_2) sind.

Die Elemente des Fundamentalsystems (8a) stehen zu denjenigen des Systems (8) in der einfachen Beziehung, dass ihre Dimensionen beziehlich gleich $-\mu_0, -\mu_1, \ldots, -\mu_{n-1}$ sind, während die des absoluten Fundamentalsystems die Werte $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ besitzen.

Ich will die hier angedeuteten Grundzüge der Theorie der algebraischen Formen benutzen, um ein Problem aus der Theorie der algebraischen Integrale, nämlich das der vollständigen und rationalen Darstellung der Integrale erster Gattung zu lösen: Es sei:

$$J = \int \varphi(x, y)dx$$

irgend ein algebraisches Integral, wo x mit y wieder durch die Gleichung (2) zusammenhängt.

Durch die vorher benutzte Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{x_2^m}$$

geht dasselbe dann über in:

$$J = \int \frac{\varphi(x_1, x_2, \eta)}{x_2^2} \cdot (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

$$= \int \Phi(x_1, x_2, \eta)(x_2 dx_1 - x_1 dx_2),$$

wo φ eine homogene algebraische Form der nullten, Φ also eine solche der (-2)ten Dimension bedeutet.

Fragt man sich nun, wann ein solches Integral J *von der ersten Gattung*, d. h. wann es allenthalben endlich und stetig ist, so ergiebt eine einfache Betrachtung den folgenden wichtigen Satz:

Das Integral J ist dann und nur dann ein Integral der ersten Gattung, wenn der Integrand $\Phi(x_1, x_2, \eta)$ eine algebraische Form der ersten Gattung ist.

Berücksichtigt man also die vorher gegebene allgemeine Darstellung der Formen erster Gattung durch das Fundamentalsystem $\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{n-1}$, so ergiebt sich für den Integranden φ der folgende Ausdruck:

$$\varphi = x_2^2 . \Phi = x_2^2(\bar{u}_0 \bar{\eta}_0 + \bar{u}_1 \bar{\eta}_1 + \cdots + \bar{u}_{n-1} \bar{\eta}_{n-1}),$$

wo $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{n-1}$ homogene ganze Formen von (x_1, x_2) mit beliebigen Coefficienten sein können.

Alle Integranden erster Gattung und nur sie sind also durch die einfachen Formen

$$x_1^{\lambda_1} . x_2^{\lambda_2} \quad \bar{\eta}_l$$

homogen und linear mit constanten Coefficienten darstellbar; die Exponenten λ_1 und λ_2 sind hierbei so zu wählen, dass

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_i \quad \text{und} \quad \lambda_2 \geqq 2$$

ist, weil ja $\bar{\eta}_i$ von der Dimension $-\mu_i$ ist.

Die Anzahl p aller dieser unabhängigen Integranden erster Gattung ist also

$$p = (\mu_1 - 1) + \cdots + (\mu_{n-1} - 1) = M - n + 1,$$

d. h. gleich der um Eins vermehrten Gesamtdimension des Fundamentalsystems, vermindert um den Grad der Gleichung.

Es lassen sich also alle Integranden erster Gattung linear und homogen durch p unter ihnen mit beliebigen constanten Coefficienten darstellen, und diese letzteren bestimmen sich einzig und allein durch Auflösung linearer Gleichungen, d. h. sie sind rationale Functionen von x und y mit ganzzahligen Coefficienten.

Ueber litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern.

Von

Felix Müller (Berlin).

Die „Deutsche Mathematiker-Vereinigung“ hat, entsprechend ihrem Zwecke, „die Mathematik nach allen Richtungen hin zu fördern und auszubreiten und die Stellung dieser Wissenschaft im geistigen Leben des deutschen Volkes nach Gebühr zu heben“, unter anderen Aufgaben auch die thatkräftige Förderung des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik“ auf ihr Programm gesetzt. Darauf hinweisend, unterbreitete der Vortragende Vorschläge zu neuen litterarischen Unternehmungen, welche geeignet sein dürften, das Studium der Mathematik zu erleichtern. Er betonte besonders das Bedürfnis einer Einführung in die mathematische Litteratur und den Mangel an Sachregistern zu den bedeutenderen mathematischen Journalen, referirte über einige neuere bibliographische Unternehmungen und bedauerte, dass die Fortsetzung zu Poggendorff's biographisch-litterarischem Wörterbuche noch immer nicht erschienen sei. Schliesslich entwickelte der Vortragende den Entwurf zur Herstellung eines „Mathematischen Wörterbuches“, das bei dem grossen Umfange, den die Wissenschaft erreicht hat, und bei der Erweiterung der mathematischen Terminologie heute unentbehrlich geworden ist. Das Material zu einem solchen Wörterbuche hat der Vortragende seit 20 Jahren gesammelt; es enthält ca. 4000 mathematische Kunstausdrücke und über

1200 Namen. Bei der Ausführung, die nur durch Mitwirkung vieler vollbracht werden kann, ist nicht eine vollständige, alphabetisch geordnete mathematische Encyklopädie ins Auge gefasst, sondern der Schwerpunkt lediglich auf die historisch-litterarische Ergänzung gelegt worden.

Gestaltliches über den Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche.

Von
W. Dyck (München).

Die Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche bilden bekanntlich ein im reellen Gebiete den hyperbolischen Teil der Fläche zweifach überdeckendes Curvensystem, welches längs der parabolischen Curve im allgemeinen Spitzen aufweist. Es findet (im allgemeinen) nur an gewissen ausgezeichneten Punkten der parabolischen Curve ein besonderes Verhalten des Curvensystems statt. Es lassen sich dabei drei Formen von singulären Punkten unterscheiden, welche denjenigen einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung (mit einer unabhängigen Variable) entsprechen. [Bezüglich des gestaltlichen Verlaufs des Curvensystems in der Umgebung dieser Stellen vergleiche man einen Aufsatz des Verf. in den Sitz. Ber. der bayr. Akad. vom J. 1891, insbes. Tafel I—III daselbst.] Dabei ist die Anzahl dieser im allgemeinen stets auftretenden singulären Stellen an eine bestimmte Relation geknüpft, in welche die Zusammenhangszahl (Charakteristik) des hyperbolisch gekrümmten Teiles der Fläche eingeht [Vergl. a. a. O. § 4].

Geometrisch lassen sich diese singulären Stellen der Haupttangentencurven dadurch charakterisiren, dass in ihnen die parabolische Curve einen Wendeberührpunkt besitzt, in welchem die Schmiegungsebene der parabolischen Curve zusammenfällt mit der Tangentialebene an die Fläche.

Sei

$$(1)\quad 0 = -z + \tfrac{1}{2} f_{22} y^2 + \tfrac{1}{6}[f_{111}x^3 + 3f_{112}x^2y + 3f_{122}xy^2 + f_{222}y^3] + \cdots$$

die Gleichung der Fläche, bezogen auf ein Coordinatensystem, für welches der Nullpunkt ein parabolischer Punkt, die xy-Ebene Tangentialebene der Fläche ist, so hat man für die Gleichung der Schmiegungsebene an die parabolische Curve im Nullpunkte:

$$(2)\qquad f_{22}U(f_{111}x + f_{112}y) + Vz = 0,$$

wo

$$(3)\qquad \begin{cases} U = f_{22}^3 . f_{111}, \\ V = f_{22}^2 . \Delta \end{cases}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2f_{111}f_{122} - 2f_{112}^2 + f_{22}f_{1111} & f_{111}f_{222} - f_{112}f_{122} + f_{22}f_{1112} & f_{111} \\ f_{111}f_{222} - f_{112}f_{122} + f_{22}f_{1112} & 2f_{112}f_{222} - 2f_{122}^2 + f_{22}f_{1122} & f_{112} \\ f_{111} & f_{112} & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingung, dass dieser Punkt Wendeberührpunkt der parabolischen Curve ist, lautet (Clebsch, Crelle's J. Bd. LXIII):

$$(4) \qquad D = f_{22}^5 . f_{111} . \Delta . \Delta' = 0$$

(wo Δ' die zu f_{112} gehörige Unterdeterminante von Δ bedeutet). Sieht man ab von dem eine höhere Singularität bildenden Falle $f_{22} = 0$, für welchen mehr als zwei Haupttangentenrichtungen den betreffenden Flächenpunkt durchsetzen, so zeigt die Gleichung (4), dass je nach dem Verschwinden von f_{111}, Δ, Δ' dreierlei Gattungen von Wendeberührpunkten der parabolischen Curve zu unterscheiden sind.

Die erste Gattung der Wendeberührpunkte, $f_{111} = 0$, ergiebt — für sie fällt wegen $U = 0$ die Schmiegungsebene der parabolischen Curve mit der Tangentialebene $z = 0$ der Fläche zusammen — die singulären Punkte des Systems der Haupttangentencurven. Für die beiden anderen Gattungen von Wendeberührpunkten, $\Delta = 0$ bez. $\Delta' = 0$, ist das Verhalten der Haupttangentencurven das allgemeine (Spitzen).

Ueber volle Invariantensysteme.

Von

David Hilbert (Königsberg).

Wenn wir eine binäre Form nter Ordnung betrachten und das System der ganzen rationalen Invarianten dieser Grundform untersuchen wollen, so ergeben sich zunächst aus der allgemeinen von mir entwickelten Theorie die folgenden drei principiellen Sätze. 1. Der Satz von der Endlichkeit der Invarianten des vollen Systems. 2. Der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien. 3. Der Satz vom Abbrechen der Syzygienkette (vgl. meine Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen", Math. Annalen Bd. 36). Es ist nun die weitere Aufgabe der Theorie, über diese allgemeinen Sätze hinaus für die Gradzahlen der Invarianten und des durch die Invarianten bestimmten Functionenkörpers ein allgemeines Gesetz zu finden. Zu einem solchen Gesetze gelangen wir, wenn wir aus dem Systeme der Invarianten $n-2$ Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ auswählen derart, dass jede andere Invariante eine ganze algebraische Function dieser $n-2$ Invarianten ist. Die Möglichkeit der Bestimmung solcher Invarianten sowie die Eigenschaften derselben habe ich in den Göttinger Nachrichten 1891 entwickelt. Die Grade der Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ bezeichnen wir mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}$. Die übrigen Invarianten sind die ganzen Functionen eines algebraischen Functionenkörpers. Der Grad dieses Körpers sei g. Bezeichnen wir die Anzahl aller derjenigen Invarianten, deren Grad $\leqq \rho$ ist, mit $\varphi(\rho)$, so zeigt sich, dass $\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{n-2}}$ für unendlich wachsende ρ sich einer endlichen Grenze nähert. Es gelingt, diese Grenze auf zwei verschiedene Weisen auszuwerten, und durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke gelangen wir zu der folgenden Formel:

$$\frac{g}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{n-2}}$$

$$= -\frac{1}{2.n!}\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3} - \binom{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{\frac{1}{2}n-1}\right\} \text{ (n gerade)},$$

$$= -\frac{1}{4.n!}\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3} - \binom{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-3} + \cdots \pm \binom{n}{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$$

$$\text{(n ungerade).}$$

Dieselbe bestätigt sich in der That, wie man leicht sieht, in den beiden bisher berechneten Fällen: denn es wird:

für $n = 5, \quad \nu_1 = 4, \quad \nu_2 = 8, \quad \nu_3 = 12, \qquad g = 2$

und

für $n = 6, \quad \nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 4, \quad \nu_3 = 6, \quad \nu_4 = 10, \quad g = 2.$

Ueber Configurationen, welche sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen.

Von

A. Schönflies (Göttingen).

Es handelte sich darum — im Anschluss an den Vortrag des Herrn Wiener — zu prüfen, ob die Configuration 9_3, welche durch ein in zwei Gerade einbeschriebenes Sechseck bestimmt wird, unter den genannten Configurationen auftreten kann. Sind die Raumgebilde, von denen man ausgeht, in allgemeiner Lage, so ist dies nicht der Fall. Um dies zu zeigen, genügt es, als erzeugende Raumgebilde allein Punkte vorauszusetzen; jedes andere Gebilde kann nämlich durch die es erzeugenden Punkte ersetzt werden. Dies hat deshalb auf den Beweis keinen Einfluss, weil die folgende Untersuchung sich nicht auf die ganze räumliche Configuration, sondern vielmehr auf jede in ihr enthaltene Teilfigur erstreckt.

Für den Beweis fassen wir die Configuration als einen Cyklus von drei einander ein- und umbeschriebenen Dreiecken auf.

Die erzeugenden Raumpunkte bezeichnen wir durch 1, 2, 3, ..., die durch ihre Verbindung entstehenden Geraden durch 12, 13, ..., allgemein den Raum (λ—1)ter Dimension, welcher durch die Punkte 1, 2, ..., λ geht, durch

$$R_{\lambda-1} = 123 \ldots \lambda,$$

so folgt sofort, dass je λ—1 der Zahlen 1, 2, ..., λ einen in $R_{\lambda-1}$ liegenden $R_{\lambda-2}$ darstellen, und dass alle durch $R_{\lambda-1}$ laufenden R_λ die Zahlen 1, 2, ..., λ, und ausserdem noch eine von ihnen verschiedene Zahl enthalten. Diese sämtlichen Raumgebilde mögen jetzt den Processen des Schneidens und Projicirens beliebig unterworfen werden, so ist die Frage, ob sich dabei die ebene Configuration 9_3 ergeben kann. Entsteht nun irgend einer ihrer Punkte aus einem $R_{\lambda-1}$, so gilt dies von allen Punkten, und es geht jede Gerade aus einem R_λ hervor.

Bezeichnen wir die Punkte und Geraden durch dieselben Zahlen, wie die $R_{\lambda-1}$ und R_λ, aus denen sie hervorgehen, so gelten folgende zwei Sätze: 1. Zwei verbundene Punkte unterscheiden sich nur in einem Element. 2. Ist ein Punkt Schnittpunkt zweier Geraden, so enthält er die gemeinsamen Elemente beider Geraden.

Nun sei ... 123, wo ... beliebige, von 1, 2, 3, 4 verschiedene Elemente andeuten, eine Dreieckseite, und ... 12, ... 13 seien die Ecken des Dreiecks, so muss die dritte Ecke von der Form ... 14 sein. Die bezüglichen Dreieckseiten sind daher von der Form ... 134 und ... 124. Der dritte auf ... 123 liegende Punkt sei ... 23. Damit ist die Bezeichnung festgelegt. Aus Satz 2 folgt nun, dass die mit letzterem Punkt verbundenen Punkte der beiden anderen Seiten nur ... 34 und ... 24 sein können. Für die drei Verbindungslinien dieser Punkte würde sich daher das gemeinsame Symbol ... 234 ergeben, was unstatthaft ist. Damit ist der Beweis für beliebige Ausgangspunkte erbracht.

Es folgt noch, dass keine ebene Configuration, welche einander umschriebene Dreiecke enthält, durch Verbinden und Schneiden aus beliebigen Punkten eines R_n abgeleitet werden kann.

Ueber Geometrie der Zahlen.

Von
H. Minkowski (Bonn).

Wenn man für den Raum rechtwinklige Coordinaten einführt, so entsprechen den Systemen von drei ganzen Zahlen discrete Punkte, welche derart über den Raum verstreut liegen, dass sie eine gewisse Nähe in Bezug auf jede beliebige Raumstelle erreichen. Den Inbegriff aller dieser Punkte mit lauter Coordinaten, die ganze Zahlen sind, nennt der Vortragende das dreidimensionale Zahlengitter; unter dem Titel „Geometrie der Zahlen" begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung. Natürlich besitzt jede Aussage über die Zahlengitter einen rein arithmetischen Kern. Das Wort „Geometrie" erscheint aber durchaus am Platze im Hinblick auf Fragestellungen, zu welchen die geometrische Anschauung verhilft, und auf Untersuchungsmethoden, welche fortwährend durch geometrische Begriffe ihre Richtung angewiesen erhalten.

Der Vortragende hat sich in Betreff der Zahlengitter hauptsächlich zwei Fragen gestellt; sie ergänzen einander in gewisser Beziehung, und Folgendes ist ihnen gemeinsam: Es handelt sich, wenn speciell vom Raume gesprochen wird, jedesmal um eine sehr allgemeine Kategorie von Körpern, welche so construirt werden, dass sie einen bestimmten Punkt des Zahlengitters — es sei dies etwa der Nullpunkt — in gewisser Weise umschliessen, und es soll dann jedesmal bei diesen Körpern eine gewisse Eigenschaft in Bezug auf das Zahlengitter allein durch die Grösse des Inhalts der Körper zu Stande kommen.

Die erste Kategorie von Körpern besteht aus allen denjenigen Körpern, welche im Nullpunkte einen Mittelpunkt haben, und deren Begrenzung nach aussen hin nirgends concav ist; und die fragliche Eigenschaft für diese Kategorie lautet: Wenn der Inhalt eines Körpers dieser Kategorie $\geqq 2^3$ ist, so schliesst der Körper notwendig noch weitere Punkte des Zahlengitters ausser dem Nullpunkte ein.

Die zweite Kategorie von Körpern ist noch umfassender; sie besteht aus allen Körpern, welche den Nullpunkt enthalten, und deren Oberfläche, vom Nullpunkte aus gesehen, nach jeder Richtung hin nur einen Punkt darbietet; und die fragliche Eigenschaft für diese zweite Kategorie lautet: Wenn der Inhalt eines Körpers dieser Kategorie

$$\leqq 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

ist, so können stets Deformationen des Körpers angegeben werden, bei welchen der Inhalt sich nicht ändert, der Nullpunkt fest bleibt und gerade Linien gerade Linien bleiben, und nach deren Ausführung alle Punkte des Zahlengitters mit Ausnahme des Nullpunkts ihren Ort ausserhalb des Körpers finden.

Der Vortragende weist auf die ausserordentliche Tragweite dieser, in ihrer Allgemeinheit ebenso einfach wie plausibel klingenden Sätze hin.

Ueber das Kowalevski'sche Rotationsproblem.

Von

F. Kötter (Berlin).

Im XII. Bande der Acta Mathematica hat Frau von Kowalevski eine Abhandlung veröffentlicht, welche einen wesentlichen und bedeutenden Fortschritt in der Lehre von der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt bezeichnet. Den beiden altberühmten integrablen Fällen dieses Problems wird hier ein neuer hinzugefügt, in welchem die Euler'schen Differentialgleichungen ausser den drei allgemeinen Integralen ein besonderes viertes algebraisches Integral besitzen.

Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich und doppelt so gross wie das dritte werden, und dass der Schwerpunkt in der Ebene der Axen gleichen Trägheitsmomentes liegt. Vermittelst der vier algebraischen Integralgleichungen hat Frau von Kowalevski die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit und die Richtungscosinus zwischen den Axen des Körpers und der Verticale durch hyperelliptische Functionen ausgedrückt, deren beide Argumente sich als lineare Functionen der Zeit ergeben. Bezüglich der sechs anderen Richtungscosinus giebt Frau von Kowalevski an, sie habe sich überzeugt, dass dieselben sich rational durch Thetafunctionen darstellen lassen; sie verzichtet jedoch auf eine wirkliche Darstellung derselben in Anbetracht der zu erwartenden Schwierigkeiten der Rechnung.

Diese Schwierigkeiten lassen sich beseitigen, wenn man die Ausdrücke der Frau von Kowalevski einer Umformung unterzieht. Der Ausdruck, welchen Frau von Kowalevski für den Richtungscosinus γ'' der ausgezeichneten Axe des Körpers erhält, ist ein verhältnismässig einfacher Bruch, dessen Zähler und Nenner homogene lineare Aggregate von je drei hyperelliptischen Functionen sind. Weniger einfach sind die Brüche, welche die beiden anderen Richtungscosinus γ und γ' darstellen. Sie haben im Nenner das Quadrat des Nenners von γ'', im Zähler recht verwickelte Aggregate zweiten Grades verschiedener hyperelliptischer Functionen. Nun lässt sich aber der Nenner dieser beiden Ausdrücke in ein Product zweier linearen Aggregate derselben sechs hyperelliptischen Functionen zerlegen. Dasselbe gilt von den Zählern der Ausdrücke $x_1 = \gamma + i\gamma'$ und $x_2 = \gamma - i\gamma'$, und zwar kommt jeder der beiden Factoren des gemeinschaftlichen Nenners in einem der beiden Zähler vor; es sind also x_1 und x_2 Brüche, deren Zähler und Nenner homogene lineare Aggregate derselben sechs Functionen sind. Genauer beschrieben, stellen sich die beiden Zähler als Summe und Differenz zweier aus je drei Functionen gebildeten Bestandteile, und die Nenner als Summe und Differenz zweier ähnlichen Bestandteile dar, welche sich von den ersteren nur durch die Coefficienten unterscheiden.

Die genaue Betrachtung dieser Ausdrücke lehrt nun, dass es vorteilhaft ist, statt der Bewegung des mit dem Körper verbundenen Coordinatensystems diejenige eines dritten Coordinatensystems zu untersuchen, dessen eine Axe stets mit der ausgezeichneten Axe des Körpers zusammenfällt. Die relative Bewegung des Körpers gegen dieses Coordinatensystem ist also eine Drehung um eine Axe; die Geschwindigkeit dieser Drehung ist halb so gross wie die Componente der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers nach der gemeinschaftlichen Axe des Körpers und des neu eingeführten Coordinatensystems. Die Richtungscosinus dieses neuen Systems sind Brüche, deren Zähler und gemeinschaftlicher Nenner linear und homogen aus je drei hyperelliptischen Functionen zusammengesetzt sind. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit des Systems nach seinen eigenen Axen erhält man aus den entsprechenden Richtungscosinus, indem man im Zähler die Coefficienten durch andere ersetzt.

Ganz wesentlich ist nun, dass die Coefficienten der in Frage stehenden Ausdrücke sich ebenfalls durch hyperelliptische Functionen darstellen lassen, deren Argumente naturgemäss constante Grössen sind. So erhält man die Richtungscosinus und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit als Functionen von vier Argumenten; die Form dieser Ausdrücke führt auf die gerechtfertigte Vermutung, dass die drei Richtungscosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ als Functionen der beiden Wertepaare v_1, v_2 und v'_1, v'_2 denselben partiellen Differentialgleichungen genügen, welche auch für die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit von Wichtigkeit sind.

Die Existenz dieser Differentialgleichungen ermöglicht nun eine Bestimmung der noch fehlenden Richtungscosinus in derselben Weise, welche ich bei der Bewegung eines gewissen festen Körpers in einer Flüssigkeit angewendet habe.

In den nachfolgenden Formeln haben wir die Bezeichnungsweise des Herrn Weierstrass angewendet, und zwar bedeuten α_1, α_2, α_3, β, γ die fünf Indices 0, 1, 2, 3, 4 in einer passend gewählten Anordnung. Die Zeichen i_μ und i'_μ stellen Potenzen von i mit ganzen positiven Exponenten vor. Von den Argumenten der Thetafunctionen sind v'_1, v'_2 constante Grössen, während v_1, v_2, ebenso wie v_3, lineare Functionen der Zeit $(a_\alpha t + b_\alpha)$ sind. Durch die Theta ohne Argument zeigen wir die Nullwerte der betreffenden Thetafunctionen an, und endlich soll

$$\triangle f(x_1, x_2) = a_3 f(x_1, x_2) - i a_1 \frac{\partial f}{\partial x} - i a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

sein. Dann ergeben sich folgende Formeln für die Bewegung des von uns eingeführten Coordinatensystems:

$$\gamma'_1 = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$\gamma'_2 = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$\gamma'_3 = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta\gamma} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha}.$$

(In diesen, wie in allen folgenden Formeln bezieht sich das Σ auf α, welches die Werte α_1, α_2, α_3 durchläuft.)

$$\alpha'_1 \pm i\beta'_1 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\beta} (\mp 1)^{|\alpha\beta|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\delta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$\alpha'_2 \pm i\beta'_2 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\gamma} (\mp 1)^{|\alpha\gamma|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$\alpha'_3 \pm i\beta'_3 = \frac{\Sigma i'_{\alpha\beta\gamma} (\pm 1)^{|\alpha\beta\gamma|} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1 \pm v'_1, v_2 \pm v'_2)_{13\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha} e^{\pm i v_3},$$

$$p' = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$q' = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}},$$

$$r' = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta\gamma} \Delta \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Ausdrücke für die Richtungscosinus und Componenten der Drehungsgeschwindigkeit des mit dem

Körper fest verbundenen Coordinatensystems, wenn

$$\nabla f(x_1, x_2) = -2\Delta\Delta(f(x_1, x_2)) + a_4 \Delta f(x_1, x_2) + a_5 f(x_1, x_2),$$

$$u = \frac{\Sigma i_{\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\beta} \nabla \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\beta}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha},$$

$$v = \frac{\Sigma i_{\alpha\gamma} \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma} \nabla \vartheta(v'_1, v'_2)_{\alpha\gamma}}{\Sigma i_\alpha \vartheta_{13\alpha\beta} \vartheta_{13\alpha\gamma} \vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v'_1, v'_2)_\alpha}$$

ist, vermittelst der Formeln:

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = \frac{\alpha'_1 + i\alpha'_2}{u + iv}, \quad \alpha_3 = \alpha'_3,$$

$$\beta_1 + i\beta_2 = \frac{\beta'_1 + i\beta'_2}{u + iv}, \quad \beta_3 = \beta'_3,$$

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\gamma'_1 + i\gamma'_2}{u + iv}, \quad \gamma_3 = \gamma'_3,$$

$$p + iq = \frac{p' + iq'}{u + iv}, \quad r = 2r'.$$

Bemerkenswert ist, dass die Grösse, welche zu γ'_3 in derselben Beziehung steht wie u und v zu γ'_1 und γ'_2, den Wert Null hat.

Mitteilung über das Dreikörperproblem.

Von

A. Piltz (Jena).

Der Vortragende befasste sich seit einer Reihe von Jahren mit dem Dreikörperproblem von einer andern Seite her, als es gewöhnlich geschieht. Die Untersuchungen sind inzwischen zum Abschluss gekommen und haben zu einer vollständigen demnächst zu veröffentlichenden Theorie geführt, die eine Uebersicht über das ganze System der möglichen Bewegungen punktförmiger Körper gewährt, die sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, woran sich auch die notwendigen Rechnungen anschliessen. Ein vereinfachter Fall giebt ungefähr eine Vorstellung von den einzuführenden neuen Begriffen:

Von den drei gegebenen Körpern befindet sich der eine (1) in Ruhe. Um seinen Ort als Mittelpunkt bewegt sich Körper (2) gleichmässig in einer Kreisbahn. Körper (3) wird von beiden angezogen, jedoch so, dass die Masse m_2, mit der Körper (2) anzieht, sehr klein ist. Dann kann man sich eine unendliche Menge verschiedener ebener Bewegungen denken, die sich folgendermassen aus „Gliedern" zusammensetzen. Nach je einem endlichen Zeitabstand kommt Körper (3) immer wieder in eine Nähe des Körpers (2) von der Ordnung m_2. In der Zwischenzeit bewegt sich Körper (3) zufolge der gemachten Voraussetzungen in einem annähernden Kegelschnittbogen um Körper (1). Bei Gelegenheit der räumlichen Annäherung von (3) an (2) in der angegebenen Ordnung bewirkt (2) in einem Zeitteil von der Ordnung m_2 eine endliche Abänderung der Geschwindigkeit des Körpers (3) in Grösse und Richtung, sodass jene aufeinander folgenden Kegelschnittbogen wesentlich verschiedenen Kegelschnitten angehören. Die relative Bewegung des Körpers (3) um Körper (2) in einem Zeitabschnitt der Grössenordnung m_2 um einen Zeitpunkt der grössten Annäherung beider Körper herum geht in einer annähernden Hyperbel vor sich, deren Linearmasse von der Ordnung m_2 sind und deren Asymptoten die Tangenten jener anderen Kegelschnittbogen sind. Solche Bewegungen kann man sich willkürlich zusammensetzen: Jene aufeinander folgenden (annähernden) Kegelschnittbogen werden, bis auf die Grössenordnung m_2 genau, willkürlich vorgeschrieben, nur dass das Bestehen der schon Jacobi bekannten einen algebraischen Integralgleichung eine einzige Bedingung auferlegt. Dann bleibt für das Mass der Annäherung des Körpers (3) an (2) nach je einem solchen „Glied“ der Bewegung gerade noch die Mannigfaltigkeit übrig, dass in der besprochenen Weise der Uebergang aus jedem Glied in das nächstfolgende bewirkt werden kann. Es kommt darauf an, ein vollständiges System der möglichen Glieder auch für das allgemeinere Problem aufzustellen mit geeigneten Definitionen, die für alle Parameter des Problems, namentlich der Massen m_{ik}, womit je ein Körper i den Körper k anzieht, passen. Dies gelingt, und zwar auch in der Verallgemeinerung auf die allgemeinsten Massen m_{ik} und auf die Bewegung im Raum. Jene besonderen erwähnten Glieder sind natürlich nur sehr specielle. Complexe Bewegungen müssen zunächst mit berücksichtigt werden. Die Definitionen der „Glieder“ und der „Abschnitte“, in denen sie zusammenstossen, enthalten teils topologische, teils quantitative Bestimmungen. Die hauptsächlichsten zu überwindenden Schwierigkeiten bestanden im Beweis, dass man bei dieser Vereinzelung sämtlicher verschiedenen Bewegungen auch sämtliche möglichen Bewegungszustände erhält, d. h. das vollständige System aller Bewegungen. Die Schwierigkeiten betreffend Convergenzbeweise von Reihen fallen hier weg, da Reihenentwickelungen nicht zu den Definitionen benutzt werden, sondern erst nachträglich zu Zahlen- und Tabellenberechnungen, wenn der Charakter des Verlaufs der Bewegungen schon vorher feststeht.

Der Vortragende beabsichtigt mit diesen sehr weithin anwendbaren

Begriffen eine Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen, bez. -Gleichungssysteme, die bisher unmöglich war, zu entwickeln. Er wies auch auf die Notwendigkeit der Einführung ähnlicher Begriffe wie dieser „Glieder“ in die analytische Zahlentheorie hin.

Ueber bedingte Biegungen krummer Flächen.

Von

P. Stäckel (Halle a. S.).

In der von Gauss begründeten Theorie der Biegung krummer Flächen handelt es sich zunächst um die Untersuchung der beiden Probleme: Wie erkennt man, dass zwei gegebene Flächen in einander durch Biegung übergehen können? und: Welches sind alle Biegungsflächen einer gegebenen Fläche? In neuerer Zeit sind aber auch Probleme anderer Art aufgetreten, bei denen Flächen daraus ermittelt werden sollen, dass sie Biegungen zulassen, welche gewissen Bedingungen genügen. Eine solche Aufgabe findet sich in meiner Inauguraldissertation: Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche (Berlin. 1885). Es ist gegeben eine Flächenschar $U(x, y, z) = \alpha$, und es wird gefragt, ob es eine Fläche giebt, die sich stetig so biegen lässt, dass ihre Punkte bei der Biegung stets auf der Fläche der Schar bleiben, auf der sie ursprünglich lagen. Die Lösung dieser Aufgabe ist für die Dynamik von Wichtigkeit. Fasst man nämlich $U(x, y, z)$ als Kräftefunction auf, so gilt der Satz, dass bei denselben Anfangsbedingungen ein bewegter Punkt auf der gebogenen Fläche gerade die Bahn durchläuft, die aus der Bahn auf der ursprünglichen Fläche durch die Biegung hervorgeht.

Den Fall, dass die Flächenschar $U = \alpha$ aus parallelen Ebenen besteht, habe ich in meiner Dissertation erledigt. Ein weiteres Beispiel solcher Biegungen giebt der bekannte Satz von Herrn Schwarz, dass jede Minimalfläche sich stetig so biegen lässt, dass sie Minimalfläche bleibt. Wird ein Punkt der Fläche festgehalten, so beschreiben die anderen bei der Biegung Ellipsen, die in Ebenen liegen, welche durch jenen Punkt gehen. Es lässt sich nun, wie ich an anderer Stelle ausführlich beweisen werde, das Umgekehrte behaupten. Lässt sich eine Fläche, während einer ihrer Punkte festgehalten wird, so biegen, dass alle ihre Punkte Bahnen beschreiben, die in Ebenen durch diesen Punkt liegen, so ist die Fläche notwendig eine Minimalfläche, und diese Eigenschaft bleibt bei den Biegungen der verlangten Art erhalten“. Andere Umkehrungen des Schwarz'schen Satzes findet man bei Darboux, Théorie des surfaces, T. I. Livre III. Chap. V.

Ueber die Abwickelung von Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander.

Von

A. Wangerin (Halle a. S.).

Zur Aufstellung der endlichen Formeln für die Abwickelung einer Rotationsfläche mit constantem negativen Krümmungsmass auf der Pseudosphäre mit gleichem Krümmungsmass bedurfte es bisher einer langen und umständlichen Rechnung, die sich auf die Theorie der geodätischen Polarcoordinaten stützte. Der Vortragende giebt zur Ableitung der in Rede stehenden Formeln eine einfachere Methode an, welche die Kenntnis der geodätischen Linien jener Flächen nicht voraussetzt. Die Methode besteht darin, zunächst die allgemeinsten Gleichungen für die conforme Abbildung beider Flächen auf einander zu suchen; und diese kann man unmittelbar aus den Formeln für die Bogenelemente der Flächen ablesen. Die Abwickelung aber kann als ein specieller Fall der conformen Abbildung aufgefasst werden; um die Formeln für die Abwickelung zu erhalten, ist es daher nur nötig, die bei der Abbildung auftretenden willkürlichen Functionen passend zu bestimmen. Diese Bestimmung nun lässt sich auf die Ermittelung zweier Functionen $F(\xi)$ und $F_1(\eta)$ mit den von einander unabhängigen Argumenten ξ, η zurückführen, welche der Functionalgleichung

$$(1) \qquad 1-F(\xi)F_1(\eta) = \pm(\xi+\eta)\sqrt{F'(\xi)F_1'(\eta)}$$

genügen. Dabei bezeichnen F' und F_1', wie üblich, die Ableitungen von F und F_1. Es gelingt ohne Schwierigkeit, die der Bedingung (1) genügenden Functionen zu finden, und danach bedarf es nur noch einer Zerlegung eines complexen Ausdrucks in seine Bestandteile, um zum Ziele zu gelangen. Als Resultat der Rechnung ergiebt sich folgendes: Für die Pseudosphäre mit dem Krümmungsmass $-\frac{1}{a^2}$ sei ρ der Radius eines Parallelkreises, φ der Winkel, den ρ mit einer festen Meridianebene bildet. Für eine andere Rotationsfläche mit dem Krümmungsmass $-\frac{1}{a^2}$ mögen die analogen Grössen mit r, υ bezeichnet werden. b sei die in der Gleichung der zweiten Fläche neben a auftretende Constante, und zwar sei zunächst $b<a$ (während für die Pseudosphäre $b=a$ ist). Dann bestehen zwischen ρ, φ einerseits, r, υ andererseits folgende Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{r^2+a^2-b^2} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,\dfrac{\rho}{2\alpha}\left[\dfrac{a^2}{\rho^2}+\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2\right], \\ \operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(\upsilon-\upsilon_0) = \dfrac{2\alpha(\varphi-\varphi_0)}{\dfrac{a^2}{\rho^2}-\alpha^2+(\varphi-\varphi_0)^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind die allgemeinsten für die Abwickelung der beiden in Rede stehenden Flächen auf einander, da sie drei willkürliche Constanten φ_0, υ_0, α enthalten. Für den Fall $b > a$ gelten die Formeln (2) ebenfalls, nur hat dann die willkürliche Constante α einen rein imaginären Wert. Setzt man $\alpha = m\sqrt{a^2-b^2}$, so kann man auch zu dem Falle $b = a$ übergehen, d. h. zur Abwickelung der Pseudosphäre auf sich selbst. Die Gleichungen (2) lassen sich leicht nach ρ und $\varphi-\varphi_0$ auflösen, und durch Combination beider Formen jener Gleichungen gelangt man unmittelbar zu den allgemeinsten Formeln für die Abwickelung zweier beliebigen Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander. Die hier an einem Beispiel entwickelte Methode lässt sich auch in anderen Fällen mit Nutzen verwenden.

Ueber die Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen.

Von

E. Wiltheiss (Halle a. S.).

Das Integral

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E}}$$

hat Hr. Weierstrass durch die lineare Substitution auf die Form

$$u = -\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

gebracht, wo g_2 und g_3 die Invarianten von $Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$ sind:

$$g_2 = \begin{vmatrix} A & C \\ C & E \end{vmatrix} - 4 . \begin{vmatrix} B & C \\ C & D \end{vmatrix},$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}.$$

Aus der obigen Gleichung folgt, da

$$s = \wp u = -\frac{\partial^2 \lg\sigma}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}$$

ist, dass

$$(A) \quad \left(\frac{\partial^3 \log\theta}{\partial u^3}\right)^2 = -\begin{vmatrix} A & B & C+2.\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} \\ B & C-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D \\ C+2.\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2} & D & E \end{vmatrix}.$$

Durch weiteres Differentiiren ergiebt sich:

$$(B) \quad \frac{\partial^4 \lg\theta}{\partial u^4} = -6.\left(\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}g_2.$$

Diese beiden Gleichungen (A) und (B) gelten nicht nur für die ungeraden Thetafunctionen, sondern für alle Thetafunctionen, da

$$\frac{\partial^2 \lg\theta(u+\omega_i)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \lg\theta_i(u)}{\partial u^2}$$

ist.

Zwischen den partiellen Ableitungen zweiter, dritter und vierter Ordnung der hyperelliptischen Thetafunctionen bestehen nun bekanntlich ebenfalls partielle Differentialgleichungen. Ich habe kürzlich gefunden, dass sich dieselben, wenn die Thetafunctionen die durch Herrn Klein eingeführten Invarianteneigenschaften haben, auf eine den Gleichungen (A) und (B) ganz analoge Form bringen lassen. Diese möchte ich hier mitteilen.

Falls den Thetafunctionen die Gleichungen

$$du_1 = \frac{x_1\,dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

$$du_2 = \frac{dx_1}{2\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{2\sqrt{f(x_2)}},$$

wo

$$f(x) = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G$$

ist, zu Grunde liegen, so hat man die Determinante $R =$

$$\begin{vmatrix} A, & 3B, & 3C+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & D+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2} \\ 3B, & 9C-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3C+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u^2}, & 9D-\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 9E-\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ D+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}, & 3E+\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{vmatrix}$$

notwendig. Bezeichnet man nämlich die Subdeterminanten hiervon mit $R_{\mu,\lambda}$, so bestehen die Gleichungen

$$(\mathrm{A\,I})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\varkappa}\,\partial u_2^{3-\varkappa}}\cdot\dfrac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^{\lambda}.\partial u_2^{3-\lambda}} = (-1)^{\varkappa+\lambda+1}.16.R_{\varkappa+1,\lambda+1} \\ \qquad\qquad = (-1)^{\varkappa+\lambda+1}.16.R_{\lambda+1,\varkappa+1}, \end{cases}$$

welche als der Relation (A) entsprechend angesehen werden müssen.

Die Uebersichtlichkeit der Differentialgleichungen lässt sich noch dadurch bedeutend vermehren, dass man sie mit Hülfe der vollkommen beliebigen Variabeln v und w zusammenfasst:

$$(\mathrm{A\,Ia})\quad \tfrac{1}{16}\left(v^3\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^3}+3v^2\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}+3v\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_2^3}\right)$$
$$\cdot\left(w^3\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^3}+3w^2\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2}+3w\cdot\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^2}+\frac{\partial^3\lg\theta}{\partial u_2^3}\right)=$$
$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & -3v, & 3v^2, & -v^3, \\ 1, & A, & 3B, & 3C+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & D+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2} \\ -3w, & 3B, & 9C-\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 3E+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2} \\ 3w^2, & 3C+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}, & 9D-\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 9E-\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F \\ -w^3, & D+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}, & 3E+\frac12\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}, & 3F, & G \end{vmatrix}.$$

Dazu kommt noch die bemerkenswerte Differentialgleichung:

$$R = 0,$$

zu welcher eine analoge bei den elliptischen Functionen nicht besteht.

Die Differentialgleichungen für die vierten partiellen Ableitungen der Thetafunctionen will ich sogleich mit Hülfe der beliebigen Variable w zusammenfassen. Dadurch erhalte ich:

$$(\mathrm{B\,I})\quad \begin{cases} w^4\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^4}+4w^3\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^3\partial u_2}+6w^2\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1^2\partial u_2^2}+4w\cdot\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2^3}+\dfrac{\partial^4\lg\theta}{\partial u_2^4} \\ = -6.\left(w^2.\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}+2w\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}+\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}\right)^2 \\ -12\left(f_{11}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1^2}-2f_{12}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_1\partial u_2}+f_{22}(w)\cdot\dfrac{\partial^2\lg\theta}{\partial u_2^2}\right)+24(f,f)_4, \end{cases}$$

eine Gleichung, die (B) entspricht.

Die Gleichungen (A I), (A Ia) und (B I) gelten für alle geraden und ungeraden Thetafunctionen.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass ich diese Differentialgleichungen aus den Relationen:

$$2\left(A\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}+3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(B\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}+3D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}=0,$$

$$6\left(C\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3.D.\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}+3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}-2\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}=0,$$

$$2\left(D\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-3E\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}+3F\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^2 \partial u_2}-G\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_1^3}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2}\cdot\frac{\partial^3 \lg\theta}{\partial u_2^3}-\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial^2 \lg\theta}{\partial u_1 \partial u_2^2}=0$$

abgeleitet habe.

Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.

Von

Georg Cantor (Halle a. S.).

In dem Aufsatze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math. Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., ν, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., ν, ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$ sich nicht in der Reihenform:

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_\nu,\quad \ldots$$

vorstellen lässt.

Es lässt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.

Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E=(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

welche von unendlich vielen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.

Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$E^{I} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, \ldots).$$

Ich behaupte nun, dass eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt."

Zum Beweise sei:

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier sind die $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definirt, dass b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ verschieden sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_\nu = m$.

Betrachten wir alsdann das Element:

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, dass die Gleichung:

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν:

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

also auch im besondern:

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, dass ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.

Dieser Beweis erscheint nicht nur wegen seiner grossen Einfachheit, sondern namentlich auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil das darin befolgte Princip sich ohne weiteres auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinirter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.

Sei beispielsweise L ein Linearcontinuum, etwa der Inbegriff aller reellen Zahlgrössen z, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

Man verstehe unter M den Inbegriff aller eindeutigen Functionen f(x), welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annehmen, während x alle reellen Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, durchläuft.

Dass M keine kleinere Mächtigkeit hat als L, folgt daraus, dass sich Teilmengen von M angeben lassen, welche dieselbe Mächtigkeit haben, wie L, z. B. die Teilmenge, welche aus allen Functionen von x besteht, die für einen einzigen Wert x_0 von x den Wert 1, für alle andern Werte von x den Wert 0 haben.

Es hat aber auch M nicht gleiche Mächtigkeit mit L, da sich sonst die Mannigfaltigkeit M in gegenseitig eindeutige Beziehung zu der Veränderlichen z bringen liesse, und es könnte M in der Form einer eindeutigen Function der beiden Veränderlichen x und z:

$$\varphi(x, z)$$

gedacht werden, so dass durch jede Specialisirung von z ein Element $f(x) = \varphi(x, z)$ von M erhalten wird und auch umgekehrt jedes Element f(x) von M aus $\varphi(x, z)$ durch eine einzige bestimmte Specialisirung von z hervorgeht. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn versteht man unter g(x) diejenige eindeutige Function von x, welche nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für jeden Wert von x von $\varphi(x, x)$ verschieden ist, so ist einerseits g(x) ein Element von M, andererseits kann g(x) durch keine Specialisirung $z = z_0$ aus $\varphi(x, z)$ hervorgehen, weil $\varphi(z_0, z_0)$ von $g(z_0)$ verschieden ist.

Ist somit die Mächtigkeit von M weder kleiner noch gleich derjenigen von L, so folgt, dass sie grösser ist als die Mächtigkeit von L. (Vgl. Crelle's Journal, Bd. 84 S. 242.)

Ich habe bereits in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ (Leipzig 1883; Math. Annalen Bd. 21) durch ganz andere Hülfsmittel gezeigt, dass die Mächtigkeiten kein Maximum haben; dort wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff aller Mächtigkeiten, wenn wir letztere ihrer Grösse nach geordnet denken, eine „wohlgeordnete Menge“ bildet, so dass es in der Natur zu jeder Mächtigkeit eine nächst grössere giebt, aber auch auf jede ohne Ende steigende Menge von Mächtigkeiten eine nächst grössere folgt.

Die „Mächtigkeiten" repräsentiren die einzige und notwendige Verallgemeinerung der endlichen „Cardinalzahlen", sie sind nichts anderes als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen; nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie" zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.

Die weitere Erschliessung dieses Feldes ist Aufgabe der Zukunft.

Bericht
über den
gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie
von
Professor Dr. **Franz Meyer**
a. d. Königl. Berg-Akademie Clausthal.

Zeichen S. 20/8.

III ✓

Vorwort.

Als ich vor nunmehr anderthalb Jahren seitens des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung den Auftrag übernahm, einen Bericht „über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert“ zu verfassen, glaubte ich eine ungefähre Vorstellung von den Schwierigkeiten der Aufgabe zu haben. Diese Schwierigkeiten sind aber im Laufe der wirklichen Durchführung in einem Masse gestiegen, dass mich mehreremale das ermüdende Gefühl beschlichen hat, einer solchen Last nicht gewachsen zu sein.

Das vorliegende Werk leidet demgemäss an manchen Unvollkommenheiten.

In erster Linie wird man finden, dass die Besprechungen der einzelnen Untersuchungen der nötigen Kritik entbehren. Ich habe aber geglaubt, dem mathematischen Publicum einen grösseren Dienst zu erweisen, wenn ich unter Zurückhaltung der eigenen Persönlichkeit im Zusammenhange darlegte, was die verschiedenen Forscher im wesentlichen geleistet haben, und nicht, was dieselben hätten leisten sollen. Zudem habe ich versucht, Lücken in unserem gegenwärtigen Wissen durch die Art der Anordnung des Stoffes, wie in der Form von Aufgaben hervortreten zu lassen.

Dass die citirte Litteratur, trotzdem ich gerade auf sie viel zeitraubende Mühe verwandt habe, auf Vollständigkeit noch immer keinen Anspruch machen kann, wird die Fülle des Stoffes entschuldigen. Die Litteratur der allerneuesten Zeit insbesondere ist mir zum Teil nicht zugänglich gewesen.

In der Verteilung des Materials auf den knappen, mir zu Gebote stehenden Raum habe ich mir manche Freiheit gestattet. Auf den Inhalt mancher Abhandlung sind mehrere Seiten verwendet worden, auf den von mancher andern, vielleicht ebenso wichtigen oder noch wichtigeren, nur einige Zeilen.

Man möge das einmal einer gewissen parteiischen Liebhaberei zu Gute halten, andererseits aber auch berücksichtigen, dass es nahezu unmöglich erscheint, etwa den Gedankengang einer symbolischen Rechnung zu zergliedern, wenn man nicht geradezu einen, mit dem Wesen jener Rechnung völlig vertrauten Leser voraussetzen will.

Aufrichtig bedauere ich, aus Mangel an Raum von den so zahlreichen und anregenden Anwendungen der Formentheorie auf die Geometrie fast gar keine Notiz genommen zu haben, sodass ein Abschnitt, wie der über Combinanten, ein sehr einseitiges Gepräge erhalten hat.

Möchte dieser Bericht zu einer gesammelten Bearbeitung der gemeinten Anwendungen Anlass geben, die, wie ich glaube, von den Algebraikern wie Geometern mit gleicher Freude begrüsst werden würde.

Bezüglich der Nomenclatur habe ich noch Einiges zu bemerken.

Die Wörter „Grad“ und „Ordnung“ werden nach dem vorwiegenden Sprachgebrauch dahin geschieden, dass das erstere sich auf die Dimension einer Form bezüglich gewisser Coefficienten, das letztere auf diejenige bezüglich gewisser Variabeln bezieht.

Ich habe mir indessen auch die weitere Consequenz gestattet, bei algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten die bisher übliche Bezeichnung „Grad“ durch „Ordnung“ zu ersetzen.

In der Formentheorie betrachtet man gewisse Formen als gegeben, aus denen dann eine unbegrenzte Reihe weiterer durch invariante Processe abgeleitet werden.

Die ersteren nenne ich durchweg „Ur-“ oder „Stamm“formen, während ich das sonst promiscue gebrauchte Wort „Grundformen“ für die Individuen eines „vollen Systems“ in Gordan'schem Sinne reservirt habe.

Hinsichtlich der abgeleiteten Formen habe ich es bei der etwas umständlichen Benennung „invariante Bildung“ bewenden lassen, da das von Sylvester vorgeschlagene Wort „Concomitante“ bisher nicht rechten Eingang gefunden hat, die kürzere Bezeichnung „Invariante“ hingegen in dieser Verallgemeinerung leicht zu Missverständnissen führt.

Eine binäre Form $n$ter Ordnung bezeichne ich durchweg mit f_n oder φ_n, eine ternäre mit C_n, eine quaternäre oder höhere mit F_n.

Auf ein Autorenregister ist aus naheliegenden Gründen Verzicht geleistet worden; ein Sachregister erschien überflüssig, mit Rücksicht auf das Inhaltsverzeichnis, sowie die Rückverweisungen im Texte, namentlich zu Anfang jedes einzelnen Abschnittes.

Noch habe ich mit Dankbarkeit der vielfachen Unterredungen zu gedenken, welche ich über das vorliegende Thema mit den Herren Klein, Gordan, Brill und vielen andern gepflogen habe, sowie der wertvollen Unterstützung, welche mir durch bereitwilligste Ueberlassung von Litteratur seitens zahlreicher Fachgenossen und der Göttinger Universitätsbibliothek zuteil geworden ist, endlich auch der Mühe, welche sich Herr Lampe um die Ueberwachung der Correctur und um die geschäftlichen Verhandlungen mit der stets entgegenkommenden Verlagsbuchhandlung gegeben hat.

Clausthal, August 1892.

VI ✓

Rückblick*) auf die ältere Periode von 1841—1867.

Wir feiern zur Zeit das fünfzigjährige Jubiläum der Invariantentheorie. Wohl reichen die Wurzeln derselben in frühere Zeiten hinein: es sei hier erinnert einmal an die von Lagrange und Gauss**) begründete Theorie der quadratischen (ganzzahligen) Formen von zwei und drei Veränderlichen, andererseits an die durch Poncelet ins Leben gerufene, durch Chasles, Möbius, Plücker und Steiner weiter ausgebildete projectivische Geometrie***).

*) Eine Reihe von Litteraturnachweisen findet sich in Salmon's Modern higher Algebra, 4. Edition, Dublin 1885. Vgl. die erweiterte deutsche Ausgabe von Fiedler, 2. Auflage, Leipzig 1877. Im Folgenden mit „Salmon" resp. „Fiedler" citirt. Eine Zusammenstellung der auf die binären Formen bezüglichen Litteratur findet sich auch in der von Walter und Nöther besorgten deutschen Ausgabe von Faà di Bruno's „Theorie der binären Formen". Leipzig 1881. Im Folgenden mit „Bruno" citirt.

**) Lagrange constatirt in den Berliner Abhandlungen 1773 S. 265 die Invarianz der Discriminante von $ax^2+2bxy+cy^2$ beim Uebergange von x zu $x+\lambda y$, vgl. Salmon S. 343. Bei Gauss, Disquisitiones Arithm. (1801), bildet die allgemeine lineare Transformation die Grundlage der binären und ternären quadratischen Formen, deren Discriminanten als Invarianten nachgewiesen werden. In den art. 267, 268 wird gezeigt, wie die Reciproke (forma adjuncta) der ternären Form bei der „transponirten" Substitution ungeändert bleibt. (Vgl. Salmon S. 344.)

Die ersten Anfänge der symbolischen Darstellung kann man nach Gordan (Math. Ann. VII S. 38) in Arbeiten von Cauchy, Boole, Pfaff, Jacobi verfolgen; weitere Analogien bot die Variationsrechnung (l. c. S. 37).

Der von Cauchy 1812 in voller Allgemeinheit aufgestellte Multiplicationssatz der Determinanten lässt sich ungezwungen als Beispiel für den invarianten Charakter einer heutzutage als identisch bezeichneten Covariante auffassen. In der That ist dies der Ausgangspunkt der Cayley'schen Betrachtungen.

Eine andere Art von Vorstufe zur Invariantentheorie bildet die Darstellung quadratischer Formen als Summen von Quadraten vermöge orthogonaler Transformationen, bezüglich derer man Baltzer's Determinantentheorie vergleichen mag (Lagrange, Laplace, Cauchy, Lebesgue, Jacobi). Endlich gehören hierher noch eine Reihe von vorbereitenden Sätzen Joachimsthal's über die Discriminante, die Taylor'sche Reihe u. s. w., sowie einige Beispiele von „Differentialinvarianten" bei Cauchy.

***) Als die beiden Hauptmomente, welche hier in Betracht kommen, gelten wohl einmal die Rolle, welche das Doppelverhältnis als (irrationale) absolute Invariante spielt, sodann die Theorie der Polarreciprocität. Eine besondere Würdigung jener Geometer, vom Standpunkt der Algebra aus, giebt Clebsch in seiner Plücker-Biographie, Göttinger Abh. XVI S. 1—32.

Indessen datirt man doch die eigentliche Invariantentheorie erst seit jener Arbeit des Engländers Boole*) vom Nov. 1841, in der nicht nur allgemein die Invarianteneigenschaft der Discriminanten nachgewiesen, sondern auch ein einfaches Princip angegeben wird, wie man über die letzteren hinaus zu simultanen Invarianten von Formen gelangt.

Kurz darauf (Februar 1842) zeigt Boole**), dass die Polaren einer Form f zu einer ausgedehnten Klasse von Covarianten, d. i. zu invarianten Bildungen führen, welche ausser den Coefficienten von f (und denen von linearen Hülfsformen) noch die Variabeln enthalten.

Drei Jahre darauf (1845) hat sich Cayley***) der neuen Richtung

---

*) Cambr. Math. Journ. III S. 1—20. Die Arbeit ist datirt vom 28. April 1841. Boole verallgemeinert die orthogonale Transformation quadratischer Formen dahin, dass er nach den Bedingungen fragt, unter welchen zwei vorgelegte Paare von homogenen Formen gleicher Ordnung q, Q; q', Q' vermöge linearer Substitution der Variabeln in einander übergeführt werden können. Als notwendige (wenn auch durchaus nicht immer hinreichende) Bedingung ergiebt sich ihm, dass die gleich Null gesetzten Discriminanten von $q+\lambda Q$, $q'+\lambda Q'$ zu den nämlichen Gleichungen in λ führen müssen. Daraus fliesst als Corollar, dass die Discriminanten von q und q' nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante differiren (l. c. p. 19). Der vollständige Beweis hierfür nebst der genauen Angabe des bez. Potenzexponenten wird von Boole erst drei Jahre später geliefert, Cambr. Math. Journ. IV (Nov. 1844), S. 167—171.

Es ist nicht ausser Acht zu lassen, dass im Jahre 1841 auch die Abhandlung Jacobi's über Functionaldeterminanten erschien, Journ. für Math. XXII S. 319—359. Dieselbe trägt kein Datum, indessen ist die voraufgehende grosse Determinantenarbeit von Jacobi mit dem Datum des 17. März 1841 versehen, eine kleinere, später folgende Arbeit desselben Verfassers mit dem des 18. März 1841.

In der erstgenannten Abhandlung erscheint als eine fundamentale Eigenschaft der Functionaldeterminanten, dass sie sich bei ganz allgemeinen Transformationen der Variabeln bis auf einen Factor, der selbst wiederum eine Functionaldeterminante ist, reproduciren. Hiervon wird eine Anwendung auf die Transformation vielfacher Integrale gemacht. Als specieller Fall des genannten Satzes tritt die Combinanteneigenschaft der Resultante zweier binärer Formen f, g gleicher Ordnung hervor, d. i. die Aenderung der Resultante um eine Potenz von $\lambda\mu'-\lambda'\mu$, wenn f, g durch $\lambda f+\mu g$, $\lambda' f+\mu' g$ ersetzt werden. Vgl. darüber den ersten Band der Gordan'schen Vorlesungen hg. von Kerschensteiner, Leipzig 1885.

**) Cambr. Math. Journ. III S. 106—119. Hier werden die Ergebnisse der ersten Abhandlung auf mehr als zwei Formen, die auch von ungleicher Ordnung sein können, ausgedehnt. Durch totale Differentiation der vorgelegten Formenäquivalenzen wird die Aufgabe auf die Aequivalenz von Differentialformen gleicher und dabei möglichst niedriger Ordnung zurückgeführt. Der Meinung Salmon's (S. 344), dass Boole hiermit den Satz begründet habe, dass Invarianten von Polaren Covarianten der Grundform seien, kann sich der Referent nicht anschliessen.

***) Collected Math. Papers Vol. I, S. 80—94, 95—112. Die zweite dieser Arbeiten erschien 1846.

Die Invarianz der betrachteten Formen tritt hier durchgängig als eine Erweiterung des Multiplicationssatzes der Determinanten auf. Die Erweiterung selbst geht in doppelter Richtung vor sich: einmal werden Determinanten höheren Ranges gebildet, die sich aus $(\varkappa!)^n$ Gliebemächtigt, und baut sogleich eine systematische Symbolik auf, den von ihm so genannten „Hyperdeterminantencalcül“, mittels dessen es gelingt, auch für eine einzelne Form beliebig zu vermehrende Reihen von Invarianten zu bilden.

„Aus diesem Calcül ist“, nach den Worten von Salmon*), „die moderne Algebra entsprungen“.

Etwas früher (1844) hatte schon Eisenstein**) die einfachsten In-

---

dern zusammensetzen, andererseits wird ein ganzes Aggregat von Determinanten unter der Form einer Matrix zusammengefasst. Die Determinanten höheren Ranges sind von Cayley bereits 1843 (l. c. 63—79, zweite Hälfte) eingeführt; die Abkürzung in der Bezeichnung ist eine erste Art von Symbolik. Die Anwendung dieser Ideen auf eine vorgelegte Urform nter Ordnung in m Variabeln vollzieht sich in der Weise, dass dieselbe zunächst ersetzt wird durch eine Form, welche in n Reihen von m Variabeln je linear ist, welche alle verschiedenen Substitutionen unterworfen werden können. Der Boole'sche Discriminantensatz erscheint jetzt in dem Lichte, dass sich die ursprüngliche und die transformirte Discriminante um eine Potenz des Productes sämtlicher n Substitutionsdeterminanten unterscheiden.

Nachträglich lassen sich einige oder alle n Variabelnreihen wieder identificiren, nur nicht in den für die Invarianten aufgestellten linearen partiellen Differentialgleichungen (S. 84), welche wiederum der Ausdruck für eine elementare Determinanteneigenschaft sind.

In der erstgenannten Abhandlung S. 80—94 ist die Methode soweit ausgebildet, dass man erkennt, wie jede binäre Form gerader Ordnung eine quadratische Invariante besitzt. Am Schlusse wird Boole als der Entdecker der ersten kubischen Invariante (einer biquadratischen Form) genannt, cf. Salmon S. 343, vgl. indessen unten bei Eisenstein.

Die zweite Abhandlung bietet wesentliche Fortschritte. Vgl. Salmon, Lesson 14. Der Grundgedanke ist, dass man die Functionaldeterminante von n Functionen von n Variabeln auffassen kann als das Resultat eines Differentiationsprocesses, welcher auf eine **einzige** Function ausgeübt wird, nämlich auf das Product jener n Functionen, jede in einer andern Variabelnreihe geschrieben; nachträglich ist die Verschiedenheit der n Variabelnreihen wieder aufzuheben. Dies gewährt den Vorteil, den Differentiationsprocess zu iteriren und verschiedene Iterationen zu combiniren. Sämtliche, so entstehende Processe, auf ganze homogene Functionen angewandt, sind invariantiver Natur, d. h. sie erzeugen aus den Functionen simultane Covarianten.

Die hiermit verknüpfte Symbolik ist in Wirklichkeit nur eine Abkürzung in der Darstellung **realer** Processe. Anders später bei Gordan, wo sich diese Processe auf symbolische Formen erstrecken. Der Cayley'sche Differentiationsprocess („Ω-Process“) ist heutzutage von grosser Bedeutung geworden. Cf. II. C, b, α.

*) Salmon S. 343.

**) Journ. für Math. XXVII. Die quadratische Covariante und die Discriminante einer binären kubischen Form figuriren bereits in der Note S. 75—79, datirt Dez. 1843, vgl. dazu die Arbeit S. 82—104, gleichfalls dat. Dez. 1843; die beiden Invarianten i, j der biquadratischen Form in der bekannten Note über die Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Ordnungen S. 81—83, dat. 1. Jan. 1844. Salmon (S. 343) bestreitet zwar, dass Eisenstein die Invarianz jener Formen bekannt gewesen sei. Eisenstein verweist indessen ausdrücklich am Schlusse der letztgenannten Note auf eine künftige Notiz über „die sehr merkwürdigen Eigenschaften und Umformungen der betr. homogenen Ausdrücke“.

und Covarianten einer kubischen und biquadratischen binären Form erkannt; es hatte Hesse*), in eleganter Handhabung des von Jacobi zur Vollendung gebrachten Determinantenapparats, der nach ihm benannten Covariante ein eingehendes Studium gewidmet und die Rolle aufgedeckt, welche dieselbe in der Theorie der ebenen Curven, insonderheit derer von der 3. Ordnung spielt.

Nicht unerwähnt darf bleiben, dass im gleichen Jahre (1844) Grassmann**) mit seiner Ausdehnungslehre hervortrat, dessen Ideen über Lückenausdrücke und mehrstufige Coordinaten den Keim zu der modernen Gestaltung unserer Theorie in sich tragen.

Indirect hat auch Galois***) durch seine Theorie von der Gruppe einer Gleichung eingegriffen (1846).

Während Aronhold†) der Erste ist, der im ternären Gebiete die Invarianten der kubischen Form und ihre Beziehung zur Discriminante auffindet (1849), sehen wir in dem Cyklus Sylvester'scher††) Publicationen

---

Diese Notiz ist in der That im gleichen Journalbande S. 319—321 erschienen, wo mit voller Präcision den beiden Covarianten nebst der Discriminante der kubischen Form die Invarianteneigenschaft zugesprochen wird.

Dagegen hat unzweifelhaft Boole zuerst die Discriminante der biquadratischen Form als ganze Function der beiden Invarianten i, j ausgedrückt, Cayley I S. 94, Salmon S. 343.

*) Journ. für Math. XXVIII S. 68—107. Die canonischen Gestalten der binären kubischen und biquadratischen Formen und ihre Verwendung zur Auflösung der bez. Gleichungen sind im gleichen Journ. dargestellt; die Invarianten treten freilich hierbei nur implicite auf.

Wegen der Bedeutung Hesse's für die moderne Algebra siehe Nöther in Schlömilch Z. XX und Klein im Programm des Münchener Polytechnikums. 1875.

**) Grassmann's bez. Verdienste sind übersichtlich von Sturm in der Biographie Math. Ann. XIV, siehe insbes. S. 25, geschildert worden. Vgl. Math. Ann. VII S. 12.

Von Schlegel ist der Versuch gemacht worden, eine Algebra im Sinne Grassmann's herauszugeben, Leipzig 1875, desgleichen von Schendel, Halle 1885.

***) Die Galois'schen Untersuchungen waren zwar schon 1829 publicirt, sind aber erst 1846 (Liouv. J. XI) allgemein zugänglich geworden. Ihr Einfluss auf die Invariantentheorie tritt übrigens erst in der neueren Periode hervor.

†) Journ. für Math. XXXIX S. 140—159. Zwei Jahre später überreichte Aronhold der Königsberger philosophischen Facultät ein Manuscript (welches niemals publicirt wurde), in dem er die Invariantentheorie auf einheitlicher Grundlage entwickelte. Seinen brieflichen Mitteilungen an Cayley zufolge muss er damals auch bereits im Besitze der Differentialgleichungen für die Invarianten gewesen sein. Cf. Salmon S. 344.

††) Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 186—200, 289—293 (1851); Bd. VII S. 52—97 (1852); Bd. VIII S. 62—64, 256—269 (1853); Bd. IX S. 85—103 (1854); cf. Cayley, Bd. VII 40—51, 97—98.

Den Sylvester'schen Aufsätzen gehen voran zwei solche von Boole Bd. VI 87—106, 107—113 (1851), in welchen die früheren Ergebnisse des Verf. zusammengefasst und durch einige wesentliche Zusätze vervollständigt werden, vgl. Salmon S. 344. Zu den letzteren gehört ein sehr fruchtbares Princip zur Erzeugung von neuen invarianten Bildungen. Für zwei homogene Variable x, y wird bewiesen, dass, wenn diese durch eine Substitution mit der Determinante ε in x', y' übergehen, durch genau dieselbe Substitution die partiellen Ableitungen (einer arbiträren Function) $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ übergeführt werden in $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}$, $-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}$. Eine Wiederholung des Beweisverfahrens (was indessen, als auf der Hand liegend, übergangen wird) würde ergeben, dass $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ gerade so in $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}$, $-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'\partial x'}$, $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$ übergehen, wie x^2, xy, y^2 in x'^2, $x'y'$, y'^2 u. s. f.

Aus einer Identität $\varphi(x, y) = \psi(x', y')$ folgt daher in symbolischem Sinne die andere $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$, d.h. jedes Product von der Art $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\lambda}$ ist in Wahrheit zu ersetzen durch $\frac{\partial^{\varkappa+\lambda}}{\partial y^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}}$, und entsprechend für die gestrichenen Buchstaben.

Es erscheint einem nicht symbolisch veranlagten Leser merkwürdig, dass Boole von dem viel näher liegenden Satze keine Notiz nimmt, dass die Identität $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$ auch in realem Sinne gültig ist, sodass die ursprünglichen Variabeln durch die wirklichen Ableitungen einer Function ersetzt werden. Das Letztere hat erst Sylvester bemerkt. (Siehe folgende Seite.)

Boole erweitert seinen Satz auf das Gebiet von drei Variabeln, jedoch nur für orthogonale Transformationen.

In der zweitgenannten Arbeit verwendet Boole sein Princip dazu, um aus gewissen Klassen von Gleichungen in vier homogenen Variabeln die Productglieder vermöge linearer Transformation zu entfernen.

Sylvester beginnt damit, die Ergebnisse seiner Vorgänger unter einem einzigen Gesichtspunkte zu vereinigen. Dazu dient ihm der wichtige Satz: „Die Resultante von n homogenen Formen $\varphi(x)$ mit n Variabeln x, ist nach Ersetzung der letzteren durch n andere Formen $\psi(x)$, das Product von (leicht bestimmbaren) Potenzen der Resultante der $\varphi(x)$ und der Resultante der $\psi(x)$" (Bd. VI S. 187). Die Resultante erscheint so als eine Invariante in höherem Sinne, d. h. höheren Transformationen gegenüber. Sind die $\psi(x)$ linear, so kommt man zur gewöhnlichen Invariantentheorie zurück. Nimmt man andererseits die $\psi(x)$ beliebig, dagegen die $\varphi(x)$ linear an, so ist damit die Combinanteneigenschaft der Resultante ausgesprochen, d. i. die Resultante von n linearen Verbindungen der ψ ist gleich der ursprünglichen Resultante der ψ, bis auf eine Potenz der Verbindungsdeterminante.

Das hierbei implicite zu Grunde gelegte Beweisprincip lautet: „Wird eine ganze Function f von n Variabeln für alle Wertsysteme derselben gleich Null, für welche eine zweite solche Function F verschwindet, so ist f in F als Factor enthalten." Dies Princip bedarf jedoch selbst eines Beweises, vgl. z. B. Hölder, Böklen math. naturw. Mitt. I S. 60 (1884); Study, „Methoden zur Theorie der ternären Formen", Leipzig 1889 S. 31.

Die weiteren Entwickelungen Sylvester's gipfeln (Bd. VII S. 56) in dem Hauptgedanken, dass eine Linearform $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$ ungeändert bleibt, wenn man die x irgend einer linearen Substitution und gleichzeitig die u, die „contragredienten Variabeln", der inversen Substitution unterwirft. Adjungirt man einer Form f(x) die Linearform u_x, so führen die simultanen In- resp. Covarianten bez. der x zu Contravarianten resp. gemischten

(1851—1854) bereits die Grundzüge einer allgemeinen Theorie erstehen, welche die Elemente von den verschiedenartigsten Zweigen der späteren Disciplin umfasst.

In zielbewusster Weise werden neben den ursprünglichen Veränderlichen die zu ihnen dualistischen eingeführt und damit die Lehre von den Contravarianten und Zwischenformen geschaffen. Eine Reihe neuer Processe zur Erzeugung invarianter Formen wird angegeben, insbesondere das Princip*) der — symbolischen, wie unsymbolischen — gegenseitigen Differentiation.

Sylvester begründet ferner (1851) die Lehre von den canonischen**)

Concomitanten („Zwischenformen" nach Aronhold) von f, und vice versa für eine Form $\varphi(u)$.

Sämtliche invarianten Bildungen („Concomitanten"), die aus einer Urform oder einer Reihe von solchen entspriessen, führen somit auf den engeren Begriff der Invarianten zurück.

Eine besondere Gattung von Contravarianten, die „formes adjointes", treten schon vorher bei Hermite auf, Journ. für Math. XL, S. 263 (1851). Sylvester nennt sie „Evectanten", Bd. VII S. 181.

Die Namen „Invariante, Covariante, Contravariante, Concomitante" treten bei Sylvester zum ersten Male Bd. VI S. 290 auf; die Ausdrücke „cogredient, contragredient" Bd. VII S. 53, „Discriminante" Phil. Mag. 1851 S. 406, „Combinante" Bd. VIII S. 63.

*) Aus der Thatsache, dass die x_i und die $\frac{\partial}{\partial u_i}$ cogredient sind, d. h. den nämlichen Substitutionen unterliegen, folgt zunächst (cf. oben bei Boole), dass die Einsetzung der realen Ableitungen einer Form $\varphi(u)$ nach den u_i statt der Variabeln x einer Form f(x) zu einer simultanen Contravariante von f und φ Veranlassung giebt (Bd. VII S. 194). Da aber weiterhin auch die Potenzen und Producte $x_1^n, x_1^{n-1}x_2, \ldots$ cogredient sind zu den $\frac{\partial^n}{\partial u_1^n}, \frac{\partial^n}{\partial u_1^{n-1}\partial u_2}, \ldots$, so lässt sich auch diese Ersetzung in einer Form f(x) der nten (oder auch höhern) Ordnung vornehmen (Bd. VI S. 96, 179). Die so entstehende Contravariante heisst später nte Ueberschiebung von f über φ (cf. Salmon S. 346).

Den letzteren Process bezeichnet Sylvester als symbolische Einführung der $\frac{\partial}{\partial u_i}$ statt der x_i.

Das Entsprechende gilt natürlich für die u_i und $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

In der Geometrie stellt das Verschwinden des erstgenannten Gebildes, wenn etwa die Anzahl der Variabeln gleich drei genommen wird, die Enveloppe der (linearen) Polaren dar, welche die Punkte von $f=0$ bezüglich der Curve $\varphi=0$ besitzen. Derartigen Polargebilden (und ihren Verallgemeinerungen) hat Steiner ein eingehendes Studium gewidmet.

Die Ueberschiebungen sind geometrisch hauptsächlich im Falle ihres identischen Verschwindens untersucht worden; f heisst dann apolar zu φ. Vgl. die späteren Arbeiten von Reye.

**) Phil. Mag. Nov. 1851 S. 391—410, auch separat erschienen London, bei Bell. (1851).

Vgl. Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 193, 194, 198, 293; auf S. 123 wird erwähnt, dass der Name „canonische" Form von Hermite stammt.

Formen und wendet sie auf die Darstellung der binären Formen ungerader (speciell der fünften) Ordnung als Potenzsummen an: für den wichtigen Fall der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln bahnt er durch die Formulirung des „Trägheitsgesetzes"*) neue Wege.

Bei ihm finden wir auch schon die Erkenntnis von der Bedeutung des „Elementarteilerprincips"**) (1851) wie des „Combinanten"-Begriffs***) (1853).

Ohne Beweis teilt er die Cayley-Aronhold'schen grundlegenden Differentialgleichungen†) für invariante Bildungen binärer Formen mit (1852).

Als äusseres Zeichen für den Umfang der vorgeschrittenen Entwickelung mag die ausgedehnte, grösstenteils von Sylvester selbst herrührende Terminologie dienen, die sich am Ende seiner grossen Abhandlung über Sturm'sche Functionen (1853) zusammengestellt findet††).

Für die binären Formen gerader Ordnung f_{2n} werden gelegentlich specifische canonische Darstellungen erwähnt, z. B. l. c. S. 123, 293: damit f_{2n} als Summe von n vollen Potenzen $(\lambda-\alpha_i)^{2n}$ darstellbar ist, muss die „Catalecticante" verschwinden: Phil. Mag. S. 394.

Bei den binären Formen ungerader Ordnung f_{2n+1} wird übrigens nur der allgemeine Fall der Darstellung als Summe von $n+1$ vollen Potenzen $(\lambda-\alpha_i)^{2n+1}$ in Betracht gezogen (l. c. S. 392), d. h. solange die Discriminante der „Canonizante", deren Wurzeln die α sind, von Null verschieden ist.

Die quaternäre kubische Form als Summe von fünf Kuben wird zuerst wohl in Cambr. and Dubl. Math. J. VI S. 199 erwähnt. Vgl. die Angaben in der Clebsch-Biographie Math. Ann. VII S. 17.

*) Phil. Mag. 1852 II S. 138; Phil. Trans. 1853 S. 407—548. Borchardt erwähnt im Journ. für Math. LIII S. 275—283 (1857), dass Jacobi das in Rede stehende Gesetz bereits 1847 bekannt gewesen sein müsse. Vgl. Hermite's Beweis, ebenda S. 271. Siehe „Fiedler" S. 471. In den Phil. Trans. 1853 (l. c.) macht Sylvester von dem Trägheitsgesetz eine fundamentale Anwendung auf die sog. „Bézoutiante", d. i. eine aus der Discriminante einer binären Form f nter Ordnung abgeleitete quadratische Form von $n-1$ Variabeln, von deren Discussion die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von $f=0$ unmittelbar abhängen. Vgl. Hermite, Journ. für Math. LII S. 39—51 (1856).

**) Phil. Mag. Mai 1851 S. 119—140, wo auf Grund des Principes alle möglichen Ausartungen in den Schnittverhältnissen von zwei Curven, bezw. Flächen 2. Ordnung aufgezählt werden.

Sylvester verwendet auch das nämliche Princip bereits zur Untersuchung der Aequivalenz von quadratischen Formen, Phil. Mag. April 1851 S. 295—305; vgl. die Berichtigung dazu, Mai 1851, S. 415.

***) Cambr. and Dublin. Math. J. VIII S. 63 (vgl. damit das oben über die Resultante Bemerkte), sowie S. 256 u. ff., Bd. IX S. 85 u. ff. Es werden Differentialgleichungen für die Combinanten aufgestellt: ferner wird gezeigt, dass die letzteren nur von den Determinanten abhängen, die man aus den ursprünglichen Coefficienten bilden kann. Als Anwendung wird die Resultante von drei quadratischen ternären Formen in Function von zwei einfachen Combinanten dargestellt.

In den Annali di Mat. (1) I 1858 S. 344—348 hat Betti ein System charakteristischer Differentialgleichungen für die Combinanten abgeleitet.

†) Vgl. das oben bei Aronhold S. 84 Anm. †) Bemerkte (Salmon S. 344).

††) Phil. Trans. 1853 S. 543—548.

Das Jahr 1854, mit dem Sylvester diese erste Reihe von invariantentheoretischen Arbeiten abschliesst, ist überhaupt als eines der bedeutungsvollsten unserer ersten Periode anzusehen. Wir haben da vor allem der Leistungen von Hermite zu gedenken, der übrigens schon vorher (1851) die Theorie durch Einführung des „Evectanten"-Begriffs*) bereichert und in zahlentheoretischen Arbeiten mannigfache Keime**) zur Formenbildung ausgestreut hatte.

Hermite stellt das „Reciprocitätsgesetz" auf***), welches die invarianten Bildungen im binären Gebiete in einer merkwürdigen Art zu Paaren anordnet.

Indem er im Falle einer binären Form ungerader Ordnung zwei lineare†) Covarianten als neue Veränderliche einführt, vermag er die erstere in eine „typische" Gestalt zu bringen, in der die Coefficienten selbst Invarianten sind.

In unmittelbarem Zusammenhange damit stehen die Systeme „associirter" Formen, von denen jede weitere, zur ursprünglichen Form gehörige Bildung in rationaler Weise††) abhängt.

---

*) Journ. für Math. XL S. 263. Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 292.

**) Bei Hermite ist das Ausgangsproblem ein rein zahlentheoretisches, nämlich nachzuweisen, dass die Anzahl der verschiedenen „Klassen", in welche die binären (und höheren) Formen gegebener Ordnung mit vorgeschriebenen Werten für die Invarianten zerfallen, eine endliche ist. Vgl. insbesondere die Aufsätze im XL. und XLI. Bande des Journals für Math. (1850, 1851).

***) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 172—217, vgl. speciell S. 173—175. Wie sich die Ausdehnung auf höhere Formen vollzieht, ist erst in neuester Zeit (1892) von Deruyts gezeigt worden.

†) Hierbei sind zwei Fälle von einander zu trennen. Die beiden, ursprünglich von Hermite behufs Transformation eingeführten linearen Covarianten sind irrational, nämlich die Linearfactoren einer quadratischen Covariante φ. Geht die Form f dabei über in die „canonische" Form F, so ist jede ganze Function der Coefficienten von F, welche bei denselben Substitutionen unverändert bleibt, die jene Covariante φ in sich überführen, eine ganze rationale Invariante von f, bis auf eine Potenz der Discriminante von φ im Nenner (l. c. S. 179). Dies ermöglicht z. B. die Aufstellung der Invarianten einer Form 5. Ordnung.

Erst im weiteren Verlauf wird von der Transformation mittels zweier linearen rationalen Covarianten Gebrauch gemacht S. 190: dadurch geht f (sc. von ungerader Ordnung) in eine „typische" Form über.

††) Journ. für Math. LII S. 1—38. Die Bezeichnung „associirte Formen" ist auf S. 23 eingeführt. Die Entstehung derselben sieht man am einfachsten so ein: $f(x, y)$ sei die vorgelegte Form nter Ordnung, $g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien zwei Covarianten von f. Nach Boole sind x und y cogredient mit $-\frac{\partial h}{\partial y}$ und $\frac{\partial h}{\partial x}$, also auch mit $xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y$ und $yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y$, wo X, Y zunächst willkürliche Parameter sind. Somit ist auch der Ausdruck

$$G = g\left(xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y,\ yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right)$$

für alle Werte von X, Y eine Covariante von f, d.h. die einzelnen Coeffi-

Bei der Durchführung für den Fall fünfter Ordnung ergiebt sich ihm das erste Beispiel einer „schiefen“ Invariante*) und ihr Ausdruck durch die drei anderen. Eine schöne Anwendung davon bieten die Invariantenkriterien für die Realität**) der Wurzeln einer Gleichung fünfter Ordnung.

In einer weiteren, ebenfalls 1854 erschienenen Arbeit***) behandelt Hermite (wiederum zunächst von zahlentheoretischen Gesichtspunkten ausgehend) das Problem, eine quadratische, ternäre Form durch lineare Substitutionen der Variabeln in sich selbst überzuführen: die Coefficienten der fraglichen Substitution werden als rationale Functionen von einer Anzahl willkürlicher Parameter dargestellt, was für den wichtigen Specialfall einer Summe von Quadraten Cayley bereits 1846†) allgemein ausgeführt hatte. Umgekehrt hat Cayley bald nach Hermite (1855) dessen Formeln auf allgemeine quadratische Formen von n Variabeln ausgedehnt††).

Aber noch in anderer Richtung erweist sich das Jahr 1854 als ein fruchtbares. Auf der einen Seite erbringt Cayley den Nachweis†††) für die (oben schon erwähnten) linearen partiellen Differentialgleichungen, denen die Invarianten binärer Formen als Functionen der Coefficienten genügen,

---

cienten der Potenzen und Producte der X, Y sind Covarianten von f: der erste ist offenbar f selbst. Man fasse jetzt X, Y als neue Variabeln auf, die von den alten linear abhängen. Da die Substitutionsdeterminante (bis auf einen Zahlenfactor) gleich h selbst ist, so stimmt jede In- oder Covariante von G mit der ursprünglichen bis auf eine Potenz von h überein.

Nimmt man speciell $g = h = f$, so geht f vermöge der angegebenen Substitution über in eine Form F mit den Coefficienten $f, 0, f_2, f_3, \ldots, f_n$, i. e. den zu f associirten Formen, und irgend eine In- oder Covariante von f wird darstellbar als eine ganze Function der f_i, bis auf eine Potenz von f im Nenner.

Bei Hermite dienen diese associirten Formen vor allem zur Lösung der zahlentheoretischen Aufgabe, die binären kubischen und biquadratischen Formen in „Ordnungen“ einzuteilen (l. c. S. 31 u. f.).

Setzt man übrigens in den f_i $y = 0$, $x = 1$, so fällt der Uebergang von f zu F zusammen mit dem in der elementaren Gleichungstheorie üblichen Verfahren, den Coefficienten der zweithöchsten Potenz zum Verschwinden zu bringen.

Als eine andere Anwendung der f_i erscheint die Cayley'sche Relation zwischen den Covarianten einer biquadratischen Form, und diese Relation wird wiederum zu einer eleganten Transformation des elliptischen Integrals 1. Gattung verwandt (l. c. S. 8).

*) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 186 u. f. Die Rolle, welche diese Invariante bei der Auflösung der Gleichungen fünfter Ordnung spielt, ist von Hermite im Journ. für Math. LIX S. 394—305 besonders betont worden.

**) l. c. p. 198 u. f. Eine Ausführung im einzelnen hat Hermite später gegeben: C. R. 1865, 1866.

***) Cambr. and Dublin Math. J. IX S. 63—67. Vgl. Brioschi, Journ. für Math. LII S. 133—141 (1856).

†) Journ. für Math. XXXII S. 119—123.

††) Journ. für Math. L S. 288—299.

†††) Journ. für Math. XLVII S. 109—124.

während Brioschi*) die entsprechenden Gleichungen bezüglich der Wurzeln jener Formen herleitet.

