# Logik – die Grundlagen

Die Logik ist eine sehr alte Wissenschaft. Sie ist die Lehre vom richtigen Denken und beschäftigt sich mit den Regeln und Mechanismen des Schlussfolgerns (logos = das Wort). 'Erfunden' wurde sie bereits im antiken Griechenland, als die Philosophen über den präzisen Inhalt von Aussagen nachdachten.

Im Alltag verwenden wir logische Regeln ganz automatisch und unbewusst: ist morgens die Straße nass, schließen wir, dass es in der Nacht geregnet haben muss. Davon sind wir auch dann fest überzeugt, wenn wir den nächtlichen Regen gar nicht selbst wahrgenommen haben.

Manche Leute sind Meister im Schlussfolgern. Wir bewundern Detektive wie Sherlock Holmes, Miss Marple oder Inspektor Columbo und fragen uns am Ende des Kriminalfalls, warum wir nicht selbst auf die Lösung gekommen sind (es könnte in der Nacht geschneit haben und in der Früh getaut). Zum Glück kann man Logik lernen – sie folgt Regeln und Gesetzmäßigkeiten, die von der Mathematik erforscht wurden und werden.

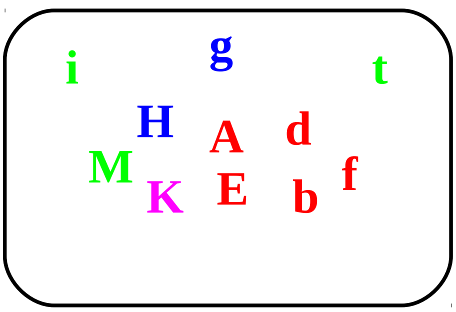
Berühmte Bücher in denen Logik eine große Rolle spielt, sind 'Alice im Wunderland' und 'Alice hinter den Spiegeln' von Lewis Carroll. Pflichtlektüre für Mathematiker, nicht nur für Kinder! Und nicht alle Kulturen sehen die Logik so wie wir (z.B. das klassische China).

Einer der größten Logiker aller Zeiten war der Österreicher Kurt Gödel.

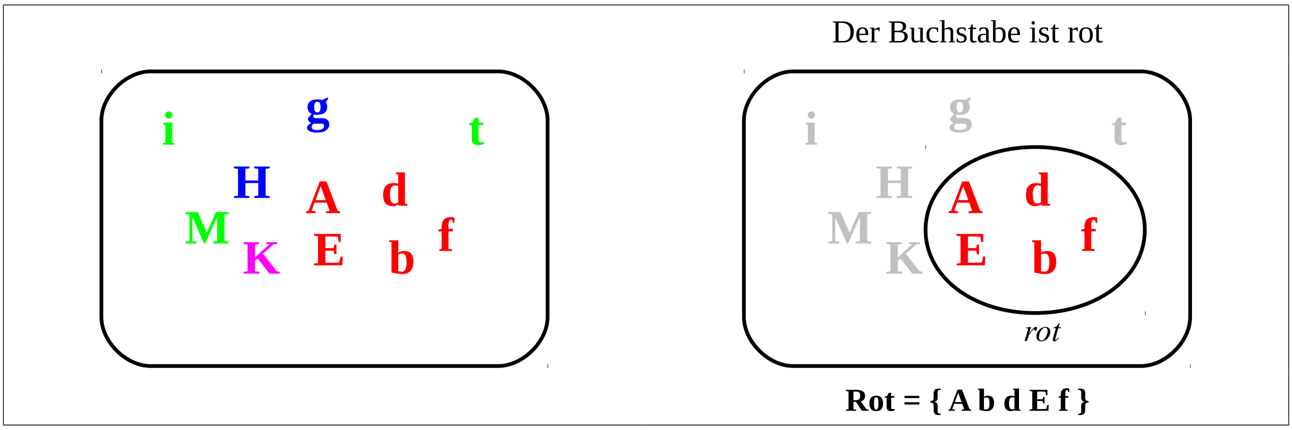
Aussagen werden sprachlich übermittelt. Alltagssprache ist selten eindeutig. Der Satz 'Es geht mir gut' bedeutet für einen schularbeitschreibenden Schüler etwas anderes als für einen von einem sinkenden Schiff geretteten. Wir Mathematiker reduzieren Schwierigkeiten gerne und versuchen möglichst eindeutige und unmissverständliche Sprechweisen (beachte: Wer schlampig spricht ist auch ein schlechter Logiker). Dieses Vokabular muss man einmal kennengelernt haben, und das versuchen wir nun.

