Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

О.О.Пришляк

ТОПОЛОГІЯ МНОГОВИДІВ

Навчальний посібник

Київ - 2013

О.О.Пришляк. Топологія многовидів. – К.: 2013. – 83 с.

Рецензенти

А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, зав. каф.алгебри КНУ;

Б.В.Рубльов, *д-р фіз.-мат. наук., проф. каф. обчислювальної математики КНУ*

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол № 1 від 16.09.2013

Цей навчальний посібник написано на основі спеціальних курсів, що читалися автором на механіко-математичному факультеті. Він призначений для студентів старших курсів, що навчаються за напрямом "математика". Перші три частини можуть бути використані студентами молодших курсів, при вивчені загальної, алгебраїчної та диференціальної топології.

I. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ТОПОЛОГІЇ

1. Топологічний простір. База. Підпростір

Топологічним простором називається пара (X, τ), в якій X — множина, а $\tau \subset 2^X$ — сім'я підмножин множини X, що задовольняє таким умовам:
T1) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$,
T2) Якщо $\{U_i\} \subset \tau$, то $\cup U_i \in \tau$,
T3) Якщо $U \in \tau$ і $V \in \tau$, то $U \cap V \in \tau$.

Множину X називають *простором*, елементи з X — *точками*, підмножини X, що належать τ — *відкритими* в просторі X, а сім'ю τ відкритих множин — *топологією*.

Нехай (X, d) — метричний простір. Нагадаємо, що множина U називається відкритою в метричному просторі, якщо $\forall\ x \in U$ існує відкрита куля $B(x, r) \subset U$. Сукупність τ_d усіх відкритих у метриці ρ множин є топологією на X, яка називається *метричною* топологією. Топологічний простір (X, τ) називається *метризовним*, якщо існує така метрика d на X, що $\tau = \tau_d$.

Якщо на прямій задано стандартну евклідову метрику, то кожна відкрита множина є об'єднанням інтервалів виду (a, b), де $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Цю топологію будемо називати *евклідовою* (або *стандартною*) і позначати τ_E.

Топологія $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ називається *тривіальною* (або *антидискретною*).

Топологія $\tau_D = 2^X = \{$множина всіх підмножин множини $X\}$ називається *дискретною*. Топологія буде дискретною $\Leftrightarrow$ кожна точка простору є відкритою множиною.

Множина N називається *околом* підмножини A топологічного простору X, якщо існує така відкрита множина U, що $A \subset U \subset N$. Відкрита множина є околом кожної своєї підмножини.

Теорема. Множина відкрита тоді і тільки тоді, коли вона містить окіл кожної своєї точки.

Мають місце такі властивості околів точки:

1) якщо N — окіл точки x, $N \subset K$, то K — окіл x;
2) перетин скінченного числа околів точки x є околом x.

Часто при побудові топології описують не всю сім'ю відкритих множин, а тільки деяку підсім'ю, з якої всяка відкрита множина може бути отримана за допомогою об'єднань деяких елементів підсім'ї.

Нехай (X, τ) — топологічний простір. Сім'я $\beta\subset\tau$ називається *базою* топології τ (або *базою* топологічного простору (X, τ)), якщо кожна відкрита множина в X може бути представлена у вигляді об'єднання деяких елементів із β:

$$U\in\tau\Leftrightarrow\exists\{U_i\}\subset\beta\colon U=\cup U_i.$$

Очевидно, що топологічний простір може мати багато баз.

Теорема *(1-й критерій бази)***.** Набір відкритих множин $\beta\subset\tau$ буде базою топлогії $\tau \Leftrightarrow \forall U\in\tau\ \forall x\in U\ \exists\ V\in\beta\colon x\in V\subset U$.

Теорема *(2-й критерій бази)***.** Для того, щоб сукупність $\beta=\{U_i\}\subset\tau$, $i\in M$ була базою деякої топології на множині X, необхідно і достатньо, щоб

$$X=\bigcup_{i\in M}U_i \text{ і } \forall j,k\in M\ \exists\ N\subset M\colon U_j\bigcap U_k=\bigcup_{i\in N}U_i.$$

Приклади. 1) Бази евклідової топології τ_E прямої $\mathbf{R}^1$: a) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з раціональними кінцями; b) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з ірраціональними кінцями; c) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів.

2) Якщо (X, d) — метричний простір, то сім'я відкритих куль $\beta=\{B(x, r), x\in X, r>0\}$ є базою метричної топології τ_d.

3) Сім'я $\beta=\{x, x\in X\}$ є базою дискретної топології τ_D на X.

Усі топології, які задані на одній і тій самій множині, можна частково впорядкувати за таким означенням: кажуть, що топологія τ_1 більш *сильна*, ніж топологія τ_2, якщо довільний елемент із τ_2 належить τ_1. В цьому випадку кажуть також, що топологія τ_2 більш *слабка*, ніж τ_1. Дискретна топологія — найсильніша, а тривіальна — найслабша з усіх таких топологій.

Нехай (X,τ) — топологічний простір, $Y\subset X$, $\tau_y=\{U\bigcap Y : U\in\tau\}$, тоді сукупність τ_y є топологією на Y. Топологія τ_y називається *індукованою* (або *відносною*) *топологією*. При цьому пара (Y,τ_y) називається *підпростором* простору (X,τ).

Нехай сім'я β є базою (X,τ), $Y\subset X$. Тоді сім'я $\beta_y =\{U\bigcap Y : U\in\beta\}$ є базою для (Y,τ_y).

Множини, що є відкритими в індукованій топології τ_y, можуть не бути відкритими в топології τ.

Надалі, якщо не сказано інше, то всі підмножини наділені індукованою топологією, а топологія в $\mathbf{R}^n$ — стандартна (евклідова), тобто породжена евклідовою метрикою.

2. Замкнені множини. Замикання та внутрішність

Множина F називається *замкненою* в топологічному просторі (X,τ), якщо її доповнення $X\setminus F$ відкрите в (X,τ).

Використовуючи формули де Моргана та аксіоми Т1) — Т3) топології, можна отримати такі властивості замкнених множин:

С1) $\varnothing$ і X — замкнені множини;

С2) перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною;

С3) об'єднання скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Множина, що є одночасно відкритою і замкненою називається *відкрито-замкненою*. $\varnothing$ і X є прикладами таких множин.

Замиканням $\overline{A}$ підмножини A топологічного простору (X,τ) називається перетин усіх замкнених в X множин, які містять A. Замикання $\overline{A}$ є найменшою замкненою множиною, що містить множину A.

Мають місце такі властивості замикання:

1) $A=\overline{A} \Leftrightarrow A$ замкнена; 2) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$; 3) $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$;

4) $x\in\overline{A} \Leftrightarrow \forall U\in\tau;\ U\ni x:\ U\cap A\neq\varnothing$.

Двоїстим поняттям до замикання є внутрішність.

Внутрішністю $\operatorname{Int} A$ підмножини A топологічного простору (X, τ) називається об'єднання всіх відкритих в X множин, які лежать в A. Внутрішність $\operatorname{Int} A$ є найбільшою відкритою множиною, що лежить в множині A.

Мають місце такі властивості внутрішності:

1) $\operatorname{Int} A = A \Leftrightarrow A\in\tau$, 2) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Приклади. 1) В стандартній (евклідовій) топології на прямій $\overline{[a,b)}=[a,b]$, Int $[a,b)=(a,b)$.

2) В дискретній топології на X для довільної множини A: $\overline{A}=$ Int $A=A$.

3) В тривіальній топології на X для $A\neq\varnothing$: $\overline{A}=X$ і для $A\neq X$: Int $A=\varnothing$.

Підмножина A називається *скрізь щільною* в X, якщо $\overline{A}=X$. Ця умова еквівалентна тому, що A перетинається з кожною непорожньою відкритою підмножиною простору X.

Множина дійсних чисел скрізь щільна на прямій **R**.

Межею Fr A множини A називається множина $\overline{A}\setminus$ Int A. Має місце формула:

$$\mathrm{Fr}\,A=\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}.$$

Для межі множини A використовується також позначення ∂A.

3. Неперервні відображення, гомеоморфізми

Нехай (X,τ) і (Y,γ) — топологічні простори. Відображення f: $X\to Y$ називається *неперервним*, якщо $\forall U\in\gamma$: $f^{-1}(U)\in\tau$, тобто прообраз довільної відкритої множини з Y є відкритою множиною в X.

Якщо τ — дискретна або γ — тривіальна топологія, то відображення f: $X\to Y$ — неперервне. Тотожне відображення $id: X\to X,\ id(x)=x$ є неперервним.

Теорема (Критерії неперервності відображення). Нехай (X,τ) і (Y,γ) — топологічні простори. Тоді такі умови рівносильні:

1) відображення f: $X\to Y$ неперервне;
2) прообраз довільної замкненої множини з Y є замкнена множина в X;
3) $\forall x\in X$ і довільного околу V точки $f(x)$ існує такий окіл U точки x, що $f(U)\subset V$;
4) $\forall A\subset X$: $f\left(\overline{A}\right)\subset\overline{f(A)}$.

Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням.

Відображення f: $X \to Y$ називається *гомеоморфізмом* (або топологічним відображенням), якщо воно взаємно однозначне і неперервне в обидва боки. Простори X, Y *гомеоморфні*, якщо між ними існує хоча б один гомеоморфізм. Позначають $X \cong Y$.

Символом 1_x будемо позначати тотожне відображення простору X, тобто таке відображення, що залишає кожну точку нерухомою.

Гомеоморфізми мають такі властивості:

1) 1_x — гомеоморфізм;

2) якщо f — гомеоморфізм, то f^{-1} — гомеоморфізм;

3) композиція гомеоморфізмів є гомеоморфізм.

Із цих властивостей випливає, що властивість бути гомеоморфними є відношення еквівалентності у множині топологічних просторів. Ті властивості топологічних просторів, які притаманні усім гомеоморфним просторам, називаються *топологічними інваріантами*. Більшість понять, що вводяться в наступних параграфах, є топологічними інваріантами.

Відображення f: $X \to Y$ називається (*гомеоморфним*) *вкладенням*, якщо f: $X \to f(X) \subset Y$ — гомеоморйфізм.

Якщо $X \subset Y$, то тотожне відображення id: $X \to Y$, id$(x)=x$, $x \in X$, є вкладенням.

4. Топологічні властивості

Топологічний простір називається *зв'язним*, якщо його не можна подати у вигляді об'єднання двох непорожніх відкритих множин, що не перетинаються. В іншому випадку простір називається *незв'язним*.

Якщо X — незв'язний простір, то існують такі відкритті непорожні множини U і V, що $X=U \bigcup V$ і $U \bigcap V \neq \varnothing$. Тоді множини U і V є замкненими, як доповнення до відкритих. В цьому випадку кажуть, що пара $\{U, V\}$ є *розбиттям* простору X. Отже, топологічний простір зв'язний, якщо для нього не існує розбиття.

Підмножина зв'язна в топологічному просторі, якщо вона зв'язна в ньому як підпростір.

Лема. Топологічний простір X — незв'язний $\Leftrightarrow$ існує відкрито-замкнена множина U така, що $U \neq \varnothing$ і $U \neq X$.

Приклади. 1) Простір X з тривіальною топологією — зв'язний, а з дискретною незв'язний, якщо $|X|>1$.

2) Інтервали $[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, і тільки вони є зв'язними множинами в стандартній топології на прямій.

Замикання зв'язної множини — зв'язна множина.

Лема. Образ зв'язного простору при неперервному відображенні — зв'язний.

Компонентою зв'язності топологічного простору називається максимально зв'язна в ньому підмножина, тобто така зв'язна множина, яка не є власною підмножиною ніякої іншої зв'язної множини. Отже, U — компонента зв'язності простору $X \Leftrightarrow U$ — зв'язна і не існує зв'язної множини $V \supset U$, $V \neq U$.

Мають місце такі властивості компонент зв'язності:

1) компонента зв'язності, що містить точку x дорівнює об'єднанню всіх зв'язних множин, що містять точку x;

2) довільна компонента зв'язності є замкненою множиною;

3) якщо топологічний простір складається зі скінченого числа компонент зв'язності, то кожна компонента зв'язності є відкритою множиною;

4) кожні дві компоненти зв'язності або не перетинаються, або співпадають;

5) у гомеоморфних просторів однакове число компонент зв'язності. Отже, число компонент зв'язності є топологічним інваріантом.

Остання властивість часто використовується при доведенні негомеоморфності топологічних просторів. Так, якщо f: $X \to Y$ — гомеоморфізм, то для довільної підмножини $A \subset X$ обмеження $f|_{X \setminus A}$: $X \setminus A \to f(X \setminus A)$ — гомеоморфізм і, отже, простори $X \setminus A$, $f(X \setminus A)$ мають однакове число компонент зв'язності.

Приклад. Нехай на площині задана стандартна топологія, породжена стандартною метрикою, множина X — об'єднання координатних осей, а Y — пряма, на X і Y задано індуковану топологію. Тоді простір X негомеоморфних Y, бо, якщо з X викинути початок координат, то отримаємо простір, що має 4 компоненти зв'язності (півпрямі), а якщо з Y викинути довільну точку, то отриманий простір буде мати лише дві компоненти зв'язності.

Розглянемо операцію обернену до розбиття топологічного простору — незв'язне об'єднання.

Нехай (X, τ_1) і (Y, τ_2) — топологічні простори і $X \cap Y = \varnothing$. *Незв'язним об'єднанням* або *топологічною сумою* $X \coprod Y$ просторів X та Y називається їх об'єднання $X \cup Y$ з топологією τ, яка задається так: $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X \in \tau_1$ і $U \cap Y \in \tau_2$. Якщо $X \neq \varnothing$ і $Y \neq \varnothing$, то пара $\{X, Y\}$ є розбиттям $X \coprod Y$. Незв'язне об'єднання $\coprod X_i$ довільного числа неперетинних топологічних просторів (X_i, τ_i) визначається аналогічно: $\coprod X_i = (\cup X_i, \tau)$, $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X_i \in \tau_i$.

Шляхом з точки x в точку y в топологічному просторі X називається неперервне відображення $f:[0,1] \to X$ таке, що $f(0)=x$, $f(1)=y$.

Топологічний простір X називається *лінійно зв'язним*, якщо для довільних точок $x, y \in X$ існує шлях з x в y.

Теорема. Якщо простір X лінійно зв'язний, то він — зв'язний.

Приклад. Простір $X = \{(x,0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ є зв'язним, але лінійно не зв'язним.

Топологічний простір (X, τ) називається T_1-простором (або простором, що задовольняє аксіомі T_1), якщо для довільних точок $x, y \in X$, $x \neq y$ існує окіл U точки y, що $x \notin U$.

Теорема. (Критерій T_1-простору). Топологічний простір (X,τ) — T_1-простір $\Leftrightarrow \forall x \in X$: $\{x\}$ — замкнена.

Топологічний простір (X, τ) називається T_2 (або *хаусдорфовим*) простором, якщо для довільних точок $x, y \in X$, $x \neq y$, існують їх околи, що не перетинаються.

Підпростір хаусдорфового простору є хаусдорфовим, а підпростір T_1-простору — T_1-простір.

T_1-простір (X, τ) називається T_3 (або *регулярним*) простором, якщо $\forall$ замкненої множини A і $\forall$ $x \notin A$ $\exists U, V \in \tau$: $A \subset U$, $x \in V$, $U \cap V = \varnothing$.

T_1-простір (X, τ) називається T_4 (або *нормальним*) простором, якщо $\forall$ замкнених множин A і B, $A \cap B = \varnothing$ $\exists U, V \in \tau$: $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$.

Умову існування двох відкритих множин в аксіомі T_4 можна замінити на існування відкритої множини $U_{A,B}$ такої, що $A \subset U_{A,B}$ і $\overline{U_{A,B}} \cap B = \varnothing$.

Теорема. Кожний метризовний простір є нормальним.

Лема (Урисона)**.** Топологічний простір (X,τ) — нормальний $\Leftrightarrow$ $\forall$ замкнених множин A і B, $A \cap B = \varnothing$ $\exists$ неперервна функція f: $X \to [0,1]$, $f(A)=0$, $f(B)=1$.

Теорема (Тітце-Урисона) Якщо A — замкнена підмножина нормального простору X, f: $A \to \mathbf{R}$ — неперервна функція, то існує неперервна функція g: $X \to \mathbf{R}$, що $g|_A = f$.

Покриттям підмножини A простору X називається сім'я $\{U_i \subset X: i \in S\}$ така, що $A \subset \bigcup_{i \in S} U_i$. Покриття називається *відкритим*, якщо всі U_i — відкриті, і *скінченим*, якщо S — скінчена множина.

База топології є відкритим покриттям простору X.

Якщо $T \subset S$, то підсім'я $\{U_i \subset X: i \in T\}$ називається *підпокриттям* покриття $\{U_i \subset X: i \in S\}$, якщо вона сама є покриттям A.

Множина A називається *компактною*, якщо довільне її відкрите покриття містить скінченне підпокриття. Топологічний простір компактний, якщо він компактний в собі як підмножина.

Теорема (Гейне-Бореля). Підмножина в $\mathbf{R}^n$ — компактна $\Leftrightarrow$ вона замкнена та обмежена.

Компактифікацією простору X називається пара $cX=(Y, c)$, де Y — компактний хаусдорфовий простір, а c: $X \to Y$ — вкладення таке, що $\overline{c(X)} = Y$. Якщо доповнення $Y \setminus c(X)$ складається з однієї точки, то компактифікація називається одноточковою або компактифікацією Александрова.

Вправа. Якщо (X, τ) — некомпактний простір, то покладемо $Y = X \cup \infty$, де ∞ — точка, що не належить X, $\tau_\infty = \tau \cup \{U \cup \infty: X \setminus U$ — компактне в $X\}$. Довести, що τ_∞ — топологія на Y і, якщо X — хаусдорфовий локально-компактний простір (кожна точка має компактний окіл), то (Y, c) — компактифікація X, де c: $X \to Y$ — натуральне вкладення. Всі одноточкові компактифікації гомеоморфні.

Теорема. Для простору X існує компактифікація $\Leftrightarrow$ X — нормальний простір.

5. Конструювання топологічних просторів

В цьому параграфі ми познайомимось з двома способами конструювання нових топологічних просторів з старих — добутком просторів та факторпростором.

Нагадаємо, що декартовим добутком двох множин X та Y називається множина пар: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, а декартовим добутком множин X_i, $i \in \mathbf{N}$, — множина послідовностей $\Pi X_i = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in X_i\}$. Кожну таку послідовність можна розглядати як таке відображення $\mathbf{N} \to \coprod X_i$, що $i \to X_i$. Через π: $\Pi X_i \to X_i$ будемо позначати проекцію на i-ий множник.

Топологічним або *тихоновим* добутком топологічних просторів (X, τ_1) та (Y, τ_2) називається декартовий добуток $X \times Y$ з топологією τ, базу якої складають множини $U \times V$, де $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$. *Топологічним* або *тихоновим* добутком топологічних просторів (X_i, τ_i) називається декартовий добуток ΠX_i з топологією τ, передбазу якої складають множини $\pi^{-1}(U_i)$, де $U_i \in \tau_i$. Топологія τ є найслабшою з усіх топологій на ΠX_i, для яких кожна з проекцій π_i є неперервним відображенням.

Приклади. 1) Добуток $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^2$. База $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$ складається з відкритих прямокутників $\{(a,b) \times (c,d)$: $a<b$, $c,d\}$, а база $\mathbf{R}^2$ — з відкритих куль $\{\mathrm{B}(x, r)$: $x \in \mathbf{R}^2$, $r>0\}$. Оскільки кожну кулю можна подати у як об'єднання прямокутників, а кожний прямокутник як об'єднання куль, то обидві бази задають одну і ту саму топологію на площині.