Endlich beginnt mit dem Jahre 1854 die Reihe der Cayley'schen**) Memoirs upon Quantics, die 1861 (VII. Mem.) ein vorläufiges Ende erreicht. In ihrer Vielseitigkeit, verbunden mit der erschöpfenden Behandlung einzelner Fälle, sind sie noch heute für den Algebraiker, wie für den Geometer eine reiche Fundgrube.

Indem Cayley die invarianten Bildungen binärer Formen als die ganzrationalen Lösungen ihrer Differentialgleichungen auffasst***), tritt er schon in der zweiten jener Arbeiten (1856) der wichtigen Frage näher†), ob sich nicht bei gegebener Urform die Anzahlen der zugehörigen (linear unabhängigen) Formen a priori angeben lassen. In der That erhält er, wenn

*) Annali di Tortolini V S. 207—211, spec. S. 209. Vgl. Betti, Annali di Mat. (1) I S. 129—134 (1859). In derselben Zeitschrift Bd. IX S. 82 (1859) giebt Brioschi einen strengen Beweis für die Cayley'schen Differentialgleichungen der Invarianten im Falle binärer Formen, in den Annali di Mat. (1) I (1858) einen solchen S. 160 im Falle von Formen mit n Variabeln.

**) Die ersten sechs Memoirs befinden sich im zweiten Band der Coll. Papers: S. 221—234 (1854); 250—275 (1856); 310—335 (1856); 513—526 (1858); 527—557 (1858); 561—599 (1859).

Das Wort „Quantic" entspricht genau dem deutschen Worte „Form".

***) Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine vorgelegte Form, so ist das Ergebnis des Processes $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ersetzbar durch einen, nur auf die Coefficienten von f ausgeübten Differentiationsprocess, der nach Brioschi mit $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$ bezeichnet wird. Dann sind die gemeinten $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentialgleichungen, welche eine Covariante von f definiren, durch $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ gegeben. Die Erweiterung auf mehrere Formen und mehrere Variabelnreihen ist leicht vorzunehmen (l. c. S. 224). Cayley zeigt mit Hülfe des (von Lie so genannten) Poisson'schen Klammerausdrucks, dass die mittels seiner früheren Symbolik definirten Covarianten in der That jenen Gleichungen genügen. Dass aber umgekehrt die letzteren die bei linearer Transformation unzerstörbaren Bildungen genau charakterisiren, hat allgemein erst Aronhold 1863 nachgewiesen (Journ. für Math. LXII).

Bei binären Formen hat man zwei solcher Gleichungen: bildet man aus ihnen wiederum den Poisson'schen Klammerausdruck, so gelangt man unmittelbar zu dem Satze, dass das passend normirte „Gewicht" eines jeden Terms einer Covariante constant ist.

Im II. Memoir S. 254 wird der wichtige Satz begründet, dass durch einen einfachen Differentiationsprocess und dessen Wiederholung aus dem ersten Coefficienten einer Covariante succ. die übrigen ableitbar sind.

†) Cayley geht dabei von den Begriffen der „asyzygetischen" und „irreducibeln" Covarianten aus (S. 250). Asyzygetisch heisst eine Reihe von Covarianten, die nicht durch eine lineare Relation (Syzygie) mit numerischen Factoren verknüpft sind; eine irreducible Covariante ist eine solche, die nicht durch solche von geringerem Grade ganz und rational ausgedrückt werden kann.

Grad und Ordnung solcher Formen vorgegeben sind, die bez. Anzahl als bestimmten Coefficienten in der Potenzreihe einer „erzeugenden Function“ *), wie sie schon Euler bei der Zerlegung von Zahlen benutzt hatte. Die Herleitung dieser Potenzreihe stützt sich freilich auf eine, nicht völlig bewiesene Abzählungsformel*).

Hiermit allein schon hat Cayley eine Fülle neuer Anregungen gegeben, die sich bis in die neueste**) Zeit fortgepflanzt haben.

Dagegen vermag er nicht, das später so berühmt gewordene Problem (das hier zum ersten Male gestellt wird) allgemein zu erledigen, die von einer binären Urform bedingte unbegrenzte Reihe von invarianten Formen auf ganze, rationale Functionen einer endlichen***) Anzahl unter ihnen zu reduciren.

Im IV. Mem. (1858) wird der fundamentale Begriff der Ueberschiebung†) zweier Formen eingeführt und ein einfacher, unsymbolischer Ausdruck dafür gegeben, dessen Bedeutung wiederum in den letzten Jahren stärker hervorgetreten ist.

Ein wesentlicher Anstoss zur Verbreitung der jungen und ziemlich spröden Disciplin geht von der eleganten, invariantentheoretischen Auflösung††) der Gleichungen dritten und vierten Grades aus (1858). Nicht

---

*) Der Satz auf S. 257: „Die Anzahl der asyzygetischen Covarianten, für eine binäre Form der Ordnung n, von der Ordnung (in den Variabeln) μ und vom Grad (in den Coefficienten) ϑ ist gleich der Anzahl von Gliedern des Grades ϑ und des Gewichtes $w = \frac{1}{2}(n\vartheta - \mu)$, vermindert um die Anzahl der Glieder des Grades ϑ und des Gewichtes $w-1$“ setzt stillschweigend die lineare Unabhängigkeit eines Systems linearer Gleichungen voraus. Der Beweis für die Gültigkeit dieser Voraussetzung ist erst weit später Sylvester gelungen (Phil. Mag. 1878).

Die eben erwähnte, auf ϑ und w bezügliche Anzahl ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl w als eine Summe von ϑ Zahlen der Reihe $(0, 1, \ldots, n)$ zu bilden, und somit (vgl. S. 243) gleich dem Coefficienten von $x^w z^\vartheta$ in der Entwickelung der „erzeugenden Function“ (S. 260):

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^nz)}.$$

Nach geeigneter Umformung liefert aber diese erzeugende Function noch mehr, nämlich die Totalanzahl der irreducibeln Covarianten. So erhält man für $n = 3$: $\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$, was angiebt, dass vier irreducible Bildungen von den resp. Graden 1, 2, 3, 4 existiren, die indessen durch eine Syzygie vom sechsten Grade verknüpft sind (S. 262).

**) Vgl. II, A., c.

***) Vgl. S. 252, 253, 268, 270.

†) Vgl. S. 517.

Andererseits ist die Ueberschiebung bereits unter den von Cayley 1846 eingeführten symbolischen Bildungen als specieller Fall enthalten.

††) Diese Auflösung (V. Memoir) ist ein unmittelbarer Ausfluss der einen, bei der kubischen resp. biquadratischen Form existirenden Syzygie. Uebrigens

die geringste Leistung endlich ist die Durchdringung der für die Binärformen ausgebildeten algebraischen Methoden mit der projectischen Geometrie*) der einstufigen Grundgebilde.

Insbesondere ist Cayley's projectivische Massbestimmung für Ebene und Raum (VI. Mem., 1859) späterhin für die Ausbildung der „nichteuklidischen" Geometrie**) als grundlegend erkannt worden.

Im Zusammenhange mit diesen systematischen Arbeiten stehen noch weitere von dem gleichen Verfasser, von denen hier kurz erwähnt sein mögen: die Untersuchungen über Teilungen von Zahlen***) (1855, 1856); die grosse Abhandlung über symmetrische Functionen†) (1857) (mit den einfachen Regeln für Grad und Gewicht derselben), die als eine Einleitung in die spätere Theorie der Halbinvarianten angesehen werden kann; ferner die fruchtbare Umgestaltung††) der Bézout'schen Eliminationsmethode (1857), sowie die Ausdehnung der Sylvester'schen Canonisirungsmethode auf binäre Formen gerader Ordnung†††) (1857).

Als unmittelbare Fortsetzung dieser Arbeitsrichtung erscheint die weittragende Entdeckung von M. Roberts††††) (1861), wonach eine (binäre) Covariante bereits durch ihr Leitglied (source, leading term) völlig charakterisirt ist, sodass alle Relationen (Syzygien) zwischen Covarianten unmittelbar durch dieselben Relationen zwischen den Leitgliedern ersetzt

---

sind hier die Vorarbeiten von Boole (Cambr. Math. J. III S. 116), Eisenstein (Journ. für Math. XXVII S. 89), Hesse (Journ. für Math. XXXVIII S. 262) und Sylvester (Cambr. and Dublin Math. J. VI) nicht ausser Acht zu lassen.

Indessen ist der Wert dieser Auflösungsmethoden wohl vielfach überschätzt worden: in der That dürfte die Formentheorie erst dann einen integrirenden Bestandteil des Auflösungsproblems bilden, wenn man nach dem Vorgange von F. Klein die zur Gleichung gehörende Gruppe als eine Gruppe von Collineationen in einem höheren Raume auffasst.

*) Dieser Teil ist ausführlicher von Fiedler bearbeitet worden (Leipzig 1862).

**) Es gebührt wohl F. Klein das Verdienst, zuerst die bez. Cayley'schen Ergebnisse in ihrer fundamentalen Bedeutung erkannt zu haben; vgl. Math. Ann. IV und VI.

***) Papers II S. 235—249 (1855), 47—52 (1858). Vgl. dazu besonders Sylvester Quart. Math. J. I S. 141—152 (Juli 1855), sowie Brioschi und Sylvester in Annali di Tort. VIII (1857), Bellavitis in Annali di Mat. II (1859), Bruno im Journ. für Math. LXXXV und Math. Ann. XIV. Bellavitis giebt l. c. S. 147 eine Uebersicht über die frühere Litteratur. Eine kurze Zusammenstellung der bez. Hauptsätze giebt Hagen in seiner Synopsis der höheren Math. Berlin, 1891 S. 1—3.

†) Papers II S. 417—439, cf. S. 454—464.

††) Journ. für Math. LIII S. 366—367 oder Papers IV S. 38—39.

†††) Journ. für Math. LIV S. 48—58 und 292 oder Papers IV S. 43—53.

††††) Quart. J. IV (1861) S. 168—178, 324—328. Der Fundamentalsatz dieser Theorie sagt aus, dass das Leitglied des Productes zweier Covarianten gleich dem Product der einzelnen Leitglieder ist.

werden können und umgekehrt. Ein solches Leitglied ist immer noch (wie die Invarianten) eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen, hat aber im wesentlichen nur noch einer Differentialgleichung zu genügen. Roberts selber hat gleichzeitig die Fruchtbarkeit seiner Methode an dem Beispiel der Formen fünfter Ordnung*) ausführlich dargelegt.

Wir mögen hier gleich anschliessen, was innerhalb des soeben durchlaufenen Zeitraumes (1854—1861) für die Theorie der letztcitirten Formen resp. der Gleichungen fünfter Ordnung, soweit es hier in Frage kommt, geschehen ist.

Auch da ist es wiederum Hermite, der die neuen Wege vorzeichnet, die dann von Brioschi und Cayley weiter verfolgt werden. Hatte Hermite sich schon 1856 einer rationalen Transformation der Variabeln, bei der der Nenner eine Covariante des Zählers war, bedient, um ein elliptisches Integral erster Gattung in eine typische Normalform überzuführen**), so unternimmt er es zwei Jahre darauf, die seit langem in der Algebra verwendete Tschirnhausen-Transformation allgemein in invariante Form***) umzusetzen derart, dass damit zugleich der invariante Charakter der transformirten Gleichung, die überdies von möglichst wenigen Parametern abhängen soll, deutlich hervortritt.

Daran reiht sich von selbst die Durchführung der entsprechenden Forderung für die verschiedenen Resolventen einer vorgelegten Gleichung. Im Falle der fünften Ordnung sind solche Resolventen bekanntlich die bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen auftretende Modular- und Multiplicatorgleichung†).

Eine systematische Bearbeitung der Gleichungen fünfter Ordnung in

---

*) Annali di Mat. (1) III (1860) S. 340—344.

**) Journ. für Math. LII S. 8. Vgl. Brioschi in Annali di Mat. (1) IV S. 192 (1861).

***) C. R. XLVI p. 961 (1858). Ist $f(x) = 0$ die vorgelegte Gleichung, α eine Wurzel derselben, und $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - \alpha}$, so schreibt Hermite die der Wurzel α zugeordnete Wurzel der transformirten Gleichung in der Gestalt $\varphi(z) - \frac{1}{n} f'(z)$, wo die Potenzen $z^0, z^1, \ldots, z^{n-2}$ durch $n-1$ willkürliche Parameter t zu ersetzen sind. Die Coefficienten der transformirten Form werden Polarenbildungen von Covarianten von f: insbesondere verschwindet der zweite Coefficient, während der nächstfolgende die sog. „Bézoutiante“ wird, eine quadratische Form der t, von der die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von $f = 0$ abhängen. Im übrigen bietet die Hermite'sche Modification der Tschirnhausen-Transformation den grossen Vorteil, dass die neuen Coefficienten von möglichst geringem Grade in den alten ausfallen. Vgl. dazu noch Cayley, Journ. für Math. LVIII (1861) S. 259 oder Papers IV S. 259—269.

†) Man sehe etwa in Clebsch „binäre Formen“ nach §§ 114, 115.

dieser Hinsicht hat Hermite allerdings erst später*) geliefert (1865 bis 1866).

Den drei bisher am meisten hervorgetretenen Forschern Cayley, Sylvester und Hermite tritt von 1854 an Brioschi**) zur Seite, in den verschiedensten Richtungen deren Schöpfungen vervollständigend und weiterführend. Um einige Hauptmomente anzuführen, stellt er (1857) für die Resultante und Discriminante einer binären Form ein merkwürdiges System von, für dieselben charakteristischen Differentialgleichungen auf***), von dem eine Anwendung erst neuerdings in der Theorie der hyperelliptischen†) Functionen gemacht worden ist.

Sodann verdankt man ihm wesentliche Erweiterungen der Hermite'schen Theorie der typischen††) Darstellungen, namentlich auch auf ternäre Formen.

Nehmen wir so wahr, wie die Einzelergebnisse unseres Gebietes allmählich einen bemerkenswerten Umfang erreicht haben, so müssen wir es um so dankbarer anerkennen, wenn es Salmon — der schon vorher†††) nach der Seite der Rechnung, wie der geometrischen Anwendungen hin schätzenswerthe Beiträge geliefert hatte — unternahm, das weitschichtige

---

*) C. R. 1863, 1864. Hier wird die Tschirnhausen-Transformation noch weiterhin umgestaltet, sodass sogar die einzelnen Coefficienten der Potenzen von α (vgl. oben) invariante Bildungen werden, allerdings unter Verzicht auf die ursprüngliche Eleganz.

**) Vgl. vor allem die zusammenhängende Darstellung einer binären Formentheorie in den Annali di Mat. 1. Serie: I (1858) S. 296—309, 349—362; II (1859) S. 82—85, 265—277; III (1860) S. 160—168; VI (1861) S. 186—194. Der in Rom 1861 erschienene Separatabdruck ist vergriffen.

***) Journ. für Math. LIII S. 372—376.

Diese Differentialgleichungen lassen sich im Falle der Resultante in drei Gruppen zerlegen. Die erste besagt, dass die Resultante eine gewöhnliche Invariante ist, die zweite, dass der Resultante zugleich die Combinanteneigenschaft zukommt, die dritte endlich, dass dieselbe auch höheren Transformationen gegenüber in dem Sinne Invarianteneigenschaft besitzt, dass sie sich nach der Transformation bis auf einen Factor reproducirt, der selbst noch von den Coefficienten der beiden Urformen abhängt.

Bei der Discriminante kommt natürlich die zweite der genannten Gruppen in Wegfall. Die letzte Gruppe lässt sich, wie Noether später gezeigt hat, auf eine einzige Gleichung reduciren, vgl. Bruno § 25.

†) Vgl. Wiltheiss in den Math. Ann. XXXIII S. 279 (1888).

††) Annali di Mat. (1) I (1858) S. 158—163, spec. S. 163. (Typische Darstellung von Formen mit n Variabeln). Wegen der typischen Darstellung von drei quadratischen ternären Formen als Ableitungen einer kubischen, siehe z. B. C. R. 1863.

†††) Wegen der geometrischen Anwendungen vgl. die (ohne Kenntnis von Hesse) geschriebene Note über Covarianten von Curven und Flächen, Cambr. and Dublin Math. J. II S. 74.

Schätzbares Material zur Cayley'schen Symbolik findet man Cambr. and Dublin. Math. J. IX S. 32.

Material in einer knappen Monographie*) zu ordnen (1859). Um die Verbreitung derselben in Deutschland hat sich Fiedler durch seine Ausgabe**) (1863) verdient gemacht, der überdies schon kurz zuvor (1862) eine selbständige***), für Anfänger berechnete Darstellung gegeben hatte, die vor allem die Cayley'schen Anwendungen auf die projectivische Geometrie allgemein zugänglich machte. Um dieselbe Zeit (1862) erschien auch die Bearbeitung von Brioschi†), die der Invariantentheorie in Italien einen ausgedehnten Kreis von Anhängern gewonnen hat.

Während die genannten englischen, französischen und italienischen Mathematiker in regem Ideenaustausch mit einander standen, und dadurch unserem Gebiete stets neue Impulse zuführten, bleibt dasselbe in Deutschland lange unbeachtet.

Inhaltlich freilich berühren sich die projectivischen Methoden††) und Sätze eines Hesse und Steiner auf's engste mit der invariantiven Denkweise der fremden Algebraiker, aber noch hat der Gedanke nicht die ihm adäquate Form gefunden, auf die hier mehr, als wohl in anderen Teilen der Mathematik, Gewicht zu legen ist.

Diesen Uebergang hat erst Aronhold an einem klassischen Beispiel†††) bewerkstelligt (1858), indem er aus der Hesse'schen Theorie der ternären kubischen Formen die invarianten Fasern blosslegt, und ihr so eine, von allem Künstlichen und Zufälligen befreite, abgeschlossene Gestalt giebt.

Da die principiellen, hierbei zu Grunde gelegten Ideen in einer späteren††††) Arbeit Aronhold's (1863) in organischem Zusammenhange und in voller Allgemeinheit ausgeführt sind, so mag eine Besprechung der letzteren gleich vorweg genommen sein. Die Ausführlichkeit derselben rechtfertigt sich vielleicht dadurch, dass jene Ideen auf die Anordnung des vorliegenden „Berichtes" einen massgebenden Einfluss ausgeübt haben.

In der ersten Auflage seiner „Higher plane curves" 1852, berechnet er zuerst In- und Covarianten binärer Formen mittels symmetrischer Functionen.
In der zweiten Auflage der „Algebra", 1865, giebt er die neue Aufstellung der „vollen Systeme" für die einfachsten simultanen Binärformen.

*) Dublin 1859.
Die vierte Auflage erschien 1885.

**) Leipzig 1863. Die zweite Auflage erschien 1877.

***) Leipzig 1862

†) Siehe oben S. 94 Anm. **). Eine elementar gehaltene Bearbeitung der Theorie stammt von Battaglini, Atti di Napoli 1867, vgl. die Fortsetzungen im Giorn. di Mat.

††) Vgl. die mehrfach genannten Biographien von Plücker, Hesse, Clebsch.

†††) Journ. für Math. LV S. 97—191.

††††) Journ. für Math. LXII S. 281—345.

Aronhold's Bestreben geht dahin, die so verschiedenartigen Gebilde invariantiver Natur unter einem einzigen Gesichtspunkte zu erfassen, und auf diese Weise nicht nur ihren gegenseitigen Zusammenhang, sondern überhaupt erst ihre Existenzberechtigung zu ergründen. Als Ausgangspunkt dient ihm zu dem Behuf eine Problemstellung*), die er selbst folgendermassen formulirt:

„Es seien $F(x|a)$, $F'(\xi|a')$ zwei beliebige und beide **ganz allgemeine** homogene Functionen der $p$ten Ordnung resp. von den n Variabeln x_1 bis x_n und ξ_1 bis ξ_n; man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten a und a' finden, unter welchen beide Functionen durch lineare Substitutionen in einander transformirt werden können.“

Die beiden Worte „ganz allgemeine“ sind hier durch den Druck hervorgehoben worden, da ihre Nichtbeachtung zu Missverständnissen**) geführt hat; darin, dass über die Coefficienten a und a' jedwede Verfügung vorbehalten bleibt, liegt schon ausgesprochen, dass unter den fraglichen Bedingungen nur die in allen Fällen notwendigen, keineswegs aber die für irgendwie ausgeartete Formen F, F' hinreichenden verstanden werden sollen, wie dies auch Aronhold im Falle einer ternären kubischen Form in der Abhandlung von 1858 an mehreren Stellen***) deutlich zu erkennen giebt.

Aus den Transformirbarkeitsbedingungen denke man sich bereits die Substitutionscoefficienten δ eliminirt, dann lassen sich die entstehenden Endgleichungen so anordnen, dass ihre rechten Seiten von den δ unabhängig sind. Diese Thatsache findet ihren Ausdruck in dem Bestehen von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen†), welche so umgestaltet werden, dass die Grössen δ in ihnen gar nicht mehr auftreten. Hieraus lässt sich rückwärts schliessen, dass die algebraischen Transformationsrelationen als Gleichheiten von Brüchen geschrieben werden können, von denen immer der eine genau dieselbe rationale Function der Coefficienten a von

---

*) S. 282, 283. Dieselbe Problemstellung für zwei und mehrere Paare von Formen findet sich bereits, wenn auch nicht so exact formulirt, bei Boole Cambr. Math. J. III und IV. Boole giebt auch ein Beispiel für ein einziges Formenpaar; dann repräsentirt eben eine der linearen Substitutionsgleichungen ein zweites Paar (l. c. Bd. III S. 115).

**) Ein solches Missverständnis scheint dem Referenten bei dem Angriffe vorzuliegen, den Veltmann in Schlöm. Z. XXII S. 277—298 (1877) und XXXIV S. 321—330 (1889) gegen das Aronhold'sche Beweisverfahren gerichtet hat.

***) Z. B. Journ. für Math. LV, l. c. S. 160.

†) Bd. LXII S. 287-288, 293. Inwieweit umgekehrt ein Teil eines derartigen Systems Invarianten zu definiren vermag, hat später Maurer untersucht, Münch. Ber. 1888 S. 103—150.

F ist, wie der andere bezüglich der Coefficienten a' der transformirten Form F'.

Mit diesen Brüchen — den rationalen Lösungen jener Differentialgleichungen — ist die Existenz der „absoluten“ Invarianten von F festgestellt. Aber auch die Anzahl der rational unabhängigen unter ihnen wird daraus ermittelt, da der weitere Aufbau der Theorie den wichtigen Schluss erlaubt, dass die n^2 Differentialgleichungen linear von einander unabhängig sind*).

Die gewöhnlichen Invarianten, von denen man vor Aronhold empirisch ausging, erweisen sich a posteriori als Zähler und Nenner der absoluten: sie genügen einem entsprechenden System von n^2 Differentialgleichungen.

Dieses System ist (wie auch das kurz vorher erwähnte) nach dem Beweise von Clebsch (1865) ein „vollständiges“, d. h. es ist nicht möglich, durch Differentiation und Elimination der höheren Ableitungen dem System neue lineare Gleichungen hinzuzufügen**).

Während die Ausdehnung auf ein System***) von Urformen keine principiellen Schwierigkeiten darbietet, gelingt es Aronhold durch Auffindung merkwürdiger Eigenschaften†) der zugehörigen Formen (Contravarianten) und Zwischenformen (gemischten Concomitanten), die tieferen Beziehungen zwischen den verschiedenerlei invarianten Bildungen aufzudecken.

Da es bei diesen Entwickelungen von Bedeutung ist, dass zwischen den Coefficienten der Urform keine lineare Relation bestehen darf, so darf auch an Stelle eben der Urform die bezügliche Potenz einer Linearform††) gesetzt werden, wodurch vor allem das Operiren mit den Differentiationsprocessen glatt von statten geht.

---

*) Einen directen und einfachen Beweis dafür hat Aronhold im Journ. für Math. LXIX S. 185—189 geliefert. Der von Christoffel ebd. Bd. LXVIII S. 246—252 geführte Beweis ist vom Verfasser selber später zurückgezogen und durch einen andern ersetzt worden, vgl. Math. Ann. XIX S. 280—290 (1881).

Auf die Frage der höheren Abhängigkeiten zwischen den n^2 Differentialgleichungen der Invarianten ist erst später Study eingegangen, der nachweist, dass alle Gleichungen Folgen von nur zweien derselben sind. Siehe „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ Leipzig, 1889 S. 167.

**) Journ. für Math. LXV S. 257—268.

***) Bd. LXII § 8.

Der schon von Boole benutzte, nach Aronhold benannte Process, der aus der Invariante einer einzigen Form simultane Invarianten mehrerer Formen vermöge Differentiation nach den Coefficienten abzuleiten lehrt, wird in § 10 als systematische Grundlage der Theorie simultaner Bildungen eingeführt (vgl. Journ. für Math. XXXIX S. 150 u. flgd.).

†) Bd. LXII § 11, § 14.

††) S. 292—293.

Die damit eingeführte Symbolik ist zwar in formaler Hinsicht nicht wesentlich von der durch Cayley gehandhabten verschieden, sie hat aber doch erst auf Grund der eigenartigen Begründung innerhalb der Aronhold'schen Theorie die Fähigkeit zu der Entwickelung gewonnen, welche ihr seitdem in Deutschland zu Teil geworden ist.

Hier ist der Punkt, wo Clebsch mit grossem Erfolge eingegriffen hat, indem ihn die Abhandlung Aronhold's von 1858 veranlasste, die gemeinte Symbolik zur ausschliesslichen Grundlage der Theorie zu machen*) (1861), und den Gedanken, die Bildungen höherer Formen auf die von linearen zu reduciren, rein durchzuführen.

Während die Symbolik der Engländer sich damit begnügte, invariante Formen in beliebiger Anzahl zu erzeugen, führt bei Clebsch die symbolische Darstellung in ihren Determinantenaggregaten nicht nur umgekehrt zu sämtlichen Invarianten, sondern ist geradezu als Definition der letzteren anzusehen, vorläufig allerdings nur unter der Beschränkung auf Formen, welche höchstens eine Reihe von Veränderlichen und die zu ihnen dualistischen enthalten.

Auf Grund dieser Allgemeingültigkeit der Symbolik leitet Clebsch unter anderem das bekannte „Uebertragungsprincip" **) her, welches einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Gebieten verschiedener Stufe herstellt.

Eine Reihe von interessanten Anwendungen auf die Geometrie von algebraischen Curven und Flächen gab Clebsch ebenfalls um diese Zeit; als besonders charakteristisch sei etwa die Behandlung des Normalenproblems***) für Gebilde zweiter Ordnung genannt.

Im übrigen darf sich die gegenwärtige — und auch spätere — Besprechung von Clebsch's Leistungen auf das Notwendigste beschränken, da eine ausführliche und lichtvolle Schilderung derselben, die zugleich die Beziehungen zu verwandten Gebieten berücksichtigt, bereits existirt†).

Nach unserer Auffassung führen Clebsch und Aronhold auf Grund der hervorgehobenen Arbeiten von 1861 und 1863 eine neue Zeit herauf, die dadurch gekennzeichnet ist, dass nunmehr erst eine systematische Entwickelung unserer Wissenschaft Platz greift, womit zugleich die Führung in derselben an Deutschland übergeht.

---

*) Journ. für Math. LIX S. 1—62.

**) l. c. § 7.

***) Journ. für Math. LXII S. 64—109 (1863).

†) Math. Ann. VII S. 1—50, vgl. insbesondere S. 37—50 (1874).

Zwei Hauptrichtungen machen sich hier allmählich geltend und heben sich zum Teil scharf von einander ab.

Die eine, von Clebsch inaugurirte, stellt sich die Aufgabe, eben mit Hülfe seiner Methoden, die das erst ermöglichen, eine vollständige Einsicht in den unendlichen Kreis der invarianten Formen und deren gegenseitige Verwandtschaft zu gewinnen; die andere nimmt das von Aronhold gestellte Problem der „Aequivalenz", d. i. der linearen Transformirbarkeit einer Form in eine andere, zum Vorwurf.

Indessen vergehen doch einige Jahre, bis auf beiden Seiten ein wirklicher Aufschwung erfolgt: man datirt einen solchen zweckmässig vom Jahre 1868 an, in welches einmal der Gordan'sche Beweis eines „endlichen Systems" für binäre Formen fällt*), sodann die Weierstrass'sche Untersuchung der Aequivalenz von bilinearen (resp. quadratischen) Formen und Formenscharen mit Hülfe der Lehre von den Elementarteilern**).

Es mag daher auch gestattet sein, die hier einschlägigen Abhandlungen***) von Clebsch und Gordan (1867) über typische Darstellung von binären Formen, von Kronecker†) und Christoffel††) über bilineare Formen — trotzdem sie äusserlich noch der älteren Periode angehören — erst später, im Zusammenhange mit den anschliessenden Forschungen der neuen Epoche zu würdigen.

Uebergang zur neueren Periode von 1868 bis zur Gegenwart.

Das Jahr 1868 bietet (ausser den beiden, soeben betonten) noch einige andere bedeutungsvolle Momente dar.

Vor allem ist für den Berichterstatter von Bedeutung, dass erst von da ab mit Hülfe der durch Ohrtmann und Müller†††) begründeten „Fortschritte der Mathematik" — eine in der mathematischen Litteratur einzig dastehende Schöpfung — eine vollständige Uebersicht über die einschlägigen Leistungen ermöglicht wird.

Im gleichen Jahre erscheinen Plücker's††††) „Neue Geometrie des Raumes" und Reye's „Geometrie der Lage", zwei Werke, denen es wesentlich zu verdanken ist, wenn die Geometrie in höherem Masse, als vor-

*) Journ. für Math. LXIX S. 323—354.

**) Berliner Ber. 1868 S. 310—338.

***) Annali di Mat. (2) I, 23—79.

†) Kronecker, Journ. für Math. LXVIII, 273—285.

††) Christoffel, ebd. S. 253—272.

†††) Das erste Heft des ersten Bandes, welcher über den Jahrgang 1868 referirt, erschien Febr. 1871.

††††) Der zweite Band erschien im folgenden Jahre, von F. Klein herausgegeben.

dem, von sich aus auf die Algebra zu wirken und ihr neue Quellen zuzuführen beginnt. Als ein Muster dieser Art kann die Anwendung angesehen werden, welche F. Klein*) (ebenfalls 1868) von der citirten Weierstrass'schen Reduction einer quadratischen Formenschar macht, um die Liniencomplexe zweiten Grades in verschiedene Arten einzuteilen.

Nachdem einmal durch Gordan die Endlichkeit einer Klasse von Formensystemen erwiesen war, war damit die Aufgabe gegeben, weitere besondere Formen in dieser Richtung zu beherrschen. Die Fülle der dadurch angeregten Arbeiten, an denen Clebsch und Gordan selbst in erster Linie beteiligt sind, machen die Gründung einer neuen Zeitschrift, der „Mathematischen Annalen", notwendig (deren erstes Heft im Dez. 1868 ausgegeben wird), die seitdem unserer Disciplin stets eine besondere Pflege hat angedeihen lassen.

Abgrenzung des Stoffes**).

Als obersten Einteilungsgrund für die Bewältigung des vorliegenden Materiales nehmen wir, wie bereits bemerkt, die Gesichtspunkte der Aequivalenz und der Formenverwandtschaft.

Nun giebt es wohl kaum ein Gebiet der Mathematik, in das nicht die Theorie der linearen Transformationen mit Erfolg eingegriffen hätte, und es stellt sich somit die Notwendigkeit heraus, den Kreis unserer Betrachtungen in angemessener Weise abzugrenzen.

Klein und Lie haben seit dem Anfang der siebziger Jahre darauf hingewiesen***), wie die Eigenschaften von Ausdrücken, welche irgend einer Klasse von Transformationen gegenüber ein invariantes Verhalten zeigen, wesentlich durch den „Gruppencharakter" der letzteren bedingt sind, d. h. durch die Eigenart der geschlossenen Mannigfaltigkeit der Transformationen, welche sich bei beliebiger Zusammensetzung derselben stets nur reproducirt.

Bei den linearen Transformationen insbesondere ist die Gruppeneigenschaft am schärfsten ausgeprägt, da es ja von vorn herein klar ist, dass zwei lineare Transformationen, hinter einander ausgeübt, immer wieder

---

*) Dissertation Bonn, wiederabgedruckt Math. Ann. XXIII S. 539—578.

**) Den Citaten dieses und des nächstfolgenden Abschnitts ist nur eine provisorisch orientirende Bedeutung beizulegen.

***) Siehe etwa Math. Ann. IV S. 50—84 (1872), sowie besonders Klein's Erlanger Programm von 1872.

Im folgenden wird wiederholt auf Lie's „Theorie der Transformationsgruppen" Bd. I und II, Leipzig (1888, 1890), bearbeitet von Engel, hingewiesen (kurz mit „Lie-Engel" citirt).

Es ist von Interesse, damit den Standpunkt zu vergleichen, den Kronecker in dieser Grundfrage einnimmt, vgl. Berliner Ber. 1890 S. 99 u. flgde.

eine solche ergeben. Zu jeder Gruppe von linearen Substitutionen der Variabeln wird, genau genommen, auch eine besondere*) Invariantentheorie gehören; indessen seien hier nur die hauptsächlichsten Klassen in Betracht gezogen.

In der Algebra handelt es sich vorwiegend um Formen, deren Coefficienten entweder als ganz unabhängig variabel, oder doch als stetig abhängig von einer Anzahl willkürlicher Parameter angesehen werden: in demselben Sinne werden auch die Coefficienten der linearen Substitutionen, denen die Variabeln unterworfen werden, als stetig veränderliche Grössen gedacht. Man wird es also hier mit „endlichen continuirlichen" Gruppen**) zu thun haben.

Es giebt aber auch wichtige Ausnahmen dieser Regel. So treten bei Formen mit linearen Transformationen in sich Substitutionen auf, deren Anzahl eine endliche ist, und deren Coefficienten infolgedessen numerisch feste Werte besitzen. Auch solche Gruppen, die kurz als „Galois'sche" bezeichnet seien, werden uns vom Aequivalenzproblem aus beschäftigen müssen. Sie vermitteln zugleich den Zusammenhang mit der Gleichungstheorie.

In der Zahlentheorie dagegen und in verwandten Gebieten (wie in der modernen Theorie der automorphen Functionen) werden die Coefficienten der angewandten Transformationsgruppen in ihrer Veränderlichkeit durch arithmetische Gesetze geregelt, gehören also dem Gebiete der discontinuirlich-variabeln Grössen an.

Die (arithmetischen und transcendenten) Invarianten, welche sich derartigen „discontinuirlichen" ***) Gruppen zuordnen lassen, erfordern zu ihrer Behandlung wesentlich andere Methoden, als die in der Algebra auftretenden; da überdies die damit verknüpften Fragestellungen in anderer Richtung vorgehen, werden wir das gemeinte Gebiet nur gelegentlich flüchtig streifen.

Aehnlich verhält es sich mit den ausgedehnten Untersuchungen über

---

*) In dieser Richtung ist freilich noch wenig geschehen, da die bisher ausgebildeten invariantentheoretischen Methoden, sei es direct oder indirect, stets Differentiationen nach den Substitutionscoefficienten verwenden, also letztere zunächst als allgemein voraussetzen.

Eine allgemeine Charakterisirung verschiedener Klassen von besondern Substitutionsgruppen hat in neuester Zeit Maurer gegeben, Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890).

**) Wegen der Einteilung der Transformationsgruppen, vgl. den einleitenden Abschnitt bei Lie-Engel I.

***) Es kann hier nur kurz auf die bez. Leistungen von Poincaré und Picard einerseits, Klein, Hurwitz, Fricke u. a. andererseits hingewiesen werden.

Differentialformen und Differentialgleichungen, die daraus erwachsen sind, dass man die unabhängigen Variabeln ganz beliebigen Transformationen unterworfen hat. Allerdings transformiren sich dabei die Differentiale der Variabeln linear — und insofern wird die algebraische Invariantentheorie bis zu einer gewissen Grenze eingreifen*) — aber die Substitutionscoefficienten enthalten Functionen der Veränderlichen selbst, deren Willkürlichkeit nur durch gewisse Integrabilitätsbedingungen eingeschränkt ist.

Auch solchen „unendlichen" Gruppen werden wir höchstens da ein Interesse widmen dürfen, wo ihr specifischer Charakter verhältnismässig zurücktritt, und dafür formentheoretische Entwickelungen in den Vordergrund treten.

Aber selbst innerhalb der eigentlichen Algebra sind noch Beschränkungen geboten.

In der Theorie der algebraischen Curven und Flächen (d. i. der algebraischen Functionen von einer und zwei Variabeln) giebt es, seit den bahnbrechenden Arbeiten von Cremona einerseits, von Riemann andererseits, eine Reihe von wichtigen Erscheinungen, deren Gesetze nicht sowohl von linearen, als überhaupt von eindeutigen (algebraischen) Transformationen der Veränderlichen abhängen.

Nun lassen sich freilich die letzteren im Princip doch wieder auf rein lineare (nämlich der sogenannten φ-Gebilde)**) zurückführen; indessen ist eine Durcharbeitung derartiger Fragen im projectiv-invariantentheoretischen Sinne erst in der neuesten Zeit und in vereinzelten Fällen geleistet worden.

Umgekehrt wird es nicht zu umgehen sein, nach einer anderen Richtung hin die Grenzen der Algebra zu überschreiten.

Eines der wichtigsten, von Lie herrührenden Theoreme sagt aus, dass man den Bereich einer endlichen, continuirlichen Transformationsgruppe stets dadurch „erweitern"***) kann, dass man diejenigen Transformationen mit aufnimmt, welche die (bis zu einer beliebigen Ordnung hin gebildeten) Ableitungen der als abhängig betrachteten Variabeln nach den unabhängigen erfahren. Invarianten solcher erweiterten Gruppen oder kurz „Differentialinvarianten" zeigen, im Falle die ursprüngliche Gruppe

---

*) Lie selbst, der das in Rede stehende Problem am weitesten geführt hat, geht auf die formentheoretischen Beziehungen nicht näher ein.

**) Man vgl. etwa die bez. Entwickelungen in Klein-Fricke's Modulfunctionen (Leipzig, 1890), III. Abschn. 2. Cap., sowie die besonderen Ausführungen von Wiltheiss für das Geschlecht $p = 3$ Math. Ann. XXXVIII S. 1—13 (1891).

***) Lie-Engel I Cap. 25.

eine projective war, eine weitgehende Verwandtschaft mit den gewöhnlichen Invarianten. Insofern wird ein Hereinziehen hierauf bezüglicher Arbeiten von Halphen, Sylvester und der von Letzterem angeregten Schule gerechtfertigt sein.

Was endlich die Anwendungen unseres Gebietes auf andere Zweige der Mathematik angeht — deren Umfang einen eigenen Bericht erheischen würde — so kann es sich nur darum handeln, einiges, was dem Berichterstatter gerade von Interesse schien, herauszugreifen, um den Text zu illustriren und zu beleben.

Wenn sich so das Feld der projectiven Substitutionen als ein verhältnismässig enges erweist, so zeigt sich seine Bedeutung doch in zwiefacher Richtung.

Einmal kann die hier ausgebildete, specifische Methodik geradezu als ein Muster für andere Disciplinen gelten.

Sodann bildet die Lehre von den linearen Substitutionen und ihren Invarianten nicht nur die natürliche Vorstufe zu derjenigen von den Transformationen überhaupt, sondern es bildet sich auch umgekehrt bei der Behandlung der letzteren immer stärker das Bestreben aus, hervorragende Probleme auf jene erste Stufe zurückzubringen.

Es sei in dieser Hinsicht etwa angeführt, dass zu jeder endlichen continuirlichen Transformationsgruppe eine projective existirt, welche auf die gegebene isomorph bezogen werden kann, sowie, dass die Aufgabe der Bestimmung aller Gruppen von bestimmter Zusammensetzung geradezu der gewöhnlichen Invariantentheorie gewisser trilinearer Formen angehört.

Die stufenweise Entwickelung des Invariantenbegriffs.

Ist ein System von Formen vorgelegt, und man unterwirft die verschiedenen Variabelnreihen einer gewissen Gruppe von linearen Substitutionen, so induciren die letzteren eine (holoedrisch isomorphe) Gruppe von Substitutionen der gegebenen Coefficienten. Eine jede homogene Invariante dieser Coefficientengruppe, d. i. eine analytische Function der Coefficienten, die zugleich hinsichtlich jeder Coefficientenreihe homogen ist, welche den Umformungen der Gruppe gegenüber unveränderlich ist, würde eine „absolute Invariante“ des Formensystems in allgemeinstem Sinne des Wortes sein.

Insbesondere sind die rationalen Invarianten der Coefficientengruppe, falls die ursprüngliche Variabelngruppe die allgemeine projective war (und auch die Coefficienten allgemeiner Natur), die von Aronhold zu Grunde gelegten Brüche, deren Zähler und Nenner sich mit den gewöhnlichen (oder relativen) ganz-rationalen Invarianten des Formensystems decken.

Wünscht man indessen, dass auch die letzteren Bildungen (und die relativen Invarianten überhaupt) in obiger Definition mit einbegriffen seien, so hat man nur die Variabelngruppe durch diejenige Untergruppe zu ersetzen, die entsteht, wenn man der Substitutionsdeterminante der ersteren den festen Wert Eins beilegt.

Nach dieser Formulirung des Invariantenbegriffs, die ausreicht, um die vielen Einzelerscheinungen des Folgenden von einem Gesichtspunkte aus zu umfassen, wenden wir uns zur historisch vorliegenden Entwickelung desselben zurück, und geben die sich hier in erster Linie aufdrängenden Fortschreitungsmomente in Kürze an.

Man ging naturgemäss von den ganz-rationalen Functionen der Coefficienten einer oder mehrerer Urformen aus, die sich bei linearer Transformation der Variabeln um eine (ganze) Potenz der Transformationsdeterminante ändern. Der Kreis derartiger Formen wurde bald dahin erweitert, dass neben den Coefficienten auch die ursprünglichen Variabeln und die zu ihnen contragredienten als Argumente zugelassen wurden.

Neben diese mehr formale Definition der invarianten Formen stellt sich später die mehr materielle Cayley'sche als ganz-rationaler Lösungen ihrer Differentialgleichungen.

Als dritte Definition tritt dann bei Clebsch das Aggregat gewisser symbolischer Producte auf.

Weiterhin hat man die erste Erklärung der Invarianten von der unnötigen Specialität befreit, dass der bei Transformationen hinzutretende Factor von vorn herein eine Potenz der Substitutionsdeterminante sein müsse, und hat nur verlangt, dass derselbe überhaupt von den Coefficienten der Substitution (nicht aber von denen der Formen selbst) abhängen soll; dies hat bereits, wie eine Reihe*) von Autoren bewiesen haben, die ersterwähnte Eigenschaft zur Folge.

Frühzeitig wurden ferner die vorzulegenden Urformen mit mehreren Reihen von Veränderlichen ausgestattet, die indessen nur cogredienten resp. contragredienten Transformationen unterlagen.

Clebsch führte 1872**) planmässig alle diejenigen Variabeln neben

---

*) Clebsch, Binäre Formen S. 306 (1872); Gram, Math. Ann. VII S. 234 (1874); d'Ovidio Batt. G. XV S. 187—192 (1877); Capelli, Mem. d. Linc. 1882 S. 582 (1882); Hölder, Böklen Mitt. I S. 59—65 (1884); Elliott, Mess. XVI S. 5—8 (1885); Mansion, Mess. XVI S. 127—129; Brux. S. sc. XII A S. 47—49 (1887—88); Study, Methoden (1889) S. 32 u. ff.; Deruyts, Théorie gén. des formes algébriques, Liège 1891 S. 49.

**) Göttinger Abh. XVII S. 1—62.

einander ein, welche im n-fach ausgedehnten Gebiete den verschiedenen linearen Stufen desselben entsprechen.

Gordan*) und Capelli*) wurden sodann zu solchen Formenbildungen geführt, die entstehen, wenn auf mehrere Variabelnreihen von einander unabhängige Substitutionen ausgeübt werden.

So lange die verschiedenerlei invariantiven Bildungen, die sich aus einem vorgegebenen Formensystem ableiten lassen, in den Coefficienten, sowie in den einzelnen Variabelnreihen ganz-rational sind, lassen sie sich nach Aronhold und Clebsch leicht aus dem ursprünglichen Begriff der Invarianten (in engerem Sinne) entnehmen: man braucht zu dem Behuf nur dem gegebenen Formensystem lineare Hülfsformen zu adjungiren.

Principielle Erweiterungen drängen sich erst dann auf, wenn man jenen Grundbegriff der Invariante über das Rationale hinaus auf das irrationale und das transcendente Gebiet überträgt. Bleiben wir hier innerhalb algebraischer Grenzen, so haben wir in der Hauptsache nur Wurzeln von irreducibeln Gleichungen zu berücksichtigen, deren Coefficienten ganz-rationale Invarianten sind. Neuere Untersuchungen von Hilbert, Klein und Gordan, sowie von Frobenius haben erkennen lassen**), wie sich derartige irrationale Formenbildungen naturgemäss darbieten, wenn man sich die Urformen in gewisser irrational-canonischer Art vorgelegt denkt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn der ursprüngliche Rationalitätsbereich der Coefficienten in passender Weise erweitert wird.

In übersichtlicher, organischer Entwickelung hat Study***) 1887 die allmählich aufsteigenden Stufen des Invariantenbegriffs aus einander hervorgehen lassen, indem er sie in unmittelbare Parallele setzt zu der von Kronecker herrührenden arithmetischen Begründung der verschiedenen Arten von algebraischen Grössen.

Insbesondere gelingt es ihm, dem delicaten Begriff der irrationalen Covariante eine präcise Fassung zu geben.

Nach anderer Richtung hin haben Christoffel†) und neuestens Maurer†) eine Erweiterung angestrebt, insofern sie solche Invarianten in Betracht ziehen, für welche zwar die Gruppe der Coefficienten immer

---

*) Gordan bei der Auflösung der Gleichungen fünfter Ordnung, Math. Ann. XIII S. 375—404, insbes. S. 379 (1878).

Capelli beim Studium der doppelt quadratischen binären Formen, Batt. G. XVII S. 69—148 (1879).

**) Vgl. II B.

***) Leipzig. Ber. Vgl. Die Einleitung zu seinen „Methoden" . . ., Leipzig 1889.

†) Christoffel, Math. Ann. XIX S. 280—290 (1881); Maurer, Münch. Ber. 1888 S. 103—150 und Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890).

noch eine projective ist, während die die Transformation der Variabeln vermittelnden Ausdrücke rational werden. Die charakteristische Form der Differentialgleichungen für die Invarianten bleibt auch dann noch bestehen.

Endlich ist noch die Bestimmung der ganz-rationalen invarianten Bildungen auf Grund ihrer Leitglieder anzuführen. Die letzteren sind die Invarianten einer gewissen Untergruppe der ursprünglichen und genügen daher nur noch einem Teile der Differentialgleichungen für gewöhnliche Invarianten.

Speciell für binäre Formen haben in neuerer Zeit MacMahon und Cayley eine selbständige Theorie derartiger „Seminvarianten" geschaffen, die vermöge eines eigentümlichen Symbolismus mit der Lehre von den symmetrischen Functionen in engstem Zusammenhange steht*). Andererseits haben Sylvester und Perrin die genannten Bildungen auf noch einfachere reducirt**).

Die Bedeutung dieser Leitglieder reicht indessen noch weiter, insofern man aus ihnen nach Faà di Bruno***) und Hilbert†) die zugehörigen vollständigen Formen mit Hülfe eines einzigen Processes unmittelbar herstellen kann: man hat nur die Coefficienten der einzelnen Urformen durch die bezüglichen (mit gewissen Zahlen multiplicirten) Ableitungen der letzteren nach der nicht homogenen Variable zu ersetzen, ein Verfahren, das auch auf höhere, als binäre Formen, ausgedehnt werden kann.

Das Aequivalenzproblem der quadratischen und bilinearen Formen.

Wir wenden uns jetzt zu der linearen Transformation der quadratischen und bilinearen Formen. Diese zeichnen sich vor den übrigen Formen dadurch aus, dass zwei allgemeine Individuen derselben Art stets linear in einander überführbar sind.

Das specielle, wegen seiner Anwendungen so wichtige Problem, eine oder auch simultan zwei quadratische Formen von n Variabeln als Aggregat von möglichst wenig Quadraten linearer Ausdrücke darzustellen, ist schon in früherer Zeit vielfach (von Lagrange, Cauchy, Gauss, Jacobi, Plücker, Hesse u. a.) behandelt worden††).

*) Cayley, Quart. J. XIX S. 131—138 (1883), Am. J. VII S. 1—25, 59—73 (1884); MacMahon, Am. J. VI S. 131—164 (1883), Am. J. VII S. 26—47 (1884), Am. J. VIII S. 1—18 (1885).

**) Sylvester im Amer. J. V S. 79—137 (1882); Perrin in den S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).

***) Amer. J. III S. 154—164 (1882) oder Journ. f. Math. XC S. 186—188; cf. Stroh, Math. Ann. XXII S. 402 (1883).

†) Math. Ann. XXX S. 15—29, spec. S. 17.

††) Siehe Baltzer's Determinanten.

Weierstrass zeigte 1858*), wie die Cauchy-Jacobi'schen Darstellungsformeln für die simultane „Reduction“ zweier quadratischen Formen bei Eintritt des „Ausnahmefalles“ zu modificiren seien, dass die Anzahl der Quadrate unter die der Variabeln sinkt, wenn also die Wurzeln der „charakteristischen“ Gleichung (von der die Bestimmung jener Quadrate abhängt) nicht mehr sämtlich unter einander verschieden sind. Insbesondere wird die reelle Transformation reeller Formen untersucht.

Der Cayley-Hermite'schen Formeln für die Schar der Transformationen, welche eine quadratische Form in sich selbst zulässt, ist schon im ersten Abschnitte gedacht worden**).

Weierstrass'sche Forschungen über Transformationen allgemeiner Θ-Functionen (bei Invarianz der Parameter) führten auf die algebraische Aufgabe, eine bilineare Form von je $2n$ Variabeln auf die canonische Gestalt einer gewissen Summe von Producten zu bringen. Kronecker erkannte 1866***) mittels Einführung der sogenannten „beigeordneten“ Form, dass die verlangte Reduction bei nicht verschwindender Determinante der Form nach Lösung einer charakteristischen Resolvente $n$ten Grades (mit ungleichen Wurzeln) ausführbar sei, und gab zugleich an, wie hierauf die allgemeinere Aufgabe zurückkomme, die bilineare Form vermöge der nämlichen Substitutionen beider Variabelnreihen in sich zu transformiren.

Im nächsten Jahre bestätigt Christoffel†) diese Ergebnisse auf dem Aronhold'schen Wege und begründet den wichtigen Satz, dass die Anzahl der in den Substitutionscoefficienten enthaltenen willkürlichen Parameter mit derjenigen der absoluten Invarianten der Form übereinstimmt. Als Hülfsmittel dient ihm dabei die wirkliche Aufstellung der invarianten Bildungen.

---

*) Berliner Ber. 1858 S. 207—220. Als eine weitere Ausführung dieser Arbeit ist diejenige von 1868 zu betrachten.

**) S. 89.

***) Journ. für Math. LXVIII S. 273—285 oder auch Berliner Ber. Oct. 1866. (Vgl. den Abschnitt über die lineare Transformation der θ-Functionen in Clebsch-Gordan's „Abel'schen Functionen“ Leipzig 1866.)

Der Begriff der beigeordneten Form wird S. 279 aufgestellt, derjenige der „Normalform“, in welche jede bilineare Form transformirt werden kann, S. 275.

Die Kronecker'sche Transformation ist von Frobenius für ϑ-Functionen mehrerer Variabeln weiter verfolgt worden, Journ. für Math. XCV S. 264 u. ff. (1883). Vgl. Weber, Annali di Mat. (2) IX S. 126 u. ff. (1880) und Wiltheiss, Math. Ann. XXVI S. 127 u. ff. (1886).

†) Journ. für Math. LXVIII S. 253—272. Der angeführte Satz steht auf S. 262.

Die absoluten Invarianten einer bilinearen Form, deren beide Variabelnreihen zu einander dualistisch sind, treten schon in einer Abhandlung von Borchardt auf: Journ. für Math. XXX S. 38, vgl. S. 270—271 (1846).

Zu Beginn der neuen Periode (1868, wie schon weiter oben erwähnt wurde) nimmt Weierstrass*) die Aequivalenz von zwei linearen „Scharen“ bilinearer resp. quadratischer Formen in allgemeinerer Fassung wieder auf**).

Durch Einführung der „Elementarteiler“***) werden die Resultate sehr durchsichtig. Man bilde die successiven Differenzen der Anzahlen, welche angeben, wie oft irgend ein Linearfactor der Determinante einer vorgelegten Formenschar $f + \lambda\varphi$ noch in sämtlichen Unterdeterminanten resp. der ersten, zweiten u. s. f. Ordnung aufgeht. Erhebt man dann jeden Linearfactor der Reihe nach auf Potenzen, deren Exponenten eben jene bezüglichen Differenzen sind, und multiplicirt sie sämtlich, so ist damit die ganze Determinante in das Product ihrer Elementarteiler zerlegt.

Das Kriterium für die gegenseitige lineare Ueberführbarkeit zweier Scharen $f + \lambda\varphi$ und $F + \lambda\Phi$ lautet nun einfach dahin, dass die beiderseitigen Determinanten in ihren Elementarteilern übereinstimmen müssen****).

Ein Elementarteiler ist offenbar eine irrationale Invariante der Schar; indessen lässt sich dem genannten Kriterium, wie das Kronecker später (1874) vorgezogen hat, eine rationale†) Formulirung dadurch erteilen, dass man die Elementarteiler ersetzt durch die grössten gemeinschaftlichen Teiler aller Unterdeterminanten je der nämlichen Ordnung.

Um nunmehr zwei vorgelegte Formenscharen bezüglich ihrer Aequivalenz mit einander zu vergleichen, reducirt Weierstrass dieselben auf geeignete canonische††) Gestalten, deren neue Variabeln allein von den Elementarteilern abhängen.

Der Begriff des „Canonischen“, dem sonst leicht†††) eine gewisse Willkür anhaftet, ordnet sich hier dem höheren Probleme der Aequivalenz unter††††), und erhält dadurch einen bestimmten Charakter.

---

*) Berliner Ber. 1868 S. 310—338. Die Elementarteiler werden auf S. 311 eingeführt.

**) Vgl. hiermit die Behandlung des Problems bei Stickelberger, Dissert. Berlin 1874 und Maurer, Dissert. Strassburg 1887, sowie bei Ed. Weyr (Jub. fond der böhm. Ges. d. W. 1889 oder Wiener Monatshefte 1890 Bd. I), der die Cayley'sche Theorie der Matrices zu Grunde legt.

***) Wegen des Vorkommens derselben bei Sylvester siehe S. 87.

****) S. 312, 314, 326.

†) Berliner Ber. 1874 S. 60.

††) l. c. S. 319.

†††) Vgl. die Bemerkungen von Kronecker darüber Berl. Ber. 1874 S. 72.

††††) Bei Formen höherer Ordnung ist freilich bisher überwiegend das umgekehrte Verfahren eingeschlagen worden, cf. Sylvester in Cambr. and Dublin Math. J. VI S. 193.

Die einzige Einschränkung, die Weierstrass macht, ist die, dass Elementarteiler überhaupt existiren, d. h. dass die Determinante der Formenschar nicht identisch verschwindet.

Wie selbst dieser extreme Ausnahmefall zugänglich gemacht werden kann, hat Kronecker unmittelbar darauf*) dargethan, indem er vermöge Teilung der Variabeln in zwei verschiedenartige Gruppen auch hier eine vermittelnde canonische Gestalt der Schar herstellt.

In derselben kurzen Note weist Kronecker darauf hin, wie für quadratische Scharen, die wenigstens eine Form von unveränderlichem Vorzeichen enthalten, das Weierstrass'sche Verfahren umgekehrt werden kann: es wird eine Methode angegeben, wie man direct zu einer geeigneten reducirten Schar gelangt, woraus sich rückwärts die Aequivalenz-Eigenschaften der Elementarteiler ablesen lassen.

Sechs Jahre später (1874) hat Kronecker**) seine algebraischen Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand zu einem Ganzen verarbeitet, welches alle existirenden quadratischen oder auch bilinearen Scharen $f+\lambda\varphi$ umfasst.

Erweist sich hierbei, wie schon bemerkt, die rationale Methode des grössten gemeinschaftlichen Teilers von principieller Bedeutung — Kronecker betont***) den Vorzug dieser arithmetischen Fixirung von Invarianten gegenüber der üblichen litteralen Bildungsweise — so lehrt doch ein tieferes Eindringen, dass die Gleichheit jener Invarianten als Kriterium für die Aequivalenz zweier vorgegebener Scharen nicht in allen Fällen hinreicht. Dies leistet erst der fundamentale Begriff der „elementaren" Scharen†), nämlich solcher, deren Determinante entweder die volle Potenz eines linearen Ausdrucks ist oder aber identisch verschwindet. Eine beliebige Formenschar ist stets, und im wesentlichen nur auf eine Art als Aggregat von elementaren Scharen darstellbar: diese letzteren (nebst ihrer Anzahl) erscheinen als die wahren Invarianten der Aequivalenz.

Zur wirklichen Durchführung der Reduction einer Schar auf ihre elementaren Teile bedurfte es der Ausdehnung der 1868 für Scharen mit wenigstens einer definiten Form gegebenen Methode auf beliebige Scharen; es wird das erst dadurch ermöglicht, dass nicht mehr successive eine Variable nach der andern (wie bei Jacobi), sondern gleich ganze Gruppen derselben entfernt (und durch canonische Variabeln ersetzt) werden.

---

*) Berliner Ber. 1868 S. 339—346.
**) Berliner Ber. 1874 S. 59—76, 149—156, 206—232.
***) l. c. S. 60.
†) l. c. S. 61.

C. Jordan*) war in einer kurz vorher erschienenen Arbeit zu andern Ergebnissen gelangt: in einer darüber entstandenen polemischen Auseinandersetzung zwischen ihm und Kronecker legte Letzterer dar, dass bei der allmählichen Ersetzung gewisser Veränderlichen durch neue, wie sie Jordan ausgeführt hatte, in extremen Fällen der merkwürdige Umstand eintreten kann, dass früher schon entfernte Veränderliche im späteren Verlauf der Rechnung von selbst wieder zum Vorschein kommen.

Als ein schönes Ergebnis der Kronecker'schen Untersuchung tritt hervor, dass die Weierstrass'sche Reductionsmethode bei geschickter Anordnung der Variabeln selbst im Falle einer verschwindenden Determinante der Schar gültig bleibt**), während die Jacobi'sche eine unmittelbare Uebertragung nur auf die symmetrischen und alternirenden (bilinearen) Formen gestattet.

Hatte Kronecker so eine ausnahmslose Theorie der unabhängigen („incongruenten") Transformationen bilinearer Formen und Formenscharen geschaffen, so wendet er sich nunmehr ausführlich zu seinem alten Probleme (von 1866) der für beide Variabelnreihen identischen („congruenten") Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst***).

Hier bereitet wiederum der damals bei Seite gelassene Fall einer verschwindenden Determinante (resp. der noch weitergehenden Ausartungen) Schwierigkeiten.

Dann aber hängt die Form in Wirklichkeit nur von einer geringeren Anzahl von Variabeln ab, und kann als Function dieser so zubereitet werden, dass ihre Determinante (nunmehr „Discriminante" †) genannt) von Null verschieden ausfällt.

Es lassen sich wiederum der Reihe nach gewisse einfachste canonische Formen, von denen vier („reducirte") Typen ††) aufgestellt werden,

---

*) C. R. Dez. 1873; auf die Entgegnung Kronecker's (Berliner Ber. 1874 S. 71—76) folgten die weiteren Mitteilungen Jordan's in Liouv. J. (2) XIX S. 35—54 und C. R. März 1874. Eine ausführliche und definitive Antwort hierauf gab Kronecker in den Berliner Ber. 1874 S. 206—232.

Insbesondere siehe S. 226. Die Behandlung der quadratischen Formen bei Jordan Liouv. J. (2) XIX S. 397—422 ist correct.

**) l. c. S. 156, 211, 212. Wegen der Jacobischen Transformation (Journ. für Math. LIII S. 265—270) siehe besonders S. 398 u. f.

***) Berliner Ber. S. 397—447.

†) l. c. S. 410.

††) l. c. S. 430. Diese Typen sind I. $\sum_k x_k y_{k+1} (k=0, 1, \ldots, 2m-1)$, II. $\sum_k (x_k y_{k+1} + c y_k x_{k+1}) (k = 0, 1, \ldots, 2m-2, c^2 \gtrless 1)$, III. $\sum_k ((-1)^m x_k y_{k+1} + (-1)^k y_k x_{k+1}) (k = 0, 1, \ldots, 2m-2)$, IV. $c' x_0 y_0 + \sum_k (x_k y_{k-1} + (-1)^k y_k x_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots, n, c' \gtrless 0)$.

aussondern; der weitere Gang der Untersuchung wird dann dem bei incongruenten Transformationen eingeschlagenen ähnlich.

Die Invariantensysteme der Transformation werden abermals auf Grund des Begriffes vom grössten gemeinschaftlichen Teiler definirt*).

Eine Reihe von Ergänzungen in diesem Sinne hat Kronecker in neuester Zeit**) (1889 und 1890) geliefert.

Standen sich so bis zuletzt der arithmetische und der formentheoretische Gesichtspunkt fast unvermittelt gegenüber, so erschien eine Durchdringung beider um so wünschenswerter.

Ein erster Schritt in dieser Richtung ist jüngst von Rosenow***) (1890) gemacht worden. Für den Fall von zwei Variabelntripeln werden einmal die Kronecker'schen Invarianten einer bilinearen Form aufgestellt — die, abgesehen von deren Determinante, jeweils nur aus gewissen ganzzahligen Charakteren bestehen — und darnach die verschiedenen Formenklassen eingeteilt. Andererseits werden die nämlichen Klassen derart charakterisirt, dass immer einige der zugehörigen gewöhnlichen Formen (Invarianten, Covarianten, Contravarianten) identisch verschwinden.

Indem wir uns zum Jahre 1874 zurückwenden, citiren wir vor allem noch eine Abhandlung von Darboux†), in der die Weierstrass-Kronecker'schen Sätze von 1868 ebenso allgemein, wie elegant abgeleitet werden. Als systematisches Hülfsmittel dient die mit mehreren Reihen von willkürlichen Grössen geränderte Determinante einer resp. zweier Formen.

Die Serie dieser Determinanten verhält sich, wenn man die ursprüngliche den Wert Null passiren lässt, ähnlich wie die Reihe der Sturm'schen Functionen beim Ueberschreiten einer Wurzel einer algebraischen Gleichung.

Die Summendarstellung selbst wird gewonnen, indem die als Quotient zweier benachbarten Ränderungsdeterminanten ausdrückbare Form (oder Formenschar), in Anlehnung an das Jacobi'sche Verfahren, in Partialbrüche zerlegt wird, jedoch mit der Massgabe, dass die durch die Ausnahmefälle zu erheischenden Modificationen wirklich im einzelnen durchgeführt werden.

---

*) l. c. S. 435—438.

**) Berliner Ber. 1889 S. 1225—1237, 1375—1388, 1890 S. 9—17, 34—44.

***) Journ. für Math. CVIII S. 1—24, Beilage zum Programm der 4. höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern 1891.

Eine Weiterführung für Formen mit n Variabeln würde die Kenntnis der bez. (algebraischen) Invariantensysteme voraussetzen. Letztere sind indessen nur sehr unvollständig bekannt, cf. Mertens, Krak. Denkschr. X, XII (1885, 1886).

†) Liouv. J. (2) XIX S. 347—396.

Unsere weiteren*) Darlegungen werden sich in der Hauptsache auf die Transformation einer quadratischen resp. bilinearen Form in sich selbst concentriren.

Während man bis dahin von den Formen als dem Gegebenen ausging, und solche Substitutionen der Variabeln suchte, welche gewisse Transformationen der Formen bewirken, vollzieht sich nunmehr eine entscheidende Wendung dadurch, dass man umgekehrt aus der Gesamtgruppe der Substitutionen diejenige Untergruppe zu erfassen sucht, welche überhaupt irgend eine quadratische (bilineare) Form in sich überzuführen im Stande ist, und die diesbezüglichen Formen erst nachträglich ermittelt. Die Formen selbst treten als etwas Secundäres in den Hintergrund und das Interesse wendet sich in erster Linie der selbständigen Gestaltung der Substitutionengruppe zu. Leider hat dies fruchtbare Princip in der übrigen Formentheorie bis heute nur erst vereinzelt**) Wurzel fassen können.

Den ersten Anstoss in diesem Sinne giebt Rosanes***) 1875, unter Beschränkung auf die quadratischen Formen von „allgemeinem" Charakter. Nach Cayley gehen zugleich mit einer quadratischen Form, deren erste Ableitungen, also ein System linearer Formen in sich über, deren „Fundamentalgleichung" die wichtige Eigenschaft besitzt, reciprok†) zu sein. Rosanes weist die Umkehrung nach, sodass zu jeder reciproken Gleichung ein solches „asymmetrisches"††) System von linearen Formen gehört, und damit auch eine zugehörige quadratische Form. Von einer derart gefundenen Lösung kann man zu den übrigen gelangen.

In vollem Umfange hat das genannte Princip für quadratische Formen Frobenius†††) 1877 verfolgt, und auf diesem Wege die charakteristi-

---

*) Vgl. zum Vorhergehenden noch die Reduction der bilinearen Form durch biorthogonale Substitutionen auf eine canonische Gestalt: Beltrami, Batt. G. XI S. 89—107 (1873), sowie neuere Arbeiten (1889) von Cosserat, Toul. Ann. III S. 1—12 und Sylvester, C. R. CVIII S. 651—653, Mess. (2) XIX S. 1—5, 42—46.

**) Vgl. indessen die Arbeit von Maurer im Journ. für Math. CVII S. 89 bis 116 (1890), der die Invariantentheorie ausgearteten Formen gewissen Transformationsgruppen zuordnet.

***) Journ. für Math. LXXX S. 52—72.

†) Vgl. für den einfachsten Fall Brioschi, Annali di Tort. V S. 201—206 (1854).

Allgemein ist die Eigenschaft der Reciprocität der Fundamentalgleichung von Kronecker 1866 bewiesen (Journ. für Math. LXVIII S. 276).

††) l. c. S. 59, 61.

†††) Journ. für Math. LXXXIV S. 1—63. Cf. C. R. LXXXV S. 131—134. Im Zusammenhange damit stehen die weiteren Arbeiten desselben Verf. im Journ. für Math. LXXXVI S. 44—71, 146—208 (1879), und Bd. LXXXVIII S. 96 bis 117 (1880).

schen Eigenschaften der Substitutionen, welche eine quadratische — oder, was im wesentlichen auf das Nämliche hinauskommt, eine symmetrische resp. alternirende bilineare — Form invariant lassen, mit Einschluss sämtlicher Ausnahmefälle aufgedeckt.

Allerdings darf dabei nicht unerwähnt bleiben, dass bereits 1873 Bachmann*) die ternären quadratischen Formen auf ihre Ausartungen hin direct untersucht und so die Hermite'schen Ergebnisse vervollständigt hatte, wogegen Hermite**) bald darauf nachweisen konnte, wie die Bachmann'schen Formeln bei correctem Grenzübergange aus den seinigen hervorgehen.

Frobenius geht von dem einfachen Grundgedanken aus, dass das Coefficientensystem einer bilinearen Form eine bestimmte Substitution einer einzelnen Variabelnreihe repräsentirt.

Dies setzt ihn in den Stand, die Transformationen bilinearer Formen überhaupt als „Zusammensetzungen" von Substitutionen aufzufassen, und auf dieser Grundlage einen fruchtbaren Algorithmus aufzubauen, dessen Operationen sich geradezu mit gewissen, durch ihre Einfachheit ausgezeichneten Arten der Multiplication von höheren complexen (oder „extensiven") Zahlen decken. Daraus fliessen die Kriterien für die Eigenart einer Substitution, die fähig sein soll, eine Form in sich zu transformiren.

Ist die verlangte Form eine allgemeine, d. i. von nicht verschwindender Determinante, so müssen***) die Elementarteiler der charakteristischen Substitutionenfunction paarweise von gleichem Grade sein und für reciproke Werte verschwinden (ausgenommen die Werte ± 1).

Bei verschwindender Formendeterminante hingegen†) muss, wenn m den höchsten Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten bezeichnet, die charakteristische Function durch eine reciproke Function $m$ten Grades teilbar sein.

Sind darnach die Aequivalenzbedingungen vollständig ermittelt, so lassen sich nunmehr auch die Cayley-Hermite'schen Formeln für die Coefficienten der fraglichen Substitutionen mittels eines scharfsinnigen Grenzverfahrens auf alle Ausnahmefälle ausdehnen††).

Die merkwürdigen Anwendungen, welche der Verfasser von seiner Methode auf die Lehre von den complexen Zahlsystemen macht, müssen,

---

*) Journ. für Math. LXXVI S. 331—341. Vgl. Tannery, Darboux Bull. XI S. 221—233 (1876).
**) Journ. für Math. LXXVIII S. 325—328 (1874).
***) l. c. S. 31.
†) l. c. S. 32, 35.
††) l. c. § 11.

als zu weit führend, hier übergangen werden; desgleichen die verwandten Untersuchungen von Lipschitz*) und Kronecker*) über den innigen Zusammenhang zwischen den Hamilton'schen Quaternionen (resp. Biquaternionen) und den entsprechenden orthogonalen Substitutionen.

Hingegen mag eine andere Anwendung**), welche Frobenius von der Transformation der bilinearen Formen auf das sogenannte „Pfaff'sche Problem" gemacht hat, hier um so lieber eine Stelle finden, als sie ein merkwürdiges Beispiel dafür liefert, wie die, wesentlich der Functionentheorie angehörige Erforschung von Invarianten unendlicher Gruppen unter günstigen Umständen auf die rein algebraische von Invarianten einer projectiven Gruppe zurückgebracht werden kann.

Beim Pfaff'schen Problem handelt es sich darum, zu erkennen, ob und wann zwei vorgelegte n-gliedrige lineare Differential-Ausdrücke dadurch in einander übergeführt werden können, dass man die Variabeln „allgemeinen Punkttransformationen" unterwirft.

Frobenius lehrt zunächst, dass unter der Annahme der Möglichkeit jener Ueberführung gleichzeitig ein gewisses System***), bestehend aus einer alternirenden bilinearen und einer linearen Form in Folge gewisser congruenter (linearer) Substitutionen in ein ähnlich gestaltetes übergeht, wobei die Coefficienten der Formen, wie die der Substitutionen, trotzdem sie von den Variabeln des Problems abhängen, die Rolle blosser Constanten spielen. Nun zeigt sich aber, dass auch das Umgekehrte gilt, dass also das alleinige Erfülltsein der algebraischen Transformationsrelationen dasjenige der für die transcendente Frage erforderlichen Integrabilitätsbedingungen von selbst nach sich zieht. Des weiteren ergiebt ein tieferes (formentheoretisches) Eingehen auf den Charakter der algebraischen Relationen, dass diese nur die Gleichheit einer ganzzahligen Invariante p für beide Formenpaare verlangen, ein Satz, den kurz zuvor Lie auf gruppentheoretischem Wege nachgewiesen hatte. Die charak-

*) Lipschitz, „Untersuchungen über die Summe von Quadraten" Bonn 1886, Journ. de Math. (4) II, 373—440 (1886), Berl. Ber. 1890.
Kronecker, Berl. Ber. 1890 S. 525—541, 602—607, 691—699, 873—884, 1063—1080.

**) Journ. für Math. LXXXII S. 230—315 (1877).
Eine analoge Anwendung der Aequivalenz zweier quadratischen Formen findet sich schon bei Christoffel (1870), Journ. für Math. LXX S. 46—70, 241—245, der auf algebraischem Wege die Aequivalenz zweier quadratischen Differentialformen gegenüber unendlichen Punktgruppen erledigt. Mittels Methoden der Variationsrechnung ist Lipschitz gleichzeitig zu denselben Ergebnissen gelangt, siehe Journ. für Math. LXX S. 71—102, 274—287, 288—295; Bd. LXXII S. 1—56, nebst Verallgemeinerungen auf höhere Formen.

***) Dieses System ist später von Morera formentheoretisch genauer untersucht worden, Atti di Torino XVIII S. 383—403 (1883).

teristische Invariante p ist, wie auch Frobenius zeigt, nichts anderes, als die Anzahl der in der „canonischen“ Gestalt des Pfaff'schen Differentialausdrucks vorkommenden unabhängigen Functionen.

An die Fragestellungen von Frobenius knüpft Stickelberger*) an, der die Stellung der orthogonalen, oder überhaupt der, eine definite (quadratische) Form invariant lassenden Substitutionen innerhalb des seit Weierstrass neu gewonnenen Gesichtskreises zu ermitteln sucht. Mittels Einführung einer geeigneten trigonometrischen Normalform für derartige Substitutionen erschliesst sich ihm das einfache Ergebnis, dass deren charakteristische Function ausschliesslich einfache Elementarteiler besitzt, und infolgedessen eine solche Substitution durch die Angabe ihrer charakteristischen Function bereits völlig bestimmt ist.

Stickelberger hat ferner eine wertvolle Ergänzung**) zu der Weierstrass'schen Reduction von Scharen bilinearer Formen geliefert, insofern er darlegt, wie die Eventualität, dass etwa der Nenner der in die Normalform eingehenden Coefficienten verschwinden — und damit die letztere illusorisch werden — könnte, stets vermieden zu werden vermag.

Eine wichtige Aufgabe war noch im Rückstande geblieben, nämlich, die Frobenius'sche Theorie der congruenten Transformationen von quadratischen Formen in sich auf beliebig geartete bilineare Formen auszudehnen.

Das hat in den letzten Jahren Voss***) geleistet, und dabei zugleich die Methoden so weit vervollkommnet, dass die erforderlichen Hülfsprocesse wirklich rational durchführbar werden.

Indem er, gestützt auf den Kronecker'schen Begriff der beigeordneten Form, das vorliegende Problem auf das einfachere zurückführt, zwei gewisse Scharen von bilinearen Formen „congruent“ in einander zu transformiren, gelingt es ihm, das System der in den Coefficienten der Urform zunächst quadratischen Transformationsrelationen durch ein lineares zu ersetzen, wobei man deutlich erkennt, weshalb gerade die beiden Klassen der symmetrischen und der alternirenden Formen bei den Früheren, insbesondere bei Frobenius, ausgezeichnet sind.

---

*) Programm des Polytechnikums Zürich, 1877, S. 1—16.

**) Journ. für Math. LXXXVI S. 20—43 (1879). Vgl. die Dissertation dess. Verf. Berlin, 1874.

***) Göttinger Nachr. Aug. 1887 S. 425—433.
Münchener Abh. XVII (1890) S. 3—121.
Die besondere Transformation einer bilinearen Form in sich, bei der die beiden Variabelnreihen conjugirten Substitutionen unterworfen werden, ist von Voss in den Münch. Ber. 1889 S. 175—211 verfolgt worden.

In den Endformeln prägt sich die augenfällige Analogie mit den Cayley-Hermite'schen Ergebnissen aus.

Um von irgend einer gefundenen Substitution zu allen übrigen von der nämlichen Eigenschaft zu gelangen, hat man sämtliche, mit der ersten „vertauschbaren" aufzusuchen, eine Aufgabe, die bereits Frobenius mit Hülfe seines Algorithmus erledigt hatte*).

Auch die Stellung der Kronecker-Christoffel'schen Normalform innerhalb der ganzen Theorie tritt jetzt scharf hervor.

Uebrigens ist zu bemerken, dass der Kern des hier von Voss eingeschlagenen Verfahrens schon in einer älteren**) Arbeit desselben Verfassers über orthogonale Substitutionen vorgebildet erscheint, die nahezu gleichzeitig mit der grossen Frobenius'schen Abhandlung 1877 erschien.

Ein weiteres Verdienst hat sich Voss dadurch erworben, dass er die gemeinsame Quelle einer Reihe von zum Teil tief liegenden Elementarteilersätzen, welche Frobenius, Siacci, Stickelberger und Stieltjes aufgestellt hatten, in einer einzigen Determinantenidentität***) erkannte.

Wir haben oben einer Polemik zwischen Kronecker und Jordan aus dem Jahre 1874 gedacht. Jordan musste damals die ihm gemachten Einwände in der Hauptsache als berechtigt anerkennen.

Inzwischen hat er den Gegenstand wieder aufgenommen, und den ersten Teil†) seiner neuen Studien 1888 in einer Arbeit über die Transformation quadratischer Formen in sich im Zusammenhange niedergelegt. Die durch die Elementarteiler der charakteristischen Function bedingte Einteilung der Formen in Klassen und Unterklassen wird auch hier auf die Substitutionen selbst übertragen. Für die letzteren wird am Ende ein Paar von einfachsten canonischen Typen gewonnen, während die zugehörigen quadratischen Formen a posteriori explicite construirt werden. Auffallend erscheint der Mangel an Bezugnahme auf die Untersuchungen anderer.

Es darf aber wohl betont werden, dass die Aequivalenztheorie der bilinearen und quadratischen Formen, wie unsere Darstellung ergeben haben dürfte, ihre heutige Ausbildung fast ausschliesslich dem Scharfsinne deutscher Forscher verdankt.

---

*) In den Münchener Ber. von 1889 S. 283—300 hat Voss den fraglichen Satz auf einem andern Wege hergeleitet, der die Bildung sämtlicher Formen auf einen übersichtlicheren Process zurückführt, welcher zugleich die Untersuchung der charakteristischen Function der mit einer gegebenen Form vertauschbaren Formen gestattet.

**) Math. Ann. XIII S. 320—374 (1878).

***) Münchener Ber. 1889, S. 329—339.

†) Journ. de Math. (4) IV, 349—368. Vgl. die vorhergehenden Mitteilungen in den C. R.

Manches freilich haben wir unberücksichtigt gelassen, das, wie das speciellere Problem der Canonisirung einer Form, an sich wohl bedeutsam genug, doch zurücktreten musste, wo es sich in erster Linie um die invarianten Eigenschaften der verwendeten Substitutionen handelte.

Dahin gehört Gundelfinger's*) Vereinfachung und Verallgemeinerung der Jacobi-Plücker'schen Methode, eine quadratische Form auf eine Summe von Quadraten zu bringen, sodann eine Reihe von Beweisen für das Sylvester-Jacobi'sche Trägheitsgesetz**), ferner die genaueren Untersuchungen über die Abhängigkeit***) der Relationen, welche erfüllt sein müssen, wenn eine quadratische Form von n Variabeln als Summe von weniger als n Quadraten darstellbar sein soll, sowie die verschiedenartigen Formulirungen dieser Relationen; weiter der Ausdruck der canonischen Coefficienten in geschlossener Determinantenform†), und Aehnliches mehr.

Dagegen sei es gestattet, am Schlusse des vorliegenden Abschnittes, die Aufmerksamkeit auf einen Punkt von grösserer Bedeutung zu lenken.

So vielfach auch in den citirten Arbeiten der Gruppencharakter der Substitutionen, die eine quadratische oder bilineare Form invariant lassen, implicite verwendet worden ist, so sind wir doch noch von einer organischen Eingliederung des transformationsgruppentheoretischen Princips in die gemeinte Theorie weit entfernt. Dazu würde es vor allem eines vollständigen Studiums der in einer solchen Gruppe enthaltenen Untergruppen, und deren Nutzbarmachung für die Formen selbst bedürfen.

Hinsichtlich des Ersteren hat in neuester Zeit Werner††) für quadratische Gebilde die Bestimmung der grössten Untergruppen durchgeführt, nachdem schon vorher Lie†††) einige Fälle behandelt hatte: es sind das solche Gruppen, welche entweder einen „Punkt" oder aber eine „ebene Mannigfaltigkeit" des (durch Nullsetzen der Form repräsentirten) Fundamentalgebildes in sich überführen. Auf anderem Wege hat Killing††††) diesen Satz bestätigt.

In der allgemeinen Lie'schen Theorie ist diejenige („dreigliedrige") Gruppe von grösster Bedeutung, welche eine quadratische Form von drei

---

*) Journ. für Math. XCI S. 221—237 (1881).

**) Siehe z. B. de Presle, S. M. F. Bull. XV S. 179—181 (1887).

***) Siehe z. B. Benoît, C. R. CI S. 869—871 (1885); Nouv. Ann. (3) V S. 30—36 (1885); de Presle, S. M. F. Bull. XIV S. 98—100 (1886); André, S. M. F. Bull. XV S. 188—192 (1887); Valyi, Hoppe Arch. (2) VI S. 445—448 (1888).

†) Siehe z. B. Studnicka, Prag. Ber. S. 256—265 (1888).

††) Math. Ann. XXXV S. 113—160 (1889).

†††) Abhandl. der Ges. d. W. zu Christiania 1885.

††††) Math. Ann. XXXVI S. 239—254 (1890).

Variabeln invariant lässt. Jenachdem eine solche in irgend einer Transformationsgruppe von $n(\geqq 3)$ Variabeln als Untergruppe enthalten ist oder nicht, zerfallen dieselben in zwei wesentlich verschiedene Klassen. Diese Einteilung deckt sich, wie Engel*) und Killing**) nachgewiesen haben, mit einer schon viel früher von Lie***) selbst getroffenen (und zur Integration von Differentialgleichungen verwendete) in „integrable" und „nicht integrable" Gruppen.

Eine Anwendung davon hat Scheffers†) zur Aufstellung der complexen Zahlensysteme gemacht, für deren Multiplicationsverknüpfung zwar das associative Gesetz, aber nicht mehr das commutative vorausgesetzt wird.

I. B, a.

Das Aequivalenzproblem der nicht-quadratischen Formen.

Sieht man von den quadratischen (und bilinearen) Formen ab, so scheint Clebsch††) zuerst (1870) die Frage aufgeworfen zu haben, ob denn die — nach Aronhold notwendige — Gleichheit der absoluten Invarianten stets auch hinreiche, um zwei vorgegebene Formen linear in einander zu transformiren und, wenn nicht, welche weiteren Bedingungen zu dem Behuf noch erfüllt sein müssen. In der That lassen sich einfache Beispiele†††) construiren, welche die Unzulänglichkeit der ersteren Annahme darthun.