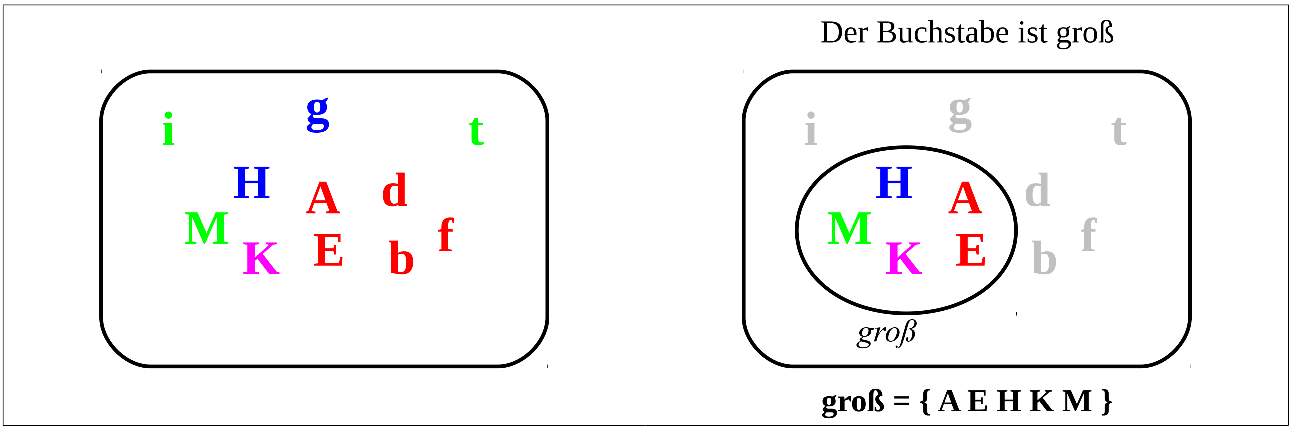
Als einfaches Beispiel wähle ich eine Menge von Buchstaben: große, kleine, blaue, rote,...

Über diese Buchstaben kann man nun Aussagen treffen. Man untersucht, welche Buchstaben zu einer getroffenen Aussage passen, beziehungsweise welche Buchstaben gewisse Eigenschaften haben.