2) Канторова множина $\mathbf{K}$ є нескінченним добутком дискретних двоточкових множин. Отже, це множина послідовностей $\{(\alpha_i)$: $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbf{N}\}$ з передбазою топології, що складається з множин $U(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{(\alpha_i)$: $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i>n\}$. Розглянемо на прямій множину $A = [0,1] \backslash (1/3, 2/3) \backslash (1/9, 2/9) \backslash (7/9, 8/9) \ldots$ Тобто множина A отримана

в такий спосіб: відрізок [0,1] розрізається на 3 рівні частини і видаляється середня, відрізки, що залишилися знову розрізаються та 3 частин і видаляється середня і т.д. Відображення f: $\mathbf{K}\to A$, $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\alpha_i}{3^i}$ є гомеоморфізмом.

Топологічний добуток двох хаусдорфових просторів є хаусдорфовим.

Теорема (Тихонова). Топологічний добуток довільного числа компактних просторів є компактним простором.

Нехай (X,τ) — топологічний простір, Y — множина і f — відображення $X\to Y$. *Фактортопологією* відносно відображення f і топології τ називається найбільш сильна з усіх топологій на множині Y, для яких відображення f неперервне. Нехай тепер ω — відношення еквівалентності на множині X, Y — фактормножина X/ω і f — природна проекція $X\to X/\omega$, яка кожній точці $x\in X$ ставить у відповідність її клас еквівалентності. Тоді *факторпростір* простору (X,τ) за відношенням еквівалентності ω це фактормножина X/ω, що має фактортопологію відносно відображення f і топології τ . Часто факторпростір позначають так, як і фактормножину, тобто символом X/ω. Якщо відношення еквівалентності ω полягає в тому, що воно ототожнює усі точки з деякої підмножини $A\subset X$ з деякою однією точкою, то факторпростір позначається через X/A.

Приклади. 1) Нехай $D^1=[-1;1]$ — одновимірний диск, $S^0=\{-1;1\}$ — нульвимірна сфера. Тоді $D^1/S^0\cong S^1$ — коло.

2) Нехай $I^2=[0;1]\times[0;1]$ — одиничний квадрат, ω — відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;t)$ і $(1;t)$, $t\in I=[0,1]$. Тоді $I^2/\omega\cong S^1\times I$ — *циліндр*.

3) Нехай ω — відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ з $(1;b)$ і $(a;0)$ з $(a;1)$. Тоді $\mathbf{T}^2=I^2/\omega\cong S^1\times S^1$ — *тор*.

4) Якщо ω — відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ і $(1;1-b)$, то $MB=I^2/\omega$ —*лист Мьобіуса*.

5) Якщо ω — відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки (0;b) з (1;b) і (a;0) з (1 — a;1), то $KB=I^2/\omega$ — *пляшка Клейна*.

6) Якщо ω — відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки (0;b) з (1;1 — b) і (a;0) з (1 — a;1), то $\mathbf{R}P^2= I^2/\omega$ — (*дійсна*) *проективна площина*.

7) (Узагальнення 1) Якщо сфера S^{n-1} є межею диска D^n, то $D^n/S^{n-1}=S^n$.

В наведених нижче рисунках до прикладів 1)—7) склеюються сторони з однаковими стрілочками так, щоб стрілочки співпали.

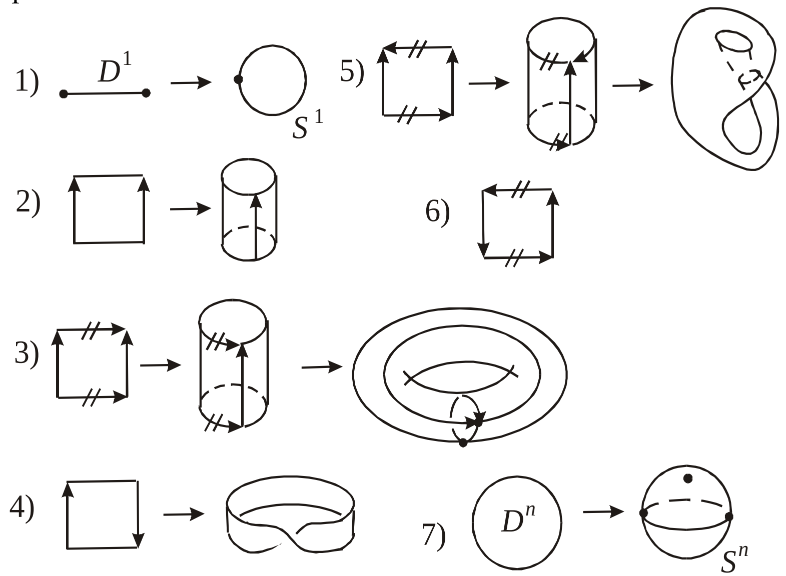

Рис. 1.

6. Класичні топологічні простори.

В цьому параграфі наводяться топологічні простори, які будуть основними прикладами в наступних главах.

Евклідові простори, сфери, диски. Нагадаємо, що евклідів простір $\mathbf{R}^n$ має стандартну (евклідову) топологію. На всіх його підмножинах топологія є індукованою.

$S^{n-1}=\{(x_1,..., x_n)\in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}=1\}$ — одинична $(n-1)$-вимірна сфера в $\mathbf{R}^n$, $D^n=\{(x_1,..., x_n)\in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\le 1\}$ — одиничний n-вимірний диск.

Ми будемо ототожнювати комплексну площину $\mathbf{C}$ з $\mathbf{R}^2$: $x+iy\leftrightarrow(x,y)$. Простір $\mathbf{C}^n$ ототожнюється з $\mathbf{R}^{2n}$.

Через $\mathbf{R}^\infty$ позначається зліченний топологічний добуток просторів $\mathbf{R}$.

Проективні простори. Дійсним n-вимірним проективним простором називається сукупність прямих у просторі $\mathbf{R}^{n+1}$, що проходять через початок координат з метрикою, що дорівнює куту між прямими. Проективний простір розмірності n позначається $\mathbf{R}P^n$ або P^n.

Кожна пряма простору $\mathbf{R}^{n+1}$, що проходить через початок координат, задається своїм напрямним вектором, визначеним з точністю до ненульового множника. Таким чином, точки з $\mathbf{R}P^n$ можна розглядати, як впорядковані набори з n+1 дійсних чисел $(x_0,x_1,...,x_n)$ (що не дорівнюють одночасно нулю), причому два таких набори $(x_0,x_1,...,x_n)$ і $(x^1{}_0,x^1{}_1,...,x^1{}_n)$ відповідають одній і тій же точці $\mathbf{R}P^n$ тоді і тільки тоді, коли існує $\lambda\neq0$, для якого $(x^1{}_0,x^1{}_1,...,x^1{}_n)=\lambda(x_0,x_1,...,x_n)$. Очевидно, що вказане співвідношення є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності впорядкованих наборів, що знаходяться у взаємно-однозначній відповідності з точками $\mathbf{R}P^n$ позначаються $(x_0{:}x_1{:}...{:}x_n)$ і називаються *однорідними координатами* точок проективного простору.

Оскільки кожна пряма, що проходить через початок координат перетинає сферу S^n по двом діаметрально протилежним точкам, то $\mathbf{R}P^n= S^n/{\sim}$, де $x\sim -x$, $x\in S^n$. Отже $\mathbf{R}P^n$ може бути отриманий зі сфери S^n, якщо в ній склеїти всі діаметрально протилежні точки. Через $\pi\colon S^n\to\mathbf{R}P^n$ будемо позначати канонічну проекцію.

Розглянемо верхню півсферу $S^n_+=\{x=(x_0,\ldots,x_n)\in S^n\colon\ x_n\ge0\}$. Проекція її на гіперплощину x_n=0 задає гомеоморфізм між S^n_+ і

D^n. Обмеження π на S^n_+ задає ще одне представлення проективного простору: $\mathbf{R}P^n=D^n/\sim$, де $x\sim -x$, $x\in\partial D^n=S^{n-1}$.

Розглянемо впорядковані набори з $n+1$ комплексних чисел $(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ (що не дорівнюють одночасно нулю), причому два таких набори $(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ і $(z^1_0,z^1_1,\ldots,z^1_n)$ будемо вважати еквівалентними, якщо існує $\lambda\neq 0,\lambda\in\mathbf{C}$, для якого $(z^1_0,z^1_1,\ldots,z^1_n)=\lambda(z_0,z_1,\ldots,z_n)$. Тоді класи еквівалентності будуть утворювати *комплексний проективний простір* $\mathbf{C}P^n=\mathbf{C}^{n+1}/\sim$.

Многовиди Грасмана. *Многовидом Грасмана або Грасманіаном* $G(n,m)$ називається множина m-вимірних підпросторів в $\mathbf{R}^n$. Відстань між підпростарами визначається як кут між ними. Многовиди Грасмана є узагальненням проективних просторів: $G(n+1,1)=\mathbf{R}P^n$.

Позначимо $M(n)$ — множину квадратних матриць порядку n, яку можна ототожнити з евклідовим простором вимірності n^2. Виявляється, що многовиди Гарсмана гомеоморфні множині проективних матриць:

$$G(n,m)=\{A\in M(n) : A^2=A,\ A=A^T,\ \mathrm{trace}(A)=m\},$$

де кожній площині ставиться у відповідність матриця проектування на цю площину.

З взаємно-однозначної відповідності між k-вимірними підпросторами і їх ортогональними доповненнями отримаємо рівність: $G(n,m)=G(n,n-m)$.

Топологічні групи. *Топологічною групою* G називається група G, на якій задана топологія така, що групова операція $G\times G\to G$ і взяття оберненого $G\to G$ є неперервними відображеннями. Кожна група буде топологічною групою, якщо на ній задати дискретну топологію. В цьому випадку група називається дискретною. З означення випливає, що при фіксованому $y\in G$ відображення $x\to xy$ є гомеоморфізмом. Група невироджених матриць $GL(n)$ з операцією добутку матриць наділяється індукованою з $M(n)=\mathbf{R}^{n^2}$ топологією.

До компактних класичних груп належать:

1) $O(n)=\{A\in M(n)\colon\ AA^T=A^TA=E\}$ — група ортогональних матриць;

2) $SO(n)=\{A\in O(n)\colon\ \det(A)=1\}$ — група спеціальних ортогональних матриць;

3) $U(n)=\{A\in M_{\mathbf{C}}(n)\colon AA^*=A^*A=E\}$ — група унітарних матриць;

4) $SU(n)=\{A\in U(n)\colon \det(A)=1\}$ — група спеціальних унітарних матриць;

5) $Sp(n)=\{A\in M_{\mathbf{H}}(n)\colon\ AA^*=A^*A=E\}$ — група кватерніоних матриць унітарних перетворень $\mathbf{H}^n$, де $A^*=\bar{A}^T$.

В усіх цих групах операцією є множення матриць, а топологія — індукована.

Класичні поверхні. Прикладами замкнених класичних поверхонь є сфера S^2, тор T^2, проективна площина RP^2, пляшка Клейна KB. З цих поверхонь побудуємо інші за допомогою операції зв'язного сумування.

Нехай D_1 — двовимірний диск, вкладений в поверхню F_1, а D_2 — в F_2, $\varphi\colon\partial D_1\to\partial D_2$ — гомеоморфізм. Під *зв'язною сумою* $F_1\#F_2$ поверхонь F_1 і F_2 будемо розуміти поверхню, що виходить з F_1 і F_2 після видалення з них внутрішностей двовимірних дисків і склеюванням країв отриманих дірок за гомеоморфізмом φ:

$$F_1\#F_2=(F_1\backslash D_1\cup F_2\backslash D_2)/\sim,\ \text{де } x\sim\varphi(x),\ x\in\partial D_1.$$

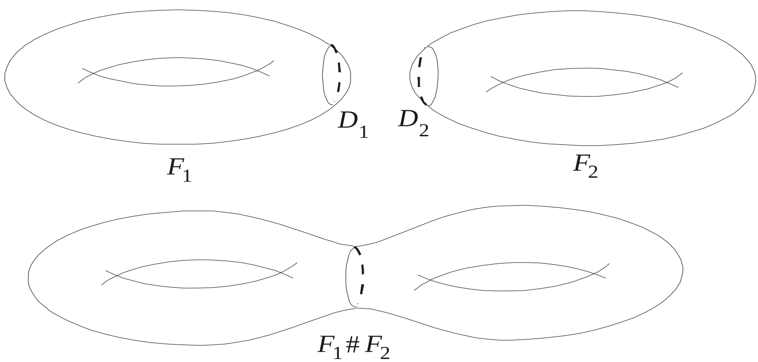

Рис. 2.

Операція зв'язної суми має такі властивості:

1) $F_1\#F_2=F_2\#F_1$;
2) $(F_1\#F_2)\#F_3=F_1\#(F_2\#F_3)$;
3) $S^2\#F=F$.

Замкненою орієнтовною поверхнею або кренделем роду g називається зв'язна сума g торів $T^2\#\ldots\#T^2$. Її можна отримати також зі сфери $S^2\subset\mathbf{R}^3$, якщо вирізати в ній $2g$ дірок і заклеїти отримані краї g циліндрами $S^1\times[0,1]$.

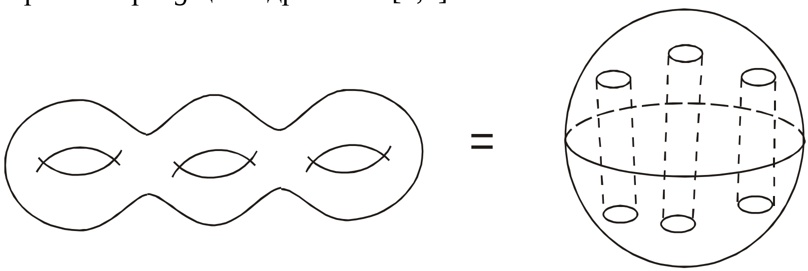

Рис. 3.

Замкненою неорієнтовною поверхнею роду g називається зв'язна сума g проективних площин $\mathbf{R}P^2\#\ldots\#\mathbf{R}P^2$. Її можна отримати зі сфери, якщо вирізати в ній g дірок і заклеїти отримані краї g листами Мьобіуса.

Компактні поверхні з краєм це ті, що можна отримати з замкнених поверхонь висвердлюванням в них дірок (викиданням внутрішностей двовимірних дисків, що не перетинаються).

Замкнені та компактні поверхні з краєм будемо називати класичними поверхнями.

Неорієнтовні поверхні характеризуються тим, що в них існує проста замкнена крива, окіл якої гомеоморфний листу Мьобіуса. В орієнтовних поверхонь окіл кожної простої замкненої кривої гомеоморфний циліндру. Оскільки лист Мьобіуса негомеоморфний циліндру, бо ці поверхні мають різне число компонент краю, то кожна неорієнтована поверхня не гомеоморфна орієнтованій.

Опишемо процедуру обернену до зв'язної суми з T^2 чи $\mathbf{R}P^2$. Нехай α — проста замкнена крива в F, що не розбиває поверхню, $U(\alpha)$ — її регулярний окіл. Позначимо F_1 поверхню, що вийде при заклейці компонент краю $F\backslash U(\alpha)$ двовимірними дисками. Якщо $U(\alpha)$ гомеоморфний листу Мьобіуса, то $F=F_1\#\mathbf{R}P^2$, а якщо циліндру, то $F=F_1\#T^2$. Рід поверхні може бути охарактеризований як максимальне число замкнених кривих, що не перетинаються і розрізання поверхні, по яких залишає її зв'язною. Отже, поверхні різного роду негомеоморфні.

Приклади. 1) Проективна площина з діркою гомеоморфна листу Мьобіуса. Дійсно, $\mathbf{R}P^2= S^2/\sim$, де $x\sim -x$, $x\in S^2$. Якщо вирізати зі сфери пару діаметрально протилежних дірок і ототожнити діаметрально протилежні точки, то отримаємо лист Мьобіуса.

Корисним є також представлення листа Мьобіуса у вигляді трикутника зі склеєною парою сторін:

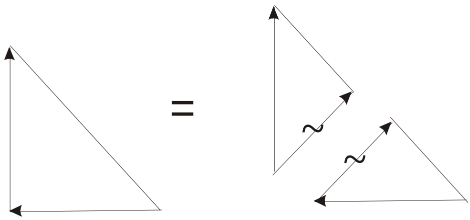

Рис. 4.

2) Пляшка Клейна є замкненою неорінтованою поверхнею роду 2, тобто ВК=$\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$. З попереднього приклада випливає, що $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ гомеоморфне квадрату $\mathrm{I}^2/\sim=[0;1]\times[0;1]/\sim$, де $(0;a)\sim(a,\ 1)$ і $(a;0)\sim(1,a)$ для всіх $a\in[0;1]$. Розріжмо квадрат вздовж діагоналі, що з'єднує точку (0;1) з (1;0). Після ототожнення точок $(0;a)$ з $(a,\ 1)$ отримаємо паралелограм, точки сторін якого ототожнюються так само як і в означенні пляшки Клейна.

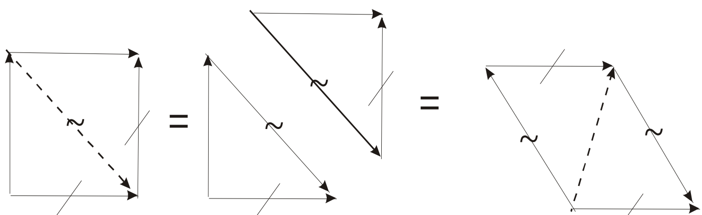

Рис. 5.

II. ЕЛЕМЕНТИ ГОМОТОПІЧНОЇ ТОПОЛОГІЇ

1. Гомотопні відображення

Розглянемо множину $C(X,Y)$ усіх неперервних відображень топологічного простору X в топологічний простір Y. Ця множина наділяється *компактно-відкритою* топологією, передбазою якої є множини вигляду $U(A,B)=\{f\in C(X,Y)|\ f(A)\subset B$, A — компакт, B — відкрита$\}$. Часто виникає необхідність досліджувати компоненти лінійної зв'язності цього простору, а також шляхи в ньому. Відомо, що для локально-компактних хаусдорфових просторів X, Y, Z (а саме такі в основному будуть розглядатися) природне відображення $C(Z, C(X,Y))\to C(X\times Z,Y)$ є гомеоморфізмом. Отже, якщо $Z=[0,1]$, то кожен шлях в $C(X,Y)$ задає неперервне відображення $F : X \times [0,1]\to Y$.

Два неперервних відображення f_0, $f_1\in C(X,Y)$ називаються *гомотопними* ($f_0\sim f_1$), якщо існує таке неперервне відображення F: $X \times [0,1]\to Y$, що $F(x,0)=f_0(x)$; $F(x,1)=f_1(x)$ для всіх $x\in X$. Неперервне відображення F називається *гомотопією* між відображеннями f_0 і f_1. Використовується також позначення $f_t(x)=F(x,t)$.

Приклади. 1) Відображення $F(x, t)=tx$ є гомотопією між постійним відображенням в початок координат і тотожнім відображення $\mathbf{R}^n$.

2) Якщо топологічний простір Y – лінійно-зв'язний, то будь-які два неперервні відображення f, g: $[0, 1]\to Y$ гомотопні між собою. Дійсно, нехай α:$[0, 1]\to Y$ – шлях, що з'єднує точку $f(0)$ з точкою $g(0)$. Тоді гомотопія між f та g може бути задана формулою

$$F(x,t)=\begin{cases} f(x(1-3t)), & 0\le t\le 1/3,\\ \alpha(3t-1), & 1/3\le t\le 2/3,\\ g(x(3t-2)), & 2/3\le t\le 1.\end{cases}$$

Легко пересвідчитись, що $F(x, 0)=f(x)$, $F(x, 1)=g(x)$. Неперервність відображення F випливає з неперервності відображень f, g та α, а також того, що $f(0)=\alpha(0)$, $g(0)=\alpha(1)$.

3) Два відображення f, g довільного простору X у відрізок гомотопні між собою: $F(x,t) = (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$.

