MAXWELL-Gleichungen bewegter Versetzungen im COSSERAT-Kontinuum

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 21, 1969, S.480-486

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

MAXWELL-Gleichungen bewegter Versetzungen im COSSERAT-Kontinuum*)

Von **Hermann Schaefer**

(Eingegangen am 21. 5. 1969)

Übersicht: Die kinematischen und dynamischen Gleichungen eines *Cosserat*-Kontinuums mit bewegten Versetzungen nehmen die Gestalt der *Maxwell*schen Gleichungen an, wenn man von den Differentialoperatoren Grad, Div und Rot der Motoranalysis Gebrauch macht.

Summary: Kinematic and dynamic equations of a Cosserat continuum with disclinations and dislocations are of the same form as the Maxwell equations, if differential operators Grad, Div and Rot of Cosserat motorfields are introduced.

1. Einleitung

In einem kohärenten System von Einheiten kann den *Maxwell*-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes bekanntlich eine Form gegeben werden, in der keine Konstanten oder Parameter mehr erscheinen, die an die Eigenschaften eines besonderen Mediums erinnern. Mit den konventionellen Bezeichnungen hat man dann

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{s}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho \tag{1.2}$$

Ferner gilt für den Vierervektor der *Lorentz*-Kraft $\boldsymbol{f}$ und Leistungsdichte λ

$$\boldsymbol{f} = \varrho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B} \tag{1.3}$$

$$\lambda = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.4}$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$f_k = \varrho E_k + \epsilon_{klm} s_l B_m \tag{1.5}$$

$$\lambda = s_i E_i \tag{1.6}$$

*) Herrn Prof. Dr. *Luigi Sobrero*, Triest, zum 60. Geburtstag gewidmet.

Die eindrucksvolle Eleganz dieser Gleichungen, die den großen Komplex der makroskopischen elektromagnetischen Phänomene erfassen, hat auch in anderen Feldtheorien der Physik Maßstäbe gesetzt und besonders in der Kontinuumsmechanik dazu geführt, komplizierte Zusammenhänge durch Heranziehung elektromagnetischer Analogien zu erläutern. Eine Fülle von Beispielen hierfür findet man im 2. Bande der brillanten *Feynman* Lectures on Physics. So ist auch in der heute noch jungen Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen immer wieder auf Analogien zu elektromagnetischen Erscheinungen hingewiesen worden, etwa so, wie man die Wirbelsätze der Hydromechanik am Beispiel des Gesetzes von *Ampère* zwischen Stromdichte und magnetischem Feld erläutert. Unsere nachstehenden Ausführungen sollen nun zeigen, daß nicht nur hier und da vereinzelte Analogien zwischen Versetzungstheorie und *Maxwell*scher Theorie vorhanden sind, sondern daß vielmehr beide Theorien mathematisch isomorph sind. Allerdings besteht diese Isomorphie nur dann, wenn man die Versetzungstheorie des *Cosserat*-Kontinuums betrachtet. Hier hat jeder Massen-„Punkt" die Freiheitsgrade eines starren Körpers, und er besitzt Bahnimpuls und Spin. Neben Kraftspannungen treten Momentenspannungen in Erscheinung; die Deformationen des Kontinuums werden durch 2 unsymmetrische Tensoren beschrieben [6]. Die kinematischen und dynamischen Gleichungen des *Cosserat*-Kontinuums sind aber durchweg übersichtlicher als die des klassischen Kontinuums. Es gibt Fälle, in denen die degenerierten Gleichungen des klassischen Kontinuums erst dann verständlich werden, wenn man die entsprechenden Gleichungen des *Cosserat*-Kontinuums betrachtet.

2. Bezeichnungen

Sämtliche Indizes laufen von 1 bis 3. Es gilt die Summierungskonvention. ϵ_{ikl} ist der in allen Indizes alternierende Einheitstensor. Wir benutzen durchweg kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 und die Abkürzung $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Unseren folgenden Ausführungen liegt ein *Cosserat*-Kontinuum zugrunde. Es hat sich gezeigt, daß die kinematischen und dynamischen Gleichungen dieses Kontinuum übersichtlich geschrieben werden können, wenn man sich der nachstehenden Symbolik bedient [1, 2, 3, 4]