Ein Mittel, um der Frage überhaupt näher zu treten, bot ihm die typische Darstellung der Formen, bei der die Coefficienten bereits selbst

---

*) Leipz. Ber. S. 95—99 (1887), cf. F. d. M. XIX S. 356 (1887).

**) Math. Ann. XXXVI S. 172 (1890).

***) Norweg. Archiv III S. 112—116 (1874).

†) Math. Ann. XXXIX S. 293—390 (1891).

††) Math. Ann. II, S. 373—382.

†††) Das einfachste Beispiel der Art ist wohl eine binäre Form 6. Grades mit einem dreifachen Elemente. [Auf eine Nichtbeachtung des bezeichneten Umstandes ist die irrtümliche Zählung zurückzuführen, welche Cayley für die Moduln einer „Klasse" ternärer Formen veranstaltet hatte. Siehe Cayley Math. Ann. III S. 268—271 (1870)]. Denn obgleich sich die Kriterien für das Auftreten einer dreifachen Wurzel durch Invariantenrelationen ausdrücken lassen, so lassen sich doch die verschiedenen dabei noch möglichen Unterfälle nicht mehr durch Invariantenkriterien von einander trennen.

Dagegen hat Bolza (Math. Ann. XXX, S. 546—552, 1887) nachgewiesen, dass für alle Binärformen 6. Grades, deren Ausartung die einer dreifachen Wurzel nicht erreicht, die Gleichheit der absoluten Invarianten in der That zur Aequivalenz hinreichend ist. Insbesondere hat er vier Fälle angegeben (l. c. S. 549), in denen die Clebsch'sche Methode versagte; freilich verzichtet er dabei auf die Rationalität der Transformationsformeln.

Ueberdies versagt das Kriterium bez. der Gleichheit der absoluten Invarianten dann, wenn alle Invarianten jeder von zwei Formen verschwinden, also die absoluten Invarianten unbestimmt werden.

Invarianten sind. Da leuchtet ohne weiteres ein, dass, falls zwei Formen auf die nämliche typische Gestalt durch lineare Substitutionen gebracht werden können, auch sicher eine Substitution existirt, welche den Uebergang von der einen Form in die andere ermöglicht. Es wird sich demnach darum handeln, eine Grenze zu ermitteln, bis zu welcher eine typische Darstellung der in Rede stehenden Art erzielt werden kann. So ergiebt sich, dass die Aequivalenz zweier binären Formen (sc. gleich hoher Ordnung) jedenfalls dann statthat, wenn (ausser gleichen absoluten Invarianten) noch jeweils ein Paar übereinstimmender und unabhängiger, linearer, beziehungsweise quadratischer Covarianten vorhanden ist, je nachdem die Ordnung der Formen eine ungerade oder gerade war*).

Indessen scheint dieser Weg nicht geeignet zu sein, um zu einem System von sowohl notwendigen, wie hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgabe zu gelangen; zudem sind unsere Kenntnisse von den typischen Gestalten höherer Formen noch sehr dürftige.

Eine directe Handhabe bietet dagegen die früher besprochene Aronhold'sche Behandlung der Aequivalenz, und so haben denn auch die weiteren Bearbeiter des Problems fast alle an Aronhold angeknüpft.

Zuvörderst galt es, die absoluten Invarianten selbst auf direct algebraische Weise, ohne Hinzuziehung der Differentialgleichungen abzuleiten. Dies gelang Gram**) (1874) in einfacher Art, indem er den Gruppencharakter der Substitutionen, welche die Formen ein und derselben Klasse nur unter einander vertauschen, in den Vordergrund rückt, ganz, wie es zuerst Gauss mit durchschlagendem Erfolge bei den ganzzahligen Substitutionen in Anwendung auf die quadratischen Formen that.

Die von Aronhold gebildeten Resultanten aus den Transformationsrelationen werden einmal für ein Formenpaar F, F', sodann für ein zweites F, F'' aufgestellt, und, werden nunmehr aus diesem Doppelsysteme von Beziehungen die Coefficienten von F eliminirt gedacht, so erschliesst man unmittelbar die Gleicheit der absoluten Invarianten für F' und F''.

Um nun die umgekehrte Frage zu beantworten, werden die einzelnen Colonnen der Substitutionscoefficienten als selbständige Variabelnsysteme angesehen, und in Bezug auf diese die gegebenen Formen Polarisations-

Hier ist der einfachste Fall der von zwei biquadratischen Formen, von denen die eine ein dreifaches, die andere ein vierfaches Element aufweist.

*) Die Beispiele aus der Theorie der Formen fünfter und sechster Ordnung stützen sich auf die Abhandlung von Clebsch und Gordan in den Annali di Mat. (2) I S. 23—79 (1867).

**) Math. Ann. VII S. 230—241. Vgl. damit die Darstellung Gundelfinger's bei „Fiedler" S. 452—458 (1877), sowie die Betrachtungen von Study, „Methoden" . . . (1889) S. 104 u. flgd.

processen unterworfen. Dann ergiebt sich der Satz, dass jede zugehörige In- und Covariante aus derartigen Polarenbildungen rational und ganz zusammensetzbar ist. Daraus fliesst als vollständiges Kriterium für die Transformirbarkeit zweier Formensysteme in einander „die Gleichheit der absoluten Invarianten und das identische Verschwinden derselben Covarianten“.

Damit war indessen die für Anwendungen bedeutsame Frage nicht berührt, in welchem Umfange sich diejenigen Formenklassen abgrenzen lassen, bei denen die blosse Uebereinstimmung der absoluten Invarianten die Aequivalenz bereits gewährleistet.

Hierauf geht Christoffel 1881*) näher ein, und wenn er sich dabei des nämlichen Gauss'schen „Aequivalenzprincips“ wie Gram bedient, so dringt er doch dadurch tiefer in die einzelnen Stadien der bezüglichen Eliminationsprocesse ein, dass er von vornherein keinerlei Voraussetzungen über die Form der Endgleichungen einführt.

Christoffel präcisirt das Problem dahin, sämtliche, mit einer gegebenen Form äquivalenten Formen aufzusuchen.

Um überhaupt gewisse Eigenschaften der für die unbekannten Coefficienten der gewünschten Formen hervorgehenden Endgleichungen aussagen zu können, eliminirt er die Substitutionscoefficienten in irgend einer Reihenfolge, jedoch mit der Massgabe, dass für jeden einzelnen derselben der Gang der Elimination zu einem „systematischen“, d. i. ein für alle Mal normirten wird. Dadurch wird es möglich, anzugeben, welche von jenen unbekannten Coefficienten in den Aequivalenzbedingungen vorkommen, und desgleichen, welche der noch übrig bleibenden Substitutionscoefficienten in den Schlussgleichungen.

Es kommt nun alles auf die Anzahl der letzteren an, von der sich nachweisen lässt, dass sie von der Reihenfolge der einzelnen Eliminationen unabhängig ist. Diese Anzahl wird im allgemeinen einen gewissen höchsten Wert, nämlich n^2 (wenn n die Zahl der Variabeln angiebt), erreichen, was nach Aronhold sicher eintritt, solange die Discriminante der vorgelegten Form von Null verschieden ausfällt.

Indem der Verfasser ausdrücklich alle Formen ausschliesst, für welche jene Maximalanzahl nicht erreicht wird, führt er den Beweis, dass die Aequivalenz zweier Formen in der That nur von der Uebereinstimmung der beiderseitigen absoluten Invarianten abhängt, womit zugleich deren Anzahl auf eine neue Art abgeleitet ist.

---

*) Math. Ann. XIX S. 280—290. Vgl. Study l. c.

Es wäre freilich wünschenswert, zu untersuchen, welches der invariantentheoretische Kern der eben genannten Christoffel'schen Forderung ist. Sicher dürfen die Substitutionscoefficienten keine willkürlichen Parameter mehr enthalten, d. h. die vorgelegten Formen nicht Scharen von Transformationen in sich zulassen, und ebensowenig dürfen alle Invarianten einer der Formen verschwinden*).

Veltmann hat zwar ebenfalls versucht, den Aronhold'schen Eliminationsprocess dahin zu modificiren, dass aus der Gleichheit der absoluten Invarianten rückwärts auf die Richtigkeit der Transformationsrelationen geschlossen werden kann; indessen sieht er sich zu dem Behuf gezwungen, nach subjectivem Ermessen von ganzen Klassen von Formen abzusehen, deren innere Bedeutung wiederum schwer ersichtlich ist.

Das Aequivalenzproblem kann wohl erst dann einer befriedigenden Lösung entgegengeführt werden, wenn eine genügende invariantentheoretische Einsicht in die verschiedenen Ausartungen der Formen gewonnen ist**).

Es würde sich folgerichtig jetzt die Aufgabe darbieten, die besonderen Transformationen zu verfolgen, welche vorgelegte Formen in gewisse, zu praktischem Gebrauche construirte canonische Gestalten überführen sollen; da indessen bei der historischen Entwickelung dieses Gegenstandes die Frage nach den dabei auftretenden Irrationalitäten weit mehr berücksichtigt worden ist, als nach den Transformationen selbst, so möge die bez. Besprechung auf eine andere Stelle (II. B) verschoben werden.

I. B, b.
Formen mit linearen Transformationen in sich.

In den Invarianten einer Form resp. einer Reihe von Formen, hatte man einfache Functionen der Coefficienten entdeckt, die sich bei gewissen Gruppen von linearen Transformationen derselben nur um einen Factor ändern, der allein von den Substitutionscoefficienten abhängt, und übrigens der Einheit gleich gemacht werden kann.

Sind auch diese Invarianten von specieller Beschaffenheit hinsichtlich ihrer Argumente — haben sie doch gewissen linearen partiellen Differentialgleichungen zu genügen — so erlaubte immerhin die Allgemeinheit der ursprünglich gegebenen Formen die Aufstellung weittragender Methoden zur Bildung der Invarianten.

---

*) Der von Christoffel S. 284 citirte Ausnahmefall $f = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$ ist gerade von der letzteren Art. Hier verschwinden die beiden (Aronhold'schen) Invarianten S und T, und damit alle überhaupt.

**) Für die Aequivalenz bei höheren Transformationen (so z. B. im binären Falle bei der Tschirnhausen-Transformation) ist bisher fast noch nichts geschehen.

Sobald man indessen den Begriff der Invariante von der Grundlage der Urformen loslöst, und nach allen solchen Formen einer bestimmten Anzahl von Argumenten fragt, die bei gewissen Substitutionen der letzteren in sich übergehen, oder auch umgekehrt, was im wesentlichen die nämliche Aufgabe ist, wenn man alle möglichen Gruppen von Substitutionen von n Variabeln und deren zugehörige (ganz-rationale) Invarianten sucht, — hat man sich nach neuen Hülfsmitteln umzusehen.

Im Folgenden beschränken wir uns in der Hauptsache auf „endliche“ Galois'sche*) Gruppen von Substitutionen, da solchen mit willkürlichen**) Parametern eine formentheoretische Behandlung fast noch gar nicht zu Teil geworden ist.

Die nächstliegenden Formen der gemeinten Art, die binären, sind von functionentheoretischen Gesichtspunkten aus gefunden worden.

H. A. Schwarz***) gelangte zu ihnen aus Anlass der Frage nach den algebraischen Integralen der hypergeometrischen Differentialgleichung, welche linear und von der zweiten Ordnung ist. Der Quotient s zweier Particularlösungen y_1, y_2 derselben genügt selbst einer Differentialgleichung 3. Ordnung†); infolgedessen wird die positive Halbebene der unabhängigen Variabeln x conform abgebildet††) auf ein Kreisbogendreieck S (welches in seinem Innern keinen Windungspunkt enthält und), welches über jede seiner drei Seiten hinaus durch „symmetrische Wiederholung“ analytisch fortgesetzt werden kann.

Die Anzahl der so entstehenden Gebiete muss, falls s eine algebraische Function von x sein soll, eine endliche sein*).

Die Aufgabe, zu der Schwarz demgemäss geführt wird, „alle sphä-

---

*) Siehe oben S. 101. Es sei nochmals betont, dass Lie dagegen unter einer „endlichen“ Gruppe eine solche Gruppe versteht, die von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt.

**) Klein und Lie haben Curven und Flächen mit Scharen von (vertauschbaren) Substitutionen in sich untersucht, C. R. Juni 1870, Math. Ann. IV S. 50—84. Die späteren bez. Leistungen von Lie, Halphen, Sylvester, Poincaré, Picard können hier nur angedeutet werden.

Bei Lie ist die Aufgabe zu der weit allgemeineren geworden, die Differentialgleichungen mit (nicht bloss projectiven) continuirlichen Gruppen von Transformationen in sich systematisch abzuhandeln.

***) Journ. für Math. LXXV S. 292—335 (vgl. Verhandl. der Schweizer Naturf. Ges. 1871).

Die vorhergehende verwandte Litteratur findet sich zusammengestellt in Abschnitt VI der Schwarz'schen Abhandlung.

†) l. c. S. 300. Der Ausdruck auf der linken Seite derselben ist später der Ausgangspunkt von Sylvester's Reciprocantentheorie geworden. Cf. II. C Anhang.

††) S. 311.

†††) S. 316—317.

rischen Dreiecke zu finden, deren symmetrische Wiederholungen auf der Kugeloberfläche nur zu einer endlichen Anzahl von, der Lage nach verschiedenen sphärischen Dreiecken Anlass geben," ist daher implicite**) äquivalent mit der hier postulirten. — Schwarz entwickelt die zugehörigen Formen***) und giebt auch die zwischen zwei rationalen Covarianten und einer Urform selbst bestehende Relation***).

Ohne ursprünglich†) von der Schwarz'schen Arbeit Kenntnis zu haben, wurde Klein direct zu der Bestimmung der endlichen binären, linearen Gruppen und ihrer Formen geführt. Die Grundlage seiner Betrachtung ist die Verknüpfung, welche zwischen der Riemann'schen Interpretation der complexen††) Variabeln z auf einer Kugeloberfläche einerseits und der geometrischen Deutung einer linearen Transformation der Variabeln andererseits hergestellt wird. Diese Transformationen werden nämlich den reellen „Bewegungen" †††) des Raumes eindeutig zugeordnet.

Die endlichen Gruppen solcher Bewegungen lassen sich aber durch

---

*) Der Gesichtspunkt der „endlichen Substitutionsgruppe" tritt indessen erst bei Klein auf, ebenso wie der Begriff und die Bildung des zugehörigen vollen Systems. Schwarz operirt weder mit homogenen Variabeln, noch überhaupt mit Covarianten.

**) Insbesondere tritt die wichtigste derselben, die „Ikosaederform" in der canonischen Gestalt $s(1-11s^5-s^{10})$ auf S. 330 auf. Ebendaselbst steht die bez. „Relation".

***) Erlanger Ber. Juli 1874. In einer folgenden Note Erl. Ber. Dez. 1874 setzt der Verf. bereits seine Beziehung zur Schwarz'schen Arbeit auseinander. Danach ergiebt sich sein ursprünglicher Ansatz, wenn man die bei Schwarz zu Grunde liegenden Kreisbogendreiecke durch Vielecke ersetzt (welche aber nicht nach dem Princip der Symmetrie, sondern nach dem Princip der analytischen Fortsetzung vervielfältigt werden sollen). Hier wird auch erwähnt, dass die im Texte bemerkte „Relation" als besonderer Fall eines, in der Formentheorie (seit Hesse) bekannten Satzes über Functionaldeterminanten aufgefasst werden kann.

Eine dritte Note Erl. Ber. Juli 1875 geht auf die Resolventen 5. und 6. Ordnung der Ikosaedergleichung ein. Wenig später (1875) erschien die zusammenhängende Darstellung in den Math. Ann. IX S. 183—208. (Die erste der weiter unten besprochenen Arbeiten von Fuchs wurde in den Gött. Nachr. vom Aug. 1875 publicirt.)

†) Das Doppelverhältnis von vier complexen Werten ist zuerst von Möbius eingeführt worden. Mit der Uebertragung auf die Kugel hat sich eingehend Wedekind beschäftigt (Dissertation Erlangen 1874, Beiträge etc. Erlangen 1875, Math. Ann. IX S. 209—217). Beltrami untersuchte 1870 invariantentheoretisch die binären Formen, besonders der 3. Ordnung mit complexen Coefficienten, Mem. di Bologna X.

Wegen der allgemeinen Auffassung des Sachverhalts vgl. Klein's Erlanger Programm von 1872.

††) Vgl. z.B. Lindemann, Math. Ann. VII S. 56ff. Bei gewöhnlicher Massbestimmung war die Bestimmung aller endlichen Bewegungsgruppen seit langem erledigt.

unmittelbare Anschauung gewinnen*). Es sind dies, auf eine canonische Form gebracht, einmal die trivialen Wiederholungen einer Rotation der Kugel um einen bestimmten Durchmesser (cyklische Gruppe), nebst denjenigen Drehungen, welche hieraus durch Vertauschung der beiden Endpunkte des Durchmessers erwachsen (Diedergruppe); von diesen beiden Klassen von Gruppen dürfen wir im folgenden absehen. Sodann aber die Gruppen derjenigen Rotationen, welche die fünf (Platonischen) regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, wobei man sich auf das Tetraeder, Oktaeder (oder Würfel) und Ikosaeder (oder Dodekaeder) beschränken kann; diese drei Gruppen umfassen bez. $n = 12, 24, 60$ Drehungen.

Es handelt sich um die Aufstellung des „vollen Formensystems“ einer solchen Gruppe, d. i. derartiger Formen, dass alle übrigen (gerade bei den Substitutionen der Gruppe unverändert bleibenden) ganz-rationale Functionen derselben werden.

Auf Grund des einfachen Princips, „dass die Covarianten durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen müssen, wie die Grundform“, ergiebt sich das Gesetz:

„Wendet man die Operationen einer der drei Gruppen auf jeden von zwei beliebigen Ausgangswerten (i. e. Punkten der Kugel) an, so resultiren jedesmal n Werte, die Wurzeln zweier Gleichungen $\pi = 0$, $\pi' = 0$ sind. Dann befinden sich unter der linearen Schar $\pi + \varkappa\pi'$ stets drei (und nur drei) volle Potenzen von Formen niedrigerer Ordnung f, H, T, welch' letztere (mit Hinzunahme einer einzigen Invariante) das volle System der Gruppe bilden.“

Zwischen den bezüglichen Potenzen von f, H, T herrscht also eine lineare Relation; dabei ist H die Hesse'sche Covariante von f, und T die Functionaldeterminante beider.

So gelangt man im Falle der „Ikosaedergruppe“ zunächst zu einer Schar von Formen 60. Ordnung; diese enthält resp. fünffach, dreifach, zweifach zählend je eine Form 12., 20., 30. Ordnung f_{12}, H_{20}, T_{30}; $f = 0$ stellt die Ecken des Ikosaeders, $H = 0$ diejenigen des Dodekaeders, endlich $T = 0$ die Halbirungspunkte der Kanten eines der beiden Körper dar.

In den beiden ersten Fällen repräsentiren analog $f_4 = 0$, $f_6 = 0$ die Ecken des Tetraeders und Oktaeders.

---

*) Vgl. oben S. 123 Note †††).

**) l. c. § 4. Hierbei ist indessen wohl zu beachten, dass ausser den durch die allgemeine Formentheorie gelieferten invarianten Bildungen noch besondere existiren, die durch die Eigenart der hier vorliegenden (endlichen) Substitutionsgruppen bedingt sind. So tritt z. B. im Falle der Ikosaederform eine specifische rationale Invariante ersten Grades auf, vgl. Ann. IX S. 198.

Die drei Formen f besitzen, wie eine leichte Rechnung zeigt, die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst, $(f, f)^4$, identisch verschwindet: aber auch umgekehrt sind sie hierdurch und durch Angabe der Ordnungen 4, 6, 12 (sc. bei nicht verschwindender Discriminante) vollständig charakterisirt.

Die innige Beziehung der „Ikosaedergleichung“ $f_{12} = 0$ zu den allgemeinen Gleichungen fünfter Ordnung kann hier nur gestreift werden. Dass die Gleichung $f_{12} = 0$ Resolventen fünfter und sechster Ordnung besitzt, ist geometrisch nahezu evident.

Die 30 Punkte $T = 0$ bilden gerade die Ecken von fünf regulären Oktaedern, deren Formen t Wurzeln einer Gleichung 5. Ordnung sind.

Andererseits zerlegen sich die 12 Ecken des Ikosaeders in 6 Paare von Gegenecken: ist φ die Form eines solchen Paares, so hängt φ^2 von einer Gleichung 6. Ordnung ab.

Die Beziehungen zwischen den beiden letztgenannten Gleichungen stellen sich nun thatsächlich als dieselben heraus, wie sie in den bekannten Untersuchungen von Kronecker, Hermite und Brioschi über die allgemeine Gleichung 5. Ordnung auftreten.

Die weitere Ausführung dieses Zusammenhanges hat dann Klein veranlasst, das Ikosaeder zum Mittelpunkt der vielverzweigten Theorie der Gleichungen 5. Ordnung zu gestalten*).

Wir haben jetzt des Zusammenhanges zu gedenken, der zwischen den endlichen Substitutionsgruppen nebst ihren Formen und den linearen Differentialgleichungen besteht.

Die allgemeinen Integrale einer vorgelegten linearen Differentialgleichung n ter Ordnung mit rationalen Functionen als Coefficienten lassen sich durch n particuläre, linear unabhängige, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, linear und homogen ausdrücken. Durchläuft die Veränderliche x geschlossene Wege um die singulären Stellen der Gleichung, so werden die y linear mit constanten**) Coefficienten substituirt; diese Substitutionen bilden die „Gruppe“ der Gleichung.

Besitzt die Gleichung lauter algebraische Integrale, so ist die Gruppe eine endliche, und umgekehrt.

---

*) „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ Leipzig 1884. Vgl. Erlanger Ber. 1876—77, Math. Ann. XII S. 503—560 (1877). Vgl. ferner noch die beiden späteren, wichtigen Arbeiten von Gordan, Math. Ann. XXVIII S. 152—166, XXIX S. 318—326 (1887).

**) Vgl. die grundlegenden Arbeiten von Fuchs im Journ. für Math. LXVI S. 121—160 (1866); LXVIII S. 354—385 (1888). Der Satz selbst geht auf Riemann zurück.

Damit ist die Grundlage der Fuchs'schen Arbeit von 1875*) gekennzeichnet, an die sich die weiteren Untersuchungen von Jordan, Klein, Brioschi angeschlossen haben.

Es gebührt aber Fuchs vor allem das weitere Verdienst, die tieferliegende Beziehung aufgedeckt zu haben, welche den zur Gruppe gehörigen Formen $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ innerhalb der Theorie der linearen Differential-Gleichungen zukommt.

Soll die bei Fuchs in reducirter Gestalt gegebene Differentialgleichung, die im besonderen von der zweiten Ordnung sei, lauter algebraische Integrale haben, so müssen gewisse Formen $f(y_1, y_2)$ existiren, die Wurzeln einer rationalen Function sind. Diese „Primformen" decken sich mit den Formen $\pi + \varkappa\pi'$ der Gleichungsgruppe (siehe oben S. 124); ihre Covarianten sind wiederum Primformen**). Die Primformen niederster Ordnung n sind mithin dadurch ausgezeichnet, dass alle ihre Covarianten von einer Ordnung $< n$ identisch verschwinden***).

Hieraus lässt sich der Schluss ziehen, dass die Ordnung n nur eine beschränkte Anzahl von Werten annehmen kann; Fuchs findet als überhaupt nur mögliche Werte $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Die angegebenen Hülfsmittel gestatten, bei jeder in concreto angeschriebenen Differentialgleichung 2. Ordnung die Schritte zu bezeichnen, deren es behufs Lösung der Frage nach algebraischen Integralen bedarf.

Die umgekehrte Frage nach der expliciten Aufstellung sämtlicher derartiger Typen von Differentialgleichungen 2. Ordnung hat Klein†) in Angriff genommen und zu einem gewissen Abschluss gebracht. Zuvörderst ist er, gestützt auf seine früheren Ergebnisse, sofort in der Lage, die fünferlei möglichen Integralgleichungen hinzuschreiben, denen der Quotient η zweier algebraischen Particularlösungen y_1, y_2 der Gleichung zu genügen hat. Von hier aus macht er den Uebergang zu den fünferlei correspondirenden Differentialgleichungen 3. Ordnung für die Grösse η. Es zeigt sich die merkwürdige Erscheinung, dass die letzteren unmittel-

*) Gött. Nachr. 1875 S. 568—581, 612—613. Journ. für Math. LXXXI S. 97—142 (1876).

In der zweiten Abhandlung Journ. für Math. LXXXV S. 1—26 (1878) unterwirft der Verf. die Gesamtheit der Primformen einem systematischen Studium.

) Siehe indessen die Anmerkung) auf S. 124.

***) Die von Fuchs angeregte Frage nach der Umkehrung dieses Satzes ist dann von Gordan (vgl. weiter unten) in bejahendem Sinne entschieden worden.

†) Erl. Ber. 1876 oder Math. Ann. XI S. 115—118, und Math. Ann. XII S. 167—180 (1877).

Die von Jordan zuvor in den C. R. LXXXII S. 605—607, C. R. LXXXIII S. 1033—1037 gewonnenen Typen waren nicht erschöpfend. Siehe die litterarischen Bemerkungen von Klein: Math. Ann. XI S. 118 unten (1876).

bar hervorgehen aus der im hypergeometrischen Falle von Schwarz herrührenden Gleichung 3. Ordnung, wenn man (nach Einsetzung geeigneter numerischer Werte für die drei daselbst auftretenden arbiträren Constanten) das Argument x vertauscht mit einer beliebigen rationalen Function von x*). — Hierbei ergiebt sich zugleich, dass die Fuchs'sche Tabelle (l. c. S. 126) der möglichen Primformen (niederster Ordnung) thatsächlich noch überflüssige**) Fälle enthält.

Die In- und Covarianten der Primformen sind in eigenartiger Weise, unter Einführung der Hermite'schen associirten Formen, von Brioschi hergeleitet worden***).

Nach rein algebraischen Principien sind die binären Formen mit linearen Substitutionen in sich zuerst von Gordan†) untersucht worden. Vor allem wird eine binäre Substitution S auf eine Normalform††) ge-

*) Umgekehrt wird für die Bestimmung von R(x) aus einer gegebenen Differentialgleichung für η ein Verfahren angegeben, welches nach einer endlichen Anzahl von Versuchen zum Ziele führt.

Brioschi hat 1877 (Math. Ann. XI S. 401—411, Rend. Ist. Lomb. (2) X S. 48 bis 58) die Function R im Falle von nur drei singulären Punkten ermittelt für alle Schwarz'schen „reducirten" Typen (Journ. für Math. LXXV S. 323) bis auf drei. Diese drei letzteren sind dann von Klein erledigt worden, Math. Ann. XII S. 175, 176 (1877), vgl. eine Berichtigung von Cayley ebenda XVII S. 65, 66 (1880). Mit der Berechnung weiterer Ikosaederfälle beschäftigt sich die Dissertation von O. Fischer, Leipzig 1885, siehe die Bemerkungen von Klein: Math. Ann. XXVI S. 463 (1886).

**) Siehe Math. Ann. XI S. 118.

***) Math. Ann. XI S. 401—411. Nach Fuchs ist eine Primform $f(y_1, y_2)$ gleich $\varphi(x)$, wo φ die Wurzel aus einer rationalen Function von x bedeutet. Die Differentiation nach x liefert daher $\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi\psi$, wo ψ wiederum rational in x ist; andererseits giebt der Euler'sche Satz für homogene Functionen $y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = nf = n\varphi$. Berechnet man hieraus $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, und setzt ihre Werte in die Hermite'schen Transformationsformeln ein, so hat man nur noch zu berücksichtigen, dass der gemeinsame Nenner $y_2 \frac{\partial y_1}{\partial x} - y_1 \frac{\partial y_2}{\partial x}$ nach einem Satze von Abel mit einer Constanten übereinstimmt.

†) Math. Ann. XII S. 23—46 (1877). Referent muss sich leider versagen, des näheren einzugehen auf diese delicaten Untersuchungen Gordan's, die sich ihrer Natur nach gegen eine Schilderung in Worten sehr viel spröder erweisen, als die verwandten geometrischen und functionentheoretischen Arbeiten.

††) l. c. S. 24. Dieselbe lässt sich in der Gestalt schreiben:

$$(y-x)\cos\varphi = i\sin\varphi\, k\{(x-\alpha)(y-\beta)+(x-\beta)(y-\alpha)\},$$

wo α, β die beiden Coincidenzelemente sind, und k ein geeignet gewählter numerischer Wert.

Uebersichtlicher würde die Gordan'sche Normalform einer Substitution lauten: $\frac{y-\alpha}{y-\beta} = e^{2i\varphi}\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ (φ darf dabei alle complexen Werte durchlaufen).

bracht, in der neben der quadratischen Form, welche die beiden Coincidenzelemente von S bestimmt, noch ein variabler Winkel φ, das Argument von S, auftritt. Dann wird einfach $n\varphi$ das Argument von S^n; soll S einer endlichen Gruppe angehören, so muss $n\varphi$ ein Multiplum von π sein.

Hat man zwei Substitutionen S, T mit den Argumenten φ, ψ, und sind Φ, Ψ die Argumente der aus jenen zusammengesetzten Substitutionen ST, $S^{-1}T$, so herrscht zwischen diesen vier Winkeln allein eine einfache Relation*), nämlich

$$\cos\Phi+\cos\Psi = \cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi).$$

Auf Grund dieser Relation und der Einteilung der Substitutionen nach der Grösse ihrer Perioden wird die ursprüngliche Aufgabe zurückgeführt auf die zahlentheoretische**), die Gleichung

$$1+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3 = 0$$

durch rationale Winkel φ_1, φ_2, φ_3 zu lösen.

Die weitere Untersuchung hängt wesentlich von einem Kronecker'schen Satze über die Irreducibilität der verallgemeinerten Kreisteilungsgleichung ab**).

Das Resultat sind natürlich die fünf Klein'schen Gruppen: sie werden hier aber in einer sehr brauchbaren canonischen Form aufgestellt.

In einer anschliessenden Arbeit***) legt Gordan die von Fuchs herrührende Eigenschaft der Primformen niederster Ordnung n, nach der alle Covarianten von einer Ordnung $<$ n identisch verschwinden, als Definition†) zu Grunde.

Einmal wird direct mit Hülfe der zugehörigen Formensysteme nachgewiesen, dass den Formen f_6, f_{12} des Oktaeders und Ikosaeders die genannte Eigenschaft zukommt. Die schwierige Umkehrung, dass jene Formen f die einzigen der Art sind, wird aus dem Verhalten derjenigen Covarianten niedrigster Ordnuug erschlossen, deren letzte Ueberschiebung mit f identisch verschwindet.

Schliesslich haben Wedekind††) und Brioschi††) auf dem Wege

---

*) l. c. S. 25.

**) l. c. S. 29.

***) Math. Ann. XII S. 147—166 (1877).

†) Die Gordan'sche Definition ist insofern eine modificirte, als sie von vornherein Formen mit mehrfachem Factor ausschliesst.

††) Wedekind, Habil.-Schrift Karlsruhe 1876, Brioschi, Annali di Mat. (2) VIII S. 24—43, 1877. Vgl. die Darstellung bei Gordan-Kerschensteiner II § 19. Die Gleichung $(ff)_4 \equiv 0$ ist natürlich das formentheoretische Aequivalent für die früher besprochene Differentialgleichung 3. Ordg.; in seinen Vorlesungen pflegt Gordan den Uebergang von der einen Darstellung zur andern auszuführen.
Wegen der Differentialgleichung 3. Ord. vgl. auch Hurwitz in den Math. Ann. XXXIII S. 345—352 (1889).

directer Coefficientenvergleichung abgeleitet, dass das von Klein bemerkte identische Verschwinden der vierten Ueberschiebung einer binären Form mit sich selbst, wenn man von Formen f_n mit $(n-1)$-fachem Factor absieht, ausschliesslich zu den Formen f_4, f_6, f_{12} des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders hinführt*).

Vom Standpunkt der Substitutionentheorie aus hat C. Jordan das Thema der endlichen Gruppen linearer Substitutionen allgemein für n Variable in Ansatz gebracht**). Sei G eine solche Gruppe, so enthält sie sicher Substitutionen s, welche die (homogenen) Variabeln nur um gewisse Einheitswurzeln als Factoren ändern. Es werden nun der Reihe nach die mit einer Substitution s vertauschbaren Untergruppen F von G durch alle Substitutionen von G transformirt. Zwischen den Ordnungen aller dieser F und derjenigen von G besteht eine diophantische Gleichung.

Die Discussion der letzteren liefert für $n = 2$ wiederum die fünf bekannten Typen. Allein schon im nächsten Falle $n = 3$ ist eine übergrosse Anzahl von Fällen im einzelnen zu erledigen. Schliesslich bleiben eilf verschiedene Typen als wirklich existirende übrig, von denen indessen nur einer als wesentlich neu zu erachten ist, da die übrigen

---

*) Hilbert hat nachgewiesen (Math. Ann. XXX S. 561—570 (1887)), dass die binären Formen mit linearen Transformationen in sich auch als besonderer Fall einer umfassenderen Formenklasse erhalten werden. Letztere ergiebt sich, wenn man nach solchen Büscheln $\varphi + \lambda\psi$ fragt, für welche die dritte Ueberschiebung von φ über ψ identisch verschwindet.

Bei Gordan-Kerschensteiner II § 13 findet sich eine elegante Erzeugung der „regulären Körper" von den quadratischen Formen aus. Es wird ein System von letzteren gesucht, derart, dass entweder alle bilinearen Ueberschiebungen zu je zweien verschwinden, oder aber einen gemeinsamen, von Null verschiedenen Wert besitzen, oder endlich einen, bis auf das Vorzeichen gemeinsamen Wert. Im ersten Falle gelangt man zu drei quadratischen Formen, deren Product das „Oktaeder" bildet, im zweiten zu vier, deren Product der „Würfel" ist, im dritten endlich zu sechs, durch deren Multiplication das „Ikosaeder" entsteht.

**) C. R. LXXXIV S. 1446—1448, Journ. f. Math. LXXXIV S. 85—215 (1877). Eine Revision und Weiterführung giebt der Verf. in seiner Preisschrift Atti di Napoli VIII (1880). „Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire."

Eine Bestätigung der Einzel-Resultate im Falle $n = 3$ auf anderem Wege war wünschenswert, da bei dem Jordan'schen Abzählungsverfahren Beobachtungsfehler unvermeidlich sind. Eine solche liegt, abgesehen von einzelnen Abweichungen, vor bei Valentiner, Kjöb. Skrift (6) V S. 64—235 (1889), der die Gruppen direct durch rein algebraische Betrachtungen (unter Hinzunahme einfacher diophantischer Gleichungen) herleitet.

Die Fuchs'sche Eigenschaft der Primformen wird bei Jordan auf Differentialgleichungen höherer als der 2. Ordnung ausgedehnt. So erhält man bei der 3. Ordnung den Satz, dass eine Primform Wurzel ist aus einer rationalen Function von x und einer zu adjungirenden Hülfsgrösse, die selbst von einer algebraischen Gleichung n ter Ordnung abhängt ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9$).

entweder trivialer Natur sind oder aber in Wirklichkeit zu Gruppen von 2 resp. 1 Variabeln gehören*).

Die gemeinte neue Gruppe ist die sogenannte Hesse'sche G_{216} (von 216 Substitutionen), mit der Eigenschaft**), die von Hesse zuerst studirte Configuration der vier Wendedreiseite einer ebenen Curve dritter Ordnung als Ganzes unverändert zu lassen.

Indessen hatte Jordan in Folge eines Rechenfehlers eine weitere, ebenfalls wesentlich neue Gruppe G_{168} (von 168 ternären Substitutionen) übersehen, die zuerst Klein von der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen her entdeckte***). Die zugehörige Galois'sche Resolvente (168. Ordnung) besitzt nämlich eine Gruppe von 168 Substitutionen, da eine Wurzel η derselben, als Function des Periodenverhältnisses ω betrachtet, gerade bei denjenigen 168 Substitutionen von ω ungeändert bleibt, welche mod. 7 zur Identität congruent sind. Die Grösse η ist mit der absoluten Invariante J des elliptischen Integrals durch eine Gleichung (168. Ordnung in η) verbunden, welche vom Geschlecht drei ist, und ebenfalls 168 eindeutige Transformationen in sich zulässt. Diese Gleichung lässt sich wiederum eindeutig beziehen auf diejenige einer „Normalcurve 4. Ordnung“: $f \equiv x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$, welche durch eine zu der oben erwähnten isomorphe Gruppe G_{168} von ternären Collineationen in sich übergeht.

Das volle System von f und damit zugleich der Gruppe besteht, ausser f, noch aus drei Covarianten 6., 14., 21. Ordnung, zwischen denen eine Syzygie besteht.

Dass die Galois'sche Resolvente eine Resolvente 7ter und 8ter Ordnung besitzt, ist geometrisch einfach zu übersehen. Einmal können die 56 Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten von f durch 7 Kegelschnitte†)

---

*) Dies schliesst nicht aus, dass derartige „übernommene“ Gruppen für die Geometrie von Wichtigkeit sind. Es sei etwa an die Gruppe von 18 Collineationen erinnert, die eine ebene Curve 3. Ordnung in sich überführen; oder an diejenige der 16 Collineationen (und 16 reciproken Umformungen), die dasselbe für die Kummer'sche Fläche leisten. Hierher gehört auch, dass, wie Hurwitz nachgewiesen hat (Gött. Nachr. 1887 S. 85—107), alle Gruppen von Transformationen, die eine ebene algebraische Curve (vom Geschlecht $p > 1$) in sich überführen, vermöge eindeutiger Transformation auf die Normalform von unären Substitutionen gebracht werden können, d. i. solchen, die nur eine Variable ändern (und zwar um eine Einheitswurzel als Factor).

**) Die Hesse'sche Gruppe ist eingehend von Maschke untersucht worden, Math. Ann. XXXIII S. 324 u. ff. (1889).

***) Math. Ann. XIV S. 428—471, siehe insbes. die Anm. auf S. 438 (1879). Die Theorie der G_{168} ist ausführlich behandelt in Klein-Fricke's Modulfunctionen, Absch. III, Cap. 6.

†) Dies ist auf zwei Weisen möglich. Die gegenseitige Beziehung

ausgeschnitten werden, welche von einer Gleichung 7. Ordnung abhängen. Sodann ordnen sich die 24 Wendetangenten von f zu 8 Dreiseiten zusammen, die ihrerseits durch eine Gleichung 8.*) Ordnung bestimmt werden.

Umgekehrt lässt sich jede Gleichung 7. Ordnung mit einer Gruppe von 168 Substitutionen auf den obigen Fall zurückbringen und damit auch durch elliptische Functionen lösen, wie Klein angegeben und Gordan ausführlich entwickelt hat**).

Die endlichen Gruppen quaternärer (und höherer) Substitutionen sind in ihrer Gesamtheit noch nicht bekannt. Indessen ist Klein neuerdings, von verschiedenen Seiten her, auf einige bedeutungsvolle Beispiele quaternärer Gruppen gestossen.

Zwei solcher Gruppen bilden den Kern der Auflösungsmethode, welche Klein für die allgemeinen Gleichungen 6. und 7. Ordnung gefunden hat***).

Man denke sich nämlich vorab die Gleichungen auf die „Hauptform" gebracht, in der die Coefficienten der zweit- und dritthöchsten Potenz der Unbekannten verschwinden, d. h. wo sowohl die Summe der Wurzeln x, als auch die Summe von deren Quadraten Null ist.

Die x lassen sich nun auffassen als die Liniencoordinaten der Geraden eines bestimmten linearen Complexes resp. der Geraden überhaupt eines gewöhnlichen Raumes.

Werden jetzt die x im Falle der 6. Ordnung allen 6! Vertauschungen, resp. im Falle der 7. Ordnung allen $\frac{1}{2}\cdot 7!$ geraden Vertauschungen unterworfen, so erfahren die Punktcoordinaten des Raumes lineare Transformationen der gleichen Anzahl, und die letzteren bilden die beiden gemeinten endlichen Gruppen. Die vorgelegten Gleichungen werden dann auf die diesen Gruppen zugehörigen „Gleichungssysteme" reducirt.

Eine dritte wichtige (quaternäre) Gruppe ist von Klein bei Gelegen-

---

zwischen den Wurzeln der zwei entsprechenden Gleichungen 7. Ordnung bildet bei Gordan den Kern der Theorie.

*) Vgl. Noether, Math. Ann. XV S. 89—110 (1879).

**) Gordan in den Math. Ann. XVII S. 217—233 (1880), 359—378 (1880), XIX S. 529—552 (1882), XX S. 487—514, S. 515—530 (1882), XXV S. 459 bis 521 (1885).

Die Riemann'sche Fläche der Normalcurve f = 0 ist von Haskell im Amer. J. XIII S. 1—52 (1890) genauer studirt worden. (Es handelt sich hier um die von Klein in Math. Ann. VII, X angegebene „neue" Art von Riemann'schen Flächen, die sich aus den reellen Punkten der imaginären Curventangenten ergiebt.)

***) Math. Ann. XXVIII S. 499—532 (1887). Vgl. Cole im Amer. J. VIII S. 265—286 (1886).

Die zweitgenannte Gruppe ist liniengeometrisch genauer von Maschke studirt worden (1890), Math. Ann. XXXVI S. 190—215. Dieselbe führt zu einer merkwürdigen Configuration von 140 Geraden im Raume.

heit liniengeometrischer*) Untersuchungen aufgestellt worden. Bezieht man die Geraden des Raumes auf sechs „Fundamentalcomplexe“ $x = 0$ (wo wiederum $\Sigma x^2 = 0$ ist), so bewirkt jede der 6! Permutationen der x und jeder der 64 Zeichenwechsel der x eine Collineation oder dualistische Umformung des Raumes: sämtliche hieraus resultirenden Vertauschungen der Verhältnisse der x erzeugen eine endliche Gruppe von 32.6! Substitutionen, eine „Erweiterung“ der soeben bei den Gleichungen 6. Ordnung betrachteten Gruppe.

Eine Untergruppe dieser Gruppe von 16.6! Collineationen stimmt überein mit derjenigen**), welche die von Borchardt für die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2 eingeführten „Moduln“ bei linearer Transformation der Perioden erfahren.

Sie besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe von 64 Substitutionen.

Maschke***) hat das volle Formensystem der Gruppe aufgestellt.

Waren die Borchardt'schen Moduln als Jacobi'sche Functionen 2. Ordnung anzusehen, so giebt es auch solche von der 3. Ordnung, die ein analoges Verhalten zeigen, wie Klein bemerkt und Witting†) weiter ausgeführt hat; sie führen zu einer neuen quaternären Gruppe von 25920 Collineationen. Maschke hat bewiesen, dass diese Gruppe selbst wieder in einer solchen von doppelt so viel Substitutionen enthalten ist, und hat auch für diese letztere (die selbst in keiner umfassenderen Gruppe enthalten sein kann) das volle System berechnet††). Es gelingt das dadurch, dass man durch Nullsetzen einer geeigneten der 4 Variabeln zur Hesse'schen G_{216} zurückgelangt.

Die in Rede stehende Gruppe ist einerseits isomorph mit der Gruppe der Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, andererseits mit derjenigen der Gleichung 27. Ordnung, von der die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängen†††).

Indem wir hiermit die endlichen Substitutionsgruppen verlassen, gehen wir, was die Gruppen mit willkürlichen Parametern anlangt, nur noch kurz auf eine Untersuchung von Maurer ein, da sie direct an die Eingangs des Abschnittes angeregte Frage anknüpft und überdies durch ihre

---

*) Math. Ann. IV S. 346—358 (1871).

**) Vgl. Reichardt, Math. Ann. XXVIII S. 84—98 (1887).

***) Math. Ann. XXX S. 496—515 (1887).

†) Math. Ann. XXIX S. 157—170 (1887), cf. Reichardt, ebenda XXVIII S. 84—98 (1887).

††) Math. Ann. XXXIII S. 317—344 (1889).

†††) Jordan, Traité des Substitutions. 1871.
Wegen des Zusammenhanges der beiden Probleme vgl. Klein 1888, Journ. de Math. (4) IV S. 169—177, und Burckhardt, Gött. Nachr. 1892, S. 1—5.

Methode bemerkenswert ist, indem sie die Lie'sche Behandlung „vollständiger Systeme“ von gewissen linearen Differentialgleichungen zu den Weierstrass'schen Elementarteilern in Beziehung setzt.

Soll vermöge einer Substitution eine Form*) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ identisch übergehen in $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, so ist damit ein System S von algebraischen Gleichungen constituirt, denen die Substitutionscoefficienten genügen müssen.

Unter den durch S definirten irreducibeln Gebilden befindet sich stets genau eines**), welches die identische Substitution enthält: die zugehörige Gruppe ist es, welche hier allein in Betracht kommt.

Nach Aronhold wird die Identität $f(x) \equiv f(y)$ in ein vollständiges System linear unabhängiger Differentialgleichungen umgesetzt.

Hieraus wird das wichtige Ergebnis gewonnen, dass eine, m unabhängige Parameter enthaltende Substitution aus ebensoviel „elementaren“, d. i. von nur einem Parameter abhängenden, zusammengesetzt werden kann. Die Untersuchung solcher elementaren Gruppen basirt auf den Eigenschaften der Elementarteiler der „Fundamentaldeterminante“

$$|c_{11} - r, \quad c_{12}, \quad c_{13}, \ldots, c_{1n}|,$$

wo die c durch die Zusammensetzung der Gruppe bestimmte Zahlen sind. Es existiren zwei***) ausgezeichnete Zahlensysteme c, für die jener Parameter rational eingeht; alle andern Fälle kommen hierauf zurück.

Man gewinnt so das Kriterium†), dass die Form f m linear unabhängigen partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_\lambda \sum_\mu c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

zu genügen hat, wo die c ausgezeichnete Systeme einer der beiden Arten sind.

Im Falle der gewöhnlichen Invarianten ist offenbar $m = n^2$, d. i. gleich der Anzahl der willkürlichen Substitutionscoefficienten††).

---

*) Das Nachfolgende bleibt gültig, wie Maurer hervorhebt, auch wenn f überhaupt eine rationale (und homogene) Function der x ist.

**) l. c. S. 107.

***) Entweder ist dann die Fundamentaldeterminante der c gleich r_n, oder sie hat nur Elementarteiler erster Ordnung und überdies nur ganzzahlige Wurzeln. Vgl. S. 121. Der Satz ist vom Verf. bereits in seiner Dissertation (Strassburg 1887) aufgestellt und bewiesen.

†) S. 138.

††) In einer weiteren Abhandlung (Journ. für Math. CVII S. 89—116 (1890)) hat Maurer seine Untersuchungen auf nicht-lineare Transformationen der Variabeln ausgedehnt.

II. Formenverwandtschaft.

A) Endlichkeitsfragen.

a) Allgemeines.

Nach Erledigung der Aequivalenzprobleme liegt es uns ob, auf die mannigfaltigen algebraischen Beziehungen zwischen den invarianten Bildungen einzugehen, welche aus einer vorgelegten Urform oder auch aus einer Reihe von solchen entspringen.

Berücksichtigen wir in erster Linie die ganz-rationalen Bildungen, so lässt sich die neuere Periode (seit 1868) in dieser Richtung geradezu dadurch charakterisiren, dass sich ein bestimmtes Problem („Endlichkeitsproblem“) in den Vordergrund gedrängt hat.

Im Sinne der neueren Algebra erhebt sich in der That als vornehmste Frage, ob der aus gewissen Stammformen durch Anwendung von invariantiven Processen ableitbare Formenkreis ein „Integritätsbereich“ *) sei, d. h. ob stets eine endliche Anzahl von Individuen desselben sich derart herausgreifen lasse, dass aus ihren Potenzen und Producten jedes weitere Individuum des Bereiches mittels rein numerischer, rationaler Zahlenfactoren linear zusammengesetzt werden kann?

Und im Bejahungsfalle, welche Mittel erforderlich sind, um jene endliche Anzahl von Individuen, die*) „Basis“ oder „das volle System der Grundformen“ des Bereiches, im einzelnen Falle in concreto herzustellen?

Diese Fragen gehen auf Cayley zurück**) (II. Memoir, 1856). Nachdem er und Sylvester schon vordem im einzelnen nachgewiesen, dass einer binären Form, bis zur vierten Ordnung incl., ein volles System von Grundformen zukommt, nimmt er hier die binären Formen allgemein in Angriff. Mit Hülfe von Betrachtungen, die sich auf den Ausdruck für das „Gewicht“ einer In- resp. Covariante stützen, macht er die Lösung der Frage von einem gewissen Systeme linearer diophantischer Gleichungen abhängig. Unter der Annahme der Unabhängigkeit derselben gelangt er zu dem Schlusse, dass die Frage nach der Endlichkeit für Formen von höherer

---

*) Vgl. Kronecker's „Festschrift“ (1882) S. 14. Das Wort „Basis“ wird im Text in modificirtem Sinne gebraucht. Die Bezeichnung „(volles) System von Grundformen“ oder kurz: „(volles) System“ stammt von Gordan, Journ. f. Math. LXIX S. 343 (1868); S. 346 ebenda heisst es „System von Fundamentalformen“.

Freilich existiren auch Integritätsbereiche ohne endliche Basis (vgl. z. B. Hilbert Gött. Nachr. 1891 S. 232, 233); solche sind aber im folgenden ausgeschlossen.

**) Collected Papers Vol. II S. 250—275.

Vgl. dazu die Bemerkungen von Cayley selbst im IX. „Memoir“ Phil. Trans. CLXI S. 17—50 (1870).

als der vierten Ordnung zu verneinen sei. Indessen hat sich späterhin jene Annahme als unzulässig erwiesen. (Vgl. unten bei II. A, d.)

P. Gordan*) wies zuerst (1868) die Endlichkeit des zu einer allgemeinen binären Form f gehörigen Formenkreises nach. Der Beweis ist (auch in den späteren, vereinfachten Fassungen) umständlich, liefert aber dafür unmittelbar praktische Methoden, um die existirenden vollen Systeme wirklich anzugeben resp. zu begrenzen. Im allgemeinen nämlich werden dieselben noch überflüssige Individuen aufweisen; indessen gelingt im Falle der fünften und sechsten Ordnung die Reduction auf ein möglichst kleines System von 23 bez. 26 Grundformen**). (Vgl. unten bei II. A, b.)

Die Kraft der Beweismethode beruht wesentlich auf der Aronhold-Clebsch'schen symbolischen Darstellung der In- und Covarianten von f, sowie auf der fundamentalen Rolle, welche unter den letzteren die von Cayley eingeführten Ueberschiebungen spielen.

Das zeigt sich sogleich an einem recurrirenden Gesetze***), welches der ganzen Entwickelung zu Grunde gelegt wird. Darnach ist jedes symbolische Product, von irgend einem Grade m in den Coefficienten von f, und damit auch jede wirkliche invariante Form dieses Grades eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen, die mittels Ueberschiebung von Formen (m — 1)ten Grades mit f gebildet sind.

Man wird demnach diese Ueberschiebungen in der Weise anordnen, dass man die zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst voranstellt, die so entstehenden Ausdrücke von neuem 0, 1, 2, ... mal mit f überschiebt, u. s. f.

Lässt man unter dieser unbegrenzten Formenreihe alle diejenigen fort, welche bereits durch früher hingeschriebene linear ausdrückbar sind, und nennt die übrig bleibenden T, so lässt sich darthun, dass überhaupt jede Form von f, und zwar nur auf eine Weise, eine ganze lineare Function solcher Bildungen T ist†). Dadurch kommt die Aufgabe darauf zurück, für die T ein volles System zu ermitteln††).

Man nehme an, dass ein solches volles System bereits für eine

---

*) Journ. für Math. LXIX S. 323—354 (1868). Nach mündlicher Mitteilung ist Gordan zur Lösung der vorliegenden Frage von C. Jordan veranlasst worden. Vgl. die Darstellung, welche Cayley von dem Gordan'schen Beweisverfahren gegeben hat. IX. Mem. Trans. of London 1870, siehe insbes. S. 45—50.

**) l. c. S. 343 bez. 346.

***) l. c. S. 327. Darin liegt überhaupt ein wesentlicher Fortschritt gegenüber der complicirteren englischen Symbolik.

†) l. c. S. 328.

††) l. c. S. 333.

Originalform f' von der Ordnung n — 1 gefunden sei, so ist leicht zu sehen, dass jeder Form von f' eine ganz bestimmte Form von f correspondirt, und man kann sich von neuem auf die nunmehr noch restirenden Formen von f beschränken.

Von diesen wird nachgewiesen, dass sie erhalten werden, wenn man die zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst genügend oft mit jenen aus f' herübergenommenen Formen überschiebt*); je nach der Höhe jener zweiten Ueberschiebungen werden sie in verschiedene Klassen eingeteilt, und dann für jede einzelne der Klassen mittels scharfsinniger Ueberlegungen combinatorischen Charakters die Existenz eines vollen Systems abgeleitet.

Gordan hat bald darauf den Satz auf ein System**) binärer Stammformen, auf die „Combinanten" eines solchen Systems von Formen gleicher Ordnung, wie auch auf die niedrigsten ternären***), ausgedehnt und hat seitdem an der Vereinfachung des Beweisverfahrens unablässig weiter gearbeitet.

Die simultane Einführung mehrerer Urformen bringt sogar eine principielle Erleichterung mit sich. Es lässt sich nämlich mit verhältnismässig einfachen Mitteln der weittragende Satz beweisen, dass, sobald jedes von zwei Formensystemen eine endliche Basis besitzt, das Entsprechende auch von dem „combinirten"†) Systeme gilt, welches entsteht, wenn man irgend welche Producte von Individuen des einen Systems über irgend welche Producte von denen des andern überschiebt. Dies findet seine unverzügliche Anwendung auf die beiden oben erwähnten Systeme (der von f' übernommenen Formen und der zweiten Ueberschiebungen von f mit sich selbst).

Das Gordan'sche „Programm"††) von 1875 bietet mannigfache Fortschritte. Die ausschliessliche Benützung des Ueberschiebungsprocesses hatte die erschwerende Einführung einer grossen Reihe neuer Symbole zur Folge. Dieser Missstand wird wesentlich eingeschränkt durch den

---

*) l. c. S. 339.

**) Math. Ann. II S. 227—280 (1870), V S. 595—601 (1872). Wegen der Combinanten s. Math. Ann. V S. 95—122 (1872).

***) Für eine kubische ternäre Form Math. Ann. I S. 90—128 (1869), für zwei quadratische in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 291 (1875). Vgl. die nähere Ausführung Math. Ann. XIX S. 529—551 (1882).

†) Math. Ann. V S. 595.
Das Princip „der combinirten Systeme" hat später Mertens auf einzelne Klassen von ternären und quaternären Formen ausgedehnt: Wien. Ber. XCV (1887) u. flgd. Bände. Vgl. Gordan's bez. Bemerkung „Programm" S. 50.

††) Leipzig, bei Teubner. Vgl. das durchsichtige Referat von Noether, Fortschritte der Math. VII S. 50—52.

nunmehr zu Grunde gelegten Process der „Faltung“, eine symbolische Verallgemeinerung der Ueberschiebung, der zugleich einen organischeren Aufbau des Formensystems ermöglicht*).

Der Ausgestaltung der Symbolik steht das unsymbolische Verfahren der „Reihenentwickelung“**) ergänzend zur Seite. Eine Form in zwei nicht homogenen Variabeln x, y lässt eine endliche Entwickelung nach Potenzen von x—y derart zu, dass die Coefficienten Polaren von Formen werden, welche nur noch die Variable x enthalten.

Nun ist bei zweimaliger Anwendung des Verfahrens auf eine Form mit drei Variabeln x, y, z ein Wechsel in der Reihenfolge statthaft: durch Gleichsetzung der Endergebnisse resultiren fruchtbare Relationen zwischen symbolischen Producten, die durch rein symbolische Umformungen nur schwer zu erlangen gewesen wären. Das gesuchte „volle System“ zerlegt sich in eine Reihe bedeutend einfacherer, die weiterhin noch unter einander zu combiniren sind.

Von den durch Combinirung erwachsenden Formen können alle diejenigen bei Seite gelassen werden, die nicht ein gewisses System diophantischer Gleichungen erfüllen. Sämtliche Lösungen der letzteren (in positiven ganzen Zahlen) können aber aus einer endlichen Anzahl solcher mittels beliebiger positiver, ganzzahliger Factoren linear componirt werden. (Vgl. den graphischen Beweis von Petersen in II. C, a.)

Die Ausführung für binäre Stammformen von höherer als der sechsten Ordnung wird so weit zubereitet, dass von Gall***) später behufs expliciter Aufstellung der, einer Form siebenter und achter Ordnung zugehörigen Grundformen direct an die Gordan'schen Systeme anknüpfen konnte.

Die meisten der angewandten Hülfsmittel, vor allem die Reihenentwickelungen, bleiben bei geeigneter Modification auch für ternäre und höhere Formen gültig†).

Wenn trotzdem ein analoger Endlichkeitsnachweis für beliebige höhere Formen auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst, so liegt das daran, dass die symbolischen Ausdrücke in ihrer Gesamtheit nicht mehr übersehen werden können; zudem treten, von den quaternären Formen incl. an, symbolische Determinantenfactoren ein, die mehrere „Symbolstämme“ in sich vereinigen und daher in schwer zu übersehender Art von einander abhängen.

---

*) Hierzu dienen insbesondere noch die durch den Faltungsprocess involvirten Hülfsbegriffe „Stufe, Rang und Dimension“, S. 3—6.

**) l. c. S. 7.

***) Math. Ann. XVII (1880), XXXI (1888). Cf. II. A, b.

†) l. c. § 19.

Der Beweis, wie ihn Gordan's „Vorlesungen" *) für eine binäre Form f geben, gestaltet sich insofern übersichtlicher, als dem Begriff eines vollen Systems derjenige eines „relativ vollständigen" übergeordnet wird, d. i. eines solchen, aus dem bei beliebiger „Faltung" (Ueberschiebung)**) immer nur derartige Formen hervorgehen, die, bis auf Glieder, welche mit einer gewissen Potenz eines „Klammerfactors" multiplicirt erscheinen, von den Systemformen ganz-rational abhängen.

Damit werden unter anderem die früheren complicirten Reihenentwickelungen überflüssig. Daneben wird in praxi ein ausgiebiger Gebrauch von den sogenannten „Reducenten" **) gemacht, d. i. von solchen Factoren symbolischer Producte, welche die Zurückführbarkeit der letzteren auf Bildungen niedrigeren Charakters unmittelbar erkennen lassen.

Der Schwerpunkt des Beweises selbst liegt in folgendem.

Eine Co- oder Invariante von $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ lässt sich als symbolisches Product stets so schreiben, dass die höchste Potenz eines Klammerfactors, etwa (ab), eine gerade ist. Daraufhin kann man alle aus f abgeleiteten Formen in $g+1$ Klassen $A_0, A_1, \ldots, A_g$ einteilen, wo $g = \frac{n}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und wo jede Klasse alle früheren umfasst. Die erste Klasse A_0 enthält f allein, die zweite A_1 alle***) Formen, welche keinen Klammerfactor in einer höhern als der zweiten Potenz aufweisen; für die dritte A_2 ist diese maximale Potenz die vierte u. s. f. bis zur letzten A_g, welche offenbar mit der Gesamtheit aller Formen von f übereinstimmt. Es kommt darauf an, successive zu zeigen, dass jede dieser Klassen für sich eine endliche ist, d. i. ein volles System besitzt.

Dies wird durch Construction von g endlichen, den $A_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ parallel laufenden Hülfssystemen $B_0, B_1, \ldots, B_{g-1}$ geleistet, mit der Eigen-

---

*) Leipzig, bei Teubner. Herausgegeben von Kerschensteiner. I. Determinanten 1885. II. Binäre Formen 1887.

Der Beweis findet sich in II § 20, 21. Die Reducenten werden schon im „Programm" von 1875 (§ 8) mit Vorteil eingeführt.

**) Die Faltung ist im wesentlichen als eine auf symbolische Producte übertragene Ueberschiebung anzusehen.

***) Die Klasse A_1 setzt sich für alle Ordnungen (excl. $n = 4$) zusammen aus den Bildungen: f, $(f, f)^2$, $\{f, (f, f)^2\}$. Ist die Bedingung $(f, f)^4 = 0$ identisch erfüllt, so stellt A_1, bis auf eine noch hinzutretende Invariante, bereits das volle System von f dar. Dies ist für die Theorie der regulären Körper von Wichtigkeit, cf. I. B, b.

schaft, dass stets ein System A_{k+1} dadurch*) hervorgeht, dass man das vorangehende System A_k mit dem zugeordneten B_k überschiebt. Mit Rücksicht auf die Endlichkeit von $A_0 = f$ würde sich so in der That der Reihe nach die Endlichkeit von A_1, A_2, ... und schliesslich von A_g selbst ergeben.

Diese Hülfssysteme B_i gewinnt man mittels der g Covarianten φ_i zweiten Grades von f, wo $\varphi_i = (f, f)^{2i+2}$. Solange die Ordnung einer solchen Form φ_i noch nicht unter die Zahl n heruntergesunken ist, bilde man die Individuen des Systems B_i aus φ_i symbolisch genau so, wie die Individuen des Systems A_i aus f selbst. Sobald aber die Ordnung von φ_i kleiner als n ausfällt (also jener Process nicht mehr durchführbar wäre), besteht das System B_i einfach aus dem (als endlich voraussetzbaren) vollen System von φ_i.

Die Systeme einer Form fünfter und sechster Ordnung gestatten jetzt einen eleganten Aufbau**).

Da bei all diesen Beweisen für die Stammformen die symbolische Schreibweise zu Grunde gelegt wird, so müssen jene auch als „allgemeine" ihrer Art vorausgesetzt werden, deren Coefficienten also als unabhängige Variabeln anzusehen sind. Das Entsprechende gilt von den auszuübenden Substitutionen.

Die gewonnenen Ergebnisse erlauben eine unmittelbare Uebertragung auf binäre Formen, welche mehrere Reihen von (homogenen) Veränderlichen enthalten, vorausgesetzt, dass die letzteren den nämlichen Substitutionen unterliegen. Denn auf Grund des Princips der Reihenentwickelung hat man nur ein solches volles System zu ermitteln, welches zu einer vermehrten Anzahl von Stammformen gehört, die aber sämtlich nur noch eine einzige (und zwar ein und dieselbe) Variabelnreihe aufweisen.

---

*) Beim Beweise dieses Hülfssatzes äussert der Begriff der „relativ vollständigen" Systeme seine Kraft. Denn A_k ist seiner Definition nach relativ vollständig mod. $(ab)^{2k+2}$, während B_k es ist mod. $(ab)^{2k+4}$. Durch Ueberschiebung beider Systeme resultirt aber — und hier sind die eigentlichen Schwierigkeiten verborgen — ein mod. $(ab)^{2k+4}$ relativ vollständiges Covariantensystem von f (das als niedrigsten Modul $(ab)^{2k+4}$ wirklich besitzt), d. i. das System A_{k+1}.

**) Für beide Formen ist gleichmässig $A_0 = f$, $B_0 = (f, f)^2$; $A_1 = f$, $(f, f)^2$, $\{f, (f, f)^2\}$. Bei der f_5 ist $\varphi_1 = (f, f)^4$ eine quadratische Form, mithin besteht B_1 aus φ_1 und deren Discriminante. Die Ueberschiebungen von A_1 über B_1 liefern das volle System (cf. l. c. S. 237).

Die Form φ_1 einer f_6 ist eine biquadratische, mithin besteht B_1 aus dem vollen System von φ_1. Die Ueberschiebungen von A_1 mit B_1 führen zu A_2, und da $\varphi_2 = (f, f)^6$ eine Invariante ist, so sehen wir in A_2 nebst φ_2 das volle System von f_6, cf. l. c. S. 275, Indessen kann man, wie Peano 1881*) gezeigt hat, ohne zu wesentlich neuen Hülfsmitteln zu greifen, den Endlichkeitsnachweis auch in dem allgemeineren Falle führen, dass die auf die verschiedenen Variabelnreihen $x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ auszuübenden Substitutionen ganz oder teilweise von einander unabhängig sind.

Die vorgegebenen Stammformen $f, g, \ldots$ mögen, nach den x_1, x_2 entwickelt, die Coefficienten $f_i, g_k, \ldots$ besitzen. Unter der Annahme, dass die letzteren Formen (in denen eine Variabelnreihe weniger auftritt) eine Basis zulassen, soll das Nämliche für die ursprünglichen $f, g, \ldots$ abgeleitet werden. Sei jetzt F eine invariante Form der $f, g, \ldots$ die, ebenfalls nach Potenzen der x_1, x_2 geordnet, die Coefficienten F_i habe, so ist unschwer zu erkennen, dass die F_i dem Systeme der $f_i, g_k, \ldots$ angehören.

Nunmehr wende man auf jede der Urformen $f, g, \ldots$ den Polarenprocess $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$ genügend oft an, so entsteht ein System von Bildungen $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots; g, \Delta g, \Delta^2 g, \ldots; \ldots$, welches dasjenige der $f_i, g_k, \ldots$ völlig zu vertreten im Stande ist, in der Art, dass jede Grundform P des letzteren Systems für eine bestimmte Grundform P' des ersteren zum Modell dient. Bei der üblichen Entwickelung von P' nach Potenzen von $x_1 y_2 - x_2 y_1$ erscheinen als Coefficienten Polaren von Formen $\varphi, \psi, \chi, \ldots$; die Vergleichung der P mit den P' lehrt dann, dass auch der Gesamtheit der $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ eine Basis zukommt.

Da sich endlich in binärem Sinne, d. i. bezüglich der x_1, x_2, F als eine invariante Form der $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ darstellen lässt, so ist damit auch das System der F als ein endliches erwiesen.

Der Satz findet eine wichtige Anwendung auf die sogenannten „Correspondenzen"**).

In neuester Zeit ist Gordan zu dem nämlichen Resultate auf directem Wege gelangt, mittels Einführung des wichtigen Begriffs eines „erweiterten" Formensystems***). Um dasselbe für den einfachsten Fall einer

---

*) Atti di Torino XVII S. 73—80.

**) Vgl. dazu noch die besondere Arbeit Peano's Batt. G. XX S. 79 bis 101 (1882). Die Correspondenzen sind durch doppelt-binäre Formen dargestellt, deren Variable von einander unabhängigen Substitutionen unterworfen werden.

***) Erlanger Ber. 1887, Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1888). Für quadratische Formen war zuvor der Satz nebst zugehörigem System von Study aufgestellt worden, der dadurch Gordan zur Untersuchung der allgemeinen Frage angeregt hatte (vgl. Study, Erl. Ber. 1887 S. 385—388).

einzelnen (binären) Form f aufzustellen, denke man sich das volle System einer beliebigen Anzahl von Formen $f_1, f_2, \ldots$, die sämtlich von gleicher Ordnung mit f sind, bereits gebildet, und zwar in Gestalt von (genügend oft wiederholten) Ueberschiebungen der f_i übereinander. Hieraus geht durch blosse Weglassung der Indices i, k, ... das erweiterte System von f hervor. Vermöge seiner Herleitung kann das letztere unmittelbar dazu dienen, sowohl die simultanen Systeme einer Reihe von binären Stammformen mit einer einzigen Variabelnreihe abzuleiten, wie auch diejenigen für mehrere Variabelnreihen, die unabhängigen Substitutionen unterliegen. So ergiebt sich für eine in zwei incogredienten Variabelnreihen x_1, x_2; y_1, y_2 quadratische Form ein volles System von 38 Bildungen, die explicite berechnet werden.

Hieran möge die Erwähnung eines in anderer Richtung liegenden Fortschritts geknüpft werden, den man ebenfalls Peano*) verdankt (1882).

Nach Clebsch**) besitzen die In- und Covarianten einer Reihe von linearen, wie auch quadratischen binären Formen die Eigenschaft, in eine Anzahl von „Typen" zerlegt werden zu können, sodass die Individuen ein und desselben Typus aus einander durch ausschliessliche Benützung des Aronhold'schen Processes, d. i. durch Polarisation nach den Coefficienten erwachsen; dabei bleibt die Anzahl dieser Typen eine endliche, wie gross auch die Anzahl der vorgelegten Formen werden möge.

Peano erbringt die Verallgemeinerung auf Reihen von Formen beliebigen (aber gleichen) Grades. Der Beweis stützt sich vornehmlich darauf, dass man einem Satze von Capelli***) zufolge irgend eine ganze, homogene Function F der $n+1$ Reihen von je $n+1$ als variabel gedachten Coefficienten, die zu $n+1$ Formen $n$ten Grades gehören, nach Potenzen von deren Determinante entwickeln kann, wobei die hinzutretenden Factoren Polaren von aus F abgeleiteten Formen sind, welche ein Coefficientensystem weniger enthalten.

Im Falle der kubischen Formen wird die Rechnung durchgeführt; es entstehen zehn Typen, und es wird zugleich angegeben, wie sich die Formen des vollen Systems auf dieselben verteilen.

Wir sind jetzt bei einem Wendepunkte der Entwickelung angelangt. Während die bisher erörterten Endlichkeitsbeweise stets zugleich die wirkliche Bildung der bezüglichen vollen Systeme in's Auge fassten, lässt man nunmehr den letzteren, mehr praktischen Gesichtspunkt zurücktreten, und

*) Atti di Torino XVII S. 580—586.
**) Siehe z. B. bei Clebsch: Binäre Formen, § 58.
**) Batt. G. XX S. 293—301 (1882).

das Interesse concentrirt sich auf die reine*) Theorie der Endlichkeit. Damit steht im Zusammenhange, dass die neu heranzuziehenden Methoden einen ausgesprochen unsymbolischen Charakter an sich tragen, wodurch das begriffliche Moment schärfer ausgeprägt wird.

Der erste Anstoss in dieser Richtung erfolgt durch den Beweis, welchen Mertens**) für die Endlichkeit eines binären Formensystems mit einer Variabelnreihe liefert.

Da eine Reihe von Linearformen stets ein volles System von abgeleiteten Formen besitzt, so kann der erforderliche Nachweis für eine beliebige Reihe von Originalformen (g, f′, f″, ...) unter der Annahme geführt werden, dass der in Rede stehende Satz bereits für die Reihe (f, f′, f″, ...) gültig sei, wo die Ordnung der Form f um eine Einheit geringer ist, als diejenige von g.

Zunächst lässt sich aus der getroffenen Annahme die Folgerung ziehen, dass auch der, mittels einer Linearform p erweiterten Reihe (p, f, f′, f″, ...) ein volles System eignet.

In dem letzteren ist als ein volles „Untersystem" der Kreis aller der Bildungen enthalten, welche in den Coefficienten von p und f jeweils zu gleichem Grade ansteigen. Denn diese Bildungen werden durch die Gesamtheit der positiven Lösungen einer gewissen diophantischen Gleichung bestimmt, welche sich indessen aus einer endlichen Anzahl von ihnen mittels (ganzzahliger) positiver Coefficienten linear aufbauen lassen.

Denkt man sich nun die Form f in ihre Linearfactoren q, r, s, ... gespalten, und vertauscht man die Linearform p succ. mit q, r, s, ..., so ergiebt sich durch symmetrische Combinirung der so entstehenden vollen Systeme ein neues volles System, das zu den Urformen:

---

*) Indessen haben die neuesten Untersuchungen Hilbert's (s. unten) das Ziel, aus seinen allgemeinen Sätzen heraus rationale und übersehbare Processe zur wirklichen Aufstellung voller Systeme zu liefern: wieweit eine solche noch auf rechnerische Schwierigkeiten stösst, lässt sich zur Zeit nicht beurteilen.

**) Journ. für Math. C. 223—230 (1886). In den Wien. Ber. XCVIII S. 1—6 (1889) hat der Verf. seinen Beweis insofern vereinfacht, dass er des Schlusses von n auf n+1 nicht mehr bedarf.

Hierbei ist noch zweier Endlichkeitsbeweise zu gedenken, welche von Jordan und Sylvester herrühren, und direct eine obere Grenze für Grad und Ordnung der Systembildungen einer binären Form ermitteln: der erstere geht dabei von den Gordan'schen diophantischen Gleichungen aus, der letztere von einer Modification des Cayley'schen Verfahrens.

Cf. Jordan C. R. LXXXII (1876), LXXXVII (1878), Liouville J. (3) II S. 177—233 (1876), V S. 345—379 (1879).

Sylvester Proc. of London XXVII S. 11—13 (1878), C. R. LXXXVI S. 1437 bis 1441, 1491—1492, 1519—1522 (1878). Wegen der weitergehenden Bestrebungen Sylvester's vgl. II. A, c.

$$(p,\ q,\ r,\ s,\ \ldots;\ f',\ f'',\ \ldots)$$

gehört und zugleich in den Coefficienten der $p, q, r, s, \ldots$ symmetrisch ausfällt. Hier hat man nur noch in bekannter Weise die Coefficienten des Productes g der $p, q, r, s, \ldots$ einzuführen, um das gewünschte volle System der Reihe $(g, f', f'', \ldots)$ vor sich zu haben.

Der hiermit skizzirte Beweis ist von Hilbert*), unter Anlehnung an die Grundgedanken desselben, durch einen noch durchsichtigeren ersetzt worden.

Sei etwa eine einzelne Stammform $f = f(x, y)$ $n$ter Ordnung vorgelegt, und wiederum in Linearfactoren $\alpha_i x + \beta_i y$ zerfällt.

Jede Invariante J (im engeren Sinne des Wortes) von f ist ein symmetrisches Aggregat von Wurzeldifferenzen der Gleichung $f = 0$, also, auf homogene Form gebracht, ein Product von Bildungen

$$\omega = (1,2)^{e_{12}}(1,3)^{e_{13}}(2,3)^{e_{23}} \ldots\ldots (n-1,n)^{e_{n-1,n}} = \prod_{k,l}(k,l)^{e_{kl}},$$

wo unter (k, l) die Differenz $\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k$, unter $e_{kl} = e_{lk}$ ganze positive Exponenten zu verstehen sind, und wo jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gleich oft vorzukommen hat.

Die letzterwähnte Bedingung setzt sich in ein System linearer diophantischer Gleichungen um, nämlich

$$e_{12} + e_{13} + \cdots + e_{1,n} = e_{21} + e_{23} + \cdots + e_{2,n} = \cdots$$
$$\cdots = e_{n,1} + e_{n,2} + \cdots + e_{n-1,n}.$$

Alle positiven Lösungen dieses Systems setzen sich wiederum aus einer endlichen Anzahl m von solchen mittels positiver, ganzzahliger Coefficienten p linear zusammen, wie folgt:

$$e_{kl} = p_1 e_{kl}^{(1)} + p_2 e_{kl}^{(2)} + \cdots + p_m e_{kl}^{(m)}.$$

Bezeichnet nun ω_r die (irrationale) Invariante $\omega_r = \prod_{k,l}(k,l)^{e_{kl}^{(r)}}$, so genügt ω_r einer rationalen Gleichung vom Grade $n!$, und es stellt sich, zufolge eines bekannten Satzes aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, irgend eine Potenz von ω_r, z. B. die $p_r$te, als lineare, homogene Form der 0ten, 1ten, ... $(n!-1)$ten Potenzen von ω_r dar, deren Coeffi-

---

*) Math. Ann. XXIII (1884) S. 223—226. Hierauf bezieht sich eine Note von Cayley Math. Ann. XXXIV (1889) S. 319—320, in der eine Abänderung des Hilbert'schen Verfahrens vorgeschlagen wird. Ein hierbei gemachter Fehlschluss ist von Petersen Math. Ann. XXXV (1890) S. 110—112 berichtigt worden.
Hilbert verwahrt sich in einem Referate über die letzteren beiden Noten, Fortschr. der Math. XXI S. 104 nachdrücklich dagegen, dass sein Beweis einer Erweiterung oder Ergänzung bedürfe, um auch für Covarianten von binären Formen gültig zu sein.

cienten G ganz-rationale Functionen der bezüglichen Potenzsummen $\omega_r + \cdots$, $\omega_r^2 + \cdots$, $\cdots$, $\omega_r^{n!} + \cdots$ sind.

Vermöge des Ausdrucks für die e_{kl} durch die m ausgewählten $e_{kl}^{(r)}$ nimmt aber die Invariante J die Gestalt der symmetrischen Summe an:

$$J = \Sigma \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \ldots \omega_m^{p_m}.$$

Setzt man hier die angegebenen Werte der Potenzen $\omega_r^{p_r}$ ein, so erkennt man unmittelbar, wie J als ganze Function einer endlichen Anzahl analog gebauter Invarianten erscheint, nämlich solcher, für die keiner der Exponenten von ω_r die feste Zahl n! überschreiten kann.

Die Erweiterung auf die Invarianten einer Reihe von Stammformen f, φ, ... geschieht vermöge naheliegender Modificationen: im besondern kommt daher auch den In- und Covarianten einer Formenreihe ein volles System zu.

In einer grundlegenden Arbeit aus dem Jahre 1890 hat Hilbert*) allgemein, und unter ausschliesslicher Benützung rationaler**) Processe die Endlichkeit des aus einer vorgelegten Reihe von ganz beliebigen (ev. auch irgendwie ausgearteten) Formen mit n Variabeln entspringenden Invariantensystems nachgewiesen.

Es gelingt ihm das wesentlich dadurch, dass er den Kern der Frage von dem engeren Gebiet der Invariantentheorie loslöst***) und als eine fundamentale Eigenschaft von unendlichen Systemen algebraischer Formen überhaupt statuirt.

Man denke sich vorab irgend ein Gesetz**) gegeben, nach welchem eine nie abbrechende Reihe von Formen F_1, F_2, ... der n Variabeln x_1, x_2, ... x_n fortschreitet. Die Ordnungen der F, sowie deren Coefficienten sollen keinerlei Beschränkung unterliegen: die letzteren mögen irgend einem Rationalitätsbereiche R angehören.

---

*) Math. Ann. XXXVI S. 473—534. Vgl. die voraufgehenden Mitteilungen in den Gött. Nachr. 1888 No. 16 S. 450—457; 1889 No. 2 S. 25—34, und No. 15 S. 423—430. Demnächst erscheint in den Math. Ann. eine Arbeit von Story über die Hilbert'sche Theorie.

**) Die Zugrundelegung eines derartigen „willkürlichen" Gesetzes für eine unendliche Reihe tritt auch sonst in den Fundamenten der Mathematik auf, man vergleiche etwa die zur Begründung der Irrationalzahlen von G. Cantor eingeführten „Fundamentalreihen".

Wenn man will, repräsentirt Hilbert's Formenreihe auch eine Art Irrationalität, die indessen im Wesen der Fragestellung begründet ist.

Allerdings giebt es eine Richtung in der Wissenschaft, die derartige unendliche Processe überhaupt verwirft.

***) In der That erscheint als ein wesentlicher Vorzug der neuen Hilbert'schen Methoden, dass sie die Formentheorie aufs Innigste verknüpfen mit der von Kronecker einerseits, von Dedekind und Weber andererseits begründeten Theorie der Modulsysteme und algebraischen Körper.

„Dann lässt sich aus der Reihe der F stets eine endliche Anzahl m derselben $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$ derart herausgreifen, dass jede Form F_s der Reihe eine lineare Combination von jenen ist, dass also

$$F_s = A_{s,1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \cdots + A_{s_m} F_{i_m},$$

wo die A ebenfalls Formen der x sind, deren Coefficienten dem nämlichen Rationalitätsbereiche R angehören."

Selbstredend sind die A so zu wählen, dass die Summe der hingeschriebenen Producte wiederum eine in den x homogene Form wird.

Man entnehme nämlich der vorgelegten Reihe nach Belieben ein Individuum, das mit F bezeichnet sei, von der Dimension r in den x. Dabei ist die Annahme gestattet (was sich nötigenfalls mittels einer geeigneten Substitution der x stets erreichen lässt), dass der Coefficient von x_n^r in F nicht verschwindet.

Dann lässt sich zuvörderst in bekannter Weise der Grad in x_n einer jeden Form F_s der Reihe unter r herabdrücken; man hat nur die mit einer passenden Hülfsform B_s multiplicirte Form F von F_s abzuziehen. Dadurch stellt sich F_s in der Gestalt dar:

$$F_s = B_s F + g_{s_1} x_n^{r-1} + g_{s_2} x_n^{r-2} + \cdots + g_{s_r},$$

wo die rechterhand stehenden Factoren-Formen g nur noch von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ abhängen, im übrigen aber in diesen bis zu beliebig hoher Dimension ansteigen können.

Indem man nun den in Rede stehenden Satz für Formen von $n-1$ Variabeln bereits als erwiesen annimmt und auf die Coefficientencolonne der g_{s_1} in Anwendung bringt*), so muss es möglich sein, aus den obigen Darstellungen der F_s eine endliche Anzahl μ (etwa für die Werte $s = 1, 2, \ldots, \mu$) so herauszugreifen, dass nach beiderseitiger Multiplication

*) Es ist leicht einzusehen, dass man den geschilderten Process auch in der umgekehrten Richtung vornehmen kann, also von den, von x_n freien Coefficienten übergeht zu den mit der ersten Potenz von x_n multiplicirten u. s. f. Hierbei kann man aber die Annahme fallen lassen, dass die höchste auftretende Potenz die $(r-1)$te ist, darf vielmehr von dieser Normalform völlig abstrahiren und den Exponenten von x_n bis zu beliebiger Höhe anwachsen lassen. Allerdings resultirt so zuvörderst eine nicht abbrechende Reihe von Formen, durch die alle andern Glieder der vorgelegten Reihe linear ausdrückbar sind. Macht man indessen nochmals von der Annahme Gebrauch, dass der in Rede stehende Satz bereits für Formen von $n-1$ Variabeln gültig sei, so lässt sich jene endlose Reihe durch eine endliche ersetzen.

Trotzdem diese Abänderung des ursprünglichen Verfahrens complicirter ist, gewährt sie den grossen Vorteil, dass jetzt, anstatt rationaler, nur ganze und ganzzahlige Verbindungen der gegebenen Coefficienten eingeführt werden, womit eine unmittelbare Verwertung für zahlentheoretische Zwecke möglich wird. Das ist der Kern des im II. Abschnitt der Hilbert'schen Arbeit dargelegten Beweises.

mit geeigneten Hülfsformen der $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, Addition und schliesslicher Subtraction von der Darstellung für jede weitere Form F_s, die letztere linear componirt erscheint aus $F, F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ und einer weiteren Form, die sich aber bezüglich der Variabeln x_n höchstens noch bis zum Grade $r-2$ erhebt.