Поняття гомотопності задає деяке відношення R між елементами множини $C(X,Y)$. Покажемо, що воно є відношенням еквівалентності, тобто 1) рефлексивним ($f\sim f$), 2) симетричним (з $f_0\sim f_1$ випливає $f_1\sim f_0$), і 3) транзитивним (з $f_0\sim f_1$ та $f_1\sim f_2$ випливає $f_0\sim f_2$):

1) Шукана гомотопія між f і f задається формулою

$$F(x,t) = f(x);$$

2) Якщо $F(x,\, t)$ — гомотопія між f_0 і f_1, то $F(x, 1-t)$ — гомотопія між f_1 і f_0;
3) Якщо $G(x,t)$ — гомотопія між f_0 і f_1, а $H(x,t)$ — гомотопія між f_1 і f_2, то гомотопія між f_0 і f_2 задається формулою

$$F(x,t) = \begin{cases} G(x,2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ H(x,2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Класи еквівалентності гомотопних відображень називаються *гомотопічними класами*. Множина гомотопічних класів неперервних відображень з X в Y позначається символом $\pi(X,Y)$, тобто $\pi(X,Y)=C(X,Y)/R$. Для локально-компактних хаусдорфових просторів $\pi(X,Y)$ є множиною компонент лінійної зв'язності $C(X,Y)$.

Вправа. Довести, що множина гомотопічних класів $\pi(*,Y)$ дорівнює множині компонент лінійної зв'язності простору Y. Тут через * позначено одноточковий простір.

Топологічний простір називається *стягуваним*, якщо тотожне відображення Id_x: $X \to X$ гомотопне постійному відображенню (відображенню X в точку $x_0 \in X$). Гомотопія між ними називається *стягуванням* простору X в точку x_0.

Приклади. Простори $\mathbf{R}^n$, I^n, D^n — стягувані.

Відображення $f \in C(X,Y)$ називається гомотопічною еквівалентністю просторів X та Y, якщо існує відображення $g \in C(X,Y)$ таке, що $gf\sim Id_x$; $fg\sim Id_Y$. В цьому випадку відображення f та g називаються *гомотопічно оберненими* (між собою) відображеннями. Клас гомотопічно еквівалентних просторів називається *гомотопічним типом*.

Приклади гомотопічно еквівалентних просторів:

1) точка та $\boldsymbol{R}^n$;
2) X – стрічка Мьобіуса, $Y=S^1\times[0, 1]$ — кільце. Дійсно, якщо зобразити X як $X = [0,1]\times[0,1]/\sim$, $(0,s)\sim(1,s-1)$, а $Y = [0,1]\times[0,1]/\sim$, $(0,s)\sim(1,s)$, то відображення $f: X\to Y$ може бути задане формулою $f(s,t) = (s,0)$, а $g: Y\to X$, $g(s,t) = (s,1/2)$. Зауважимо, що стрічка Мебіуса та кільце гомотопічно еквівалентні колу.

Очевидно, що гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні. Обернене не виконується, що видно з наведених вище прикладів.

Вправи. 1) Довести, що X стягується тоді і тільки тоді, коли X гомотопічно еквівалентний точці.

2) Довести, що довільна опукла множина X простору $\mathbf{R}^n$ стягується в точку.

4) Доведіть, що композиція гомотопічних еквівалентностей є гомотопічною еквівалентністю. Показати, що гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності.

5) Довести, що кожний зв'язний граф гомотопічно еквівалентний букету кіл $\vee_n S^1$.

Кажуть, що гомотопія F між неперервними відображеннями $f, g: X\to Y$ *стала на множині* $A\subset X$, якщо $\forall x\in A$, $\forall t_1, t_2\in[0, 1]$: $F(x, t_1)=F(x,t_2)$. Тобто образи точок множини A залишаються нерухомими при зміні параметру t. Очевидно, що відношення гомотопії, сталої на множині A, також є відношенням еквівалентності.

Підпростір A простору X називається його *деформаційним ретрактом*, якщо існує відображення (ретракція) $r: X\to A$, $r|_A=\mathrm{id}$, яке гомотопне тотожньому відображенню. Якщо крім цього гомотопія стала на A, то A називається *строгим деформаційним ретрактом*.

Приклади. 1) Коло $S^1\times\{0\}$ є строгим деформаційним ретрактом циліндра $S^1\times[0,1]$.

2) $S^1=\partial D^2$ не є деформаційним ретрактом диска D^2.

Вправа. Довести, що A — деформаціоний ретракт $X \Leftrightarrow$ вкладення $A \to X$ є гомотопічною еквівалентностю.

2. Фундаментальна група

Одним з важливих гомотопічних інваріантів топологічного простору є його фундаментальна група.

Нагадаємо, що *шляхом* u в топологічному просторі X називається неперервне відображення u: $I \to X$, де $I = [0,1]$. Точка $x_0 = u(0)$ називається *початковою* точкою, а $y_0 = u(1)$ — *кінцевою* точкою цього шляху. Використовуються також вирази: u є шляхом з x_0 в y_0, шлях u з'єднує точки x_0 та y_0.

Шлях, у якого початкова та кінцеві точки співпадають, називається *петлею*. Множина всіх петель простору X з початком в точці x_0 позначається $\Omega(X, x_0)$.

На множині $\Omega(X, x_0)$ введемо такі позначення:

1) *Композиція петель* uv: $I \to X$ з початком в x_0 визначається умовою

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{при } 0 \le t \le 1/2, \\ v(2t-1) & \text{при } 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$

тобто шлях, який спочатку проходить по петлі u, а потім по v.

2) *Нульовою петлею* в точці $x_0 \in X$ називається стале відображення

$$u_0 \colon I \to X;\ u_0(t) = x_0 \text{ для всіх } t \in I .$$

3) *Обернена петля* u^{-1}: $I \to X$ до петлі u:$I \to X$ визначається формулою

$$u\text{-}1(t) = u(1-t) \text{ для всіх } t \in I,$$

тобто шлях, що проходить петлю u у зворотньому напрямку.

Дві петлі $u, v \in \Omega(X, x_0)$ називаються *еквівалентними* (позначення $u \sim v$), якщо існує гомотопія між ними, стала на кінцях 0 та 1 відрізка I, тобто існує неперервне відображення H: $I \times I \to X$ з такими властивостями :

1) $H(t, 0) = u(t)$ для всіх $t \in I$;
2) $H(t, 1) = v(t)$ для всіх $t \in I$;
3) $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$ для всіх $s \in I$.

Покладемо $u_s(t)=H(t, s)$, тоді кожне u_s є петлею з початком в x_0 і $u_0=u$, $u_1=v$. Кажуть, що сім'я $(u_s)_{0\le s\le 1}$ здійснює гомотопію (деформацію) петлі u в петлю v. Введемо на множині $\Omega(X, x_0)$ топологію, що індукована компактно-відкритою топологією простору $C(X, Y)$. Тоді сім'я $(u_s)_{0\le s\le 1}$ є шляхом в $\Omega(X, x_0)$ і, отже, дві петлі будуть еквівалентними, якщо їх можна з'єднати шляхом в $\Omega(X, x_0)$.

Лема. Нехай X — топологічний простір, $u, v, w\in\Omega(X, x_0)$, u_0 — нульова петля в x_0, тоді:

1) $u_0u \sim u \sim u\, u_0$;

2) $u\, u^{-1} \sim u_0$;

3) $(uv)w \sim u(vw)$.

Оскільки гомотопія є відношенням еквівалентності, то можемо розглянути множину класів еквівалентих петель $\Omega(X, x_0)/\sim$. Клас еквівалентності, що містить петлю u, будемо позначати $[u]$. Композиція петель індукує операцію множення на множині $\Omega(X,x_0)/\sim$:

$$[u]\,[v] = [uv].$$

Для перевірки коректності задання операції множення треба пересвідчитись, що якщо $u\sim u_1$, $v\sim v_1$ то $uv\sim u_1v_1$. Дійсно, якщо $F:I\times I\to X$ – гомотопія між u та u_1, а $G:I\times I\to X$ – між v та v_1, то

$$H(t,s)=\begin{cases} F(2t,s) & \text{при } 0\le t\le 1/2,\\ G(2t-1,s) & \text{при } 1/2\le t\le 1,\end{cases}$$

є гомотопією між uv та u_1v_1.

З леми випливає, що множина класів еквівалентних петель $\Omega(X, x_0)/\sim$, разом з так введеною операцією множення, утворює групу. Ця група називається *фундаментальною групою* простору X відносно точки x_0 та позначається $\pi_1(X, x_0)$.

Нехай X і Y — два топологічні простори і $g:X\to Y$ неперервне відображення, що відображає відмічену точку $x_0\in X$ у відмічену точку $y_0\in Y$, тобто $g(x_0)=y_0$. При цьому відображенні кожна петля $u_i(t)$ переходить в петлю $g(u_i(t))$ в Y. Отже, відображення g індукує відображення g_*: $\Omega(X, x_0) \to \Omega(Y, y_0)$.

Вправи. 1) Показати, що під дією відображення g_* добуток петель переходить в добуток і гомотопні петлі переходять в гомотопні. Таким чином відображення g визначає гомоморфізм $g_*:\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ фундаментальних груп.

2) Довести формулу

$$(f\circ g)_*=f_*\circ g_*.$$

Теорема. Якщо $f:X\to Y$ — гомотопічна еквівалентність, то f_* — ізоморфізм.

Теорема. Якщо X — лінійно-зв'язний топологічний простір, то група $\pi_1(X,x_0)$ не залежить від вибору відміченої точки x_0 , тобто для довільних точок x_1, $x_2\in X$ існує ізоморфізм f: $\pi_1(X, x_1)\to \pi_1(X, x_2)$.

Таким чином, якщо X — лінійно-зв'язний, в позначенні фундаментальної групи немає необхідності позначати відмічену точку.

Лінійно-зв'язний топологічний простір X називається *одно-зв'язним*, якщо його фундаментальна група $\pi_1(X)$ — тривіальна.

Теорема. Фундаментальна група кола $\pi_1(S^1)$ ізоморфна нескінченній циклічній групі. Вона породжена класом еквівалентності петлі $u(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $0\le t \le 1$.

Приклади. 1) $\pi_1(S^1\vee S^1)=F^2$ — вільна група з двома твірними, що відповідають кожному з кіл S^1.

2) $\pi_1(S^2)=0$.

3) $\pi_1(T^2)=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Твірними є класи еквівалентності паралелі та меридіана. Вони комутують, оскільки край квадрата, з якого склеюється тор, гомотопний нулю.

4) Група $\pi_1(\vee_n S^1)$ — вільна група з n твірниими.

3. Кліткові простори

Топологічні простори, які зустрічалися в прикладах і які ми в основному будемо досліджувати (наприклад, многовиди), мають ту властивість, що їх можна подати у вигляді об'єднання множин — кліток, кожна з яких гомеоморфна $\mathbf{R}^n$. Таке подання дозволяє обчислити фундаментальну групу та інші гомотопічні інваріанти цих просторів.

Хаусдорфів простір *К* називається *клітковим простором* (або *CW-комлексом*), якщо задано його розбиття на клітинки: $K = \bigcup_{i,k} e_i^k$, що для кожної клітинки e_i^k (*k* – розмірність клітинки) існує неперервне відображення замкнутого *k*-вимірного диску D^k, обмеження якого на внутрішність є гомеоморфізмом на e_i^k і таке, що:

C) межа кожної клітинки міститься в скінченному об'єднанні клітинок меншої розмірності (closure finite);

W) множина *A* замкнена в *K* тоді і тільки тоді, коли замкнений її перетин з кожною клітинкою в топології цих клітинок (weak topology).

Розмірність кліткового простору – це найбільша розмірність його клітинок. Об'єднання всіх клітинок простору *K*, розмірність яких не перевищує *n* називається *n*-кістяком $K^n = \bigcup_{k \le n} e_i^k$.

Кожний кліковий простір може бути побудований таким індуковним способом:

1) K^0 – це дискретний простір, кожна точка якого – 0-клітинка;

2) K^n отримано з K^{n-1} за допомогою приклеювання незв'язного об'єднання *n*-вимірних дисків D_i^n за неперервними функціями (приклеючими відображеннями) f_i: $\partial D_i^n \to K^{n-1}$;

3) $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$ з найслабкішою топологією як в умові W.

Приклади кліткових просторів.

1) Сфера S^n. Найбільш типовими клітковими розбиттями сфери є

a) $S^n = e^0 \cup e^n$, $f(\partial D^n) = e^0$;

b) $S^n = e_1^0 \cup e_2^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \ldots \cup e_1^n \cup e_2^n$, $e_1^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n | x_{k+1} > 0, x_{k+2} = \ldots = x_{n+1} = 0\}$, $e_2^k = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n | x_{k+1} < 0, x_{k+2} = \ldots = x_{n+1} = 0\}$, $f_i^k : \partial D^k \to S^{k-1}$ — гомеоморфізм;

c) $S^n = \partial I^{n+1}$ — межа $(n+1)$-вимірного куба, де клітинками будуть вершини, ребра, грані.

2) Диск (шар) $D^n = e^n \cup S^{n-1}$, де S^{n-1} має одне з клітинних розбиттів описаних вище.

3) Проективний простір $\mathbf{R}P^n=S^n/\sim$, де $x\sim -x$. З розбиття b) сфери після ототожнення діаметрально протилежних точок отримуємо $\mathbf{R}P^n=e^0\cup e^1\cup \ldots\cup e^n$, де $e^k=(e_1^k\cup e_2^k)/\sim$, $x\sim -x$.
4) Кожну компактну поверхню можна отримати з многокутника, склеюючи відповідні пари сторін. 0-клітинками будуть вершини многокутника (після склейки), 1-клітинками – ребра, а 2-клітинкою – внутрішність многокутника.

Опишемо стандартне склеювання многокутника, при якому всі вершини склеюються в одну. Для замкненої орієнтованої поверхні в $4n$-кутнику склеюються 1 і 3, 2 і 4, 5 і 7, 6 і 8 і т.д. сторони по гомеоморфізмам, що змінюють орієнтацію границі. Для замкненою неорієнтованої поверхні в 2-кутнику склеюються сусідні сторони (1 і 2, 3 і 4 і т.д.) за гомеоморфізмами, що зберігають орієнтацію границі. На малюнку в многокутниках склеюються сторони з однаковими буквами і за стрілочками.

Вправи. 1) Клітковий комплекс буде скінченним тоді і тільки тоді коли він компактний.

2) Довести, що клітковий простір є зв'язним тоді та тільки тоді, коли його 1-кістяк лінійно-зв'язний.

3) Довести, що кожний зв'язний клітковий комплекс гомотопічно еквівалентний клітковому комплексу з єдиною вершиною (існує *стягуюче* дерево, вершини якого є всі 0-клітинками, а ребра – деякі з 1-клітинок).

При роботі з клітковими просторами корисною є

Теорема (про кліткову апроксимацію). Будь-яке неперервне відображення $f{:}K\to L$ одного кліткового простору в інший гомотопне клітковому відображенню g ($g(e^k)\subset L^k$, для будь-якої клітинки e^k простору K).

Ейлеровою характеристикою $\chi(K)$ скінченного кліткового простору K називається число, що дорівнює різниці кількості парновимірних та непарновимірних клітинок. Ейлерова характеристика є гомотопічним інваріантом кліткового простору, тобто якщо кліткові простори K і L є гомотопічно еквівалентними, то $\chi(K)=\chi(L)$. Якщо тополгічний простір X гомотопічно еквівалентний скінченному клітковому простору K, то покладемо $\chi(X)=\chi(K)$. Так $\chi(\mathbf{R}^n)=1$, $\chi(S^1)=0$.

Обчислення фундаментальної групи кліткового простору. Оскільки фундаментальні групи гомотопічно еквівалентних просторів є ізоморфними, то, не обмежуючи загальності, можемо вважати клітковий комплекс K зв'язним з однією вершиною (0-клітинкою) e^0.

1) 1-кістяк K^1 є букетом кіл. Його фундаментальна група $\pi_1(K^1)$ є вільною групою $F(a_j)$ з твірними $\{a_j\}$, що задаються 1-клітинками з вибраними на них орієнтаціями .

2) Підрахуємо $\pi_1(K^2)$. Для кожної 2-клітинки e_i^2, приклеююче відображення $f_i{:}\partial D^2 \to K^1$, разом з фіксованою точкою x_0 ($f_i(x_0)=e^0$) та орієнтацією ∂D^2 задають елемент $R_i \in \pi_1(K^1)$ (слово складене з літер $a_j^{\pm 1}$), який є тривіальним в $\pi_1(K^2)$. Якщо $e^0 \notin f_i(\partial D^2)$, то $R_i=1$. Крім того, $\pi_1(K^1) \to \pi_1(K^2)$ є сур'єкцією, ядро якої співпадає з нормальним замиканням $N(R_1, R_2,\ldots)$.

Отже, $\pi_1(K^2)$ має представлення $(a_1, a_2,\ldots | R_1, R_2,\ldots)$, тобто фундаментальна група $\pi_1(K^2)$ задається твірними a_j та співвідношеннями R_i як факторгрупа $F(a_j)/N(R_i)$.

3) Включення $K^2 \subset K$ індукує відображення фундаментальних груп $\pi_1(K^2) \to \pi_1(K)$, яке є ізоморфізмом.

Приклади. 1) Фундаментальна група замкненої орієнтованої поверхні роду g (заданої стандартним склеюванням многокутника) породжується $2g$ елементами a_i, b_i, i=1,...,g, що зв'язані єдиним співвідношенням $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Зокрема, фундаментальна група двовимірного тора є вільною абелевою групою з двома твірними. При $g>1$ фундаментальна група замкненої орієнтованої поверхні неабелева.

2) Фундаментальна група замкненої неорієнтованої поверхні з n листами Мьобіуса породжується n елементами $c_1, c_2, .., c_n$, які задовольняють єдину умову $c_1 c_1 c_2 c_2 \ldots c_n c_n = 1$. Зокрема, фундаментальна група проективної площини є циклічною групою другого порядку. При $n>1$ фундаментальна група замкненої неорієнтованої поверхні неабелева.

Вправа. Обчислити фундаментальну групу дійсного проективного простору $\mathbf{R}P^n$.

4. Групи гомологій

В цьому параграфі вводяться нові топологічні інваріанти — групи гомологій, які досить легко підрахувати для "гарних" топологічних просторів. Різні групи гомологій (симплиційні, сингулярні, кліткові) є однаковими на тріангульовних просторах.

Нехай k, $n \in \boldsymbol{N}$, $v_0, \ldots, v_k \in \mathbf{R}^n$ лінійно незалежні. *Симплексом* $\Delta(v_0, \ldots, v_k)$, .натягнутим на $v_0, \ldots, v_k$, називається опукла оболонка точок $v_0, \ldots, v_k$:

$$\Delta(v_0, \ldots, v_k)=\{x\in\mathbf{R}^{\boldsymbol{n}} \mid x = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,\ a_i \geq 0\}.$$

k називається розмірністю симплекса, $v_0, \ldots, v_k$ – вершинами. Симплекси, натягнуті на підмножину $\{v_0, \ldots, v_k\}$, називаються *гранями* симплексу $\Delta(v_0, \ldots, v_k)$.

Симплеціальний комплекс – це скінченний набір симплексів, в якому будь-які два симплекси перетинаються по спільній грані або не перетинаються взагалі. Якщо симплекс належить симлеціальному комплексу, то і кожна його грань належить цьому комплексу. Тріангуляцією топологічного простору X називається пара (S, h), що складається з симлеціального комплексу S та гомеоморфізму h: $S\to X$. Образи сиплексів, вершин, граней при гомеоморфізмі h також називаються симплексами, вершинами та гранями. Простір, для якого існує тріангуляція, називається тріангульовним. Кожний сиплеціальний комплекс є клітковим простором (клітками будуть внутрішності сипмлексів).

Орієнтацією симплекса називається порядок вершин цього симплекса. При цьому кажуть, що два порядки вершин задають ту саму орієнтацію, якщо вони відрізняються на парну підстановку, та протилежну – якщо на непарну. Симплекс з вибраною орієнтацією будемо називати *орієнтованим*. Якщо σ – орієнтований симплекс, то через $-\sigma$ будемо позначати симплекс з протилежною орієнтацією.