$$\operatorname{Grad}\begin{pmatrix}\overset{1}{\mathbf{a}}\\ \overset{2}{\mathbf{a}}\end{pmatrix} \triangleq \begin{cases}\partial_i \overset{1}{a}_k\\ \partial_i \overset{2}{a}_k - \epsilon_{ikl}\overset{1}{a}_l\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Rot}\begin{pmatrix}\overset{1}{\mathbf{A}}\\ \overset{2}{\mathbf{A}}\end{pmatrix} \triangleq \begin{cases}\epsilon_{ikl}\,\partial_k \overset{1}{A}_{lm}\\ \epsilon_{ikl}\,(\partial_k \overset{2}{A}_{lm} + \epsilon_{mkn}\overset{1}{A}_{ln})\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Div}\begin{pmatrix}\overset{1}{\mathbf{R}}\\ \overset{2}{\mathbf{R}}\end{pmatrix} \triangleq \begin{cases}\partial_i \overset{1}{R}_{ik}\\ \partial_i \overset{2}{R}_{ik} + \epsilon_{klm}\overset{1}{R}_{lm}\end{cases} \tag{2.3}$$

Zwischen diesen 3 Differentialoperatoren bestehen, wie man durch einfache Rechnung bestätigt, die beiden Identitäten

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot} \equiv 0\,,\ \ \mathrm{Rot}\,\mathrm{Grad} \equiv 0 \qquad (2.5),\ (2.6)$$

3. Dynamische Grundgleichungen und Spannungsfunktionen

Die Bewegungsgleichungen des Kontinuums lauten

$$\mathrm{Div}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varrho\,\dot{\mathbf{v}}\\ \theta\,\dot{\mathbf{s}}\end{pmatrix} \qquad (3.1).$$

σ_{ik} und μ_{ik} sind die unsymmetrischen Tensoren der Kraft- und Momentenspannungen. Auf der rechten Seite von (3.1) bedeuten v_k und s_k Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsvektor eines Massenelementes, dessen Dichte $\varrho\,(x_1, x_2, x_3)$ und dessen Eigendrall (Spin) $\theta\,(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{s}$ ist. Beschränken wir uns auf Linearität — eine nichtlineare Theorie des *Cosserat*-Kontinuums existiert noch nicht — so haben wir die totalen Ableitungen $\dot{\mathbf{v}}$ und $\dot{\mathbf{s}}$ durch $\partial\,\mathbf{v}/\partial\,t$ und $\partial\,\mathbf{s}/\partial\,t$ zu ersetzen.

Die statische Gleichgewichtsbedingung

$$\mathrm{Div}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix} = 0 \qquad (3.2)$$

läßt sich nach *W. Günther* [5] identisch in den 18 Spannungsfunktionen φ_{ik}, Φ_{ik} erfüllen durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix} = \mathrm{Rot}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Setzt man jetzt, um die inhomogenen Gleichungen (3.1) zu erfüllen

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix} = \mathrm{Rot}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\psi}}\\ \dot{\boldsymbol{\chi}}\end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

so muß das Tensorpaar ψ_{ik}, χ_{ik} den Gleichungen

$$\mathrm{Div}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}\\ \boldsymbol{\chi}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\varrho\,\mathbf{v}\\ \theta\,\mathbf{s}\end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

genügen. Die Punkte in (3.4) bedeuten wieder partielle Ableitungen nach der Zeit. Man erkennt bereits die Analogie von (3.4) und (3.5) zu den inhomogenen

Maxwell-Gleichungen (1.2). Der Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{s} = 0 \tag{3.6}$$

dort entspricht hier (3.1).

4. Die kinematischen Gleichungen des inkompatiblen Kontinuums

Die Deformationen eines *Cosserat*-Kontinuums werden durch 2 unsymmetrische Tensoren beschrieben, ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$. Im kompatiblen Kontinuum sind sie definiert durch

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varkappa} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} = \operatorname{Grad} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

so daß nach (2.6)

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varkappa} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

gilt. In (4.1) bedeuten u_k und ω_k die Vektorfelder der infinitesimalen Verschiebung und Drehung der Volumenelemente, und es ist

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varkappa}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} = \operatorname{Grad} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Eine anschauliche Deutung der Tensoren ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$ findet man in [6].

Ein inkompatibles Kontinuum ist dadurch gekennzeichnet, daß (4.1), (4.2) und (4.3) nicht mehr gelten. Anstelle von (4.2) tritt jetzt [5]

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varkappa} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Div} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = 0\,, \tag{4.4), (4.5}$$

wobei (4.5) wegen Div Rot $\equiv 0$ aus (4.4) folgt. *W. Günther* [5] hat B_{ik} und D_{ik} Inkompatibilitätstensoren genannt. Sie sind die Ursache dafür, daß im Kontinuum keine eindeutigen Felder von Drehungs- und Verschiebungsvektoren existieren. In der Kontinuumstheorie der Versetzungen sind B_{ik} und D_{ik} Versetzungsdichten, Disklinationen [7] und Dislokationen genannt. B_{ik} beschreibt Rotationsversetzungen (Torsions- und Biegeversetzungen), D_{ik} Translationsversetzungen (Schrauben- und Stufenversetzungen).