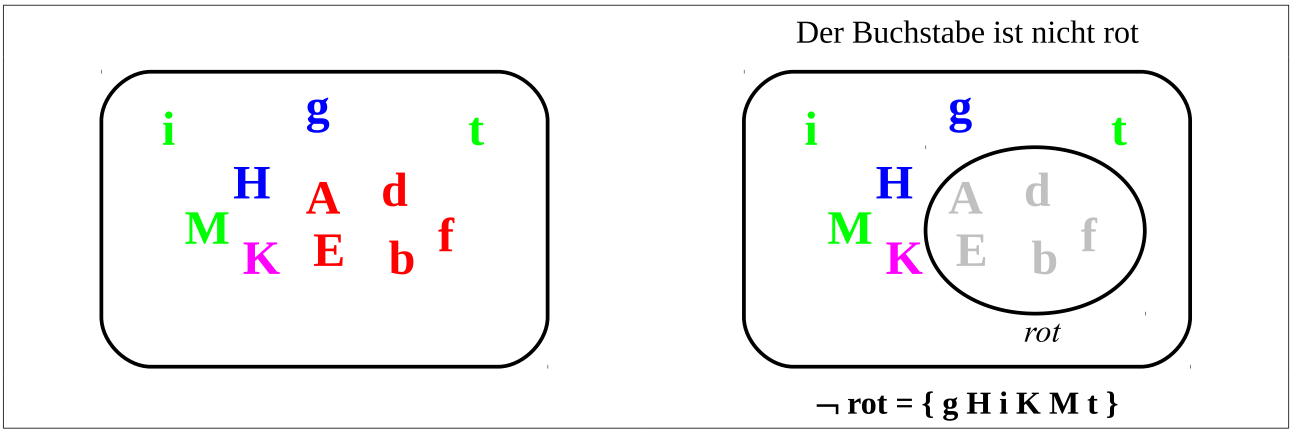
## Eine einfache Aussage



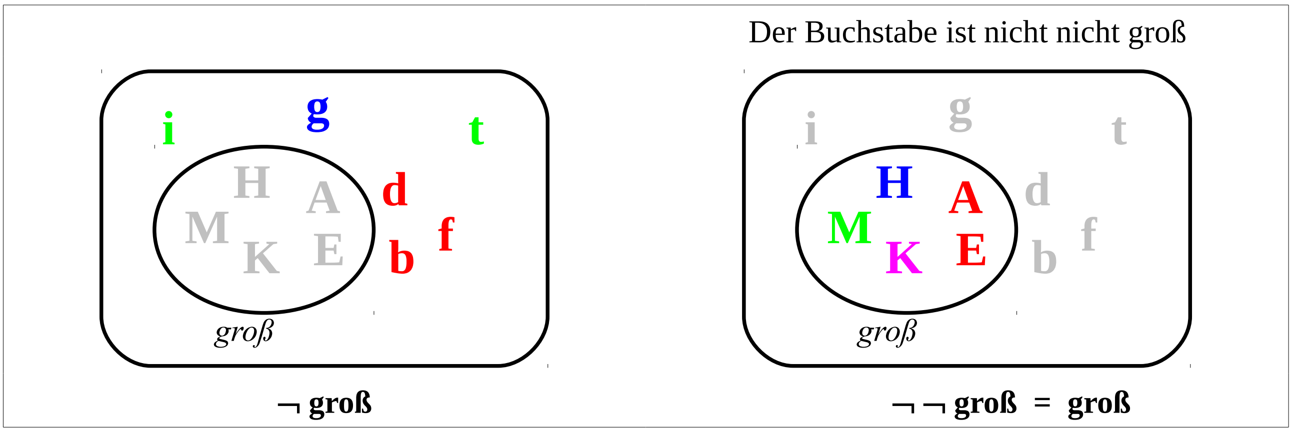




### nicht (Negation)

Das Wort 'nicht' bezeichnet das Gegenteil einer Aussage. In unserer Logik ist das, was nicht falsch ist, richtig und alles was nicht richtig ist, falsch. Die Aussage und ihr Gegenteil bilden einen Widerspruch. (Ein großer Unterschied zur klassischen chinesischen Logik, vergleiche das Jin-Yang Symbol.)



Die doppelte Verneinung ergibt logisch wiederum die ursprüngliche Aussage.

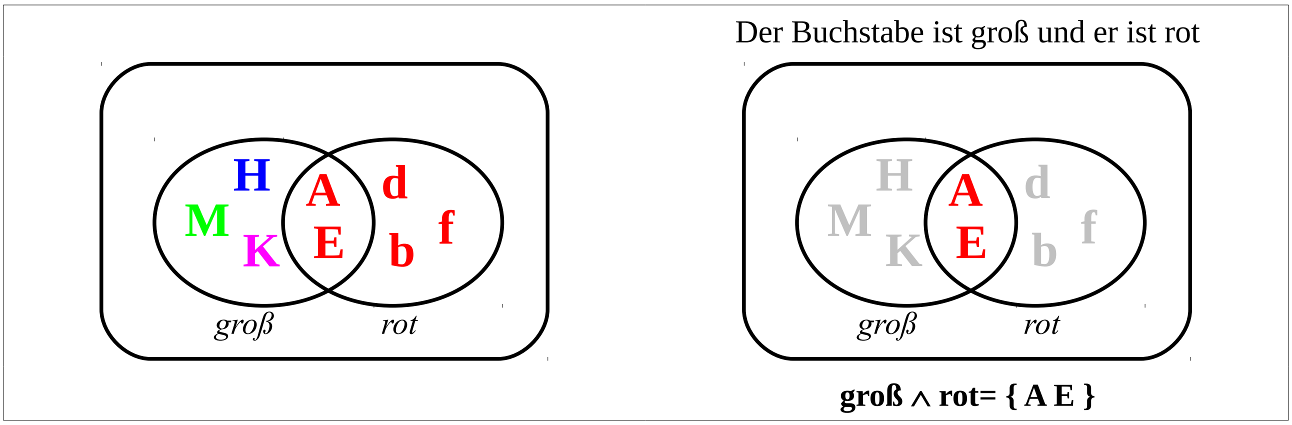



Umgangssprachlich wird die doppelte Verneinung in vielen Mundarten nicht im logischen Sinn, sondern als Bekräftigung der Verneinung eingesetzt.
Mit 'Des hot doch koan Sinn net' meint der Tiroler, dass etwas ganz bestimmt keinen Sinn hat.