Нехай простір X – тріангульовний. Зафіксуємо його тріангуляцію (S, h) і розглянемо формальні суми $\Sigma n_i\sigma_i$, де σ_i– орієнтовані симплекси розмірності k і $n_i\in\mathbf{Z}$. При цьому $n_i\sigma_i$ =

$(-n_i)(-\sigma_i)$. Природне додавання на множині таких сум перетворює її на вільну абелеву групу, породжену k-вимірними симплексами. Ця група позначається C_k, а її елементи називаються *k-ланцюгами*. Задамо граничний оператор $\partial{:}C_k\to C_{k-1}$, який є гомоморфізмом абелевих груп. Для цього його досить визначити на твірних – k-симплексах. Якщо $\sigma(v_0, \ldots, v_k)$ – орієнтовний симплекс, з вершинами $v_0, \ldots, v_k$, то

$$\partial\sigma(v_0, \ldots, v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma(v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)\,.$$

Лема Пуанкаре. $\partial^2=0$.

Доведення. Досить перевірити рівність $\partial^2=0$ на твірних:

$$\partial^2\sigma(v_0, \ldots, v_k)=\partial(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma(v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k))=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(-1)^i\sigma(v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_k)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}(-1)^{j-1}(-1)^i\sigma(v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_k)\,.$$

Бачимо, що кожна $(k–2)$-вимірна грань зустрічається в сумі два рази з різними знаками. Отже $\partial^2=0$.□

Групу $B_k=\partial(C_{k+1})$ називається *групою k-вимірних границь*, а групу $Z_k= k\mathrm{er}(\partial{:}C_k\to C_{k-1})$ — *групою k-вимірних циклів*, а їх елементи *границями* та *циклами*.

З леми Пуанкаре і того, що група C_k — абелева, випливає, що B_k –нормальна підгрупа групи Z_k.

Факторгрупа $H_k(X,\mathbf{Z}):= Z_k/B_k$ називається *k-ою групою (симплиціальних) гомологій* простору X з цілими коефіцієнтами.

Ранг вільної частини $H_k(X,\mathbf{Z})$ називається k-м числом Бетті β_k.

Вправа. Довести, що $\chi(X)=\Sigma(-1)^k\beta_k$.

Для довільного топологічного простору X вводиться поняття сингулярних груп гомологій. Стандартним k-вимірним симплексом Δ^k в $\mathbf{R}^{k+1}$ називається симплекс натягнутий на кінці координатних ортів. Група сингулярних ланцюгів породжена неперервними відображеннями (можливо не гомеоморфізмами) стандартного k-вимірного симплекса Δ^k в простір X. Оператор границі, групи циклів, границь та гомологій вводяться аналогічно як для симплиціальних гомологій. На відміну від симплиціальних гомологій група сингуллярних гомологій може не бути скінченно породженою. Але для тріангульовних топологічних просторів ці групи ізоморфні.

Якщо задано неперервне відображенні f: $X\to Y$ топологічних просторів, то воно задає відображення сингулярних ланцюгів (як композиції з відображеннями, що задають сингулярні симплекси) f_*: $C_k(X)\to C_k(Y)$, яке є гомоморфізмом абелевих груп. Цей гомоморфізм породжує гомоморфізм груп гомологій f_*:$H_k(X)\to H_k(Y)$. Якщо f – гомотопічна еквівалентність, то f_* - ізоморфізм груп гомологій.

Твердження. Група $H_0(X,\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}^n$, де n –число компонент лінійної зв'язності простору X. Якщо X – лінійно зв'язний топологічний простір, то

$$H_1(X,\mathbf{Z})\cong\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)],$$

де $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ – комутант групи $\pi_1(X)$, тобто нормальна підгрупа породжена елементами виду $aba^{-1}b^{-1}$.

Приклади. 1) Якщо простір Х –стяжний (гомотопічно еквівалентний точці), то $H_0(X,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_n(X,\mathbf{Z})=0$, $n\neq0$.

2) $H_0(S^n,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_n(S^n,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_k(S^n,\mathbf{Z})=0$, $k\neq0$, $k\neq n$.

Використовуючи степінь відображення, можна легко підрахувати групи гомологій будь-якого кліткового простору K. Групу k-вимірних ланцюгів C_k породжена клітинками розмірності k. Граничний оператор ∂:$C_k\to C_{k-1}$ задається значенням коефіцієнтів a_{ij} з розкладу границі клітинки e_i^k за клітинками e_j^{k-1} розмірності k–1: $e_i^k = \Sigma a_{ij}\, e_j^{k-1}$. Якщо f_i: $S^{k-1}\to K^{k-1}$ — приклеюючe відображення клітинки e_i^k, а

$$\pi_j\colon K^{k-1}\to K^{k-1}/(K^{k-1}\backslash e_j^{k-1}) = S^{k-1}$$

— відображення проектування, то покладемо $a_{ij}=\deg(\pi_j\circ f_i)$. Як і раніше $H_k(K, \mathbf{Z})= \ker(\partial$:$C_k\to C_{k-1})/\partial(C_{k+1})$.

Приклади. 1) Обчислимо групи гомологій тора T^2 та проективної площини $\mathbf{R}P^2$. Будемо розглядати структуру кліткового простору на торі, представленому як квадрат зі склеєними протилежними сторонами. Тоді $C_0=\langle e^0\rangle$, $C_1=\langle e_1{}^1\rangle\oplus\langle e_2{}^1\rangle$, $C_2=\langle e^2\rangle$, $\partial e_i{}^1=0$, $\partial e^2=0$. Отже, $H_0(T^2, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_1(T^2, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, $H_2(T^2, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_k(T^2, \mathbf{Z})=0$, $k\neq 0,1,2$.

2) Представимо проективну площину, як круг, граничне коло якого розбито на два півкола, склеєних між собою по відображенню центральної симетрії відносно центра круга. Тоді $C_0=\langle e^0\rangle$, $C_1=\langle e^1\rangle$, $C_2=\langle e^2\rangle$, $\partial e^1=0$, $\partial e^2=2e^1$. Отже, $H_0(\mathbf{R}P^2, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_1(\mathbf{R}P^2, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_k(\mathbf{R}P^2, \mathbf{Z})=0$, $k\neq 0,1$.

Вправи. 1) Довести, що якщо F – замкнена орієнтована поверхня, то $H_2(F, \mathbf{Z})=\mathbf{Z}$.

2) Довести, що якщо F – неорієнтована поверхня або поверхня з краєм, то $H_2(F, \mathbf{Z})=0$.

III. ТЕОРІЯ МНОГОВИДІВ

1. Многовиди

В цьому параграфі ми вводимо одне з основних понять сучасної математики — многовида, що є k-вимірним аналогом 2-вимірних поверхонь, а також поняття гладкості та орієнтації многовида, поняття многовида з краєм. Почнемо з многовидів, що є підмножинами евклідового простору.

Означення. Нехай U, V — відкриті підмножини в $\mathbf{R}^n$. Гомеоморфізм f: $U\to V$ називається *дифеоморфізмом* (класу C^m), якщо f і f^{-1} є гладкими відображеннями (класу C^m).

Приклади. Функція $f(x)$ = tg x є дифеоморфізмом з $(-\pi/2, \pi/2)$ в $\mathbf{R}$. Функція $f(x)=x^3$ не є дифеоморфізмом з $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$.

Означення. *Підмноговидом* вимірності k в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$ називається підмножина $M\subset\mathbf{R}^n$ така, що для кожної точки $x\in M$ існує її окіл U в $\mathbf{R}^n$ і дифеоморфізм $\varphi:U\to V\subset\mathbf{R}^n$ такі, що $\varphi(U\cap M)=\varphi(U)\cap\mathbf{R}^k$, де $\mathbf{R}^k=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n\colon x_{n-k+1}=0,\ldots, x_n=0\}$. Число $n-k$ називається *ковимірністю* M.

Теорема (про неявну функцію для підмноговидів). Нехай в просторі $\mathbf{R}^n$ задано систему рівнянь

$$f_i(x_1,...,x_n)=0,\ i=1,\ldots,m,$$

де f_i – гладкі функції і M – множина розв'язків цієї системи.

Якщо ранг матриці $J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ всюди на множині M дорівнює k, то M є підмноговидом розмірності $n-k$.

Доведення. Нехай $x=(x_1,...,x_n)\in M$. За необхідності, переставляючи місцями рівняння і координати, можемо вважати, що $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{k}\neq 0$ в x. Тоді знайдеться достатньо малий окіл U точки x, в якому цей визначник ненульовий. В цьому околі решта рівнянь лінійно виражаються через перші k, бо інакше ранг J буде більший за k. Тоді ми можемо замінити систему на систему, що складається з перших k рівнянь. За теоремою про неявну функцію з курсу математичного аналізу знайдуться гладкі функції $x_i=g_i(x_{k+1},\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,n$, що $f_i(g_1(x_{k+1},\ldots,x_n),\ldots,\ g_k(x_{k+1},\ldots,x_n),\ x_{k+1},...,x_n)=0$, $i=1,\ldots,k$. Тоді дифеоморфізм φ можна задати формулою:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=(x_{k+1},\ldots,x_n,x_1-g_1(x_{k+1},\ldots,x_n),\ldots,$$
$$x_k-g_k(x_{k+1},\ldots,x_n)).$$

Приклади. 1) сфера, 2) тор.

Означення. Топологічний простір M називається (топологічним) *многовидом розмірності* n, якщо:

1) M – хаусдорфів простір (для будь-яких двох точок існують їх околи, що не перетинаються);

2) M задовольняє другій аксіомі зліченності (існує злічена база);

3) M – локально евклідів (для будь-якої точки існує окіл гомоеморфний відкритій множині $\mathbf{R}^n$).

Останні дві умови можуть бути замінені однією — існує таке зліченне покриття $\{U_i\}$ простору M відкритими множинами U_i, що кожна U_i є гомеоморфною відкритій підмножині в $\mathbf{R}^n$. Пари $(U_i,\ h_i\ )$, де h_i — гомеоморфізм U_i в $\mathbf{R}^n$, називаються *картами* для M; сім'я $\{(U_i,\ h_i)\}$ карт, що покривають $\mathbf{R}^n$, називається *атласом.* Відображення h_i задає локальну систему координат (x_1, …, x_n): кожній точці p ставляться у відповідність координати точки $h_i(p)\in\mathbf{R}^n$.

Атлас $\{(U_i,\ h_i\ )\}$ на многовиді X називається *диференційовним атласом* класу C^k, якщо для будь-яких i, j відображення

$$h_j\cdot h_i^{-1}\colon h_i(U_i\cap U_j)\to \mathbf{R}^n$$

мають неперервні частинні похідні порядку k. Відображення $h_jh_i^{-1}$ називається функцією переходу від карти (U_i, h_i) до карти (U_j, h_j).

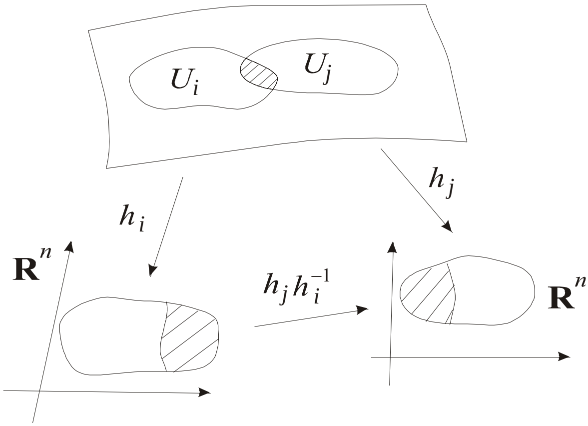

Рис. 6.

Два диференційовані атласи $\{(U_i,\ h_i)\}$ і $\{(V_i,\ g_i)\}$ класу C^k називаються *еквівалентними*, якщо їх об’єднання $\{(U_i, h_i)\}\cup\{(V_i,\ g_i\ )\}$ також є диференційованим атласом класу C^k (перевірте, що це дійсно відношення еквівалентності). Атлас називається максимальним, якщо він містить всі атласи, що еквівалентні йому. *Диференційованою структурою класу* C^k на M називається клас еквівалентності диференційованих атласів. Вона задається максимальним атласом. *Диференційованим многовидом класу* C^k називається многовид M разом із заданою диференційованою структурою класу C^k.

Гладким многовидом називається диференційовний многовид класу C^∞. Якщо (U_i, h_i) – деяка карта на многовиді X, то в околі U_i можна ввести *локальну систему координат* (y_1,...,y_n), вважаючи координатами ($y^0{}_1$,...,$y^0{}_n$) точки $p\in\ U_i$

координати її образа $h_i(p)$ в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$. Отже локальна система координат (або параметризація) задається оберненим відображеннями h_i^{-1}.

Приклади. 1) $\mathbf{R}^n$ є гладким многовидом з однією картою (U,h), $U=\mathbf{R}^n$, $h=\mathrm{Id}$.

2) $\mathbf{R}P^n$ є гладким многовидом. Розглянемо в $\mathbf{R}P^n$ області U_q такі, що $x_q\neq 0$ в U_q. В областях U_q введемо локальні координати $y_1^q,\ldots,y_n^q$, вважаючи

$$y_1^q=\frac{x_0}{x_q},\ldots,y_q^q=\frac{x_{q-1}}{x_q},\,y_{q+1}^q=\frac{x_{q+1}}{x_q},\ldots,y_n^q=\frac{x_n}{x_q}.$$

Області U_q, q=0,1,2,...,n покривають весь проективний простір. Обчислимо функції переходу від області U_i до області U_j ($i<j$). В області U_i маємо координати ($y_1^i,\ldots,y_n^i$), для яких

$$y_1^i=\frac{x_0}{x_i},\ldots,y_i^i=\frac{x_{i-1}}{x_i},\,y_{i+1}^i=\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,y_n^i=\frac{x_n}{x_i}.$$

в області U_j :

В перетині $U_i\cap U_j$ областей U_i і U_j отримаємо $y_1^j=\frac{y_1^i}{y_j^i},\,y_2^j=\frac{y_2^i}{y_j^i},\ldots,y_i^j=\frac{y_i^i}{y_j^i},\ldots,y_n^j=\frac{y_n^i}{y_j^i}$. Легко перевірити, що якобіан цих функцій не дорівнює нулю. Отже, $\mathbf{R}P^n$ є гладким многовидом.

3) Оскільки комплексний простір $\mathbf{C}$ гомеоморфний площині $\mathbf{R}^2$, то аналогічно дійсному випадку можна показати, що $\mathbf{C}P^n$ є гладким многовидом вимірності $2n$.

4) Об'єднання двох координатних осей в $\mathbf{R}^2$ не є многовидом, бо в точці їх перетину (початку координат) не існує околу гемеоморфного $\mathbf{R}^n$.

Лема. Графік M_f неперервної функції f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ ($M_f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}): x_{n+1}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$) є n-вимірним многовидом.

Дійсно, M_f покривається однією картою з локальною системою координат, що задається гомеоморфізмом $h(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))$.

Лема. Довільна відкрита множина U n-вимірного многовиду M є многовидом.

Дійсно, картами на U будуть перетин карт M з U.

Лема. Декартовий добуток многовидів є многовидом.

Доведення. Нехай $M=M_1\times M_2$ – декартовий добуток многовидів M_1 та M_2, $(U_1, h_1{:}U_1\to\mathbf{R}^k)$, $(U_2,h_2{:}U_2\to\mathbf{R}^m)$ – карти на M_1 та M_2, відповідно. Тоді , $(U_1\times U_2, h_1\times h_2{:}\ U_1\times U_2\to\mathbf{R}^{k+m})$ – карта на M. Тут $(h_1\times h_2)(x_1,x_2)=(h_1(x_1), h_2(x_2))\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^m=\mathbf{R}^{k+m}$.

Лема. Якщо M – многовид, а f: $M\to N$ – гомеоморфізм, то N – многовид.

Дійсно, якщо $\{U_i, \varphi_i\}$ – атлас на M, то $\{fU_i, f\varphi_i\}$ – атлас на N, який ми будемо називати *індукованим* відображенням f.

Множина матриць $M(n,k)$ з дійсними елементами наділяється стриктурою многовида завдяки відображенню i: $M(n,k)\to\mathbf{R}^{nk}$, $i((a_{ij}))=\{a_{11}, a_{12},\ldots, a_{1k}, a_{21},\ldots, a_{2k}, \ldots, a_{nk}\}$.

Вправа. Довести, що група невироджених матриць $GL(n,\mathbf{R})$, та група спеціальних ортонормованих матриць $SO(n)$ є гладкими многовидами. Обчислити їх розмірність. (Вказівка. Показати, що $GL(n,\mathbf{R})$ є відкритою множиною в $M(n)=\mathbf{R}^{n^2}$, множині всіх квадратних матриць порядку n, та застосувати теорему про неявну функцію для $SO(n)$.)

Означення. Нехай (U_i, h_i), (U_j, h_j) – дві карти на гладкому многовиді M. Скажемо, що вони однаково орієнтовані, якщо визначник матриці, складеної з частинних похідних функції переходу $h_jh_i^{-1}$ додатній в кожній точці з перетину $U_i\cap U_j$ (якщо цей перетин зв'язний, то досить перевірити додатність визначника в одній точці). Якщо всі карти атласу однаково орієнтовані, то многовид називається *орієнтованим*. Многовид, на якому існує такий атлас, називається *орієнтовним*, а якщо не існує — *неорієнтовним*.

Крім гладких многовидів часто розглядають кусково-лінійні, комплексні та алгебраїчні многовиди. Це такі топологічні многовиди з атлосом, в якому всі функції переходу є кусково-лінійними, аналітичними та раціональними, відповідно.

Означення. *Многовидом з краєм* називається хаусдорфів простір M, що задовольняє другій аксіомі зліченності і такий, що для будь якої точки існує окіл гомоеморфний відкритій множині $\mathbf{R}^n_+=\{(x_1,\ldots, x_n)\colon x_n\geq 0\}$. При цьому множина точок, що відображаються гомеоморфізмом на множину $\{(x_1,\ldots, x_n): x_n=0\}$ називається краєм многовида M і позначається ∂M. Доповнення $M\backslash\partial M$ називається внутрішністю многовида. Поняття гладкості та орієнтованості для многовидів з краєм аналогічні, як для многовидів без краю. З означення випливає, що край є многовидом розмірності $n-1$.

Приклад. n-вимірний диск D^n є многовидом з краєм $\partial D^n=S^{n-1}$.

Означення. *Замкненим* многовидом називається компактний многовид без краю.

2. Гладкі відображення гладких многовидів

Означення. Нехай M і N — гладкі многовиди розмірності m і n і $f:M\to N$ — неперервне відображення, $x_0\in M$. Відображення f називається *гладким* в точці x_0, якщо для деякої карти (U, h) на M в точці x_0 і для деякої карти (V, g) в точці $f(x_0)$ відображення $g\circ f\circ h^{-1}:W\to\mathbf{R}^n$ належить класу C^∞ (тобто має неперервні часткові похідні всіх порядків), де $W=\{h^{-1}(U\cap f^{-1}(V))\}\subset\mathbf{R}^m$. Якщо $x_1,\ldots, x_m$ — система координат в $\mathbf{R}^m$, а $y_1,\ldots, y_n$ — в $\mathbf{R}^n$, то відображення $g\circ f\circ h^{-1}$ записується у вигляді набору функцій $y_k=f_k(x_1,\ldots, x_m)$, $k=1,\ldots,n$.

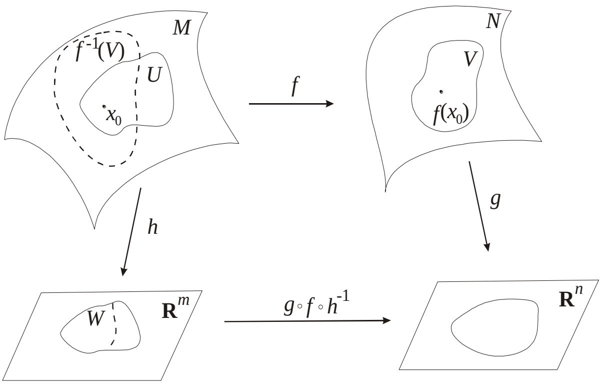

Рис. 7.