Auf die Colonne der hierbei mit der höchsten Potenz von x_n multiplicirten Coefficienten unserer neuen Darstellungen für $F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \ldots$ wende man abermals das nämliche Verfahren an u. s. f., so ist einleuchtend, wie man nach höchstens*) r Schritten der besagten Art zu einer endlichen Anzahl m der Formen F gelangt, welche die verlangte Basis der ursprünglichen Reihe repräsentiren.

Es erübrigt jetzt nur noch die directe Erledigung des einfachsten Falles $n = 1$. Aber hier sind die Glieder der fraglichen Reihe, bis auf constante Factoren, positive, ganzzahlige Potenzen der einen Variabeln x_1, und da ist es klar, dass alle Glieder der Reihe durch ein solches mit kleinstem Exponenten teilbar sein müssen.

Der vorgeführte Beweis unseres Hülfssatzes**) lässt zugleich erkennen, dass die Coefficienten der multiplicativen Formen A dem gleichen Rationalitätsbereiche R zugehören, wie diejenigen der F selbst.

Um nunmehr zur Anwendung auf die Theorie der Invarianten zu schreiten, sei der Einfachheit halber nur eine einzelne ternäre Originalform f zu Grunde gelegt. Das System der ganz-rationalen Invarianten $i_1, i_2, \ldots$ von f lässt sich leicht in einer Reihe***) anordnen, für welche dann der obige Satz gilt.

---

*) Bei etwaiger Ausführung der Methode in einem concreten Fall ist zu beachten, dass die Art des Gesetzes, nach dem die Formen der einzelnen Coefficientencolonnen fortschreiten, im allgemeinen eine (sowohl von einander, als) von der Art des ursprünglichen Gesetzes der Reihe durchaus verschiedene sein wird.

**) Kronecker entwickelt in seiner Festschrift S. 18 einen ähnlichen Satz für eine, nicht homogene Variable. Würde man indessen seine Formel homogen machen, so würde die ganze Function rechterhand einen Nenner erhalten, nämlich eine Potenz der homogen machenden Variabeln. Es liegt demnach bei Kronecker kein Integritäts-, sondern ein Rationalitäts-Bereich vor.

***) Die Anordnung der Invarianten in eine Reihe lässt sich nach Hilbert auch umgehen. Man greife aus dem Systeme der Invarianten von f zwei Individuen i_1, i_2 heraus, von denen keine durch die andere teilbar ist. Sodann wähle man ein drittes i_3, das nicht als lineare Combination $A_1 i_1 + A_2 i_2$ darstellbar ist, sodann ein viertes, das sich nicht linear aus i_1, i_2, i_3 zusammensetzt u. s. f. Die Reihe der so entstehenden i muss nach dem ersten Hülfssatze abbrechen (l. c. S. 522).

Dies Verfahren [welches unmittelbar auf ganz beliebige Formensysteme übertragen werden kann (cf. S. 478)] ist wesentlich an die Voraussetzung geknüpft, dass die Coefficienten der Formen des Systems einem bestimmten Rationalitätsbereich angehören.

Bedeuten also $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gewisse ganz-rationale Hülfsfunctionen der Coefficienten von f, so ist irgend eine Invariante i von f aus m solchen linear ableitbar, sodass man hat:

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m .$$

Der zweite Schritt ist die Ersetzung der A durch Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$, die selbst wieder ganze Functionen der $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sind.

Sind $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ von den resp. Graden $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$ in den Coefficienten, so darf A_s als eine homogene Form derselben vom Grade $r - r_s$ vorausgesetzt werden.

Auf die Form f werde eine beliebige Substitution T der Variabeln mit den Coefficienten a_{ikl} und der Determinante a ausgeübt.

Versteht man unter den f_a die transformirten Coefficienten der Stammform f, unter $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ die Gewichte von $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$, so verwandelt sich vermöge der Grundeigenschaft der Invarianten die Gleichung für i in die folgende:

$$a^p i = a^{p_1} A_1(f_a) i_1 + a^{p_2} A_2(f_a) i_2 + \cdots + a^{p_m} A_m(f_a) i_m .$$

Wir ziehen nunmehr einen weiteren, von Gordan und Mertens*) (und hier in allgemeinerer Fassung von neuem) bewiesenen Hülfssatz heran. Man verstehe nnter $A(f_a)$ eine beliebige, homogene, isobare Form der f_a vom Gewichte g, unter q eine positive ganze Zahl (incl. 0) und unter Ω_a den Cayley'schen Differentiationsprocess:

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{23}\,\partial a_{32}} \pm \cdots - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{22}\,\partial a_{31}} .$$

„Unterwirft man das Product $a^q A(f_a)$ dem Processe Ω_a so oft, etwa p-mal, bis die Substitutionscoefficienten ganz herausgehen, so erhält man eine Invariante J von f vom Gewichte $g = p - q$“.

Die p-malige Ausübung des Processes Ω_a auf die beiden Seiten der für $a^p i$ aufgestellten Identität ergiebt, dass sich linkerhand i nur um einen positiven, ganzzahligen und nicht verschwindenden Factor reproducirt, während rechts sämtliche Factoren der $i_1, i_2, \ldots, i_m$ in Invarianten von

*) Der Satz kommt für $q = 0$ implicite bei dem (zweiten) Beweise vor, der in Gordan's „Vorlesungen“ II § 9 für den Hauptsatz der Symbolik gegeben wird, dass jede Covariante einer binären Form durch ein symbolisches Product darstellbar ist. Es ist merkwürdig, dass der Kern dieses Beweises ein unsymbolischer ist.

Mertens hat den nämlichen Satz in den Wien. Ber. XCV S. 942—991 (1887) bewiesen, und seitdem in einer Reihe von Arbeiten in den Wien. Ber. systematisch dazu verwendet, um volle Systeme auf unsymbolischem Wege zu erhalten, cf. II. A, b.

Für lineare Urformen findet sich der Satz in der im Texte angegebenen Gestalt bereits bei Clebsch, Journ. für Math. LIX S. 7 u. ff.

f übergehen. Nach Division mit jenem Factor resultirt demnach eine Darstellung von der Form:

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo die Grade und Gewichte der J geringer sind, als die der ursprünglichen Invariante i. Man hat jetzt nur noch das nämliche Verfahren auf die J zu übertragen u. s. f., so wird nach einer endlichen Anzahl von Operationen das gewünschte Ziel erreicht sein.

Die vorliegenden Ueberlegungen übertragen sich fast ohne weiteres auf den Fall von n Variabeln, sowie auf ein System von Stammformen, damit aber auch auf Covarianten, Contravarianten, Combinanten u. s. w.

Ferner subsumirt sich unter das Hauptgesetz auch der allgemeinere Fall von mehreren Reihen von einer gleichen oder auch verschiedenen Anzahl von Variabeln, die beliebigen, identischen oder verschiedenen Substitutionen unterliegen.

Selbst wenn die vorzunehmenden Substitutionen nur einen Teil (Untergruppe) der Gruppe aller Substitutionen bilden, bleibt die Methode des Beweises so lange in Kraft, als sich irgend zwei Substitutionen desselben Typus derart zu einer dritten zusammensetzen, dass die neuen Parameter bilineare Formen der alten sind, und falls ausserdem ein dem Processe Ω ähnlicher Differentiationsprocess existirt.

Die Einwirkung des zu Grunde gelegten Hülfssatzes über den Integritätsbereich einer unendlichen Formenreihe auf die Lehre von den invarianten Verbindungen erstreckt sich aber noch weiter.

Zunächst hat man nur eine der n Variabeln gleich der Einheit zu nehmen, um die Beschränkung der Homogenität aufzuheben.

Nun herrschen zwischen den Invarianten einer oder mehrerer Stammformen Relationen in unbegrenzter Anzahl, welche in den ursprünglichen Coefficienten identisch erfüllt sind. Die linken Seiten (Syzyganten) dieser „Syzygien" *) lassen sich als nicht homogene Formen ansehen, deren Variable nichts anderes sind, als das volle System von m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Mithin besitzt auch das unendliche System der Syzyganten eine endliche Basis.

Die Syzyganten ihrerseits sind gleichfalls durch eine unendliche Menge von, in den $i_1, i_2, \ldots, i_m$ identisch erfüllten Relationen verknüpft. Den linken Seiten dieser „Syzygien zweiter Art" kommt wiederum eine endliche Basis zu, und so fort.

Durch ein, nicht müheloses Verfahren, welches den grundlegenden

*) Cf. II. A, d.

Hülfssatz immer von neuem heranzieht, gelingt dem Verfasser die Feststellung der bedeutungsvollen Thatsache, dass jener Process der fortgesetzten Syzygienbildungen nach einer endlichen Anzahl, und zwar höchstens von m Schritten abbrechen muss*).

Erst mit der Bildung sämtlicher Basen — nicht nur der ursprünglichen Invarianten, sondern auch der Syzyganten successiver Ordnung — wird eine volle**) Einsicht in die Structur der, dem vorgelegten algebraischen Gebilde entstammenden ganz-rationalen Invarianten gewonnen werden (l. c. S. 534).

In neuester Zeit***) hat Hilbert noch weitere Consequenzen aus seinen allgemeinen Endlichkeitssätzen entwickelt, die vor allem der principiellen Frage näher treten, welche Hülfsaufgaben behufs thatsächlicher Aufstellung der bezüglichen vollen Systeme zu erledigen sind.

Eine wesentliche Handhabe dazu bietet das Theorem, dass man aus der Mannigfaltigkeit der Invarianten eines algebraischen Gebildes stets eine endliche Anzahl σ algebraisch unabhängiger $J_1, J_2, \ldots, J_\sigma$ derart aussondern kann, dass alle übrigen „ganze algebraische" Functionen derselben werden, und somit verschwinden, sobald es die J thun.

Umgekehrt sind aber die J durch die zuletzt angegebene Eigenschaft (und durch ihre algebraische Unabhängigkeit) völlig charakterisirt.

Angenommen, man habe ein derartiges System von σ Invarianten J ermittelt, so folgt rückwärts daraus, nach Sätzen von Kronecker†), nicht nur von neuem die Endlichkeit des gesamten Invariantenbereiches, sondern es ist auch ein bestimmter, arithmetischer Weg vorgezeichnet, um dessen Basis zu finden: dieselbe setzt sich zusammen aus den J nebst denjenigen i, welche die „Basis" des durch die J festgelegten algebraischen „Körpers" ausmachen.

In erster Linie wird es sich dabei um den „Grad" g des gemeinten Körpers handeln.

Für eine binäre Stammform f, nter Ordnung, hat Hilbert††) die Ant-

---

*) l. c. S. 492. Vgl. dazu eine Note von Schönflies. Gött. Nachr. 1891 S. 339—344.

**) Vom formentheoretischen Gesichtspunkt aus dürfte gegen den angeführten Ausspruch Hilbert's nichts einzuwenden sein. Sieht man indessen den gruppentheoretischen Gesichtspunkt als gleichberechtigt an, so erscheint als eine gleichfalls fundamentale Aufgabe der Zukunft, die Gesamtheit aller vollen „Untersysteme" von invarianten Bildungen einer Reihe von Stammformen zu ermitteln, d. i. solcher, wohl definirten Teilmannigfaltigkeiten des ganzen Invariantensystems, die für sich den Charakter eines vollen Systems besitzen. Cf. II. A, b.

***) Gött. Nachr. 1891 S. 232—242; 1892 S. 2—12.

†) Festschrift § 6.

††) Vortrag, gehalten 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle, vgl. den amtl. Bericht S. 61—62.

wort gegeben. Hier ist die Zahl σ gleich $n - 2$; die gesuchte Anzahl g ist eine einfache zahlentheoretische Function, welche, abgesehen von n, ausschliesslich von den Graden der $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ (in den Coefficienten von f) abhängt.

Von den gemachten Anwendungen, die unter anderem die Herstellung von Formen mit gewissen vorgegebenen Invarianten betreffen*), sehen wir hier ab.

Im Falle einer binären Grundform f kann man durch blosse Resultantenbildung ein System von Invarianten aufstellen, durch welche sich alle anderen Invarianten ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Sei etwa die Ordnung n von f ungerade, so bilde man die Covarianten zweiten Grades $F_1, F_2, \ldots, F_{\frac{1}{2}(n-1)}$, und construire aus geeigneten Potenzen der f, F mittels willkürlicher Parameter u, v zwei homogene lineare Combinationen U, V. Das identische Verschwinden der Resultante von U, V ist mit μ Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \ldots, J_\mu = 0$ aequivalent. Die J sind dann ein System von Invarianten der verlangten Art. Entsprechendes gilt für eine gerade Ordnung n.

Von diesen J gelangt man durch Anwendung des Aronhold'schen Processes zu einem analogen System von Simultaninvarianten. Auch für Formen mit mehr Variabeln kann man durch eine endliche Anzahl rationaler, von vorn herein angebbarer Processe ein derartiges System von Invarianten gewinnen, deren Verschwinden das aller übrigen nach sich zieht. Man hat zu dem Behuf nur ein Kriterium nötig, das entscheiden lässt, ob eine vorgelegte Form mit numerischen Coefficienten noch eine von Null verschiedene Invariante besitzt; das Letztere ist in der That dann und nur dann der Fall, wenn die Substitutionsdeterminante eine **ganze** algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Form ist.

Dadurch bieten sich denn auch die Mittel zur Aufstellung voller Invariantensysteme und (nur von n abhängiger) oberer Grenzen**) für Anzahl und Gewicht derselben.

II. A, b.

Specielles über volle Systeme.

Es mögen nunmehr die bislang zu gegebenen Urformen in extenso berechneten vollen Systeme kurz aufgeführt werden. Es liegt in der

*) Siehe II. B, b.

**) Hilbert führt diesbezüglich zur Illustration den vorbereitenden Satz an: „Sämtliche Invarianten einer ternären Grundform lassen sich als ganze algebraische Functionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt. (Gött. Nachr. 1892 S. 12.) Nach mündlicher Mitteilung hat Gordan allgemeine Ausdrücke für obere Grenzen gefunden.

Natur der angewendeten, im wesentlichen von Clebsch und Gordan begründeten Bildungsmethoden, dass die Anzahlen der bezüglichen Formen zunächst den Charakter oberer Grenzen haben: in der That hat des öfteren eine nachträgliche Revision*) ergeben, dass einzelne der vordem gefundenen System-Individuen überflüssig, d. i. reducibel waren.

Erst der Vergleich mit der englischen Arbeitsrichtung**) wird dazu führen, welchen jener Anzahlen eine absolute Genauigkeit zukommt.

Wir beginnen mit einer einzelnen binären Urform f_n. Nach frühzeitiger Erledigung der einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4$ durch Cayley und Sylvester war erst Gordan 1868 im Stande, die Formen f_5 und f_6 zu bewältigen***). Der Beweis für die Vollständigkeit der resultirenden vollen Systeme von 23 resp. 26 „Grundformen" konnte von Gordan derart geführt werden, dass seine Ausdehnung auf die Endlichkeit des Systems einer beliebigen f_n keine wesentlich neuen Hülfsmittel erforderte.

Auf Grund der vereinfachten Darstellung des Gordan'schen „Programms" hat v. Gall das volle System einer f_8 †), später das (grössere Schwierigkeiten darbietende) System einer f_7 ††) in concreto aufgebaut;

---

*) Die instructivsten Beispiele dieser Art werden geliefert durch die simultanen Systeme der (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) und das System einer f_8.

Für den Fall (f_3, φ_3) behauptete zuerst Sylvester, C. R. LXXXIX S. 828 bis 833 (1877), Am. J. II S. 324—329 (1879), auf Grund seiner abzählenden Methode (cf. II. A, e), dass zwei lineare Covarianten der Salmon-Clebsch'schen Liste reducibel sein müssten. Unter dieser Voraussetzung gab d'Ovidio (1880), Atti di Tor. XV S. 267—270 ihre Zusammensetzung an: bestätigt wurde dies Ergebnis von Gerbaldi (ebenda) mittels einer, von jener Voraussetzung unabhängigen Methode.

Wiederum konnte Sylvester, C. R. LXXXVII S. 445—448, 477—481 (1878) das Gordan-Gundelfinger'sche System (f_3, φ_4) um drei Formen reduciren.

Die Reduction des Gordan-Bertini'schen Systems (f_4, φ_4) um zwei Formen kündigte Sylvester an, C. R. LXXXIV S. 1285—1289 (1877), Am. J. II S. 324 bis 329 (1879). Die wirkliche Ausführung gab d'Ovidio, Atti di Tor. XV S. 301 bis 304 (1880). Eine anderweite Bestätigung liegt bei Stroh vor, Math. Ann. XXII S. 290—296 (1883).

Was endlich den Fall der f_8 betrifft, so konnte v. Gall, Math. Ann. XVI S. 456 (1880) nachweisen, dass die Anzahl seiner Individuen mit der Sylvester'schen Angabe (C. R. LXXXIV S. 240—244, 532—534 (1877)) übereinstimme bis auf eine einzige Form, deren Reduction ihm nicht gelang. Durch ausgedehnte Rechnungen legte aber Sylvester die Reducirbarkeit dieser Form dar, C. R. XCIII S. 192—196, 365—369, Am. J. IV S. 62—85 (1881).

Indessen war erst Stroh l. c. im Stande, die Frage direct zur Entscheidung zu bringen; die bez. Methode, die auf den Relationen zwischen Ueberschiebungen gewisser Ordnung beruht (cf. II. A, d), hat er später allgemein begründet, Math. Ann. XXXI S. 444—454 (1888).

**) Vgl. II. A, e.

***) Journ. f. Math. LXIX S. 323—354.

†) Math. Ann. XVII S. 31—52, 139—152, 456 (1880).

††) Math. Ann. XXXI S. 318—336 (1888).

Vgl. Krey, Dissert. Striegau 1874.

er macht dabei geschickten Gebrauch von gewissen Syzygien, um überflüssige Formen auszuscheiden.

Was die simultanen Systeme von zwei binären f_n angeht, so verdankt man die Behandlung der Fälle (2, 2), (2, 3), (3, 3) Salmon und und Clebsch; das System (3, 4) findet sich bei Gundelfinger*), (2, 5) bei Winter**), (2, 6) bei v. Gall***).

Ein systematisches Studium hat diesen Systemen Gordan****) in einer Arbeit gewidmet, die am Schlusse eine Tabelle aller der Fälle aufweist, bei denen keine der beiden Urformen die vierte Ordnung überschreitet.

Eine andere Ableitung des Systems (4, 4), in den Resultaten mit Gordan übereinstimmend, rührt von Bertini†) her.

Hinsichtlich der simultanen Systeme von mehr als zwei binären Formen ist man über Clebsch††), der eine beliebige Reihe von linearen bezw. quadratischen Formen erledigt hat, nicht wesentlich hinausgegangen; das System von vier Formen, von denen zwei linear und zwei quadratisch sind, ist von Perrin†††) näher untersucht worden.

Um zu den ternären Formen C_n überzugehen, so ist der erste Fall einer einzelnen solchen Form, der wirkliche Schwierigkeiten bereitete, nämlich $n = 3$, von Gordan††††) zum Abschluss gebracht worden. Den bereits früher von Aronhold, Cayley, Hermite, Brioschi gegebenen Bildungen waren verhältnismässig wenige hinzuzufügen; um aber die

---

*) Programm, Stuttgart 1869 S. 1—43.
Nach einer auf S. 2 daselbst gemachten Bemerkung stammt das bez. System von Gordan her.

**) Programm, Darmstadt 1880.

***) Programm, Lemgo 1873.

****) Math. Ann. II S. 227—281 (1870).

†) Batt. Giorn. XIV S. 1—14 (1876). Wiederabgedruckt in Math. Ann. XI S. 30—41 (1877).

††) Siehe die zusammenhängende Darstellung von Clebsch: Theorie der binären Formen, Leipzig 1872, sowie die Vereinfachungen bei Gordan: Vorlesungen II. Leipzig 1887.

†††) S. M. F. Bull. XV S. 45—61 (1887).

††††) Math. Ann. I S. 90—128 (1869). Wegen der Theorie siehe noch Math. Ann. I, 359—400, sowie XVII S. 217—233 (1880). Vgl. die erschöpfende Zusammenstellung bei Clebsch und Gordan, Math. Ann. VI S. 436—512 (1873). Einen einfacheren Aufbau des Systems verdankt man Gundelfinger Math. Ann. IV S. 144—168 (1871), vgl. noch V S. 442—447 (1872).
Cayley gab die expliciten Bildungen in den Coefficienten für die Hesse'sche Normalform der C_3: $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$: Am. J. IV S. 1—16 (1881). Hier findet sich auch eine vollständige Uebersicht über die ältere Litteratur.
Endlich rührt von Dingeldey, Math. Ann. XXXI S. 157—176 (1888), eine analoge Uebersicht her über das System der (in der Theorie der elliptischen Functionen verwendeten) canonischen Form $xy^2 - 4z^3 + g_2x^2y + g_3x^3$, sowie der speciellen Form $axz^2 - 4by^3$. Letztere repräsentirt durch ihr Verschwinden eine C_3 mit Rückkehrpunkt.

Vollständigkeit des gewonnenen Systems (von im ganzen 34 Formen) sicher zu stellen, bedurfte es erst einer eigenartigen Ausdehnung der symbolischen Methoden vom binären auf's ternäre Gebiet.

Erst ziemlich später hat Mertens*) das gleiche Ergebnis für die C_3 auf unsymbolischem Wege, mit alleiniger Benützung des Ω-Processes erhalten.

Im Falle $n = 4$ wird der Reichtum der auftretenden Bildungen bereits so gross, dass Gordan es vorzog, sich auf einen besonderen — anlässlich der Gleichungen 7. Ordnung mit 168 Substitutionen in sich, von Interesse gewordenen — Typus**) zu beschränken, welcher durch das identische Bestehen einer einfachen Covariantenidentität charakterisirt werden kann.

Von den zu einer allgemeinen C_4 gehörigen Bildungen hat Maisano***) diejenigen, welche bis zum 5. Grade incl. ansteigen, zusammengestellt.

Das System zweier C_2 ist wiederum von Gordan†) zuerst angegeben, und später††), im Zusammenhange mit der eben berührten, speciellen C_4 entwickelt worden. Den algebraischen und geometrischen Zusammenhang der Formen des Systems unter einander hat neuerdings Perrin†††) eingehend verfolgt.

Die Kenntnis eines vollen Systemes dreier C_2 verdankt man Ciamberlini††††).

Im quaternären Gebiet sind ausser den Variabeln x einer Form $F_n(x)$ und deren contragredienten u, noch die aus zwei Reihen cogredienter Variabeln x, y zu bildenden zweireihigen Determinanten zu berück-

*) Wien. Ber. XCVII S. 437—518 (1888). Wegen der angewandten Methode vgl. die vorhergehende Arbeit dess. Verf.: Wien. Ber. XCV S. 942—991 (1887).

**) Math. Ann. XVII S. 217—233. Die 54 Formen des vollen Systems sind in einer Schlusstabelle vereinigt.

Gordan's Angabe über die Endlichkeit des Systems einer allgemeinen C_4 befindet sich bereits in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 174 Note (1875).

***) Batt. G. XIX S. 198—237 (1881).

Auch die Formen 6. Grades befinden sich daselbst, mit Ausschluss der die x und die u gleichzeitig enthaltenden. Vgl. noch den Nachtrag dess. Verf., Pal. Rend. I S. 54—56 (1886).

†) Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 288 u. flgde (1875). Die Tabelle der 20 Systemformen findet man auf S. 291.

††) Math. Ann. XIX S. 529—552 (1880).

†††) S. M. F. Bull. XVIII S. 1—80 (1890).

Bezüglich der Relationen zwischen den Formen des Systems vgl. noch Rosanes, Math. Ann. VI S. 264 u. flgde (1875), sowie Gerbaldi, Annali (2) XVII S. 161—196 (1889). Letztere geht auch ausführlich auf die damit verbundenen Realitätsfragen ein.

††††) Batt. G. XXIV S. 141—157 (1886).

Das System umfasst 127 Bildungen.

sichtigen. Mittels geeigneter Modification des Ω-Processes gelang es Mertens*) in letzter Zeit, für eine F_2 ein volles System von 20 Formen herzustellen, und überdies einen Weg anzugeben, wie man vermöge leicht übersehbarer Differentiationsoperationen aus den Einzelsystemen zweier F_2 ein simultanes System der letzteren aufbauen kann.

Mit ähnlichen Mitteln hat Mertens auch „Nullsysteme“**) behandelt, d. h. alternirende bilineare Formen von zwei cogredienten quaternären Variabelnreihen x, y, denen man noch beliebig viele in den x resp. u lineare Formen adjungiren mag. Für fünf (und weniger) Nullsysteme lässt sich das Ergebnis übersichtlich gruppiren.

Was endlich Formen mit mehreren incongruenten Variabelnreihen anlangt, so ist bereits früher des von Study und Gordan ermittelten vollen Systems für eine binäre, quadrato-quadratische Urform***) Erwähnung geschehen.

Im ternären Gebiete ist nur der Fall einer, in zwei contragredienten Reihen x, u linearen Form†) von Clebsch und Gordan im einzelnen erledigt worden. Die analoge, quaternäre Aufgabe wurde neuerdings von Mertens††) soweit gefördert, dass es nur noch gewisser Combinirungen seiner verschiedenen Formengruppen bedarf, um das volle System zu besitzen.

Zum Schlusse sind noch gewisse volle Untersysteme (d. h. die selbst nur einen Bestandteil allgemeiner voller Systeme ausmachen) anzuführen. Sieht man dabei von solchen ab, deren Existenz auf der Hand liegt†††), so können wir uns auf zwei Erscheinungen derart beschränken.

Die erste gehört der Gattung der binären Combinanten an, die schon

---

*) Wien. Ber. XCVIII S. 691—739 (1889).

**) Wien. Ber. XCVII S. 519—537 (1888).

***) Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1889). Das System besteht aus 38 Formen. Vgl. die vorhergehenden Noten von Study und Gordan in den Erlanger Ber. 1889. Die Methode ist auf höhere Formen ausdehnbar. Das volle System der Invarianten hatte schon früher Capelli aufgestellt: Batt. G. XVII S. 69—148 (1879).

Von binären Formen mit cogredienten Variabelnreihen hat le Paige die trilinearen und quadrilinearen untersucht, C. R. XCII S. 1048—49, 1103—5, XCIII S. 264—265, 509—512 (1881); C. R. XCIV S. 69—71, Torino Atti XVII S. 299—326 (1882), wesentlich zu geometrischen Zwecken und ohne daher eine Vollständigkeit anzustreben.

†) Math. Ann. I S. 359—400 (1869). Abgerechnet die identische Zwischenform u_x, enthält das volle System 7 Formen. Siehe insbes. S. 373. Die Methode ist auf höhere Formen ausdehnbar.

††) Wien. Ber. XCVIII S. 13—32 (1890).

†††) Dahin gehören z. B. solche Untersysteme, deren Formen nur einen Teil aller Variabeln des bez. Gebietes enthalten, ferner die Gordan'schen Systemklassen $A_1, A_2, \ldots$ (Vorlesungen II § 21) u. a. (Vgl. die Anmerkung**) auf S. 149 oben.)

1872 von Gordan*) als das volle System einer einzelnen Form mit mehreren (cogredienten) Variabelnreihen erkannt wurden. Der einfachste Fall, der hier einer besonderen Untersuchung bedarf, ist der zweier f_4. Nach der Gordan'schen Methode kommt die Ausführung des vollen Combinantensystems zurück auf diejenige des gewöhnlichen simultanen Systems zweier „Elementarcovarianten“ von 6. resp. 2. Ordnung, die aber durch eine gewisse identische Relation mit einander verknüpft sind.

Die bezügliche Rechnung hat Stephanos**) geleistet.

Sodann ist Wiltheiss von den hyperelliptischen Functionen aus zu einem merkwürdigen Untersysteme einer binären f_6 geführt worden***).

Es seien mit A_i die Coefficienten, mit x_1, x_2 die Variabeln von f_6 bezeichnet; ferner bedeute φ_6 eine gewisse Covariante 6. Ordnung und 2. Grades, in deren Coefficienten B_i noch zwei, mit x_1, x_2 cogrediente Variabeln y_1, y_2 zur 2. Ordnung eingehen. Versteht man dann unter $\underset{y=x}{\delta}$ den Aronhold'schen Process $\Sigma B_i \dfrac{\partial}{\partial A_i}$, verbunden mit nachträglicher Gleichsetzung der x und y, so lässt sich ein System von 9 Covarianten von f nachweisen, derart, dass durch Anwendung der Operation δ stets wieder Covarianten des Systems hervorgehen.

Die Untersuchungen über volle Systeme von Grundformen, insoweit sie mit den sogenannten „erzeugenden Functionen“ in Verbindung stehen, sowie die im Anschlusse hieran über volle Systeme von Syzygien zu berichtenden Daten werden weiter unten berücksichtigt werden.

Dagegen sind die mit endlichen Gruppen linearer Substitutionen verknüpften vollen Systeme bereits im Abschnitt I. A, b besprochen worden.

II. A, c.
Associirte Systeme und typische Darstellung.

Es sind nunmehr die Bestrebungen zu würdigen, die darauf abzielen, die Mannigfaltigkeit der aus gegebenen Urformen ableitbaren invarianten Bildungen, anstatt zu einem Integritätsbereiche, zu einem Rationalitätsbereiche mit endlicher Basis zusammenzufassen†).

---

*) Math. Ann. V S. 95—122 (1875). Nach mündlicher Mitteilung hat Gordan in der letzten Zeit das volle Combinantensystem zweier C_2 („Kegelschnitte“) entwickelt; die Anzahl der Formen erwies sich als eine verhältnismässig geringe.

**) C. R. XCVII S. 27—31 (1883). Es ergeben sich 26 Systemformen.

***) Math. Ann. XXXV S. 433—456 (1889); Math. Ann. XXXVI, 134 bis 153, XXXVII S. 229—272 (1890).

†) Vgl. damit die in gewissem Sinne parallellaufenden, gruppentheoretischen Entwickelungen von Lagrange bez. der gegenseitigen rationalen Ab-

Diese Bestrebungen gehen auf Hermite*) zurück, der 1852 darlegte, wie man aus den In- und Covarianten einer binären Form

$$f_n(x_1, x_2) = f$$

in mannigfaltiger Weise eine endliche Anzahl so herausgreifen kann, dass alle übrigen rational von jenen abhängen. Will man die einfachste Darstellung derart haben, bei welcher alle Individuen der Basis algebraisch von einander unabhängig sind, so führe man neue Variabeln ξ, η mit der Determinante $f_n(x_1, x_2)$ ein, mittels der „Covarianten":

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

wo die Hülfsvariabeln y mit den x cogredient sind. Dann geht die mit der $(n-1)$ten Potenz von $f_n(x_1, x_2)$ multiplicirte Form $f_n(y_1, y_2)$ über in eine neue Form $\Phi_n(\xi, \eta)$, von deren Coefficienten der erste gleich der Einheit, der zweite gleich Null ist, während die übrigen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, im Verein mit $f_n(x_1, x_2)$, die gewünschte Basis, oder, mit Hermite zu reden, das „associirte System" von f repräsentiren.

Um eine beliebige Covariante von f durch die $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, f auszudrücken, hat man nur im Leitgliede derselben die Coefficienten von f zu ersetzen durch diejenigen von Φ, und nachträglich mit Hülfe von f homogen zu machen, wodurch eine Potenz von f in den Nenner kommt.

Man kann indessen, wie Clebsch**) 1870 ausgesprochen hat, die associirten Formen φ auf noch einfachere zurückführen, nämlich auf die Covarianten ψ 2. Grades von f und deren Functionaldeterminanten χ mit f (d. s. Covarianten von f vom 3. Grade). Die φ sind vermöge recurrenter Formeln rational durch die ψ, χ, f darstellbar, so dass wiederum nur eine Potenz von f als Nenner fungiren kann, der sich übrigens in den von Clebsch ausgerechneten niedrigsten Fällen $n = 2, 3, \ldots, 7$ auf die Einheit reducirt.

Gundelfinger***) hat im folgenden Jahre nicht nur die Behaup-

---

hängigkeit der „ähnlichen" Functionen. Eine weitere Ausführung in diesem Sinne befindet sich bei König, Math. Ann. XVIII S. 69—77 (1881).

*) Vgl. diesen Bericht S. 88.

In anderer Weise, nämlich in unmittelbarem Zusammenhange mit der Auflösung der algebraischen Gleichungen, hat Igel die Theorie der associirten Formen begründet: Wien (bei Gerold), 1889.

**) Gött. Nachr. 1870 S. 405—409 oder Math. Ann. III S. 265—267 (1871).

***) Journ. f. Math. LXXIV S. 87—91 (1871). Vgl. die vereinfachte Darstellung dess. Verf. in „Salmon-Fiedler" S. 459—463 (1877). Die Umkehrung des „Clebsch-Gundelfinger'schen" Gleichungensystems hat Gordan in neuester Zeit ausgeführt, Math. Ann. XLI S. 1—24 (1892), insofern er die Hermite'schen Formen φ explicite als ganz-rationale Functionen der ψ, χ darstellt. Man kann a priori erkennen, wie sich die ersteren Formen durch Producte der letzteren tungen von Clebsch auf symbolischem Wege erwiesen, sondern auch allgemein begründet, dass die φ stets ganz-rationale Functionen der ψ, χ, f werden.

Zugleich giebt er die Erweiterung auf das simultane System zweier Formen f_n und φ_m. Sei etwa m diejenige der beiden Zahlen m, n, welche die andere an Grösse nicht übertrifft, so treten zu den obigen Formen ψ, χ, f nur noch die m Ueberschiebungen von f mit φ hinzu.

Sylvester*) hat, ausgehend von den Leitgliedern der Covarianten, das letztere Ergebnis auf eine beliebige Reihe von binären Urformen ausgedehnt.

Eine interessante Anwendung der associirten Formen rührt von Kohn**) her. Indem er an Stelle der φ ihre irrationalen Aequivalente einführt, nämlich die Wurzeln der Gleichung $\Phi_n\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right) = 0$, welche ein übersichtliches Bildungsgesetz befolgen, gelingt es ihm, die Teilbarkeit der Resultanten und Discriminanten von Covarianten durch eine Potenz der Discriminante der Urform allgemein zu beherrschen. Die Uebertragung auf simultane Urformen ist dann leicht zu bewerkstelligen.

Die Leitglieder der von Clebsch eingeführten associirten Formen ψ, χ liegen bei Perrin's***) Erweiterung des Hauptsatzes auf Urformen F mit p Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_p$ zu Grunde. Man sehe die nach Potenzen von x_1 geordnete Form F:

$$F = ax_1^n + \binom{n}{1} F_1 x_1^{n-1} + \binom{n}{2} F_2 x_1^{n-2} + \cdots + F_n$$

---

ausdrücken: die Aufgabe concentrirt sich daher darauf, die rationalen Zahlencoefficienten C jener Producte zu ermitteln. Vgl. Bärthlein Dissert. Erlangen, 1887, wo die successive Berechnung der C weiter geführt wird als bei Clebsch. Es ist beachtenswert, dass genau dieselben Grössen C noch die Lösung folgender zwei fundamentalen Aufgaben vermitteln:

1) Die Coefficienten einer binären Urform darzustellen als rationale Functionen der beiden ersten und der Leitglieder der ψ, χ.

2) Desgleichen als rationale Functionen der beiden ersten und der beiden Anfangscoefficienten der ψ.

Die fraglichen Grössen C hängen zuvörderst von einem speciellen Systeme quadratischer Gleichungen ab: indessen gelingt es Gordan, dieses System in ein in den C lineares überzuführen.

Damit ist übrigens zugleich die weitere Aufgabe gelöst, alle ganz-rationalen Lösungen der Differentialgleichung für binäre „Differentialinvarianten" durch die einfachsten derselben rational auszudrücken. (Vgl. dazu etwa Forsyth: Mess. No. 202, 1888).

*) C. R. LXXXVI S. 448—450 (1878).

Am. J. I S. 118—124 (1878).

**) Wien. Ber. Juli 1891, 29 S.; Oct. 1891, 5 S.

Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dass der Ausdruck für die Wurzeln der Gleichung $\Phi_n = 0$ geradezu übereinstimmt mit dem von Hermite für die Tschirnhausen-Transformation gegebenen (cf. Einl. S. 93, Anm. ***).

***) C. R. CIV S. 108—111, 220—223, 280—283 (1888).

als eine binäre Form in der nicht homogenen Variabeln x_1 an, und bilde die Leitglieder v der $n-1$ Formen $\psi(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, $\chi(x_2, x_3, \ldots, x_p)$:

$$v_2 = aF_2 - F_1^2, \quad v_3 = a^2F_3 - 3aF_2F_1 + 2F_1^3,$$
$$v_4 = aF_4 - 4F_3F_1 + 3F_2^2, \ldots,$$

dann wird jede Invariante von F, bezw. der Coefficient der höchsten Potenz von x_1 einer jeden Covariante von F, nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von a eine ganze Function von a und den Covarianten des Systems der v (und entsprechend umgekehrt).

Beim Uebergange von den Leitgliedern zu den wirklichen Bildungen tritt an Stelle von a die Urform F selbst.

Will man auch diejenigen Formen mit berücksichtigen, welche noch von den, zu den x contragredienten Variabeln u abhängen, so hat man nur den v eine einfache, in den u und den $x_2, x_3, \ldots, x_p$ lineare Hülfsform zu adjungiren.

Analoges gilt für eine Reihe von Urformen F. Directer und umfassender hat Forsyth*) die nämliche Aufgabe behandelt, und zugleich für eine Anzahl von Einzelfällen des ternären und quaternären Gebietes eine vollständige Durchführung geliefert.

Sei $F = F_n(x_1, x_2, x_3)$ etwa eine ternäre Form, und, wie oben, nach Potenzen von x_1 geordnet; unter $\Phi\left(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{m};\ \overbrace{u_1, u_2, u_3}^{p}\right)$ werde irgend eine invariante Bildung („Ternariante“) von F verstanden, deren Entwickelung nach fallenden Potenzen von x_1 und u_1 mit dem Gliede $\Phi_{00}x_1^m u_1^p$ beginne. Dann genügt der Leitcoefficient Φ_{00} von Φ zwei charakteristischen (linearen, partiellen) Differentialgleichungen; „dies sind aber zugleich die charakteristischen Gleichungen für die Leitglieder der Covarianten der (binären) Formenreihe $F_1, F_2, \ldots, F_n$“.

Abgesehen von der identischen Covariante u_x wird das System der zu F associirten Ternarianten von $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ Individuen gebildet. Hängt indessen bereits die Urform F ausser von den x auch noch von den

---

*) Am. J. XII S. 1—60, 115—160 (1889) (Ternarianten).
Cambr. Phil. Trans. XIV S. 409—466 (1889) (Quaternarianten).

Im ternären Gebiete werden die Fälle einer quadratischen, einer kubischen, einer biquadratischen Form, sowie des Systems dreier quadratischen Formen erledigt; überdies werden von solchen Formen, welche ausser den x noch die u enthalten, behandelt: eine lineo-lineare Form, zwei lineo-lineare Formen; eine quadro-lineare, eine kubo-lineare, und endlich eine kubo-kubische Form.

Im quaternären Gebiet wendet der Verf. seine allgemeine Theorie an auf eine und auf zwei (in den x) quadratischen Formen, ferner auf eine (in den x, u) lineo-lineare Form: endlich auf folgende Complexe: einen linearen, sowie das System von zwei und drei linearen, schliesslich auf einen quadratischen Complex.

u ab, so steigt die bez. Anzahl auf $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n'+1)(n'+2)-3$, wenn n' die Ordnung von F in den u bedeutet.

Für vier*) Variable x kommt analog das Leitglied Φ_{000} einer „Quaternariante“ Φ in Betracht, die nach fallenden Potenzen von x_1, u_1, p_1 geordnet ist, wo p_1 eine der sechs Zwischenvariabeln $p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}$ bezeichnet. Φ_{000} genügt jetzt sechs charakteristischen Gleichungen u. s. f.

Das ursprüngliche Verfahren Hermite's, die associirten Systeme auf (lineare) Transformationen der binären Urformen zu begründen, ist bald nachher von Brioschi**) auf Formen mit mehreren Variabeln ausgedehnt worden: eine wirkliche Durchführung in diesem Sinne kennt man für zwei ternäre Einzelfälle, die allgemeine C_3 und eine specielle C_4.

Die erstere***) rührt von Clebsch und Gordan her; die lineare Transformation der x wird vermittelt durch drei, in den u lineare „Zwischenformen“, welche in den x zu den resp. Ordnungen 1, 4, 7 ansteigen.

Jede, aus C_3 ableitbare Form kann mit einer solchen Potenz einer gewissen Covariante G multiplicirt werden, dass sie in eine ganze Function von 7 associirten Formen übergeht, welche aus jenen drei Zwischenformen und noch vier Covarianten bestehen.

Daneben geht eine zweite, gleichberechtigte Darstellung, bei der sich dualistisch die 7 correspondirenden Formen aus drei in den x linearen Zwischenformen und vier „zugehörigen Formen“ (Contravarianten) zusammensetzen.

Als nahe verwandt mit dieser Behandlung der C_3 erweist sich diejenige, welche Gordan†) für die schon mehrfach erwähnte C_4 mit 168 Substitutionen in sich geliefert hat.

Die bisher besprochene rationale Darstellung der invariantiven Formen lässt sich als „Covariantentypik“ bezeichnen. In der That ist der Kern der Methode der, eine Urform F(x) (oder auch eine Reihe solcher)

---

*) Siehe die zweitcitirte Arbeit.

**) Vgl. diesen Ber. S. 94, Anm. ††).
Auf anderem Wege ist eine solche Ausdehnung geleistet von Grassmann Math. Ann. VII S. 538—548 (1874), sowie von Christoffel Math. Ann. XIX S. 280—290 (1882).

***) Math. Ann. I S. 57—89 (1869). Vgl. hiermit die kurz zuvor erwähnte Behandlung von Forsyth.

†) Math. Ann. XVII S. 359—379 (1880).
Die Anzahl der associirten Formen, die identische Zwischenform u_x eingeschlossen, beträgt acht, wie übrigens schon aus der Clebsch-Gordan'schen Arbeit Math. Ann. I 57—89 hervorgeht.

mit einer Potenz einer geeigneten Covariante, geschrieben in cogredienten Variabeln y zu multipliciren derart, dass das Product nach Potenzen ganzer Functionen ξ, η der x, y als neuer Variabeln entwickelbar wird und zugleich die neuen Coefficienten Covarianten von F(x) repräsentiren. Man darf sich dabei auf den Fall beschränken, dass die Substitution hinsichtlich der y eine lineare ist.

Dem steht gegenüber eine „Invariantentypik"; die Urform F(x) (oder eine Reihe solcher) nimmt nach Multiplication mit einer gewissen Potenz einer Invariante R von F, und entwickelt nach Potenzen ganzer Functionen ξ, η der x, (die dann Covarianten von F sein werden), eine Gestalt an, in der die neuen Coefficienten Invarianten von F sind.

Die den Uebergang vermittelnde Transformation ist hier eine gewöhnliche „Tschirnhausen'sche"; es mag indessen hervorgehoben sein, dass man in manchen Fällen die directe (mit Schwierigkeiten verknüpfte) Anwendung derselben ganz umgehen kann, und dass überhaupt die Transformation selbst ganz in den Hintergrund tritt.

Eine grosse Reihe von algebraischen, geometrischen und functionentheoretischen Aufgaben führt, wie leicht zu erkennen, a priori auf eine solche „invariantive" Gestaltung, die zum naturgemässen Ausdruck bringt, dass schon die Urformen selbst, resp. vorgegebene Functionen derselben in invariantem Lichte erscheinen.

Wiederum hat Hermite*) 1851 zuerst eine derartige Typik für binäre Formen f_{2n+1} ungerader (insbesondere der fünften) Ordnung begründet, indem er zwei lineare Covarianten als neue Variabeln einführte.

Clebsch und Gordan**) haben 1867 auf dem Hermite'schen Wege die Typik einer f_5 bis ins einzelnste erledigt, mit besonderer Berücksichtigung der verschiedenen Ausnahmefälle, die in Folge des Verschwindens gewisser Invarianten eintreten.

Hier zeigt sich deutlich, wie sich eine directe Ausführung der Substitution bei Benützung symbolischer Identitäten vermeiden lässt.

Bedeuten nämlich α_x, β_x zwei, zunächst beliebige Linearformen mit nicht verschwindender Resultante $R = (\alpha\beta)$, und a_x einen symbolischen Linearfactor der Urform $f_l = f_{2n+1}$, so kann man das Product $(\alpha\beta)a_x$ als eine lineare Combination von α_x und β^x hinschreiben. Erhebt man hier beide Seiten auf die lte Potenz, so ist damit bereits das Product $R^l f_l$

*) Vgl. diesen Ber. S. 88 Anm. †).

**) Annali (2) I S. 23—79. Vgl. damit die Darstellung in Gordan's Vorlesungen II §§ 24, 29.

Die Resultate der ersterwähnten Abhandlung werden von Gordan Annali (2) I, 367—372 (1867) auf die Jacobi'sche Modulargleichung 6. Ordnung angewendet.

typisch, wenn auch in roher Form, dargestellt, wo α_x, β_x die neuen Variabeln, und die neuen Coefficienten simultane Invarianten von f_1, α_x, β_x sind.

Letztere werden Invarianten von f allein, sobald man für α_x, β_x zwei lineare Covarianten von f wählt; die weitere Rechnung concentrirt sich darauf, die neuen, vorerst in symbolischer Gestalt auftretenden Coefficienten durch die einfachsten Invarianten des vollen Systems von f auszudrücken.

Das nämliche Verfahren gilt, wie dieselbe Abhandlung lehrt, auch für eine typische Darstellung von binären Formen f_{2n} gerader Ordnung: man hat nur, statt mit Linearformen, mit geeigneten Quadratformen zu operiren: die Tschirnhaustransformation wird zu einer quadratischen. Seien α_x^2, β_x^2, γ_x^2 drei beliebige Quadratformen mit der nicht verschwindenden Resultante $R = (\alpha\beta\gamma)$, und a_x^2 ein symbolischer Quadratfactor von f_{2n}, so ist wiederum $(\alpha\beta\gamma)a_x^2$ eine lineare Combination der drei erstgenannten Formen. Erhebt man auf die nte Potenz, so geht $R^n f_{2n}$ über in eine typische Gestalt C_n mit den drei Variabeln α_x^2, β_x^2, γ_x^2, für die man wieder hinterher Covarianten der Urform f nehmen mag.

Clebsch und Gordan haben die erforderliche Rechnung im Falle der f_6 vollständig durchgeführt.

Lindemann*) hat nachgewiesen, dass C_n, als ternäre Form irgend dreier Variabeln aufgefasst, durch das identische Verschwinden einer gewissen Covariante charakterisirt ist. Die geometrische Deutung dieser Verhältnisse führt ihn dabei zu den Elementen der sogenannten „Apolaritätstheorie“ **).

Mit typischen Darstellungen der einfachsten simultanen Binärformen haben sich Bessel***) und Harbordt†) beschäftigt.

Auf einen interessanten Fall dieser Art hatte schon früher Hermite††) hingewiesen durch die Bemerkung, dass zwei binäre kubische Formen einen einfachen typischen Ausdruck finden als erste Ableitungen einer biquadratischen Form, und Cayley†††) hatte hierauf die Transformation 3. Ordnung eines elliptischen Integrals 1. Gattung gestützt.

Clebsch††††) hat der Hermite'schen Angabe ein ausführliches

---

*) S. M. F. Bull. V, 113—126 (1877): ebenda VI, 195—208 (1878).
**) Cf. II. D, b.
***) Math. Ann. I S. 173—194 (1869).
†) Math. Ann. I S. 210—224 (1869).
††) Journ. f. Math. LVII S. 371—375 (1860).
†††) Siehe die Darstellung bei Clebsch „Binäre Formen“ § 101.
††††) Journ. f. Math. LXVII S. 371—380 (1867).

Studium gewidmet; sein Verfahren wurde durch Gundelfinger*) wesentlich vereinfacht.

In ähnlicher Weise kann man drei biquadratische binäre Formen als zweite Ableitungen einer Form 6. Ordnung auffassen, wie Lindemann**) zuerst hervorgehoben hat.

Hermite***) verdanken wir auch das erste analoge Beispiel aus dem ternären Gebiete, insofern er nachweist, wie sich zu drei quadratischen Formen eine kubische herstellen lässt — mit simultanen Invarianten der ersteren als Coefficienten — deren erste Ableitungen mit den gegebenen Formen übereinstimmen. Hierdurch tritt erst der Sylvester'sche Ausdruck†) für die Resultante von drei quadratischen Formen als „Combinante" derselben in's richtige Licht.

Einen durchsichtigen Beweis des Hermite'schen Satzes hat wiederum Gundelfinger††) erbracht. Die simultanen Invarianten der drei Formen erscheinen als rational abhängig von eilf solchen: die Combinantinvarianten von nur zweien.

Gundelfinger†††) hat seine Ergebnisse angewandt auf die quadratische Transformation eines, längs einer ebenen Curve 3. Ordnung hinersteckten elliptischen Integrals 1. Gattung.

Für die Auflösungstheorie der schon mehrfach gestreiften Gleichungen 7. Ordnung mit 168 Substitutionen in sich ist eine typische Darstellung von Bedeutung geworden, welche Gordan††††) dem simultanen System der zugeordneten ternären C_4 und einer beliebigen C_2 („Kegelschnitt") hat zu Teil werden lassen. Von den Covarianten des Systems werden zwei weitere C_2, sowie eine ausgezeichnete C_1 („Gerade") her-

---

*) Math. Ann. VII S. 452—456 (1874).
In den Math. Ann. VIII S. 444—452 (1875) stellt Wiederhold in Gestalt einer identisch verschwindenden Covariante die Bedingung dafür auf, dass zwei f_n Polaren einer f_{n+1} sind.

**) Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 900.
Vgl. die Dissertationen von Friedrich, Giessen (1886) und E. Meyer, Königsberg 1888. Drei f_3 als zweite Ableitungen einer f_5 sind von Igel studirt worden, Wien. Ber. LIII S. 155—184 (1887). Davon wird eine Anwendung gemacht auf die Jerrard'sche Transformation einer Gleichung 5. Ordnung.

***) Journ. f. Math. LVII S. 371—375 (1860).

†) Siehe Seite 87 Anm. ***).

††) Journ. f. Math. LXXX S. 73—85 (1875).

†††) Math. Ann. VII S. 449—451 (1874).

††††) Math. Ann. XX S. 529—552 (1882).
Die Lösung der bezeichneten Aufgabe (§ 14) erfordert diejenige einer Reihe von Hülfsaufgaben, nämlich der typischen Darstellung von 1) zwei C_2 und einer C_1; 2) einer C_4 durch C_2-Büschel und C_1; 3) von drei C_2. Siehe §§ 11, 12, 13.

ausgegriffen: die „Pole“ der C_1 bezüglich der drei C_2 bilden die Ecken des „typischen Coordinatendreiecks“.

Eine merkwürdige Rolle spielt die Invariantentypik nach Stroh*) für das volle System der Combinanten zweier Binärformen f_n, φ_n: die Individuen eines solchen Systems verwandeln sich nach Multiplication mit einer jeweils geeigneten Potenz der Resultante von f_n und φ_n in die Individuen des vollen Systems einer einzigen binären Form der Ordnung $2(n-1)$.

Die Bedeutung der Typik für die Theorie der Syzygien wird im nächsten Abschnitte hervortreten.

II. A, d.
Syzygien.

Die Integritäts- wie Rationalitätsbereiche von Systemen invarianter Formen geben Mittel an die Hand, um in die algebraische Verwandtschaft zwischen den letzteren einzudringen.

Offenbar ist dies aber nur der erste Schritt: es wird sich von neuem darum handeln müssen, die Gesamtheit der in jedem Falle vorhandenen algebraischen Relationen oder „Syzygien“ invariantentheoretisch zu beherrschen, d. h. deren linke Seiten („Syzyganten“) selbst wieder zu Integritäts- resp. Rationalitätsbereichen mit einer endlichen Basis (von „Grundsyzyganten“ oder „fundamentalen Syzyganten“) zusammenzufassen, wobei die Coefficienten Grundformen des ursprünglichen Formensystems sein dürfen.

Von diesen Syzygien „1. Art“ wird man entsprechend zu solchen höherer Art aufsteigen.

Dass diese Aufgabe eine bestimmte ist, d. i. dass in der That die Syzygien jeder Art ein volles System bilden, und dass die Syzygienkette nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht, hat freilich erst neuerdings, wie schon früher betont, Hilbert**) nachgewiesen.

Der historische Gang war der, dass man für die einfachsten Urformen

---

*) Math. Ann. XXXIV S. 321—331 (1889).

Eine andere Art von typischer Darstellung einer binären Form f hat Klein in einer Vorlesung über algebraische Gleichungen (Winter 1891/92) erwähnt. Die Form f lässt sich nämlich nach Multiplication mit ihrer Discriminante in die Gestalt $|a_{ik}+\lambda b_{ik}|$ umsetzen.

Endlich sei noch kurz verwiesen auf die typische Darstellung der elliptischen (und Abel'schen) Integrale, wie sie durch Weierstrass eingeführt, und in neuerer Zeit besonders durch Klein und seine Schüler weiter ausgebildet ist. Vgl. etwa die grundlegenden Arbeiten von Klein in den Math. Ann. XVII S. 133—138 (1880); sowie Leipziger Abh. 1885.

**) Math. Ann. XXXVI S. 473—534 (1890), insbes. S. 534. Siehe oben S. 149.

(beziehungsweise Substitutionsgruppen) eine möglichst umfassende Anzahl von Syzygien zu ermitteln suchte.

Der experimentirende Charakter dieser Untersuchungen bringt es mit sich, dass ihr Verständnis für den Leser kein leichtes ist, da die Gewinnung der Einzelergebnisse in erster Linie durch die individuelle Geschicklichkeit des betreffenden Autors bedingt ist.

Wir müssen uns daher begnügen, einige mehr principielle „Leitmotive" herauszuheben.

Das nächstliegende Hülfsmittel zur Aufstellung der Syzygien 1. Art ist durch die Hermite'sche Theorie der associirten Systeme gegeben; die Kenntnis des Leitgliedes irgend einer abgeleiteten Form hat ja den rationalen Ausdruck durch die associirten Formen zur unmittelbaren Folge.

Cayley*) und Brioschi**) haben diesen Weg mit Erfolg für die binäre f_5 betreten: hat man erst einmal die Individuen des vollen Systems in der angegebenen Art behandelt, so genügt zu weiterer Ausführung die Handhabung von Eliminationsprocessen.

Die von Cayley erhaltene Tabelle für die Syzygien 1. Art der f_5 ist in einigen Punkten später ergänzt***) worden.

Der weiteren Ausdehnung dieser Methode treten jedoch grosse rechnerische Schwierigkeiten entgegen: zudem gewährt sie nur eine geringe Einsicht in den Aufbau des Syzygiensystems.

Ein anderes Verfahren hat Stephanos†) vorgeschlagen. Innerhalb der Binärformen giebt es ein Gebiet, in dem sich derartige Relationen übersichtlich gruppiren lassen, nämlich das der Functionaldeterminanten (ersten Ueberschiebungen). Bildet man dieselben für je zwei Formen

---

*) Das II., III., V. Memoir enthalten die Syzygien (erster Art) der f_5 bis zum fünften Grade in den Coefficienten: das VIII. Memoir (1867) diejenigen vom sechsten Grade; im X. Memoir (1878) endlich wird auf Grund der „realen" erzeugenden Function eine Methode entwickelt, für irgend einen gegebenen Grad und gegebene Ordnung ein kleinstes System von Syzyganten herzustellen, aus denen alle übrigen durch lineare Combination hervorgehen. Als Anwendung hiervon wird die Liste der Syzygien bis zum Grade 14 ausgedehnt.

**) Annali (2) XI S. 291—304 (1883).
Vgl. auch die ternären Entwickelungen dess. Verf.: Annali (2) XV, 235 bis 252 (1887). Der Verf. verwendet seine Syzygien zur Ableitung gewisser canonischer Formen der Gleichungen fünfter (und sechster) Ordnung, die für die Auflösung derselben von Wichtigkeit sind.

***) Sylvester, Am. J. IV, 41—62 (1881). Siehe insbes. S. 58.
Hammond, Am. J. VIII S. 19—25 (1885).

†) C. R. XCVI S. 232—235, 1564—1567 (1883).

einer vorgelegten Reihe f, φ, ..., so lassen sich nach Clebsch*) nicht nur die ersten Ueberschiebungen dieser neuen Formen „F“ mit den f, φ, ..., sondern auch die Producte je zweier F auf einfachere Gebilde, d. i. auf erste und zweite Ueberschiebungen der Urformen f, φ, ... zurückführen.

Um dies auf die Syzygien, etwa einer f_6, anzuwenden, geht Stephanos so vor. Das volle System der f_6 setzt sich zusammen aus 4 Invarianten und 8 Covarianten von geradem, sowie aus 1 Invariante (welche nicht weiter in Betracht kommt) und 13 Covarianten von ungeradem Charakter. Die letzteren 13 Formen können vertreten werden durch 13 von den 28 Functionaldeterminanten, zu welchen die 8 geraden Covarianten Anlass geben, während die 15 übrigen leicht als ganze Functionen der 25 Grundformen ausgedrückt werden. Von diesen 15 Darstellungsformeln gelangt man mittels der Sätze von Clebsch zu einem Bestande von Syzygien zwischen geraden Formen, aus denen weitere durch Elimination ableitbar sind. Entsprechend gelangt man zu Syzygien zwischen geraden und schiefen Grundformen.

v. Gall**) hat das „Princip der Functionaldeterminanten“ weiter ausgebildet und verknüpft mit dem Aronhold'schen Processe. Es ermöglicht das nicht nur eine beträchtliche Abkürzung in der Rechnung, sondern giebt auch Mittel an die Hand, aus der reichen Mannigfaltigkeit von Relationen die irreducibeln oder Grundsyzygien herauszuschälen. Gestützt auf die abzählenden Vorarbeiten von englischen Forschern hat er so eine f_6, sowie zwei f_3 und zwei f_4 der eingehendsten Behandlung unterzogen.

Einer mehr directen Methode bedient sich Perrin***). Hatte schon Cayley zur Herleitung von Syzygien zumal die Leitglieder der Covarianten zu Grunde gelegt — zwischen denen ja genau die nämlichen Rela-

---

*) Siehe etwa Clebsch: „Binäre Formen“ § 54. Vgl. damit die Darstellung bei Gordan, Vorlesungen II § 4. §§ 11, 12 wird daselbst eine ausgedehnte Anwendung gemacht auf die zu einem System von quadratischen (binären) Formen gehörigen Syzygien.

**) Math. Ann. XXXI S. 424—440 ($2f_3$; 1888).
Math. Ann. XXXIII S. 197—223 ($2f_4$; 1888).
Math. Ann. XXXIV S. 332—353 ($2f_4$; 1889).
Math. Ann. XXXV S. 63—81 (f_6; 1889).

***) S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).
C. R. XCVI S. 426—430, 479—482, 563—565, 1717—1721, 1776—1779, 1842—1845 (1883).
Der nämlichen „Reductionsmethode“ hatte sich schon kurz zuvor Sylvester bedient, um gemeinsame Eigenschaften der Seminvarianten einer binären Form von unbegrenzt hoher Ordnung zu gewinnen. [Am. J. V S. 79—137, (1882 bis 1883)].

tionen herrschen, wie zwischen den Covarianten selbst —, so geht Perrin hierin noch einen Schritt weiter, indem er in den Leitgliedern den ersten Coefficienten der Urform f_n gleich Null setzt, und zeigt, dass durch dieses ihr Residuum das Leitglied (und damit auch die Covariante) eindeutig charakterisirt ist. Perrin verbindet dies Princip mit dem der associirten Formen und illustrirt die Fruchtbarkeit seines Verfahrens an den Beispielen der f_5 und f_6.

Da eine Syzygie (1. Art) eine Relation zwischen Grundformen A, B, ... eines Systems ist, so ist sie sicher irreducibel, wenn sich unter ihren Gliedern wenigstens ein Product von der Gestalt AB vorfindet.

Hammond*) hat nun darauf aufmerksam gemacht, dass in der That alle bis dahin bekannten Syzygien (1. Art) immer mindestens ein derartiges „binäres" Glied aufweisen, sodass das letztere geradezu zur Charakterisirung der Syzygie dienen kann. Dieser Erfahrungsgrundsatz gewährte bei der Aufstellung neuer Syzygien wesentliche Vereinfachungen.

Indessen stiess zuerst v. Gall**) auf ein Beispiel — die Relation zwischen den acht Invarianten zweier f_4 —, das sich trotz aller Anstrengungen dem Satze Hammond's nicht fügte.

Durch geeignete Specialisirung der Coefficienten konnte Stroh***) das v. Gall'sche Ergebnis direct bestätigen, womit definitiv die allgemeine Gültigkeit jenes Satzes widerlegt war.

Stroh†) hat, in Verallgemeinerung der durch Stephanos und v. Gall gehandhabten Methode der Functionaldeterminanten, eine einheitliche Quelle aller Syzygien (1. Art) in den Relationen zwischen den höheren Ueberschiebungen einer Anzahl von Formen aufgefunden.

Alle derartigen Relationen erscheinen als der Ausfluss eines einzigen Princips (l. c. § 3), einer Art „associativen" Gesetzes, welches für die durch den Ueberschiebungsprocess definirte Verknüpfung von Grössen allgemein gültig ist.

Im binären Felde darf man sich dabei auf vier (resp. drei) Ausgangsformen f_1, f_2, f_3, f_4 beschränken; man erhält für jeden (positiven) Wert

*) Am. J. VII S. 327—344 (f_6; 1884).
Am. J. VIII S. 19—25 (f_5; 1885).

**) Math. Ann. XXXIV, siehe S. 332 (1889).

***) Math. Ann. XXXVI S. 154—156 (1890).

†) Math. Ann. XXXIII S. 61—108 (1888). Als Beispiel wird der Fall der f_5 durchgeführt. Vgl. dazu noch Math. Ann. XXXIV S. 354—370 (1890). Der Kern der Methode findet sich schon in der voraufgehenden Arbeit dess. Verf.: Math. Ann. XXXI S. 444—454 (1888).

Die Anwendung seiner Theorie auf die f_6 giebt der Verf. Math. Ann. XXXIV S. 306—318 (1889) und XXXVI S. 262—303 (1890).

der „Gewichtszahl" i (= 1, 2, 3, ...):

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_i \equiv \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1 f_4)^\lambda (f_3 f_2)^{i-\lambda} = 0,$$

eine Identität (in den Coefficienten der f), welche bei allen 24 Vertauschungen der f nur drei, wesentlich verschiedene „Typen" repräsentirt (l. c. § 18).

Vermöge geeigneter Specialisirung der f, sei es, dass einige derselben gleich werden, oder aber in ihrer Ordnung unter eine gewisse Grenze sinken, entstehen hieraus weitere Typen.

Liegt nun ein volles System von Grundformen vor, so hat man dieselben successive nur als Ueberschiebungen von einer möglichst kleinen Anzahl unter ihnen darzustellen.

Jeder Grundform lässt sich so eine bestimmte Syzygie zuordnen. Die Construction eines möglichst vollständigen Syzygiensystems gestaltet sich darnach etwa wie folgt. Nimmt man beispielshalber als Urform eine f_6, mit einem vollen System von 26 Individuen, so resultirt in erster Linie ein Bestand von 20 fundamentalen (oder associirten) Syzygien, die bereits den vollständigen algebraischen Zusammenhang zwischen den 26 Grundformen enthalten; in der That hat man in ihnen die wirkliche Ausführung der Hermite'schen associirten Darstellung für die Grundformen (durch sechs unter ihnen) zu erblicken.

Jede weitere Syzygante ist, bis auf eine Potenz von der Urform im Nenner, ganz und sogar linear mit Grundformen als Coefficienten*), durch jene 20 Syzyganten ausdrückbar. Solcher weiterer Syzyganten waren allmählich durch die Bemühungen von Cayley, Sylvester, Hammond, Stephanos, Perrin und v. Gall 184 irreducible entstanden.

Der verwirrende Gesamtbestand dieser 204 Syzygien ordnet sich nunmehr unter nur eilf**) verschiedene Typen $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ unter: umgekehrt liess sich die Ableitung der 204 Syzygien aus den eilf Typen derart gestalten, dass jede einzelne derselben unabhängig von jeder andern berechnet werden konnte, wodurch die Zuverlässigkeit der Ergebnisse die denkbar grösste wird.

Mit der Eintheilung nach Typen hat Stroh zugleich eine zweckentsprechende Methode zur Prüfung***) der Syzygien verknüpft.

Werfen wir einen Rückblick, und berücksichtigen zugleich noch die

---

*) Siehe den bez. allgemeinen Satz Math. Ann. XXXIII § 22.

**) Siehe Math. Ann. XXXVI S. 262.

***) Cf. II. C, a.

mittels der erzeugenden Functionen erlangten Resultate, so können wir die Theorie der Syzygien, wie sie zur Zeit vorliegt, trotz aller rechnerischen Fülle doch nur als eine, erst in der Entwickelung begriffene bezeichnen*).

Die ausgedehnten Versuche für die Fälle der f_5, f_6, sowie der Simultansysteme der (f_2, φ_3), (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) haben dem Anscheine nach sehr gute untere Grenzen für die Anzahlen der Grundsyzyganten geliefert, aber, wenn man von den trivialen Fällen der f_2, f_3, und zweier f_2 absieht**), ist die Vollständigkeit eines Syzygantensystems, auch nur der 1. Ordnung, mit Sicherheit noch nicht nachgewiesen.

Höhere Gebiete sind noch fast gar nicht berücksichtigt und ebensowenig ist man an die fundamentale Untersuchung, wann in einem gegebenen Falle die Kette der Syzygien abbricht, in praxi herangegangen.

II. A, e.
Abzählende Richtung.

Erzeugende Functionen. Angenäherte und genaue Bestimmung der Anzahlen von Grundformen, Syzygien, Perpetuanten und linear unabhängigen Gebilden.

Die bisher besprochenen Leistungen hinsichtlich des Integritätsbereiches invarianter Bildungen, wie sie vornehmlich aus der Clebsch-Gordan'schen Schule hervorgegangen sind, gipfeln theoretisch in den allgemeinen „Endlichkeitsnachweisen"; praktisch, in der Ermittelung einer oberen Grenze für die Anzahlen der Grundformen eines vollen Systems, verbunden mit jeweiliger wirklicher Aufstellung derselben.

Wenn es nun gelingt, für die gemeinten Anzahlen von anderer Seite her je eine untere Grenze festzulegen, so wird man in allen Fällen, wo sich beide Grenzen decken, im Besitze der exacten Anzahl sein.

Hierin***) erblicken wir die Bedeutung der englischen, von Cayley und Sylvester inaugurirten Arbeiten, die vermöge eigentümlicher abzählender Methoden, welche auf der Entwickelung „erzeugender Func-

*) Es sei noch bemerkt, dass Mac Mahon den Syzygien zwischen „Perpetuanten" eine besondere Untersuchung gewidmet hat: Am. J. X S. 149—168 (1887).

**) Einer brieflichen Mitteilung zufolge hat Hilbert für ein System von drei quadratischen Formen ein System von 14 Syzygien aufgestellt und zugleich den Nachweis für die Vollständigkeit desselben erbracht. Cf. Math. Ann. XXXVI S. 534.

***) Vgl. eine diesbezügliche Bemerkung von Sylvester im Amer. J. IV S. 62 (1881).

tionen“ basiren, auf die Bestimmung derartiger unterer Grenzen (nebst wirklicher Aufstellung der bezüglichen Formen) hinzielen.

Diese Bestrebungen gehen auf Aufsätze Cayley's*) aus dem Jahre 1856 zurück; wir ziehen sie gleich in der späteren Gestalt heran, in der sie von Cayley**) selbst, sowie vor allem von Sylvester***) von 1877 an wieder aufgenommen wurden.

Es liege etwa eine einzelne binäre Form f_i vor†) mit den Coefficienten a_i. Das Leitglied φ irgend einer Covariante von f, vom Grade j, der Ordnung g, und dem Gewichte $w = \frac{1}{2}(ij - g)$ genügt der charakteristischen Differentialgleichung:

$$\delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots + ia_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Die Fundamentalaufgabe lautet: „Wieviel linear unabhängige Covarianten (incl. Invarianten) von f giebt es, für die Grad und Gewicht (oder auch Grad und Ordnung) vorgegebene Werte haben?“

Bezeichnet man die Anzahl der Coefficienten eines Leitgliedes φ mit $(w : i, j)$, so hat man dieselbe zur Beantwortung der Frage offenbar nur zu vermindern um die Anzahl derjenigen, linearen und linear unabhängigen Relationen, welche den Coefficienten von φ durch die Identität $\delta\varphi = 0$ auferlegt werden.

Die stillschweigende Annahme Cayley's, dass solcher Relationen

---

*) Siehe Seite 90, 91.

**) Seine neuere Theorie hat Cayley entwickelt im IX. Mem. Phil. Trans. 1870 S. 17–50, und X. Mem. ebd. 1878 S. 603–661.

***) 1877. C. R. LXXXIV S. 240–244, 532–534, 974–975, 1113–16, 1207–11, 1285–89, 1359–62, 1427–30.
C. R. LXXXV S. 991–995, 1035–39, 1091–93.
1878. Phil. Mag. S. 1–12 und Lond. Proc.
Journ. f. Math. LXXXV S. 89–114.
C. R. LXXXVI S. 1437–41, 1491–92.
C. R. LXXXVII S. 242–244, 287–289, 445–448, 505–509, 899–903.
Am. J. I S. 370–378.
1879. Am. J. II S. 71–84, 98–99.
C. R. LXXXIX S. 395–396.
1883. Am. J. V S. 241–250.

Die umfangreichen, auf Grund der Sylvester'schen Methoden von Franklin berechneten Tabellen von erzeugenden Functionen, Grundformen und Syzygien finden sich im Amer. J. II S. 223–251, 293–306 (1879), Am. J. III S. 221–329 (1880), Am. J. V S. 241–250 (1882).

Eine concise Bearbeitung der Hauptsätze Sylvester's und Cayley's über die erzeugenden Functionen hat Franklin geliefert, Am. J. III S. 128–154 (1880).

†) Vgl. die Darstellung bei „Bruno“ § 12, die sich an die Cayley'schen Entwickelungen anlehnt.

genau so viel vorhanden seien, als Glieder in $\delta\varphi$, ist zuerst 1878 von Sylvester als allgemeingültig nachgewiesen worden*).

Da $\delta\varphi$ eine Form der a vom Gewichte $w-1$ und des Grades j ist, so beträgt somit der fragliche Abzug gerade $(w-1:i,j)$: „die gesuchte Anzahl ist daher durch die Differenz $\Delta(w:i,j)$:

$$\Delta(w:i,j) = (w:i,j)-(w-1:i,j)$$

gegeben“ **).

Der Zahl $(w:i,j)$ begegnet man schon bei der Euler'schen***) Behandlung von Aufgaben aus der „Zahlenteilung“.

Ist nämlich irgend ein Glied von φ von dem Typus $Ca_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_i^{\alpha_i}$, so sind die Exponenten α ausschliesslich an die beiden diophantischen Relationen gebunden:

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_i=j, \quad \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+i\alpha_i=w,$$

d. i. „die Anzahl $(w:i,j)$ giebt an, wie oft die Zahl w als Summe von j Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., i mit Wiederholungen gebildet werden kann“.

Nach Euler ist dann die gemeinte Anzahl nichts anderes als der Coefficient von $c^j x^w$ in der Entwickelung der „erzeugenden Function“ Z

$$Z=\frac{1}{(1-a)(1-ax)(1-ax^2)\dots(1-ax^i)}$$

nach steigenden Potenzen von a.

Entsprechend entnimmt man die Anzahl $\Delta(w:i,j)$ der Entwickelung des Productes $Z(1-x)$.

Indem Euler die Entwickelungen ausführt, nehmen die gewonnenen Sätze die andere Fassung an, dass $(w:i,j)$ auch als Coefficient von z^w in der Entwickelung der Function Z':

$$Z'=\frac{(1-x^{j+1})(1-x^{j+2})\dots(1-x^{j+i})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^i)}$$

hervorgeht, aus der durch Streichung des Nennerfactors $(1-x)$ wiederum eine zweite erzeugende Function für $\Delta(w:i,j)$ folgt.

---

*) Phil. Mag. 1878 S. 1—12.
Journ. f. Math. LXXXV S. 89—114 (1878).
Seitdem ist der bezeichnete Satz mit den verschiedenartigsten Hülfsmitteln bewiesen worden vgl.
Capelli, Rom. Acc. L. Mem. XII S. 1—62 (1881).
Hilbert, Math. Ann. XXX S. 15—29, (1887), insbes. S. 20.
Stroh, Math. Ann. XXXI S. 441—443 (1888).
Study, „Methoden ...“ 1889 § 9 (S. 197).

**) Sylvester hat in Mess. (2) VIII S. 1—8 (1878) eine bequeme Regel zur directen Berechnung der Zahl Δ angegeben. Cf. Franklin, Am. J. II S. 187 bis 188 (1879).

***) Introductio in Analysin ..., I § 304.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Nutzen verständlich machen, den die erzeugenden Functionen behufs actueller Ermittelung von Grundformen und Syzygien gewähren, wobei wir uns auf eine der beiden Entwickelungen, etwa diejenige von Z resp. $Z(1-x)$, beschränken können.

Zuvörderst erweist es sich als zweckmässiger, statt j und w die Zahlen j und $g = ij - 2w$ (Grad und Ordnung einer Covariante) als gegebene einzuführen. Bedient man sich demgemäss der Zeichen $(i, j : g)$ und $\Delta(i, j : g)$, so stellt sich nach einfacher Umrechnung die letztere Anzahl dar als Factor von $a^j x^g$ in der Entwickelung der „primitiven (crude) erzeugenden Function" $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-ax^{-(i-2)})(1-ax^{-i})}$$

nach steigenden Potenzen von a.

Nimmt man hier die den einzelnen Nennerfactoren correspondirenden Zerlegungen in Partialbrüche vor, und lässt beim nachfolgenden Zusammenfassen alle Potenzen von x mit negativen Exponenten fort — die ja für die vorliegende Frage irrelevant sind —, so bleibt eine Entwickelung, die auch nur positive Exponenten von a aufweist, und welche wiederum rückwärts in die Gestalt des irreducibeln endlichen Bruches gebracht werden kann:

$$\frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots}{(1-ax^i)(1-ax^{i-2})\ldots(1-a^k)(1-a^{k'})\ldots},$$

wo die Exponenten $i, i-2, \ldots, k, k', \ldots$ des Nenners ganze positive Zahlen (>0) sind.

Diese „reducirte erzeugende Function*)" lässt sich weiterhin in jedem concreten Falle, durch Multiplication von Zähler und Nenner mit geeigneten Hülfsfactoren — allerdings manchmal erst nach langwieriger Rechnung — umformen in die „repräsentirende erzeugende Function". Während sich der endlich bleibende Zähler abermals nach steigenden und positiven Potenzen von a und x anordnen lässt, sind die dreierlei Arten der Nennerfactoren, $(1-a^k)$, $(1-ax^i)$ und $(1-a^2x^l)$ so

---

*) Wie eine solche am zweckmässigsten und zugleich so, dass sie möglichst wenig Glieder enthält, berechnet wird, hat Cayley am Beispiel der f_7 gezeigt, Am. J. II S. 71—84 (1879).

Bezüglich der repräsentirenden erzeugenden Function bot der Fall der f_7 eine scheinbare Ausnahme dar, als es Sylvester und Franklin nicht gelingen wollte, den Zähler der Function zu einem endlichen zu gestalten. Dieser Widerspruch konnte erst durch Hammond (Math. Ann. XXXVI S. 255—261, 1890) gehoben werden, nachdem v. Gall einige irreducible Invarianten der f_7 aufgefunden hatte, welche Sylvester entgangen waren.

gewählt, dass sie mittels ihrer Exponenten von a und x die einfachsten, sicher irreducibeln Systemformen „repräsentiren“.

Diese „Repr. Erz. Function*)“ ist zunächst eine **gemeinsame** Quelle für die Anzahl (und den Typus) der Grundformen und Syzygien aller Arten.

Um diese Quelle auszuschöpfen, hat man, vom Grade drei in a beginnend, eine Art „Siebverfahren (tamisage)“ vorzunehmen, indem man für irgend eine „Grad-Ordnung“ („degorder“) j, g zuerst alle möglichen Potenzen und Producte von niedrigeren Grundformen (mit Ausschluss der repräsentirenden) herstellt und deren Anzahl von dem Coefficienten von $a^j x^g$ im Zähler der Repr. Erz. Fct. abzieht. Diese Differenz liefert für die vorgelegte Grad-Ordnung die Zahl der Grundformen, vermehrt um die Anzahl der Syzygien gerader, dagegen vermindert um die Anzahl der Syzygien ungerader Art.

Da der Zähler abbricht, so hat man in der Summe aller positiven Coefficienten, vermehrt um die Anzahl der repräsentirenden Grundformen, auf alle Fälle eine untere Grenze für die Anzahl der Grundformen.

Erklären wir uns an einem Beispiel. Die Repr. Erz. Fct. einer f_5 lautet nach Franklin*):

Nenner: $(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)$

Zähler: $1+a^3(x^3+x^5+x^9)+a^4(x^4+x^6)+a^5(x+x^3+x^7-x^{11})$
$+a^6(x^2+x^4)+a^7(x+x^5-x^9)+a^8(x^2+x^4)+\cdots\cdots-a^{23}x^{11}$.

Hieraus liest man zuvörderst ab, dass succ. für die Gradordnungen (3,3), (3,5), (3,9); (4,4), (4,6); (5,1), (5,3), (5,7); (6,2), (6,4); (7,1), (7,5); (8,2); etc. mindestens je eine Grundform existiren muss. Eine Grundform (8,4) giebt es nicht, da man das Product (3,3).(5,1) zweier niedrigeren Grundformen construiren kann, u. s. f.

Im ganzen wird man so zu mindestens 23 Grundformen geführt: andererseits ergab die ursprüngliche Gordan'sche Behandlung höchstens 23 Grundformen (von genau denselben Grad-Ordnungen): hierdurch ist aber die Frage nach Anzahl und Typus der Grundformen einer f_5 definitiv erledigt.

Um zu den Syzygien 1. Art überzugehen, so ist wiederum die Existenz einer solchen in den Fällen (5,11), (7,9) etc. ohne weiteres ersichtlich. Für die Gradordnungen (6,6), (6,8), (6,10), (6,12), (6,14), (6,18) hat $a^j x^g$ im Zähler je den Coefficienten Null; da aber die drei Grundformen

---

*) Die englische Abkürzung „Repr. G. F.“ (von representative generating function) ist im Texte durch die entsprechende deutsche ersetzt worden.
**) Am. J. II S. 224.

(3,3), (3,5), (3,9), zu je zweien multiplicirt, gerade je ein Product zu jenen 6 Gradordnungen ergeben, so ist damit die Existenz von 6 bezüglichen Syzygien (und nicht mehr) erster Art gewährleistet. In derselben Weise werden für den Grad 7 noch 6 Syzygien (7,7), (7,9), (7,9), (7,11), (7,13), (7,15) abgeleitet u. s. f.

Die erste Syzygie 2. Art tritt im Falle (8,14) auf. Die Repr. Erz. Fct. weist hier, mit Hinzuziehung des Nenners, auf 5 linear unabhängige Formen hin, während die Siebung 10 Producte von Grundformen liefert. Nun lassen sich ohne weiteres sechs reducible Syzygien 1. Art hinschreiben, indem man die früher gefundenen (5,11); (6,8), (6,12); (7,9), (7,9), (7,9) resp. mit den Grundformen (3,3); (2,6), (2,2), (1,5), (1,5), (1,5) multiplicirt. Jetzt übertrifft die Zahl 5 die Differenz 10—6 = 4 um eine Einheit: „mithin sind jene 6 Syzygien 1. Art durch eine und nur eine Syzygie 2. Art mit einander verknüpft"*).

Auf diesem Wege hat Sylvester, auf Grundlage der sorgfältigen Rechnungen Franklin's, für eine Reihe von einzelnen und simultanen Urformen untere Grenzen für die Einzel- und Gesamtanzahlen der Syzygien 1. Art angegeben**).

Die Repr. Erz. Fct. bedarf übrigens nach Cayley nur einer geringen Modification, um nicht nur die Anzahlen, sondern auch die wirklichen Bildungen der Grundformen und Syzygien zu liefern***).

Hammond†) ist in der Theorie der Syzygien noch einen Schritt weiter gegangen. Kennt man einmal für eine Urform das volle System der Grundformen genau, so lässt sich die Repr. Erz. Fct. für die Grundformen zu einer solchen für die Syzygien ausgestalten, indem man Zähler und Nenner mit solchen Factoren multiplicirt, dass nunmehr der Nenner gerade das Product der, sämtlichen Grundformen correspondirenden Factoren $(1-a^j x^g)$ wird. Hieraus kann für jede beliebige Gradordnung eine obere Grenze für die Syzygien 1. Art abgelesen werden, die dann mit der Sylvester'schen unteren Grenze zu vergleichen ist: bei den ausgeführten Einzelfällen (f_5 und f_6) zeigt sich, abgesehen von

---

*) Auf die Nichtbeachtung dieser Syzygien zweiter Art ist der irrtümliche Schluss Cayley's (II. Mem. 1856) zurückzuführen, demzufolge eine f_5 kein endliches volles System von Grundformen zulassen sollte. Siehe Cayley selbst im VIII Mem. Phil. Trans. 1870 S. 513.

**) Am. J. IV S. 41—61.

***) Dasselbe leistet die „reale erz. Fct." Cayley's (cf. X Mem.), die aus der repr. erz. Fct. entsteht, indem die in ihr auftretenden Grundformen durch Buchstaben a, b, c, ... vertreten werden. Siehe dazu die Bemerkung Sylvester's Am. J. IV S. 57.

†) Am. J. VIII S. 19—25 (1885).

einigen Ausnahmen, bei denen directe Rechnung entscheiden musste, Uebereinstimmung beider Grenzen.