# Zwei verknüpfte Aussagen

## und

'Der Buchstabe ist groß und rot'. Die Verknüpfung **und** fordert, dass beide Teilaussagen richtig sind. Die Aussage trifft nur auf Buchstaben zu, die gleichzeitig groß und rot sind, also sowohl groß als auch rot.

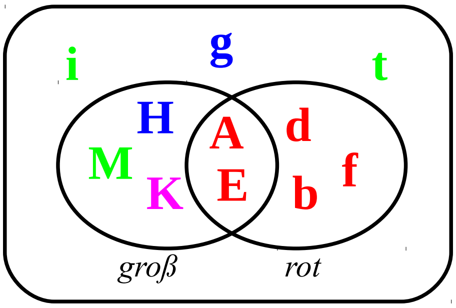



Im Sprachgebrauch: 'Es blitzt und donnert'. Beide Bedingungen müssen erfüllt sein, damit der Satz wahr ist. Genau wie in der Mathematik bedeutet 'und' 'sowohl als auch'.

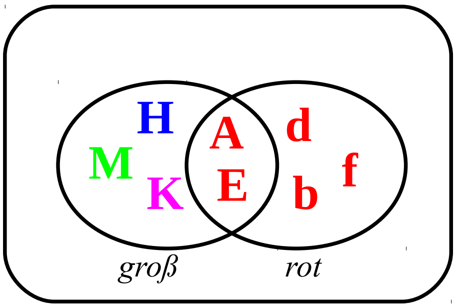
'Ich mag Hunde und Katzen' – das hat aber eine ganz andere Bedeutung. Hier werden zwei Mengen 'addiert', die Menge der Hunde und die der Katzen werden zusammengefasst, das Wörtchen 'und' fügt hier zwei Teile zu einem einzigen Satz zusammen. Das Wort 'und' ist mehrdeutig!
Noch ein Beispiel: 'Anna mag große und blonde Burschen'. Hier ist auch in der Umgangssprache nicht klar, ob Annas Freunde gleichzeitig groß und blond sein müssen, oder ob Anna schon mit einer der Eigenschaften zufrieden ist. Missverständnisse sind vorprogrammiert.

## oder

Auch dieses Wort kann in der Alltagssprache unterschiedliche Bedeutungen haben.
'Heute wird es regnen oder schneien'. Dieser Satz ist richtig, wenn es regnet, aber auch richtig, wenn es schneit. Und sollte es Schneeregen geben (also zugleich regnen und schneien), dann ist er ebenfalls richtig. Mathematiker sehen das Wort 'oder' auf genau diese Weise.
Eine Aussage mit **oder** ist richtig, wenn mindestens eine Teilaussage (eine oder alle beide) richtig ist. Die Aussage ist nur dann falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind.




Der Buchstabe ist groß oder er ist rot



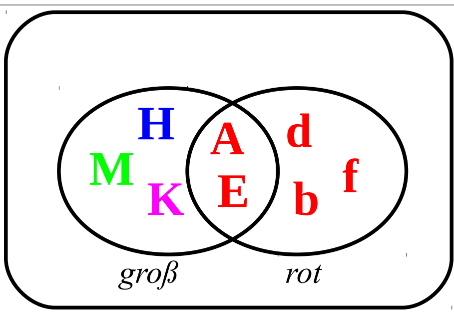
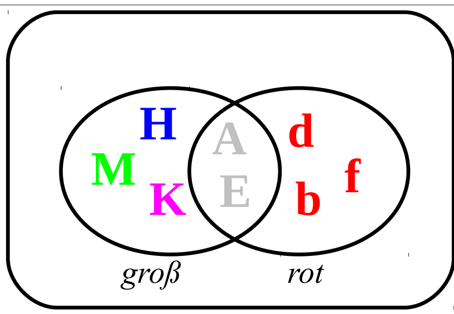