Відображення f називається *гладким*, якщо воно гладке у кожній своїй точці.

Якщо $f{:}M\to N$ — гладке відображення відносно атласів $\{(U_i,h_i)\}$ і $\{(V_i, g_i)\}$, то воно є гладким і відносно еквівалентних атласів $\{(U^1_i, h^1_i)\}$ і $\{(V^1_i, g^1_i)\}$. Іншими словами, визначення гладкого відображення не залежить від вибору атласів.

Гладкою функцією на гладкому многовиді M називається гладке відображення $f{:}\, M\to \mathbf{R}^1$ многовиду M в многовид $\mathbf{R}^1$ ($V=\mathbf{R}^1$, $g=\mathrm{id}$).

Приклади. 1) Нехай тор $\mathrm{T}^2 \in \mathbf{R}^3$, утворений обертанням кола навколо осі Oz (стандартне вкладення). Координати X, Y, Z є гладкими функціями на торі.

2) Нехай тор $\mathrm{T}^2 \in \mathbf{R}^3$ стандартно вкладений в $\mathbf{R}^3$, відображення f: $T^2\to \mathrm{S}^2$ ставить кожній точці p є T^2 у відповідність одиничний вектор нормалі до тора T в точці р. Тоді f — гладке відображення.

Означення. Нехай X і Y — гладкі многовиди і f: $X\to Y$ такий гомеоморфізм, що обидва відображення f і f^{-1} є гладкими. Тоді f називається *дифеоморфізмом*. Многовиди X і Y називаються *дифеоморфними* якщо між ними існує який-небудь дифеоморфізм. В цьому випадку вони, звичайно ж, мають однакову розмірність.

Означення. Підмножина $N\subset M$ гладкого n-вимірного многовиду називається *підмноговидом* (розмірності k), якщо N — гладкий многовид, такий що для будь-якої точки $x\in N$ існує карта (U, h) з максимального атласу M, така що $x\in U$, в локальних координатах $x_1,\ldots, x_n$, що визначаються цією картою множина $N\cap U$ задається системою рівнянь $x_{k+1}=0, \ldots, x_n=0$. При цьому ($N\cap U$, $h_{|N\cap U}$) входить до максимального атласу N.

Теорема. Нехай M — гладкий зв'язний многовид. Тоді для довільних точок $x, y\in M$ існує дифеоморфізм f: $M\to M$ такий, що $f(x)=y$.

Вправа. Довести, що якщо $\dim X<\dim Y$, а $f : X \to Y$ — гладке відображення, то $f\,(X)\neq Y$.

Означення. *Групою Лі* G називається гладкий многовид G, який є одночасно групою і такий, що групова операція $G\times G\to G$ і взяття оберненого $G\to G$ є гладкими відображеннями.

Приклади груп Лі:

1) Одиничне коло в комплексній площині $S^1 \subset \mathbf{C}$. Множення комплексних чисел задає групову операцію на S^1.
2) Матричні групи, які були розглянуті раніше, є многовидами і, отже, групами Лі.

3. Дотичні вектори. Дотичний простір

Означення. Нехай M – гладкий многовид, $p \in M$. *Кривою* (з початком в точці p) називається таке гладке відображення $c:(a,b) \to M$, що $a<0<b$, $c(0)=p$. Кожна така крива діє на множині $C^{\infty}(M)$ гладких функцій на M (як похідна за напрямком в точці):
$$f \to c(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ c .$$

Вправа. Довести, що ця дія є диференціюванням, тобто таке лінійне відображення, що $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M)$: $c(f\,g) = c(f)\,g + f\,c(g)$.

Означення. Нехай (U, h) – карта в точці p, що задає локальні координати $x_1, \ldots, x_n$. Тоді крива c задається звичайною кривою $h \circ c(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ в $\mathbf{R}^n$. Дві криві c і b називаються *еквівалентними*, якщо в деякій карті дорівнюють одне одному їх дотичні вектори: $\dfrac{d}{dt}(h \circ c) = \dfrac{d}{dt}(h \circ b)$.

Вправи. 1) Довести, що це означення не залежить від вибору карти (вказівка: координати векторів помножаються на ту саму матрицю з частинних похідних функцій переходу).

2) Довести, що криві еквівалентні тоді та тільки тоді, коли співпадають індуковані ними диференціювання.

Означення. *Дотичним вектором* називається клас еквівалентності кривої. Множина дотичних векторів в точці p називається *дотичним простором* в точці p і позначається T_pM. Нехай $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — дотичний вектор до координатної лінії $x_1=0, \ldots, x_{i-1}=0$, $x_i=t$, $x_{i+1}=0$, $\ldots, x_n=0$. Покоординатне додавання кривих та множення на число індукують лінійні операції на множині T_pM.

Таким чином, простір T_pM є n-вимірним векторним простором з базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Якщо крива c задається рівнянням $x(t)=\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$, то $\{x_1'(t),\ldots,x_n'(t)\}$ – координати дотичного до неї вектора в цьому базисі.

Дослідимо як перетворюються координати дотичного вектора при зміні системи координат. Нехай $y_1,\ldots,y_n$ – інша система координат в точці p; $y_1=y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n=y_n(x_1,\ldots,x_n)$ – функції переходу. Тоді рівняння кривої c в новій системі координат буде

$$y_1=y_1(x_1(t),\ldots,x_n(t)),\ldots,y_n=y_n(x_1(t),\ldots,x_n(t)).$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, маємо

$$y_i{}'=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}x_j{}'.$$

Отже, при переході до нової системи координат вектор-стовпчик координат дотичного вектору множиться на матрицю

$J=\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, яка називається матрицею Якобі функцій переходу.

Означення. Нехай f: $M\to N$ – гладке відображення гладких многовидів, $p\in M$. Тоді відображення f індукує відображення df_p: $T_pM\to T_{f(p)}N$ дотичних просторів: якщо c – крива, що задає вектор в точці p, то композиція $f\circ c$ є кривою, що задає вектор в точці $f(p)$. Відображення df_p називається *диференціалом* відображення f в точці p. Це відображення називають також *дотичним* відображенням і позначають T_pf.

Вправи. 1) Довести, що відображення df_p визначено коректно, є лінійним відображенням і в локальних координатах може бути задано формулою

$$df_p(\{a_1,\ldots,a_n\})=\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}a_k,\ldots,\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k}a_k\},$$

де $y_i=f_i(x_1,\ldots, x_n)$– локальний запис відображення f.

2) Довести, що якщо M_1, M_2, M_3 – гладкі многовиди, а f: $M_1\to M_2$, f: $M_2\to M_3$ - гладкі відображення, то

$$d(g\circ f)_p=dg_{f(p)}\circ df_p.$$

Твердження. Якщо f – дифеоморфізм, то df_p – ізоморфізм.

Вправа. Довести, що при $n\neq m$ простори $\mathbf{R}^n$ і $\mathbf{R}^m$ не дифеоморфні.

Означення. Точка $x\in M$ буде *регулярною* точкою відображення f, якщо ранг матриці $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ максимальний. Не регулярні точки називаються *критичними* або *особливими*.

Вправи. 1) Нехай X^n – замкнений многовид, $f : X^n \to Y^n$ – гладке відображення, $y_0\in Y$ — регулярна точка відображення f. Довести, що прообраз $f^{-1}(y_0)$ складається з скінченного числа точок.

2) Нехай $f : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{S}^{n-1}$ – відображення, яке ставить кожній ортогональній матриці у відповідність її перший стовбець. Довести, що у відображення f всі точки регулярні. Знайти прообраз $f^{-1}(y)$.

Означення. Відображення f: $M\to N$ називається *зануренням*, якщо для довільної точки $p\in M$ диференціал відображення df: $T_pM\to T_{f(p)}N$ є мономорфізмом, тобто ізоморфізмом на підпростір простору $T_{f(p)}N$. Так, крива буде зануренням, якщо дотичні вектори в кожній її точці ненулові.

Відображення f: $N\to M$ між многовидами називається *вкладенням*, якщо воно гладке і якщо відображення f:$N\to f(N)$ – дифеоморфізм, де $f(N)$ – підмноговид многовиду M. Якщо N – підмноговид многовиду M, то відображення включення $N\subset M$ є вкладенням.

Вправа. Довести, що занурення замкненого многовида є вкладенням, якщо воно є ін’єкцією.

Означення. *Дотичним розшаруванням* многовида M називається незв’язне об’єднання $TM := \bigcup\limits_{p\in M} T_pM$ дотичних просторів разом з канонічною проекцією π: $TM \to M$ такою, що $\pi(T_pM)=\{p\}$. При цьому TM наділяється структурою многовиду: кожна карта (U, h) на M індукує карту $(U \times \bigcup_{p\in U} T_pM, H)$, де гомеоморфізм H задається формулою

$$H(p, v) := (h(p), (v_1,\ldots, v_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Тут v_i – коєфіцієнти (координати) вектора v в розкладі його за базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$ простору T_pM.

Вправа. Показати, що TM є гладким многовидом (розмірності $2n$), а відображення π — гладким відображенням многовидів.

Конструкція. Нехай многовид M вкладений в $\mathbf{R}^N$ (існування такого вкладення випливає з теореми Уітні). Тоді дотичне розшарування $TM=\{(p,v)\in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N \mid p\in M, v\in T_pM\}$ є многовидом, вкладеним в $\mathbf{R}^{2N}$.

Вправи. 1) Довести, що $TS^1\cong S^1\times\mathbf{R}^1$.

2) Нехай f: $M\to N$ — гладке відображення гладких многовидів. Довести, що відображення df: $TM\to TN$ є гладким.

Означення. Нехай f: $M\to N$ — гладке відображення гладких многовидів, L — підмноговид многовида N. Відображення f називається *трансверсальним* до L *в точці* $p\in M$, якщо $p\notin L$ або $df(T_pM)+T_{f(p)}L= T_{f(p)}N$. Відображення f *трансверсальне* до L, якщо воно трансверсальне в кожній точці $p\in M$. Підмноговид $L_1\subset N$ називаються трансверсальним до підмноговида $L_2\subset N$, якщо відображення вкладення i: $L_1\to N$ є трансверсальним до L_2. Очевидно, що якщо L_1 трансверсальний до L_2, то L_2 трансверсальний до L_1. Про трансверсальні підмноговиди також кажуть, що вони знаходяться у загальному положені.

Приклади. Якщо $\dim L_1+\dim L_2<\dim N$, то L_1 трансверсальний до L_2 $\Leftrightarrow$ $L_1\cap L_2=\varnothing$. Якщо f: $M\to N$ — субмерсія, то f трансверсальне до будь-якого підмноговида $L\subset N$. На двовимірному многовиді (поверхні) дві криві трансверсальні $\Leftrightarrow$ вони не мають точок дотику.

4. Вкладення многовидів у евклідів простір

У даному розділі ми покажемо, що довільний компактний многовид може бути вкладений у евклідів простір відповідної розмірності. При цьому спочатку ми побудуємо вкладення в простір дуже великої розмірності, а потім, використовуючи теорему Сарда, доведемо теорему Уітні, що дозволяє знизити розмірність простору до подвоєної розмірності многовида плюс один.

Відображення f: $N \to M$ між многовидами називається *вкладенням*, якщо воно гладке і якщо відображення $f: N \to f(N)$ – дифеоморфізм, де $f(N)$ – підмноговид многовиду M. Якщо N – підмноговид многовиду M, то відображення включення $N \subset M$ є вкладенням.

Для доведення теореми вкладення нам знадобиться одна додаткова лема, відома з математичного аналізу. Позначимо через D_r^n відкриту кулю в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з центром у початку координат і радіусом r. Нагадаємо, що *носієм* $\operatorname{supp} f$ функції $f: M \to \mathbb{R}^1$ називається замикання множини всіх точок x із M, в яких функція f відмінна від нуля.

Лема. *Нехай D_r^n – відкрита куля у $\mathbb{R}^n$ з центром в нулі й радіуса r. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує гладка функція $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ така, що носій $supp\, f$ функції f лежить у D_r^n, функція f тотожно дорівнює одиниці на кулі $D_{r-\varepsilon}^n$ й $0 \le f \le 1$.*

Зауваження. Щоб побудувати таку функцію достатньо, наприклад, використати добре відому гладку функцію f, що дорівнює нулю на півінтервалі $(-\infty, 0]$, строго монотонна на відрізку $[0,1]$ й дорівнює 1 на півінтервалі $(1, +\infty]$. Ця функція може бути задана формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ e^{-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{(1-x)^2}}}, & 0 < x < 1; \\ 1, & x \ge 1; \end{cases}$$

Теорема *(про вкладення многовида в евклідів простір)***.** Нехай M – довільний компактний гладкий многовид, тоді існує вкладення $g: M \to \mathbb{R}^N$ многовида M у евклідів простір досить великої розмірності.

Доведення. В силу компактності многовида M на ньому можна вибрати скінченний атлас $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1}^{k}$, причому можна вважати, що кожний координатний гомеоморфізм φ_j переводить U_j у відкриту кулю D_j. Розглянемо тепер систему менших відкритих куль $D_j{}' \subset D_j$ з тими ж центрами, й таких, що система відкритих множин $U_j' = \varphi_j{}^{-1}(D_j{}')$ покриває М. Така система існує оскільки для кожного j доповнення $M \backslash U_j$ та $M \backslash \bigcup_{p \neq j} U_p$ є замкненими множинами, що не перетинаються, отже, знайдуться їх околи, що не перетинаються. Позначимо через h_j гладку функцію на $\mathbb{R}^n$ з носієм у D_j тотожню 1 на $D_j{}'$ (така функція існує в силу попередньої леми). Побудуємо нове гладке відображення $\psi_j \colon M \to \mathbb{R}^n$, поклавши

$$\psi_j(x) = \begin{cases} h_j(\varphi_j(x))\varphi_j(x), & x \in U_j; \\ 0, & x \in M \backslash U_j. \end{cases}$$

Очевидно, що $\psi_j(x) = \varphi_j(x)$, якщо $x \in U_j'$. Ми побудували k гладких відображень $\{\psi_j\}_{j=1}^{k}$ із M в $\mathbb{R}^n$. Задамо тепер гладке відображення $\bar{g} \colon M \to \mathbb{R}^{nk}$, поклавши

$$\bar{g} = (\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)) \in \mathbb{R}^{nk}.$$

Покажемо, що відображення $\bar{g}$ є зануренням. Нехай x – довільна точка із M. Тоді x міститься у деякій множині $U_j' \subset U_j$. Позначимо через $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ локальні координати на карті U_j, породжені φ_ι, а координати $\mathbb{R}^{nk}$ позначимо через

$$\left(y_1^1, \ldots, y_1^n, \ldots, y_\iota^1, \ldots, y_\iota^n, \ldots, y_k^1, \ldots, y_k^n\right).$$

Матриця Якобі відображення $\bar{g}$ в точці x в координатах (x_j^m) й (y_l^i) – це матриця вигляду $(\frac{\partial y_l^i}{\partial x_j^m})$. Зокрема, матриця Якобі відображення $\bar{g}$ включає блок $(\frac{\partial y_j^i}{\partial x_j^m})$. Але, оскільки на множині U_j' відображення ψ_j збігається з φ_j, координатне представлення відображення ψ_j в координатах $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ й $(y_j^1, \ldots, y_j^n)$ має вигляд

$$y_j^i(x_j^1, \dots, x_j^n) = x_j^i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

тому $\left(\frac{\partial y_j^i}{\partial x_j^m}\right)$ – одинична матриця розміру $n \times n$. Отже, ранг матриці Якобі відображення $\bar{g}$ дорівнює n в усіх точках многовида M, що й означає, що $\bar{g}$ — занурення.

Тепер підставимо відображення $\bar{g}$ так, щоб отримати вкладення. А саме, необхідно зробити так, щоб різні точки многовида M переходили в різні точки. Для цього ми визначимо функції $\hat{h}_j: M \to \mathbb{R}^1$, поклавши

$$\hat{h}_j(P) = \begin{cases} h_j(\varphi_j(x)), & x \in U_\iota \\ 0, & x \in M \setminus U_j \end{cases}$$

Побудувавши тепер нове відображення $g: M \to \mathbb{R}^N$, де $N = kn + k$, поклавши

$$g(x) = (\bar{g}(x), h_1(x), \dots, h_k(x)).$$

Очевидно, g – знову занурення, оскільки ранг матриці Якобі відображення g не менший за ранг матриці Якобі $\bar{g}$. Покажемо, що g взаємнооднозначне. Нехай x й y – довільні різні точки з M. Оскільки система відкритих множин $\{U_j'\}$ покриває многовид M, знайдеться таке U_j', що містить x, тому $\hat{h}_j(x) = 1$. Якщо $\hat{h}_j(y) = 1$, то це означає, що y також лежить в U_j' й тому $\psi_j(x) \neq \psi_j(y)$ (відображення ψ_j на U_j' співпадає з гомеоморфізмом φ_j й не може склеювати різні точки). Тому у розглянутому випадку $g(x) \neq g(y)$. Якщо ж $\hat{h}_j(Q) \neq 1$, тоді $g(x) \neq g(y)$, оскільки вони відрізняються координатою, що відповідає $\hat{h}_j$. Нарешті, многовид M компактний, відображення g є гладким, відповідно, як ми знаємо із загальної топології, множина $g(M)$ є компактною в $\mathbb{R}^N$, тому вона замкнена. Отже, g – взаємнооднозначне відображення, образ якого є замкненою підмножиною у $\mathbb{R}^N$. Аналогічно, образ будь-якої замкненої множини замкнений. Тому відображення g – гомеоморфізм на свій образ і, отже, вкладення. Теорему доведено.

Насправді, розмірність многовида може бути суттєво зменшена. Для того щоб це нам показати знадобиться теорема Сарда.

Якщо $F: M \to N$ – гладке відображення многовида M на многовид N, то звідси, взагалі кажучи, не випливає, що диференціал відображення F також є відображенням «на». Приклад побудувати дуже легко: достатньо розглянути $F: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, задане функцією $F(x) = x^3$. Це очевидно, відображення «на», але диференціал dF дорівнює нулю в точці $x = 0$. Тим не менш, у всіх інших точках диференціал не є виродженим. Цей простий приклад ілюструю загальну ситуацію, яку нам описує теорема Сарда. Щоб сформулювати цю теорему нам знадобиться кілька означень.

Підмножина A евклідового простору $\mathbb{R}^n$ називається множиною міри нуль, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке скінченне або зліченне сімейство відкритих куль в $\mathbb{R}^n$, які покривають множину A, що сума їх $n-$вимірних об'ємів менша ε. Відмітимо, що кулі в цьому означенні можна замінити на куби або паралелепіпеди зі сторонами, паралельними осям координат.

Множини міри нуль мають такі властивості:

1. Об'єднання скінченного або зліченного сімейства множин $\{A_i\}$ міри нуль є множиною міри нуль.

2. Для довільного гладкого відображення $F: U \to V$, де U і V – відкриті підмножини в $\mathbb{R}^n$, й довільної множини $A \subset U$ міри нуль, множина $F(A)$ також є множиною міри нуль.

3. Множина міри нуль не має внутрішніх точок.

Для гладких многовидів множини міри нуль визначаються природнім чином. Підмножина A гладкого многовида M називається множиною міри нуль, якщо існує така скінченна або зліченна сім'я карт $\{(U_i, \varphi_i)\}$ на M, які покривають множину A, що кожна з множин $\varphi_i(A \cap U_i)$ має міру нуль у просторі $\mathbb{R}^n$.

Підмножина A топологічного простору називається *ніде нещільною*, якщо її замикання $\overline{A}$ не має внутрішніх точок. Підмножина, що є об'єднанням скінченної або зліченної кількості ніде нещільних множин називається *худою*.

Відмітимо, що оскільки множини міри нуль не мають внутрішніх точок, то довільна замкнена множина міри нуль є ніде не щільною множиною. Тому, якщо множина міри нуль може бути представлена у вигляді скінченного або зліченного об'єднання замкнених множин (кожна з яких, очевидно, сама має міру нуль), то вона є худою. Такі множини інколи називають нуль-худими.