Ehe wir die Repr. Erz. Fct. Sylvester's verlassen, haben wir noch einer merkwürdigen Erscheinung zu gedenken, die sich gerade in all' den Fällen gezeigt hat, wo eine definitive Bestimmung der Grundformen ermöglicht worden ist. Es ist dies das sogenannte „Fundamentalpostulat"*) Sylvester's, demzufolge für jede Gradordnung das Auftreten von Grundformen und dasjenige von Syzygien einander ausschliessen sollten, wodurch sich die Theorie der Formen wesentlich vereinfacht hätte.

Hammond**) stiess jedoch zuerst auf ein Beispiel (bei der Gradordnung (5,13) einer f_7), welches jenem Postulat widersprach, und erkannte bald darauf***) den Grund dieser Ausnahmen in einer recurrirenden Identität, welche unmittelbar aus der Differentialgleichung für die Quellen hervorging.

Es sei noch kurz erwähnt, dass auch für besondere Arten invarianter Bildungen eigentümliche erzeugende Functionen construirt worden sind; so von Mac Mahon für die sogenannten „Perpetuanten" †). Hier gestattet die Function, die Anzahlen der irreducibeln Gebilde unmittelbar anzugeben. Stroh††) hat nicht nur einen durchsichtigen Beweis dafür gegeben, mittelst einer eigenartigen Weiterführung der Aronhold-Clebsch'schen Symbolik, sondern auch für diese Anzahlen einen einfachen Ausdruck ermittelt und zudem gezeigt, wie sich die bezüglichen Perpetuanten symbolisch ohne weiteres hinschreiben lassen.

Mit der Ableitung theoretischer Formeln für obere Grenzen von Grad und Ordnung der invarianten Bildungen im binären Gebiete haben sich Jordan und Sylvester beschäftigt.

Jordan†††) geht von den Relationen zwischen den Covarianten dritten Grades aus, deren sich Gordan zur Begründung seines Endlichkeitsbeweises bedient hatte, und stützt sich des weiteren wesentlich auf das

---

*) Siehe etwa die Darstellung bei Franklin Am. J. III S. 130—132.

**) London Proc. XIV S. 85—88, Am. J. V S. 218—228 (1883).

Vgl. dazu die Bemerkungen von Cayley: London Proc. XIV S. 88—91. Hopk. Circ. II S. 85—86, 150, III S. 13 (1883, 1884).

***) Siehe die zweitcitirte Arbeit.

†) Am. J. VII S. 26—47 (1884), cf. II. C, a, α.

††) Math. Ann. XXXVI, l. c. §§ 10, 11.

†††) Liouv. J. (3) II S. 177—233 (1876), V S. 345--379 (1879).

Vgl. dazu noch die Noten in den C. R. LXXX S. 875—877, 1160—1161, (1875), LXXXI S. 495—498 (1875), LXXXII S. 269—270 (1876), LXXXVII S. 202—204 (1878).

In der ersten Abhandlung giebt der Verf. eine übersichtliche Darstellung der älteren Gordan'schen Theorie.

Verfahren Gordan's, aus den beiden vollen Systemen von zwei binären Formen deren simultanes System herzuleiten, wobei die beizubehaltenden Ueberschiebungen durch die kleinsten (positiven) Lösungen zweier diophantischen Gleichungen definirt werden. Diese Lösungen hat Jordan zahlentheoretisch näher untersucht, und successive immer niedrigere Anzahlen als obere Grenzen erhalten. Um sein Endresultat*) anzugeben, so denke man sich eine beliebige Reihe von Urformen vorgelegt, deren Ordnungen $\leqq$ n seien. Jede Covariante des vollen Systems wird linear zusammengesetzt aus Producten von dreierlei Formentypen, für deren Grad und Ordnung jeweils obere Grenzen existiren. Diese letzteren sind einfache ganze Functionen von n, enthalten aber sämtlich einen Factor $3^{\rho+1}$, wo ρ transcendent bestimmt wird, als grösste ganze Zahl des Bruches $1+\frac{\lg\frac{1}{4}n}{\lg\frac{4}{3}}$.

Beispielsweise ergeben sich, den Fällen $n = 1$ bis 12 (excl. 11) entsprechend, für die Ordnung der bezüglichen Covarianten die oberen Grenzen 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, 34.

Diese Grenzen werden sogar alle thatsächlich erreicht, wie die Sylvester-Franklin'schen Tafeln für die Systeme einer einzelnen Form f_n zeigen**).

Sylvester***) hat ohne Beweis ähnliche Formeln gegeben, die noch einfacher sind, da sie nur rationale Zahlencoefficienten enthalten, dafür aber zu wesentlich höheren Anzahlen führen.

Sodann hat Sylvester†) ein Verfahren mitgeteilt, für die Gesamtanzahl der Bildungen eines vollen Systems einer Urform gerader Ordnung eine ziemlich niedrige Grenze zu gewinnen.

Die Grenze hängt von der algebraischen Summe der Coefficienten seiner Repr. Erz. Fct. ab.

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit der Berücksichtigung der Erweiterungen, welche der Cayley-Sylvester'sche Satz „über die Anzahl der linear unabhängigen Bildungen (des binären Gebietes) von vorgegebenen Gradordnungen" auf Formen mit mehreren Reihen von n Variabeln erfahren hat.

Die vorbereitenden Grundlagen für eine Lösung dieses wichtigen

---

*) Siehe die zweitcitirte Abhandlung.

**) Am. J. II S. 223—251.

***) Proc. of London XXVII S. 11—13 (1878).

†) C. R. LXXXVI S. 1437—1441, 1491—1492, 1519—1522.

und schwierigen Problem's hat Capelli*) gelegt. Der Satz, von dem er ausgeht, lehrt eine Form F von n Reihen von n Variabeln:

$$x_i', \; x_i'', \; x_i''', \; \ldots, \; x_i^{(n)} \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nach Potenzen der Determinante Δ der x so zu entwickeln, dass die Coefficienten Polaren von Formen werden, welche eine Variabelnreihe weniger enthalten und ihrerseits gleichfalls aus F durch blosse Anwendung von Polarenprocessen entstehen.

Diese Polarenprocesse beziehen sich auf die Variabeln und setzen sich aus lauter solchen von der Gestalt $D_{xy} = \Sigma y_i \frac{\partial}{\partial x_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$ mittelst Wiederholung und Combination zusammen.

Wendet man jenen Fundamentalsatz auf eine Bildung φ an, die von einer Reihe von Urformen $f_1, f_2, \ldots$ mit einer beliebigen Anzahl von (cogredienten) Variabelnreihen invariant abhängt, so lässt sich φ darstellen als ein Aggregat von Producten „$\Omega\Phi$" identischer Covarianten mit invarianten Bildungen von gewissen (homogenen und isobaren) Formen Φ, welche höchstens $n-1$ Variabelnreihen enthalten, und den $n-1$ charakteristischen Differentialgleichungen

$$\text{I} \quad D_{x'x''}\Phi = 0, \quad D_{x'x'''}\Phi = 0, \quad \ldots, \quad D_{x'x^{(n)}}\Phi = 0$$

oder auch den folgenden**)

$$\text{I}' \quad D_{x'x''}\Phi = 0, \quad D_{x''x'''}\Phi = 0, \quad \ldots \quad D_{x^{(n-1)}x^{(n)}}\Phi = 0$$

genügen.

Die ursprüngliche Aufgabe kommt nun vor allem auf die einfachere zurück: die Anzahl der linear unabhängigen Formen Φ — die man noch durch Multiplication mit je einer geeigneten Potenz von Δ mit einem constanten Gewicht, etwa Null, ausstatten kann — zu ermitteln, welche von vorgegebenen Graden in den Coefficienten der f und von vorgegebenen Ordnungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ in den bezüglichen Reihen der x sind.

Bezeichnet man mit $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ die Anzahl der willkürlichen Coefficienten von Φ, so beweist der Verfasser, dass die denselben durch

*) „Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche", Mem. Rom. Acc. L. XII S. 1—72 (1882).

Eine nähere Ausführung findet sich im Batt. G. XX S. 293—301 (1882). Für gewisse Arten von invarianten Bildungen, z. B. solchen, die in allen Variabelnreihen von gleicher Ordnung sind, hatte der Verf. schon vorher elegante Anzahlformen abgeleitet, Batt. G. XIX S. 87—116 (1881).

Eine Ausdehnung des Text-Problems auf Formen mit mehreren Reihen von cogredienten Variabeln, welche von einander unabhängigen linearen Substitutionen unterworfen werden, hat derselbe Verf. ausgeführt in Mem. Rom. Acc. L. XV (1883). Auch hier kommt es darauf an, alle ganzzahligen Lösungen eines, bei der Partition von Zahlen auftretenden Gleichungssystems aufzufinden. Die bez. Hülfssätze sind zusammengestellt im Batt. G. XXI S. 343—355 (1883).

**) Siehe die zweitcitirte Arbeit S. 297.

eine einzelne der Gleichungen I′, etwa die erste, auferlegten Bedingungen linear unabhängig von einander sind, und dass ihre Anzahl durch $\varphi(\vartheta_1-1, \vartheta_2+1, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n)$ bestimmt wird.

Darin ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des Cayley-Sylvester'schen Satzes ausgedrückt*).

Hingegen erweisen sich die durch zwei und mehrere der Gleichungen I′ involvirten Bedingungen als nicht mehr linear unabhängig von einander, und Capelli begnügt sich daher mit der Angabe einer unteren Grenze für die in Rede stehende Anzahl.

Eine vollständige Lösung der letzteren Aufgabe und weiterhin zugleich der ursprünglichen verdankt man Deruyts**).

Deruyts umgeht die directe Benutzung der Differentialgleichungen, indem er die Frage nach der Anzahl der Φ abermals zurückführt auf diejenige ihrer „Leitglieder".

Schreibt man letztere symbolisch, so erkennt man, dass sie sich hinsichtlich der vorliegenden Frage ersetzen lassen durch „Seminvarianten" von linearen Urformen: dann aber genügt die Untersuchung eines Systems linearer diophantischer Gleichungen, deren Lösungen, von einer Gesamtanzahl „Π", als linear unabhängig nachgewiesen werden.

Andererseits lässt sich beweisen, dass die Anzahl der ursprünglich gesuchten φ übereinstimmt mit derjenigen der oben erwähnten Productformen $\Omega\varphi$.

Greift man nun eine einzelne solche Form Φ mit bestimmten Gewichtszahlen heraus, so dient zur Bestimmung der zugehörigen Anzahl „Π'" von Formen $\Omega\Phi$ ein Verfahren, welches dem oben bezüglich Π angedeuteten durchaus analog ist.

Bildet man daher schliesslich die Summe der Producte je zweier der berechneten Zahlen Π, Π' für alle möglichen Combinationen von Gewichtszahlen der Φ — welch' letztere wiederum durch die Lösungen

---

*) Eine gewisse Ausdehnung des in Rede stehenden Satzes auf ein System binärer Urformen rührt von Study her („Methoden ..." S. 100). Sind die r Urformen von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_r$, so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Covarianten mit den Gradzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gleich

$$\binom{n_1+p_1}{p_1}\binom{n_2+p_2}{p_2}\cdots\binom{n_r+p_r}{p_r}.$$

Auch für höhere Gebiete existirt eine entsprechende Anzahl für die sogenannten „Normalcovarianten". Vgl. noch Stroh, Math. Ann. XXII, bes. S. 405 (1883).

**) „Théorie générale ..." 1891 Chap. VII. Hier geschieht die Abzählung nur für eine gewisse Gattung von Covarianten, während sie Bull. Belg. (3) XXI S. 437—451 (1891) allgemein ausgeführt wird. Im übrigen vgl. II. D, a.

einer diophantischen Gleichung, der sogenannten „Gewichtsgleichung“ charakterisirt sind — so hat man damit in der That eine Regel zur Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen invarianten Bildungen φ, die gegebene Grade in den Coefficienten der Urformen und gegebene Ordnungen in einer beliebigen Anzahl von (cogredienten) Variabelnreihen besitzen: dabei darf diese letztere Anzahl kleiner, gleich oder grösser sein als diejenige der in den Urformen auftretenden Variabelnreihen.

II. B.

Irrationale Fragestellungen.

In den bislang erörterten Untersuchungen ist fast ausschliesslich der rationale bezw. ganz-rationale Gesichtspunkt massgebend gewesen.

Allerdings haben sich schon von Anfang an, insbesondere durch den Einfluss der Geometrie, irrationale Fragen vereinzelt aufgedrängt; doch ist man erst neuerdings zu einer systematischen Einführung irrationaler In- und Covarianten veranlasst worden, und eine durchgebildete Theorie dieses Gegenstandes existirt überhaupt noch nicht.

Es lassen sich historisch zwei Strömungen unterscheiden. Einmal liegt (wie bei den quadratischen Formen) die durch praktische Bedürfnisse hervorgerufene Frage nach gewissen invarianten „canonischen“ Gestalten von gegebenen Formen zu Grunde, zu deren Durchführung die Auflösung algebraischer Hülfsgleichungen erforderlich ist.

Andererseits wird innerhalb der Theorie der invarianten Bildungen eine Art „Umkehrproblem“ aufgeworfen, indem man sich eine oder mehrere der aus Urformen abgeleiteten Bildungen — unter der stillschweigenden Bedingung des Erfülltseins der ev. zwischen ihnen herrschenden Relationen — als beliebig gegeben vorgelegt denkt und nunmehr rückwärts hieraus die zugehörigen Stammformen zu ermitteln sucht. Es wird diese Aufgabe im allgemeinen eine mehrdeutige sein, und es wird sich dann darum handeln, in erster Linie die Anzahl der jeweils zugehörigen Stammformen festzustellen, weiterhin aber auch die Gleichungen, von deren Auflösung jene abhängen.

Freilich ist diese zweite Art von Problemen — die uns als notwendige Ergänzung zur Theorie der rationalen Invarianten und ihrer Syzygien eine Zukunft zu haben scheint — nur erst in wenigen vereinzelten Fällen verfolgt worden.

II. B, a.
Canonisirung von Formen.

Die Grundlagen dieser Disciplin*) gehören der früheren Periode an. Um mit den binären Formen zu beginnen, so zeigten Sylvester und Cayley, wie sich dieselben als lineare Combinationen von Potenzen linearer Ausdrücke $x-\alpha$ darstellen lassen. Es existiren einfache Covarianten („Canonizanten"), deren Wurzeln die gesuchten Werte α sind: in einzelnen Fällen liess sich auch erkennen, welche Modificationen eintreten, wenn einige der α einander gleich werden.

Eine, alle Ausnahmefälle umfassende Abrundung der Theorie ist erst später von Gundelfinger**) unter Heranziehung analytischer Hülfsmittel gegeben worden; indem er den partiellen Differentialausdruck für die kte Ueberschiebung zweier Binärformen in geeigneter Weise umwandelt***), ist er in der Lage, eine Reihe bekannter Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die der Invarianten zu übertragen.

Um sein Endresultat mitzuteilen, seien $a_0, a_1, \ldots$ die Coefficienten einer Urform f_n. Man bilde dann die Kette der „canonisirenden" Covarianten $C, C', C'', \ldots$ mit den Leitgliedern:

$$a_0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

Soll f_n als Summe von genau k $n$ten Potenzen darstellbar sein, so hat zunächst $C^{(k)}$ (aber nicht $C^{(k-1)}$) identisch zu verschwinden. Dann existirt eine Form Γ_k, deren kte Ueberschiebung mit f identisch Null ist: die Gleichung $\Gamma_k = 0$ muss ausserdem lauter ungleiche Wurzeln α besitzen.

---

*) Es war erlaubt, den Text so knapp zu halten, da gerade dieses Kapitel in den Lehrbüchern von Clebsch, Salmon, Bruno, Gordan ausführlich behandelt wird. Wie die Darstellungen von Sylvester und Cayley auf mehrfach lineare Formen ausgedehnt werden können, hat le Paige eingehend verfolgt: Belg. B. (3) II S. 40—53, C. R. XCII S. 1048—1049, 1103—1105, XCIII S. 264 bis 265, 509—512 (1881); C. R. XCIV S. 31—32, 69—71, 424—426, Tor. Atti XVII S. 299—320 (1882); Rom. Acc. P. N. XXXV S. 54—84, 140—145, Lisboa Jorn. de sciencias math. ... IX (1883).

**) Gött. Nachr. 1883 S. 115—121, und ausführlicher Journ. f. Math. C S. 413—424.

***) Die gemeinte Identität lautet für die kte Ueberschiebung von zwei Formen f_n und φ_m in der nicht homogenen Variabeln x:

$$\frac{1}{k!}(f,\varphi)^k = \binom{n}{k} f \frac{d^k\varphi}{dx^k} - \binom{n-1}{k-1}\binom{m-k+1}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \binom{m}{k}\frac{d^k f}{dx^k}\varphi.$$

Vgl. dazu die Bemerkung von Hilbert, Math. Ann. XXX S. 15.

Umgekehrt sind diese beiden Bedingungen auch hinreichend für die geforderte Darstellung als Summe von Potenzen $(x-\alpha)^n$.

Fallen dagegen die Wurzeln von $\Gamma_k = 0$ zum Teil zusammen, so ergiebt sich — durch ein Verfahren der Partialbruchzerlegung — für f_n ein Ausdruck als Summe von gewissen $k_i$ten ($k_i \leqq n$) Potenzen, jede noch mit einer Ergänzungsform der Ordnung $n-k_i$ multiplicirt.

Ein entsprechender Satz gilt für eine simultane Darstellung von n Formen n ter Ordnung.

Sehen wir indessen von den Ausnahmefällen (wo die α teilweise coincidiren) ab, so findet sich der Kern des obigen Kriteriums, die Einführung der Form Γ_k, bereits bei Rosanes*), der die letztere als conjugirt zu f_n bezeichnet.

Rosanes hat zugleich seine Untersuchungen ausgedehnt auf n binäre f_n, sowie auf Formen höherer Gebiete. Geometrisch gesprochen, ist eine Curve (Fläche) n ter Ordnung conjugirt zu jedem ihrer, n-fach gezählten Punkte. Die Potenzdarstellungen von Formen treten danach in die innigste Beziehung zur Theorie der sogenannten „Polpolygone resp. -polyeder" etc., die dadurch eine wesentliche Bereicherung erfährt.

Auf ganz anderem Wege ist Reye**) zu diesem Zusammenhange gelangt, indem er sich ursprünglich die Frage vorlegte, durch welche geringste Anzahl von discreten Massenpunkten ein gegebener Körper hinsichtlich seiner auf eine beliebige Ebene bezogenen n ten Momente ersetzt werden kann.

Die Gleichung $F_n = 0$ einer Fläche als Summe von R vollen Potenzen darstellen, heisst dann, die Fläche als „n te Momentenfläche" eines, durch k Punkte ersetzbaren Körpers aufzufassen, d. i. als diejenige Fläche, bezüglich deren Berührungsebenen das n te Moment des Körpers verschwindet.

Mit diesen Mitteln hat Reye***) nicht nur z. B. einen einfachen geometrischen Beweis für das sogenannte „Pentaeder" einer Fläche 3. Ordnung gegeben, d. i. für die zuerst von Sylvester bemerkte eindeutige Darstellung†) einer kubischen quaternären Form als Summe von fünf

---

*) Journ. f. Math. LXXV S. 172—176 (1873), LXXVI S. 312—330 (1873), Math. Ann. VI S. 264—312 (1873).

Der Zusammenhang zwischen den canonischen Formen und der Apolaritätstheorie ist in dem Abschnitt über Combinanten II. D, b eingehender dargelegt.

**) Journ. f. Math. LXXII S. 293—326 (1870).

***) Journ. f. Math. LXXVIII S. 114—122 (1874).

†) Siehe die historischen Bemerkungen in der Clebsch-Biographie, Math. Ann. VII S. 17.

Kuben, sondern auch gezeigt, in welcher Richtung dieser Satz einer Verallgemeinerung fähig ist*).

Welche Verwandtschaften zwischen den Gesichtspunkten von Rosanes und Reye bestehen, hat Referent**) ausführlich dargelegt, und insbesondere nachgewiesen, wie die canonischen Darstellungen in höheren Gebieten vermöge der Theorie der symmetrischen Functionen auf solche in niedrigeren Gebieten zurückgeführt werden können.

Um zu den binären Formen zurückzukehren, so hat in jüngster Zeit Bauer***), im Anschluss an Rosanes, für die binären Formen f_{2n} gerader Ordnung als Summe von $n+1$ Potenzen einen eleganten Ausdruck abgeleitet, in dem alle auftretenden Formen einfache Covarianten von f sind.

Hilbert†) hat, vermöge eines eigentümlichen Differentiationsprocesses, ein durchsichtiges Invarianten-Kriterium dafür ermittelt, dass eine vorgelegte binäre Form die volle Potenz einer andern ist.

Hilbert††) verdankt man ferner die Unterordnung der verschiedenartigsten canonischen Darstellungen unter ein allgemeines Princip, wobei

---

*) Journ. f. Math. LXXVIII S. 123—129 (1874).

**) „Apolarität und rationale Curven", Tübingen 1883.

***) Münch. Ber. 1892 S. 3—20.

†) Math. Ann. XXVII S. 158—160 (1886). Wegen der Methode vgl. II. C, b, δ.

Für die einfacheren Fälle hatte schon vorher (1883) Maisano die Covariante angegeben, deren identisches Verschwinden das Kriterium für die in Rede stehende Potenzdarstellung ist: Rom. Acc. L. (3) VII S. 231—233. So hat man für f_n als $n$te Potenz: $H_x^{2n-4} = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \equiv 0$, für f als $\frac{n}{2}$te Potenz: $T = (aH) a_x^{n-1} H_x^{2n-5} \equiv 0$ etc.

††) Leipz. Ber. 1885 S. 427—438, Math. Ann. XXVIII S. 381—446 (1887).

Wegen des Zusammenhanges mit der Normirung linearer Differentialgleichungen vgl. II. C, b, β.

Ist $n = 2i$ die Ordnung von f, so macht sich für das Studium der Hülfsgleichung die Unterscheidung von vier Hauptfällen notwendig, jenachdem die beiden Zahlen i und ν gerade resp. ungerade sind.

In dreien dieser Fälle besitzt die Hülfsgleichung im allgemeinen $\nu+1$ verschiedene Wurzeln λ, im letzten jedoch (wenn i gerade, ν ungerade) $\frac{\nu+1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln λ.

Die zugehörigen Formen φ, deren es in allen vier Fällen $\nu+1$ linear von einander unabhängige giebt, werden durch Determinantenränderung erhalten.

Umgekehrt lassen sich für ein vorgelegtes System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen νter Ordnung die Kriterien dafür aufstellen, dass sie ein Formensystem φ bilden; sie bestehen in der Existenz gewisser linearer Relationen zwischen den quadratischen Invarianten und Covarianten des gegebenen Formensystems.

Im Journ. de Math. (4) IV S. 249—256 (1888) hat Hilbert an treffenden Beispielen (Formen dritter Ordnung) gezeigt, mit welchem Erfolge sich sein Princip auf das ternäre und quaternäre Gebiet übertragen lässt.

der irrationale Kern des Ganzen deutlicher, als bisher, hervortritt; es werden alle Formen φ_ν (von einer Ordnung ν) gesucht, deren — passend hoch genommene — Ueberschiebung über eine Stammform f (sc. von gerader Ordnung) sich von der letzteren nur um einen constanten Factor λ unterscheidet. Dieses λ, eine irrationale Invariante von f, hängt von einer Hülfsgleichung $(\nu+1)$ter Ordnung, mit rationalen Invarianten als Coefficienten, ab, die sich in eine charakteristische Determinantengestalt bringen lässt. Der Verfasser ist in der Lage, die verschiedenen Ausartungen der Urform f zu verfolgen, die entstehen, wenn jene Gleichung zusammenfallende Wurzeln λ aufweist.

Die Formen φ erscheinen als irrationale Covarianten.

Auf die mannigfachen canonischen Formen, welche die Gleichungstheorie vermöge Resolventenbildung und Tschirnhausentransformation für ihre Zwecke aufgestellt hat, kann hier nur hingewiesen werden: als einem specifischen Invariantenproblem entspringend, seien zwei eigentümliche Formen für die f_6 erwähnt, welche von Brill*) herstammen.

---

*) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882).

Die gemeinten canonischen Formen sind: $x^6+2px^5+3qx^4+4rx^3+3x^2+2px+q$ und $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+1$. Man gelangt zu denselben auf folgende Art.

Unter den durch lineare Combination von drei binären biquadratischen Formen entstehenden Formen befinden sich einmal drei Producte quadratischer von der Art: $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi_3$, $\varphi_3\varphi_1$, sodann aber vier Quadrate $\psi_1^2, \ldots, \psi_4^2$. Sind x_i, y_i die Verschwindungswerte von φ_i; ε_k, η_k die von ψ_k, so geht die „Functionaldeterminante“ W_6, d.i. die Determinante der zweiten Ableitungen der drei vorgelegten Formen mittels der Substitutionen $x' = \frac{x - x_i}{x - y_i}$ resp. $x' = \frac{x - \varepsilon_k}{x - \eta_k}$ in jene canonischen Gestalten über. Vgl. die Darstellung beim Referenten „Apolarität ...“ S. 312. Brill verwendet die canonische Form unter anderem zu einer übersichtlichen Discussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln einer Gleichung sechster Ordnung.

Eine andere canonische („typische“) Gestalt der Formen f_6 findet sich, wie beiläufig erwähnt sei, bei Maschke und Brioschi, nämlich: $x^6+\alpha x^4+\beta x^3+\frac{\alpha^2}{4}x^2+\gamma x+\delta$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Invarianten von f_6 bedeuten. Die Wurzeln der Gleichung $f_6 = 0$ erscheinen dann ausgedrückt durch einfache ganze Functionen von vier, zur f_6 gehörenden ϑ-Functionen. Siehe Maschke, Gött. N. 1887. S. 421—424, Math. Ann. XXX S. 496—515 (1887), Rom. Acc. L. Rend. (4) IV S. 181—184 (1888); Brioschi: Bemerkungen zur letztgenannten Arbeit ebenda, sowie ausführlicher Acta. Math. XII S. 83—101 (1888). Eine zweite typische Gestalt der f_6, bei der die Coefficienten der fünften und dritten Potenz der Unbekannten verschwinden, hatte Brioschi schon früher mit Hülfe von Syzygien gewonnen: Annali di Mat. (2) XI S. 291—304 (1883).

In dem besonderen Falle, wo eine f_6 die Hesse'sche Covariante einer f_5 ist, kann dieselbe durch lineare Substitution auf die canonische Form der Multiplicatorgleichung 6. Ordnung gebracht werden, aber nicht auf diejenige der entsprechenden Modulargleichung (Lindemann, Math. Ann. XXI S. 71—109, 1883).

Dagegen gedenken wir zum Schlusse einer charakteristischen canonischen Darstellung als Quadratsummen der sogenannten „definiten“ Formen $n$ter Ordnung von m Variabeln, d. i. derjenigen Formen mit reellen Coefficienten, welchen für alle reellen Wertsysteme der Variabeln nur einerlei Vorzeichen zukommt. Zu den bekannten Fällen $n = 2$, m beliebig, und $m = 2$, n beliebig hat Hilbert*) noch einen dritten: $n = 4$, $m = 3$ hinzugefügt, wo eine Darstellung (mit drei willkürlichen Parametern) als Summe von drei Quadraten existirt.

Die Bedeutung dieses Ergebnisses tritt aber erst dadurch an's Licht, als Hilbert der Nachweis gelingt, dass es bei allen übrigen Combinationen der Zahlen n, m Fälle von definiten Formen giebt, die eine Darstellung als Summe von Quadraten nicht zulassen.

II. B, b.
Rückkehr von Covarianten zu den Urformen. Irrationale In- und Covarianten.

Das berühmte Problem der Zahlentheorie, alle „nichtäquivalenten“, d. h. vermöge (ganzzahliger) linearer Substitutionen nicht in einander überführbaren Typen quadratischer binärer Formen von gegebener Determinante zunächst der Anzahl nach aufzustellen, hat die anfängliche Entwickelung der Invariantentheorie nicht unwesentlich beeinflusst. Indem Hermite**) die Verallgemeinerung jenes Problems auf binäre Formen höherer Ordnung in Angriff nahm, war er genötigt, die formentheoretischen Methoden weiter auszubilden.

Andererseits führte die Geometrie auf derartige „Rückkehrfragen“. Eines der bemerkenswertesten und ersten Beispiele bietet die ebene Curve dritter Ordnung $C_3 = 0$, zu der eine covariante Curve $H_3 = 0$ gehört (welche aus der ersteren die Wendepunkte ausschneidet). Hesse entdeckte nicht nur die letztere, sondern fand auch, dass umgekehrt zu einer, als gegeben gedachten H_3 drei verschiedene C_3 gehören: die bezügliche Gleichung 3. Ordnung bildet einen Angelpunkt der ganzen Theorie.

Eine systematische Behandlung solcher Fragen hat in der Theorie der Formen erst später Platz gegriffen.

Im binären Gebiete hat sich, besonders auch rücksichtlich der zahlreichen geometrischen Anwendungen, das Problem in den Vordergrund gedrängt, alle nicht äquivalenten Typen von Formenbüscheln $f_n + k\varphi_n$ aufzusuchen, deren Functionaldeterminante (f, φ) eine vorgegebene Form

*) Math. Ann. XXXII S. 332—350 (1888).
**) Siehe Einleitung S. 88.

$f_{2(n-1)}$ der Ordnung $2(n-1)$ ist. Dass dieses Problem in der That nur eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt, d. h. dass zwischen den Coefficienten der $f_{2(n-1)}$ keinerlei Relationen existiren, hat zuerst Brill*) nachgewiesen.

Die Erledigung des einfachsten Falles $n = 3$ mit zwei Lösungen stiess nur auf geringe Schwierigkeiten**). Wesentlich anders liegt die Sache schon beim nächsten Falle $n = 4$, der zu fünf Lösungen führt***). Die Gleichung 5. Ordnung, von welcher dieselben abhängen, hat Stephanos****) in invariantentheoretischer Gestalt aufgestellt: den inneren Zusammenhang der fünf Formenbüschel $f + k\varphi$ untereinander sowie andererseits mit der Theorie der quadratischen Formen und der Gleichungen 6. Ordnung hat Brill†) erforscht, weiterhin der Referent††) denjenigen mit der Theorie der rationalen ebenen C_4 und C_6, sowie endlich mit der Theorie der kubischen Raumcurven.

Für ein beliebiges n hat der Referent†††) zuerst die Anzahl der Lösungen (mittels der „Methode des Projicirens“) abgeleitet, welche bald darauf direct durch Stephanos††††) und auf anzahlgeometrischem Wege durch Schubert*†) bestätigt worden ist.

Aber erst Hilbert*††) war im Stande, auf Grund des im vorigen Abschnitt erwähnten Principes, die Gleichung für die Lösungen des Problems in fertiger Gestalt zu bilden, und zugleich auch das verwandte Problem der Formenbüschel mit vorgegebener Discriminante*†††) durchzuführen.

---

*) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882). Vgl. die Darstellung beim Referenten: „Apolarität...“ S. 320.

**) Siehe z. B. Caporali, Nap. Rend. XXII S. 95—114 (1883).

***) In dem besonderen Falle, dass das Büschel von f_4 dasjenige der ersten Polaren einer f_5 wird, giebt es nur eine Lösung. Die Functionaldeterminante fällt hier mit der Hesse'schen Covariante H der f_5 zusammen. (Lindemann, Math. Ann. XXI S. 71—109, 1883.)

****) C. R. XCIII S. 994—997. (1881). Dies ist ein Auszug aus einer grösseren (preisgekrönten) Abhandlung, die 1883 in den Sav. étr. erschien, 138 S.

†) Math. Ann. XX S. 330—357 (1882).

††) „Apolarität...“ (1883).

†††) l. c. S. 391. Es giebt $\frac{2.(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}$ Büschel von Formen f_{n+1} bei gegebener Functionaldeterminante 2nter Ordnung.

††††) Thèse 1884, 64 S.

*†) Acta Math. VIII S. 97—117 (1886). Hier erscheint das Problem des Textes als specieller Fall eines sehr viel allgemeineren, der Theorie der höheren linearen Räume angehörigen.

*††) Leipz. Ber. S. 112—122 (1887); Math. Ann. XXXIII S. 217—236 (1888).

*†††) Math. Ann. XXXI S. 482—492 (1888).

Für $n = 4$ kommt die Aufgabe auf die andere zurück, eine f_6 auf die canonische Gestalt $\varphi_2^3 - \varphi_3^2$ zu bringen, und hängt daher von der nämlichen Hülfs-

Im nächst höheren Gebiete, von zwei unabhängigen Variabeln, hat Hurwitz*) mit functionentheoretischen Mitteln die schwierige Aufgabe bewältigt, die Urformen zu finden, wenn die Discriminante, oder genauer, deren „wesentliche" Teiler gegeben sind, oder, nach seiner Ausdrucksweise, die Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten zu ermitteln. Sein Resultat umfasst die früheren als specielle Fälle.

Es sei ferner hingewiesen auf ein eigentümliches Umkehrproblem, welches die neueren Methoden zur Auflösung der höheren Gleichungen charakterisirt**): es handelt sich darum, wenn man den Formen eines vollen Systems feste (sc. mit einander verträgliche) Zahlenwerte beigelegt denkt, die Gleichung aufzustellen, von welcher die Bestimmung der bezüglichen Urform abhängt. — Zum Schlusse erwähnen wir noch des Aufschwunges, den die Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen durch die systematische Einführung irrationaler Formen genommen hat.

Was zunächst den ersteren Fall angeht, so kann, wie Klein***) betont hat, das elliptische Integral erster Gattung unendlich viele canonische Gestalten annehmen, je nach der Ausdehnung des Raumes, in welchem man die elliptische „Normalcurve" — über welche das Integral hinzuerstrecken ist — zu Grunde legt. Der „Modul" des Integrals ist dann eine absolute irrationale Invariante jener Curve.

Weit mannigfaltiger gestaltet sich eine entsprechende Theorie für das Geschlecht $p = 2$ und $p = 3$†). Beschränkt man sich im letzteren Falle auf die einfachste Normalcurve, eine ebene C_4, so modificirt sich der Charakter der zugehörigen Integrale und Θ-Functionen (nebst

---

gleichung 40. Ordnung ab, welche Clebsch behufs Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen aufgestellt hatte. (Gött. Abh. XV, 1869; Math. Ann. II S. 193—197 (1870)).

*) Math. Ann. XXXIX S. 1—61 (1891). Hier findet sich auch eine Zusammenstellung der verwandten Litteratur.

**) Siehe etwa Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder...", sowie die früher citirten Arbeiten von Klein und Gordan über Gleichungen fünfter und siebenter Ordnung (I. B, b). Auf eine fernere Art von Umkehrproblem, welches neuerdings von Gordan aufgeworfen ist und übrigens nur eine einzige Lösung zulässt, ist schon auf S. 156, 157 aufmerksam gemacht worden.

***) Math. Ann. XVII S. 133—138 (1880). Leipz. Abh. 1885 S. 339—399. Vgl. Pick, Math. Ann. XXVIII S. 309—318 (1887), Wien. Ber. Juni 1888, 7 S., März 1889, 28 S.

†) Bezüglich des Geschlechtes $p = 2$ sei etwa verwiesen auf die bez. Arbeiten von Klein, Burkhardt und Wiltheiss in den Math. Ann., vom 27. Band an, wo man weitere Litteraturangaben nachsehen möge.

Hinsichtlich des Geschlechtes $p = 3$ siehe Pick, Math. Ann. XXIX S. 259 bis 271 (1887), eine Note von Klein in den Gött. N. 1888, S. 191—194, sowie Math. Ann. XXXVI S. 1—83 (1890), Wiltheiss ebd. XXXVIII S. 1—23 (1890), Pascal, vier Abhandlungen, Annali di Mat. (2) XVII, XVIII (1889, 1890).

deren Differentialgleichungen) je nach dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich. Zu einem solchen wird man gelangen, wenn man einen jeweils passend ausgesuchten irrationalen Bestandteil der mit der C_4 invariant verknüpften Systeme von „Berührungscurven" adjungirt.

Die Coordinaten eines Punktes der Ebene der C_4 fallen hier mit den (drei) Functionen „φ" zusammen, sodass eine lineare Transformation der ersteren der allgemeinsten (eindeutigen) rationalen Transformation der algebraischen Functionen vom Geschlecht drei äquivalent ist.

Insbesondere hat Klein*) hervorgehoben, dass die hier zur Verwendung gelangenden invarianten Bildungen im allgemeinen die Natur von „Combinanten" besitzen, d. h. sich auf Urformen beziehen, welche verschieden ausgedehnte Variabelnreihen aufweisen, die unabhängigen Substitutionen unterworfen werden.

Es liegt auf der Hand, dass derartige Untersuchungen zu gleicher Zeit die rein geometrische**) Theorie der C_4 wesentlich zu fördern geeignet sind.

II. C.
Symbolik und Invariantenprocesse.

Wir gelangen nunmehr zu dem engeren Gebiete der Invariantentheorie, zu den daselbst zur Verwendung gelangenden Processen. Diese teilen sich naturgemäss in zwei Hauptklassen, die symbolischen und die realen; letztere setzen sich aus Differentiationsprocessen zusammen, welche auf Formen ausgeübt werden, während die ersteren recht eigentlich der Algebra angehören. In der That erkennt man bald, dass das der formentheoretischen Symbolik zu Grunde liegende Princip im wesentlichen übereinstimmt***) mit dem seit Kummer allgemein eingeführten Princip der „idealen Zahlen", welches darin besteht, algebraische Zahlen und Formen, die in einem gegebenen Rationalitätsbereiche irreducibel sind, mittels „Adjunction" geeigneter Irrationalitäten in ideale (Prim-) Factoren einfacherer Art zu zerlegen, so zwar, dass die letzteren den gewöhnlichen Verknüpfungsgesetzen der Arithmetik unterliegen. Erst in gewissen (mul-

*) Gött. N. 1888 S. 191—194.
Eine weitere Ausführung in diesem Sinne liegt vor bei Wirtinger, Math. Ann. XL S. 361—412 (1892).

**) Vgl. in dieser Hinsicht Frobenius, Journ. f. Math. IC S. 275—314 (1886), CIII S. 139—183 (1888).

***) Ein anderes Bild für das Wesen der Symbolik bietet die Chemie, insofern der Begriff des Molecüls dem der algebraischen Form, der des Atoms dem symbolischen Element der Form correspondirt. Vgl. unter II. c, a, β die bez. Anschauungen Sylvester's.

tiplicativen) Verbindungen werden diese idealen Elemente wiederum zu Grössen des ursprünglichen Bereiches.

II. C, a.
Symbolik und graphische Darstellung.
II. C, a, α. Deutsche Richtung.

Die von Clebsch und Aronhold eingeführte symbolische Methode*), welche inzwischen durch Gordan und seine Schule zu einer gewissen Vollendung gebracht ist, bezweckt, die Invariantentheorie der Formen beliebiger Ordnung auf diejenige der Linearformen zurückzuführen, und einen dementsprechenden, bequem zu handhabenden Algorithmus zu entwickeln. Ein solcher Algorithmus soll also, wie von vornherein betont sei, ausschliesslich die linearen Abhängigkeiten resp. Unabhängigkeiten zwischen den Coefficienten vorgelegter Formen wiedergeben.

Zunächst wird man**), wenn etwa eine Invariante J einer einzelnen Urform f vorliegt, die vom pten Grade in den Coefficienten von f ist, der Form J eine andere J_1 eindeutig „zuordnen", welche in den p Coefficientenreihen von p, zu f analogen Formen $f_1, f_2, \ldots, f_p$ je linear ist.

Sodann wird man, in Anwendung des nämlichen Princips auf die Urform f selbst (oder ihre äquivalenten Repräsentanten $f_1, f_2, \ldots, f_p$), die von der νten Ordnung in einer einzigen Variabelnreihe x sein mag, f in ν ideale Linearformen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n, \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n, \ \ldots$$
$$\ldots, \ n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \cdots + n_n \omega_n$$

zerlegen. Es zeigt sich aber, dass man hier, unbeschadet des eindeutigen Rückganges zu den realen Formen, sowohl die n Reihen der Coefficienten a, b, …, n, als auch diejenigen der Variabeln x, y, …, ω jeweils mit einander identificiren darf, sodass die p Formen f_i übergehen in p analoge nte Potenzen von Linearformen $a'_x, a''_x, \ldots$

Eine erste unmittelbare, höchst wichtige Folge dieser Darstellung ist diese. Unterwirft man jetzt die Variabeln x einer linearen Substitution, wodurch sie in neue Variabeln y, die Formen f_i in neue Formen F_i über-

*) Wir verweisen den Leser, der möglichst rasch in die Symbolik eingeführt zu werden wünscht, auf den ersten Abschnitt von Gordan's Vorlesungen II. Im übrigen siehe diesen Bericht S. 97 u. flgde.

Eine Reihe von Anwendungen der Symbolik kann übrigens erst in den späteren Abschnitten, in Verknüpfung mit den realen Processen, verständlich gemacht werden.

**) Vgl. die Entwickelungen bei Study „Methoden …", I § 5, II §§ 2, 5, 6, die sich eingehend mit dem inneren Wesen der Symbolik beschäftigen.

gehen, und schreibt man die transformirten Formen F wiederum symbolisch als nte Potenzen von Linearformen $A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$ etc., „so nimmt die vermöge der Substitutionsgruppe der Variabeln x inducirte Substitutionsgruppe der Coefficienten von f_i die einfache Gestalt an, dass die A von den a etc., bis auf die Transposition der Substitutionscoefficienten, genau so abhängen, wie die x von den y".

Daraus geht ohne weiteres hervor, dass man beliebig viele Invarianten von f hinschreiben kann; man hat nur aus den n-reihigen Determinanten der a', a'', ... derartige Producte zu bilden, dass jede dieser Symbolreihen im ganzen ν-mal vorkommt. — Der Angelpunkt der ganzen Theorie ist, wie Clebsch*) zuerst bewies, die Umkehrung dieses Satzes, „dass also jede (ganz-rationale) Invariante von f als eine (ganz-rationale) Function der genannten Producte dargestellt werden kann".

Dieser Fundamentalsatz lässt sich ohne Schwierigkeit auf eine Reihe von Urformen ausdehnen, unter denen sich insonderheit eine Anzahl linearer befinden kann**). Nun ist es allerdings Clebsch***) auch gelungen, solche simultanen Invarianten symbolisch zu charakterisiren, in

---

*) Journ. f. Math. LIX, S. 1—62 (1861), „Binäre Formen" § 12.

Durch diesen Satz und die aus ihm zu ziehenden Consequenzen hat sich die deutsche Symbolik über die englische, von Cayley eingeführte, erhoben.

Weitere Beweise des Satzes finden sich bei Dahl, Zeuthen Tiddskr. (4) IV S. 154—158, zwei solche in Gordan's Vorlesungen II § 9, sowie einer bei Study, „Methoden" § 5.

**) Beispielsweise setzt sich eine simultane Invariante einer binären Form $a_x^n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$ und einer binären Linearform $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \alpha_x$ zusammen aus „Klammerfactoren" der beiden Typen (ab), (ac), (bc), ...; $(a\alpha)$, $(b\alpha)$, $(c\alpha)$, ... Da aber die α_1, α_2 cogredient sind mit $-y_2$, y_1 (d. i. ebenso linear transformirt werden, wie die letzteren), so lassen sich die Klammerfactoren der zweiten Art ersetzen durch die Linearfactoren a_y, b_y, c_y, ... Der Begriff einer simultanen Invariante von a_x^2 und $x_1y_2 - x_2y_1$ fällt aber zusammen mit dem der „Covariante" der einzelnen Form a_y^n.

***) Gött. Abh. XVII S. 1—62 (1872).

Ist f eine Urform, welche verschiedene Reihen, nicht nur von den einzelnen Variabeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, ..., sondern auch von deren zwei-, drei- etc.-reihigen Determinanten p_{ik}, p_{ikl}, ... enthält, so zerlegt sich f symbolisch in lauter Factoren, deren jeder nur einer Reihe von einem Variabelntypus, etwa p_{ikl} ... zugeordnet ist.

Ein solcher Factor ist dann darstellbar als Potenz einer Linearform der p_{ikl}, ...; wegen der Identitäten zwischen den p und aus Dualitätsgründen lässt jene Darstellung noch jeweils vier Modificationen zu.

Für „Liniencomplexe" finden sich diese vier Darstellungen von Clebsch ausgeführt in Math. Ann. II S. 1—8 (1869). Eine Vereinfachung und Weiterführung hat mittels Einführung Grassmann'scher Symbole erzielt Waelsch: Math. Ann. XXXVII S. 141—152 (1890). Hierauf gründet sich auch ein entsprechendes Uebertragungsprincip u. a.

welche die Coefficienten jener Linearformen realiter nur in ganz bestimmten (nämlich zwei- oder drei- ... oder endlich (n—2)-reihigen) Determinantenverbindungen eingehen; trotzdem ist es für $n > 3$ nicht mehr möglich*), die Gesamtheit der möglichen Bildungen zu übersehen. Dagegen dürfen die Urformen mehrere Reihen von cogredienten Variabeln (x), (x'), ..., wie contragredienten (u), (u'), ... enthalten; vermöge des Processes der „Reihenentwickelung" wird man schliesslich auf Urformen mit nur einer Reihe von x und nur einer Reihe von u zurückgeführt, für welche der obige Fundamentalsatz nur einer geringen Modification bedarf.

Die wissenschaftliche**) Berechtigung der in Rede stehenden Symbolik ist wesentlich in einer Eigenschaft derselben begründet, die erst neuerdings***) — durch Gordan für binäre Formen, durch Study für ternäre, und durch Pascal für solche von n Variabeln — aufgestellt und bewiesen ist.

Die oben angeführten n-reihigen Determinanten der Symbole a', a'', ... sind durch ein System von algebraischen Relationen $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, ... aneinander geknüpft.

Es zeigt sich nun wiederum umgekehrt, dass irgend eine, zwischen

---

*) Siehe die Bemerkungen von Gordan, Programm 1875, Anhang.

Die Schwierigkeiten, auf welche die symbolische Rechnung in höheren Gebieten stösst, können bereits durch so einfache Aufgaben, wie: „Die Gleichung des, drei linearen Complexen gemeinsamen Hyperboloides in Punktcoordinaten aufzustellen" zur Genüge illustrirt werden. Vgl. indessen Waelsch l. c.

**) Ueber den praktischen, bezw. pädagogischen Wert des symbolischen Rechnens werden die Mathematiker jederzeit verschiedener Meinung sein. Es ist allerdings nicht zu leugnen, dass in dieser Hinsicht die Formentheorie der neueren Periode vielfach zu einer Art Sport geworden ist, bei dessen Ausübung die Fülle der Formen den leitenden Gedanken zu überwuchern droht. Glücklicherweise tritt dem eine gesunde Strömung entgegen, bei der das gedankliche Rechnen mit den invariantiven Processen immer mehr hervortritt.

***) Gordan's Vorlesungen II (1887), No. 117.

Study, Math. Ann. XXX. S. 120—126 (1887), sowie „Methoden ..." (1889), § 6.

Pascal, 1888, Batt. G. XXVI. S. 33—38, 102—103; Rom. Acc. L. Rend. (4) IV S. 119—124. Rom. Acc. L. Mem. (4) V S. 375—387.

Die Grundidentitäten, auf die bei Pascal alle übrigen zurückkommen, lauten:

$$\Sigma \pm (a_1 a_2 \dots a_n)(a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_{n-1}) = 0,$$
$$\Sigma \pm (a_1 a_2 \dots a_n)\, a_{n+1,x} = 0,$$
$$(a_1 a_2 \dots a_n)(x_1 x_2 \dots x_n) - \Sigma \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \dots a_{nx_n} = 0,$$
$$\Sigma \pm (x_1 x_2 \dots x_n)\, a_{n+1,x} = 0,$$
$$\Sigma \pm (x_1 x_2 \dots x_n)(x_{n+1} y_1 y_2 \dots y_{n-1}) = 0.$$

Hier sind die Summen zu bilden, indem man die Symbole a bez. x auf alle möglichen Weisen vertauscht, und die Vorzeichen gemäss der gewöhnlichen Determinantenregel wechseln lässt.

Im binären Gebiet giebt es nur die eine Grundidentität:

$$a_x b_y - a_y b_x - (ab)(xy) = 0.$$

Invarianten bestehende Identität — die aber nicht etwa schon durch gegenseitiges Sich-Zerstören der Invarianten erfüllt wird, sondern erst dadurch, dass man sich dieselben in den realen Coefficienten der Urformen ausgerechnet denkt — in eine solche Gestalt gebracht werden kann, dass die linke Seite der Identität zu einem Aggregat symbolischer Glieder wird, deren jedes mindestens einen der Ausdrücke R als Factor enthält. Und zwar kommt man dabei mit einer der bestimmten Anzahl von fünf jener R vollständig aus.

Im übrigen gilt hier die nämliche Einschränkung, wie oben (S. 188). Beispielsweise hat man im quaternären*) Gebiete noch keine Uebersicht über die Relationen, an denen nicht nur die Coordinaten des Punktes und der Ebene, sondern auch die der Geraden teilnehmen.

Der Ausgestaltung der Symbolik durch Gordan, wie sie sich an die Begriffe „Reducent, vollständige und relativ vollständige Systeme, erweiterte Systeme" knüpft, ist bereits früher**) gedacht worden: eine Reihe weiterer Gesichtspunkte, insbesondere der der Faltung, wird in dem Abschnitt über unsymbolische Processe ihre Stelle finden.

Hier erwähnen wir noch eines symbolischen „Uebertragungsprincipes"***), welches Gordan zum Aufbau voller Formensysteme verwendet

---

*) Vgl. die Darstellung bei Study „Methoden ..." S. 204.

**) S. 135 u. flgde.

***) Math. Ann. I S. 90—101 (1869), XVII S. 217—234 (1880) I. Cap.

Dies Uebertragungsprincip ist nicht etwa zu verwechseln mit dem bekannten, von Clebsch aufgestellten. Letzteres lautet, etwa in der Uebertragung von binären auf ternäre Formen, und in geometrischer Fassung: „Soll eine Gerade eine ebene Curve n^{ter} Ordnung in einer Punktgruppe schneiden, welche eine besondere projectivische Eigenschaft besitzt, so erhält man die Gleichung der von der Geraden umhüllten Curve in folgender Weise: Man stelle die Invariante der binären f_n, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussetzt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende zweigliedrige Determinante (ab) durch eine dreigliedrige (abu), wo die u Liniencoordinaten und die a, b, ... Symbole der gegebenen ternären Form bedeuten."

(Siehe etwa die Darstellung in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen, I S. 274 u. flgde.)

Beispielsweise erhält man als Gleichung der Curve dritter Ordnung $a_x^3 = 0$ in Liniencoordinaten unmittelbar

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = 0;$$

ferner: „Die Geraden, welche eine Curve vierter Ordnung $a_x^4 = 0$ nach harmonischem Doppelverhältnis schneiden, umhüllen eine Curve sechster Klasse:

$$(abu)^2 (bcu)^2 (cau)^2 = 0\text{“ u. s. f.}$$

Vgl. die Erweiterungen von Gundelfinger, Math. Ann. VI S. 16—22 (1872) und Study „Methoden" II § 19.

Wegen anderer Uebertragungsprincipien siehe den Abschnitt über Combinanten II. D, b.

hat. Um dies gleich für das ternäre Gebiet zu entwickeln, so sei ein System von invarianten Formen φ einer Urform $f = a_x^n = \sigma_x^n = \cdots$ vom $(m-1)$ten Grade in den Coefficienten bekannt, durch welches alle anderen Bildungen des nämlichen Grades linear ausdrückbar sind. Es handelt sich darum, ein entsprechendes System für den nächst höheren Grad m zu finden.

Die symbolischen Factoren einer Form φ sind von den dreierlei Typen b_x, c_x, d_x, ...; (bcu), (bdu), (cdu)...; (bcd), bce), ...

Man ersetze jetzt λ Factoren b_x, c_x, ... durch resp. (bau), (cau), ..., und zugleich k Factoren (bcu), bdu) ... durch resp. (bca), (bda), ..., und füge endlich den Factor $a_x^{n-(\lambda+k)}$ hinzu $(\lambda+k \leqq n)$. Für ein gegebenes Paar von „Moduln" λ, k kann man so eine ganz bestimmte Reihe neuer Formen ψ (vom Grade m) herleiten. Man zieht nun successive alle möglichen Combinationen in Betracht, indem man $\lambda+k = 1, 2, \ldots$ nimmt, und sodann wieder in jeder einzelnen Gruppe $k = 0, 1, 2, \ldots$. Schliesst man alle verschwindenden und reducibeln Formen ψ aus, so ergiebt sich als Hauptresultat, dass sämtliche, aus dem „linear vollständigen" Systeme der Formen φ vom Grade $m-1$ durch obigen Process gewonnene Formen ψ vom Grade m wiederum ein linear vollständiges System bilden".

Wir wenden uns jetzt zu einer bemerkenswerten Weiterführung bezw. Vereinfachung der Clebsch-Aronhold'schen Symbolik, welche in neuester Zeit von Stroh*) angebahnt ist. Es geht dieselbe in praxi darauf aus, die Anzahl der symbolischen Factoren, aus denen sich eine Invariante aufbaut, möglichst zu reduciren.

Wir beschränken uns dabei auf den vom Verfasser wirklich durchgeführten Fall des binären Gebietes**).

Ist $f_n = (a_\lambda x_1 + \alpha_\lambda x_2)^n$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ eine Urform nter Ordnung in symbolischer Schreibart, so ist es zuvörderst erlaubt, die Symbole a sämtlich einander gleich, etwa gleich der Einheit zu nehmen, ohne dass bei der Reconstruction der realen Bildungen eine Vieldeutigkeit zu befürchten ist.

Versteht man jetzt unter C eine Covariante von f, vom iten Grade in den Coefficienten und vom Gewichte g (und mit nur einer Reihe Veränderlicher), so genügt das Leitglied C_0 von C — als eine Form

---

*) Math. Ann. XXXVI S. 262—303 (1890) § 7 u. flgde.

**) Bezüglich des ternären Gebietes siehe l. c. § 12.

gter Ordnung der i (homogenen) Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_i$ — nur noch der einen charakteristischen Differentialgleichung $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0$, deren allgemeinste ganz-rationale Lösung C_0 zu suchen ist.

Die letztere ist aber nach Hesse*) sofort angebbar, sie ist nichts anderes, als die allgemeinste Form der i—1 Argumente

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \ldots,\ a_i - a_1\ {}^{**}),$$

von einer Ordnung $g \leqq n$. Ist γ die Anzahl der willkürlichen Constanten einer solchen Form, so kann C_0 auch als Summe von γ (linear unabhängigen) gten Potenzen geschrieben werden, wie folgt:

$$C_0(a_1, a_2, \ldots, a_i) = \sum_{k=1}^{k=\gamma} c_k (\lambda_{1k} a_1 + \lambda_{2k} a_2 + \cdots + \lambda_{ik} a_i)^g,$$

wo

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \cdots + \lambda_{ik} = 0.$$

Dies Ergebnis lässt sich noch symmetrischer gestalten.

Die einfachsten Lösungen unserer Gleichung, eben jene i—1 Differenzen $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_i - a_1$ können ersetzt werden durch ebensoviele „Grundsymbole“ $A_\lambda = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i\ (\Sigma\lambda = 0)$.

„Um demnach die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f zu haben, hat man nur aus g Grundsymbolen ein Product zu bilden, in welchem jedes Symbol a höchstens in der nten Potenz vorkommt.“

Offenbar sind die Clebsch'schen Klammerfactoren $a_r \alpha_s - \alpha_r a_s$ ge-

---

*) Journ. f. Math. XLII S. 117—124 (1851).

**) An dieser Stelle erkennt man deutlich den Zusammenhang mit den Syzygien (siehe diesen Bericht S. 167), von denen aus der Verf. zu der im Texte geschilderten Symbolik gelangte.

Um nämlich eine elementare Syzygie $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$ auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die vier Formen f, φ, ψ, χ als reale Potenzen linearer Formen an: $f = (x-a)^{n_1}, \varphi = (x-b)^{n_2}, \psi = (x-c)^{n_3}, \chi = (x-d)^{n_4}$, und beschränkt sich bei jeder Ueberschiebung auf das Leitglied. Dann ist z. B. zu setzen für $(f, \varphi)^\lambda, ((f\psi)^4, \varphi)^1$ resp. $(a-b)^\lambda, (a-c)^4(a-b)$.

Die linke Seite der Syzygie $[f, \varphi, \psi, \chi]_i$ wird zu einer Function $F(a, b, c, d)$, welche der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$ genügt. F hängt somit nur ab von den drei Veränderlichen:

$$a - b = -b',\ a - c = -c',\ a - d = -d'.$$

Da aber gleichzeitig

$$b - c = b' - c',\ b - d = b' - d',\ c - d = c' - d'$$

wird, so braucht man nur in der Function F $a = 0$ zu setzen, um mit Leichtigkeit das identische Verschwinden von F einzusehen.

Umgekehrt lässt sich aus jeder solchen identisch verschwindenden Function dreier Variabeln die entsprechende Syzygie herstellen.

(Vgl. l. c. S. 274.)

rade die einfachsten jener „Grundsymbole“: es hat keine Schwierigkeit, von der einen Symbolik zur andern überzugehen, und umgekehrt.

Um ein Beispiel anzuführen, so schreibt sich die Covariante

$$(ab)^2(ac)a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-1}$$

nunmehr in der einfacheren Gestalt $(a+b-2c)^3$, welche nur ein Grundsymbol benutzt.

Nimmt man die Ordnung n der Urform beliebig hoch an, sodass stets $n > g$, so gehen die Grössen C_0 in die sogenannten „Seminvarianten“ über, und es gilt daher der fruchtbare Satz: „Alle Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch symbolische Potenzen $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ **linear** ausdrückbar“ *).

In anderer Richtung hat sich eine Erweiterung der Symbolik aufgedrängt, wenn es sich um Formen von solchen Variabelnreihen handelt, welche verschiedenen Substitutionen unterliegen.

Unter ihnen spielen eine besondere Rolle die „Combinanten“, d. h. diejenigen Bildungen von p Urformen f gleich hoher Ordnung n, von r Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_r$, welche bei linearer Transformation sowohl der x, wie der f, invariant bleiben.

Hier führe man nach Stroh **) Symbolenpaare a und α (b und β etc.) ein, sodass immer erst n Symbole a zusammen mit einem Symbole α als Product vereinigt reale Bedeutung erhalten.

Construirt man jetzt die Form

$$F = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_p)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r)^n,$$

so ersetzt diese eine Stammform die früheren f in dem Sinne, dass Combinante der f jede Form ist, welche in Bezug auf F Invarianteneigenschaft besitzt für beide Variabelnreihen ξ, x, und dabei die ξ nicht enthält.

Study ***) hat diese Symbolik noch weiter ausgedehnt auf Combi-

---

*) § 10. Als eine unmittelbare Folge davon erscheint die Bestimmung der irreducibeln Seminvarianten von gegebenem Grade i und Gewichte g: ihre Anzahl ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung:

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1$$

(cf. unten S. 198), aber auch die Bildungen selbst lassen sich symbolisch sofort anschreiben.

**) Math. Ann. XXII S. 393—405 (1883).

Einer entsprechenden Symbolik hatten sich schon vorher Capelli und le Paige bedient für einfache Formen von mehreren Variabelnreihen, welche verschiedenen Substitutionen unterliegen; der erstere für eine quadratische Form von zwei binären Reihen (Batt. G. XVII S. 69—148, 1879), der letztere für mehrfach lineare Formen (Belg. Bull. (3) II S. 40—53, 1881).

***) „Methoden ...“ II § 13.

nanten solcher Formen f, welche, ausser von den x, noch von den contragredienten u abhängen.

Ein ganz ähnliches Princip gilt nun auch, wie unschwer zu erkennen, für die complicirteren invarianten Bildungen von Urformen der Art: $\alpha_\xi^m a_x^n$ u. s. f., welche die verschiedenen Variabelnreihen der x, ξ, ... wirklich enthalten.

Für den Fall, dass die letzteren dem binären Gebiet angehören, hat Gordan*) eine einfachere Symbolik — die sich mit nur einer Art von Symbolen begnügt — angegeben, über welche bereits auf S. 141 berichtet ist.

Endlich sei noch kurz erwähnt, dass die beiden Hauptsymbole der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen, das „Xf" der infinitesimalen Transformation und das „$(X_i X_k)$" des „Klammerausdrucks" von Study**), unserem Specialgebiet der projectiven Transformationen mit Erfolg angepasst worden sind, sodass sich dieselben bereits äusserlich als invariante Processe zu erkennen geben.

II. C, a, β.

Englische Richtung.

Während den soeben geschilderten Bestrebungen ein einheitlicher Charakter eignete, bieten die verwandten, hier und da zerstreuten Erscheinungen, wie sie vorzugsweise bei englischen Autoren der späteren***) Periode auftreten, eine Reihe sehr verschiedenartiger Momente dar.

Man mag etwa drei Hauptgesichtspunkte unterscheiden: erstens die Versuche, die Ausdrücke der Formentheorie durch geeignete graphische Darstellungen der Anschauung näher zu bringen; sodann, in umgekehrter Richtung, die Charakterisirung unseres Arbeitsfeldes als eines Ausläufers der abstracten (universalen) Algebra der „Matrices"; endlich die (symbolische) Verknüpfung der „Seminvarianten" mit der Lehre von den symmetrischen Functionen.

Sylvester†) geht 1878 davon aus, dass der Aufbau der Structur-

*) Math. Ann. XXXIII S. 372—389 (1889).

**) „Methoden ..." II § 15.

***) Vor allem hat Cayley selbst, der ursprünglich die Symbolik begründet hatte, in seinen späteren Arbeiten das Rechnen mit den wirklichen Leitgliedern und den erzeugenden Functionen bevorzugt.

†) Am. J. I. S. 63—125 (1878).

Vgl. dazu die Bemerkungen von Clifford ebd. S. 126—129; Malet, ebd. S. 277—282. Die wirkliche gegenseitige Zuordnung der beiderseitigen Darstellungen rührt von Clifford her.

formeln nach der neueren atomistischen Theorie mit der üblichen symbolischen Schreibweise der binären In- und Covarianten eine weitgehende Analogie aufweist. Setzt man die chemischen Elemente als binäre Formen an, wie folgt:

$$H = h_x = h'_x = \cdots, \quad O = o_x^2 = o_x'^2 = \cdots, \quad C = c_x^4 = c_x'^4 = \cdots,$$
$$N = n_x^5 = n_x'^5 = \cdots, \quad \text{etc.}$$

wo also die „Wertigkeit“ des Elementes der „Ordnung“ der Form entspricht, so sind die „gesättigten“ Verbindungen Ausdrücke von Invarianten, die „ungesättigten“ solche von Covarianten. Beispiele für die ersteren seien:

$$2O = (oo')^2, \quad H_2O = (ho)(h'o), \quad NO_3H = (no)^2(no')^2(no'')(o''h).$$

Stellt man also, wie in der Chemie, die Elemente durch Punkte, die gegenseitigen Bindungen (ho, u. s. f.) durch verbindende Striche dar, so ist damit ein Anschauungsbild für die binäre Invariantensymbolik gewonnen.

Die Anzahl der Striche zwischen den Punkten (i. e. der gebundenen Wertigkeitseinheiten) wird zum Gewicht der bezüglichen Form: eine Invariantenbeziehung ist aequivalent mit der Möglichkeit einer Deformation der Bilder der verschiedenen Formen in einander.

Sylvester*) macht davon eigenartige Anwendungen auf das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz, die Clebsch'schen associirten Formen u. a. mehr.

Clifford**) hat 1879 das in Rede stehende Verfahren auf binäre Urformen übertragen, die in mehreren Variabelnreihen linear sind: ist z. B. (x, y, z) eine solche, so hat man als Bild der Invariante

$$(xyz)(xyu)(zvw)(uvw)$$

etwa ein Quadrat, von dem zwei Gegenseiten doppelt ausgezogen sind.

Offenbar ist eine derartige Graphik vieler Modificationen fähig; eine der nächstliegenden ist diejenige für den Ausdruck einer binären Invariante in Differenzen der Urformwurzeln. Derselbe ist eine (symmetrische) Summe von Producten der Art:

$$(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta (x_2 - x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon,$$

wo die Exponenten $\geqq 0$, und die Grade in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtlich einander gleich sind. Man wird wieder jedes x durch einen Punkt, jede Differenz $x_i - x_k$ durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_i und

*) Siehe die Appendices zu der oben genannten Abhandlung Sylvester's.

**) Lond. M. S. Proc. X S. 124—129, 214—221; cf. Spottiswoode ebd. S. 204—214.

x_k repräsentiren; in jedem der n Punkte laufen dann gleich viele Linien zusammen. So wird etwa

$$(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_1-x_4)(x_2-x_3)$$

zu der Figur eines Quadrates mit den Diagonalen führen, von dem, wie oben, zwei Gegenseiten doppelt gezogen sind.

Eine der wesentlichsten Fragen ist dann die nach der Reducibilität*) des Bildes, d. h. ob sich das letztere nicht durch Ueberlagerung von Bildern geringeren „Grades" erzeugen lässt.

Petersen**) hat hiervon Gebrauch gemacht, um nicht nur den von Gordan***) stammenden Satz nachzuweisen, dass man (bei gegebenem n) eine endliche Anzahl obiger Producte so bilden kann, dass alle andern Producte derselben Form sich aus den gebildeten durch Multiplication zusammensetzen lassen, sondern auch, um die wirkliche Bestimmung jener durchzuführen.

Was die Unterordnung der Invariantentheorie unter die Algebra der extensiven Grössen angeht, möge zunächst das Beispiel einer Ueberschiebung zeigen. Wenn etwa zwei binär-bilineare Formen gegeben sind:

$$f = a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2,$$
$$\varphi = b_{11}x_1y_1+b_{12}x_1y_2+b_{21}x_2y_1+b_{22}x_2y_2,$$

und man will deren zweite Ueberschiebung bilden — die auch unabhängigen Substitutionen der beiden Variabelnreihen gegenüber invariant ist —, so multiplicire man f mit φ, und unterwerfe dabei die binären Producte der „Einheiten" x_1, x_2, y_1, y_2 den Gesetzen:

$$x_1^2=x_2^2=y_1^2=y_2^2=0,\quad x_1x_2=-x_2x_1=y_1y_2=-y_2y_1=1;$$

in der That resultirt dann:

$$(f\varphi)^2 = a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}+a_{22}b_{11}.$$

Die Verallgemeinerung bietet ersichtlich keine principiellen Schwierigkei-

*) Vgl. in dieser Hinsicht Buchheim, Lond. M. S. Proc. XVII S. 80—106 (1886). Der sog. „Zerlegungssatz" von Clebsch („Binäre Formen" S. 257): „Jede Covariante einer binären Form f_n kann in zwei Teile zerlegt werden, deren einer eine, von den f_{n-1} übernommene Bildung ist, während der andere den symbolischen Factor $(ab)^\lambda$ enthält $\left(\lambda \geqq \frac{n}{2}\right)$", folgt hier daraus, dass jedes geometrische Bild auf eine Summe von einfachsten Polygonen zurückgeführt werden kann.

Kempe (ebd. S. 107—121) zeigt, wie durch geeignete Deutung identischer Relationen zwischen den Symbolen ein wirkliches Rechnen mit den geometrischen Bildern der Invarianten ermöglicht wird.

**) Acta Math. XV S. 193—220 (1891). Vgl. oben S. 143.

***) Siehe diesen Ber. S. 143.

ten. Ausführungen dieser Art finden sich bei Clifford*), wenngleich der Kern der Theorie bereits bei Grassmann**) vorgebildet erscheint.

Wir kommen schliesslich zu der, auf Grund der Theorie der symmetrischen Functionen in die Theorie der binären Invarianten eingeführten Symbolik.

Das Leitglied C_0 einer Covariante einer Urform f_n ist charakterisirt als eine isobare Form der Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche der Differentialgleichung

$$\Omega = a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial C_0}{\partial a_4} + \cdots = 0$$

genügt; C_0 bleibt daher ein solches Leitglied für jede Urform höherer Ordnung $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$. In diesem Sinne heisst C_0 eine „Seminvariante" (Subinvariante) der beliebig fortgesetzten Grössenreihe $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Um die Unabhängigkeit der Seminvarianten von der Ordnung n einer Urform sichtbar zu machen, denkt man sich letztere nach steigenden Potenzen der Variabeln x entwickelt, und demgemäss die reciproken Wurzeln eingeführt:

$$1 + \frac{b}{1}x + \frac{c}{1.2}x^2 + \cdots = (1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)\ldots$$

Dann gilt der folgende, von Mac Mahon***) herrührende Fundamentalsatz:

„Jede (ganze) symmetrische Function der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, welche „nicht unitär" ist, d. i. dieselben von höherem, als ersten Grade enthält, stellt in Bezug auf die Coefficienten $a = 1, b, c, d, \ldots$ eine Seminvariante dar."

Beispielsweise bestätigt man leicht, dass, wie weit man auch die Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ fortsetzen mag, stets die Relationen gelten:

$$\Sigma\alpha^2 = -(c-b^2), \quad \Sigma\alpha^3 = -\tfrac{1}{2}(d-3bc+2b^3), \ldots,$$

wo die rechts stehenden Klammerausdrücke bekannte Leitglieder von Covarianten sind.

Mac Mahon und Cayley bedienen sich daher einer „Partitionssymbolik" †), indem sie schreiben:

---

*) l. c.

**) Vgl. etwa die Darstellung in der Grassmann-Biographie, Math. Ann. XIV S. 9 u. flgde.

***) Am. J. VII S. 26—47 (1884). Vgl. dazu Cayley, ebd. S. 1—25, 59—73, Quart J. XX S. 212—213 (1884).

†) Um eine Seminvariante gegebenen Grades l zu haben, hat man offenbar nur noch die Zahl l auf alle möglichen Weisen als Summe von kleineren Zahlen („Partitionen") darzustellen.

$$2 = \Sigma\alpha^2, \quad 3 = \Sigma\alpha^3, \quad 6552 = \Sigma\alpha^6\beta^5\gamma^5\delta^2, \quad \text{etc.},$$

und übertragen nunmehr unmittelbar auf die Theorie der Seminvarianten die bekannten Verknüpfungsgesetze der symmetrischen Functionen*), die jetzt einfach lauten:

$$1.m = (1+m)+(1m) \; (1 \gtrless m), \quad 1.1 = (21)+2.(11) \; (1 = m), \quad \text{etc.}$$

Der hierauf sich stützende Algorithmus gewährt vor allem einen tieferen Einblick in den Zusammenhang zwischen den Syzygien. Jede solche Syzygie zwischen Covarianten, oder die ihr äquivalente zwischen den obigen Symbolen, ist der Keim einer unbegrenzten Reihe weiterer Syzygien, indem man z. B. das Symbol 552 successive überführt in 5552, 6552, 7552 u. s. f.

Mit Hülfe dieser Symbolik hat Cayley**) eine „erzeugende Function" für die Seminvarianten hergeleitet:

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^j)},$$

wo bei Entwickelung derselben nach steigenden Potenzen von x der Coefficient von x^w die Anzahl der linear unabhängigen Seminvarianten vom Grade j und vom Gewichte w angiebt.

Die schwierigere Frage nach einer erzeugenden Function für die „Perpetuanten", d. i. derjenigen Seminvarianten, die sich nicht aus solchen niederer Grade ganz-rational componiren lassen, hat Mac Mahon***) mittels der nämlichen Symbolik gelöst; dieselbe nimmt die einfache Gestalt an:

$$\frac{x^{2^{j-1}-1}}{2.3.4\ldots j}.$$

Cayley und Mac Mahon haben daraufhin ausgedehnte Tabellen für die Seminvarianten, Perpetuanten, sowie für deren Syzygien berechnet.

II. C, b.

Unsymbolische Invariantenprocesse.

Wir werden im folgenden die hervorragendsten (Differentiations-) Processe durchgehen, welche auf invariante Gebilde ausgeübt werden, um

Sylvester hat die in Rede stehende Partitionssymbolik zu seinen Principien einer universellen Algebra in Beziehung gesetzt, Am. J. V S. 79—137 (1883). Vgl. auch Am. J. VI S. 270—286 (1883), sowie Peirce, Am. J. IV S. 97—229 (1881).

*) Mac Mahon hat hierauf umgekehrt später eine neue Theorie der symmetrischen Functionen gegründet. Andererseits hat er die Symbolik des Textes auf Perpetuanten und auf gewisse lineare partielle Differentialoperatoren übertragen.

**) l. c.

***) l. c. Vgl. oben S. 193.

aus ihnen neue zu erzeugen. Der besonders wichtige Fall, wo bei Anwendung einer solchen Operation der Wert Null resultirt, soll in dem Abschnitt über „Differentialgleichungen" seine Besprechung finden (II. C, b, ζ); desgleichen die Ausübung von Differentialoperationen auf „Reciprocanten und Seminvarianten," in den betreffenden Abschnitten (II. C, c, α; II. D, a). Diesen Processen kommt selbst an und für sich, oder doch wenigstens in einer gewissen Modification*), die „Invarianteneigenschaft zu, d. h. es hat das gleiche Ergebnis, ob man erst den Process ausübt und dann eine lineare Transformation der Variabeln, oder umgekehrt.

Nach der historischen Entwickelung sind die Processe einzuteilen in solche, welche sich auf die Variabeln, oder auf die Coefficienten der Urformen, oder endlich auf die Coefficienten der Substitutionen beziehen; indessen erlauben ja diese drei Grössenarten die gemeinsame Auffassung als Coefficienten von Linearformen.

Es ist nicht wohl möglich, innerhalb des hier gebotenen Raumes auf die abstracte Bedeutung und die innere gegenseitige Verwandtschaft der einzelnen Operationen tiefer einzugehen; in diesem Betracht mag auf Study's „Methoden" und den ersten Teil von Gordan's Vorlesungen, Band II verwiesen werden.

II. C, b, α.
Der Aronhold'sche Process**).

Unter diesem Namen fassen wir alle Processe von der Form

$$D_{pq} \equiv \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

zusammen, wo die p_i, q_i zwei cogrediente Grössenreihen sind, die also den nämlichen Substitutionen unterworfen werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die p, q die gewöhnlichen (Punkt-) Variabeln der Formen sind, und die Bezeichnung „Polarenprocess" die üblichere ist.

*) So kommt beispielsweise noch nicht der linken Seite einer einzelnen der n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen die Invarianteneigenschaft zu, wohl aber geeigneten Combinationen derselben. Cf. Study, „Methoden..." S. 175.

**) Ueber die Verwendung des genannten Processes zur Aufstellung gewisser „voller Untersysteme" siehe S. 155, von Syzygien S. 165. Neuerdings hat Wiltheiss auf die Bedeutung hingewiesen, welche der Process behufs invariantiver Gestaltung der Differentialgleichungen für θ-Functionen besitzt (vgl. etwa Math. Ann. XXXVIII, bes. S. 23, 1890), und Hilbert hat gezeigt, wie man mit Hülfe des Processes allgemein zu vollen Systemen von Grundformen gelangt (Gött. N. 1892, bes. S. 6).

Während der Polarenprocess verhältnismässig früh in der projectivischen Geometrie auftritt und seitdem allmählich zur Grundlage*) derselben geworden ist, ist es in der Formentheorie erst neuerdings gelungen, dem Polarenprocesse auch hier eine führende Rolle in dem Sinne zuzuweisen, dass sämtliche, sonst noch gebräuchlichen Differentiationsprocesse auf jenen nicht nur zurückführbar, sondern auch in expliciten Formeln durch denselben algebraisch ausdrückbar sind.

Wir nehmen da vor allem die sogenannten Reihenentwickelungen**) vorweg, welche dazu dienen, Formen mit mehreren cogredienten Variabelnreihen auf solche von weniger Reihen zu reduciren: die einzelnen Glieder derartiger Entwickelungen sind Producte aus „identischen" Covarianten (d. h. solche, die ausschliesslich von den Variabeln abhängen) mit Polaren von den genannten einfacheren Formen.

Gordan und Clebsch***) haben zuerst für binäre Formen derartige Reductionen vorgenommen; Clebsch****) und Capelli†) haben, nach zwei verschiedenen Richtungen vorgehend, das Problem allgemein behandelt.

Capelli††) gebührt aber das Verdienst, im Sinne der oben formulirten Forderung, den Polarenprocess überhaupt in den Mittelpunkt der ganzen Formentheorie gestellt zu haben.

Dies trat bereits†††) bei der Behandlung der fundamentalen Aufgabe, die Anzahl aller linear unabhängigen Covarianten (eines Systems von Urformen) von gegebenen Grad- und Ordnungszahlen zu ermitteln, deutlich zu Tage.

In seinen späteren††††) Arbeiten geht Capelli allgemein aus von n

---

*) Vgl. z. B. Thieme, Math. Ann. XXVIII S. 133—151 (1887).

**) Vgl. II. c, b, δ.

***) Gordan, Math. Ann. V S. 95—122 (1872).
Clebsch, „Binäre Formen" § 7 (1872).

****) Gött. Abh. XVII S. 1—62 (1872).

†) Siehe die Citate in II. c, b, δ.
Während Clebsch verschiedenstufige Variabeln (Determinanten aus cogredienten Variabelnreihen) einführt, behält Capelli die Reihen von Variabeln derselben Art bei. Die Formeln Capelli's werden dadurch übersichtlicher; andererseits eignen sich diejenigen von Clebsch besser für geometrische Anwendungen. Vgl. die Anmerkung bei Capelli „Fondamenti ..." (1882), S. 3. Wegen der verwandten Untersuchungen von Deruyts siehe II. D, a.

††) Massgebend ist hierin die grundlegende Arbeit „Fondamenti..." (1882). Im übrigen siehe II. c, b, δ.

†††) Siehe diesen Bericht S. 176, 177.

††††) Capelli hat seine vielfach zerstreuten Untersuchungen über diesen Gegenstand zusammengefasst in Math. Ann. XXXVII S. 1—37 (1891). Vgl. Nap. Rend. XXV S. 134—141 (1886); ebd. (2) I S. 110—115, 236—242 (1887), Atti R. Acc. Nap. (2) I 17 S. (1887), Math. Ann. XXIX S. 331—338 (1887).

Reihen von ν homogenen Variabeln $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_\nu), \ldots$ und fragt nach den Gesetzen, durch welche die $N = n^2$ „elementaren" Operationen $D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{yx}, D_{yy}, D_{yz}, \ldots$ mit einander verknüpft sind.

In erster Linie hat man das bekannte (von Clebsch herrührende) Gesetz, wonach der „Klammerausdruck" $D_{ik} D_{lm} - D_{lm} D_{ik}$ stets eine einfache lineare Function von Grössen D ist. Insbesondere ist, bei vier verschiedenen Indices, D_{ik} mit D_{lm} vertauschbar; desgleichen D_{ik} mit D_{il}, D_{im} mit D_{lm}*).

Nennt man ferner die N Processe D in irgend einer Reihenfolge $D_1, D_2, \ldots, D_N$, so gilt der fundamentale Satz, „dass sich jede Form F der D (die nicht nur durch ihre algebraische Zusammensetzung, sondern auch durch die Reihenfolge der operativen Factoren D in jedem Gliede bedingt ist), in die Gestalt setzen lässt

$$F = \Sigma C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_N^{\alpha_N}.\text{“}$$

Es beruht das darauf, dass die Differenz zweier Producte, die aus denselben λ Factoren D, aber in verschiedener Anordnung gebildet sind, eine lineare Function von Producten aus je nur $\lambda - 1$ Factoren D ist.

Nunmehr wendet sich der Verfasser zu dem allgemeinen Problem, die allgemeinste Operation F zu bestimmen, welche mit jeder andern Operation derselben Art (also insbesondere mit jeder elementaren) vertauschbar ist. Dies Problem findet seine Lösung darin, dass F eine symmetrische Function der n Variabelnreihen wird, welche sich darstellen lässt als eine beliebige Form von n gewissen einfachsten, linear unabhängigen Operationen, denen jene Eigenschaft der Vertauschbarkeit zukommt. Diese letzteren sind z. B. im Falle $n = 2$ die beiden:

$$D_{xx} + D_{yy}, \quad D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy}.$$

Auf dieser Grundlage kann der Verfasser darlegen, inwiefern andere Invariantenprocesse auf die Operationen D zurückkommen. Es genügt, diese Aufgabe für den Fall der Cayley'schen Operation Ω — auf welcher alle Ueberschiebungsprocesse beruhen — zu lösen**); Ω ist in symbolischer Schreibart der Process:

---

*) Auf einige wenige charakteristische Identitäten dieser Art lassen sich alle übrigen Beziehungen zwischen Polarenprocessen zurückführen. Das sind die charakteristischen Differentialgleichungen für die Polaren. Vgl. Math. Ann. XXXVII S. 4.

**) Für zwei Reihen binärer Variabeln findet sich die betr. Formel bereits bei Clebsch, „Binäre Formen" § 7.

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

wo nachträglich rechter Hand jedes Glied $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \cdots \frac{\partial}{\partial v_s}$ zu ersetzen ist durch die nte Ableitung $\frac{\partial^n}{\partial x_i \, \partial y_k \ldots \partial v_s}$.

Die Operation Ω ist vertauschbar mit jeder elementaren D_{pq}, solange p und q verschieden sind, während das Product

$$\Delta^h \Omega^h \equiv (xy \ldots v)^h \Omega^h \quad (h > 0)$$

die einfachere Eigenschaft besitzt, mit jedem D_{pq}, für gleiche und für ungleiche p, q vertauschbar zu sein.

Der gesuchte Zusammenhang*) zwischen Ω und den Polaroperationen wird durch die elegante Formel angegeben:

$$\Omega\Delta = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & \ldots & D_{xv} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & \ldots & D_{yv} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & \ldots & n-1+D_{vv} \end{vmatrix}, \quad \text{wo} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{vmatrix}.$$

Jetzt lässt sich auch die oben erwähnte Operation F in übersichtlicher Weise aus Processen von dem Typus $\Delta\Omega$ zusammensetzen.

Es sei noch erwähnt, dass man aus den $N = n^2$ elementaren Operationen ein System von $n+1$ solchen derart auswählen kann, dass sich durch dieselben jede der andern ganz-rational ausdrücken lässt.

Auf die Untersuchungen des Verfassers über die lineare Unabhängigkeit von gewissen der in Rede stehenden Processe gehen wir nicht näher ein; beispielsweise kann zwischen den Potenzen einer und derselben Operation D niemals eine lineare Identität bestehen.