**groß $\vee$ rot= { A b d E f H K M }**

Im Sprachgebrauch ist das Wort 'oder' häufig in einer anderen Bedeutung zu hören:
'Wünschen Sie Kaffee oder Tee?', 'Unsere Gäste bekommen Tee oder Kaffee serviert'. Hier steht 'oder' für die Wahl zwischen zwei Alternativen. 'Jetzt oder nie!'. Das gleichzeitige Zutreffen beider Teilaussagen ist gar nicht möglich.

# Zwei verknüpfte Aussagen - Ergänzungen

## entweder … oder

In diesem Fall muss genau eine der Bedingungen erfüllt sein. Im Unterschied zum gewöhnlichen logischen 'oder' darf nicht beides zugleich zutreffen ('exklusives oder').

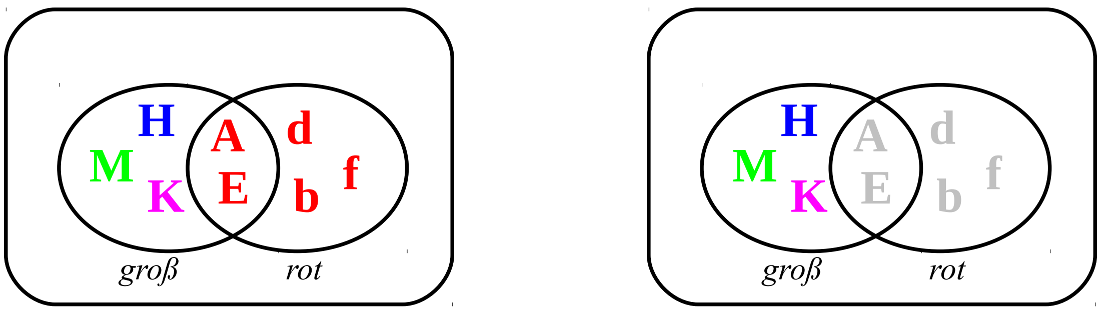
| | |
|---|---|
| | Der Buchstabe ist entweder groß oder er ist rot |
|  |  |
| | **groß $\Delta$ rot= { d b f H K M }** |

Das Zeichen **Δ** stammt aus der Mengenlehre, wo es für die 'symmetrische Differenz' steht. Aus der Vereinigungsmenge wird die Durchschnittsmenge entfernt.

## aber nicht, und nicht, ohne

'Ich mag Orangen, aber keine sauren'. Es geht sprachlich um Einschränkungen. Die erste Bedingung 'Orange' muss zutreffen, die zweite 'sauer' muss falsch sein.

Der Buchstabe ist groß, aber nicht rot




**groß \ rot = { H K M }**

## Folgerung (Implikation)

Auch für 'wenn A dann B' oder genauer 'aus A folgt B' legen die Logiker Regeln fest. Wann ist die Aussage 'aus A folgt B' richtig: aus wahr folgt wahr ist sicher richtig. Aus etwas Wahrem darf man nichts Falsches folgern können. Aber was folgern wir aus etwas Falschem: daraus kann man alles folgern! „Wenn London in Afrika liegt, ist Rom die Hauptstadt von Italien”. Diese Aussage ist richtig, weil Rom die Hauptstadt Italiens ist. „Wenn London in Afrika liegt, kann ein Löwe fliegen” ist ebenfalls richtig, weil beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitsgehalt haben.
Wir schreiben $A \Rightarrow B$ für 'wenn A gilt, dann gilt B' oder 'A impliziert B'.

Kann man diese Aussage umdrehen? Machen wir einen Versuch. 'Wenn ein Vogel ein Rabe ist, dann ist er schwarz” Rabe $\Rightarrow$ schwarz.
Stimmt die Umkehrung schwarz $\Rightarrow$ Rabe? Sicher nicht – jede Amsel weiß das. Wir müssen jede Teilaussage negieren: „Wenn etwas nicht schwarz ist, dann ist es auch kein Rabe”. Das passt.
Also merken wir uns:
$A \Rightarrow B$ ist gleichwertig zu $\neg B \Rightarrow \neg A$

Die falsche Umkehrung kommt im täglichen Sprachgebrauch leider häufig vor. „Wenn Du mehr lernst, bekommst du bessere Noten”. Und wenn ich einen Einser auf die Schularbeit schreibe, heißt es „Du hast eine bessere Note, also hast Du mehr gelernt”. Logisch falsch, ich hab einfach nur Glück gehabt und die Schularbeit war leicht.