Теорема (*Сарда*). Нехай $F: M \to N$ – гладке відображення многовидів. Тоді множина $C(F)$ його критичних значень є нуль-худою множиною, тобто може бути представлено у вигляді не більш ніж зліченного об'єднання замкнених множин міри нуль. Якщо многовид M – компактний, то множина $C(F)$ замкнена й ніде нещільна.

Теорема Сарда є наслідком такого твердження з курсу сатематичного аналізу.

Твердження. Нехай $f: U \to \mathbb{R}^n$ – гладке відображення відкритої множини $U \subset \mathbb{R}^m$ у простір $\mathbb{R}^n$, і нехай $K \subset U$ – довільна компактна підмножина критичних точок відображення *f*. Тоді множина *f(K)* має міру нуль.

Наслідок. Якщо $dim\, M < dim\, N$, то для довільного гладкого відображення $F: M \to N$ множина $N \backslash F(M)$ непорожня.

Вище ми вже довели, що кожний компактний многовид може бути вкладено в евклідів простір підходящої розмірності. Але, розмірність простору $\mathbb{R}^N$, в який ми вкладали многовид M, була дуже великою (дорівнювала кількості карт, помноженій на $\dim M + 1$). Теорема Уїтні, яку ми доведемо в цьому розділі, дозволить нам суттєво понизити розмірність простору $\mathbb{R}^N$.

Теорема (*Уїтні*). Нехай M – гладкий компактний многовид розмірності *n*. Тоді існує вкладення $F: M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Зауваження. Теорема залишається справедливою і для некомпактних многовидів, але доведення для некомпактного випадку громіздкіше.

Доведення. Скористаємося теоремою вкладення й розглянемо вкладення f многовида M у евклідів простір $\mathbb{R}^N$. Розглянемо довільну пряму l, що проходить через початок координат, у просторі $\mathbb{R}^N$ й позначимо через π_l ортогональну проекцію простору $\mathbb{R}^N$ вздовж прямої l на ортогональний підпростір розмірності на одиницю меншою $\pi_l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$. Ми будемо використовувати метод проекцій, який полягає в тому, що ми знаходимо пряму, для якої композиція $\pi_l \circ f : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ залишається вкладенням. Для цього достатньо перевірити виконання двох умов: 1) мономорфність диференціала; 2) взаємна однозначність з образом.

Розглянемо першу умову. Для того, щоб диференціал відображення $\pi_l \circ f$ був мономорфізмом, необхідно й достатньо, щоб пряма l не належала до підпростору $d\Phi\left(T_p M\right)$, $p \in M$. Побудуємо гладке відображення g многовида $TM\backslash M$ у проективний простір $\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1}$, ставлячи у відповідність ненульовому дотичному вектору $V \in T_P M$ пряму в $\mathbb{R}^N$, що проходить через нуль з напрямним вектором $df|_p(V) \in \mathbb{R}^N$. Легко пересвідчитись, що це відображення гладке, а тому за теоремою Сарда його образ є нуль худим у $\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1}$ при умові $\dim(TM\backslash M)<\dim(\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1})$, тобто $2n+1<N$.

Розглянемо тепер другу умову. Відсутність взаємної однозначності композиції $\pi_l \circ f$ еквівалентно існуванню у просторі $\mathbb{R}^N$ прямої, паралельної l, яка проходить через дві різні точки $f(p)$ та $f(q)$. Побудуємо гладке відображення

$$g\colon (M \times M)\backslash\Delta \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1},$$

(через Δ позначається діагональ $\Delta = \{(x, x), x \in M\}$) зіставивши кожній парі різних точок (p, q) многовида M пряму в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1}$, паралельну прямій $f(p)f(q)$ у $\mathbb{R}^N$. За теоремою Сарда образ відображення g є нуль худим у $\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1}$ при умові $\dim((M \times M)\backslash \Delta)<\dim(\mathbb{R}\mathrm{P}^{N-1})$, тобто $2n+1<N$.

Оскільки перетин двох нуль хужих множин є нуль худою множиною, що не покриває весь простір, то методом проекцій можна побудувати вкладення многовида M у евклідів простір $\mathbb{R}^{N-1}$ на одиницю меншої розмірності.

Таким чином, за допомогою метода проекцій можна зменшувати розмірність N простору доти, доки вона не дорівнюватиме $2n+1$, що й завершує доведення теореми Уїтні.

Зауваження. Взагалі кажучи, можна побудувати вкладення n-вимірного многовида у простір розмірності $2n$ (так звана сильна теорема Уїтні). Ця оцінка вже, очевидно, в загальному випадку не може бути покращена (приклад: $S^1 \to \mathbb{R}^2$).

За допомогою методу проекцій кожний компактний многовид розмірності n можна занурити у евклідів простір розмірності $2n$.

5. Векторні поля на многовидах

Означення. Скажемо, що на многовиді M задане *векторне поле X*, якщо в кожній його точці p заданий дотичний вектор $v_p \in T_pM$. Таким чином, векторне поле — це відображення X: $M \to TM$ таке, що композиція $\pi X = \mathrm{Id}$ — тотожне відображення.

В кожній карті з координатами $x_1,\dots,x_n$ векторне поле задається функціями $X_i = X_i(x_1,\dots, x_n)$ – координатами векторів за базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Векторне поле буде *гладким*, якщо всі ці функції є гладкими. Надалі, якщо не сказано інше, будемо вважати всі векторні поля гладкими.

Оскільки кожен вектор можна розглядати як диференціювання (похідну за напрямком), то завдання векторного поля рівносильне завданню диференціювання гладких функцій X: $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Означення. *Траєкторією* векторного поля називається така крива, що дотичний вектор в будь-якій точці цієї кривої співпадає з вектором поля X в цій точці.

В карті з координатами $x_1,\dots,x_n$ траєкторія є розв’язком системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} x_1' &= X_i(x_1,\dots, x_n),\\ &\;\dots,\\ x_n' &= X_n(x_1,\dots, x_n). \end{aligned} \qquad (*)$$

З теореми про існування та єдиність розв'язків системи диференціальних рівнянь випливає, що через кожну точку проходить єдина траєкторія $x_i=x_i(t)$. Траєкторія називається *повною*, якщо вона визначена для всіх $t\in\mathbf{R}^1$. Векторне поле називається *повним*, якщо через кожну точку многовиду проходить повна траєкторія. Кожне векторне поле на замкненому многовиді є повним.

Означення. Можливі три типи траєкторій на многовиді:

1) *особливі точки* – стале відображення прямої в точку. Це ті точки, в яких векторне поле дорівнює 0;
2) *прості траєкторії* – вкладення прямої або інтервалу (образ траєкторії гомеоморфний прямій);
3) *замкнені (або періодичні) траєкторії* – замкнені криві.

Нехай M – замкнений многовид. Будемо позначати через $\varphi_t(p)$, $t\in\mathbf{R}$, таку траєкторію, що $\varphi_0(p)=p$. Зафіксуємо $t\in\mathbf{R}$. Тоді маємо відображення $\varphi_t:M\to M$. Покажемо, що це відображення є дифеоморфізмом. Дійсно, існує обернене відображення $(\varphi_t)^{-1}=\varphi_{-t}$. Гладкість відображення φ_t, а також його оберненого випливає з того, що розв'язок диференціального рівняння гладко залежить від початкових умов.

Означення. Набір дифеоморфізмів $\varphi_t:M\to M$, $t\in\mathbf{R}$ називається *однопараметричною групою дифеоморфізмів* або *потоком*, якщо:

1) $\varphi_0=\mathrm{Id}$;
2) $\varphi_{-t}=(\varphi_t)^{-1}$ $\forall\ t\in\mathbf{R}$;
3) $\varphi_{t+s}=\varphi_t\varphi_s$ $\forall\ t, s\in\mathbf{R}$.

Очевидно, що кожне векторне поле на замкненому многовиді породжує потік. Навпаки, кожний потік задає криві $\varphi_t(p)$ для кожного p, а отже, і векторне поле, що складається з дотичних векторів до цих кривих. Отже векторне поле можна завдавати такими способами:

1) відображення X: $M\to TM$ таке, що $\pi X=\mathrm{Id}$;
2) диференціювання гладких функцій X: $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$;
3) система диференціальних рівнянь (*);
4) потік (однопараметрична група дифеоморфізмів) $\varphi_t:M\to M$.

Множину всіх гладких векторних полів, заданих на многовиді M, будемо позначати $\Gamma(M)$.

Вправа. Нехай p – неособа точка векторного поля X ($X_p \neq 0$). Довести, що існує система координат $(x_1,\ldots,x_n)$ в точці pтака, що $X = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot$

Означення. Якщо в кожній точці $x \in M$ заданий скалярний добуток (білінійне симетричне додатно визначене відображення) в дотичному просторі T_xM, який неперервно залежить від точки, то кажуть, що на многовиді задана ріманова метрика. У фіксованій карті (U, h) ріманова метрика задається матрицею $\left(g_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$, $x \in M$.

Прикладом ріманової метрики є перша квадратична форма поверхні в тривимірному просторі.

Означення. Нехай $x(t)=\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in (a, b)$ – рівняння кривої α в локальній системі координат $x_1, \ldots, x_n$. Довжиною кривої α називається число

$$s(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}}dt.$$

Вправа. Перевірити, що це означення не залежить від вибору системи координат.

Означення. З курсу лінійної алгебри відомо, що скалярний добуток $g\colon V\times V\to \mathbf{R}$ на векторному просторі V задає його ізоморфізм на спряжений простір $V^*\colon v\in V\to v^*\in V^*$, $v^*(w)=g(v,w)$. Вектор v називається *двоїстим* до лінійного відображення v^*.

Означення. Якщо $f\colon M\to\mathbf{R}$ – гладка функція, то визначимо для $x\in M$ вектор $\operatorname{grad} f(x) \in T_xM$ як двоїстий до лінійного відображення $df\colon T_xM\to\mathbf{R}$. Отримане векторне поле $\operatorname{grad} f$ називається *градієнтним полем* функції f. Це поле залежить від вибору ріманової метрики.

Якщо M – відкрита підмножина евклідового простору $\mathbf{R}^n$ зі стандартною метрикою, то

$$\operatorname{grad} f(x) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right\}.$$

Очевидно, що grad $f(x)=0$ тоді та тільки тоді, коли точка x є критичною точкою функції f. В регулярних точках вектор grad $f(x)$ ортогональний до поверхні рівня $f^{-1}(f(x))$.

Вправа. Довести, що функція f є не спадною на кожній траєкторії векторного поля grad f.

Означення. Особлива точка p векторного поля $X=\{X_1,\ldots, X_n\}$ називається *невиродженою*, якщо матриця $(\partial X_i/\partial x_j)_{i,j}$ є невиродженою.

Означення. *Стійким (нестійким) многовидом* точки p називається множина $S(p)=\{x\in M\colon \lim_{t\to+\infty}\varphi_t(x)=p\}$ $(U(p)=\{x\in M\colon \lim_{t\to-\infty}\varphi_t(x)=p\})$.

Приклад. Точка 0 є невиродженою особливою точкою поля $X=\{-x_1,\ldots, -x_k, x_{k+1},\ldots, x_n\}$. Її стійким многовидом є $\mathbf{R}^k=\{(x_1,\ldots,x_k, 0,\ldots, 0)\}$, а нестійким — $\mathbf{R}^{n-k}=\{(0,\ldots, 0,x_{k+1},\ldots, x_n)\}$. Насправді для кожної неворodженої критичної точки можна знайти окіл і таку систему координат, в якій векторне поле $X=\{-x_1,\ldots, -x_k, x_{k+1},\ldots, x_n\}$.

Означення. *Градієнтно-подібним полем Морса-Смейла* називається таке векторне поле X, що:

1) множина особливих точок $\Omega(X)$ є скінченною і всі особливі точки навироджені;

2) для кожної точки $x\in M$: $\lim_{t\to+\infty}\varphi_t(x)\in\Omega(X)$ і $\lim_{t\to-\infty}\varphi_t(x)\in\Omega(X)$ (кожна траєкторія починається і закінчується в особливій точці);

3) стійкі та нестійкі многовиди особливих точок перетинаються трансверсально.

Приклад. На двовимірних многовидах можливі три типа невироджених особливих точок: стоки, витоки і сідла. Умова 3) в означені рівносильна тому, що не існує траєкторії, яка починається і закінчується в сідлових точках.

IV. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МОРСА

1. Функції Морса.

Нехай M — гладкий многовид, f: $M \to \mathbf{R}$ — гладка функція.

Означення. Точка $p \in M$ називається *критичною точкою* функції f, якщо $df(p)=0$. При цьому $f(p)$ називається критичним значенням функції f.

Нехай (U, h) — карта в точці p, $h(p)=0$, $(x_1,\dots, x_n)$ — локальні координати. Тоді точка p буде критичною, якщо

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} = 0.$$

Приклад. Проекція підмноговида на вісь.

Означення. Критична точка p функції f називається *невиродженою*, якщо матриця $H = \left(\dfrac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ невироджена.

Вправа. Перевірте, що це означення не залежить від вибору карти в точці p.

Означення. Гладка функція, всі критичні точки якої невироджені, називається *функцією Морса*.

Приклад. Функція f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y)=xy$ має одну критичну точку (0,0), яка є невиродженою. Функція f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x^3$ має одну вироджену критичну точку 0.

Означення. Матриця $H = \left(\dfrac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ є матрицею симетричної білінійної форми, яка називається *гессіаном,* $\mathrm{Hess}_p f$: $T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$, $\mathrm{Hess}_p f = \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$. З курсу лінійної алгебри відомо, що можна вибрати базис в T_pM, а отже і знайти таку карту в p, в якому матриця H буде мати діагональний вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}.$$

Форма $\mathrm{Hess}_p f$ буде невиродженою, якщо всі $k_i \neq 0$.

Означення. Число λ від'ємних елементів серед k_i називається *індексом* форми $\mathrm{Hess}_p f$ і *індексом* критичної точки p. Це число не залежить від вибору карти в точці p. Воно позначається $\mathrm{ind}_p f$.

Приклади. Невироджені точки локального мінімуму мають індекс 0, а максимуму n.

Теорема (*Морса*)**.** Точка $p \in M$ є невиродженою критичною точкою індексу λ функції $f \Leftrightarrow$ існує локальна система координат $x_1, \ldots, x_n$ в точці p, в якій

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2.$$

Доведення. *Необхідність.* Без обмеження загальності ми можемо припустити, що $p=0$ і $f(p)=f(0)=0$. Тоді в деякому опуклому околі 0

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) x_i dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \ldots, x_n), \text{ де } g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) dt.$$

Оскільки 0 є критичною точкою функції f, то $g_i(0)=0$. Тоді

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(sx_1, \ldots, sx_n) x_i ds = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

де $h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(sx_1, \ldots, sx_n) ds = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tsx_1, \ldots, tsx_n) dt ds.$

Отже, $\quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n).$

Матриця ($h_{ij}(0)$) дорівнює матриці $H(0)$, тому невироджена. Використовуючи лінійні заміни координат, матрицю ($h_{ij}(0)$) можна звести до діагонального вигляду. Подальше застосування теореми про неявну функцію доводить необхідні умови теореми.

Достатність. Всі перші частинні похідні функції $f(x_1,\ldots,x_n)= \; = f(p)-x_1^2-\ldots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\ldots+x_n^2$ дорівнюють 0, а матриця

$$H=\begin{pmatrix} -2 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Тому p - невироджена критична точка індексу λ.□

Наслідок. Всі невироджені критичні точки є ізольованими.

Вправа. Довести, що функція Морса на компактному многовиді має скінченне число критичних точок.

Позначимо $M_y=f^{-1}(-\infty, y)$, $\partial M_y=N_y=f^{-1}(y)$.

Лема. Якщо відрізок $[y, z]$ не містить критичних значень, то M_y гомеоморфне M_z, а N_y гомеоморфне N_z.

Доведення. Розглянемо векторне поле градієнта $\operatorname{grad} f$. Оскільки $L=f^{-1}([y, z])$ не містить критичних точок і функція зростає при русі за траєкторіями, то кожна траєкторія, що проходить через L, перетинає кожне з N_y, N_z в одній точці. Отже, маємо бієкцію між N_y, N_z. З теорії диференціальних рівнянь випливає, що вона неперервна в обидва боки, тобто це - гомеоморфізм.

Гомеоморфізм між M_y і M_z можна побудувати розтягуючи кожний відрізок траєкторії $\varphi(x)\cap f^{-1}([y\text{-}\varepsilon, y])$ до відрізку траєкторії $\varphi(x)\cap f^{-1}([y\text{-}\varepsilon, z])$. □

Розглянемо векторне поле градієнта $\operatorname{grad} f$ в околі критичної точки p в системі координат з теореми Морса:

$$\operatorname{grad} f = \{-2x_1,-2x_2,\ldots,-2x_\lambda, 2x_{\lambda+1},\ldots, 2x_n\}. \qquad (*)$$

Отже, p — невироджена особлива точка поля grad f. При цьому розмірність стійкого многовиду дорівнює індексу критичної точки.

Лема. Нехай p — єдина критична точка в $f^{-1}([f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon])$. Тоді $M_{f(p)+\varepsilon}$ гомотопічно еквівалентний $M_{f(p)-\varepsilon}$ з приклеєною λ-клітинкою за вкладенням $\partial D^{\lambda}\to\partial M_{f(p)-\varepsilon}$.

Доведення. Стискання інтегральних траєкторій поля grad$f$, що проходять через $f^{-1}(f(p)+\varepsilon)$ до $f^{-1}(f(p)-\varepsilon)$ задає гомотопічну еквівалентність $M_{f(p)+\varepsilon}$ на $M_{f(p)-\varepsilon}$ в об'єднанні зі стійким многовидом $S(p)$ точки p (див. рис. 8). Тоді $S(p)\cap f^{-1}([f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon])$ гомеоморфний D^{λ}.□

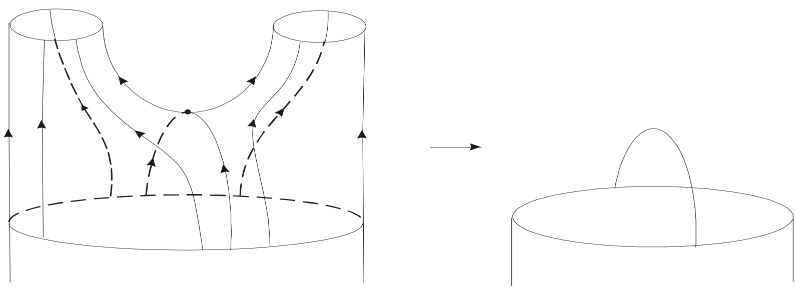

Рис. 8.

Наслідок. Для кожної функції Морса існує структура кліткового простору на многовиді M, в якій кожній λ-клітині відповідає критична точка індексу λ. Більше того, існує ріманова метрика на M, в якій клітинки співпадають зі стійкими многовидами особливих точок поля градієнта.

Теорема (*Ріба*). Якщо на компактному многовиді M існує гладка функція, у якої в точності дві критичні точки, які є невиродженими, то многовид M гомеоморфний сфері.

Доведення. Оскільки на кожному компактному многовиді є точка мінімуму і точка максимуму, то крім них інших критичних точок нема. Отже, кліткове розбиття M складається з двох клітинок, розмірності яких 0 і n, де n = dim M. Це означає, що M є одноточковою компактифікацією $\mathbf{R}^n$. Через те, що всі одноточкові компактифікації гомеоморфні, то M гомеоморфний сфері S^n.□

Зауваження. В теоремі Ріба умову невиродженості критичних точок можна опустити. Умову гомеоморфності не можна замінити на дифеоморфності, бо, як показав Дж.Мілнор, існують функції з двома критичними точками на 7-вимірних многовидах недифеоморфних S^7. Неважко показати, що на кожній замкнутій поверхні існує функція з трьома критичними точками, одна з яких вироджена.

2. Розклад многовида на ручки

Нехай M — n-вимірний многовид з краєм ∂M.