(4.5) steht in Analogie zu $(1.1)_2$. Bekanntlich werden die beiden homogenen *Maxwell*schen Gleichungen (1.1) identisch erfüllt durch das Viererpotential A_0, $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = \operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{A}\,. \tag{4.6), (4.7}$$

Man erkennt, daß (4.4) der Beziehung (4.6) entspricht. Durch die bislang festgestellten Analogien lassen wir uns nun leiten, die Gleichung (4.3) auf das inkompatible Kontinuum zu erweitern. Dies geschieht im Hinblick auf (4.7) durch

$$\begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \operatorname{Grad} \begin{pmatrix} \mathrm{s} \\ \mathrm{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varkappa}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} . \tag{4.8}$$

Wegen Rot Grad $\equiv 0$ folgt aus (4.8) und (4.4)

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{B}} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.9}$$

in Analogie zu $(1.1)_1$. Wir können somit von „*Maxwell*-Gleichungen" der Versetzungstheorie sprechen. Die Tensoren S_{ik} und I_{ik} in (4.8) werden Versetzungsstromdichten genannt [8.9], eine, wie mir scheint, nicht glückliche Bezeichnung. Ein Körper besitze im unbelasteten Zustand Versetzungsdichten B_{ik} und D_{ik}. Wird eine äußere Belastung aufgebracht, die groß genug ist, so geraten die Versetzungen in Bewegung und erzeugen dabei neue Versetzungen; der Körper verformt sich plastisch. Dieser Vorgang wird durch B_{ik} und D_{ik} beschrieben. Nach (4.8) oder (4.9) sind die Tensoren S_{ik} und I_{ik} ein Maß dafür, wieviele Versetzungen pro Zeiteinheit in einem Volumelement steckenbleiben oder aus ihm abwandern.

5. Diskussion der Analogie

Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir hier die Gleichungen der linearen Versetzungstheorie noch einmal zusammen.

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = 0 , \quad \operatorname{Div} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.9), (4.5}$$

$$\operatorname{Rot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} , \quad \operatorname{Div} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\chi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varrho\, \mathrm{v} \\ \theta\, \mathrm{s} \end{pmatrix} \tag{3.4), (3.5}$$

Eine *Lorentz*-Eichung des Viererpotentials, wie in der elektromagnetischen Feldtheorie üblich, entfällt hier, weil in (4.8) der Gradient den tatsächlich vorhandenen Zustand der Deformationsgeschwindigkeit des Kontinuums beschreibt. s_k und v_k in (4.8) und (3.5) müssen übereinstimmen.

Die in (2.1), (2.2), (2.3) eingeführten Differentialoperatoren entstammen der Motorrechnung [2]. In diesem Kalkül ist das Skalarprodukt der beiden Motoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ definiert durch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\mathbf{a}} \\ \overset{2}{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overset{1}{\mathbf{b}} \\ \overset{2}{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \overset{1}{\mathbf{a}} \cdot \overset{2}{\mathbf{b}} + \overset{2}{\mathbf{a}} \cdot \overset{1}{\mathbf{b}} = \overset{1}{a}_k \overset{2}{b}_k + \overset{2}{a}_k \overset{1}{b}_k . \tag{5.1}$$

Das Analogon zur *Lorentz*-Kraft (1.5) kann deshalb folgendermaßen gefunden werden:

$$F_k = -\begin{pmatrix}\varrho\, v_i\\ \theta\, s_i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}S_{kj}\\ I_{kj}\end{pmatrix} + \in_{klm}\begin{pmatrix}\sigma_{li}\\ \mu_{li}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_{mj}\\ D_{mj}\end{pmatrix}$$

$$= -\varrho\, v_i\, I_{ki} - \theta\, s_i\, S_{ki}$$

$$+ \in_{klm}(\sigma_{li}\, D_{mi} + \mu_{li}\, B_{mi}) \qquad (5.2)$$

Der Ausdruck $\in_{klm}\sigma_{li} D_{mi}$ ist die bekannte *Peach-Koehler*-Kraft, die auf die Dislokation D_{ik} einwirkt, $\in_{klm}\mu_{li} B_{mi}$ die Kraft auf die Disklination B_{ik}. Die beiden ersten Summanden in (5.2) sind die Kräfte auf die Versetzungsstromdichten [9]. Ganz entsprechend findet man das Analogon zu (1.6), die *Leistungsdichte* [9]

$$A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix}\cdot\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{pmatrix} = \sigma_{ik}\, I_{ik} + \mu_{ik}\, S_{ik} \qquad (5.3)$$

G. Kluge [9] hat gezeigt, daß an einer wandernden singulären Versetzungslinie $\sigma_{ik} I_{ik}$ gerade diejenige Arbeit ist, die von der *Peach-Koehler*-Kraft geleistet wird.