In anderer Richtung spielt der Polarenprocess bei der Gordan'schen Symbolik**) eine grundlegende Rolle.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den typischen Fall einer binären Form mit einer Variabelnreihe x_1, x_2. Die Form f, welche von der Ordnung $m+n$ sei, wird als Product von zunächst zwei

*) Weitere Darstellungsformeln giebt der Verfasser Atti d. R. Acc. di Napoli (2) I 17 S. (1888).

**) Vorlesungen II § 2. Für das ternäre Gebiet siehe Math. Ann. XVII S. 217—234 (1880).

(symbolischen) Factoren a_x^m, b_x^n aufgefasst. Die kte Polare f_{y^k} der Variabelnreihe $(y) = y_1, y_2$ bez. f resultirt, bis auf einen Zahlenfactor, als Coefficient von λ^k in der binomischen Entwickelung $(a_x + \lambda a_y)^m (b_x + \lambda b_y)^n$, somit als eine Summe von $k+1$ „Gliedern" $c_\varrho G_\varrho$, wo c_ϱ eine rationale Zahl ist und G_ϱ aus $a_x^m b_y^n$ entsteht, indem man beliebig ρ Factoren a_x und $(k-\rho)$ Factoren b_x wegnimmt, und jeweils durch a_y bez. b_y ersetzt.

Man hat nun den wichtigen Satz*), dass „nicht nur die Differenz zwischen zwei Gliedern, sondern auch diejenige zwischen der Polare selbst und einem ihrer Glieder stets den Factor $(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ besitzt".

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes, zugleich in seiner Erweiterung auf mehr als zwei Factoren von f, führt zu dem principiellen Ergebnis**), „dass sich jedes Glied einer Polare und **damit jedes symbolische Product** mit zwei Reihen Veränderlicher (x) und (y) in eine Summe von Polaren entwickeln lässt, die nach Potenzen von $(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ fortschreitet".

Der Satz ist ausdehnbar auf Formen mit mehreren Reihen binärer Veränderlicher, desgleichen auf das ternäre Gebiet u. s. f.

Wir gehen über zu der Ausübung des Aronhold'schen Processes auf die Coefficientencolonnen (p_i), (q_i), (r_i), ... der linearen (Punkt-) Transformation, einer Operation, welche in engstem Zusammenhange mit den Polaroperationen steht. In der That findet sich schon bei Aronhold der allgemeine Satz, dass die Coefficienten der (nach den neuen Variabeln) entwickelten transformirten Urform Polaren der ursprünglichen Form sind, nur geschrieben in den „Substitutionscolonnen" der (p), (q), (r), ...

Als eine bedeutungsvolle Folge hiervon erscheint bei Gram***) der Umstand, dass man für eine homogene Invariante J (einer Reihe von Urformen von n Variabeln) ein System von $n(n-1)$†) charakteristischen Differentialgleichungen erhält, wenn man dieselbe in den transformirten

*) Vorlesungen II S. 26. Der Satz stützt sich auf die Eigenschaften zweier „benachbarter" Glieder, die dadurch auseinander hervorgehen, dass man in einem Factorenpaar $a_x b_y$ die Symbole a, b vertauscht. Pascal hat die Wirkung dieses Processes, für den er ein eigenes Symbol einführt, noch weiter verfolgt (Napoli Rend. (2) I S. 200—207, 1887).

**) l. c. S. 32.

***) Math. Ann. VII S. 230—240 (1874).

Der angegebene Satz erscheint andererseits als directer Ausfluss aus der Definition der Invarianten, wonach sich die transformirte Invariante nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante von der ursprünglichen unterscheidet.

†) Die n weiteren Gleichungen, die bei Aronhold noch auftreten, sagen nur aus, dass die Invarianten in den Coefficientenreihen der Urformen homogen und isobar sind.

Coefficienten schreibt, wodurch J in J_1 übergehe, und nunmehr das Resultat der auf J_1 ausgeübten Polaroperationen D_{pq} (p ungleich q) gleich Null setzt.

Für binäre Formen hat Bruno*) gezeigt, wie man durch directe Umformung der üblichen Differentialgleichungen für die In- und Covarianten zu der obigen Gestalt gelangt.

Wir wenden uns schliesslich zu derjenigen Modification des Aronhold'schen Processes $D_{ba} = \Sigma a_i \frac{\partial}{\partial b_i}$, wo die a_i, b_i die entsprechenden Coefficienten von zwei Formen f_n, φ_n bedeuten.

Schon frühzeitig**) bediente man sich dieser Operation, um den Begriff und die Bildung der Invariante J einer Urform f_n auf mehrere Urformen f_n, φ_n etc. auszudehnen.

In seiner Anwendung auf Linearformen dient er bei Clebsch***) als Fundament der Symbolik, insofern er unmittelbar klarlegt, inwiefern die Invariante (einer Urform) vom nten Grade als simultane Invariante von n linearen Urformen geschrieben werden kann.

So lange die Coefficienten b von den a völlig unabhängig sind, ist es sehr leicht, den Process $D_{ba} J = DJ$ wiederholt auszuführen: es ist dann nur eine directe „Iteration" erforderlich, d. h. D^2J wird in derselben Weise aus DJ abgeleitet, wie DJ aus J u. s. f.

Das Letztere ist aber nicht mehr†) der Fall, sobald sich die b in irgend einer (covarianten) Abhängigkeit von den a befinden; man stellt dann, wie Gordan entwickelt hat, entweder Recursionsformeln auf, oder aber, was theoretisch vorzuziehen, man bedient sich gewisser Reihenentwickelungen.

Der Aronhold'sche Process dient bei Gordan auch zur Begründung der „Combinanten"††); J wird zur Combinante von f, φ, sobald DJ identisch verschwindet, und umgekehrt.

Die Erweiterung auf mehr als zwei Formen ist leicht zu vollziehen.

Der Fall, dass auch hier wiederum Abhängigkeit zwischen den Urformen f, φ, ... herrscht, ist zur Zeit einer allgemeinen Discussion noch nicht zugänglich.

Nur ein specieller, für die Geometrie wichtiger Fall ist im binären

---

*) „Binäre Formen" S. 152.

**) Siehe diesen Bericht S. 82.

***) Vgl. etwa die übersichtliche Darstellung in „Clebsch-Lindemann's Vorlesungen I S. 183 u. flgde.

†) Vgl. Gordan's Vorlesungen II § 5.

††) l. c. § 6.

und ternären Gebiete untersucht worden, nämlich der einer Urform f und einer solchen Covariante φ, dass man hat:

$$Df = \varphi, \quad D\varphi = M.f,$$

wo M ein constanter (sc. invarianter) Factor ist*).

Ein specieller Fall des Aronhold'schen Processes, „der Evectantenprocess“, ist für den Aufbau der Invariantensysteme von Bedeutung geworden; man gelangt zu der „ersten“ Evectante von φ, indem man die Form f als die reale μte Potenz einer Linearform annimmt, während φ in den meisten Fällen eine Invariante J μten Grades (einer Urform F) vorstellt. Symbolisch gestaltet sich die Ausführung einfach in der Weise, dass man der Reihe nach je eine der μ Symbolreihen von J durch eine Variabelnreihe x ersetzt, und dann die Summe aller Glieder bildet**).

Gordan***) hat eine Anwendung hiervon auf die Differentialgleichungen einer binären Invariante J gemacht, welche den letzteren eine direct formentheoretische Bedeutung beilegt. Die Gleichungen lassen sich nämlich so umformen, dass sie aussagen:

„Die (n—1)te Ueberschiebung der Urform mit der ersten Evectante von J verschwindet identisch, während die nte Ueberschiebung die Invariante (bis auf einen Zahlenfactor) reproducirt.“

Umgekehrt lassen sich auf Grund dieses Satzes die Differentialgleichungen unmittelbar aufstellen.

II. C, b, β.

Der Ueberschiebungs- und Ω-Process.

Auf dem Ueberschiebungsprocesse beruht wesentlich die praktische Ausgestaltung der heutigen Formentheorie.

Allgemein lassen sich die Ueberschiebungen definiren als diejenigen simultaninvarianten Bildungen zweier oder mehrerer Urformen von beliebigen Variabelnreihen, welche in den einzelnen Coefficientenreihen je linear sind.

Das Folgende beschränkt sich der Anschaulichkeit halber auf einfache Fälle.

Hat man zwei, dualistisch sich gegenüberstehende Formen $F_n(x)$ und $\Phi_\nu(u)$, so bilde man zunächst die kten Polaren von F und Φ bezüglich

*) l. c. S. 74. Vgl. die Entwickelungen von Gundelfinger. Math. Ann. IV S. 164—168 (1871).

**) l. c. S. 128. Vgl. Study, „Methoden“ S. 41.

***) l. c. S. 129 u. flgde. Für ternäre Formen siehe Study, „Methoden“ S. 170 u. flgde.

zweier neuer Variabelnreihen (y), (v), und denke sich dieselben nach Potenzen und Producten der letzteren entwickelt.

„Die kte Ueberschiebung von F über Φ ergiebt sich hieraus, wenn man je zwei entsprechende Coefficienten der gemeinten Entwickelungen mit einander und dem bezüglichen Polynomialcoefficienten multiplicirt*), und die Summe dieser Producte bildet.“

Die symbolische Schreibart gewährt die knappste Wiedergabe des geschilderten Verfahrens. Sind $F_n(x) = a_x^n$, und $\Phi_\nu(u) = u_\alpha^\nu$ die gegebenen Formen, also $a_x^{n-k} a_y^k$ resp. $u_\alpha^{\nu-k} v_\alpha^k$ die kten Polaren, so hat man für die kte Ueberschiebung von F über Φ den Ausdruck:

$$(F, \Phi)^k = a_x^{n-k} u_\alpha^{\nu-k} (a\alpha)^k.$$

Man hätte diesen Ausdruck aber auch symbolisch so entstehen lassen können, dass man in dem Producte $F\Phi = a_x^n u_\alpha^\nu$ k-mal hintereinander ein Factorenpaar $a_x u_\alpha$ durch den „Klammerfactor“ $(a\alpha)$ ersetzt hätte, oder, um mit Gordan**) zu reden:

„Die kte Ueberschiebung zweier Formen

$$F(x) = a_x^n, \quad \Phi(u) = u_\alpha^\nu$$

geht durch k-malige Faltung des Productes $F\Phi$ hervor“.

Es ist indessen für manche Untersuchungen zweckmässig, die in Rede stehende Ueberschiebung zu verallgemeinern.

Um dies etwa am ternären Gebiete zu illustriren, so gehen wir jetzt von drei Formen mit den cogredienten (Punkt-) Variabeln (x), (y), (z) aus:

$$F_n = a_x^n, \quad G_p = b_y^p, \quad H_q = c_z^q,$$

---

*) Führt man mit Clebsch und Sylvester „präparirte“ Urformen ein, bei denen die Quadratwurzeln aus den Polynomialcoefficienten als numerische Factoren eingehen, so wird die Ueberschiebung direct die Summe aus den Producten je zweier homologer Coefficienten. Die Invarianteneigenschaft der Ueberschiebung deckt sich dann damit, dass die beiden Coefficientenreihen zu einander contragredient sind.

**) Vorlesungen II S. 33.

Hat man im ternären Gebiete zwei Formen, welche neben den x noch die u enthalten: $f_{r,s} = a_x^r u_\alpha^s$, $\varphi_{\varrho,\sigma} = b_x^\varrho u_\beta^\sigma$, so ist jede Ueberschiebung von f und φ symbolisch dargestellt durch $a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (abu)^{r_3} (\alpha\beta x)^{r_4} a_x^{r_5} b_x^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8}$, wo $r_1 + r_3 + r_5 = r$ ist, u. s. f.

Hier bedeutet $a_\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$, $(abu) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$ etc.

Diese Ueberschiebungen kann man sämtlich durch „Faltung“ aus dem Producte $f\varphi$ hervorgehen lassen, indem man eine geeignete Anzahl von Malen die Factorenpaare $a_\alpha u_\beta$, $b_x u_\alpha$, $a_x b_x$, $u_\alpha u_\beta$ ersetzt resp. durch a_β, b_α, (abu), $(\alpha\beta x)$. (Gordan, Math. Ann. XVII S. 217—233 (1881).)

und wenden auf das Product FGH k-mal den Process der „Faltung“ an, indem wir jeweils ein Factorentripel $a_x b_y c_z$ durch den „Klammerfactor“ (abc) ersetzen, so nennen wir das Ergebnis ebenfalls die „kte Ueberschiebung“ der drei Formen:

$$(F, G, H)^k = (abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

In der That lässt sich hieraus rückwärts durch symbolische Specialisirung der frühere Begriff $(F, \Phi)^k$ wiedergewinnen.

Man nehme zuvörderst die Ordnungen p und q einander gleich, $= \nu$, an, und unterwerfe die Symbolreihen der b, c der Bedingung, dass das Product $b_y c_z$ eine alternirende Form derselben wird, d. h. dass alle Verbindungen der b, c ausser den $(b_i c_k - b_k c_i) = \alpha_l$ verschwinden.

Damit treten denn auch die y, z von selber nur in den analogen Verbindungen $(y_i z_k - y_k z_i) = u_l$ ein, und das Product $b_y c_z$ geht über in die Linearform u_α (also $b_y^\nu c_z^\nu$ in u_α^ν), der Klammerfactor (abc) in $(a\alpha)$, und endlich $(F, G, H)^k$ in $(F, \Phi)^k$.

Die geschilderte Verallgemeinerung lässt nunmehr die innige Verwandtschaft zwischen Ueberschiebungs- und Ω-Process mit Leichtigkeit erkennen. Um beim ternären Gebiete zu bleiben, so ist der Ω-Process hier in ausgeschriebener Gestalt:

$$\Omega = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_2 \partial z_3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_3 \partial z_1} + \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_1 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_3 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_2 \partial z_1} - \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_1 \partial z_3}.$$

Die Ausübung des Ω-Processes auf ein (symbolisches oder reales) Product $a_x^n b_y^p c_z^q$ liefert sofort $npq\,(abc) a_x^{n-1} b_y^{p-1} c_z^{q-1}$, und die k-malige Anwendung desselben

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{p!}{(p-k)!} \cdot \frac{q!}{(q-k)!} \cdot (abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

Es gilt somit der fundamentale Satz*):

„Der Ω-Process ist, angewandt auf ein Product $a_x^n b_y^p c_z^q \ldots$, bis auf einen Zahlenfactor, äquivalent mit dem Faltungsprocesse, und die k-malige Iteration des Ω-Processes ist in gleicher Weise äquivalent mit der kten Ueberschiebung“.

Damit ist aber auch nach Früherem der Zusammenhang zwischen Ueberschiebung und Polarenprocess festgelegt.

---

*) Vgl. die leicht zu verallgemeinernde Darstellung bei Gordan, Vorlesungen II S. 22, 23. Vgl. auch Vivanti, Pal. Rend. IV S. 261—268 (1890).

An den Ueberschiebungsprocess lassen sich nun nach Gordan*) analoge Entwickelungen anknüpfen, wie an den Polarenprocess; das leitende Princip ist wiederum die Ausübung der Ueberschiebung auf zwei Producte symbolischer Factoren: das Resultat ordnet sich dadurch von selbst als eine Summe von Gliedern. Die Differenz zweier Glieder, wie auch die Differenz zwischen der Ueberschiebung und einem ihrer Glieder, ist durch gewisse Klammerfactoren teilbar.

Daraus wird successive der Satz abgeleitet, dass „jedes Glied einer Ueberschiebung sich selbst durch eine Summe von Ueberschiebungen darstellen lässt“, und daraufhin schliesslich auch „jedes symbolische Product als Summe von einfachen (d. h. nur noch zwei Symbole enthaltenden) Ueberschiebungen“.

Ausgezeichnete Beispiele von Ueberschiebungen sind die „Functionaldeterminante“**) von m Formen (mit m homogenen Variabeln), sowie als besonderer Fall derselben die „Hesse'sche Determinante“***), wenn jene m Formen das ganze System der ersten Ableitungen einer und derselben Form ausmachen.

Die Auffassung der Ueberschiebung bei Stroh als einer „Verknüpfung“ zwischen Grössen, und insbesondere die Fruchtbarmachung des „associativen“ Gesetzes für die Theorie der Syzygien (im binären Gebiete) haben wir früher†) kennen gelernt.

Desgleichen††) die fundamentale Eigenschaft des Ω-Processes, wie sie Gordan, Mertens, Hilbert verfolgt haben, dass man bei geeignet oftmaliger Wiederholung desselben aus einer beliebigen, homogenen und isobaren Form der transformirten Coefficienten eine Invariante der Urformen erhält.

Die Untersuchung der Bedeutung des Verschwindens einer Ueberschiebung ist die Quelle der Apolaritätstheorie geworden, die ihrerseits wiederum mit der der Combinanten auf das engste verwachsen ist†††).

In anderer Richtung ist eben dieses Verschwinden einer (binären)

---

*) Vorlesungen II § 3. Math. Ann. XVII S. 217—234 (1881).

**) Wegen der Beziehungen zwischen Functionaldeterminanten vgl. II. D, b. Eine Anwendung derselben trat schon bei der Herleitung von Syzygien hervor, siehe S. 165.

***) Bezüglich der Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, vgl. II D, d.

†) S. 166.

††) S. 147.

†††) Vgl. II. D, b.

Ueberschiebung neuerdings für die Theorie der linearen Differentialgleichungen von Bedeutung geworden.

Die Gleichung $(f, \varphi)^k = 0$ stellt bei festgehaltenem φ eine lineare Differentialgleichung $k$ter Ordnung (mit ganz-rationalen Functionen als Coefficienten) für die Form $f(x_1, x_2)$ dar.

„Aber auch umgekehrt ist es möglich, die linke Seite jeder vorgegebenen linearen Differentialgleichung $k$ter Ordnung von einer unabhängigen Variabeln x mit rationalen Coefficienten mittelst Homogenisirung als das Aggregat einer Anzahl von **Ueberschiebungen** einer Function f mit einer Reihe von Functionen $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ zu schreiben."

Dies lässt sich, wie Waelsch in letzter Zeit gezeigt hat*), folgendermassen einsehen. In der vorgelegten Differentialgleichung

$$Py^{(k)} + Qy^{(k-1)} + \cdots = 0$$

setze man $x = \frac{x_1}{x_2}$, so nimmt dieselbe bei Anwendung des Euler'schen Satzes über homogene Functionen die Gestalt an:

$$\sum_{r=0}^{r=k} A_\nu^{(r)} \frac{\partial^k y}{\partial x_1^r \, \partial x_2^{k-r}} = 0,$$

wo die A Formen von einer und derselben Ordnung ν bedeuten.

Nimmt man nun symbolisch die Unbekannte y als eine Form a_x^π $(\pi \geqq n)$ an, so wird die linke Seite zur allgemeinsten Form in zwei cogredienten Variabelnreihen $x_1, x_2; -a_2, a_1$. Entwickelt man nach Clebsch und Gordan in eine Reihe, die nach Potenzen von a_x fortschreitet, so geht die ursprüngliche Differentialgleichung in der That, wenn man noch $n + \nu = m$ setzt, über in:

$$c_0(\varphi_m, f)^n + c_1(\varphi_{m-2}, f)^{n-1} + c_2(\varphi_{m-4}, f)^{n-2} + \cdots = 0,$$

wo die φ beliebige Formen der bezeichneten Ordnungen, und die c Zahlencoefficienten sind, über welche man noch geeignet verfügen kann.

Setzt man hier die unsymbolischen Ausdrücke für die einzelnen Ueberschiebungen ein, und macht schliesslich x_2 wieder gleich der Einheit, so gelangt man zur ursprünglichen Gleichung zurück.

Die geschilderte „Normirung" der linearen Differentialgleichungen dient vor allem dazu, specielle Typen derselben übersichtlich zu charakterisiren: insbesondere erweist sie sich als vorteilhaft, wie Hilbert**) an

*) Prag. Abh. 1892. S. 78—99.

**) Dissert. Königsberg (1885), Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887), XXVIII S. 381—446 (1887).

Perrin, S. M. F. B. XVI S. 82—100 (1888).

Hirsch, Dissert. Königsberg 1892.

einzelnen Fällen ausgeführt hat, wenn es sich darum handelt, die ganz-rationalen Lösungen einer solchen Gleichung zu ermitteln.

So hatte schon Pick*) der gewöhnlichen Lamé'schen Differentialgleichung die Gestalt erteilt:

$$(\varphi_4 f)^2 = \varphi_0 f,$$

wo φ_0 eine Constante, und das Product $\varphi_0 f$ mit der 0ten Ueberschiebung $(\varphi_0, f)^0$ äquivalent ist.

Ersetzt man hier die Formen φ_4, φ_0 durch φ_m, φ_{m-4} (von den Ordnungen m, m—4), so hat man nach Klein**) die „allgemeine" Lamé'sche Differentialgleichung vor sich. Die letztere wird zur allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung, sobald man in der Form φ_m gewisse (reale) Linearfactoren einander gleichsetzt.

Lässt man dagegen in der obigen allgemeinen formentheoretischen Gestalt der Differentialgleichung f eine wirkliche Form f_π der Ordnung $\pi (\geqq n)$ bedeuten, so wird die linke Seite der Gleichung eine Form F_μ von der Ordnung $\mu = n + \nu + \pi - 2n = \nu + \pi - n$. Es entspricht dann nicht nur jeder Form f_π eine Form F_μ, sondern auch „jedem linearen System von Formen f_π ein lineares System von Formen F_μ". Waelsch***) gründet hierauf eine specifische Theorie von geometrischen Abbildungen.

II. C, b, γ.
Substitution von nicht-homogenen Differentialquotienten.

Haben wir soeben wahrgenommen, wie vorteilhaft es sein kann, eine Differentialgleichung auf eine (homogene) invariantentheoretische Normalform zu bringen, so erweist es sich auch umgekehrt für manche Zwecke als sachgemäss, z. B. behufs Bildung der Differentialgleichungen für die invarianten Bildungen, die Urformen und deren Differentialquotienten in nicht homogener Gestalt anzusetzen.

Sei $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ eine binäre Urform, so bilde man sich die Grössenreihe:

$$f_0 = f,\ f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dx},\ f_2 = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2 f}{dx^2},\ \ldots,\ f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}.$$

Dann hat Bruno 1880 den wichtigen Satz†) aufgestellt:

*) Wien Ber. Juli 1887 19 S. Math. Ann. XXXVIII S. 139—143 (1891). Siehe auch Halphen, Traité des fonct. ellipt. T. II 1888.

**) Gött. N. März 1890, S. 85—95.
Math. Ann. XXXVIII S. 144—152 (1891).

***) l. c.

†) C. R. XC S. 1203—1205, Journ. f. Math. XC S. 186—188, Am. J. III S. 154—164, Math. Ann. XVIII S. 280—288 (1881).

„Vertauscht man in dem Leitgliede C_0 einer Covariante C von f die Coefficienten a_i mit den f_i, so geht vermöge dieses Processes C_0 in C über.“

Die Ausdehnung auf ein System von Urformen macht keine Schwierigkeiten.

Die vorliegende Erscheinung ist, wie Hilbert*), der dieselbe weiter verfolgt hat, betont, die gemeinsame Quelle**) einer Reihe von einzelnen Methoden Früherer: so der Cayley'schen Herleitung der Coefficienten von C aus dem Leitgliede C_0, der Roberts'schen Rechnung mit den Leitgliedern, den Cayley'schen Differentialgleichungen für die In- und Covarianten.

Letztere nehmen aber jetzt eine insofern einfachere Gestalt an, als sich ihre Anzahl auf eine einzige reducirt, vermöge des Satzes:

„Jede ganze, isobare Function C_0 der einseitigen Derivirten $f_i, \varphi_k, \ldots$, vom Gewichte p, welche in jenen Grössen homogen resp. von den Graden $g, \gamma, \ldots$ sei, ist eine simultane In- oder Covariante der $f, \varphi, \ldots$, von der Ordnung

$$m = ng + \nu\gamma + \cdots - 2p,$$

sobald sie der Differentialgleichung

$$f_0 \frac{\partial C_0}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial C_0}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial C_0}{\partial f_3} + \cdots + \varphi_0 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_1} + 2\varphi_1 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_2} + \cdots = 0$$

genügt“.

Der Grundgedanke des Beweises von Bruno ist folgender: Ist φ eine Form der f_i', so ergiebt die Mac Laurin'sche Entwickelung:

$$\varphi = [\varphi] + x[\delta\varphi] + \frac{x^2}{1.2}[\delta^2\varphi] + \ldots,$$

wo δ den bekannten Differentiationsprocess $\delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots$ bedeutet, und die Klammern aussagen, dass hinterher x gleich Null zu setzen ist. Für die Covarianten einer binären Form f gilt aber nach Cayley eine ganz ähnliche Entwickelung; denn ist ψ eine solche, mit den Coefficienten $c_0, c_1, \ldots, c_m$, so hat man:

$$\psi = c_m + x\delta c_m + \frac{x^2}{1.2}\delta^2 c_m + \ldots$$

Die Vergleichung beider Entwickelungen liefert aber sofort den Satz des Textes. Sylvester hatte den Satz, unabhängig von Bruno, gefunden, erkennt aber Am. J. II S. 357 die Priorität des Letzteren an. Vgl. auch Stroh, Math. Ann. XXII S. 402 (1885).

*) Dissertation Königsberg (1885), Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887).

**) Giebt man in dem Satze des Textes der willkürlichen Variabeln x den Wert irgend einer Wurzel der Gleichung $f = 0$, so erhält man einen Satz, den Brioschi mit Erfolg zur Transformation der Gleichung verwendet hat (Math. Ann. XXIX S. 327—330 (1887)).

Eine der wichtigsten Folgen dieser Darstellungsart ist offenbar, dass jede Relation zwischen In- und Covarianten eines Formensystems in eine Differentialgleichung übergeht. Hilbert hat bemerkenswerte Anwendungen*) hiervon gemacht.

Ferner ist man nunmehr weit eher als vordem in der Lage, In- und Covarianten für specielle vorgelegte Urformen auszuwerten.

Eine weitere Vervollständigung erfährt die Theorie bei Hilbert, wenn man neben dem Processe D noch den weiteren Δ einführt:

$$\Delta = \left(nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1)f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + \cdots\right) + \left(\nu\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_0} + (\nu-1)\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cdots\right) + \cdots$$

Die Ausübung des Processes Δ auf eine (isobare) Form der f_i kommt einer Differentiation nach der Variabeln x gleich**).

Zwischen den Operationen D und Δ nebst ihren Wiederholungen herrschen einfache Recursionsgesetze von der Art:

$$D^k \Delta^l = \Delta^l D^k + c_1 \Delta^{l-1} D^{k-1} + c_2 \Delta^{l-2} D^{k-2} + \cdots,$$
$$\Delta^l D^k = D^k \Delta^l + d_1 D^{k-1} \Delta^{l-1} + d_2 D^{k-2} \Delta^{l-2} + \cdots,$$

wo die c, d numerische Factoren sind.

Hierauf stützt sich eine Erweiterung des Begriffes der Covariante (und der Ueberschiebung). Eine (isobare) Form F der f_i, φ_k, ... heisse eine Semicovariante vom Range r, wenn in der Reihe der Bildungen DF, D^2F, ... die $(r+1)$te die erste identisch verschwindende ist. Zufolge der obigen Formeln besitzt dann F die Ordnung $m+r$ in x.

Eine Semicovariante vom Range Null ist eine gewöhnliche Covariante (und umgekehrt).

Es ist von Bedeutung, dass eine solche Form F vermöge der Processe D und Δ aus Covarianten erzeugt werden kann.

Construirt man nämlich den Process:

$$[\,] = 1 - \frac{1}{1.(m+2)} \Delta D + \frac{1}{1.2.(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - + \cdots,$$

so resultiren in den Bildungen [F], [DF], ..., $[D^r F]$ $r+1$ Covarianten, $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, ..., $F^{(r)}$. „Dann ist die Semicovariante F vom Range r

*) Math. Ann. XXX l. c. S. 21 u. folgde. Vgl. II. D, d. Vgl. oben S. 128.

**) Dieser Satz hängt unmittelbar mit dem bekannten zusammen, wonach eine isobare Form der a_i, welche den beiden Differentialgleichungen $D = 0$, $\Delta = 0$ genügt, eine simultane Invariante der f, φ, ... ist. Nach dem Hauptsatze des Textes kann sie sich dann nicht ändern, wenn man die a_i mit den f_i vertauscht, und kann demnach auch als Form der f_i die Variable x nicht enthalten. Ein entsprechender Satz gilt übrigens auch nach Mac Mahon für Reciprocanten, siehe II. C, c, β.

darstellbar als das lineare Aggregat*):

$$F = \sum_{k=0}^{k=r} l_k \Delta^k F^{(k)}, \quad l_k = \frac{(m+k)!}{(m+2k)!\,k!}\text{“}.$$

Der Process [] spielt dabei die Rolle einer Verallgemeinerung der Ueberschiebung, und geht in letztere, nämlich in $(f, \varphi)^p$ über, wenn man für die Form F das Product $f_0 \varphi_p$ substituirt.

Perrin**) hat Sätze dieser Art auf das ternäre und höhere Gebiete ausgedehnt, und dieselben in Beziehung zu seiner Darstellung associirter Systeme gesetzt (siehe S. 157).

II. C, b, δ.

Reihenentwickelungen.

Specialisirt man die Capelli'sche Formel für den Zusammenhang zwischen Ω- und Polarenprocess, indem man nur zwei binäre Variabelnreihen $x_1, x_2; y_1, y_2$ zu Grunde legt, und wendet sie auf eine Form $f(\overset{m}{x};\overset{n}{y})$ an, so erhält man diejenige Relation, auf welche Clebsch und Gordan***) ihre Reihenentwickelung der Form f(x; y) nach Potenzen von $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ aufgebaut haben, nämlich

$$\text{I.}\quad f = \Delta D f + \frac{m}{m+1}(xy)\Omega f,$$

wo die drei Processe Δ, D, Ω die Bedeutung haben:

$$\Delta f = \frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad Df = \frac{1}{n}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\right),$$

$$\Omega f = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_2}\right).$$

Da die Formen Df und Ωf die y zu niedrigerer Ordnung enthalten, als f, so wird man bei wiederholter Anwendung von I schliesslich alles auf Formen in x_1, x_2 allein zurückführen. Denn nach gehöriger Zusammenziehung kommt:

$$\text{II.}\quad f = \Delta^n D^n f + \alpha_1 (xy)\Delta^{n-1}D^{n-1}\Omega f + \alpha_2 (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2}\Omega^2 f + \cdots$$

Die Reihe bricht beim Gliede $\Omega^m f$ von selber ab, da $\Omega^{m+1} f$ identisch verschwindet; die Formen $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f$ hängen allein von den x ab.

„Diese Entwickelung von f nach Potenzen von (xy), wo

*) Hierauf beruht der Beweis von Hilbert über die Anzahl linear unabhängiger invarianter Bildungen. Siehe diesen Bericht S. 170.

**) S. M. F. Bull. XVI S. 82—100 (1888).

***) Siehe Clebsch, „Binäre Formen“ § 7.
Gordan, Vorlesungen II S. 23.

die Coefficienten Polaren von Functionen der x sind, ist eine eindeutige"*).

Durch Vermittelung symbolischer Darstellung lassen sich die Glieder rechterhand auch als einfache Ueberschiebungen schreiben.

Setzt man

$$E_0 = D^n f = a_x^{m+n}, \quad E_1 = D^{n-1}\Omega f = b_x^{m+n-2},$$
$$E_2 = D^{n+2}\Omega^2 f = c_x^{m+n-4} \text{ etc.},$$

so gehen die einzelnen Glieder der rechten Seite unmittelbar über in die nte, (n—1)te, (n—2)te, ... Ueberschiebung von E_0, E_1, E_2, ... mit der Form $(xy)^n$.

Es ist aber ungleich zweckmässiger, die Urform f von vorn herein symbolisch anzusetzen: $f = r_x^m s_y^n$, wo dann immer erst geeigneten Producten der Symbole r und s eine reale Bedeutung zukommt.

Dann werden die Formen E direct**) durch den Faltungsprocess (sc. mit nachträglicher Gleichsetzung der x und y) gewonnen:

$$E_0 = r_x^m s_x^n, \quad E_1 = (rs) r_x^{m-1} s_x^{n-1}, \quad E_2 = (rs)^2 r_x^{m-2} s_x^{n-2}, \ldots$$

Die theoretische Bedeutung der Reihenentwickelung liegt auf der Hand. Denn es folgt daraus, dass die Form f mit zwei Reihen cogredienter Veränderlicher, hinsichtlich des Systems ihrer invarianten Bildungen, vollständig ersetzt werden kann durch die Reihe der n+1 Urformen E („Elementarcovarianten" nach Gordan), welche nur noch von einer Variabelnreihe abhängen.

Das Entsprechende gilt für eine Form f mit mehr als zwei Variabelnreihen, indem man das geschilderte Verfahren genügend oft wiederholt.

Man kann aber auch unmittelbar zu einer analogen Formel für eine Form f mit zwei ternären, ... Variabelnreihen ($\xi_1, \xi_2, \ldots$), ($\eta_1, \eta_2, \ldots$) gelangen.

Specialisirt man nämlich mit Clebsch***) f zu $x_1^m y_2^n$, und führt dann symbolisch die linearen Ausdrücke ein:

$$x_1 = r_\xi, \quad y_1 = r_\eta; \qquad x_2 = s_\xi, \quad y_2 = s_\eta,$$

so geht die Differenz (xy) über in $(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi)$, und die Elementarcovarianten lassen sich ersetzen durch die Reihe:

$$\psi_0 = r_\xi^m s_\xi^n, \quad \psi_1 = r_\xi^{m-1} s_\xi^{n-1}(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi), \ldots$$

*) Die Eindeutigkeit ist dabei so zu verstehen, dass es keine zweite Entwickelung nach Potenzen von (xy) giebt, bei der die Coefficienten Polaren von Formen einer Variabeln wären.

**) Gordan, Vorlesungen II § 7.

***) Gött. Abh. XVII, insbes. S. 22. Vgl. Gordan, Math. Ann. V S. 95—122 (1872), wo zugleich Entwickelungen für die Polaren der „Elementarcovarianten" gegeben werden.

Clebsch*) hat auf Grund dieser Entwickelung einer Form $r_\xi^m s_\eta^n$ den fundamentalen Satz nachgewiesen, „dass man sich bei Aufstellung des Systems von invarianten Bildungen, welches zu einer Reihe von Urformen in den Variabelnreihen $(x_1 \dots x_n)$, $(y_1 \dots y_n)$, $(z_1 \dots z_n)$, ... gehört, beschränken darf auf eine einfachere Reihe von Urformen, welche von jedem „Variabelntypus" der Art:

$$x_i, \quad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}, \quad p_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l \\ y_i & y_k & y_l \\ z_i & z_k & z_l \end{vmatrix}, \dots$$

höchstens je eine Reihe enthält".

In der That gilt die soeben erwähnte Reihenentwickelung auch dann, wenn die ξ, η zwei Reihen irgend eines und desselben „Typus" vorstellen.

Diese einfacheren Urformen, welche die ursprünglichen vollständig ersetzen, können ausserdem noch so**) gewählt werden, dass sie den Differentialgleichungen $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial p_{ikl} \dots \partial p_{i'k'l'} \dots} = 0$ genügen, wo die $p_{ikl} \dots$, $p_{i'k'l'} \dots$ dualistisch sich gegenüberstehende Variabeln bedeuten, und die Summe sich auf alle Paare dieser Art zu erstrecken hat. Hat man also etwa nur Punktvariable x und die contragredienten u, so ist die fragliche Summe einfach $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$.

Bei Gordan***) erscheint der Process der Reihenentwickelung als das weittragendste Hülfsmittel der symbolischen Rechnung. Wir erwähnen

---

*) l. c. § 12.

**) Forsyth hat neuerdings Quart. J. XXIII S. 102—138 (1888) für solche „reducirten Systeme" eine Reihe von Beispielen durchgeführt, und dabei insbesondere nach dem Vorgange von Clebsch constatirt, dass die Anzahl der in den reducirten Formen auftretenden willkürlichen Coefficienten genau übereinstimmt mit denjenigen der ursprünglichen Formen.

Mertens hat reducirte Formen des quaternären Gebietes zur Aufstellung voller Systeme von Grundformen verwendet.

(Wien. Ber. XCVIII S. 691—739, 1889, sowie spätere Arbeiten ebda.)

Gordan hat in seinem Programm, Anhang (1875), den Begriff des Reducirten noch weiter geführt. Man betrachte in der Determinante der Grössen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, ... einige Reihen als willkürliche Variabeln, während die andern, wie beim Ω-Process, symbolisch durch die entsprechenden Differentialquotienten ersetzt werden. Alle derartigen invarianten Aggregate, gleich Null gesetzt, stellen Differentialgleichungen dar, welchen die „reducirten Formen" unterworfen werden können. Mertens macht von diesen Processen den weitesten Gebrauch (l. c.).

Capelli hat in seinen „Fondamenti" (1882), ein System einfacher Polaroperationen an die Stelle der eben erwähnten gesetzt, desgleichen Deruyts in seiner „Théorie génerale des formes alg." (1891).

***) Entsprechendes gilt von den ternären Entwickelungen Study's.

hier etwa die Methode, die linear unabhängigen (oder „asyzygetischen") Covarianten, vorgegebenen Grades, von einer Urform zu berechnen; die Darstellung der Covarianten in den Wurzeln der Urform, den Beweis des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes, sowie den Nachweis für den Fundamentalsatz der Symbolik, dass jede Covariante als Aggregat von symbolischen Producten vorgeschriebener Gestalt geschrieben werden kann.

Mit der Ausdehnung der Clebsch-Gordan'schen Reihenentwickelung auf Formen mit mehreren cogredienten Reihen von n Variabeln hat sich insbesondere Capelli beschäftigt.

Für eine ternäre*) Form etwa, mit drei Reihen: $f(\overset{m}{x};\overset{n}{y};\overset{l}{z})$ kommt, wenn (xyz) die Determinante der x, y, z ist:

$$f=\sum_{\nu}\sum_{\mu}(xyz)^{\varrho}D^{\nu}_{yz}D^{\mu}_{xz}\varphi_{\mu\nu}(\overset{m+\mu-\varrho,}{x};\overset{n+\nu-\varrho}{y})\qquad(\mu+\nu+\rho=l).$$

Hier sind die $\varphi_{\mu\nu}$ Covarianten, welche nur die x, y enthalten; sie entstehen aus f in der Weise, dass

$$\varphi_{\mu\nu}=\sum_{\sigma}k_{\sigma}D^{\tau}_{zx}D^{\tau'}_{zy}D^{\tau''}_{xy}D^{\sigma}_{yx}\Omega^{\varrho}f,$$

wo die k numerische Factoren bedeuten, σ innerhalb gewisser Grenzen variirt, und die Exponenten τ in bestimmter Art durch die Zahl σ bedingt sind.

In seinem ersten Beweise*) bedient sich Capelli der Aronhold'schen Symbolik. Indem er von dem Specialfalle $l=1$ ausgeht, setzt er zunächst die Zerlegung an:

$$f(\overset{m}{x};\overset{n}{y};\overset{1}{z})=a_x^m b_y^n z=D_{xz}\varphi+D_{yz}\psi+(xyz)(abc)H,$$

bei welcher die Formen φ, ψ, H die Variable z nicht mehr enthalten.

Die Untersuchung des diophantischen Gleichungssystems zwischen den Exponenten der symbolischen Factoren a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y in φ und ψ zeigt, dass letztere zwei Formen sich je aus einer bestimmten Anzahl linear unabhängiger zusammensetzen, welche direct aus der Form $a_x^m b_x^n c_x$ durch Polarisation nach den y hervorgehen.

Hieraus leitet man successive die oben angegebene allgemeine Formel her, indem man beide Seiten der Darstellung für $a_x^m b_y^n c_z$ mit weiteren Factoren c_z multiplicirt.

Der Verfasser hat seitdem fortgesetzt an der Vereinfachung des Beweises gearbeitet**). Es hat sich ihm allmählich ergeben, dass der Satz

*) Capelli, Batt. G. XVIII S. 17—34 (1880).
**) „Fondamenti" 1882; Rend. Pal. I S. 1—6 (1886);
Math. Ann. XXXVII S. 1—37 (1891);
Rend. Acc. L. VII S. 161—167 (1891), ebd. S. 3—9 (1892).

selbst nicht sowohl der Formentheorie, als der abstracten Theorie der Polarenprocesse D als solcher angehört. (Siehe oben S. 200—202.) Als Hauptmomente des neuesten Beweises treten auf: erstens, dass die Differenz zwischen zwei Producten aus denselben λ Operationen D, welche sich nur durch deren Reihenfolge unterscheiden, aus Producten von weniger Operationen D linear componirbar ist, sodann die lineare Unabhängigkeit zwischen gewissen derartigen Producten, endlich die Zurückführung des Ω-Processes auf Processe D.

Ein besonders oft zur Verwendung kommender Unterfall der Entwickelung von $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ (um beim ternären Typus zu bleiben) ist derjenige, welcher entsteht, wenn $n = 1$ und zudem die y, z nur in den Verbindungen $u_i = \begin{vmatrix} y_k & z_k \\ y_l & z_l \end{vmatrix}$ auftreten, d. h. wenn die Urform f nur von den Variabeln x und deren contragredienten u abhängt. Clebsch nennt dann f einen „Connex"*).

Diese Connexe f erlauben eine directere Behandlung, wie Gordan**) schon 1872 auseinandergesetzt hat; f lässt sich in eine endliche Reihe nach Potenzen von $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ entwickeln, derart, dass die Coefficienten „Normalconnexe" werden, d. h. solche, für die eine gewisse Zwischenform identisch verschwindet.

Um dies klar zu machen, folgen wir der Darstellung bei Study***).

Ist f symbolisch gegeben durch $a_x^m u_\alpha^n$, so ergeben sich durch Faltung: $\Delta_k f = (a\alpha) a_x^{m-k} u_\alpha^{n-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, d. s. die einfachsten Ueberschiebungen von f; verschwindet insbesondere Δf identisch, so heisst f ein „Normalconnex".

Es wird zuvörderst nachgewiesen:

I. „dass jeder Connex mit den Ordnungszahlen m, n eine (in den Coefficienten von f) lineare Covariante mit den nämlichen Ordnungszahlen besitzt, welche ein Normalconnex ist".

In der That stellt das Aggregat:

$$\text{I.} \quad G_0 = f + a_1 u_x \Delta f + a_2 u_x^2 \Delta^2 f + \cdots$$

für irgend welche (rationalen) Zahlenfactoren a eine lineare Covariante von f mit den Ordnungszahlen m, n dar.

Hier lassen sich die a vermöge Recursion eindeutig so bestimmen, dass $\Delta G_0 \equiv 0$, also G_0 ein Normalconnex ist.

*) Gött. N. 1872 S. 429—449, Math. Ann. VI S. 205—215 (1872). Vgl. Clebsch und Gordan, Math. Ann. I S. 359—400 (1869).

**) Math. Ann. V S. 95—122, bes. §§ 4, 5.

***) „Methoden" II § 3.

Der hiermit bewiesene Satz I wird jetzt der Reihe nach, genau wie auf f selbst, angewendet auf die Bildungen Δf, $\Delta^2 f, \ldots$, wodurch die „Elementarconnexe G_0, G_1, $G_2, \ldots$ erzeugt werden.

Nunmehr setzt man in ähnlicher Weise das Aggregat an:

$$\text{II.} \quad G_0 + b_1 u_x G_1 + b_2 u_x^2 G_2 + \cdots$$

und sucht dasselbe durch geeignete Bestimmung der Zahlencoefficienten b mit der Urform f zu identificiren. Das gelingt wiederum auf nur eine Art, insofern die b_i durch Auflösung eines linearen Gleichungssystemes berechnet werden.

„Somit lässt sich jeder Connex $f(x; u)$ in eine, nach Potenzen von u_x fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Normalconnexe sind".

Zugleich wird dem Beweise selbst die wichtige Folgerung entnommen, dass die Coefficienten der Elementarconnexe G_i — bis auf die Beschränkung, welche ihnen durch das Bestehen der Bedingungen $\Delta G_i = 0$ auferlegt wird — von einander unabhängig sind.

Study hat die Theorie solcher Reihenentwickelungen durch Hereinziehung der Dualität noch übersichtlicher gestaltet.

Nennt man mit Rosanes*) zwei Connexe $f = a_x^m u_\alpha^n$, $g = b_x^n u_\beta^m$ „conjugirt", wenn die simultane Invariante

$$[f, g] = a_\beta^m b_\alpha^n$$

verschwindet, so zeigen die Reihenentwickelungen (nach Elementarconnexen) zweier Connexe mit den Ordnungszahlen m, n bez. n, m die merkwürdige gegenseitige Zuordnung, „dass jedes Glied $u_x^i G_i$ der einen Reihe conjugirt ist zu jedem Gliede $u_x^k G_k'$ der anderen Reihe, mit Ausnahme des Falles, wo die Indices i, k einander gleich sind.

Ganz ähnliche Sätze gelten für die Reihenentwickelungen für Formen mit zwei cogredienten Variabelnreihen.

Study hat ferner nachgewiesen, dass die erörterten Entwickelungen ihre wesentlichen Eigenschaften beibehalten, auch wenn der vorgelegte Connex f nicht mehr ein allgemeiner, sondern selbst ein normaler ist**).

Derselbe Verfasser hat endlich, vermöge eingehenden Studiums der durch die Substitutionscoefficienten repräsentirten Mannigfaltigkeit und gewisser in ihr enthaltenen invarianten Untergebiete, den Reihenentwickelungen eine geometrische, oder besser gesagt, begriffliche Bedeutung untergelegt***).

---

*) Cf. II. D, b.
**) l. c. II § 8.
***) l. c. II § 12.

II. C, b, ε.
Substitution von homogenen Differentialquotienten.

Sylvester hat, wie in der Einleitung hervorgehoben ist*), durch Substitution der ersten Differentialquotienten einer Form G(u) an Stelle der, mit ihnen cogredienten Variabeln x in eine Form F(x), eine simultaninvariante Bildung erzeugt. War insbesondere F(x) bereits eine Covariante, G(u) eine Contravariante von vorgelegten Urformen, so lieferte der Process eine neue Contravariante.

In neuerer Zeit hat Sylvester**) noch ein anderes Princip angegeben, um aus zwei invarianten Bildungen eine dritte abzuleiten. Dasselbe verdient vor allem hinsichtlich seines Ursprunges Beachtung, insofern ihm eine einfache Beziehung zu Grunde liegt zwischen der Substitutionsgruppe der Variabeln x und der hierdurch inducirten Substitutionsgruppe der Coefficienten a einer Urform.

Um diese Beziehung deutlicher hervortreten zu lassen, wird die Urform zuvor „präparirt" ***), d. h. die Coefficienten a werden mit den Quadratwurzeln aus den bezüglichen Polynomialcoefficienten als numerischen Factoren ausgestattet. „Dann induciren zwei „reciproke" Substitutionen der x stets auch zwei reciproke Substitutionen der a." Hat man nunmehr wiederum eine Covariante F(x) und eine Contravariante G(u), so ersetze man die Grössen a innerhalb F(x) durch die Differentialquotienten $\frac{\partial G(u)}{\partial a}$, zugleich die x durch die u, so gelangt man dadurch ebenfalls zu einer neuen Contravariante.

In ähnlicher Weise kann man auch aus zwei Covarianten eine neue Covariante erzeugen.

Der geschilderte Substitutionsprocess lässt sich aber auch auf die Leitglieder von Formen F(x), G(u) übertragen. Setzt man in einem derselben statt der a die entsprechenden Ableitungen des andern, so gewinnt man ein neues Leitglied einer Covariante resp. Contravariante.

Während Sylvester den oben mitgeteilten Hülfssatz successive für das binäre, ternäre, ... Gebiet nachweist, hat Lipschitz†) einen directen

---

*) Siehe oben S. 85, 86.

**) Journ. f. Math. LXXXV S. 89—114 (1878). Vgl. auch oben S. 103.

***) Diese „präparirten" Coefficienten treten übrigens bereits bei Clebsch auf, Gött. Abh. XVII. S. 14 (1872).

†) Am. J. I S. 336—346 (1878), vgl. die Bemerkungen von Sylvester dazu, ebd. S. 341—343.

Einen einfachen symbolischen Beweis für den Satz über die transponirten Substitutionen hat le Paige gegeben, Math. Ann. XV S. 206—210 (1879).

Beweis gegeben. Er bringt dabei den fraglichen Satz in unmittelbare Beziehung zu einem ähnlichen, der die Verwandtschaft zwischen Variabeln- und Coefficientengruppe von anderer Seite her ergänzt. Es zeigt sich nämlich, „dass auch zwei „transponirte“ Substitutionen der einen Art zwei transponirte der anderen Art bedingen“.

Study*) hat den letzteren Satz auf Connexe ausgedehnt, und einige Folgerungen daraus gezogen, welche das Dualitätsprincip als den inneren Kern derartiger Erscheinungen erkennen lassen.

„Denkt man sich nämlich neben einem ersten Connex $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{u})$ einen zweiten $\varphi(\overset{n}{x}, \overset{m}{u})$ mit vertauschten Ordnungszahlen, und ebenfalls in präparirter Form geschrieben, dann sind die beiderlei Substitutionsgruppen der Coefficienten zu einander transponirt.“

In der That, bezeichnet man die beiderlei Coefficienten mit a, b, die transformirten resp. mit a', b', so ist das Aggregat $\Sigma ab = \Sigma a'b'$, d. h. Σab ist eine identische Covariante, gerade wie es Σxu ist**).

Hieraus ergiebt sich weiter, dass, wenn F irgend eine Function der a bedeutet, die Grössen $\frac{\partial F}{\partial a}$ zu den b cogredient sind.

Darauf stützt sich die Einführung des Evectantenbegriffes bei Connexen; man hat nur die $\frac{\partial F}{\partial a}$ geradezu an Stelle der b einzusetzen. Die Evectante ist dann von selbst wiederum eine präparirte Form. Der Evectantenprocess lässt sich wiederholen: die Coefficienten der kten Evectante sind die partiellen Ableitungen kter Ordnung des Connexes F.

II. C, b, ζ.

Differentialgleichungen.

Dem Anteil, welchen Aronhold, Sylvester, Cayley, Brioschi, Betti an der Aufstellung der Differentialgleichungen für die Invarianten einer oder mehrerer Urformen genommen haben, ist in der Einleitung***) Beachtung geschenkt worden. Die Fortschritte,. welche in der

*) „Methoden“ S. 36 u. flgde. Vgl. dazu die Bemerkungen S. 203.

**) Offenbar lassen sich sowohl die alten, als die neueren Entwickelungen Sylvester's über Ersetzung von Differentialquotienten an Stelle von Variabeln resp. Coefficienten übertragen auf den Fall von irgend zwei, dualistisch sich gegenüber stehenden Variabelnreihen $p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$, denn die Summe $\Sigma p_{ikl}, \ldots p_{i'k'l'}, \ldots$ ist wiederum eine identische Covariante u. s. f.

***) S. 87.

neueren Periode erzielt worden sind, beziehen sich vorwiegend auf die innere Bedeutung, den gegenseitigen Zusammenhang und die daraus fliessende Reduction jener Gleichungen.

Nachdem Clebsch die Notwendigkeit begründet hatte, behufs Bildung der Invarianten eines Systemes von Urformen mit mehreren Variabelnreihen die Unterdeterminanten p_{ik}, p_{ikl}, ... der aus n derartigen Reihen zusammensetzbaren Determinanten als selbständige Veränderliche einzuführen, erhob sich zunächst die Aufgabe, die Differentialgleichungen der Invarianten einer Urform $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dahin zu modificiren, dass sie nunmehr für eine invariante Bildung von f gelten, welche ausser von den x und den contragredienten u auch noch von jedem Zwischen-Variabelntypus p_{ik}, p_{ikl}, ... je eine Reihe enthalten darf.

Allgemein ist die bezeichnete Aufgabe erst neuerdings von Forsyth*) gelöst worden.

Indem er nach dem Vorgange von Lie von einer infinitesimalen Substitution der x ausgeht, d. i. einer solchen, deren Coefficienten sich von denen der „Einheitssubstitution“ $x_i = X_i$ nur um unendlich kleine Grössen δ unterscheiden, berechnet er die Aenderungen, welche jene Unterdeterminanten p_{ik}, p_{ikl}, ..., u, sowie die Coefficienten a der Urform hierbei erleiden. Es brauchen zu diesem Zwecke nur die ersten Potenzen der δ berücksichtigt zu werden.

Beispielsweise ergeben sich so für die invariante Bildung J einer quaternären Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit den Coefficienten a_{iklm} sechs lineare partielle Differentialgleichungen von dem Typus:

$$\Sigma\Sigma\Sigma i a_{i-1,k+1,l,m} \frac{\partial J}{\partial a_{iklm}} = x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} + p_{14} \frac{\partial J}{\partial p_{24}} - p_{31} \frac{\partial J}{\partial p_{23}} - u_2 \frac{\partial J}{\partial u_1}.$$

Es hat auch keine principielle Schwierigkeit, auf diesem Wege Urformen zu berücksichtigen, in welche die x, p_{ik}, p_{ikl}, ..., u sämtlich oder teilweise eingehen.

Die von Clebsch**) festgestellte Thatsache, dass die n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen für eine absolute Invariante ein vollständiges System bilden, d. h. dass die Anwendung des Klammerprocesses immer nur auf lineare Combinationen der alten Gleichungen führt, erscheint vom Standpunkte der allgemeineren Lie'schen Theorie in sehr durchsichtigem Gewande.

Denn während die Differentialgleichungen der Invariante

---

*) Lond. Proc. XIX. S. 24—46 (1888).
**) S. 97.

einfach aussagen, dass die letztere die sämtlichen infinitesimalen Substitutionen der Variabeln (oder auch der Coefficienten) gestattet, deckt sich die Eigenschaft des „vollständigen Systems" damit, dass die Substitutionen eine Gruppe bilden.

Study*) hat diesen Zusammenhang für die projectiven Invarianten des näheren verfolgt, und hat daraufhin insbesondere nachgewiesen, dass gewissen Zusammenfassungen der Differentialgleichungen eine unmittelbare formentheoretische Bedeutung, nach symbolischer wie nach unsymbolischer Richtung hin zukommt. Gordan hatte das, wie schon früher bemerkt**), für das binäre Gebiet geleistet.

Bei Study***) wird zuvörderst eine lineare Transformation der x durch eine in den x, u bilineare Form T repräsentirt. Weiterhin wird — etwa im ternären Gebiete — die Mannigfaltigkeit der Formen T abgebildet auf einen linearen Punktraum R von $9-1=8$ Dimensionen: dieser Raum R wird infolgedessen durch eine achtgliedrige Gruppe transformirt.

Der identischen Transformation u_x entspricht ein „invarianter" Punkt, der Einheitspunkt: desgleichen entspricht der Gesamtheit der Transformationen T' von verschwindender Discriminante eine lineare siebenfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit R'.

Jede infinitesimale Transformation bildet sich ab mittels einer „Geraden" in R, welche durch den Einheitspunkt geht. Bestimmt man nun diese Gerade durch ihren Schnittpunkt mit R', so hat man damit jeder infinitesimalen Transformation eine bestimmte **endliche** T' von verschwindender Discriminante eindeutig umkehrbar zugeordnet, und hat zugleich in der Bilinearform T' ein **Symbol** für die infinitesimale Transformation.

Auf diesem Wege gelangt man zu einer durchsichtigen symbolischen Schreibart für die Differentialgleichungen der Invarianten J einer Urform f.

Die unsymbolische Bedeutung der Gleichungen ist dann dadurch ausgedrückt, dass die Evectante J' von J zu einer gewissen simultanen Covariante von J und f Veranlassung giebt, die sich von dem Producte Fu_x nur um einen Zahlenfactor unterscheidet.

Bei Sätzen dieser Art haben übrigens die ganz-rationalen Invarian-

*) „Methoden..." II § 18.
**) Siehe oben S. 205.
***) l. c. § 15.

ten nichts Ausgezeichnetes mehr; an deren Stelle darf auch eine rationale, resp. algebraische, resp. analytische Invariante treten.

Es drängt sich nunmehr die andere Frage auf, auf welche Minimalanzahl von unabhängigen Gleichungen das ganze System von n^2 Differentialgleichungen reducirt werden kann.

Die gemeinte Minimalanzahl von Gleichungen muss dann die Eigenschaft haben, dass man durch wiederholte Anwendung des Klammerprocesses alle übrigen Gleichungen des Systems erhält.

Aus der oben berührten Darstellung der infinitesimalen Substitutionen durch bilineare Formen mit verschwindender Discriminante kann aber gefolgert werden, dass die gesuchte Minimalanzahl gleich Zwei*) ist.

Eine andere Methode der Reduction rührt von Kronecker**) her. Kronecker setzt die allgemeine lineare Substitution von n Variabeln aus einer Reihe einfacherer zusammen, sodass die Reihenfolge der letzteren mit der Ausübung der ersteren äquivalent ist. Als derartige einfachere Substitutionen nimmt man zweckmässig solche, bei denen sich die Transformation nur auf zwei Variable erstreckt, und hier insbesondere wiederum solche, bei denen sich dieselben nur um constante Factoren ändern.

So gelangt man beispielsweise zu $m-2$ „einfachen Decompositionssystemen" mit numerischen Coefficienten: die $2n-2$ entsprechenden Differentialgleichungen, die der Reihe nach aussagen, dass eine Invariante bei jeder einzelnen der $2n-2$ Substitutionen unverändert bleibt, ersetzen das Aronhold'sche System der n^2 Differentialgleichungen vollständig.

Für absolute Invarianten hat zu jenen $2n-2$ Gleichungen noch eine weitere hinzuzutreten.

Kronecker hebt selbst hervor, dass seine Gleichungen ohne***) Anwendung irgend welcher Symbolik erlangt worden sind; ferner, dass bei der Charakterisirung der Invarianten keine einzige jener $2n-2$ resp. $2n-1$ Gleichungen entbehrt werden kann, sowie endlich, dass eben die von ihm ausgeführte Reduction der n^2 ursprünglichen Gleichungen auf $2n-1$ vollständigen Aufschluss giebt über die zwischen den n^2 Gleichungen

---

*) Vgl. dazu die Bemerkungen von Kronecker, der die genannte Erscheinung auf einen substitutionentheoretischen Satz zurückführt. Berl. Ber. 1889 S. 504.

**) Berl. Ber. 1889. S. 349—362, 479—505, 603—614.

Die verwandten Betrachtungen von Deruyts sind bei der zusammenhängenden Darstellung im Abschnitte über Seminvarianten II. D, a zur Sprache gebracht.

***) Das Gleiche gilt übrigens von den oben erwähnten Differentialgleichungen bei Forsyth, sowie von den neueren Herleitungen der Differentialgleichungen für „Reciprocanten", siehe II. C, c, β.

bestehenden Beziehungen, durch welche nach Aronhold ihre Coexistenz bedingt ist.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, dass die Bedeutung der Differentialgleichungen, welchen die Invarianten genügen, abgesehen von der praktischen Erleichterung, welchen sie bei der Berechnung derselben gewährten, vor allem darin beruht, als sie für eine unsymbolische Behandlung der meisten Aufgaben der Formentheorie bis auf die neueste Zeit die einzige allgemeine Methode darboten. Denn die gleichfalls unsymbolische Methode der „canonischen Formen" lässt sich selbst wiederum vollständig nur mit Hülfe jener Differentialgleichungen begründen*).

Anhang.

II. C, c, α.

Verallgemeinerungen.

Höhere Transformationen.

Es mag zum Schlusse dieses Hauptabschnitts noch auf zwei Verallgemeinerungen eingegangen werden, deren erste mit Gruppen von nichtlinearen, rationalen Transformationen der Variabeln zu thun hat, während die zweite der sogenannten „erweiterten Gruppe derselben", oder, was auf dasselbe herauskommt, der Theorie der „Differentialinvarianten" angehört.

Die höheren rationalen Transformationen sind vom formentheoretischen Standpunkt aus nur**) im binären Gebiete vollständig untersucht worden.

Auf die invariante Gestaltung der Tschirnhausen-Transformation, durch Hermite, bei der die neue (nicht homogene) Variable eine ganze Function der alten ist, ist bereits früher***) hingewiesen worden.

---

*) Ein weiteres, schon früher (S. 147) berührtes, auf der Benutzung des Ω-Processes beruhendes unsymbolisches Verfahren ist von Mertens zu den Differentialgleichungen für „reducirte" Formen in unmittelbare Beziehung gesetzt worden.

(Wien. Ber. XCVIII S. 691–739, 1889.)

Dagegen nehmen die neuesten Untersuchungen von Hilbert immer mehr einen rein arithmetischen Charakter an.

**) Siehe die Bemerkungen auf S. 102. Bezüglich der höheren Transformationen bei associirten Darstellungen siehe S. 156.

***) S. 93. Es sei hier ergänzend hinzugefügt, dass Brioschi, unmittelbar an Hermite anknüpfend, diejenigen partiellen Differentialgleichungen aufgestellt hat, denen die Coefficienten der transformirten Gleichung zu genügen haben. (Atti Ist. Lomb. 1 S. 231, 1858.)

Der Hermite'sche Ansatz ist später von Klein schärfer ausgeprägt worden, indem die Tschirnhausen-Transformation geradezu auf ein „typisches" Coordi-

Gordan*) verdankt man den Nachweis, dass und wie die binäre Invariantentheorie der rationalen Transformation auf die projective zurückgebracht werden kann.

Es handelt sich hierbei nur um relative Invarianten, da sich unschwer einsehen lässt, dass die Möglichkeit einer absoluten Invariante ausgeschlossen ist.

Auf eine binäre Form $f(x_1, x_2)$ wird die Transformation

$$z_1 = \varphi_m(x_1, x_2), \quad z_2 = \psi_n(x_1, x_2)$$

ausgeübt, indem man die Resultante F (bez. der x) der beiden Formen f und $z_1\psi - z_2\varphi$ bildet. F heisst die transformirte Form, und die Aufgabe ist, die Invarianten von F durch die einfachsten simultanen Invarianten der f, φ, ψ auszudrücken. Hierbei können die beiden letzteren Formen φ, ψ durch die „Combinante"**)

$$\vartheta(x; y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$$

ersetzt werden.

Aber nicht umgekehrt ist jede simultane Invariante von f, φ, ψ oder auch von f, ϑ eine Invariante von F; dazu muss sie noch gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen.

Clebsch***) hat dieselben aufgestellt und zugleich nachgewiesen, dass sie ein vollständiges System bilden.

Für den Fall $m = 2$ lässt sich die Integration durchführen.

---

natensystem bezogen wird. Siehe etwa „Vorlesungen über das Ikosaeder ..." (1884), Abschnitt II Kap. II §§ 5, 6.

Es sei hier noch einer anderen Verwendung einer höheren Transformation gedacht. Ist $f_n(x, 1)$ eine, nicht homogen geschriebene binäre Form, so geht vermöge der Substitution $z = \frac{g(x, 1)}{f'(x, 1)}$ f über in eine Form $F_n(z, 1)$, deren Coefficienten sämtlich Invarianten sind, vorausgesetzt, dass g eine Covariante der Ordnung n—2 ist (Hermite, C. R. 1865, vgl. dazu noch Rahts, Math. Ann. XXVIII S. 34—60, 1886). Bei Bruno-Walter S. 191 wird dieser Satz dahin ausgedehnt, dass f selbst eine Covariante der Ordnung n ist. Junker (Dissert. Freiburg, 1887) hat nachgewiesen, dass der letztere Satz gewissen Einschränkungen unterliegt. Brioschi hat neuerdings in einer Reihe von Arbeiten an Hermite wieder angeknüpft, und insbesondere gezeigt, wie einfach sich die transformirten Covarianten bei Substitution einer Wurzel der Urform darstellen: Math. Ann. XXIX S. 327—330 (1887), Annali di Mat. (2) XVI S. 181 bis 189, 329—334 (1888), Lond. M. S. Proc. XX S. 127—131 (1889). Siehe oben S. 211.

*) Journ. f. Math. LXXI S. 164—194 (1870).

**) Die Function $\vartheta(x, y)$ ist nichts anderes, als die später von Gordan systematisch eingeführte „erzeugende Function" R der Combinanten von φ und ψ (cf. II. D, b). Auch die Entwickelung von R nach „Elementarcovarianten" findet sich hier bereits vorgebildet.

Ein ausgerechnetes Beispiel, nämlich die quadratische Transformation einer biquadratischen Form findet sich bei Cayley, Math. Ann. III S. 359—361 (1871).

***) Gött. Abh. XV S. 65—99, 1870.

Die höheren Transformationen werden dazu benutzt, um Gleichungen bestimmte Invarianteneigenschaften*) zu erteilen.

In besonderen Fällen lässt sich nach Clebsch**) die höhere Transformation unmittelbar auf eine lineare zurückführen, so z. B. die kubische Transformation einer f_3.

Torelli***) hat den eigentlichen Grund dieser Erscheinung in dem genannten Falle in einer Identität — mit linearen Covarianten als Coefficienten — aufgedeckt, welche zwischen drei beliebigen kubischen Formen herrscht.

Die beiderlei transformirten Formen unterscheiden sich nur um einen constanten Factor, der sich als das Product zweier Invarianten herausstellt.

Clebsch†) hat die höheren Transformationen binärer Formen zu den linearen Transformationen eines Raumes von mehreren Dimensionen in Beziehung gesetzt und den ersteren damit zugleich eine durchsichtige geometrische Interpretation erteilt.

Liegt etwa eine quadratische Transformation einer Gleichung fünfter Ordnung $f(\lambda) = 0$ mit den Wurzeln λ_i vor:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3},$$

und repräsentirt man die (y), (x) als Coordinaten zweier Punkte einer Ebene, so werden die Wurzeln ξ_i der transformirten Gleichung $F(\xi) = 0$ gegeben durch die Schnittpunkte der Verbindungslinie jener beiden Punkte:

$$z_k = y_k - \xi x_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

mit den fünf Geraden

$$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0.$$

Letztere sind aber fünf Tangenten des Kegelschnitts

$$z_2^2 - 4 z_1 z_3 = 0 \text{††)}.$$

Hieraus geht sofort hervor, weshalb man für das Studium der genannten Gleichungen noch mit quadratischen Transformationen ausreicht.

---

*) Im besondern wird man, nach dem Vorgange von Hermite, vermöge der höheren Transformation die transformirte Form zu einer „typischen" machen wollen, deren Coefficienten Invarianten sind. Welche Bedingungen hierdurch der Transformation auferlegt werden, ist allgemein noch nicht untersucht worden. Siehe auch vorige S. unten.

**) l. c.

***) Atti. Acc. P. Nap. XVIII S. 215—225 (1888), Pal. Rend. II S. 165—171 (1888).

†) Gött. Nachr. 1871 S. 335—345, Math. Ann. IV S. 284—345 (1871).

††) Hieraus lässt sich auch unmittelbar die Wirkung derjenigen quadratischen Transformation ablesen, die aus der obigen durch Vertauschung von ξ mit λ hervorgeht.

Sei etwa $F(\xi) = 0$ eine gegebene Gleichung 5. Ordnung, so sind ihre fünf

Die verschiedenen Arten, auf welche man die Punkte (x), (y) noch auf der Geraden (z) wählen kann, entsprechen den verschiedenen linearen Transformationen, welche die transformirte Gleichung noch zulässt.

Denn die Ersetzung jener beiden Punkte durch irgend zwei andere ihrer Verbindungslinie ist genau äquivalent einer linearen Substitution von ξ.

Clebsch betont, dass gerade hierdurch die in der höheren Transformation liegenden eigentümlichen Elemente gesondert erscheinen von dem Einfluss, welchen eine nachträgliche lineare Transformation noch ausüben kann.

Auch der Gordan'sche Satz, dass die Invarianten der transformirten Gleichung nur von den Combinanten der φ, ψ abhängen, tritt hier unmittelbar in Evidenz.

Für Gleichungen sechster*) und siebenter Ordnung wird man analog mit kubischen Transformationen auskommen, zu deren Deutung alsdann eine kubische Raumcurve herangezogen wird.

Clebsch hat als eine Anwendung des geschilderten Princips eine vollständige anschauliche Uebersicht über die Zusammenhänge entwickelt, welche zwischen den Gleichungen fünfter Ordnung und ihren Resolventen bestehen, insbesondere mit der Jerrard'schen Form und der Modulargleichung.

Ueber höhere eindeutige Transformationen im Gebiete von n Variabeln ist neuerdings eine Arbeit von Maurer**) erschienen, die sich im be-

---

Wurzeln ξ_i repräsentirt durch fünf Punkte (y)—ξ_i(x) der Geraden (y)(x). Legt man von diesen die fünf möglichen Tangentenpaare an den Kegelschnitt: $z_1 + \lambda_r z_2 + \lambda_r^2 z_3 = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, 10)$, so hat man in den 10 Argumenten λ die Wurzeln der transformirten Gleichung.

Die invarianten Bildungen der transformirten Form sind simultaninvariant bezüglich der drei Formen $F(\xi)$, $x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3$, $y_1 + \xi y_2 + \xi^2 y_3$. Eine Reihe von expliciten Formeln dieser Art hat Spottiswoode mitgeteilt (Rom. Acc. L. (3) VII S. 218—223 (1883), Lond. Proc. XVI S. 148—171 (1885). Pittarelli hat mittels symbolischer Rechnung einen vollständigen Beweis dafür gegeben: Rom. Acc. L. Rend. (4) I S. 327—331, 374—381 (1885).

*) Eine Untersuchung der Gleichung 6. resp. 7. Ordnung in diesem Sinne erscheint sehr wünschenswert, so zwar, dass auch die Gruppenverhältnisse dabei deutlich hervortreten.

**) Journ. f. Math. CVII S. 89—116 (1890).

Es sei von vorn herein betont, dass die von Maurer verwendeten Transformationen mindestens einen willkürlichen Parameter enthalten müssen.

Im übrigen tritt die Arbeit als eine directe Verallgemeinerung der auf S. 133 besprochenen desselben Verfassers auf.

Bezüglich der algebraisch-geometrischen Theorie der eindeutigen Transformationen von zwei Variabeln, welche von Riemann, Cremona, Clifford, Noether, Rosanes, Brill u. anderen gefördert worden ist, siehe etwa Clebsch-Lindemann I, 4. Abt. IX, sowie insbesondere Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1887). Erst neuerdings ist es Noether gelungen, die Anzahl der absoluten Invarianten (Moduln) einer „Fläche" zu bestimmen: Berl. Ber. 1888 S. 1—5.

sonderen das Ziel stellt, die Differentialgleichungen der dann existirenden Invarianten zu den bekannten n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen in Parallele zu setzen.

Der Verfasser geht davon aus, dass man bisher solche Eigenschaften specieller Formen, welche in, zwischen den Coefficienten bestehenden (algebraischen) Relationen ihren Grund haben, vom Standpunkt der Invariantentheorie nur*) erst in einzelnen Fällen studirt habe.

Um dem abzuhelfen, teilt er die Formen einer bestimmten Ordnung p von n Variabeln x in Klassen ein: die Gesamtheit der Formen bildet die Klasse Ω_0: diejenigen Formen, deren Coefficienten einem bestimmten (irreducibeln) System algebraischer Gleichungen genügen, bilden die Klasse Ω_1. Genügen die Coefficienten einem weiteren solchen System algebraischer Gleichungen, so scheidet sich aus Ω_1 die Klasse Ω_2 ab u. s. f.

Die scheinbare Willkür dieser Klasseneinteilung verschwindet, wenn man, um zu Invarianten zu gelangen, Transformationen ausübt, welche eine „Gruppe" bilden.

Man denke sich nämlich vermöge der Gleichungen, welche die Klasse Ω_i charakterisiren, eine Anzahl von Coefficienten der Form als homogene, algebraische Functionen von t noch übrigen, als völlig willkürlich betrachteten Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_t$ bestimmt; die Form sei demgemäss mit $f(x, u)$ bezeichnet.

Man unterwerfe nun die beiden Variabelnreihen x, u einer Transformationsschar:

$$(S) \qquad x_i = \varphi_i(y|p), \quad u_k = \psi_k(v|p)$$

von folgender Art.

Die φ sind rationale**) homogene Functionen der x, in welche m Parameter p algebraisch eingehen; die ψ sind algebraische Functionen der v, p und bezüglich der v homogen.

Die Gleichungen (S) sollen ausserdem eine „Gruppe" von Transformationen bilden, welche die identische Transformation enthält; die Umkehrung der Transformation soll demnach wiederum zu Gleichungen derselben Art: $y = \varphi'(x|p')$, $v = \psi'(u|p')$ führen, wo die neuen Parameter p' algebraisch von den alten p abhängen.

Wenn es nun möglich ist, dass für alle Werte der Para-

*) Vgl. indessen die neuesten Entwickelungen von Deruyts (II. D, a), welcher durch directe Untersuchung der invarianten Bildungen (jedoch nur bei projectiven Transformationen) zu Resultaten gelangt, die inhaltlich mit denen von Maurer äquivalent sind.

**) Der weitere Verlauf der Untersuchung ergiebt, dass die φ homogen vom ersten Grade in den x sein müssen.

meter p f(x, u) transformirt werde in f(y, v), so heisst die Gruppe (S) der Klasse Ω_i „zugeordnet".

Es ergiebt sich umgekehrt, dass solche Systeme von Gruppen (S) existiren, und dass diese sämtlichen*) Systeme zu einer ganz bestimmten Klasseneinteilung Ω_i führen, und desgleichen zu einem und demselben Invariantensysteme der Klasse Ω_i.

Der Beweis beruht einmal auf dem früher erwähnten Christoffel'schen**) Satze, wonach — wenn man von gewissen Ausnahmefällen absieht — die Aequivalenz durch die Gleichheit der absoluten Invarianten charakterisirt wird; sodann aber auf den Elementen der Lie'schen Gruppentheorie, die nur, mit Rücksicht auf die Eigenart der hier gebrauchten Transformationen, in bestimmter Weise zu modificiren sind.

Der Verfasser gelangt so zu dem Ergebnis, dass die n Functionen φ', die t Functionen ψ' und endlich f selbst je m charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen zu genügen haben.

Dieselben sind von der Gestalt:

$$(D_1) \qquad \sum_1^m Q_i \frac{\partial \varphi'}{\partial p_i} - \sum_1^n X_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} = 0,$$

$$(D_2) \qquad \sum_1^m Q_i \frac{\partial \psi'}{\partial p_i} - \sum_1^t U_l \frac{\partial \psi'}{\partial u_l} = 0,$$

$$(E) \qquad \sum_1^n X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^t U_l \frac{\partial f}{\partial u_l} = 0,$$

wo die Q ausschliesslich von den p, die U von den u, die X von den x abhängen.

„Die Invarianten J der Formenklasse sind bestimmt durch die m Differentialgleichungen:

$$(J) \qquad \sum_1^t U_l \frac{\partial J}{\partial u_l} = 0.$$

Ist m' die Anzahl der wesentlichen unter diesen Differentialgleichungen, so hat die Formenklasse t—m' von einander unabhängige Invarianten."

Jede von f(x, u) verschiedene Lösung der Gleichungen (E) ist als Covariante von f zu betrachten.

---

*) Hierbei ist stillschweigend die Erweiterung getroffen, dass die Functionen φ auch noch von den u in irgend einer algebraischen Weise abhängen dürfen: solcher Systeme (S), welche die u nicht enthalten, giebt es thatsächlich nur ein einziges. Ganz anders gestaltet sich natürlich das Ergebnis, wenn, wie bei Lie, hinsichtlich des functionalen Charakters der Functionen φ, ψ gar keine Einschränkungen gemacht werden.

**) Math. Ann. XIX S. 280—290 (1882).

Die Gruppeneigenschaft der Transformationen (S) zieht nach sich, dass jene vier Systeme (D_1), (D_2), (E), (J) „vollständige“ sind.

Dass die Einteilung der Formen f in Klassen in bestimmter Weise vor sich geht, sieht man so ein.

Die Form f(x, u) der Klasse Ω_i gehe in eine Form der Klasse Ω_{i+1} über, indem die u dem irreducibeln Gleichungssysteme:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad . \; . \; ., \quad \Pi_\nu = 0$$

unterworfen werden.

Nun soll die Klasse Ω_{i+1} dahin festgelegt sein, dass durch die, der Klasse Ω_i zugeordneten Transformationen jede Form der Klasse Ω_{i+1} in eine Form derselben Klasse transformirt wird.

Daraus lässt sich aber ableiten, dass auch die Functionen Π den Differentialgleichungen (D_2) für die ψ' genügen.

Aus den Differentialgleichungen (E), welchen die allgemeine Form der Klasse Ω_i genügt, ergiebt sich damit ein völlig analoges System von Gleichungen, welchen die allgemeine Form der Klasse Ω_{i+1} genügt, und das Entsprechende gilt von den Differentialgleichungen für die Invarianten.

Die n^2 Aronhold'schen Differentialgleichungen für die „allgemeinen“ Formen der Klasse Ω_0 bleiben daher in ihrem wesentlichen Charakter für die folgenden Klassen bestehen.

Nur in besonderen Fällen*) treten für die letzteren Klassen noch weitere Differentialgleichungen hinzu.

II. C, c, β.

Invarianten der erweiterten projectiven Gruppe**).

(Reciprocanten und Differentialinvarianten).

Die Theorie der „Reciprocanten“ ist im Jahre 1885 von Sylvester***) begründet, und seitdem von ihm selbst und von seinen Freunden und

*) Damit dies eintritt, muss jedenfalls die Discriminante von f verschwinden, ein Fall, den schon Aronhold als exceptionellen erkannt hat.

**) Siehe die Erklärungen auf S. 102, 103. Der Referent ist sich wohl bewusst, das vorliegende Thema nur in sehr unvollständiger Weise bearbeitet zu haben: indessen war eine Beschränkung auf diejenigen Partien geboten, welche direct den Methoden der gewöhnlichen Invariantentheorie unterworfen worden sind. Aus diesem Grunde ist auch im Texte fast gar nicht auf die von Lie, Halphen, Appell, Brioschi, Vessiot u. anderen ausgebildete Theorie der „Invarianten von Differentialgleichungen“ eingegangen, welche sich zu den Differentialinvarianten verhalten, wie die gewöhnlichen invarianten Bildungen der Algebra zu den „identischen“ (welche nur die Variabeln enthalten).

***) Mess. XV S. 74—76, 88—92. C. R. CI S. 1042—1046, 1110—1111, 1225—1229, 1460—1464.

Schülern Hammond, MacMahon, Leudesdorf, Elliott, Forsyth, Rogers, Berry sowie von Perrin weitergeführt worden.

Ein wichtiger Teil*) dieser Lehre, die „Differentialinvarianten", sind indes schon 1878 und 1880 von Halphen**) mit Erfolg in Angriff genommen, während auf der andern Seite noch weiter zurückreichende Untersuchungen von Lie***) denselben Gegenstand in einer solchen Allgemeinheit behandeln, dass allerdings eine Reihe von Theoremen und Methoden der zuvor genannten Autoren nur einen speciellen Ausfluss aus seiner umfassenden Theorie darstellen; dahingegen ist zu betonen, dass hierdurch das Verdienst, derartige allgemeine Erscheinungen für den wichtigsten Fall der ganzen rationalen Functionen in invariantentheoretischem Sinne systematisch auszugestalten und so der projectiven Geometrie der Curven und Flächen erst zugänglich zu machen, in keiner Weise beeinträchtigt wird.

Freilich ist da hinzuzufügen, dass der wirkliche Fortschritt der Wissenschaft ein ungleich grösserer geworden wäre, wenn Halphen und die englischen Forscher mehr Notiz von den tiefen Gedanken Lie's genommen hätten, während es Lie wiederum verschmäht hat, im einzelnen auf jene speciellen Theorien einzugehen†).

Sylvester ist ausgegangen von einer einfachen Eigenschaft des sogenannten „Schwarz'schen††) Ausdrucks:

$$(y, x) = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \frac{2y_1 y_3 - 3y_2^2}{2y_1^2},$$

Eine zusammenhängende Darstellung der Theorie hat Sylvester in seinen, von Hammond herausgegebenen Vorlesungen geliefert: Am. J. VIII S. 196—260, IX S. 1—37 (1886); Am. J. IX S. 113—161, 297—352, X S. 1—16 (1887).

*) Die „Differentialinvarianten" gehören der allgemeinen projectiven Gruppe an, die „Reciprocanten" können sich auch auf irgend welche Untergruppen derselben beziehen. Nach der ursprünglichen Terminologie Sylvester's soll freilich das Wort Reciprocante nur die Vertauschung der Variabeln andeuten. Bei anderen Autoren ist umgekehrt der Begriff der Differentialinvariante der umfassendere.

**) 1878, Thèse pour le doctorat.

1880, Ec. Pol. Mém. prés. (2) XXVIII 301 S. (1880—1884). Vgl. noch die voraufgehenden Mitteilungen: C. R. LXXXI S. 1053 (1875), Journ. de Math. (3) II (1876).

Wegen des Näheren siehe weiter unten.

***) Siehe etwa Math. Ann. XXIV S. 337—378 (1884), Lie-Engel I Kap. 25.

†) Eine eingehende Darlegung der beiderseitigen Zusammenhänge würde eine sehr dankenswerte Aufgabe sein. Lie selbst geht auf das Verhältnis seiner Untersuchungen zu denen anderer, namentlich Halphen's, verschiedentlich ein. Vgl. etwa: Math. Ann. XXXII S. 212—281, insbes. S. 214—215 (Abdruck aus dem norwegischen Archiv von 1883), Math. Ann. XXIV S. 537—578, bes. S. 549 (1884), Math. Ann. XXV S. 71—151, bes. S. 74 (1885), Leipz. Ber. 1887 S. 83—88, Am. J. XI S. 182—186 (1888), Lie-Engel I bes. S. 552—553, Leipz. Ber 1891 S. 253—270, bes. S. 267.

††) Siehe oben S. 122. Der Ausdruck tritt bereits bei Lagrange auf.

wo y_1, y_2, y_3 die erste, zweite, dritte Ableitung der abhängigen Variabeln y nach einer unabhängigen x bedeuten.

Vertauscht man hier y mit x, so geht (y, x), bis auf eine ganze Potenz von y_1 und das Vorzeichen, über in den „reciproken" Ausdruck (x, y), und ein Gleiches gilt auch noch von dem Zähler $2y_1 y_3 - y_2^2$.