Означення. n-вимірний шар H називається *ручкою індексу* λ (або λ-*ручкою*), якщо існує гомеоморфізм φ: $D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to H$ такий, що

$$\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = H \cap M \subset \partial M.$$

Відображення φ називається *характеристичним відображенням*, а обмеження $\psi = \varphi|_{\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}}$ — *відображенням приєднання*. Кажуть, що многовид $M' = M \cup H = M \cup_\psi D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ отримано з M приєднанням ручки індексу λ і пишуть $M' = M \cup_\psi H^{(\lambda)}$. Множину $\varphi(D^\lambda \times 0)$ називають *середнім диском* або *віссю,* $\varphi(0 \times D^{n-\lambda})$ — *косереднім диском* або *ковіссю,* $\varphi(\partial D^\lambda \times 0)$ — *середньою сферою* або *a-сферою,* $\varphi(0 \times \partial D^{n-\lambda})$ — *косередньою сферою* або *b-сферою*.

Приклад. При $n=2$, $\lambda=1$:

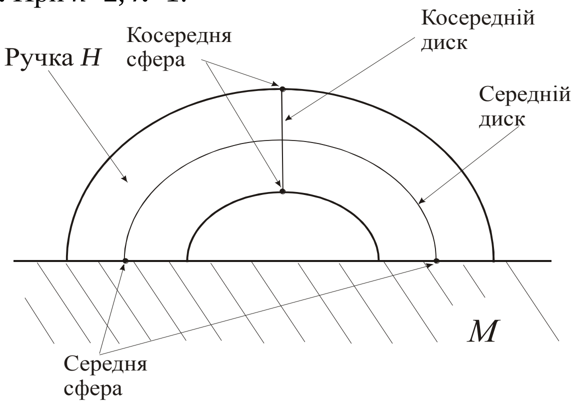

Рис. 9.

Означення. *Розкладом замкнутого многовида М на ручки* називається розклад

$$M=H_0\cup H_1\cup\ldots\cup H_m,$$

де H_0 — n-вимірний шар і H_i — ручка на $M_{i-1}=\bigcup_{j<i} H_j$. По іншому розклад многовида на ручки — це послідовність вкладень

$$M_0\subset M_1\subset M_2\subset \quad \subset M_m = M$$

таких, що M_0 є n-вимірним диском, а M_{i+1} виходить з M_i за допомогою приклейки ручки.

Вправа. Довести, що $M'=M\cup_\psi D^\lambda\times D^{n-\lambda}$ є топологічним многовидом. Якщо M — гладкий многовид, а ψ — вкладення, то на M' існує гладкий атлас.

Нехай f — функція Морса на гладкому многовиді M. Побудуємо розклад M на ручки, в якому кожна ручка містить одну критичну точку функції f, а індекси відповідних ручок і критичних точок дорівнюють один одному. Нехай X_f — градієнтно-подібне поле функції f в деякій рімановій метриці на M, p_0, $p_1,\ldots, p_m$ — критичні (особливі) точки функції f (поля X_f), $f(p_0)\le f(p_1)\le\ldots\le f(p_m)$. Покладемо H_0 — регулярний окіл p_0 такий, що $p_i\notin H_0$, при $i>0$, ∂H_0 трансверсальна до поля X_f. Для $0<i<m$: H_i — регулярний окіл (ε-окіл в відповідній метриці) стійкого многовида $S(p_i)$ особливої точки p_i в $M-\mathrm{Int}\bigcup_{j<i} H_j$, що не містить інших критичних точок і трансверсальний в $\partial H_i-\bigcup_{j<i} H_j$ до поля X_f. $H_m = M-\mathrm{Int}\bigcup_{j<m} H_j$. В так побудованому розкладі на ручки середні диски лежать на стійких, а косередні — на нестійких многовидах відповідних особливих точок.

Означення. Два розклади на ручки многовидів M і M' називаються ізоморфними, якщо існує гомеоморфізм $M\to M'$, який переводить ручки в ручки, середні і косередні диски в середні і косередні диски, відповідною.

Побудований вище розклад на ручки, з точністю до ізоморфізма, залежить від вибору ріманової метрики на M і не залежить від вибору околів.

Означення. *Розкладом на ручки з комірами* називається послідовність вкладень $M_0 \subset M'_0 \subset M_1 \subset M'_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_N = M$ таких, що M_0 є об'єднання n-вимірних дисків (0-ручок), M'_i виходить з M_i за допомогою приклейки коміра $N_i \times [0,1]$, де $N_i = \partial M_i$, а M_{i+1} виходить з M'_i за допомогою приклейки ручок, що не перетинаються. На кожнім комірі задана проекція π: $N_i \times [0,1] \to [0,1]$.

Означення. Розклади на ручки з комірами многовидів M та M' називаються *ізоморфними*, якщо існує гомеоморфізм між многовидами M і M', що переводить ручки в ручки, коміри в коміри, зберігаючи розбивку комірів на шари.

По функції Морса $f : M \to \mathbf{R}^1$ із критичними значеннями $\{1,2,\ldots, N\}$ задамо розклад на ручки з комірами так, що при цьому внутрішності комірів $N_i \times [0,1]$ будуть пошарово гомеоморфними компонентам зв'язності множини $M \setminus f^{-1}(\{1,2,\ldots, N\})$.

Нехай p — критична точка. Розглянемо таку покриваючу її карту, що $p=(0,0,\ldots, 0)$ і $f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$. Позначимо D^k, D^{n-k} диски досить малого радіуса ε:

$$D^k = \{(x_1, x_2,\ldots, x_k,0,0,\ldots,0)\colon \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \varepsilon^2\},$$

$$D^{n-k} = \{(0,\ldots, 0, x_{k+1},\ldots, x_n)\colon \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \varepsilon^2\}.$$

Ці диски є середнім і косредним дисками ручки

$$H_j = D^k \times D^{n-k} = \{(x_1, x_2,\ldots, x_n)\colon \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \varepsilon^2,\ \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \varepsilon^2\}.$$

Видалимо з многовиду M критичні рівні і так побудовані ручки для кожної критичний точки. Позначимо через W_i замикання компонентів зв'язності отриманої множини.

Покажемо, що W_i гомеоморфний $N_i \times [0,1]$, де N_i – регулярний рівень, що лежить у W_i. Для цього побудуємо для деякої ріманової метрики на многовиді M поле градієнта grad f, що трансверсально перетинає край W_i. Тоді оскільки N_i трансверсально перетинає grad f, то W_i гомеоморфно $N_i \times [0,1]$.

Послідовна приклейка ручок H_j і комірів $N_i \times [0,1]$ задає розклад на ручки з комірами.

Навпаки по кожному розкладу на ручки з комірами за допомогою процедури згладжування кутів можна побудувати функцію Морса, що породжує даний розклад на ручки. Процедура побудови розкладу хоч і залежить від вибору околів критичних точок, але всі отримані розклади на ручки з комірами будуть ізоморфні.

Для того, щоб отримати розклад на ручки (без комірів) вилучимо з M внутрішності комірів і ототожнимо точки $(x,0)$ і $(x,1)$ для всіх $x \in N_i$. Отриманий многовид M' буде гомеоморфний початковому і мати розклад на ручки. Гомеоморфізм між M і M' задає розбиття M на ручки.

Означення. Два вкладення f_0, f_1: $N \to M$ називаються *ізотопними*, якщо між ними існує гомотопія f_t, яка при кожному $t \in [0,1]$ є вкладенням. Два вкладення f_0, f_1: $N \to M$ називаються *об'ємно ізотопними*, якщо між ними існує набір дифеоморфізмів g_t, $t \in [0,1]$, які неперервно залежать від t і такий, що $g_0 = \mathrm{id}$, $f_0 = g_1(f_1)$. Кожна об'ємна ізотопія породжує просту ізотопію, як обмеження на $f_0(N)$.

При роботі з розкладом на ручки з комірами ми довільним чином вибирали структуру прямого добутку на комірах $N_i \times [0,1]$, але так, що ця структура зберігає розбиття коміра на шари $N_i \times \{t\}$. Вибір різних структур прямого добутку веде до різних об'ємно ізотопних відображень приєднання ручок. Очевидно зворотне: якщо ручки H_1, H_2 приклеїти до M за ізотопним відображеннями приєднання, то $M \cup H_1$ та $M \cup H_2$ будуть дифеоморфними.

За допомогою ізотопій відображень приєднання можна звести середні та косередні сфери ручок до загального положення в відповідних ∂M_i. Надалі в розкладах на ручки будемо вважати, що середні та косередні сфери перетитнаються трансверсально. Якщо між цими сферами одна точка трансверсального перетину то ручки називаються *доповняльними*. Якщо перетинів немає, то за допомогою ізотопії ручки можна зробити так, що вони не будуть перетинатися.

Означення. Індексом інцидентності $\delta(H_i^{\lambda}, H_j^{\lambda-1})$ ручок H_i^{λ}, $H_j^{\lambda-1}$ називається алгебраїчне число точок перетину середньої сфери H_i^{λ} і косередньої сфери ручки $H_j^{\lambda-1}$ в ∂M_{i-1}.

При роботі з ручками використовуються такі основні принципи:

Принцип 1 (*перегрупування ручок*). Якщо $M'=M\cup H^{(\lambda)}\cup H^{(\kappa)}$ і $\lambda\geq\kappa$, то $M'=M\cup H^{(\kappa)}\cup H^{(\lambda)}$ і ручки $H^{(\lambda)}$, $H^{(\kappa)}$ не перетинаються. Дійсно в загальному положенні середня сфера $H^{(\lambda)}$ не перетинає косередню сферу $H^{(\kappa)}$. Тому ручки можна зробити не перетинними і приклеювати їх в довільному порядку.

Приклади. 1) $n=2$, $\lambda=k=1$:

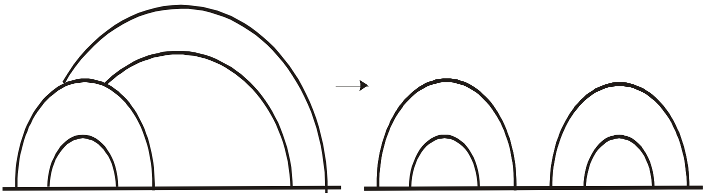

Рис. 10.

2) $n=3$, $\lambda=2$, $k=1$:

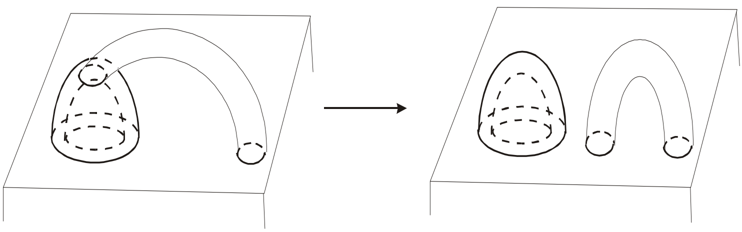

Рис. 11.

Означення. Розклад на ручки називається *правильним*, якщо ручки приклеюються за зростанням індексів, а ручки одного індексу не перетинаються (приклеюються одночасно).

Отже, з принципу 1 випливає, що будь-який розклад на ручки можна зробити правильним. Надалі розклад на ручки вважається правильним.

Принцип 2 (*додавання ручок*). Нехай ручки H_1, H_2 мають однакові індекси λ та ізотопія середньої сфери ручки H_2 перетинає косередню сферу H_1 трансверсально в одній точці. Отримана в результаті такої ізотопії ручка називається сумою H_1 та H_2 і позначається $H_1\#H_2$. В момент перетину розклад на ручки не є правильним. При цьому

$$\delta(H_1\#H_2, H^{\lambda-1})=\delta(H_1, H^{\lambda-1})\pm\delta(H_2, H^{\lambda-1}).$$

Приклад. При $n=2$, $\lambda=1$:

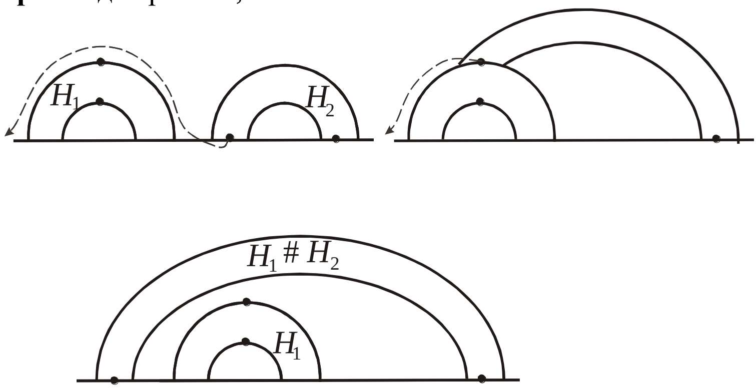

Рис. 12.

Принцип 3 (*введення та скорочення ручок*). Якщо ручки $H^{(\lambda)}$, $H^{(\lambda+1)}$ є доповняльними, то $M\cup H^{(\lambda)}\cup H^{(\lambda+1)}$ є гомеоморфним (дифеоморфним для гладких многовидів) до M. При цьому гомеоморфізм можна вибрати тотожнім зовні довільному околу $H^{(\lambda)}\cup H^{(\lambda+1)}$. Це тому, що $H^{(\lambda)}\cup H^{(\lambda+1)}$ є гомеоморфним диску D^n, що приклеюється до M за диском $D^{n-1}\subset D^n$. Отже якщо в розкладі на ручки є доповняльні, то можна побудувати розклад без цих ручок. Зворотна операція — введення доповняльних ручок.

Приклади. 1) $n=2$, $\lambda=0$.

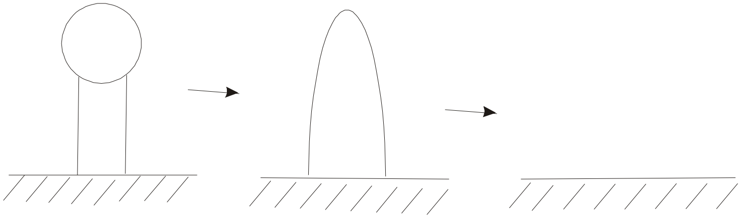

Рис. 13.

2) n=3, λ=1.

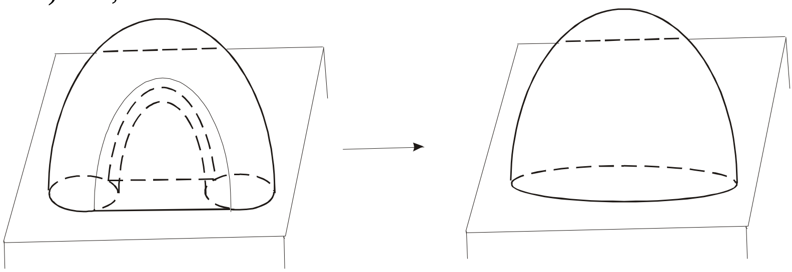

Рис. 14.

Конструкція (*Скорочення рочок індексу 0*). Нехай зв’язний многовид має правильний розклад на ручки з більш ніж однією 0-ручкою. Покажемо, що для кожної ручки індексу 0 існує доповняльна ручка індексу 1. Дійсно, якби для 0-ручки доповняльної 1-ручки не існувало, то ця ручка була б не зв’язною з рештою 0-ручок, бо недоповняльні 1-ручки та ручки більших індексів не можуть її зв’язати з іншими 0-ручками.

Отже, всі 0-ручки, за виключенням однієї — останньої, можна скоротити.

Означення. Розклад на ручки $M=H_m\cup H_{m-1}\cup\ldots\cup H_0$ в якому ручки приклеюються в зворотному порядку називається двоїстим до розкладу $M=H_0\cup H_1\cup\ldots\cup H_m$. При цьому, якщо ручка мала індекс λ в початковому розкладі на ручки, то її індекс в двоїстому розкладі буде $n-\lambda$, де n — розмірність многовиду. Середні сфери (диски) початкового розкладу є косередніми сферами (дисками) двоїстого розкладу.

Використовуючи двоїстий розклад на ручки, можна скоротити всі крім однієї n-ручки. Отже, на кожному зв’язному замкненому многовиді існує правильний розклад на ручки з однією 0-ручкою і однією n-ручкою.

Твердження. Від одного розкладу на ручки многовида M до іншого можна перейти за допомогою операцій 1)-3) та ізотопій середніх сфер ручок в об'єднанні ручок менших індексів.

Конструкція. Кожний розклад на ручки задає кліткове розбиття многовида. Для цього кожну ручку стягнемо до середнього диску. Більш точно: кожна ручка є добутком середнього та косереднього дисків і стягнення задається проекцією на перший множник. Ці стягнення задають гомотопічну еквівалентність між початковим і кінцевим просторами. Насправді можна побудувати гомеоморфізм між ними (для цього досить показати, що регулярні околи клітинок, при відніманні від них околів клітинок менших розмірностей, гомеоморфні початковим ручкам).

Хоча побудоване кліткове розбиття многовида дозволяє підрахувати групи гомологій та фундаментальну групу, це можна зробити виходячи прямо з розкладу на ручки.

Група C_λ λ-вимірних ланцюгів є вільною абелевою групою $\mathbf{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}$, де число доданків дорівнює числу λ-ручок. Граничний гмомомрфізм ∂_λ: $C_\lambda \to C_{\lambda-1}$ задається матрицею $(\delta(H_i^\lambda,\ H_j^{\lambda-1}))$. Група гомологій $H_\lambda(M)=\mathrm{Ker}\partial_\lambda/\mathrm{Im}\partial_{\lambda+1}$.

Фундаментальна група підраховується аналогічно до кліткового розбиття: твірні (букви) відповідають 1-ручкам, а співвідношення задаються 2-ручками: кожне співвідношення складається з букв, що відповідають точкам перетину середньої сфери 2-ручки з косередніми сферами 1-ручок в порядку заданому рухом по середній сфері. Степінь кожної букви дорівнює індеку відповідної точки перетину.

V. ТОПОЛОГІЯ МАЛОВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

1. Топологічна класифікація компактних 2-вимірних многовидів

Ми покажемо, що кожний замкнений 2-многовид гомеоморфний класичній поверхні, що були описані в параграфі I.6. Негомеоморфність класичних поверхонь різного роду чи різної орієнтації можна довести підрахувавши один з таких її топологічних інваріантів: ейлерову характеристику, фундаментальну групу, групи гомологій.

Нехай M — гладкий замкнений двовимірний многовид, $M=H_0\cup H_1\cup\ldots\cup H_{m+1}$ — правильний розклад на ручки з однією 0-ручкою H_0 і однією 2-ручкою H_{m+1}. Оскільки з точністю до ізотопії 2-ручка приклеюється однозначно, то для завдання розкладу на ручки досить вказати як 1-ручки приклеюються до 0-ручки. Кожну 1-ручку H_i можна приклеїти до 0-ручки H_0 двома способами так, що $H_0\cup H_i$ гомеоморфне 1) циліндру $S^1\times[0,1]$ або 2) листу Мьобіуса. В першому випадку ручку H_i будемо називати *прямою*, а в другому — *скрученою*.

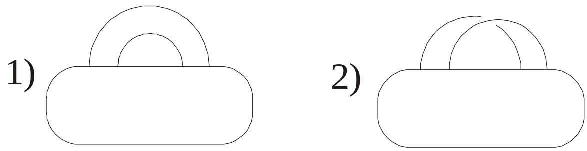

Рис. 15.

Якщо пряма ручка приклеюється до орієнтованого 2-многовида, то в результаті вийде орієнтовний многовид, а якщо до многовида приклеїти скручену ручку, то вийде неорієнтовний многовид. Отже, 2-многовид буде орієнтовним $\Leftrightarrow$ в його розкладі на ручки всі ручки є прямими.