Was ist, wenn sowohl $A \Rightarrow B$, als auch $B \Rightarrow A$ gilt? Dann sind beide Aussagen **äquivalent**.
Wir schreiben dann $A \Leftrightarrow B$ und sagen 'A gilt genau dann, wenn B gilt'.
Es müssen also beide Aussagen gleichwertig sein, beide richtig oder beide falsch.
Ein Beispiel: Eine Zahl hat die Einerstelle 0 oder 5 $\Rightarrow$ die Zahl ist durch 5 teilbar. Umgekehrt gilt aber auch: Eine Zahl ist durch 5 teilbar $\Rightarrow$ die Zahl hat die Einerstelle 0 oder 5. Also sind die Aussagen äquivalent: Eine Zahl ist durch 5 teilbar $\Leftrightarrow$ die Zahl hat die Einerstelle 0 oder 5.
Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerstelle 0 oder 5 lautet.

# Eine Übersicht in Tabellenform

Mathematiker lieben kurze prägnante Informationen.
Zwei Aussagen A und B werden verknüpft. Jede von ihnen kann wahr oder falsch sein. Welchen Wahrheitswert hat die Verknüpfung?

| A | B | A und B | A oder B | entweder A oder B | A aber nicht B | weder A noch B | aus A folgt B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| wahr | wahr | wahr | wahr | falsch | falsch | falsch | wahr | wahr |
| wahr | falsch | falsch | wahr | wahr | wahr | falsch | falsch | falsch |
| falsch | wahr | falsch | wahr | wahr | falsch | falsch | wahr | falsch |
| falsch | falsch | falsch | falsch | falsch | falsch | wahr | wahr | wahr |

Man kann mit logischen Aussagen sogar rechnen:

$A \setminus B = A \wedge (\neg B)$
$A \Delta B = (A \vee B) \setminus (A \wedge B)$

# Mit der Wahrheit rechnen:

Der Lehrer erhält vier identische Lösungen einer Mathe-Hausübung. Um festzustellen, wer hier von wem abgeschrieben hat, befragt er die Schüler.

| | |
|---|---|
| Angela: | *Wenn Peter gemogelt hat, dann auch Frank.* |
| Frank: | *Peter oder Ulli hat abgeschrieben.* |
| Peter: | *Entweder Angela oder Ulli hat abgeschrieben.* |
| Ulli: | *Die Aufgabe wurde entweder von Peter oder von Angela gelöst.* |

Wir kürzen die Aussage ”X hat abgeschrieben“ mit X ab und erhalten die folgenden Übersetzungen in logische Formeln:

| | |
|---|---|
| Angela: | $P \Rightarrow F$ |
| Frank: | $P \vee U$ |
| Peter: | $(A \wedge \neg U) \vee (\neg A \wedge U)$ |
| Ulli: | $(A \wedge \neg P) \vee (\neg A \wedge P)$ |

Bezeichnen wir wie üblich wahr mit 1 und falsch mit 0, so sind die Wahrheitswerte der verwendeten Verknüpfungen gegeben durch

| $X$ $Y$ | $\neg X$ | $X \vee Y$ | $X \wedge Y$ | $X \Rightarrow Y$ | $X \Leftrightarrow Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Jetzt können wir die Wahrheitstafel aufstellen.

| $A$ $F$ $P$ $U$ | $P \Rightarrow F$ | $P \vee U$ | $(A \wedge \neg U) \vee (\neg A \wedge U)$ | $(A \wedge \neg P) \vee (\neg A \wedge P)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0 1 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 0 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 0 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 1 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 0 0 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 1 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 1 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Die einzige Zeile, die lauter wahre Aussagen enthält, habe ich hervorgehoben. Sie besagt, dass Angela nicht abgeschrieben sondern selbst gerechnet hat, alle übrigen haben von ihr abgeschrieben.