Derartige rationale Functionen der $y_1, y_2, y_3, \ldots$, die sich nach Vertauschung von y mit x in ihrer Form nur um einen, in denselben Elementen rationalen Factor ändern, sind binäre „Reciprocanten" der einfachsten Art.

Beschränkt man sich hierbei auf ganz-rationale Functionen oder „Formen" F der $y_1, y_2, y_3, \ldots$, so ist leicht zu zeigen, dass der hinzutretende Factor nur die Gestalt $\pm y_1^\mu$ besitzen darf, wo μ eine ganze Zahl ist. Je nach dem Vorzeichen dieses Factors scheiden sich die Reciprocanten in zwei Klassen von geradem resp. ungeradem „Charakter"; μ heisst die „Charakteristik". Für $\mu = 0$ resultirt eine „absolute" Reciprocante.

Nimmt man überdies die Form F homogen in ihren Elementen an, so zieht das von selbst nach sich, dass sie auch isobar wird; dabei empfiehlt es sich, den $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ succ. die Gewichte $-1, 0, +1, +2, \ldots$ beizulegen. Bedeutet dann i den Grad, w das Gewicht von F, so muss μ den Wert $3i+w$ annehmen.

Da die Formen F die Variabeln x, y explicite nicht enthalten, so ist unschwer zu erkennen, dass sie auch bei den Substitutionen der „Translationsgruppe" $x' = x+a$, $y' = y+b$ nur einen Factor annehmen, der linear von y_1 abhängt.

Combinirt man die beiden Sätze, dass eine absolute Reciprocante durch Differentiation nach x wieder in eine Reciprocante (von gleichem Charakter) übergeht, sowie dass eine beliebige Reciprocante durch Division mit $t^{\frac{\mu}{2}}$ zu einer absoluten wird, so gewinnt man einen linearen Differentialoperator ξ, der gestattet, aus einer vorliegenden Form F eine unendliche Reihe weiterer solcher Formen herzuleiten.

Es geht nunmehr der Uebergang zu einer umfassenderen Gruppe von linearen Substitutionen vor sich, nämlich zu der der „orthogonalen". Es gilt der elegante Satz: „Ist F sowohl, wie $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ eine Reciprocante, so ist F eine orthogonale Reciprocante, und umgekehrt." Die einfachste derartige Form ist die linke Seite der Differentialgleichung eines Kreises.

Noch wichtiger ist der nächste Schritt zur „affinen“ Gruppe:

$$x' = ax + by + c, \quad y' = dx + cy + f.$$

Durch Zusammensetzung dieser Gruppe aus einzelnen Fundamentalsubstitutionen wird bewiesen, dass eine Reciprocante, abgesehen von der Homogenität und dem Isobarismus, nur noch von y_1 unabhängig zu sein braucht, um der Gruppe gegenüber invariant zu sein.

Derartige „affine“ Reciprocanten heissen „reine“, im Gegensatze zu den „gemischten“, welche y_1 noch enthalten.

Diese reinen Reciprocanten R im besonderen weisen eine auffallende Aehnlichkeit mit den Seminvarianten (vgl. II. D, a) auf, wenngleich eine eingehende Untersuchung auch wieder einzelne, auffällige Unterschiede zu Tage fördert.

Beide Grössenarten genügen je einer charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichung von conformem Aufbau*).

Für beide existirt ein analoger „Generator“, der also hier Seminvarianten in Seminvarianten, dort reine Reciprocanten in reine Reciprocanten überführt.

Der Cayley'schen Abzählungsformel $(w : i, j) - (w - 1 : i, j)$**) für die Anzahl der linear unabhängigen Quellen vom Grade i und Gewichte w einer Grundform von der Ordnung j entspricht für reine Reciprocanten: $(w : i, j) - (w - 1 : i + 1, j)$, wenn R von den Ableitungen $y_2, y_3, \ldots, y_{j+2}$ abhängt. Nur ist für die letztere Formel bisher noch kein ausreichender Beweis gefunden worden.

Für beiderlei Invariantenbildungen lassen sich auch ähnliche associirte Systeme oder „Protomorphe“ ermitteln, d. h. solche einfachste unter ihnen, dass jede weitere (bei unbeschränkter Buchstabenanzahl), bis auf eine Potenz des ersten Buchstabens im Nenner, eine ganz-rationale Function derselben wird.

Während es jedoch Protomorphe der Seminvarianten giebt, welche abwechselnd vom zweiten und dritten Grade sind, steigt der Grad bei denen der reinen Reciprocanten bis zu beliebiger Höhe.

Andere, noch tiefer greifende Verschiedenheiten sind folgende. Zerfällt eine ganz-rationale Invariante in rationale Factoren, so kommt auch jedem der letzteren die Invarianteneigenschaft zu: für die Reciprocanten überhaupt trifft das nicht zu.

---

*) Siehe weiter unten.

**) Siehe S. 170. Sylvester giebt hier einen neuen Beweis der Formel, welche davon ausgeht, dass zwei isobare Formen, die zu den „complementären Typen“ w, i, j und ij—w, i, j gehören, eine gleiche Anzahl von Gliedern besitzen.

Reiner Reciprocanten giebt es für einen bestimmten Grad und unbeschränkte Buchstabenanzahl nur eine endliche Anzahl, während die entsprechende Reihe der Invarianten nicht abbricht.

Dem entsprechend bieten denn auch die beiderlei „erzeugenden Functionen" trotz ihres ähnlichen Aufbaus tief greifende, aber zugleich auch tief liegende Differenzen dar.

Zu den interessantesten Ergebnissen gelangt man, wenn man sich schliesslich zur allgemeinsten Klasse der „projectiven" Reciprocanten erhebt, die zur allgemeinen Collineationsgruppe

$$x' = \frac{ax+by+c}{gx+hy+k}, \qquad y' = \frac{dx+ey+f}{gx+hy+k}$$

gehören. Das sind die „Differentialinvarianten" bezüglich einer Variabeln x, zu deren Lehre bereits Halphen*) den Grund gelegt hatte.

Nach Sylvester lässt sich eine derartige Differentialinvariante einfach dahin charakterisiren, dass sie eine Form der $y_2, y_3, y_4, \dots$ ist, welche die Reciprocanteneigenschaft mit der der gewöhnlichen Seminvarianz in sich vereinigt.

Die Fruchtbarkeit dieses Zusammenhanges offenbart sich deutlich, wenn eine wirkliche Uebersicht über das System der Differentialinvarianten gewonnen werden soll.

Es existirt nämlich eine, nach einem sehr einfachen expliciten Gesetz darstellbare Kette von reinen Reciprocanten A, B, C, D, ..., die unmittelbar zur Erzeugung aller Differentialinvarianten führt; man hat nur die A, B, C, D, ... als Coefficienten einer binären Form (von succ. ansteigender Ordnung) aufzufassen und bezüglich dieser die Protomorphe für die Seminvarianten zu bilden: irgend eine ganze rationale Function jener Protomorphe, durch eine passende Potenz von y_2 dividirt, liefert eine Differentialinvariante, und umgekehrt.

Statt der Kette der A, B, C, D, ... lässt sich auch direct eine ähnliche Kette von Seminvarianten bez. der $y_2, y_3, y_4, \dots$ zu Grunde legen.

Fügt man hierzu noch die besondere Eigenschaft einer rationalen Differentialinvariante vom Grade und Gewichte Null, vermöge Differentiation nach x einen Ausdruck derselben Art hervorzubringen, so wird man verstehen, dass auf diesem systematischen Wege die vollständige

*) l. c. Halphen hat auch in der zweitcitirten Arbeit solche „ternären Differentialinvarianten" in Betracht gezogen, in deren Ausdruck die Ableitungen von zwei abhängigen Variabeln nach einer unabhängigen dritten eingehen. Die englischen Forscher, Elliott, Forsyth u. andere haben sich dagegen auf solche ternären Reciprocanten und Differentialinvarianten concentrirt, wo eine Variable die abhängige, die beiden anderen die unabhängigen sind.

Integration von gleich Null gesetzten Differentialinvarianten in ungezwungener Weise bewerkstelligt wird, während bei Halphen die Lösung solcher, für die Geometrie wichtigen Aufgaben nur durch Aufwand von indirecten Integrationsmethoden*) gelingt.

Es ist noch unsere Aufgabe, einiger hervorragender Ergänzungen und Weiterführungen der Theorie zu gedenken, welche von den schon erwähnten Mitarbeitern Sylvester's herrühren**).

Es gebührt Mac Mahon das Verdienst, die verwirrende Mannigfaltigkeit der, die Lehren von den binären Invarianten und Reciprocanten durchziehenden linear-partiellen Differentiationsprocesse geordnet zu haben. Ein einziger Process dieser Art, in den vier arbiträre ganze Zahlen eintreten, umfasst je nach Specialisirung der letzteren die bekannten Operatoren***). Noch wichtiger scheint hierbei der Nachweis, dass diese vierfache Mannigfaltigkeit von Processen insofern ein vollständiges System

---

*) Dies zeigt sich z. B. deutlich bei der Behandlung der Aufgabe, diejenige Differentialinvariante zu finden, deren Verschwinden „die Differentialgleichung einer ebenen Curve dritter (nter) Ordnung" liefert, der also y als Function von x genügt, wenn y und x durch eine Gleichung dritter (nter) Ordnung mit einander verknüpft sind.

**) Es ist nicht zu verkennen, dass der äusserlich bedeutende Umfang dieser Weiterführungen teilweise durch eine Reihe vereinzelt herausgegriffener Fragen (Bestimmung einzelner Klassen von Differentialinvarianten von einzelnen Untergruppen der linearen Gruppe) bedingt ist. Es macht sich gerade hier der Mangel an Kenntnis der leitenden Principien Lie's empfindlich fühlbar.

***) Lond. Proc. XVIII S. 61—88 (1887).

Der gemeinte Process ist dargestellt durch die Formel:

$$(\mu, \nu;\ m, n) = \sum_{s=0}^{\infty} (\mu + sn) A_{sm} \frac{\partial}{\partial a_{n+s}},$$

$$A_{sm} = \sum_{k} \frac{(m-1)!}{k_0!\,k_1!\,k_2!\ldots}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\ldots,$$

wo $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots = m$, $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = s$, und die vier Parameter μ, ν, m, n ganze Zahlen $\geqq 0$ sind. Beispielsweise ist

$$(1, 1;\ 1, 1) = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

die Differentialgleichung der Seminvarianten;

$$(4, 1;\ 2, 1) = 4 \frac{a_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial a_1} + 5a_0 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 6\left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

diejenige der Reciprocanten. Letztere Gleichung rührt nach Angabe Sylvester's von Hammond her.

Mac Mahon hat den gemeinten Processen weiterhin eine Symbolik untergelegt, welche dieselben in unmittelbare Verbindung mit den symmetrischen Functionen bringt (Lond. Proc. XIX S. 112—128, 1888).

Ternäre Analoga des Processes (μ, ν; m, n) sind von Mac Mahon selbst, sodann aber besonders eingehend von Elliott studirt worden: Lond. Phil. Trans. CLXXXI S. 19—51 (1890).

bildet, als die Ausübung der Poisson'schen Klammeroperation auf irgend zwei derselben stets von neuem zu einem Processe des Systems führt.

Perrin*) hat seine Residuentheorie**) fast unmittelbar von den Seminvarianten auf die Reciprocanten übertragen. Liegt demnach eine Reihe von Reciprocantenformen vor, die alle y_n als höchsten Differentialquotienten wirklich enthalten, und fasst man diesen als eine binäre Variable auf, so ist jede Seminvariante der Reihe gleichfalls eine Reciprocante.

Die Ausdehnung der Sylvester'schen Theorie auf n Variable (unter denen eine als abhängig angesehen wird) hat Elliott***) für den Fall der Invarianz bei cyklischer Vertauschung der Variabeln durchgeführt; insbesondere stammt von ihm die Aufstellung des vollen Systems der charakteristischen Differentialgleichungen bei drei Variabeln.

Weiterhin hat Elliott†) auch die Reciprocanten der allgemeinen linearen Gruppe von drei Variabeln in Betracht gezogen, während Forsyth††) die Eigentümlichkeiten des Falles untersucht hat, wo allein die zwei abhängigen Variabeln einer allgemeinen linearen Transformation unterworfen werden.

Hammond†††) hat gewisse integrable Reciprocanten eingehend studirt und ihre Verwendbarkeit in der Geometrie verfolgt.

---

*) C. R. CII S. 351—353 (1886).

**) Siehe oben S. 166.

***) Lond. Proc. XVII S. 172—196 (1886), XVIII S. 142—164 (1887), XIX S. 6—23, 377—405 (1888), Mess. (2) XIX S. 7—14, Lond. Proc. XX S. 131—160 (1889).

Die zweitgenannte Arbeit enthält die Ableitung der sechs charakteristischen Differentialgleichungen für die „reinen ternären Reciprocanten". Denkt man sich z als Function von x, y und bezeichnet $\frac{1}{r!s!}\frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$ mit z_{rs}, so sagen zwei der Gleichungen nur aus, dass die Reciprocante homogen und isobar sei in Bezug auf jeden der beiden Indices r und s. Zwei weitere Gleichungen drücken aus, dass die Reciprocante eine Simultaninvariante ist hinsichtlich der binären Formen

$$z_{20}\lambda^2+2z_{11}\lambda\mu+z_{02}\mu^2, \quad z_{30}\lambda^3+3z_{21}\lambda^2\mu+3z_{12}\lambda\mu^2+z_{03}\mu^3, \quad \ldots$$

Vgl. die analoge Erscheinung für die höheren Seminvarianten bei Forsyth, diesen Bericht S. 158.

Die beiden letzten Gleichungen endlich bilden die Verallgemeinerung der Hammond'schen Differentialgleichung für die binären Reciprocanten.

Das System der sämtlichen sechs Gleichungen ist wiederum ein „vollständiges", wie die dritte Arbeit nachweist.

†) Lond. Proc. XX S. 131—160 (1889).

††) Lond. Phil. Trans. CLXXX S. 71—118 (1889).

†††) Lond. Proc. XVII S. 128—138 (1886).

Insbesondere studirt der Verfasser diejenigen Differentialgleichungen $(y', y'', y''', \ldots) = 0$, welche ein Integral von der Form $y'' = F(y')$ besitzen. Ein einfaches geometrisches Beispiel gewähren die rationalen ebenen Curven, welche stets durch das Verschwinden einer Reciprocante dargestellt werden können.

Für die sogenannten „perpetuirenden (reinen) Reciprocanten", d. h. solche, die sich nicht als lineare, ganze Functionen anderer Reciprocanten von geringerem Grad und Gewicht, aber unbeschränkter Buchstabenanzahl darstellen lassen, hat Mac Mahon*) für die ersten sechs Grade eine numerische Aufzählung mittels einer einfachen erzeugenden Function geleistet.

Leudesdorf**) hat, abgesehen von neuen Beweisen für Sylvester'sche Sätze, ein vollständiges Kriterium dafür angegeben, dass eine vorgelegte Function von $y_1, y_2, \ldots$ eine (gemischte) Reciprocante sei, und zugleich eine Tafel bezüglicher Protomorphe aufgestellt.

Eine bemerkenswerte Ausdehnung des Reciprocantenbegriffs verdankt man Rogers***). Bekanntlich lässt sich eine quadratische, ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei Variabelnpaaren (x, y) und (x', y') zurückführen auf zwei incongruente, linear gebrochene Substitutionen der getrennten Variabeln x und y.

Rogers zeigt, wie man die Differentialinvarianten einer solchen quadratischen Transformation bildet.

Im besonderen ergeben sich ihm die Differentialinvarianten für die Transformation durch reciproke Radien.

Berry†) hat simultane Reciprocanten (die sich auf mehrere Reihen von Variabeln beziehen) erforscht. Es dient hierbei zur Erleichterung (wie schon bei Elliott gelegentlich der einfachen ternären Bildungen), bereits solche Reciprocanten zu Grunde zu legen, welche die Variabeln selbst explicite noch enthalten.

An die Arbeiten von Rogers über „homographische Reciprocanten" knüpft Forsyth††) an, um das vollständige System derselben aufzustellen. Es wird dieses Ziel erreicht, indem erst jede der beiden Variabeln ein-

---

*) Lond. Proc. XVII S. 139—151 (1886).

Bezeichnet w das Gewicht, ϑ den Grad, so hat man auf alle möglichen Weisen die Zahl w einmal in ϑ, das anderemal in $\vartheta+1$ Teilzahlen zu zerlegen; die Differenz beider Anzahlen ergiebt die Anzahl der linear unabhängigen Perpetuanten vom „Grad-Gewicht" (ϑ, w). Beispielsweise ist diese Anzahl für $\vartheta = 3$ der Coefficient von x^w in der Entwickelung der erzeugenden Function

$$\frac{1-x-x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = 1+x^2+x^3+x^4+x^6+\ldots$$

Eine allgemeine Formel ist bisher noch nicht aufgestellt worden.

**) Lond. Proc. S. 197—219, 329—343 (1886), ebda. XVIII S. 235—262 (1887).

In der zweiten Arbeit untersucht der Verfasser insbesondere die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine vorgelegte Function von $y_1, y_2, \ldots$ eine gemischte Reciprocante ist.

***) Lond. Proc. XVII S. 220—231, 344—354 (1886), XVIII S. 130—141 (1887), XX S. 161—179 (1889), Mess. (2) XVIII S. 153—158 (1889).

†) Quart. J. XXII S. 260—288 (1888), XXIII S. 289—316 (1889).

††) Mess. (2) XVII S. 154—192 (1888).

zeln linear gebrochen substituirt wird, und dann die beiderseitigen Ergebnisse combinirt werden.

Von besonderem Interesse für die Theorie der linearen Differentialgleichungen ist eine besondere Klasse jener Reciprocanten, die sogenannten „Quotientenableitungen"*). Versteht man nämlich unter y den Quotienten von zwei Particularlösungen u_1, u_2 einer linearen Differentialgleichung der nten Ordnung und differentiirt man die Gleichung $yu_1 = u_2$ $(2n-1)$-mal, so resultirt durch Elimination der Ableitungen von u_2 ein System von n linearen homogenen Relationen in den Unbekannten u_1, $u'_1, \ldots, u_1^{(n-1)}$. Die Resultante des letzteren Systems heisst eine Quotientenableitung, und verhält sich einer Substitution von der Art:

$$X = \frac{ex+f}{gx+h}, \qquad Y = \frac{ay+b}{cy+d}$$

gegenüber invariant, indem sie sich nur um den Factor $\left(\frac{dY}{dy}\right)^n \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-n^2}$ ändert. (Vgl. auch bei Gordan oben S. 157.)

So entspringt z. B. aus der Stammgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ die Schwarz'sche Reciprocante $3y_2^2 - 2y_1 y_3$.

Die weiteste Ausdehnung hat Forsyth diesem Gegenstande „der Invariantentheorie der linearen Differentialgleichungen" in einer anderen Arbeit**) gegeben. Ist ein derartiges Gleichungssystem vorgelegt, so wird dasselbe den Substitutionen unterworfen, welches deren Ordnung und linearen Charakter ungeändert lässt, d. i. einer linearen Transformation der abhängigen und einer arbiträren der unabhängigen Variabeln x. Man kann dann nach denjenigen ganzen (und überhaupt algebraischen) Functionen von y und deren Ableitungen, sowie der Coefficienten fragen, welche, für das transformirte Gleichungssystem gebildet, nur einen Factor $\left(\text{eine Potenz von } \frac{dX}{dx}\right)$ annimmt.

Das System (set) dieser Functionen wird in erweitertem Sinne als ein volles nachgewiesen, insofern als aus einer beschränkten Anzahl derselben alle übrigen durch rein algebraische Processe hervorgehen.

Auf besondere Fälle derart waren früher schon Cocle, Laguerre, Brioschi, Malet und Halphen gestossen***).

---

*) Lond. Phil. Trans. 1888 S. 377—489.

**) Lond. Phil. Trans. 1889 S. 71—118.

***) Siehe die Citate bei Forsyth.

II. C, c, γ.
Auftreten von projectiven Differentialinvarianten in der Krümmungstheorie.

Die projectivische Theorie der Krümmungseigenschaften einer Fläche ist noch wenig untersucht worden. Abgesehen von zerstreuten Bemerkungen, die sich in dem grossen Werke von Darboux*) finden; einigen, nach Grassmann'schen Methoden abgeleiteten Sätzen von Mehmke**), sowie einzelnen diesbezüglichen Anwendungen, die Sylvester und seine Schüler von ihrer Lehre der „Reciprocanten" gemacht haben***), kommt hauptsächlich nur eine ausführliche Arbeit von Voss†) aus neuester Zeit in Betracht.

Eine projectivische Auffassung von metrischen Eigenschaften einer Fläche wird angebahnt, sobald man den Charakter der letzteren, dass vier beliebige ihrer Punkte nicht in einer Ebene liegen, mit der Thatsache combinirt, dass der Inhalt eines Tetraeders bei beliebiger Collineation nur um einen leicht ersichtlichen Factor geändert wird.

Wählt man auf der Fläche ein krummliniges Coordinatensystem u, v, so schneiden sich je zwei benachbarte Linien u_0, u_0+h; v_0, v_0+k in den vier Eckpunkten P, P_1, P_2, P_3 eines Tetraeders T.

Sei P der Punkt (u_0, v_0), P_3 der Punkt (u_0+h, v_0+k). Der letztere Punkt bewege sich nach dem ersteren (auf der Fläche) hin längs einer analytischen Curve mit dem Parameter t:

$$u = u_0 + h't + \cdots, \quad v = v_0 + k't + \cdots$$

Dividirt man den Inhalt T durch das Quadrat des Inhalts Ω des durch P, P_1, P_2 bestimmten Parallelogramms, so erhält man in erster Annäherung einen bereits sehr einfachen Ausdruck; nämlich:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2} = \frac{1}{6} \frac{F}{\sqrt{H}}.$$

Hier bedeutet H die Discriminante $eg - f^2$ des Quadrats des Linien-

---

*) „Leçons sur la théorie générale des surfaces", Paris 1890 I. livre 2.

**) Schlöm. Z. XXXVI S. 56—60 (1891). Ebenda S. 206—213 (1891) hat derselbe Verfasser untersucht, inwieweit seine Sätze auf beliebige Punkttransformationen ausgedehnt werden können.

Vgl. auch Böklen, Mitteilungen, 1892, Schlöm. Z. XXXVII S. 186—189 (1892).

***) Siehe insbesondere Elliott, Lond. Proc. XVII S. 172—196 (1886).

†) Math. Ann. XXXIX S. 179—256 (1891).

Voss betrachtet auch allgemeinere Differentialinvarianten, welche bei einer beliebigen Transformation bis auf einen beliebigen Factor in gleichgebildete Ausdrücke übergehen.

Wir haben uns im Texte auf projective Transformationen beschränkt.

elementes der Fläche:

$$ds^2 = edu^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

während F die zweite der sogenannten „Fundamentalgrössen 2. Ordnung" E, F, G ist.

Der angegebene Grenzwert hat im allgemeinen noch keinen Zusammenhang mit den Krümmungsverhältnissen der Fläche.

Dies ändert sich indessen, sobald man zu ausgezeichneten Coordinatensystemen u, v übergeht.

Wird z. B. die eine Schar der Curven u, v von den Haupttangentencurven gebildet, und versteht man unter K das Krümmungsmass der Fläche im Punkte P, so verwandelt sich der Quotient $\frac{F}{\sqrt{H}}$ direct in $\sqrt{-K}$.

Interessantere Ergebnisse stellen sich für ein „conjugirtes" System u, v heraus, für das also F identisch verschwindet, was von jetzt ab vorausgesetzt werden möge.

Um nunmehr zu einem Grenzwerte zu gelangen, hat man $\frac{T}{\Omega^2}$ noch mit dem Quadrate des Linienelements $S = \overline{PP_3}$ zu dividiren, dann kommt:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2 S^2} = \frac{1}{72\sqrt{H}} \frac{E\alpha h'^2 + G\beta k'^2}{eh'^2 + 2fh'k' + gk'^2},$$

wo die α, β*) nur von den e, f, g abhängen, also jedenfalls einer Biegung der Fläche gegenüber sich invariant verhalten.

Eben diese Ausdrücke α, β bleiben nun auch bei irgend einer Collineation der (auf ein System conjugirter Coordinatencurven bezogenen) Fläche völlig unverändert, sind also in diesem Sinne absolute projectivische Invarianten derselben. Stimmen dieselben überein, und nur dann, so coincidirt jener Grenzwert, die „Parameterkrümmung" mit der „Normalkrümmung" (nach der Richtung PP_3 genommen).

Dieser Umstand veranlasste Voss zu einer systematischen Untersuchung der wichtigsten Krümmungsgrössen auf ihre projectivische Invarianz hin.

Seien x, y, z die ursprünglichen Cartesischen Coordinaten eines Flächenpunktes P; x', y', z' die linear transformirten; $t = t(x, y, z)$ bezeichne den gemeinsamen Nenner der letzteren, und D die Substitutionsdeterminante.

*) α, β sind zugleich die beiden Invarianten der sog. „Laplace'schen" Differentialgleichung vgl. Darboux l. c. II § 23 ff.

Dann reproduciren sich die drei Fundamentalgrössen 2. Ordnung je um den nämlichen Factor*), nämlich:

$$E' = \frac{\lambda}{t} E, \quad F' = \frac{\lambda}{t} F, \quad G' = \frac{\lambda}{t} G,$$

wo λ einen einfachen algebraischen Ausdruck bedeutet, der nur von den Substitutionscoefficienten und von den Richtungscosinus der in P errichteten Normale (also nur von den ersten „Differentialquotienten der Fläche") abhängt.

In ähnlicher Weise ergiebt sich für das Verhalten von H:

$$H' = H \frac{D^2}{\lambda^2 t^6},$$

und damit für dasjenige des Krümmungsmasses K:

$$K' = K \frac{(\lambda t)^4}{D^2},$$

Gleichungen, aus denen zahlreiche geometrische Anwendungen fliessen. So hat man damit unmittelbar den von Mehmke**) aufgestellten Satz: „Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte, so ist der Quotient ihrer Krümmungsmasse in jenem Punkte eine absolute projectivische Invariante."

Aus der Relation für K hat Voss im besonderen das Ergebnis abgeleitet: „Für jede Collineation (mit Ausschluss der affinen) existiren Flächen, sodass bei der Ausübung der Collineation die gegebene Fläche derart in eine andere übergeht, dass das Krümmungsmass in entsprechenden Punkten nur um einen constanten Factor geändert wird." Die Gleichungen dieser Flächen werden explicite angegeben.

II. C, c, δ.
Höhere Transformationen von Differentialformen in der Flächentheorie. Differentialparameter.

Die Flächentheorie wird beherrscht von der Transformation***) gewisser binärer Differentialformen. Im Vordergrunde stehen zwei quadra-

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 240.

**) Da der Inhalt dieses Abschnittes nur lose mit dem Hauptgegenstande zusammenhängt, so mag es genügen, an Stelle ausführlicher Citate auf die Namen Riemann, Beltrami, Christoffel, Weingarten, Halphen, Ricci, Knoblauch, Frobenius hingewiesen zu haben.

***) Zwei andere Anwendungen solcher Transformationen von Differentialformen sind schon auf S. 114 mitgeteilt worden.

Eine weitere Ausführung des Textes findet sich bei Knoblauch, „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen", Leipzig, 1888, Abschnitt III. Derselbe Verfasser hat im gleichen Sinne auch kubische Diffetische derartige Formen, das Quadrat des Linienelementes der Fläche:

$$A = ds^2 = edu^2 + 2f du dv + g dv^2$$

und die mit dem Krümmungsradius ρ dividirte Grösse A:

$$B = \frac{ds^2}{\rho} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Dabei ist die Fläche auf ein System krummliniger Coordinaten (u, v) bezogen gedacht. Die 6 Grössen e, f, g; E, F, G, die „Fundamentalgrössen 1. resp. 2. Ordnung", sind durch die drei „Fundamentalgleichungen" mit einander verknüpft.

Die Transformation besteht im Uebergange von dem ursprünglichen System u, v zu einem neuen u', v', indem die letzteren Grössen gleich eindeutigen und eindeutig umkehrbaren, im übrigen aber arbiträren*) Functionen der ersteren gesetzt werden.

Setzt man:

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial v'}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \delta,$$

$$du = \xi, \quad dv = \eta; \quad du' = \xi', \quad dv' = \eta',$$

so transformiren sich die ξ, η linear in die ξ', η' in der Weise, dass

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \quad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta,$$

während die Umkehrung dieser Formeln unmittelbar liefert:

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\delta, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\beta, \quad \frac{\partial u}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}.$$

Geht vermöge der angegebenen Transformation irgend eine quadratische binäre Differentialform $A = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2$ über in die entsprechende $A' = a'_{11} du'^2 + 2a'_{12} du' dv' + a'_{22} dv'^2$, so findet das Analoge statt für die bilineare Form:

$$A_1 = a_{11} du\,\delta u + a_{12}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + a_{22} dv\,\delta v.$$

Dabei brauchen weder die du, dv, noch die δu, δv notwendig Differentiale zu sein: es genügt, wenn es überhaupt Grössen sind, die den ξ, η cogredient sind.

Von dieser Bemerkung lässt sich, ganz wie in der algebraischen**)

rentialformen im Zusammenhange mit der Flächentheorie studirt: Journ. f. Math. CIII S. 25—39 (1888).

*) „Die Transformationsgruppe ist also die sog. „unendliche", bezüglich deren man die neuen Untersuchungen von Lie, Leipz. Ber. 1891 S. 316 bis 352, 353—393 nachsehen möge."

**) Siehe oben S. 85.

Invariantentheorie, eine wichtige Anwendung hinsichtlich der Ableitungen einer Function machen.

Ist nämlich $\chi(u, v)$ eine willkürliche Function von u, v: $\bar{\chi}(u', v')$ die Transformirte, so gelangt man leicht zu den Relationen:

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}.$$

Da aber die Discriminante $a = a_{11}a_{12} - a_{12}^2$ von A eine relative Invariante ist, also

$$a = \Delta^2 a', \quad \text{und damit} \quad \sqrt{a} = \Delta\sqrt{a'},$$

so erkennt man unmittelbar, dass die Grössen $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \chi}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \chi}{\partial u}$ mit ξ, η cogredient sind, also in die Identität $A_1 = A_1'$ für die δu, δv substituirt werden können. Damit nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$U du + V dv = U' du' + V' dv',$$

sodass die linke Seite eine lineare Covariante von A darstellt. Hieraus fliesst durch einfache Differentiation die Existenz der Invariante

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

oder mit Einsetzung der wirklichen Werte, von:

$$\Delta_a^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}\frac{\partial \chi}{\partial u} - a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}\frac{\partial \chi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial \chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Würde man dagegen in die Linearform $U du + V dv$ statt der du, dv die, für eine zweite willkürliche Function $\omega(u, v)$ genau ebenso, wie für χ gebildeten Werte $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \omega}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \omega}{\partial u}$ eingesetzt haben, so hätte sich eine andere Invariante $\Delta_a(\chi, \omega)$ herausgestellt, wo:

$$\Delta_a(\chi, \omega) = \frac{1}{a}\left\{a_{11}\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial v} - a_{12}\left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) + a_{22}\frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial u}\right\},$$

aus der im besonderen, wenn χ mit ω übereinstimmt, die speciellere Invariante $\Delta_a^1(\chi)$ entsteht.

Lässt man nunmehr an Stelle der Form A die Form

$$ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

treten, wodurch die drei Invarianten $\Delta_a^1(\chi)$, $\Delta_a^2(\chi)$, $\Delta_a(\chi, \omega)$ übergehen mögen in $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$, $\Delta(\chi, \omega)$, so sind die letzteren drei Ausdrücke nichts anderes, als die von Beltrami mit so grossem Erfolge eingeführten „Differentialparameter erster und zweiter Ordnung von χ“, und der „Zwischenparameter von χ, ω“.

Vermöge der Function Δ^2 lässt sich nunmehr ein Einblick in die Invariantennatur des Gauss'schen Krümmungsmasses K gewinnen.

Bedeutet nämlich n den Multiplicator der Form A, so dass

$$nA = dp\,dq,$$

so stimmt K mit dem Ausdruck $\frac{1}{2}\Delta^2 \lg n$ überein.

Weitere Aufschlüsse solcher Art gewinnt man durch simultane Transformation zweier Differentialformen, wie A und B:

$$A = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \quad B = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Die Algebra liefert sofort zwei absolute Invarianten, nämlich

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{eg - f^2}, \quad K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}.$$

Hier ist H genau gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Krümmungen, K gleich ihrem Product, d. i. das Krümmungsmass:

$$H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}, \quad K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

Bildet man noch die Functionaldeterminante von A, B, und dividirt sie mit $4\sqrt{a} = 4\sqrt{eg - f^2}$, so stimmt dieselbe mit der „Krümmungslinienform“ Γ überein.

Aus der Algebra entlehnt man dann ohne weiteres die Darstellung:

$$\Gamma^2 = -KA^2 + HAB - B^2.$$

Endlich stellt sich das Quadrat des Linienelementes $d\sigma$ auf der Gauss'schen Kugel direct als Covariante von A und B dar:

$$ds^2 = -KA + HB.$$

Um die geometrischen Bedeutungen der hier auftretenden Formen zu vervollständigen, sei noch erwähnt, dass die bilineare Form $A_1 (= \Sigma dx\,\delta x)$ das Product der beiden Linienelemente ds, δs mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels repräsentirt.

Endlich hat man:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = ds\,\delta s\left(\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\rho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\rho_2}\right),$$

wo ψ, ψ' die Winkel sind, welche ds, δs mit einer der beiden, durch ihren Schnittpunkt gehenden Haupttangenten bilden.

II. D.

Specielle Substitutionsgruppen und Formen.

II. D, a. Seminvarianten*) und seminvariante Functionen.

Haben wir bisher die allgemeinen Eigenschaften invarianter Formen erörtert, so sollen uns im vorliegenden Schlusskapitel Erscheinungen specielleren Charakters beschäftigen, sei es, dass man die Gruppe der auszuübenden Substitutionen beschränkt, oder die zu Grunde liegenden Urformen, oder endlich auch beide.

Unter den invarianten Bildungen, welche zu Untergruppen**) der allgemeinen linearen Substitutionsgruppe gehören, sind am eingehendsten untersucht worden die sogenannten „Seminvarianten"***), d. s. die Leitglieder der Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen u. s. f., und deren Verallgemeinerungen.

Um mit dem binären Gebiete zu beginnen, so setzen wir von vorn herein immer voraus, dass die zu betrachtenden ganz-rationalen Ausdrücke C_0 in den Coefficientenreihen (a), (b), ... der Urformen homogen und isobar sind, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, dass sich dieselben bei allen Substitutionen der Gruppe:

$$(A) \qquad x_1 = ax'_1, \quad x_2 = dx'_2$$

nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ad ändern†).

Fügt man nunmehr die analoge Forderung bezüglich derjenigen Gruppe hinzu, welche entsteht, wenn man (A) zusammensetzt mit der

---

*) Die bequemere Schreibweise „seminvariant" an Stelle von „semiinvariant" ist, etwa nach dem Vorbild des Wortes „seminanis = semiinanis" (halbleer) gewählt worden.

**) In den in nächster Zeit erscheinenden, von Scheffers herausgegebenen „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" von Lie, II. Band werden alle endlichen continuirlichen Untergruppen der projectiven Gruppe von 2, 3, 4 Variabeln bestimmt. Zu jeder derselben gehört eine besonders auszubildende Invariantentheorie. Im Texte beschränken wir uns, abgesehen von einigen Notizen über orthogonale Invarianten, auf die Seminvarianten.

***) Einige Eigenschaften der Seminvarianten sind schon früher berücksichtigt worden, siehe S. 92, 157, 158, 164, 166, 169, 177, 179, 197, 211, 212, 219, 232 u. flgde.

†) Sei der Einfachheit halber eine einzelne Urform f_n mit den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vorgelegt, und sei $a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ irgend ein Glied von C_0, so folgt in der That unmittelbar bei Ausübung der Substitution (A), dass sowohl die Summe $0.\alpha_0 + 1.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n$, wie auch die Summe $n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + \ldots$ einen constanten Wert besitzen muss. Die Addition der beiden Summen zeigt dann, dass auch $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ constant, d. h. dass C_0 homogen ist.
Das Entsprechende gilt für ternäre, ... Formen.

folgenden:

$$\text{(B)} \qquad x_1 = x_1' + b x_2', \quad x_2 = x_2',$$

so wird C_0 zu einer Seminvariante, und genügt der charakteristischen Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} \Omega \equiv {} & a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \cdots \\ & + b_0 \frac{\partial C_0}{\partial b_1} + 2b_1 \frac{\partial C_0}{\partial b_2} + 3b_2 \frac{\partial C_0}{\partial b_3} + \cdots \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0. \end{aligned}$$

Enthält C_0 $n+1$ Argumente a, $m+1$ Argumente b u. s. f., so ist C_0 stets das Leitglied, d. i. der Coefficient der höchsten Potenz von x_1, einer bestimmten Covariante der Formen f_n, g_m, ... mit den Coefficienten $a, b, \ldots$

Sylvester*) geht von der einfachen Bemerkung aus, dass dann C_0 zugleich zum Leitgliede einer Covariante der Formen

$$f'_{n'}, \; g'_{m'}, \; \ldots \; (n' \geqq n, \; m' \geqq m, \ldots)$$

wird, deren erste $n+1$, $m+1$, ... Coefficienten mit den $a, b, \ldots$ übereinstimmen.

Die Theorie der Seminvarianten wird damit von der Grundlage der particulären Formen f_n, g_m, ... und ihrer Ordnungen losgelöst, und erscheint nur noch als Attribut der beliebig fortsetzbaren „Elementenreihen“ der (a), (b), ...

Der Einfachheit halber sei nur eine einzige Elementenreihe (a) vorgelegt.

Ersetzt man die a durch numerische Vielfache derselben, so ändern sich auch die Glieder von Ω nur um numerische Factoren, und umgekehrt.

Setzt man demnach in C_0 das erste Element a_0 gleich Null, so ist der „Rest“ eine Seminvariante in Bezug auf die neue Elementenreihe $a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$

Sylvester und Perrin**) haben nachgewiesen, wie auf Grund dieses

*) Am. J. V S. 79—96 (1882), S. 97—137 (1883).
In dem zweiten Teile der Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Ermittelung der „irreducibeln“ Seminvarianten (Perpetuanten), d. h. solcher, die sich nicht als rationale ganze Functionen niedrigerer Seminvarianten darstellen lassen. Es wird auch hier eine erzeugende Function für einzelne Fälle aufgestellt, welche die Anzahl der linear unabhängigen Perpetuanten von gegebenem Grad und Gewicht liefert; die Ordnung der zugehörigen Urform ist jetzt bedeutungslos geworden. Die betreffende Formel ist weiterhin von Mac Mahon allgemein angegeben worden, vgl. oben S. 174, 193, 198. Vgl. auch die Tabellen von Cayley, Quart. J. XIX S. 131—138 (1883).

**) S. M. F. Bull. XI S. 88—107 (1883).

Satzes nicht nur die Ableitung der „Grundformen", sondern auch die der zugehörigen Syzygien*) wesentlich vereinfacht wird.

Es mag dies etwa durch den Satz von Perrin illustrirt werden, dass man den Leitgliedern eines vollen Systems von Grundformen einer Urform f_n nur noch eine einzige „Restform" der $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hinzuzufügen hat, um ein volles System der zu einer Urform f_{n+1} gehörigen Restformen zu besitzen.

Ein anderer Fortschritt wird durch die Auffassung begründet, C_0 als eine binäre Function der (nicht homogenen) Variabeln a_n anzusehen**).

Hat man dann eine Reihe von Leitgliedern $C_0, C_0', C_0'', \ldots$ einer Urform f_n, so ist nach Sylvester jede Covariante der C, als Formen von a_n betrachtet, wiederum das Leitglied einer Covariante von f_n.

In dem angegebenen Sinne kommt jeder Seminvariante C_0 selbst abermals ein Leitglied zu, nämlich der Coefficient der höchsten Potenz von a_n. Diese „Keime" (germs) der Covarianten von f_n gewähren, wie Sylvester an dem Beispiel der f_5 und f_6 näher ausführt, einen guten Einblick in die Structur des vollen Formensystems von f_n.

Der Benützung der Seminvarianten zweiten und dritten Grades in den a zur Aufstellung „associirter Systeme" ist schon früher***) gedacht worden; ebenso der fundamentalen Aufgabe, unter den Seminvarianten (für ein unbegrenzt hohes n) die „Perpetuanten", d. h. die „irreducibeln" herauszugreifen†), welche sich nicht als ganze Functionen von solchen niedrigeren Grades in den Elementen darstellen lassen; endlich auch des engen Zusammenhanges††) zwischen Seminvarianten und symmetrischen Functionen.

In einer sehr einfachen Weise ist d'Ocagne†††) 1886 zu einem neuen Systeme associirter Seminvarianten einer f_n gelangt.

Man sehe a_0 für den Augenblick als eine Function einer Variabeln ξ an, und $a_1, a_2, \ldots$ als deren erste, zweite, ... Ableitung nach ξ. Dann

---

*) Siehe oben S. 166.

**) Eine weitere Ausbildung der beiden genannten Principien verdankt man Petersen, Zeuthen Tidsskr. (4) IV S. 177—190 (1880), V S. 33—40 (1881); (5) VI S. 152—156 (1888). Die letztere Arbeit bringt Anwendungen auf die Aufstellung voller Systeme.

***) Siehe oben S. 157, 158.

†) Siehe oben S. 174, 193, 198.

††) Siehe oben S. 197.

†††) C. R. CII S. 916—917, Brux. S. sc. X. B. S. 75—78, ebda. XI S. 314 bis 319 (1887).

Es wäre wünschenswert, den ersichtlich sehr engen Zusammenhang zwischen der Methode von d'Ocagne und den, von Bruno (S. 211) und Mac Mahon (S. 197) befolgten zu untersuchen.

liefern die successiven Ableitungen von la_0 nach ξ, von der ersten bis zur (n—1)ten, ein System der gewünschten Art, durch dessen Individuen sich also alle anderen Seminvarianten von f_n rational, mit einer Potenz von a_0 im Nenner, ausdrücken lassen.

d'Ocagne*) und Cesaro**) haben den Zusammenhang zwischen diesem Systeme und dem von Hermite gelieferten näher untersucht.

Die Differentiation nach ξ ist offenbar nur eine symbolische Abkürzung für den Process

$$\frac{d}{d\xi} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

und das obige Verfahren liess mittels desselben aus zwei gegebenen Seminvarianten, z. B. $a_0 a_2 - a_1^2$ und a_0^2, eine neue entstehen.

In diesem Sinne haben d'Ocagne***), Perrin†), Deruyts††), Roberts†††) eine ganze Reihe ähnlicher Processe („Differentialgeneratoren") construirt.

Deruyts hat dabei eine ganze Reihe von Elementengruppen (a), (b), ... zu Grunde gelegt und insbesondere die enge Verwandtschaft zwischen dem dadurch entstehenden Processe

$$\frac{d}{d\xi} = \Sigma\left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots\right)$$

mit den früher besprochenen Cayley'schen D und Δ (in ihren Wirkungen auf Seminvarianten) weiter verfolgt.

Wir führen zur Illustration den Satz an, wonach durch die Substitution

$$x_1 = X_1 - X_2 \frac{\lambda}{S}, \quad x_2 = X_2,$$

wo der Ausdruck λ die Eigenschaft besitzt, dass $D\lambda$ gleich der Seminvariante S wird, jede Covariante sich derart transformirt, dass die neuen Coefficienten zu Zählern Seminvarianten haben.

Nimmt man hier speciell $S = a_0$, $\lambda = a_1$, so kommt man auf einen bekannten Satz von Hermite zurück.

---

*) S. M. F. Bull. XVI S. 183—187 (1888), Brux. S. sc. XII. B. S. 185 bis 189.

**) Nouv. Ann. (3) VII S. 464—467 (1888).

***) C. R. CIV S. 961—964, 1364—1365 (1887). Vgl. auch Cayley, Quart. J. XXI S. 212—213 (1885), Mac Mahon, ebda. S. 362—365. Der Letztere hat auch für die specielle Klasse der „asyzygetischen" Seminvarianten Generatoren aufgestellt: Am. J. VIII S. 1—18 (1885).

†) C. R. CIV S. 1097—1099, 1258—1260 (1887).

††) Belg. Bull. XIII S. 226—235 (1887).

†††) Lond. M. S. Proc. XXI S. 219—233 (1889).

Deruyts hat weiterhin die Lehre von den Seminvarianten auf Urformen mit mehreren Reihen von n Variabeln ausgedehnt, und damit zugleich die Invariantentheorie solcher allgemeinen Urformen wesentlich gefördert. Seine vielfach zerstreuten und schwer zugänglichen Untersuchungen hierüber*) hat Deruyts 1891 in einer Monographie**) vereinigt, sodass wir die letztere hier zu Grunde legen können. Die Abstractheit des Stoffes nötigt uns freilich, es beim Hervorheben einiger Hauptgesichtspunkte bewenden zu lassen.

Deruyts***) setzt, ähnlich wie Kronecker†), die allgemeine lineare Transformation von n Variabeln x aus zwei geeigneten Reihen einfacherer zusammen.

Es sind das einmal diejenigen, bei denen allein eine einzelne Variable einen constanten Factor annimmt:

$$(S_h)\quad x_h = \varepsilon X_h,\quad x_k = X_h\ (k \gtrless h),$$

andererseits solche, wo eine einzelne Variable um eine zweite, noch mit einem constanten Factor behaftete Variable vermehrt wird:

$$(S_{h,l})\quad x_l = X_l + \eta X_h,\quad x_k = X_k\quad (k \gtrless l).$$

Man betrachte nun ganze Functionen F der Coefficienten von den Urformen, welche ausserdem noch in ganzer Weise von einer oder mehreren der Variabelnreihen (x), (y), (z), ... abhängen können, und welche sich nach Ausübung der Substitutionen S_h, $S_{h,l}$ immer nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante (ε resp. 1) ändern sollen.

Die erstere Forderung, bezüglich der S_h, sagt nur aus, dass F „hinsichtlich der einzelnen Indices 1, 2, ..., n" isobar††) wird: F ist dann

---

*) Belg. Bull. (3) XIV S. 53—79 (1887), ebda. XV S. 951—980 (1888), XVI S. 207—215, 576—589 (1888); Liège Mém. (2) XV, zwei Noten (1888). Belg. Mém. S. E. LI, 3 Abhandlungen, ebda. LII.

**) „Essai d'une théorie générale des formes algébriques", Bruxelles.

***) l. c. Chap. II.

†) Siehe oben S. 223.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Entwickelungen ist indessen der, dass Kronecker die allgemeine lineare Substitution aus einer gewissen Anzahl specieller — welche insgesamt die erstere vertreten können — zusammensetzt, und jeder der letzteren entsprechend eine Differentialgleichung für die invarianten Bildungen erhält. Deruyts dagegen benutzt nur einen Teil seiner speciellen Repräsentanten, um Differentialgleichungen für seminvariante Functionen zu bilden, während an Stelle des Restes eine Reihe von arithmetischen Gleichheiten (nämlich der der n Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$) tritt, um dann zu einer invarianten Bildung zu führen.

††) Um diesen Begriff klar zu legen, denken wir uns etwa eine ternäre Form C_n mit einer Variabelnreihe x_0, x_1, x_2; der Coefficient des Gliedes $x_0^i x_1^k x_2^l$ $(i+k+l=n)$ sei mit a_{ikl} bezeichnet.

Irgend eine ganze Function F der a sei als ein Aggregat von Gliedern von selber auch **homogen** in den einzelnen Coefficienten und Variabelnreihen.

Aendert sich F bei Anwendung von S_h um die Potenz ε^{π_h}, so heisst π_h **das Gewicht von F bez. des Index** h; es giebt also n solcher Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$.

Aus den Substitutionen $S_{h,l}$ lassen sich nun $n-1$ derart herausgreifen, dass die Zahlen h, l auf die $n-1$ Wertepaare

$$h, l = (1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$$

beschränkt werden. Es zeigt sich, dass es für das Folgende genügt, diese $n-1$ Substitutionen $S_{i,i+1}$ zu verwenden.

Die Bedingung, dass F gegenüber $S_{l,h}$ invariant ist, erweist sich als äquivalent mit einer linearen partiellen Differentialgleichung $[h, l] = 0$.

Als eine „seminvariante Function" wird jede isobare Form F der Coefficienten und Variabeln definirt, welche die $n-1$ Gleichungen $[i, i+1]\ F = 0$ erfüllt*): ist F frei von den Variabeln, so heisst F eine „Seminvariante".

Fügt man dagegen noch die Forderung hinzu, dass die n Gewichte $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$*) von F **sämtlich einander gleich** $(= \pi)$ werden, so geht F über in eine gewöhnliche „invariante Function" (invariante Bildung), resp. in eine gewöhnliche Invariante.

Beispielsweise ist irgend eine, dem Schema der Variabelnreihen entnommene ein-, zwei-, dreireihige Determinante**) eine seminvariante Function.

$\pi a_{ikl}^{\alpha_{ikl}}$ gegeben, wo sich das Productzeichen auf sämtliche a erstreckt, und die Exponenten $\geqq 0$ sind. Dann heisst F bez. des Index 0 isobar, wenn die Summe $\sum_i i\alpha_{ikl}$, auf alle a ausgedehnt, einen constanten Wert (d. i. das bez. „Gewicht" π_0) besitzt; desgleichen bez. des Index 1, 2, wenn das Entsprechende von den Summen $\sum_k k a_{ikl}$, $\sum_l l a_{ikl}$ gilt.

Der Unterschied zwischen der hier gewählten Bezeichnung und der in der analytischen Geometrie üblichen tritt an einem Beispiel deutlich hervor. Eine C_4 schreibt sich nach der letzteren Vorschrift:

$$x_0^4 a_{0000} + x_1^4 a_{1111} + x_2^4 a_{2222} + 4x_0^3 x_1 a_{0001} + \ldots,$$

dagegen nach der ersteren einfacher:

$$x_0^4 a_{400} + x_1^4 a_{040} + x_2^4 a_{004} + 4x_0^3 x_1 a_{310} + \ldots,$$

wo also die Summe der Indices jedes Coefficienten ein- und dieselbe ist, genau wie die Summe der Exponenten.

*) Es wird bewiesen, dass mit dem Erfülltsein der $n-1$ Gleichungen $[i, i+1] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ für eine isobare Form **zugleich** alle Gleichungen $[h, l] = 0$, bei welchen der Index h kleiner ist, als der Index l, befriedigt werden.

**) Es sind das dieselben „Zwischenvariabeln" p_{ik}, p_{ikl}, ..., welche den allgemeinen Untersuchungen von Clebsch zu Grunde liegen.

Behufs weiterer Entwickelung überträgt*) der Verfasser die Clebsch-Aronhold'sche Symbolik, welche bis dahin nur für invariante Functionen benützt wurde, auf seminvariante Functionen. Es empfiehlt sich dabei, den symbolischen Ausdrücken eine „canonische"**) Gestalt beizulegen, welche in den einzelnen äquivalenten Symbolelementen symmetrisch ist: es hat das unter anderem den Vorteil, dass jeder nicht verschwindenden symbolischen Bildung auch eine nicht verschwindende reale correspondirt, und umgekehrt.

Bei dieser Festsetzung ist es nicht schwer, nachzuweisen, dass „eine seminvariante Function ψ zum symbolischen Ausdruck ψ' eine, auf Linearformen bezügliche seminvariante Function von den nämlichen Gewichten besitzt"***).

Diese Linearformen dürfen linear angenommen werden, nicht nur in den symbolischen Coefficienten, sondern auch in den Variabelnreihen; sie sind also sämtlich von dem Typus $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$.

Bildet man nun aus den n ersten Colonnen des Schemas der symbolischen Coefficienten der Reihe nach alle möglichen Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ von den Ordnungen 1, 2, ..., n; andererseits aus den n letzten Colonnen des Schemas der Variabeln entsprechend alle möglichen Determinanten $\delta'_n, \delta'_{n-1}, \ldots, \delta'_1$ von den Ordnungen n, n—1, ..., 1, so gilt der grundlegende Satz†):

„Der symbolische Ausdruck ψ' einer seminvarianten Function ψ ist darstellbar als eine Summe von Producten aus den drei Factorengruppen δ; δ'; $(a_x, b_x, \ldots)$".

Im besondern treten bei einer invarianten Function nur n-reihige Determinanten δ_n, δ'_n ein, und man gelangt unmittelbar zum Clebsch'schen Fundamentalsatz der Symbolik zurück.

Eine weitere Vereinfachung der Theorie wird erzielt, wenn man sich, nach dem Vorgange von Capelli, des Aronhold'schen Processes bedient; der Fortschritt bei Deruyts wird durch die gleichzeitige Berücksichtigung der (symbolischen) Coefficienten- und der Variabelnreihen erzielt.

Hiermit ergiebt sich, in Verbindung mit der oben berührten symbolischen Darstellung für die seminvarianten Functionen, auf der einen

---

Der Fortschritt bei Deruyts liegt eben darin, dass an Stelle der speciellen Grössen p mit den weit allgemeineren seminvarianten Functionen operirt wird.

*) l. c. Chap. III.

**) l. c. S. 13, 14.

***) l. c. S. 55.

†) l. c. S. 57.

Seite der symbolische Ausdruck für irgend eine Seminvariante von den Gewichten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, indem das aus den Hauptunterdeterminanten des Coefficientenschemas gebildete Product:

$$a_1^{\pi_1-\pi_2}(a_1 b_2)^{\pi_2-\pi_3} \ldots (a_1 b_2 c_3 \ldots k_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n} (a_1 b_2 c_3 \ldots k_{n-1} l_n)^{\pi_n}$$

genügend oft mal Processen von der Art $D_{ab}, D_{ac}, D_{bc}, \ldots$ unterworfen wird*).

Auf der anderen Seite**) gelangt man, wenn man hier überall die Coefficientenreihen der a, b, ... mit den Variabelnreihen vertauscht, zu einer neuen Art von invariantiven Functionen, den „identischen Semicovarianten zweiter Gattung".

Es hat nun keine wesentliche Schwierigkeit, zu sehen, dass das „Leitglied" ***) einer invarianten Function, welche n Variabelnreihen zu den Ordnungen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ enthält, eine Seminvariante von den Gewichten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ ist, und dass diese Beziehung auch in eindeutiger Weise umgekehrt werden kann.

In der That hat man nur†) in dem symbolischen Ausdrucke der Seminvariante ψ die symbolischen Elemente (a), (b), ... durch ebensoviele Reihen von symbolischen Linearformen zu ersetzen, um die seminvariante Function Ψ mit dem Leitgliede ψ vor sich zu haben.

Die Function Ψ besitzt die $\pi_n$te Potenz von δ'_n, der Determinante der Variabeln, zum Factor. Nennen wir den anderen Factor χ, so ist χ eine invariante Function, welche nur noch die $n-1$ ersten Variabelnreihen zu den Ordnungen $\pi_1-\pi_n, \pi_2-\pi_n, \ldots, \pi_{n-1}-\pi_n$ enthält, vom Gewichte π_n ist, und wiederum ψ zum Leitgliede hat.

„Diese Functionen χ, welche Deruyts als primäre Covarianten bezeichnet, erweisen sich, wie schon Capelli††) nachgewiesen hatte, als das eigentliche Fundament der Invariantentheorie der Formen von beliebig vielen cogredienten Reihen von n Variabeln." In der That lassen sich dieselben auch definiren als diejenigen, allseitig isobaren Formen von $n-1$ Variabelnreihen, welche den $n-2$ linearen partiellen Differentialgleichungen

$$D_{12}=0,\ D_{23}=0,\ \ldots,\ D_{n-2,n-1}=0$$

genügen.

---

*) l. c. S. 64.

**) l. c. S. 65.

***) Sind mit x_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ die n Reihen von je n Variabeln bezeichnet, mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ die bezüglichen Ordnungen einer Form, so ist unter dem Leitgliede der Coefficient von $x_{11}^{m_1} x_{22}^{m_2} \ldots x_{nn}^{m_n}$ zu verstehen.

†) l. c. S. 71.

††) Siehe S. 200 u. flgde., 216.

Deruyts findet aber nicht nur die Capelli'schen Ergebnisse wieder, namentlich den Fundamentalsatz über Reihenentwickelung*), sondern deckt auch eine Reihe neuer Eigenschaften der Functionen χ auf, eben mit Hülfe seiner durchsichtigen symbolischen Darstellung der Seminvarianten.

Hierher gehört vor allem der nach Hilbert's Methode geführte Nachweis**), dass die Functionen χ einen Integritätsbereich mit endlicher Basis bilden.

Mit Hülfe der Functionen χ ist Deruyts ferner in der Lage, einem Sylvester'schen Satze (S. 219) die weiteste Ausdehnung zu geben, indem aus zwei seminvarianten Functionen dadurch eine neue erzeugt wird, dass die Coefficienten der einen durch die ersten Ableitungen der zweiten nach den ihrigen ersetzt werden.

Die Functionen χ lassen sich auf eine Reihe einfachster Typen reduciren***), aus denen alle übrigen durch einen verallgemeinerten Ω-Process ableitbar sind.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass es die Functionen χ auch erlauben, „specielle" †) Urformen, zwischen deren Coefficienten gewisse algebraische Relationen herrschen, der Formentheorie zugänglich zu machen.

Vorausgesetzt ist nur, dass jene Relationen selbst invariantiver Natur sind, d. h. dass sie ihre Form bei linearer Transformation der Variabeln nicht ändern.

Es hat zunächst den Anschein, als ob zu derartigen Urformen Functionen gehören, welche erst in Folge jener Relationen die Eigenschaft der Invarianz annehmen. Dies ist indessen nicht der Fall, da sich nachweisen lässt, dass sich sämtliche Functionen χ aus solchen „regulären" herleiten lassen, welche unabhängig von jenen Relationen existiren.

---

*) l. c. Chap. IV. Die Anwendung hiervon auf die Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen invarianten Bildungen von gegebenen Gradordnungen ist schon auf S. 176 u. flgde. besprochen worden.

**) l. c. S. 116 u. flgde. Die Verallgemeinerungen bei invarianten Functionen befinden sich schon auf S. 23 u. flgde.

***) l. c. Chap. VI.

†) l. c. Chap. VIII; Bull. Belg. (3) XXIII S. 152—167 (1892). Vgl. Maurer, S. 229.

Auch Study („Methoden ..." II § 10) verwendet derartige „invariante Gleichungssysteme" behufs allgemeiner Erledigung des Aequivalenzproblems: insbesondere findet sich bei ihm der Satz, dass ein invariantes Gleichungssystem ersetzt werden kann durch eine Reihe von verschwindenden Invarianten und identisch verschwindenden Covarianten.

II. D, b.

Combinanten und Apolarität.

Unter den Formen mit mehreren Reihen von Variabeln, welche verschiedenen*) linearen Transformationen unterliegen, sind bereits wiederholt**) die „Combinanten" als die am häufigsten vorkommenden namhaft gemacht worden.

Die Verknüpfung der Combinanten mit der „Apolaritätstheorie" ist eine so innige, dass eine gemeinsame Besprechung am Platze ist. Freilich wird es uns nicht gut möglich sein, von der Bedeutung dieses Zweiges der Formentheorie eine richtige Vorstellung zu geben, da dessen wichtigste Anwendungen der Geometrie angehören; gerade hier aber tritt wiederholt die Erscheinung auf, dass Sätze, die in der Algebra nahezu selbstverständlich, oder wenigstens von nur particulärem Interesse sind, in der Geometrie zur Quelle weitreichender Forschungen werden.

Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_p$ homogene Functionen $n$ten Grades der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Unter den simultanen invarianten Bildungen der f werden diejenigen als Combinanten bezeichnet, welche sich bei linearer Sub-

---

*) Siehe S. 106 u. flgde., 140, 148, 154, 178, 193. Von besonderem Interesse (auch für die Theorie der elliptischen Functionen) sind die binären quadrato-quadratischen Formen. Ihre beiden Discriminanten besitzen gleiche Invarianten (Cayley, Quart. J. XI S. 83—91, 1870; Capelli, Batt. G. XVII S. 69—148, 1879; Zeuthen, Proc. L. M. S. X S. 196—204, 1879; Frobenius, Journ. f. Math. CVI S. 125—188, 1890). Frobenius geht dabei auch auf die Aequivalenz solcher Formen ausführlich ein. Dass die soeben genannte Eigenschaft auch bei mehrfach linearen Formen von drei und vier binären Variabelnreihen in entsprechender Weise auftritt, hat le Paige untersucht; vgl. die Citate auf S. 178 unten.

**) Siehe S. 87, 148, 155, 162, 184 u. flgde., 193, 225.

Combinanten im allgemeinsten Sinne sind die invarianten Bildungen von denjenigen unter den bezeichneten Formen, bei welchen eine der Variabelnreihen nur linear eingeht. Siehe weiter unten. Wegen der auf diesen Abschnitt bezüglichen, bis 1883 reichenden Litteratur sei auf das Verzeichnis in des Referenten „Apolarität" hingewiesen. Zur Begründung der Theorie sei hier noch nachgetragen: Clifford, Proc. L. M. S. II S. 116—118 (1869), Darboux, Bull. I (1870).

Eine der wichtigsten Combinanten ist die schon von Jacobi eingehend studirte Functionaldeterminante von n Formen mit n Variabeln (siehe etwa Gordan's Vorles. I). Die Functionaldeterminanten der Functionaldeterminanten sind den ursprünglichen Formen proportional (Clebsch, Journ. f. Math. LXIX S. 355—358 (1868), LXX S. 175—181 (1869), Rosanes, ebda. LXXV S. 166—172 (1872), Pasch ebda. LXXX S. 177—182 (1875)). Die auf S. 165 erwähnte Clebsch'sche Darstellung der binären Functionaldeterminante resp. des Productes zweier solcher durch die ursprünglichen Formen ist erweitert worden von d'Ovidio, Atti Tor. XIV S. 963—972 (1879), le Paige, Bull. de Belg. (2) XLIX S. 113—125 (1880), (3) I S. 480—499 (1881), C. R. XCII S. 688—690 (1881), Torelli, Nap. Rend. XXV S. 125—134 (1886).

stitution der f nur um eine Potenz der Determinante der Substitutionscoefficienten ändern.

Bildet man sich mit Hülfe der neuen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die Linearform

$$F = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_p f_p,$$

so lassen sich die Combinanten der f offenbar auch definiren als diejenigen Functionen von den Coefficienten und Variabeln der f, welche sich gegenüber beliebigen linearen Transformationen, sowohl der u, wie der x, invariant verhalten, und welche die u nicht enthalten.

Die letztere Definition ist insofern zweckmässiger, als sie nicht nur unmittelbar zu einer specifischen schon früher berührten Symbolik*) Veranlassung giebt, sondern auch zu einer wichtigen Verallgemeinerung führt; man gelangt zu „Combinanten der f in weiterem Sinne", wenn man die angegebene Beschränkung hinsichtlich der u fallen lässt.

Gordan**) hat den Grund zu der heutigen Ausbildung der Theorie gelegt mittels des Satzes: „dass jede Combinante der f sich darstellen lässt als eine invariante Bildung einer ausgezeichneten Combinante R, derjenigen Determinante nämlich, deren Elemente entstehen, wenn man die f so oft mit verschiedenen (cogredienten) Veränderlichen anschreibt, als ihre Anzahl ergiebt".

Gordan gelangt hierzu, indem er den Fundamentalsatz***) der Symbolik, „dass jede Invariante eines Systems linearer Formen eine Form der aus den Coefficienten der Formen zu bildenden Determinanten ist", in eigentümlicher Weise in Verbindung bringt mit der Reihenentwickelung†) einer Form, welche zwei Reihen contragredienter Variabeln enthält.

Die Combinanten bilden somit ein geschlossenes System von Formen, dem nach Hilbert unmittelbar die Eigenschaft der Endlichkeit zukommt, da sie aus einer einzigen Urform mit cogredienten Variabelnreihen ableitbar sind††).

Sehr viel durchsichtiger gestaltet sich die Lehre der

---

*) Siehe S. 193.

**) Math. Ann. V S. 95—122 (1872), bes. S. 116. Vgl. auch Voss, Münch. Ber. 1888 S. 15—19.
In § 11 werden insbesondere die Combinanten R für binäre Formen auf noch einfachere Bildungen reducirt.

***) Siehe S. 188.

†) Siehe S. 217.

††) Siehe S. 148.

Combinanten, wenn man dem Princip der Dualität Rechnung trägt.

Construirt man nämlich mit Stroh*) eine neue Determinante Q, indem man die p Coefficientenreihen der f ergänzt durch die entsprechenden Producte der Potenzen von einer hinreichenden Anzahl von Variabelnreihen (v), (w), ..., welche zu den ursprünglichen Variabeln contragredient sind, so ist Q im Stande, die Form R völlig zu vertreten. Denn Q ist selbst eine Combinante der f, und R eine invariante Bildung von Q.

Ist N die Anzahl der Coefficienten einer allgemeinen Form f, so beträgt N — p die Anzahl der neuen Variabelnreihen.

Der angegebene Satz legt es nun nahe, den p „Ordnungsformen" f (geschrieben mit Polynomialcoefficienten) N — p „Klassenformen" φ (geschrieben ohne Polynomialcoefficienten und) in contragredienten Variabeln gegenüber zu stellen.

„Alsdann gehen die Combinanten des einen Systems in die des andern einfach dadurch über, dass man in allen Formen an Stelle der Determinanten des ersten Coefficientensystems die adjungirten des zweiten setzt."

Hier ist der Punkt, wo die Apolaritätstheorie eingreift.

Man bezeichnet zwei Formen, wie f und φ (wo also die Ordnung von f gleich der Klasse von φ ist) als „conjugirt" (Rosanes**)) oder „apolar" (Reye***)), wenn ihre bilineare Invariante verschwindet.

Einem Systeme von p linear unabhängigen Formen f correspondirt gerade ein System von N — p linear unabhängigen Formen φ und umgekehrt, so, dass jede Form f zu jeder Form φ apolar ist.

Zwei solche Systeme heissen dann selbst „apolar zu einander".

Wählt man nunmehr das obige System der φ als ein zum System der f apolares, so werden, nach einem, zuerst von Brill***) vollständig

---

*) Math. Ann. XXII S. 393—405 (1883).

Im Falle der binären Formen erhält der Verfasser einen sehr durchsichtigen symbolischen Ausdruck für alle Combinanten ersten Grades, welche zu p Formen nter Ordnung gehören (l. c. S. 403).

**) Siehe S. 180, 218.

***) Math. Ann. IV, bes. S. 530 (1871).

Vgl. Grassmann's Ausdehnungslehre, 1862 No. 112.

Derselbe Satz bildet auch die Grundlage der Untersuchungen von Clebsch über die Invarianten von Formen mit n Variabeln (Gött. Abh. XVII S. 1—62, 1872), sowie von Gordan über den grössten gemeinsamen Factor (Math. Ann. VII S. 433—448, 1874), und der auf S. 264 citirten Arbeiten von W. Stahl.

nachgewiesenen Satze, je zwei der adjungirten Determinanten der beiderlei Coefficientensysteme einander proportional, oder auch, wenn man den unwesentlichen Proportionalitätsfactor gleich der Einheit setzt, einander gleich.

Hieraus fliesst das fundamentale „Combinantenprincip“: „Die Combinanten zweier apolarer Formensysteme stimmen der Anzahl und Form nach mit einander überein“*).

Beispielsweise lassen sich darnach drei biquadratische binäre Formen hinsichtlich ihrer Combinanten ersetzen durch nur zwei solche; waren die ersteren „allgemeine“ Formen, so sind es auch die letzteren**).

Von besonderem Interesse sind die einfachsten, die Combinanten binärer Formensysteme, weil sich auf ihnen die höheren aufbauen lassen.

Der Beweis, den Brill***) für diesen Fall geliefert hat, ist um so bemerkenswerter, als dabei ein wesentlich neuer Gesichtspunkt zu Tage tritt.

Aus der Gordan'schen, nicht homogen geschriebenen Determinante R werden die $\frac{p(p-1)}{2}$ Differenzen der p Variabeln y, welche R zu Factoren besitzt, abgesondert, und nachträglich sämtliche y einander gleichgesetzt.

Die so entstehende einfachere Combinante $W(y)$†), von der Ordnung $p(n-p+1)$ in der einen Variabeln y, ist insofern die Gordan'sche Form R zu ersetzen geeignet, als man auf die rationale Darstellung der invarianten Bildungen Verzicht leistet: in der That wird nachgewiesen, dass jede Combinante der f als eine irrationale In- oder Covariante der binären Form W darstellbar ist. (Vgl. II. B, b.)

Die „Allgemeinheit“ der Formen f zieht wiederum die-

---

*) Stéphanos, Sav. étr. 1883 (eingereicht Dez. 1881, siehe einen Bericht von Jordan vom Dez. 1881). Brill hat den Beweis des Satzes so geführt, dass er ohne weiteres auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausgedehnt werden konnte (Math. Ann. XX insbes. S. 335, 1882, datirt vom April 1882).

Vgl. wegen binärer Formen die Darstellung beim Referenten „Apolarität . . .“ § 11.

**) Vgl. Stéphanos (l. c.), Brill (l. c.), Referent (l. c. Cap. II), sowie die Dissertationen von Friedrich (Giessen, 1886), Gross (Tübingen, 1887, auch Math. Ann. XXXI S. 136—150, 1888), E. Meyer (Königsberg, 1888).

***) l. c.

†) Diese „Functionaldeterminante“ der f oder „Hauptcombinante“ hat in Bezug auf ihre Abhängigkeit von den f Igel in einer Reihe von Abhandlungen in den Wien. Ber. u. Abh. genauer untersucht, und im Anschlusse daran Methoden zur Bildung von Combinanten entwickelt.

jenige der Form W nach sich, d. i. die Coefficienten von W sind von einander unabhängig.

Will man umgekehrt eine allgemein vorgelegte binäre Form von der Ordnung $p(n-p+1)$ in die Gestalt von W bringen, so bedarf es der Adjunction einer irrationalen Function der Coefficienten.

Beispielsweise ist die letztere bei einer Form sechster Ordnung die Wurzel einer Gleichung fünfter*) Ordnung: diese Adjunction genügt aber auch, um die gegebene Form durch lineare Transformation auf zwei gewisse canonische Gestalten**) zu bringen.

Zur Begründung des Combinantenprincips war der Begriff von apolaren Systemen benützt worden. Der letztere ist indessen schon früher aufgetreten: seine Quelle ruht in der Ausdehnung der Sylvester'schen canonischen Darstellung binärer Formen als Potenzsummen auf Systeme von Formen.

Rosanes hat 1872 einen ersten***) Schritt in dieser Richtung gethan, indem er mittels symbolischer Rechnung den einfachen, aber weittragenden Satz nachwies, „dass das Verschwinden der bilinearen Invariante zweier binärer Formen gleicher Ordnung notwendig und hinreichend sei, damit jede von ihnen sich als Summe der Potenzen der Linearfactoren der anderen darstellen lasse". Noch zweckmässiger spricht sich dies dahin aus, dass, „wenn eine binäre Form nter Ordnung den Factor $\lambda-\alpha$ besitzt, so ist sie zur nten Potenz von $\lambda-\alpha$ apolar, und umgekehrt".

Daraus folgt dann insbesondere, dass n gegebene binäre Formen nter Ordnung als lineare Verbindungen der vollständigen Potenzen derselben n linearen Formen darstellbar sind. Das Product der letzteren ist nämlich nichts anderes, als die zu den gegebenen Formen apolare Form.

Rosanes hat bald darauf†) das in Rede stehende Princip der apolaren Zuordnungen auf höhere Formen ausgedehnt. Man hat hier

*) Wegen der Beziehungen zwischen den Wurzeln der Gleichungen sechster und fünfter Ordnung vgl. Stephanos (l. c.) und den Referenten (l. c.).

**) Siehe oben S. 182.

***) Journ. f. M. LXXV S. 172—176. Weitere Anwendungen des Satzes finden sich in des Referenten „Apolarität".

W. Stahl ist in die Beziehungen zwischen binären apolaren Systemen noch tiefer eingedrungen und hat interessante Anwendungen auf die Theorie der abwickelbaren Flächen gemacht: Journ. f. Math. CI S. 73—98 (1886), S. 300 bis 325 (1887); CIV S. 38—61 (1888), S. 302—320 (1889). Vgl. auch Study, Leipz. Ber. 1886 S. 3—9.

Eine rein geometrische Theorie der binären Apolarität verdankt man H. Wiener, Habil. Schrift, Darmstadt 1885, 83 S. Vgl. Thieme, Schlöm. Z. XXIV S. 221—229, 276—284 (1879); Math. Ann. XXIII S. 597—598 (1884).

†) Journ. f. M. LXXV S. 312—330 (1873).

analog: „Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ eine Form nter Ordnung von r Variabeln, und bedeuten $u_1, u_2, \ldots, u_r$ die contragredienten Variabeln, so ist f dann und nur dann zur nten Potenz der Linearform $u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_r y_r$ apolar, wenn die Gleichung $f(y_1, y_2, \ldots, y_r) = 0$ erfüllt ist".

Hierauf gründet sich die Möglichkeit*), eine allgemeine Form f durch eine gewisse Anzahl von Potenzen linearer Formen darzustellen, eine Aufgabe, die bereits vorher**) Reye mit Hülfe seiner mechanischen Interpretation mit Erfolg in Angriff genommen hatte.

Es tritt aber jetzt ein neues Moment hinzu, welches den Zusammenhang mit den Polareigenschaften der Form f vermittelt.

Man bilde von der Form f die erste Polare bezüglich eines Wertsystems („Punktes") (y); von dieser Form abermals die erste Polare bez. eines zweiten Punktes (z), und so fort, bis man zu einer Form gelangt, die in n Punkten (x), (y), (z), ..., (w) linear ist.

Verschwindet die letztere Bildung, so sagt man, dass die n Punkte ein „Pol-n-Eck" von f***) bilden.

Alsdann ist leicht zu sehen, dass ein Pol-n-Eck von f, d. i. das Product der n Linearformen $u_x, u_y, \ldots, u_w$, eine zu f apolare Klassenform ist, und umgekehrt.

Der Begriff des Pol-n-Ecks lässt sich zu dem eines vollständigen Pol-$(n+1)$-Ecks erweitern, wenn je n-Ecken des letzteren ein Gebilde der ersteren Art darstellen.

Daraus fliessen nun in Verbindung mit dem Obigen Sätze, wie der folgende, wobei wir uns auf den Fall von drei Variabeln beschränken, und der Kürze wegen die geometrische Fassung wählen:

„Eine allgemeine C_n lässt sich mittels der „Seiten" eines vollständigen Pol-$(n+1)$-Ecks als Summe der nten Potenzen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Linearformen darstellen."

Es ist bemerkenswert, dass die Kraft der hierher gehörigen Sätze wesentlich darauf beruht, dass man von zwei apolaren Formen f, φ die eine als reducibel, nämlich als ein Product von lauter Linearformen voraussetzte.

Naturgemäss wird man nach der Bedeutung der Apolarität von zwei nicht reducibeln Formen fragen. Thatsächlich ist dieses allgemeinere Pro-

*) Die geometrische Bedeutung der linearen Relationen zwischen gleich hohen Potenzen von Linearformen hatte schon P. Serret 1869 eingehend untersucht (Géométrie de direction, Paris).

**) Journ. f. Math. LXXII S. 293—326 (1870).

***) Vgl. Grassmann, Gött. N. Dez. 1872, S. 567—577.

blem das ältere, wenn man sich dabei auch auf den Fall der zweiten*) Ordnung und auf die darauf zurückführbaren**) beschränkt hat.

Indessen schien die gegebene Antwort, so wichtig sie für die Geometrie ist, algebraisch von zu specieller Natur zu sein, um auf die Formentheorie einen fruchtbaren Einfluss auszuüben.

Hesse***) hatte nämlich bereits nachgewiesen, dass die Apolarität zweier Formen zweiter Ordnung resp. Klasse das Kriterium dafür ist, dass man vermöge linearer Transformation (und zwar dann noch auf unendlich viele Weisen) die beiden Formen auf eine derartige Normalform bringen kann, dass in der einen Form ausschliesslich die Quadrate, in der andern ausschliesslich die Producte der Variabeln auftreten.

Rosanes und Reye†) haben hieraus, in Verbindung mit dem oben dargelegten Principe, weitreichende Folgerungen entwickelt für Systeme von Kegelschnitten resp. Flächen zweiter Ordnung (und Raumcurven dritter Ordnung).

Mit der Aufgabe, die in Rede stehende, ganz anders geartete canonische

---

*) Der Fall der dritten Ordnung ist erst neuerdings für das ternäre Gebiet von O. Schlesinger untersucht worden. Sein Hauptresultat lautet geometrisch, dass, wenn eine Curve dritter Ordnung zu einer Curve dritter Klasse conjugirt ist, die erste unendlich viele Polfünfecke der letzteren enthält. (Vgl. auch de Paolis, Acc. L. 1886.) Es wird für diese Polfünfecke eine einfache Construction angegeben (Math. Ann. XXX S. 453—477 (1887)). Eine allgemeinere Auffasung der Apolarität entwickelt derselbe Verfasser, Math. Ann. XXXI S. 183—219 (1888), insofern man auf elliptischen Curven mit linearen Aggregaten gewisser θ-Producte ganz ähnlich rechnen kann, wie mit solchen von algebraischen Formen auf rationalen Curven. Im besonderen folgt daraus, dass die oben mitgeteilte Bedingung des Conjugirtseins nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

London (Math. Ann. XXXVI S. 535—584) hat hieran angeknüpft, um eine oder mehrere kubische ternäre Formen als Summen von Kuben linearer Formen darzustellen.

**) So z. B. wenn eine Curve zweiter Klasse k_2 apolar ist zu einer Curve dritter Ordnung C_3, d. h. zu allen Polarkegelschnitten der C_3, oder, wenn eine Fläche zweiter Klasse Φ_2 apolar ist zu einer Raumcurve dritter Ordnung φ_3, d. h. zu allen durch φ_3 gehenden Flächen zweiter Ordnung. Vgl. auch S. 86.

***) Journ. f. M. XLV S. 82—90 (1853).

†) Siehe S. 180. Die Anwendungen auf linear abhängige Punktsysteme sind seitdem von Rosanes noch weiter verfolgt worden, Journ. f. M. LXXXVIII S. 241—273 (1880), XC S. 303—321 (1881), XCV S. 247—255 (1883), C S. 311 bis 316 (1887).

In jüngster Zeit hat Reye die Geometrie um einen neuen Zweig bereichert, der mit der Apolarität vielfache Berührungen aufweist, nämlich um die Theorie der linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel und Räume, und der hier geltenden Dualitätsprincipien. Berl. Ber 1889 S. 833—839, Journ. f. Math. CIV S. 211—240 (1889), CVI S. 30 bis 47, 315—329; CVII S. 162—178 (1890); CVIII S. 89—124 (1891). Vgl. W. Stahl, Journ. f. Math. CVII S. 179—188 (1890).

Darstellung auf die früheren zurückzuführen, verbindet sich eine andere von allgemeinerem Charakter, nämlich die Apolaritätserscheinungen im Gebiete von drei, vier, ... Variabeln aus einer rein binären Quelle herzuleiten.

Der Referent*) hat sich hiermit eingehend beschäftigt und hat nachgewiesen, dass beide Fragen zu bejahen sind: Apolaritäts- und Combinanteneigenschaften höherer Gebiete lassen sich der Theorie der binären Combinanten unterordnen.

Es wird das erreicht durch eine Kette von Uebertragungsprincipien (oder umgekehrt, wenn man will, von Reductionsprincipien).

Der Kern des Verfahrens ist der, dass unter Zugrundelegung eines canonischen „Coordinatensystems" die erforderlichen Polarenprocesse umgesetzt werden in einfache Umwandlungen elementar-symmetrischer Functionen.

Da es bei den in Rede stehenden Gebilden irrelevant ist, ob man die Formen gleich Null setzt oder nicht, so möge das Erstere erlaubt sein, und damit zugleich eine bequeme geometrische Redeweise.

Um uns nicht in Erklärungen complicirter Begriffe einzulassen, genüge es, den einfachsten Fall von zwei Kegelschnitten**) der Illustration unterzulegen.

Es seien ein Ordnungs- und ein Klassenkegelschnitt vorgelegt:
$f \equiv a_x^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \varphi \equiv u_\alpha^2 \equiv \Sigma\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \ (i, k = 0, 1, 2).$
Den letzteren denke man sich bereits in die „Normalform"***) gebracht

$$\varphi \equiv u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

oder auch, mit Einführung eines willkürlichen Parameters λ:

$$u_0 : u_1 : u_2 = \lambda^2 : -\lambda : 1.$$

Die Apolaritätsbeziehung zwischen f und φ drückt sich jetzt aus durch:

$$a_{02} = a_{11},$$

sodass man bei ihrem Erfülltsein setzen kann:

$$a_{00} = a_0, \quad a_{01} = a_1, \quad a_{02} = a_{11} = a_2, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{22} = a_4.$$

---

*) „Apolarität ...", Tübingen 1883. Die in Rede stehenden Uebertragungsprincipien hat des weiteren (auch für nicht apolare Gebilde) Study verfolgt: Leipz. Ber. 1890 S. 172 u. flgde.

**) l. c. § 18.

***) Die Verwendung dieser Normalform ist für die Durchsichtigkeit des ganzen Verfahrens durchaus wesentlich. Selbstredend können einzelne Ergebnisse auch unter Zugrundelegung allgemeiner Urformen abgeleitet und weiter verfolgt werden, wie das mittels symbolischer Rechnung Schlesinger für das ternäre, Lindemann für das quaternäre Gebiet nachgewiesen haben. Cf. O. Schlesinger, Dissertation, Breslau 1882 oder Math. Ann. XXII S. 520—568, Lindemann, Math. Ann. XXIII S. 111—142 (1884).

Ursprünglich ist der letztere von der „typischen" Darstellung binärer Formen ausgegangen, siehe oben S. 161.