Die *Maxwell*-Gleichungen (1.1), (1.2) des elektromagnetischen Feldes müssen durch Stoffgesetze (constitutive equations) ergänzt werden, sei es im leeren Raume oder in einem materiellen Medium. Wie man weiß, können solche Stoffgesetze — man denke an ferromagnetische Körper — außerordentlich kompliziert sein.

Entsprechendes wird für unsere *Maxwell*-Gleichungen bewegter Versetzungen gelten. Wir betreten Neuland, wenn wir die Frage stellen, welcher Zusammenhang beispielsweise zwischen den Spannungsfunktionen und den Versetzungsdichten besteht. Es sei die Hoffnung ausgesprochen, daß die hier entdeckte Analogie den noch offenen und sicherlich schwierigen Problemen der Versetzungstheorie förderlich sein möge. Vermutlich weist die Elektrodynamik von *Mie* den Weg [10].*)

Den Anlaß zu dieser Arbeit gab die kürzlich erschienene und hier schon des öfteren zitierte Veröffentlichung von *G. Kluge* [9], deren Bezeichnungen wir weitgehend übernommen haben. Ohne den Wert der *Kluge*schen Arbeit schmälern zu wollen, muß gesagt werden, daß die in ihr — nach dem Beispiel anderer Autoren [8] — enthaltene Deutung des Tensors B_{ik} als Maß für die „Fremdmaterie" abwegig ist. Wie oben schon gesagt, stellt B_{ik} die Rotationsversetzungsdichte, die Disklination, dar. Andere Komplikationen werden

*) Zusatz bei der Korrektur. Der Verfassen erlaubt sich, auf seine demnächst erscheinenden Arbeiten hinzuweisen:
Maxwell-Gleichungen, Energiesatz und Lagrangedichte in der Kontinuumstheorie der Versetzungen, Acta Mechanica.
Eine Feldtheorie der Versetzungen im Cosserat-Kontinuum, ZAMP.

durch zwar richtige, aber unnötig komplizierte Spannungsfunktionen verursacht. Ferner wird nicht beachtet, daß der Deformationstensor des *Cosserat*-Kontinuums unsymmetrisch ist. Dies alles aber läßt sich leicht reparieren und setzt die Bedeutung dieser Arbeit als Vorstoß in ein bislang unbekanntes Gebiet nicht herab. Eine kritische Durchsicht der *Kluge*schen Arbeit führte zu der hier vorgestellten Analogie.

Literatur

[1] *Schaefer, H.:* Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit Momentenspannungen. Bull. Acad. Pol. Sc. XV, 1, 63—67, 69—73 (1967).

[2] *Schaefer, H.:* Analysis der Motorfelder im Cosserat-Kontinuum, ZAMM **47**, 319—328 (1967).

[3] *Kessel, S.:* Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuums, ZAMM **47**, 329—336 (1967).

[4] *Kessel, S.:* Stress Functions and Loading Singularities for the Infinitely Extended Linear Elastic-Isotropic Cosserat Continuum. Mechanics of Generalized Continua, Ed. K. Kröner, Springer-Verlag 1968.

[5] *Günther, W.:* Zur Statik und Kinematik des Cosserat-Kontinuums, Abh. d. Braunschweig. Wiss. Ges. X, 195—213 (1958).

[6] *Schaefer, H.:* Das Cosserat-Kontinuum, ZAMM **47**, 485—498 (1967).

[7] *Anthony, K., Essmann, U., Seeger, A., Träuble, H.:* Disclinations and the Cosserat-Continuum with Incompatible Rotations. Mechanics of Generalized Continua, Ed. K. Kröner, Springer-Verlag 1968.

[8] *Günther H.:* Zur nichtlinearen Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[9] *Kluge, G.:* Zur Dynamik der allgemeinen Versetzungstheorie bei Berücksichtigung von Momentenspannungen, Intern. Journ. Engng. Sci. **7**, 169—182 (1969).

[10] *Weyl, H.:* Raum-Zeit-Materie,, 4. Aufl., S. 186, Springer-Verlag Berlin 1921.