Von einem Punkte (x) mögen die Tangenten α, β an den „Norm-Kegelschnitt" φ gehen, dann hängen die x_0, x_1, x_2 mit den α, β zusammen durch die einfachen Relationen:

$$x_0 : x_1 : x_2 = 1 : \alpha + \beta : \alpha\beta.$$

Dann lautet der grundlegende Satz:

„Die Bedingung dafür, dass zwei Punkte $(x) = (\alpha, \beta)$, $(y) = (\gamma, \delta)$ in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, drückt sich vermöge der, in den α, β, γ, δ **symmetrischen** Gestalt aus:

$$a_{xy} \equiv a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0,$$

wo die $\frac{s_1}{s_0}$, $\frac{s_2}{s_0}$, $\frac{s_3}{s_0}$, $\frac{s_4}{s_0}$ die elementarsymmetrischen Functionen der α, β, γ, δ bedeuten".

Daraus fliessen unmittelbar die nachstehenden Folgerungen.

„Die sämtlichen Lösungen (s) der Gleichung $a_s = 0$ stellen die (dreifach unendliche) Schar von, φ umschriebenen Polvierseiten des zu φ apolaren Kegelschnitts f dar."

Setzt man in $a_s = 0$: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda$, so erhält man die Gleichung $a_\lambda^4 = 0$ für die vier Schnittpunkte von φ mit f.

Daraus und aus der Definition der binären Apolarität ergiebt sich:

„Die Polvierseite des vorigen Satzes sind auf φ dargestellt durch die zum binären Quadrupel a_λ^4 der Schnittpunkte von φ mit f apolare Gruppe."

Von den Polvierseiten von f gelangt man zu den Poldreiseiten von f, indem man eine Seite der ersteren unbestimmt werden lässt.

Sollen zugleich die Seiten eines Poldreiseits Tangenten α, β, γ von φ sein, so spaltet sich die Gleichung $a_s = 0$ in die beiden:

$$a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 = 0, \quad a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2 + a_4 \sigma_3 = 0,$$

wo $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \alpha + \beta + \gamma$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \alpha\beta\gamma$ gesetzt ist.

Damit findet aber der Satz von Hesse seine vollständige Erklärung, „denn die, φ umschriebenen Poldreiseite von f sind auf φ repräsentirt durch die zur Gruppe der ersten Polaren des Schnittpunktquadrupels (f, φ) apolare Gruppe."

Die Verknüpfung zwischen dem binären und ternären Gebiete wird eine noch engere mittels eines weiteren, zuerst*) von O. Schlesinger mit

*) Dissertation, Breslau 1882 oder Math. Ann. XXII S. 520—568 (1883). Unabhängig davon ist der Referent auf dieses Princip gekommen, und hat dasselbe Math. Ann. XXI S. 528—544 (1883) und in „Apolarität" allgemein mit unsymbolischen Mitteln entwickelt.

symbolischer Rechnung aufgestellten Uebertragungsprincipes, welches wesentlich auf der Auffassung beruht, dass man einen und denselben Kegelschnitt K einmal als Ordnungs-, das anderemal als Klassengebilde ansieht.

Auf einem Kegelschnitt K sei ein Punktquadrupel a_λ^4 nebst einem Tangentenquadrupel b_λ^4 gegeben. Es giebt einen einzigen zu K apolaren Ordnungskegelschnitt f, der mit K das Punktquadrupel a_λ^4 gemein hat, und ebenso einen einzigen zu K apolaren Klassenkegelschnitt Φ, der mit K das Tangentenquadrupel b_λ^4 gemein hat.

„Dann ist (bis auf einen unwesentlichen Factor) die binäre bilineare Invariante der beiden Quadrupel a_λ^4, b_λ^4 identisch mit der ternären bilinearen Invariante der beiden Kegelschnitte f, φ."

Wir brechen hier ab und begnügen uns damit, die Ausdehnung auf höhere Gebiete dadurch zu charakterisiren, dass man die Ordnung n einer Binärform $f_n = a_\lambda^n$ in zwei Factoren $n_1 n_2$ zerlegt*), und nunmehr die Wurzeln von $f_n = 0$ interpretirt als Punkte auf einer, in einem Raume von n_1 Dimensionen gelegenen einfach-ausgedehnten Mannigfaltigkeit, deren homogene Coordinaten nichts anderes sind, als die Potenzen 1, λ, $\lambda^2, \ldots, \lambda^{n_1}$ der Variabeln λ.

Als eine Anwendung der in Rede stehenden Uebertragungsprincipien mögen zwei Sätze ihre Stelle finden, welche auf die Natur der canonischen Potenzdarstellungen ein neues Licht werfen.

Der erste**) sagt beispielsweise aus, dass die beiden Probleme, eine Binärform neunter Ordnung als Summe von fünf neunten Potenzen, andererseits eine quaternäre kubische Form als Summe von fünf dritten Potenzen darzustellen, äquivalent sind: man kann das eine auf das andere vermöge invarianter Processe zurückführen.

Der zweite Satz***) zeigt abermals die Aequivalenz zweier Probleme der canonischen Potenzsummendarstellung von Formensystemen und der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers von Formensystemen.

Seien nämlich zwei apolare binäre Formengruppen vorgelegt, so entspricht **jeder Untergruppe** der einen, deren sämtliche Individuen als Summen derselben vollständigen Poten-

---

*) Für den Fall, dass die Ordnung der Urform eine Primzahl ist, führt man deren Polaren von einer zerlegbaren Ordnung ein. Im übrigen wird ein ausgedehnter Gebrauch vom „Princip des Projicirens" gemacht, bez. dessen man die grundlegende Arbeit von Veronese vergleiche: Math. Ann. XIX S. 161—234 (1882).

**) „Apolarität . . ." § 32.

***) l. c. § 34.

zen darstellbar sind, eine bestimmte Untergruppe der anderen, deren sämtliche Individuen ein und dieselbe Form als gemeinsamen Factor besitzen, und umgekehrt.

In neuerer Zeit sind auch die oben berührten „erweiterten Combinanten“ eines Systems binärer Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ in Betracht gezogen, welche also ausser der Variabeln λ noch eine (oder mehrere) Reihen von, mit den f, contragredienten Grössen u enthalten.

Es erweist sich dabei als zweckmässig, an Stelle der u variable Grössenreihen (x), (y), ... einzuführen, welche mit den f cogredient sind.

Die Gordan'sche erzeugende Combinante R (die Determinante der in verschiedenen Variabeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ geschriebenen f) ist nunmehr nach Brill*) um einige weitere zu vermehren, die dadurch hervorgehen, dass man successive eine, zwei, drei, ..., p Reihen der f ersetzt durch Variable (x), resp. (x), (y), resp. (x), (y), (z) etc.

Geometrisch dienen die erweiterten Combinanten zur Erkenntnis der invarianten Eigenschaften der durch die f repräsentirten einfachen Mannigfaltigkeit, innerhalb einer Mannigfaltigkeit von $p-1$ Dimensionen.

Eine der wichtigsten Aufgaben ist in diesem die projectivische Erzeugung der vorliegenden Mannigfaltigkeit der f durch solche von niedrigerer Ordnung. Algebraisch lautet dieselbe:

„Man soll $p-1$ Reihen von Formen der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ $(n = n_1+n_2+\cdots+n_{p-1})$ ermitteln, derart, dass die p vollständigen, aus den $p-1$ Reihen zu bildenden Determinanten mit p vorgelegten Formen f $n$ter Ordnung übereinstimmen.“

Der Referent**) hat diese Aufgabe mit Hülfe eines, später von Hilbert***) als allgemeingültig nachgewiesenen Postulates erledigt, indem er dieselbe als besonderen Fall der Teilbarkeitsaufgabe†) behandelte:

*) Siehe bei Gross, Dissertation, Tübingen 1887, oder im Auszug, Math. Ann. XXXII S. 136—150, Einleitung.

**) Math. Ann. XXX S. 30—74 (1887).

Wegen besonderer Fälle siehe Math. Ann. XXIX S. 447—467 (1887), XXXI S. 96—133 (1888).

***) Gött. N. 1889, bes. S. 30; Math. Ann. XXXVI, bes. S. 516 (1890).

Das gemeinte Postulat setzt die geforderte „Erzeugung“ als möglich voraus. Es sei also möglich, für ein gegebenes System von $d+1$ Formen $f(\lambda)$ $n$ter Ordnung, d Systeme von $d+1$ Formen $\varphi(\mu)$ von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d$ so zu bestimmen, dass einmal jede Summe von der Art $\Sigma f(\lambda)\varphi(\mu)$ durch $\lambda-\mu$ teilbar wird, und zugleich die Summe der ν gleich n wird.

Für den Fall $p=3$ war das gemeinte Postulat vom Referenten (l. c.) bewiesen worden.

†) Das Princip der Teilung geht in seiner einfachsten Fassung auf eine Arbeit von Brill zurück: Math. Ann. XXXVI S. 230—238 (1890), Abdruck

„Für eine ganze Function $F(\lambda, \mu)$ zweier nicht homogenen Variabeln das Kriterium dafür zu finden, dass F durch eine andere Function von λ, μ teilbar wird, welche eine der Variabeln nur zum ersten Grade enthält.“

Die Lösung geschieht mit Hülfe von Ueberschiebungs- und Polarenprocessen.

W. Stahl hat*) für eine Reihe von Fällen $r = 3$ und $r = 4$ eine directe Lösung der gemeinten Aufgabe durch explicite Determinantenformeln hergestellt.

II. D, c.

Resultanten und Discriminanten.

Unter den speciellen Invarianten verdienen, mit Rücksicht auf die zahlreichen Anwendungen, die Resultanten und Discriminanten eine besondere Berücksichtigung**).

Die Lehre von den Resultanten und Discriminanten algebraischer Formen kann hier freilich nur insoweit in Betracht kommen, als ihre invariante Natur auch formal***) in den Vordergrund tritt.

In dieser Hinsicht drängte die historische Entwickelung der Formentheorie zunächst zur Lösung der Aufgabe, für jene Bildungen in den einfachsten Fällen einen symbolischen Ausdruck herzustellen.

Für die Resultante einer binären Form f_n nter Ordnuug und einer binären, linearen f_1 bot das keine Schwierigkeit.

Ersetzt man die f_1 durch eine f_2, so gab Salmon†) eine Lösung mittels des Hyperdeterminantencalcüls in einer Weise, die auch die Möglichkeit einer Erweiterung auf höhere Fälle zuliess.

Clebsch††) ging hierin einen Schritt weiter, indem er auf Grund

(mit Zusätzen) aus den Münch. Ber. 1885. Die Darstellung der Endbildungen als Combinanten gehört dem Referenten an.

*) Math. Ann. XXXVIII S. 561—585 (1891), XL S. 1—54 (1892). Die Entwickelung beruht hier wesentlich auf dem S. 256 erwähnten Determinantensatze. Vgl. noch Schuhmacher, Math. Ann. XXXVIII S. 298—306 (1891), sowie Jolles, Habil. Schrift, Aachen 1886, 24 S.

**) Siehe die früheren Bemerkungen S. 85, 86, 92, 94, 150, 162, 184, 185.

***) Wir verzichten daher auch auf eine Ausführung der schönen Anwendungen, welche insbesondere die Discriminante in der Theorie der Differentialgleichungen und in der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen erfahren hat.

†) Siehe etwa Salmon-Fiedler, No. 309, 310.

††) Journ. f. Math. LVIII S. 273—291 (1861).

Vgl. die Darstellung bei Gordan, Journ. f. Math. LXXI S. 164—194 (1870). Clebsch hat weiterhin für die Teilbarkeit einer f_n durch eine f_2 ein Kriterium mittels einer identisch verschwindenden Covariante gegeben (Binäre Formen der Aronhold'schen Symbolik den Ausdruck für die Resultante einer f_n und f_2 so weit umgestaltete, dass seine reale Zurückführung auf eine Reihe von intermediären In- und Covarianten ausführbar wird.

Weniger durchsichtig gestaltet sich bei ihm die Verallgemeinerung auf mehrere Variable, wenn die Resultante von einer Form beliebiger Ordnung, einer quadratischen und einer Reihe linearer Formen gebildet werden soll.

Das Verfahren von Clebsch hat Gordan*) weitergeführt für die Resultante R von zwei beliebigen binären Formen f_m und f_n.

Zunächst gelingt es, in dem ausgezeichneten Falle $m = n$, durch Einführung der Symbole von den einzelnen „Elementarcovarianten" der Cayley-Bézout'schen Resultantenform, und vermöge des Princips der Reihenentwickelung, die Resultante durch alleinige Anwendung des Ueberschiebungsprocesses aus den gegebenen Formen abzuleiten. Darüber hinaus wird in gleichem Sinne die Covariante construirt, deren Coefficienten für $R = 0$ den Potenzen der gemeinsamen Wurzel von f_m und f_n gleich werden, sodann diejenige Covariante, deren identisches Verschwinden das Kriterium für eine gemeinsame Doppelwurzel abgiebt u. s. f.

Sind f_m und f_n von ungleicher Ordnung, so erscheint freilich die Resultante in ihrem symbolischen Aufbau als Quotient zweier verhältnismässig einfacher Bildungen. In jedem speciellen Falle ist indes die Division ausführbar, und es kommt ein dem obigen analoges Ergebnis.

Die ausgerechneten Beispiele umfassen alle Fälle, wo keine der Ordnungen m, n die Zahl Fünf überschreitet.

Für den Fall, wo n beliebig, $m = 3$ ist, hat Pascal**) die Resultante in symbolischer Gestalt fertig hingeschrieben, sodass auch einer realen Ueberführung in ein Aggregat von Ueberschiebungen keine wesentlichen Schwierigkeiten entgegenstehen.

S. 91). Siehe die Verallgemeinerung bei Igel, Wien. Ber. 1880, der die f_2 durch eine Form höherer Ordnung ersetzt.

*) Math. Ann. III S. 355—414 (1871).

In einer voraufgehenden Arbeit Gött. N. 1870 S. 427 u. flgde. hatte Gordan ein System von partiellen Differentialgleichungen für die Resultante R einer f_n und f_m $(n \geqq m)$ aufgestellt. Bezeichnet nämlich φ_μ $(\mu \leqq n)$ eine Simultancovariante von f_n und f_m, welche die gemeinsamen Factoren der letzteren beiden Formen ebenfalls besitzt, so wird die μte Ueberschiebung von φ mit der Evectante von R durch R teilbar. Daraus fliessen die gewünschten Gleichungen. Siehe oben S. 205, 222. Die Invarianten-Kriterien für die Existenz mehrerer gemeinsamer Wurzeln zweier Formen gleicher Ordnung hat für eine Reihe von Fällen Pascal in Gordan'schem Sinne ausgeführt: Napoli Rend. (2) II S. 402—409, Annali di Mat. (2) XVI S. 85—99. Vgl. auch Perrin, C. R. CVII S. 22—24 (1888). Wegen der Discriminanten siehe folg. S.

**) Batt. G. XXV S. 257—280 (1887).

Napoli Rend. (2) II S. 67—72 (1888).

Die allgemeine Lösung der bezeichneten Aufgabe scheint vorderhand unmöglich*) zu sein; man hat sich damit begnügt, in den untersten Fällen die invariante Darstellung der Resultante dahin zu vervollkommnen, dass nur Formen des bezüglichen vollen Systems zur Verwendung gelangen. Vgl. für $m = 3$, $n = 4$ Brioschi**); für $m = 4$, $n = 4$, und für $m = 5$, $n \leqq 5$ d'Ovidio***).

Noch weniger entwickelt ist eine entsprechende Darstellung der Discriminante. Für binäre Formen f_n verdankt man Gordan†) ein systematisches Verfahren, um die Discriminante durch fundamentale Invarianten auszudrücken: indessen steigern sich bei zunehmender Ordnung die Schwierigkeiten der (symbolischen) Rechnung derart, dass der Fall $n = 7$††) eben noch bewältigt werden konnte.

Liegt etwa eine f_7 vor, so liefert das Bézout-Cayley'sche Verfahren zur Bestimmung eines Doppelfactors $\alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ von f sechs homogene Gleichungen vom fünften Grade in den α. Durch geeignete Ueberschiebung der linken Seiten und darauffolgende Division mit α_x resultiren Gleichungen vom vierten Grade in den α. So fortfahrend gelangt man zu quadratischen Gleichungen, aus denen die Elimination der α möglich ist; die linke Seite der Resultante erweist sich direct als die gesuchte Discriminante.

*) Der combinatorisch-symbolischen Darstellung der Resultante von Schendel, Schlöm. Z. XXXII S. 46—55, 83—90 (1887), XXXIII S. 1—13, 65 bis 77 (1888), sowie der Mac Mahon'schen Darstellung mittels symmetrischer Functionen Quart. J. XXIII S. 139—143 (1888) kann wohl eine Bedeutung für die Invariantentheorie vorderhand nicht beigelegt werden.

**) Chelini Coll. M. 1881 S. 221—223.

***) Atti Tor. XV S. 385—389, 1880 ($m = 4$, $n = 4$).
Nap. Mem. XI, 1883 ($m = 5$, $n = 2, 3$).
Mem. Soc. It. d. Sc. IV (1888) oder Rom. Acc. L. Mem. (4) IV S. 607—622, 1888 ($m = 5$, $n = 2, 3, 4, 5$).

†) „Vorlesungen" II No. 99.
Durch fundamentale Invarianten waren vorher schon ausgedrückt:
die Discriminante einer f_4 durch Boole (1845), bei Cayley, Papers I S. 94;
die Discriminante einer f_5 durch Salmon (1854), Cambr. a. Dublin M. J. IX S. 32;
die Discriminante einer f_6 durch Brioschi (1867), Annali di Mat. (2) I S. 159.
Das letztere Ergebnis ist auf Gordan's Wege durch Maisano hergeleitet worden, Math. Ann. XXX S. 442—452 (1885).
Die Structur der binären Discriminanten (in ausgerechneter Form) haben untersucht: Joachimsthal, Journ. f. M. XXXIII S. 371—376 (1846), Cayley, ebda. XXXIV S. 30—45 (1847), Pasch, ebda. LXXIV S. 1—6 (1872), Bauer, Münch. Ber. 1886 S. 183—191. Eine entsprechende Untersuchung der binären und ternären Resultante findet sich bei Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1884), bes. S. 315 u. flgde.
Eine Darstellung der Resultante zweier binärer Formen n ter Ordnung als Determinante von $(n-1)^2$ Elementen, die mit der Theorie der Combinanten zusammenhängt, hat W. Stahl gegeben: Math. Ann. XXXV S. 395—400 (1889).

††) Math. Ann. XXXI S. 566—600 (1888).

Auf indirectem Wege hat Maisano*) den nächstfolgenden Fall $n = 8$ erledigt, indem er zunächst die specielle f_8 behandelt, welche Hesse'sche Covariante einer f_6 ist, und daraufhin für die Discriminante der allgemeinen f_8 einen analogen Aufbau nachweist.

Was die Bedingungen für einen mehrfachen Factor einer f_n betrifft, so ist neuerdings der Fall $n = 6$ durchgeführt worden. Die bezüglichen Covarianten, die dazu identisch verschwinden müssen, sind als Discriminanten von Polaren der Stammform von Maisano**) und d'Ovidio***) durch Systemformen ausgedrückt worden.

Für ternäre Gebilde ist nur Einzelnes zu erwähnen. Die Resultante dreier quadratischer Formen erscheint bei Gundelfinger****) und Mertens†) als ganze Function der zwei Fundamentalcombinanten.

Die Discriminante einer ternären Form C_n hat Gordan††) mit Hülfe einer schon bei Dersch auftretenden Covariante in Determinantenform als Function der Coefficienten hergestellt.

Wir wenden uns nunmehr zu einzelnen Eigenschaften der Resultanten und Discriminanten binärer Formen.

Diese Bildungen werden, als Functionen der Coefficienten, specifischen, partiellen Differentialgleichungen — neben den, für jede Invariante gültigen — genügen. Brioschi†††) hat zuerst je ein vollständiges System von linear unabhängigen Gleichungen derart aufgestellt, während Noether††††) nachwies, dass bereits eine einzige derselben, nach Belieben auswählbare, zur Charakterisirung jener Bildungen ausreicht.

Eine bemerkenswerte Anwendung von den Brioschi'schen Discriminantengleichungen hat Wiltheiss*†) gemacht, indem er die Differentialgleichung der hyperelliptischen Θ-Functionen in eine solche invariante Form umsetzte, dass sie geradezu durch geeignete lineare Combination von Brioschi's Gleichungen hervorgehen; die bezügliche binäre Form ist nichts anderes als der unter dem Integralzeichen auftretende Radicand.

---

*) Pal. Rend. III S. 53—59 (1889), IV S. 1—8 (1890).

**) Math. Ann. XXXI S. 493—506 (1888).

***) Torino Atti XXIV S. 164—176 (1888).

****) Journ. f. Math. LXXX S. 73—85 (1875).

†) Wien. Ber. XCIII S. 62—77 (1886).

††) Münch. Ber. XVII (1887).
Bezüglich des Falles $n = 4$ siehe bei Klein, Math. Ann. XXXVI, bes. S. 56.

†††) Journ. f. Math. LIII S. 372—376.
Die Resultante bezieht sich auf zwei binäre Formen gleicher Ordnung. Für Formen ungleicher Ordnung hat erst später Gordan die entsprechenden Differentialgleichungen aufgestellt, Gött. N. 1870 S. 427 u. flgde.

††††) Bruno-Walter's Binäre Formen, § 25.

*†) Math. Ann. XXXIII bes. S. 279 (1888).

Auf eine innige Wechselbeziehung zwischen Resultanten und Discriminanten zu einander und unter sich hat zuerst Gordan*) hingewiesen. Einfache Rechnung ergab, dass die Resultanten gewisser, hervorragender Covarianten einer Stammform f die Discriminante der letzteren als Factor enthielten. Den wahren Grund dieser Erscheinung hat Kohn**) in jüngster Zeit aufgedeckt. Führt man nämlich die Wurzeln einer ausgezeichneten, von Hermite stammenden typischen Darstellungsform von f als selbständige Grössen ein, so gelangt man fast unmittelbar zu dem Satze, dass alle Covarianten von f, deren Gewichte jeweils unter einer gewissen Grenze liegen, die Eigenschaft besitzen, dass ihre Resultanten mit f, resp. ihre Discriminanten die Discriminante von f in einer gewissen Potenz als Factor aufweisen.

Entsprechende Sätze gelten für Systeme von Stammformen.

Für eine binäre Form f ungerader Ordnung $n = 2l + 1$ hat Referent***) eine geschlossene Reihe von Covarianten $f, f_1, f_2, \ldots, f_l$ aufgestellt, deren Discriminanten, abgesehen von der ersten und letzten, in zwei Factoren zerfallen und derart kettenförmig mit einander verknüpft sind, dass je zwei aufeinander folgende einen Factor gemein haben.

Für gewisse particuläre Systeme von binären Formen ist der Connex zwischen ihren Resultanten und Discriminanten noch genauer untersucht worden. Es sind das diejenigen, welche, gleich Null gesetzt, die (Ordnungs-) Singularitäten einer rationalen Curve der Ebene oder des Raumes bestimmen.

Die Resultanten und Discriminanten jener Formen zerfallen, wie das geometrische Ueberlegungen nahe legen, jeweils in eine Anzahl irreducibler Factoren, und haben die letzteren, wenn auch in verschiedener Vielfachheit, zum Teil mit einander gemein. Für die Ebene und ein gewisses canonisches Gleichungssystem hat Brill†), für Ebene und Raum allgemein hat††) Referent die bezüglichen Zerlegungen vollständig ausgeführt.

*) Math. Ann. III S. 169—171 (1871).

**) Wien. Ber. Juli 1891, 29 S., Oct. 1891, 5 S. Siehe auch S. 157.

***) Gött. N. 1891 S. 279—286.

†) Math. Ann. XVI S. 345—408, bes. S. 388. Vgl. auch Math. Ann. XII S. 90—122 (1877).

††) Für die Ebene in Gött. N. 1888 S. 74—77, Math. Ann. XXXVIII S. 369—404 (1891); für den Raum in Gött. N. 1890, Juli, 10 S., 1890 Dez., S. 493—501, 1891 Jan., S. 1—12.

Im Gebiete der algebraischen Functionen einer Variabeln existirt eine ähnliche Erscheinung. Die „Discriminante" einer Form $C(1, s, z)$, d. i. die Resultante von C und $\frac{\partial C}{\partial s}$, zerfällt in zwei rationale Factoren, deren einer die Verzweigungen von $C = 0$, während der andere die Singularitäten von $C = 0$ liefert (Kronecker, Journ. f. Math. XCI S. 331—334, 1881). Vgl. die projectivische Verallgemeinerung bei Noether, Math. Ann. XXIII S. 311—358 (1884).

Im besonderen zerfällt dabei die Discriminante der Functionaldeterminante von drei oder vier binären Formen gleicher Ordnung in zwei Factoren, ein Ergebnis, welches Brill*) schon vorher auf eine beliebige Anzahl solcher Formen ausgedehnt hatte.

Die Kenntnis einer anderen, hierher gehörigen Reducibilitätserscheinung verdankt man Cayley**). Bildet man die Discriminante eines binären Formenbüschels $k_1 f + k_2 \varphi$, und von dieser, welche eine Form der Variabeln k_1, k_2 ist, abermals die Discriminante, so zerfällt die letztere in ein Product von der Gestalt AB^2C^3, wo das Verschwinden der Invarianten A, B, C eine leicht ersichtliche Bedeutung für das vorgelegte Büschel besitzt.

Im Gebiete von mehreren Variabeln existirt in dieser Richtung ein Satz von Brill***). Eliminirt man aus n Gleichungen $f_i = 0$ in n (nicht homogenen) Veränderlichen $n-1$ der letzteren: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, so wird die Resultante der f eine binäre Form der übrig bleibenden x_n. Die bez. x_n gebildete Discriminante derselben ist durch die Resultante aus den f und ihrer Functionaldeterminante teilbar.

Wir erwähnen noch eine anderweitige fundamentale Eigenschaft der Discriminante D einer Form F. Es lässt sich erwarten, dass auch alle Ausartungen von F allein aus dem Verhalten von D erschlossen werden können. Für binäre Formen F hat Hilbert†) die bezügliche Frage mittels Potenzreihenentwickelung von D in allgemeinster Weise erledigt. Verschwindet für ein gewisses Wertsystem der Coefficienten a_i von F_n nicht nur die Form $D(a_i)$, sondern auch ihre sämtlichen ersten $n-k-1$ Polaren identisch, so zerfällt die nächstfolgende, $(n-k)$te Polare in $n-k$ lineare Factoren. Existiren unter diesen etwa je $\mu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gleiche, so zerfällt auch die Stammform F derart, dass ihre Linearfactoren zu je μ_i vereinigt sind, und umgekehrt.

Für eine specielle Gattung von Polaren, die sogenannten „Evectanten“, ist dieses Ergebnis schon weit früher von Sylvester††) abgeleitet worden.

Die Hilbert'sche Methode erlaubt indessen, darüber hinaus, alle Singularitäten des Gebildes $D(a_i) = 0$ der Form und Anzahl nach anzugeben.

---

*) Math. Ann. XX bes. S. 336 u. flgde. (1882).

**) Siehe Russell, Quart. J. XXI S. 373—375 (1886).
Hilbert, Math. Ann. XXXI S. 482—492 (1888).

***) Gött. N. 1892 S. 89—92.

†) Math. Ann. XXX S. 437—441 (1887). Als eine besondere Anwendung erscheint die Verallgemeinerung eines Satzes über Identitäten zwischen gleich hohen Potenzen binärer Formen, welchen der Referent in „Apolarität“ S. 350 u. folgde. aufgestellt hatte.

††) Phil. Mag. (4) III 1852.

Wir beschliessen diesen Abschnitt, indem wir noch einiger Fortschritte in der Fassung des Resultanten- (und Discriminanten-) Begriffs gedenken, obschon denselben zur Zeit noch die Ausführung im invariantentheoretischen Sinne mangelt.

Bis auf die neueste Zeit ist die Resultante einer Reihe von n Formen F_i als die linke Seite der (von überflüssigen Factoren befreit gedachten) Gleichung formulirt worden, die durch Elimination der $n-1$ Variabeln hervorgeht.

Allerdings hat schon Bézout thatsächlich die Resultante dadurch gebildet, dass er mit Hülfe geeigneter polynômes multiplicateurs*) die Formen F_i derart linear combinirte, dass sich der entstehende Ausdruck auf eine Constante, eben die Resultante, reducirt.

Indessen gebührt Mertens**) das Verdienst, durch Umkehrung dieses Verfahrens den Begriff der Resultante vom Processe der Elimination losgelöst zu haben: unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen $F_i = 0$ kein Lösungssystem gemein haben, wird nachgewiesen, dass eine lineare Combination der F von vorgegebenem Grade in den Coefficienten der F existirt, die von den Variabeln nicht mehr abhängt.

Auf der anderen Seite hat man, den einfachsten Ausartungen der Grundformen F entsprechend, den Begriff der „reducirten" Resultante R' eingeführt. Besitzen nämlich die Gleichungen $F_i = 0$ bereits eine Anzahl von gemeinsamen Lösungssystemen, so giebt es immer noch eine ganze Function R' der Coefficienten, deren Verschwinden das Kriterium dafür abgiebt, dass jene Gleichungen noch eine weitere Lösung zulassen.

Cayley***) hat wohl zuerst ein derartiges Beispiel construirt, Perrin†) und Brill††) haben allgemeinere Untersuchungen darüber angestellt.

Perrin legt das Princip zu Grunde, die ursprüngliche Resultante R als Function der von den Variabeln freien Glieder der F aufzufassen, und gelangt so zu einer ausartungsfähigen Darstellung von R als ganzer

---

*) Die Bézout'sche Methode ist von End ausgedehnt worden auf Functionen von drei Variabeln, welche ausser für eine endliche Anzahl von Wertsystemen der Variabeln noch für ein einfach unendliches Wertsystem derselben verschwinden. (Dissert. Tübingen, 1888 oder im Auszuge: Math. Ann. XXXV S. 82—90, 1889.)

**) Wien. Ber. XCVII S. 618—621 (1888). Für binäre Formen findet sich eine entsprechende Behandlung der Resultante bereits bei Kronecker, Berl. Ber. 1881 S. 535—600.

***) Quart. J. XI S. 211—213 (1871). Vgl. auch Journ. f. Mat. XXXIV S. 30—45 (1847).

†) C. R. CVI S. 1789—1791; CVII S. 22—24, 219—221 (1888).

††) Math. Ann. IV S. 510—526, 527—549 (1871), Münch. Abh. XVII S. 91 bis 101.

Function der F, deren Coefficienten dann aber nicht mehr von den Variabeln abhängen.

Durch Combinirung des genannten Princips mit dem Poisson'schen Eliminationsverfahren gelingt es Brill*), die Frage zu einem algebraisch befriedigenden Abschluss zu bringen, sodass die reducirte Resultante explicite als gemeinsamer Factor gewisser Glieder einer Entwickelung erscheint, welche durch einen übersichtlichen Algorithmus berechnet werden können.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass auch die Theorie der Combinanten und der Apolarität mit Vorteil zum Zwecke von Resultantenbildungen bei complicirteren Fällen verwendet worden ist**).

II. D, d.
Weitere specielle Formen***).

II. D, d, α. Formen mit verschwindender Hesse'scher†) Determinante.

Eine der wichtigsten Fragen der Formentheorie ist die nach einem Kriterium, welches zu entscheiden gestattet, wann eine vorgelegte Form

---

*) l. c. Brill hat auch eine Verallgemeinerung anderer Art angegeben, indem er den Begriff der Resultante auf zwei Potenzreihen ausdehnte (Math. Ann. XXXIX S. 129—141, bes. 138, 1891), während O. Schlesinger schon vorher Resultanten und Discriminanten von θ-Functionen in Betracht gezogen hatte (Math. Ann. XXXII S. 411—443, 1889).

**) Stephanos, Thèse pour le doctorat. 1883. Referent: Gött. N. 1890 No. 10, Math. Ann. XXXVIII S. 369—404, bes. § VIII (1891), Verhandl. der Bremer Naturforscherversammlung 1891 S. 9—11. Geometrisch gesprochen ist dies Verfahren mit gewissen Projectionen äquivalent.

***) Aus der ausgedehnten Reihe weiterer specieller Formen sind im folgenden noch zwei Klassen herausgegriffen, welche von weiterem Interesse sind, und wir verweisen im übrigen auf eine Reihe von Notizen am Schlusse dieses Abschnittes II. D, d.

†) Zwei andere Eigenschaften der Hesse'schen Determinante H seien hier noch kurzweg erwähnt. Voss hat allgemein nachgewiesen, dass bei kubischen Formen F von n Veränderlichen die Hesse'sche Form von H eine lineare Combination von der Urform F und von H ist (Math. Ann. XXVII S. 515—536 (1886). Für $n = 4$ war der Satz vorher von Bauer bewiesen (Münch. Abh. 1883 S. 1—14) und auf die Geometrie der Flächen 3. Ordnung angewandt worden.
Andererseits hat Brill, behufs Untersuchung der Hesse'schen Curve $H = 0$ in singulären Punkten einer Grundcurve $C = 0$ die Form H aus gewissen binären Covarianten aufgebaut Math. Ann. XIII S. 175—182 (1878), nach einem Principe, welches Forsyth später weiter ausgeführt hat (siehe oben S. 158).
Die nämliche geometrische Aufgabe hat dann Wölffing veranlasst, die Form H einer ganzen Function ternärer Formen aus einfachsten Simultancovarianten der letzteren herzustellen: Dissert. Tübingen 1890, oder Math. Ann. XXXVI S. 97—120. Vgl. auch Gerbaldi, Pal. Rend. III S. 60—66 (1889).

F von n Variabeln vermöge linearer Substitution in eine solche von weniger Variabeln übergeführt werden kann, und, wenn dies der Fall ist, die bezüglichen Substitutionen wirklich zu ermitteln.

Die allgemeine Erledigung dieses Problems verdankt man*) Gordan und Noether, welche damit zugleich einen Satz von Hesse**) rectificirten, dem zufolge das besagte Kriterium durch das identische Verschwinden der nach ihm benannten Covariante H, der Functionaldeterminante der ersten Polaren von F, ausgedrückt sei.

Es ergab sich, dass der von Hesse aufgestellte Satz nicht allgemein gültig ist, sondern nur für die binären, ternären und quaternären, sowie die allgemeinen quadratischen Formen, während bereits im Gebiete von fünf homogenen Variabeln ganze Klassen von Formen existiren, deren H identisch verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden.

Die Untersuchung von Gordan und Noether basirt auf einer linearen partiellen Differentialgleichung, welcher F und deren Polaren genügen, und deren Coefficienten selbst wieder von einem System partieller Differentialgleichungen abhängen.

Aus der Zahl der Lösungen dieses Systems sind diejenigen auszuscheiden, welche ganze Functionen der Variabeln sind.

---

*) Gordan, Erl. Ber. 1876 S. 89—95; Noether, Erl. Ber. 1876 S. 51—56, Gordan und Noether Math. Ann. X S. 547—568 (1876). Das Hauptmoment des Beweises befindet sich in der letzteren Arbeit auf S. 561.

Für die ternären kubischen und quaternären kubischen Formen war der fragliche Satz von Pasch auf dem Wege von Determinantenrelationen als richtig nachgewiesen worden, Journ. f. Math. LXXX S. 169—176 (1875).

In der erstgenannten Note von Gordan sind durch Betrachtung der Hesse'schen Determinante einer reducibeln Form in Bezug auf deren Factoren, und der zwischen den Polaren bestehenden Relation die ternären Formen überhaupt erledigt.

Man kann ganze Klassen von Formen f in $r (> 4)$ Variabeln, für welche der Hesse'sche Satz nicht mehr gilt, nach Gordan und Noether folgendermassen angeben.

Man bilde sich $r-s \left(s < \frac{r}{2}\right)$ Formen $P_1, P_2, \ldots, P_{r-s}$ von s Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_s$, und setze aus ihnen eine neue Form

$$Q = x_{s+1} P_1 + x_{s+2} P_2 + \ldots + x_r P_{r-s}$$

zusammen. Dann sind die gesuchten Formen f dargestellt in der Gestalt

$$f = \varphi(Q, x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

wo φ in den $x_1, x_2, \ldots, x_s$ homogen zu sein hat (l. c. S. 564).

Insbesondere erhält man sämtliche, den Hesse'schen Satz nicht erfüllenden quinären Formen, in der canonischen Gestalt:

$$f = \varphi(x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_3, x_1, x_2),$$

wo die P binäre Formen gleicher Ordnung der x_1, x_2 sind.

**) Journ. f. Math. XLII S. 117—124 (1851), LVI S. 263—269 (1859).

Es geschieht dies, indem die letzteren „uneigentlich“ rational transformirt werden, d. i. derart, dass die Determinante der Transformation nebst einer Reihe ihrer Minoren identisch verschwindet.

II. D, d, β.

Specielle Formen, deren Natur durch algebraische Differentialgleichungen charakterisirt ist*).

Da die Ueberschiebung zweier Formen durch einen Differentiationsprocess ersetzt werden kann, alle invarianten Bildungen aber auf Ueberschiebungen zurückkommen, so ist theoretisch klar, dass, wenn die invariantive Ausartung einer Form oder eines Formensystems durch das Verschwinden von Invarianten oder das identische Verschwinden von Covarianten festgelegt ist, die Form selbst einer oder mehreren algebraischen Differentialgleichungen zu genügen hat, deren Herstellung freilich in praxi auf dem angedeuteten Wege auf grosse rechnerische Schwierigkeiten stösst.

Noch weit schwieriger aber würden sich so umgekehrt, wenn derartige Differentialgleichungen für specielle Formen gegeben vorliegen, daraus die äquivalenten Invariantenkriterien gewinnen lassen.

Für das vorliegende Problem wird daher ein Satz von Bedeutung**), den Bruno zunächst für binäre Formen bewiesen, der sich aber nach Hilbert und Perrin leicht auf höhere Formen ausdehnen lässt, ein Satz, der jene gegenseitige Ueberführung zu leisten im Stande ist.

Ist nämlich $f(x) = f_0$ eine binäre Form in der nicht homogenen Variabeln x:

$$f_0 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

und bedeuten $f_1, f_2, \ldots$ die mit einfachen Zahlenfactoren dividirten Ableitungen von f nach x:

$$f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f''(x) \text{ etc.,}$$

so lässt sich jede Covariante von f_0 unmittelbar dadurch aus ihrem Leitgliede (Quelle) gewinnen, dass man die a_i durch die f_i ersetzt.

Daraus folgt sofort, dass jede homogene und isobare Function F der f_i eine Covariante von f(x) ist, welche der einen Quellengleichung

---

*) Vgl. die früheren Bemerkungen auf S. 209 unten.

**) Siehe S. 210.

genügt:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \cdots = 0.$$

Mit diesem Hülfsmittel hat Hilbert*) gezeigt, wie man z. B. die Kugel-

---

*) Dissert., Königsberg 1885, Math. Ann. XXX S. 15—29 (1887).

Bezüglich anderweitiger specieller Formen und Substitutionsgruppen, soweit sie nicht schon im Texte berücksichtigt worden sind, sei noch Folgendes erwähnt.

Die einfachsten Formen des binären, ternären und quaternären Gebietes sind, mit besonderer Rücksicht auf geometrische Interpretation, auf Trägern erster und zweiter Ordnung, systematisch von Battaglini studirt worden.
Binäre Formen der ersten vier Ordnungen: Rend. Acc. Napoli 1864, 1865, 1866.
Binäre Formen der fünften Ordnung: Batt. G. XIV S. 54—66 (1876).
Binäre Formen von beliebiger Ordnung: Batt. G. IX S. 1—18, 78—86 (1871).
(Eine Anwendung der binären quadratischen Formen auf die Transformation des elliptischen Differentiales findet sich Rom. Acc. L. (4) I S. 653—657 (1885), Batt. G. XXIV S. 128—140 (1886)).

Binäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. (4) I S. 691—699 (1885), Batt. G. XXV S. 281—297 (1887). (Diese Formen sind auch eingehend, mit Anwendungen auf die Drehungen des Raumes um einen festen Punkt, von Stéphanos behandelt worden, Math. Ann. XXV S. 299—368, 1883.)
Ternäre Formen zweiter Ordnung: Atti di Napoli III 1867. 2 Abhdl. Batt. G. VIII S. 38—59, 129—156 (1870).
Ternäre Formen dritter Ordnung: Chelini, Coll. Math. S. 27—51 (1881)). (Combinanten der Form und ihrer Hesse'schen in binärer Behandlung.)
Ternäre Formen beliebiger Ordnung: Batt. G. X S. 152—169, 193—205 (1872).
Ternäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. Mem. IX (1880); Acc. L. (3) V S. 24 bis 26 (1881); Batt. G. XXI S. 50—68 (1883).
Ternäre Connexe erster Ordnung und erster Klasse: Atti di Napoli IX 1880, Nap. Rend. XIX S. 110—112 (1881).
Ternäre Connexe zweiter Ordnung und zweiter Klasse: Atti di Napoli VIII 1879, Nap. Rend. XIX S. 316—328 (1881).
Quaternäre bilineare Formen: Rom. Acc. L. Mem. XII 1882, Acc. L. (3) VI S. 40—42 (1882), Batt. G. XXI S. 293—323 (1883).

Wir erwähnen noch Einiges über die kubischen ternären Formen C_3 (siehe S. 152). Poincaré hat die algebraische (und hierauf gestützt die arithmetische) Aequivalenz dieser Formen (und auch der kubischen quaternären) vollständig erledigt (Ec. Pol. L S. 199—253, LI S. 45—91, 1883). Je nach dem Verhalten der beiden Invarianten S und T werden die C_3 in sieben Klassen eingeteilt, und für eine jede die Substitutionen aufgestellt, welche die Form in sich überführen. Hierauf gründet sich die Aequivalenz zweier Formen C_3 und C'_3, die noch besonders für den Fall reeller Coefficienten und Substitutionen discutirt wird.

In einer späteren Arbeit (Ec. Pol. LVI S. 79—142, 1886) werden auch die zerfallenden C_3 einer analogen Behandlung unterzogen.

Gundelfinger hatte schon vorher nachgewiesen, wie sich alle Ausartungen einer C_3 invariantentheoretisch charakterisiren lassen (Math. Ann. IV S. 561 bis 572, 1871, Annali di Mat. (2) V S. 223—236, 1872, vgl. Gordan, Math. Ann. III S. 631—632, 1871): seine Resultate sind für den Fall, dass die C_3 in drei Linearfactoren zerfällt, von Brioschi (Annali di Mat. (2) VII S. 189—192, 1875) und Thaer (Math. Ann. XIV S. 545—556, 1875) vereinfacht worden.

Brioschi hat in Annali di Mat. (2) VII S. 52—60 (1875) den Parallelismus functionen, und allgemeiner diejenigen hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, welche ganze rationale Functionen in x sind, invariantentheoretisch beherrscht. Soll F eine binäre Form f von x werden, so ist α (resp. β) gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$ anzunehmen: n wird dann die Ordnung von f.

Versteht man nun unter φ und ψ die kubische bez. lineare, homogen

---

zwischen einer C_3 und f_4 verfolgt; vgl. damit Hilbert, Journ. de Math. (4) IV S. 249—256 (1888), wo der innere Grund deutlicher hervortritt.

Brioschi macht davon eine interessante Anwendung auf die vorher von Cayley (Quart. J. XIII S. 211—216, 1874) studirte Transformation dritter Ordnung der zu f_4 oder C_3 gehörigen elliptischen Functionen.

Dingeldey hat eine einfache Transformation einer C_3 mit verschwindender Discriminante auf eine canonische Form angegeben (Math. Ann. XXX S. 177—182, 1888); Gross hat die Erzeugung solcher C_3 studirt (siehe S. 262).

Harnack hat die, mit gewissen Zwischenformen der C_3 nach Clebsch verknüpften Differentialgleichungen untersucht (Math. Ann. IX S. 218—240, 1875).

Zur Kenntnis einzelner invarianter Bildungen einer C_3 haben noch Beiträge geleistet Bonsdorff, Helsingfors (1876); Gerbaldi, Atti Tor. XV S. 707—714 (1880); Maisano, Pal. Rend. IV S. 153—158 (1890) u. a.

Wegen der geometrischen Bedeutung der wichtigsten der zu einer C_3 gehörigen Bildungen sei auf Clebsch-Lindemann I. Band 2. Teil, erste Abteil. verwiesen, wo man auch weitere Litteratur nachsehen möge.

Die einfachsten invarianten Bildungen einer kubischen quaternären Form nebst geometrischer Interpretation finden sich in Salmon-Fiedler's Raumgeometrie. V Kap. Art. 317—324.

Bezüglich specieller Substitutionsgruppen (siehe I. A und II. D, a) haben wir zu den an ersterer Stelle gemachten Bemerkungen über orthogonale Gruppen noch einige Zusätze zu machen.

Prym hat die von Cayley (siehe S. 89) gegebene rationale Darstellung für die Coefficienten einer allgemeinen orthogonalen Substitution nter Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ von einander unabhängige Parameter auf die involutorischen Substitutionen ausgedehnt (Gött. Abh. 1892, 42 S.). Die „charakteristische" Gleichung hat dann nur Wurzeln $+1$ und -1. Ist m die Anzahl der ersteren, so beträgt die Anzahl der Parameter 2mn. Es wird eine explicite Formel für die Gesamtheit der zu einer Zahl m gehörigen involutorischen, und im besondern der orthogonal-involutorischen Coefficientensysteme abgeleitet. (Wegen der letzteren vgl. man die auf S. 114*) citirten Arbeiten von Lipschitz und Kronecker.) Eine andere Herleitung und Formulirung der gemeinten Ergebnisse rührt von Cornely her (Dissert. Würzburg, ersch. Göttingen 1892), der übrigens zeigt, wie sich der Uebergang von seinen Formeln zu denen Prym's bewerkstelligen lässt.

Hofmann hat versucht, eine allgemeine Parameterdarstellung der Substitutionen involutorischen Charakters zu geben, welche eine ganze Function zweiten resp. dritten Grades in sich selbst transformiren, Hoppe. Arch. (2) VIII S. 225—268 (1889).

Mit rein geometrischen Mitteln hat H. Wiener allgemein Gruppen involutorischer Verwandtschaften („Spiegelungen") studirt: Leipz. Ber. 1890 S. 13 bis 23, 71—87, 245—267; 1891 S. 424—447.

Auf die Theorien einzelner Involutionen, wie sie mit geometrischen Mitteln Bertini, Weyr u. a. untersucht haben, kann hier nicht eingegangen werden. Das Gleiche gilt von den geometrischen Interpretationen binärer Formen auf rationalen Trägern, bezüglich deren bereits eine umfangreiche Litteratur existirt.

geschriebene Form:

$$\varphi = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \quad \psi = \frac{3\gamma + 2(n-1)}{3(n-1)} x_1 + \frac{3\beta + n - 1}{3(n-1)} x_2,$$

so setzt sich die lineare Differentialgleichung für F ohne weiteres um in die Ueberschiebungsgleichung:

$$(\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0$$

und vice versa.

Die Kenntnis der Formen φ und ψ lehrt auch sofort die linearen Transformationen finden, welche f in die Gestalt der hypergeometrischen Reihe F bringen. Es sind das genau diejenigen sechs Transformationen, vermöge deren die kubische Form φ den obigen canonischen Typus annimmt.

Durch eine eingehendere Untersuchung lassen sich aber auch die Hülfsformen φ, ψ eliminiren. Es ergiebt sich so, dass zur Charakterisirung der speciellen Form das identische Verschwinden einer gewissen Covariante Γ notwendig und hinreichend ist, die sich ihrerseits in einfachster Weise durch vier bekannte Grundcovarianten darstellen lässt.

Anhang.

II. D, e.

Realitätsfragen.

Es existiren mannigfache, wenn auch ihrem Wesen nach sehr verschiedene Anwendungen der Invarianten, im besondern der binären, auf Realitätseigenschaften von algebraischen Gleichungen und Gleichungssystemen.

Der älteren Periode gehören die klassischen Untersuchungen*) von Hermite und Sylvester an, in denen sämtliche Realitätsunterschiede, welche die Wurzeln einer Gleichung 5. Ordnung darbieten können, durch Invariantenkriterien charakterisirt werden.

Vorher hatte schon Cayley den Fall der Gleichungen 3. und 4.**) Ordnung erledigt.

*) Siehe S. 93. Vgl. insbes. noch Hermite, C. R. 1853 I, Jacobi 1847, siehe J. für Math. LIII S. 275—280, Sylvester, Phil. Trans. of L. 1864 S. 579 bis 666, und Cayley VIII Mem. ebda. 1867 S. 513—554.

**) Eine hier gebliebene Lücke hat Noether ausgefüllt, indem er nachweist, wie sich auch die beiden Fälle von vier complexen und vier reellen Wurzeln durch Invariantenkriterien genau von einander trennen lassen (Bruno-Walter, Binäre Formen § 20).

Die auf S. 280 Anm. *) zu erwähnenden Modelle von Rohn stellen sämtliche Realitätskriterien bez. der Wurzeln einer Gleichung 4. Ordnung anschaulich dar.

Das Sylvester-Jacobi'sche Trägheitsgesetz*) der quadratischen Formen ist gleichfalls schon früher erwähnt worden.

Zu Beginn der neueren Periode tritt Schramm**) mit zwei merkwürdigen Arbeiten hervor. Die alte, durch Sturm vollständig beantwortete Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung zwischen gegebenen Grenzen tritt hier, vom Standpunkt der Formentheorie aus, in ein neues Stadium. Die Sturm'schen Functionen, auf deren Zeichenwechsel es ankommt, werden mit gleichem Erfolge ersetzt einmal durch eine Reihe von Covarianten, das anderemal durch eine solche von Invarianten.

Im besonderen ergiebt sich der Satz, dass, wenn alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f = 0$ reell sind, diejenigen der gleich Null gesetzten Hesse'schen Covariante imaginär ausfallen und umgekehrt.

Sylvester***) hat den letzteren Satz auf andere Art bewiesen, und zugleich auf alle Covarianten zweiten Grades (in den Coefficienten von f) ausgedehnt.

Andererseits gelang es Laguerre†), die bekannten Processe behufs Separation und Approximation der reellen Wurzeln, unter Einführung invariantentheoretischer Hülfsmittel (der Hesse'schen Covariante u. a.), wesentlich zu verallgemeinern.

In jüngster Zeit hat der Referent††) eine Art Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen $f_{2n+1} = 0$ von ungeradem Grade aufgestellt.

Es existirt eine geschlossene Reihe von Covarianten $f_1, f_2, \ldots, f_n$, derart, dass das System dieser $n+1$ Gleichungen $f = 0$, von Uebergangsfällen abgesehen, eine von der Wahl der Coefficienten unabhängige Anzahl von reellen Wurzeln besitzt.

Wir erwähnen noch kurz einiger Realitätseigenschaften particulärer algebraischer Gebilde, die ihren Ursprung aus geometrischen Fragestellungen genommen haben.

) Siehe S. 87. Zum Abschnitt I. A sei noch erwähnt, dass sich besonders Weierstrass (S. 108)), Sylvester (S. 112*)), Lipschitz (S. 114*)), Stickelberger (S. 115*)) und Voss (S. 115***)) mit der reellen Transformation reeller bilinearer resp. quadratischer Formen beschäftigt haben.

**) Annali di Mat. (2) I S. 259—279 (1867), III S. 41—55 (1869).

***) Journ. f. Math. LXXXVII S. 217—219 (1879).

Bezüglich der Hesse'schen Covariante vgl. noch Gerbaldi, Pal. Rend. III S. 22—26, Schoute ebda. S. 160—164 (1889).

†) Laguerre hat seine diesbezüglichen, in den C. R. von 1879, 1880, 1881, 1882 mitgeteilten Untersuchungen zusammengefasst in der Abhandlung Journ. de Math. (3) IX S. 99—147 (1883).

††) Gött. N. 1891 S. 272—286.

Derartige Ergebnisse stellen sich unter anderm immer dann mit Notwendigkeit ein, wenn man den Bereich der Variabeln einer Form systematisch in das complexe Gebiet verlegt.

Dahin gehört also vor allem die Interpretation der complexen Variabeln $z = x + iy$ auf der Kugeloberfläche, wie sie nach Klein*) auf Grund der Thatsache eingeführt ist, dass die lineare Transformation von z ihren Ausdruck in der projectivischen Massgeometrie auf der Kugel findet.

Stellt man nun die Gruppe der linearen Transformationen von z auf, welche einen regulären Körper mit sich zur Deckung bringen, und unterwirft denselben einen beliebigen Punkt z der Kugel, so ist leicht zu erkennen, welche von diesen Werten z reell sind; im Falle des Ikosaeders hat man z. B. stets vier solche**).

Wedekind hat in diesem Sinne das Doppelverhältnis von vier Punkten auf der Kugel studirt: es ergiebt sich wiederum, dass dasselbe nur dann reell sein kann, wenn die vier Punkte zugleich in einer Ebene liegen***).

Von besonderer Wichtigkeit für die Geometrie der ebenen oder räumlichen Curven sind die (binären) Gleichungen, von denen die singulären Stellen der Curven abhängen.

Indem Brill†) die Discriminante von solchen Gleichungen in ihre irreducibeln Factoren spaltete und, je nachdem die Vielfachheit der letzteren eine gerade oder ungerade ist, die Realitätsveränderungen der Wurzeln bei einem Durchgange der Discriminante durch Null angab, gelang es ihm, auf rein algebraischem Wege die Richtigkeit einer gewissen Relation zwischen Singularitätenanzahlen darzuthun, welche Klein††) zuvor vermöge geometrischer Anschauungsmittel gefunden hatte.

---

*) Siehe etwa Klein's Erlanger Programm (1872). Neuerdings haben Segre und Juel systematisch die projectivischen Eigenschaften der einfachsten Gebilde in Ebene und Raum unter der Voraussetzung untersucht, dass sowohl die Coordinaten der Punkte, wie die Coefficienten der Substitutionen complexe Grössen sind. Segre, Atti di Torino XXV (1890, Jan., 28 S., März, 30 S., April, 23 S., Nov., 40 S.), Math. Ann. XL S. 413—467 (1892); Juel, Acta Math. XIV S. 1—30 (1890).

**) Math. Ann. IX S. 183—208 (1875).

***) Math. Ann. IX S. 209—217 (1875).

†) Math. Ann. XVI S. 345—408, insbes. § 7.

††) Math. Ann. X S. 199—209 (1876). Vorher hatte schon Zeuthen die Realitätsverhältnisse der 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung, sowie ihrer 24 Wendetangenten eingehend untersucht (Math. Ann. VII S. 410—432, 1874). Insbesondere ergiebt sich als Maximalanzahl der reellen Wendungen Acht.

Eine Realitätsbetrachtung anderer Art bezieht sich auf die Anzahl der reellen Züge einer algebraischen Curve $n$ter Ordnung. Für die Ebene hat Harnack gezeigt (Math. Ann. X S. 189—198, 1876), dass jene Anzahl höchstens

Eine entsprechend ausgeführte Ausdehnung auf Raumcurven rührt vom Referenten*) her.

II. D, f. Ueber eine Anwendung der Formentheorie auf die Zusammensetzung endlicher continuirlicher Transformationsgruppen.

Die Invariantentheorie bietet, wie Lie wiederholt hervorgehoben hat, die mannigfaltigsten Beziehungen zur Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Einen typischen Fall dieser Art hat Engel**) untersucht. Es handelt sich dabei um die Bestimmung aller „Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen".

Eine solche ist bekanntlich definirt durch die Relationen:

$$(X_i X_k) = X_i(X_k f) - X_k(X_i f) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f,$$

wo die Constanten c ausschliesslich den Bedingungen zu genügen haben:

$$c_{iks} = -c_{kis}, \quad C_{ikjs} \equiv \sum_1^r {}^\nu (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0$$
$$(i, k, j, s = 1, \ldots, r).$$

Die $X_s = X_s f$ sind die (linear unabhängigen) infinitesimalen Transformationen der Gruppe, die beliebig linear transformirt werden können, ohne deren Zusammensetzung zu ändern.

---

gleich $p+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ist, und dass dieses Maximum reeller Züge auch realisirt werden kann. Hilbert hat nachgewiesen, dass bei Raumcurven jene Zahl zu ersetzen ist durch $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ resp. $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und dass wiederum Curven mit soviel Zügen existiren. (Math. Ann. XXXVIII S. 115—138, 1891).

Klein hat in seinen neuesten Vorlesungen (Sommersemester 1892) über Riemann'sche Flächen die Realität der sog. „Symmetrielinien" verfolgt.

Weitere Sätze über Zahl und Anordnung der reellen Züge ebener algebraischer Curven mit Doppelpunkten rühren von Hulburt her (Am. J. XIV S. 246—250, 1892).

Dass reelle ebene algebraische Curven nter Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ reellen (und nicht isolirten) Doppelpunkten existiren, lässt sich durch allmählichen Uebergang von einer Curve nter zu einer solchen $(n+1)$ter Ordnung zeigen.

Im übrigen sind die Realitätsverhältnisse der Wurzeln von Singularitätengleichungen noch wenig bekannt.

*) Gött. N. 1891 S. 1—13. Als Beispiel ist eine rationale Raumcurve 4. Ordnung hinsichtlich der Realitätsverhältnisse ihrer Singularitäten studirt worden. Von Rohn sind Faden-Modelle construirt, welche jene Verhältnisse (insbes. für die zugehörige abwickelbare Fläche) illustriren. Vgl. zwei Noten in den Leipz. Ber. von 1891, 1892.

**) Leipz. Ber. 1886 S. 83—96.

Eine weitere Durchführung der von Engel angeregten Untersuchung erscheint sehr wünschenswert.

Schreibt man daher die Definitionsgleichungen der Zusammensetzung für zwei beliebige lineare Combinationen der X:

$$F(x, y;\ X) \equiv \left(\sum_1^r x_i X_i,\ \sum_1^k y_k X_k\right) = \sum_{iks}^{1\ldots r} c_{iks} x_i y_k X_s,$$

so repräsentirt die trilineare Form F — oder auch die Gleichung $F = 0$ — geradezu die Zusammensetzung der Gruppe in dem Sinne, dass alle Formen, die aus F durch lineare Transformation der x, y; X hervorgehen (wo die X den cogredienten x, y contragredient gegenüberstehen), die nämliche Zusammensetzung liefern.

Man hat demnach nur noch die Form F invariantentheoretisch zu untersuchen, ihr volles System aufzustellen u. s. f.

Auf Grund der Beziehungen zwischen den c ist die Form F als die allgemeinste trilineare Form charakterisirt, für welche die beiden Covarianten

$$\sum_{iks}^{1\ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) x_i y_k X_s, \qquad \sum_{ikjs}^{1\ldots r} C_{ikjs} x_i y_k z_j X_s$$

identisch verschwinden. Die erste Bedingung sagt einfach aus, dass F eine, hinsichtlich der x, y alternirende, bilineare Form vorstellt.

Was die Bedeutung der zweiten Bedingung angeht, so fasse man für den Augenblick $F = 0$ als das „Symbol" einer infinitesimalen Collineation auf:

$$\sum_1^r (x_i X_i) + \partial t F = 0.$$

Dann erzeugen diese letzteren die sogenannte „adjungirte" Gruppe der gegebenen, d. i. eine projectivische Gruppe, welche mit der gegebenen isomorph ist.

Das Verschwinden der zweiten Covariante erhält jetzt den Inhalt, dass „jede infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe die Form F invariant erscheinen lässt".

Als wichtigste Anwendung dieser Interpretation ergiebt sich, dass „jede lineare Mannigfaltigkeit der x, welche eine Covariante von F ist, eine „invariante" Untergruppe der ursprünglichen darstellt".

Wegen der weiteren gruppentheoretischen Folgerungen mag auf die Note von Engel selbst verwiesen sein.

Zusätze.

Seite Anm.

82 *) Z. 13. Vgl. die Darstellung in Gordan-Kerschensteiner's „Determinanten", Leipzig 1885, wo insbesondere der Resultante als Functionaldeterminante eine eingehende Behandlung zu Teil wird.

82 ***) Später haben auch Escherich (Wien. Denkschr. XLIII, 1880), Gegenbauer (ebda. XLIII S. 15—32, 1881) und Zajaczkowski (Warschau, 1881) die von Gasparis, Armenante, Padovà, Zehfuss u. a. weiter ausgebildeten Determinanten höheren Ranges zur Bildung von Invarianten verwertet.

87 *) Vgl. noch Sylvester, Phil. Mag. (4) IV S. 138 ff. (1852); Hermite, C. R. 1852 II; Jacobi (1847), s. J. für Math. LIII S. 275—280 (1857).

87 ††) Vgl. die Erklärungen der wichtigsten unter den neu eingeführten termini bei Cayley, Papers IV S. 594—608 (Abdruck aus der Encyclop. Brit. von 1860).

88 ***) Deruyts, Belg. Bull. (3) XXII S. 11—23 (1891).

Eine directe Ausdehnung des Reciprocitätsgesetzes ist, wie leicht ersichtlich, nur auf höhere Formen speciellen Charakters möglich. Der Verf. beschränkt sich auf die in lineare Factoren zerlegbaren Formen. Der Gedankengang ist im wesentlichen analog dem ursprünglich von Hermite eingeschlagenen.

90 **) Vgl. dazu die kritischen und litterarischen Noten, welche Cayley selbst in der neuen Ausgabe zugefügt hat.

93 **) Vgl. Seite 89, Schluss der ersten Anm. Die Hermite-Brioschi'sche Transformation des elliptischen Integrals 1. Gattung, welche dasselbe auf die typische Normalform $\frac{dz}{\sqrt{z^3 - \frac{1}{2} g_2 z - \frac{1}{3} g_3}}$ bringt, ist vom 4. Grade in der ursprünglichen Variabeln. Pittarelli hat die Transformation, mit Anwendung von Polarenprocessen, durch eine nur lineare ersetzt (Rom. Acc. L. R. (4) IV S. 703—705, 1888). Derselbe Verf. hat auch solche höheren Transformationen untersucht, vermöge deren im transformirten Integral die Invariante g_2 resp. g_3 verschwindet (ebda. S. 509—513).

98 ***) Unter den späteren Anwendungen, welche Clebsch von der Invariantentheorie auf die Geometrie gemacht hat, ist besonders merkwürdig diejenige auf das sog. „Charakteristikenproblem bei Kegelschnitten", Math. Ann. VI S. 1—15 (1872). Clebsch's Behandlung

Seite Anm.

ist nicht einwandsfrei, vgl. die neueste Arbeit von Study (Math. Ann. XL S. 563—578, 1892), der die Methoden seines Buches mit Erfolg auf das Problem anwendet.

99 †††) Die „Fortschritte der Mathematik“ wurden vom II.—X. Bande von C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin herausgegeben, vom XI.—XIV. Bande von Ohrtmann, unter Mitwirkung von Müller und Wangerin, vom XV.—XIX. Bande von M. Henoch und E. Lampe, unter Mitwirkung etc., endlich vom XX. Bande an von Lampe, unter Mitwirkung etc.

104 *) Vgl. auch noch den Beweis von Kronecker, Berl. Ber. 1889 S. 609 u. flgde.

105 *) Das von Gordan daselbst berechnete System einer gewissen doppelt-binären Form dient bei Klein-Fricke „Modulfunctionen“ II S. 127 ff. (1892) zur Aufstellung von Modulargleichungen. Ist nämlich τ ein Hauptmodul bei Transformation $n$ter Ordnung, τ der transformirte, so ist in der That die linke Seite $f(\tau', \tau)$ der Modulargleichung, wenn man noch homogen macht, als eine doppelt-binäre Form anzusehen, welche sich bei den Simultan-Substitutionen einer bestimmten endlichen Gruppe nicht ändert, somit als ganz-rationale Function der Formen des bez. vollen Systems herstellbar ist. Es sind hier nur die Fälle der Cogredienz und Contragredienz zu unterscheiden.

Das Entsprechende gilt im ternären Gebiete für die sog. „Modularcorrespondenzen“ (l. c. S. 690 ff.).

Auch hier kommt nur Cogredienz und Contragredienz der beiden ternären Variabelnreihen in Betracht. Beispielsweise kommt nunmehr das auf S. 284 dieses Berichtes (Zusatz zu „S. 130 Z. 6 v. unten“) erwähnte volle System Gordan's zur Geltung.

Vgl. noch Klein's Ikosaeder S. 232 ff. sowie die Leipziger Dissertationen von Fischer (1885) und Fiedler (1885) oder auch Wolf. Z. XXX S. 129—229).

106 ††) Siehe z. B. die Anwendungen auf „das Problem der kleinen Schwingungen“ bei Pockels „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0 \ldots$“ Leipzig 1891, S. 44—50, sowie solche auf „gedämpfte“ Schwingungen in dem Werke von Routh „Dynamics of a system of rigid bodies“ (1890) Part. VII.

108 ***) Mit Hülfe der Elementarteiler hat neuerdings Frobenius auch die Aequivalenz zweier biquadratischer binärer, sowie zweier quadrato-quadratischer binärer Formen erledigt (Journ. f. Math. CVI S. 125 bis 188, 1890, §§ 4, 5, 14, siehe auch oben S. 253***).

Die Aequivalenz zweier biquadratischer binärer Formen, sowie diejenige einer solchen mit sich selbst wird bei Klein direct mit Hülfe irrationaler Invarianten (Zähler und Nenner der sechs bez. Doppelverhältnisse) behandelt (Klein-Fricke, Modulfunctionen, Leipzig 1890, §§ 4, 5, 6).

Die simultane lineare Transformation zweier Bilinearformen in ihre „reciproken“ ist von Segre studirt worden (Batt. G. XXII S. 29 bis 33, 1884).

In nahem Zusammenhange mit den Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker steht eine solche von Study, welcher solche Eigenschaften der Bilinearformen betrachtet, die aus der Theorie der recurrirenden Reihen entspringen und sich hierbei auf ein System irrationaler Invarianten jener Formen stützt (Wiener Monatshefte II S. 1—32, 1891).

Die Aequivalenz einer bilinearen Form, von je drei homogenen Variabeln, mit sich, haben Poincaré und Picard für den Fall unter-

Seite Anm.

sucht, dass die entspr. Variabeln und Coefficienten conjugirt complexe Grössen sind (C. R. XCVIII S. 344—352, resp. C. R. XCVIII S. 416—417, 1884).

Es sei noch einer geometrischen Anwendung der Elementarteiler von Killing (Dissert. Berlin 1872) gedacht, welcher mit Hülfe derselben die Schnittverhältnisse zweier Flächen zweiter Ordnung vollständig discutirt.

111 ***) In einer neuesten Arbeit (Progr. der 4. Städt. Höh. Bürgerschule Berlin, Ostern 1892) stellt Rosenow als Anwendung des Früheren die Normalformen auf für die 472 verschiedenen „Klassen" eigentlicher Bilinearformen von 10 Variabelnpaaren bei congruenter Transformation der Variabeln.

114 **) Vgl. Forsyth, Theory of differential equations I, Cambridge 1890. Chapter XI.

118 †) Vgl. Study, Gött. N. 1889 S. 237—268, Leipz. Ber. 1889, S. 177 bis 228. (Siehe auch noch Wien. Monatshefte I, 1890, II, 1891.)

Es sei hier noch erwähnt, dass Stéphanos die Lehre von den complexen Zahlsystemen mit formentheoretischen Hülfsmitteln untersucht hat. Athen, Jubelband (griechisch), 1888.

Die Thatsache, dass jedem Zahlsysteme eine lineare Gruppe mit linear auftretenden Parametern entspricht, ist zuerst von Poincaré bemerkt worden (C. R. XCIX S. 740—742, 1884).

118 †††) Die ausführlichere Arbeit Bolza's findet sich im Am. J. X S. 47 bis 70 (1887).

122 oben. Dass überhaupt zu jeder endlichen Gruppe von linearen Substitutionen stets ein volles System von Invarianten gehört, geht erst aus dem auf S. 145 aufgeführten Satze von Hilbert hervor.

123 ††) Erweiterungen der Klein'schen Betrachtungen auf höhere Räume finden sich bei Biermann (Wien. Ber. XCV S. 523—548, 1887), der lineare Substitutionen von zwei complexen Variabeln im Raume von fünf Dimensionen mit den bez. regulären Körpern in Verbindung bringt, sowie bei Goursat (C. R. CVI S. 1786—1789, 1888), der mittels der regulären Körper im Raume von vier Dimensionen das Problem der Aufsuchung der linearen, orthogonalen Substitutionsgruppen endlicher Ordnung von vier Variabeln vereinfacht.

Vgl. auch Clebsch-Lindemann II, 1, Abt. 3, IX, X.

Mit den reellen Bewegungsgruppen überhaupt hat sich Jordan eingehend beschäftigt: Annali di Mat. (2) II S. 168—215, 320—345 (1869). Eine vollständige Discussion derjenigen von diesen Gruppen, bei welchen aus den erzeugenden Bewegungen nicht beliebig kleine Ortsveränderungen abgeleitet werden können, findet sich bei Schönflies, Math. Ann. XXVIII S. 319—342, XXIX S. 50—80 (1887): XXXIV S. 172—203 (1889). Die letztgenannte Arbeit behandelt solche Gruppen von endlichen Transformationen des Raumes in sich, bei denen eine beliebige Raumfigur stets in eine ihr congruente oder symmetrisch gleiche übergeht.

127 †) Vgl. auch Halphen, Sav. étr. T. XXVIII (1880—1883).

128 ††) Brioschi hat auch den Fall einer f_8 untersucht, deren vierte Ueberschiebung über sich selbst mit der ursprünglichen Form, bis auf einen constanten Factor, übereinstimmt, und ist dabei ebenfalls zu der Form der Schwarz'schen Differentialgleichung dritter Ordnung gelangt (Chelini, Coll. Math. S. 213—219, 1881; C. R. XCVI S. 1689 bis 1692, 1883).

Seite Anm.

Die Arbeiten stehen in naher Beziehung zu der auf S. 177***) citirten.

129 **) Bei Valentiner bleiben schliesslich drei endliche ternäre Gruppen übrig, eine G_{72}, die durch „Erweiterung" der binären Tetraedergruppe entsteht, eine G_{360}, die analog aus der binären Ikosaedergruppe hervorgeht, und die eigentlich ternäre G_{168} des Textes. (Letztere ist, nebenbei bemerkt, als Gruppe von 7 Buchstaben, zuerst 1858 von Kronecker entdeckt worden.) Merkwürdigerweise ist indessen die zweite Gruppe G_{216} des Textes bei ihm keine eigentlich ternäre. (Siehe bei ihm S. 222.)

Valentiner stützt seine Entwickelungen auf die Wiederholungen von Substitutionen. Das Kriterium dafür, dass eine Substitution von n Veränderlichen nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, ist, wie schon Lipschitz Acta Math. X S. 137—144 (1887) nachgewiesen hatte, dass ihre charakteristische Gleichung nur μte Einheitswurzeln hat und dass ihre Elementarteiler von der ersten Ordnung sind. (Vgl. für die ternären orthogonalen Substitutionen Bermbach, Diss., Bonn 1887.)

Valentiner zeigt dann vor allem, dass die Ordnung einer endlichen Gruppe entweder das kleinste gem. Vielfache der Ordnungen ihrer „Fundamentalsubstitutionen" ist, oder aber das 2- resp. 3- resp. 6-fache desselben (S. 226 daselbst).

Es sei noch erwähnt, dass, abstract genommen, die Ikosaedergruppe G_{60} und die G_{168} des Textes, bis zur Ordnung 200 hin die einzigen einfachen Operationen-Gruppen von zusammengesetzter Ordnungszahl sind (Hölder, Math. Ann. XL S. 55—88, 1892), sowie dass Askwith alle möglichen Gruppen von Substitutionen aufgestellt hat, welche sich aus 3, 4, 5, 6, 7 Buchstaben bilden lassen (Quart. J. XXIV S. 111—167, 1889). Die G_{168} fehlt indessen bei ihm.

130 *) Die bei Klein, Rohn u. a. auftretende Gruppe G_{16} von sechzehn vertauschbaren involutorischen Transformationen, durch welche die Punkte oder Ebenen des Raumes zu Kummer'schen Configurationen zusammengeordnet werden, ist eingehend (unter Aufstellung des vollen Systems u. s. f.) von Study untersucht worden (Leipz. Ber. 1892 S. 122—161).

Diese Gruppe dient indessen dem Verf. nur als ein Beispiel einer systematischen Theorie, welche die formentheoretische Behandlung endlicher Gruppen linearer Substitutionen auf gewisse Reihenentwickelungen gründet (siehe den Text S. 218), wobei dem Apolaritätsbegriff eine leitende Rolle zufällt. Das bemerkenswerteste Resultat ist, dass zur Bestimmung der Invarianten einer solchen Gruppe im ungünstigsten Falle nur reine Gleichungen aufzulösen sind. (Vgl. oben bei Valentiner.)

130 **) Die von Maschke (siehe S. 132) gelöste Aufgabe, das volle Formensystem der G_{216} aufzustellen, führte daher unmittelbar auf die andere zurück, das volle Combinantensystem einer C_3 und ihrer Hesse'schen Form abzuleiten (Math. Ann. XXXIII S. 328 u. flgde.).

Mit den im Texte erwähnten Arbeiten von Witting und Maschke vgl. man noch Burkhardt, Math. Ann. XXXVIII S. 161—224 (1891).

130 Zeile 6 v. unten. Das „volle System" von f in dem Sinne, dass auch die Substitutionen der contragredienten Variabeln mitberücksichtigt werden, also auch die Contravarianten und Zwischenformen mitumfassend, ist erst von Gordan aufgestellt worden, Math. Ann. XVII S. 217—233, siehe insbes. die Tafel am Schlusse der Abh. Vgl. S. 153 des Textes.

Seite Anm.

130 †) Die Coefficienten der beiden Gleichungen 7. Ordnung bilden nach Gordan das volle System der bez. „Affectfunctionen“, während ein Teil davon ausreicht, um als associirtes System derselben zu dienen (Math. Ann. XX S. 528). Auf die allgemeinen Bemerkungen, welche Gordan daselbst über den Begriff des Affectes, in seiner Beziehung zur Invariantentheorie, macht, sei ganz besonders hingewiesen.

132 Zeile 4 v. u. Mit den im Texte berührten Untersuchungen, soweit sie sich auf binäre und ternäre endliche Gruppen beziehen, steht in engem Zusammenhange ein Cyklus von Arbeiten Autonne's:
1883; C. R. XCVII S. 567—570.
1884; C. R. XCVIII S. 565—567, IC S. 646—649.
1885; C. R. CI S. 53—56; Journ. de Math. (4) I S. 431 –454.
1886; C. R. CII S. 313—316, CIII S. 1176—1178; Journ. de Math. (4) II S. 49—104.
1887; C. R. CIV S. 767—770, 1422—1425, CV S. 267—270, 929 bis 932; Journ. de Math. (4) III S. 63—85.
1888; Journ. de Math. (4) IV S. 177—247, 407—464,
der sich die Ermittelung aller endlichen Gruppen und Untergruppen von Cremona-Transformationen (der Ebene), insbesondere der quadratischen und kubischen, zum Ziel gesetzt hat. Vgl. auch S. Kantor, Wien. Denkschr. 1882, 46 S.

142 Text, Z. 6 v. unten. Der fragliche Satz stammt von Gordan her: Math. Ann. VI S. 23—28 (1875), Vorl. I § 15.

142 **) Es sei hier noch eines eigenartigen Endlichkeitsbeweises (für binäre Formen) von Cayley gedacht, der sich auf die Benützung irrationaler Invarianten stützt, wobei allerdings ein wesentlicher Hülfssatz unbewiesen bleibt (Quart. J. XVII S. 137—147, 1882).

146 ***) Einen symbolischen Beweis für die Hilbert'sche Methode der Ableitung von invarianten Bildungen (im ternären Gebiete) hat H. White geliefert (Am. J. XIV S. 253—290, 1892).

149 **) Wegen weiterer Resultate der besprochenen Arbeit Hilbert's, insbes. bezüglich des fundamentalen Begriffes „der charakteristischen Function eines Moduls“ sehe man den ausführlichen Bericht des Referenten in den Fortsch. d. Math. Bd. XXII.

149 ***) In einer Fortsetzung (Gött. N. 1892 No. 12, 11 S.) löst Hilbert die wichtige, im Texte bezeichnete Aufgabe allgemein, für eine Reihe von Urformen ein System von Invariantenbildungen aufzustellen, durch welche sich alle übrigen als ganze algebraische Functionen ausdrücken lassen. Die Aufgabe wird darauf zurückgeführt, alle Nullformen m^{ter} Ordnung von n Variabeln (d. h. solche, deren Invarianten sämtlich verschwinden) aufzufinden, und dies gelingt wiederum mittels einer gewissen canonischen Gestalt derselben.

(Beispielsweise sind die ternären canonischen Nullformen bis zur sechsten Ordnung berechnet worden.)

Danach bietet die Aufstellung „voller Systeme“ keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Die ausführlichere Arbeit wird demnächst in den Math. Ann. erscheinen.

151 ***) Vgl. hiermit noch die Arbeiten von Maisano: Rom Acc. L. Mem. (3) XIV, 1883, XIX, 1884.

153 †††) Die Aufgabe, das volle System zweier C_2 zu bilden, wird von Perrin auf die vorher von ihm gelöste (S. 152†††)) zurückgeführt, das volle System von vier binären Formen zu bilden, von denen zwei linear und zwei quadratisch sind.

Seite Anm.

Das Entsprechende gilt für die Syzygien. Vgl. einen ausführlicheren Bericht des Referenten in den Fortsch. d. Math. Bd. XXII.

Das zu Grunde gelegte Princip ist wohl zuerst von Brioschi für eine C_4 verwendet worden (Annali di Mat. (2) VII S. 202—216, 1876), und tritt auch als fundamental in den Untersuchungen von Brill (S. 272) und Forsyth (S. 158) auf.

Dasselbe lässt sich einfach dahin formuliren, dass, wenn etwa eine ternäre Form $C_n(x_1, x_2, x_3)$ nach Potenzen von x_3 angeordnet wird, so sind die invarianten Bildungen von C_n gewisse Aggregate von (binären) simultan-invarianten Bildungen jener Coefficienten.

Uebrigens stellt jeder der vier genannten Autoren dieses Princip unabhängig von den andern auf.

Wegen des Systems zweier C_2 vgl. noch Osgood, Am. J. XIV S. 262—273 (1892).

154 *) Neuerdings ist es Mertens auch gelungen, das volle System (von 47 Bildungen) dreier F_2 explicite aufzustellen. (Wien. Ber. 1890 S. 367—384.)

156 **) Eine eingehende Untersuchung der typischen Darstellung einer f_5, unter Zugrundelegung von Clebsch's associirten Formen, rührt von Cayley her: X. Mem. Phil. Trans. 1878 S. 603—661.

163 *) Vgl. hierher noch Bruno, Am. J. V S. 1—25 (1882), Burkhardt, Diss., München 1887, White, Nova Acta LXII No. 2 S. 43—128, sowie die Citate im Texte S. 185, und die zusammenhängende Darstellung bei Halphen, Traité des fonctions elliptiques T. II Paris, 1888.

173 †) Vgl. noch Hammond für die f_6: Am. J. VII S. 327—344 (1885), und für das System (f_2, φ_3): Am. J. VIII S. 138—155 (1886).

174 †) Vgl. auch Hammond, Am. J. VIII S. 104—126 (1886).

182 *) Die Invarianten der f_6 sind von Bolza durch die Nullwerte der zugehörigen Θ-Functionen ausgedrückt worden (Math. Ann. XXX S. 478—495).

185 *) Eine andere Erweiterung auf Formen f, welche in zwei binären Variabelnreihen quadratisch sind, stammt von Frobenius her (Journ. f. Math. CVI S. 125—189, 1890). f besitzt zwei Discriminanten (d. h. biquadratische binäre Formen mit gleichen Invarianten): umgekehrt wird f gesucht, wenn diese Discriminanten gegeben sind. Man hat im allgemeinen zweifach unendlich viele Lösungen der Aufgabe.

188 ***) Vgl. auch Study, Leipz. Ber. 1890 S. 172 u. flgde.

210 *) Vgl. auch Bôcher, Göttinger Preisarbeit 1891, Kap. II.

215 ***) Eine eigenartige Darstellung der Gordan'schen Reihenentwickelung hat Baker gegeben. Mess. (2) XIX S. 91—96 (1889).

219 *) Von den älteren Sylvester'schen Sätzen über Substitutionen homogener Differentialquotienten hat Sharp eine interessante Anwendung gemacht (Proc. L. M. S. XIII S. 216—239, 1882), indem er nachweist, wie sich die Invariantennatur, insbesondere gegenüber orthogonalen Substitutionen, der meisten in der mathematischen Physik auftretenden Differentialausdrücke jenem Principe unterordnet. Siehe auch Text S. 242.

Study hat die Differentiation nach den Coefficienten einer orthogonalen Substitution verwendet zur Bildung von Invarianten endlicher Gruppen. (Leipz. Ber. 1892 S. 122—161.)

220 ***) Wegen des durch Clebsch entdeckten Zusammenhanges der Connexe mit den Differentialgleichungen und der daraus folgenden Möglich-

Seite Anm.

keit, die letzteren nach algebraischen Principien zu behandeln, sehe man etwa Clebsch-Lindemann I. Bd. 2. Teil. 7. Abth.

226 †) Bez. der Gleichungen 5. Ordnung vgl. die Darstellung bei Clebsch-Lindemann II, 1, Abt. 3, No. XI.

231 **) Halphen macht besonders von dem Satze Gebrauch, dass eine Differentialinvariante durch Differentiation nach der unabhängigen Variabeln x wieder in eine solche übergeht. Vgl. Sylvester Am. J. IX S. 297—352 (1887), Elliott, Mess. (2) XIX S. 7—14 (1889).

237 **) Vgl. auch Griffiths Ed. Times LI S. 137—149 (1889).

245 **) Wir entnehmen dem citirten Werke die Anm. auf S. 287: „Lie veröffentlichte seine schon im Jahre 1874 ausgeführte Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene im Jahre 1884 im Archiv for Math. Doch findet sich seine Bestimmung aller projectiven Gruppen der Geraden schon 1880 in den Math. Ann. Bd. XVI.“ Die Bestimmung der projectiven Gruppen des Raumes hat Lie im Jahre 1878 durchgeführt, indessen bisher nur einige Bruchstücke darüber publicirt; die vollständige Discussion wird in dem dritten Bande von Lie-Engel“ enthalten sein. Die Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes hat Knothe aufgestellt, Dissert., Leipzig 1892.

249 *) le Paige hat den Begriff der Seminvariante ausgedehnt auf binäre Formen mit mehreren Variabelnreihen, die auch verschiedenen Transformationen unterworfen werden können (Belg. Bull. (3) II S. 40—53, 1881).