Конструкція. Розглянемо спочатку розклад на ручки орієнтовних многовидів. Ручка H_1 (точніше її середня сфера) розбиває коло $S^1=\partial H_0$ на дві дуги. Оскільки після приклеювання всіх 1-ручок край буде зв'язним (колом, що заклеюється 2-ручкою), то знайдеться ручка, що з'єднує ці дві дуги. За необхідності провівши перенумерацію ручок можна вважати, що цією ручкою є ручка H_2. Позначимо дуги, на які ручки H_1 та H_2 розбивають коло $S^1=\partial H_0$ через α_1, α_2, α_3 та α_4 з урахуванням їх циклічного порядку на колі (див. рис. 16)

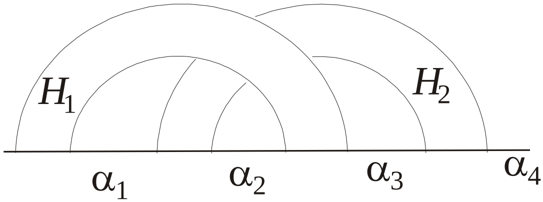

Рис. 16.

Якщо кінець (одна з двох точок середньої сфери) якоїсь 1-ручки лежить на дузі α_1, то ковзаючи ним по (додаючи до) ручці H_2, перемістимо його на дугу α_4. Якщо кінець 1-ручки лежить на α_2 (α_3), то для його переміщення на α_4 ковзаємо ним послідовно по ручках H_1, H_2 (H_2, H_1, H_2). Повторимо цю процедуру для наступної пари ручок і т.д. В результаті зведемо розклад на ручки до виду:

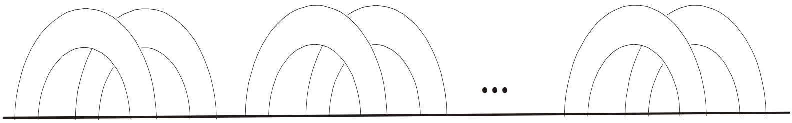

Рис. 17.

Вправа. Показати, що якщо в розкладі на ручки 2-многовида M додати пару прямих ручок, то вийде многовид $M\#T^2$.

Якщо в розкладі на ручки одна пара 1-ручок, то 2-многовид гомеоморфний тору T^2, якщо g пар — зв'язній сумі g торів $T^2\#T^2\#\ldots\#T^2$. Число g називається *родом* орієнтовного 2-многовида.

Конструкція. Розглянемо розклад на ручки неорінтовних многовидів. Нехай H_1 — скручена 1-ручка. Вона розбиває коло $S^1=\partial H_0$ на дві дуги β_1, β_2. Якщо кінець якоїсь 1-ручки лежить на дузі β_1, то ковзаючи ним по H_1 перемістимо його на дугу β_2. Проробимо це для всіх 1-ручок. Якщо серед ручок $H_2,\ldots, H_n$ є скручена, то повторемо процедуру для неї, перемістивши решту ручок на дугу, на якій лежать кінці H_1. В результаті повторення цієї процедури можливі два випадки:

1) На кожному кроці серед ручок що залишаються існує скручена 1-ручка. Тоді через m-1 кроків отримаємо послідовність скручених 1-ручок:

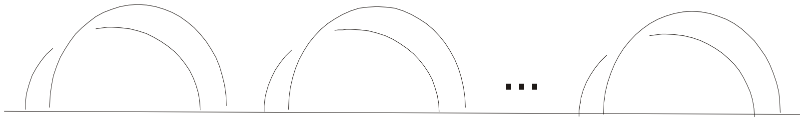

Рис. 18.

2) На якомусь кроці залишаться тільки прямі 1-ручки. Тоді як для орієнтованих многовидів, ковзаючи одна по іншій їх можна розбити на пари. Далі кожна пара прямих ручок заміняється на дві скручені ручки як показано на рис. 19. Отже, в результаті отримаємо послідовність скручених 1-ручок, як у випадку 1).

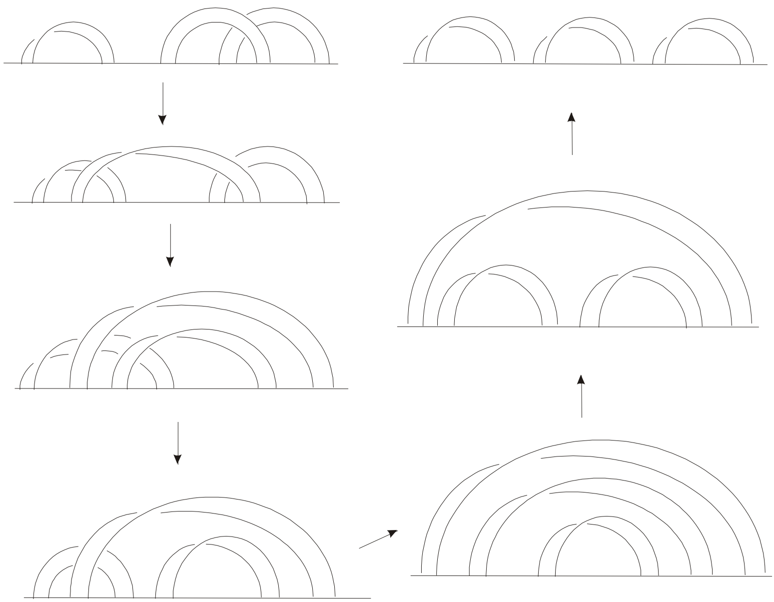

Рис. 19.

Вправа. Показати, що якщо в розклад на ручки 2-многовида M добавити скручену ручку, то вийде многовид $M\#\mathbf{R}P^2$.

Отже, кожний замкнений неорієнтовний 2-многовид гомеоморфний зв'язній сумі проективних площин $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\ldots\#\mathbf{R}P^2$. Число доданків в цій сумі називається *родом* неорієнтованого 2-многовида.

Класифікація некомпактних 2-многовидів набагато складніша ніж в компактному випадку. Прикладами таких многовидів є многовиди вигляду $F\backslash A$, де F — замкнений 2-многовид, а A — будь-яка замкнена підмножина в F. Існують також некомпактні многовиди нескінченного роду.

2. Діаграми Хегора тривимірних многовидів

Нехай M — гладкий замкнений двовимірний многовид, $M=H^0\cup H_1^1\cup\ldots\cup H_m^1\cup H_1^2\cup\ldots\cup H_m^2\cup\, H^3$ — розклад на ручки з однією 0-ручкою H^0 і однією 3-ручкою H^3. Поверхня $F=\partial(H^0\cup H_1^1\cup\ldots\cup H_m^1)\subset M$ називається *поверхнею Хегора*. Оскільки ця поверхня є також поверхнею Хегора для двоїстого розкладу на ручки, то її рід дорівнює числу 1-ручок і дорівнює числу 2-ручок. Поверхня Хегора розбиває многовид M на два повних кренделя $M_1=H^0\cup H_1^1\cup\ldots\cup H_m^1$ і $M_2=H_1^2\cup\ldots\cup H_m^2\cup\, H^3$.

Означення. *Розбиттям Хегора* замкненого тривимірного многовида називається представлення його у вигляді об'єднання двох повних кренделів, які перетинаються за спільним краєм. *Рід* розбиття Хегора це рід кренделя F. Рід многовида M визначається як мінімальний рід розбиття Хегора.

Для завдання розбиття Хегора треба вказати як склеюються краї двох повних кренделей. Оскільки два повних кренделя одного роду гомеоморфні, то для завдання розбиття Хегора досить задати гомеоморфізм краю повного кренделя на себе.

Приклад. Розглянемо розбиття Хегора роду 1. Повними кренделями є повноторії. При тотожньому гомеоморфізмі краю (тора) в результаті склейки отримаємо многовид $S^1\times S^2$. При гомеоморфізмі, що відображає паралелі на меридіани, а меридіани на паралелі дістанемо сферу S^3. Тривимірні многовиди роду 1, крім многовидів S^3, $S^1\times S^2$, $\mathbf{R}P^3$, називаються лінзовими просторами. Якщо u — мередіан на торі (є краєм диска в повноторії), то 3-многовид задається гомотопічним класом його образу при гомеоморфізмі тора, тобто елементом з

$\pi_1(T^2)=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Нехай це пара (l, m) цілих чисел. Ці числа є взаємно-простими, бо крива, що визначається ними немає точок самоперетину. Відповідний тривимірний многовид позначається $L_{l,m}$.

Означення. Два розбиття Хегора многовида M називаються *еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм многовида M на себе, що відображає одне розбиття в інше, тобто перший повний крендель в перший, а другий в другий.

Відомо, що всі розбиття Хегора сфери S^3 одного роду є еквівалентними. Еквівалентні також розбиття Хегора роду 1 для кожного з лінзових просторів.

Якщо в розклад на ручки ввести пару доповняльних ручок індексу 1 та 2, то рід розбиття Хегора збільшиться на 1. Такий перехід від одного розбиття Хегора до іншого називається *стабілізацією*. Два розбиття Хегора називаються *стабільно еквівалентними*, якщо після декількох стабілізацій кожного з них вони стають еквівалентними. Очевидно, що будь-які два розбиття Хегора одного і того самого многовида є стабільно еквівалентними.

Означення. Нехай H — повний крендель роду g, $\alpha\subset\partial H$ — проста замкнена крива, що не розбиває H. Крива α називається *меридіаном* для H, якщо існує вкладений двовимірний диск $D\subset H$ з $\partial D=D\cap\partial H=\alpha$. Диск D називається меридіанним диском. Набір $\alpha_1,\ldots, \alpha_g$ меридіанів, що не перетинаються, називається *повною системою меридіанів*, якщо при розрізання ∂H за ними вийде сфера з $2g$ дірками.

Означення. Діаграмою Хегора роду g многовида M називається трійка (F, u, v), що складається з поверхні Хегора F роду g і двох систем меридіанів $u=\{u_1,\ldots, u_g\}$ для M_1 і $v=\{v_1,\ldots, v_g\}$ для M_2.

Дві діаграми Хегора (F, u, v) і (F', u', v') називаються гомеоморфними, якщо існує гомеоморфізм $\varphi:F\to F'$ такий, що $\varphi(u)=u'$, $\varphi(v)=v'$.

За кожним розкладом на ручки можна побудувати діаграму Хегора, взявши за меридіани u косередні сфери 1-ручок, а за меридіани v середні сфери 2-ручок. Навпаки, кожна діаграма Хегора задає розклад многовида на ручки.

Твердження. Розклади на ручки ізоморфні $\Leftrightarrow$ їх діаграми Хегора гомеоморфні.

Доведення. *Необхідність* випливає з побудови.

Достатність. Гомеоморфізм діаграм Хегора за побудовою задає гомеоморфізм поверхонь Хегора, середніх сфер 2-ручок і косередніх сфер 1-ручок. Продовжимо, ці гомеоморфізми на середні диски 2-ручок і косередні диски 1-ручок, а потім і на їх околи, що є 2- і 1-ручками. Для кожної 0- і 3-ручки ми побудували гомеморфізми їхніх границь (З-сфер). Продовжуючи ці гомеоморфізми всередину ручок отримаємо шуканий гомеоморфізм многовидів. □

Приклади. 1) Якщо в діаграмі Хегора многовида M меридіани можна розбити на пари (u_i, v_i) так, що для всіх i u_i перетинає v_i в одній точці і не перетинає v_j при $i \neq j$, то M гомоморфний сфері S^3. Дійсно в відповідному розкладі на ручки всі 1- і 2-ручки утворюють пари доповнювальних ручок і можуть бути скорочені.

2) Якщо $F=T^2$, u — меридіан, $\pi_1(v)=(p, q)$, то $M=L_{p,q}$.

3. Вузли та зачеплення

В цьому параграфі ми використовуємо теорію Морса для обчислення фундаментальної групи доповнення до вузлів та зачеплень.

Означення. *Зачепленням* L в $\mathbf{R}^3$ (S^3) називається вкладений в $\mathbf{R}^3$ (S^3) замкнений 1-многовид. Якщо 1-многовид зв’язний, то зачеплення називається *вузлом*. Іншими словами, вузол — це замкнена крива, а зачеплення це набір замкнених кривих, що не перетинаються.

Якщо крива або вкладення є неперервною, гладкою або кусково-лінійною, то відповідний вузол (зачеплення) називають *неперервним*, *гладким* або *кусково-лінійним*. Ми будемо розглядати тільки гладкі вузли та зачеплення і називати їх просто вузлами та зачепленнями.

На множині зачеплень (вузлів) можна розглянути відношення еквівалентності — ізотопію. Вузол, що еквівалентний стандартно вкладному колу в $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$ називається тривіальним. Для доведення нееквівалентності вузлів використовують різні інваріанти вузлів. Це такі математичні об'єкти (числа, групи, поліноми та ін.), які однакові для всіх еквівалентних вузлів. Наприклад, мінімальне число точок самоперетину проекції вузла на фіксовану площину, фундаментальна група доповнення $S^3 \backslash L$.

Вузли та зачеплення зображають як проекції на деяку площину (яку вважають горизонтальною) так, що всі точки самоперетину проекції є трансверсальними і подвійними. Для точок, що проектуються в точки самоперетину вказується, яка з них є верхньою (переходом), а яка нижньою (проходом). Околи проходів роблять розривними. Такі зображення вузлів та зачеплень називають їх діаграмами.

Приклади.

Рис. 20.

Теорема (*Редемейстера*). Нехай D_1, D_2 — діаграми вузла K (зачеплення L). Тоді від однієї до іншої діаграми можна перейти за допомогою ізотопій площини та послідовності, складеної з таких рухів (рухів Редемайстера):

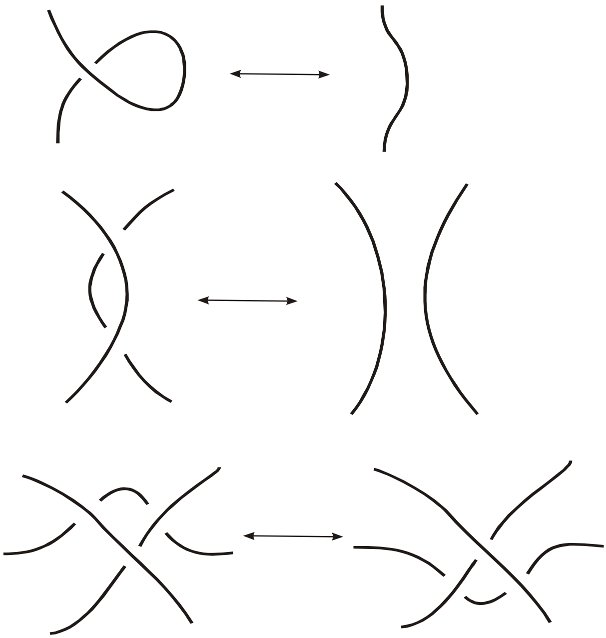

Рис. 21.

Означення. Часто на вузлі зручно зафіксувати орієнтацію (напрямок руху по вузлу, що зображають стрілочкою). Вузли та їхні діаграми з фіксованою орієнтацією будемо називати *орієнтованими*.

Означення. Коефіцієнтом зачеплення двох орієнтованих вузлів K_1, K_2 називається число, що дорівнює алгебраїчній напівсумі точок трансверсальних перетинів їх діаграм:

$$\mathrm{lk}(K_1,K_2)=1/2\ \Sigma\varepsilon_i.$$

Тут

$\varepsilon_i = 1$ $\varepsilon_i = -1$

Рис. 22.

Вправа. Перевірити, що коефіцієнт зачеплення не змінюється при рухах Редемайстера, а , отже, не залежить від вибору діаграм вузлів і не змінюється при ізотопіях вузлів. При зміні орієнтації у одного з вузлів коефіцієнт зачеплення змінює знак на протилежний.

Означення. *Групою* G вузла K (зачеплення L) називається фундаментальна група його доповненням $\pi_1(S^3\backslash K)$ ($\pi_1(S^3\backslash L)$).

Конструкція. Для знаходження групи вузла побудуємо розклад на ручки простору $S^3\backslash U(K)$, де $U(K)$ — відкритий регулярний окіл вузла. Оскільки видалення 3-вимірного диска (3-ручки) з 3-многовида не змінює його фундаментальної групи, то будемо розглядати вкладення K в $D^3=D^2\times[0, 1]$. При цьому можемо вважати, що весь вузол, за виключенням околів переходів лежить в $D^2\times 1/2$. Просверлимо вертикальні дірки що з'єднують $D^2\times 1$ з переходами з $U(K)$. Обернена процедура до цих просверлювань полягає в приєднанні 2-ручки.

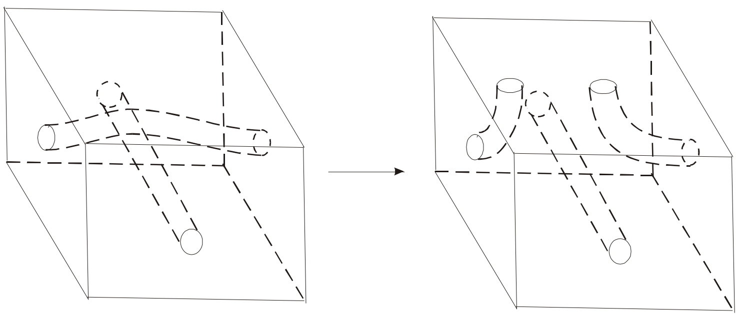

Рис. 23.

Отриманий многовид з краєм є диском $D^3=D^2\times[0, 1]$ з просверленими в ньому дірками (тунелями). При цьому кожний тунель відповідає компоненті вузла без переходів. Зауважимо, що прорізання такого тунелю в D^3 рівносильне приєднанню 1-ручки:

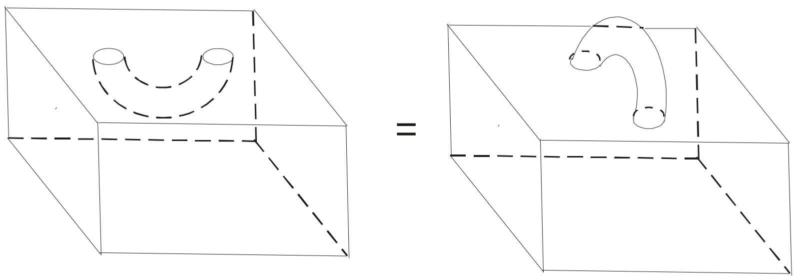

Рис. 24.

Отримали розклад доповнення на ручки, що дозволяє обчислити його фундаментальну групу, якщо покласти 1-ручки як твірні, а 2-ручки як співвідношення.

Нехай D — орієнтована діаграма вузла. Компоненти зв'язності діаграми позначимо буквами a_1, …., a_m. Кожна подвійна точка на діаграмі дає співвідношення r_s=1:

$r_s=acb^{-1}c^{-1}$ $r_s=ac^{-1}b^{-1}c$

Рис. 25.

Приклади. Група тривіального вузла $G=\mathbf{Z}=\langle a\rangle$. Група трилисника $G=\langle a, b, c \mid ac^{-1}b^{-1}c=1, ba^{-1}c^{-1}a=1, cb^{-1}a^{-1}b=1\rangle=\langle a, b, c \mid ab=bc=ca\rangle$.

Для кожного зачеплення (вузла) L існує поверхня $F_L\subset S^3$ така, що $\partial F_L=L$. Дійсно, розфарбуємо області, на які діаграма вузла розбиває площину, в 2 кольори так, що для кожної точки самоперетину вертикальні кути розфарбовані в один колір, а суміжні в різні. Візьмемо області одного кольору, видалимо з них малі околи точок самоперетину і з'єднаємо перекрученими (як на діаграмі) стрічками. Отримана поверхня буде шуканою.

4. Діаграми Кірбі

Для завдання відображень приєднання в розкладі 4-многовида на ручки часто використовуються діаграми Кірбі.

Конструкція. Нехай M — гладкий 4-вимірний многовид з краєм і припустимо, що в розкладі $M=H^0\cup H_1^{\,2}\cup\ldots\cup H_m^{\,2}$ на ручки є одна 0-ручка H^0, а решта ручок має індекс 2. Тоді цей розклад на ручки задається за допомогою відображень приєднання φ_i: $S^1\times D^2\to\partial H^0=S^3=\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$. Нас цікавлять класи ізотопності цих відображень. Для цього нам треба знати образ кожного вкладення $\varphi_i(S^1\times\{0\})$, який є вузлом K_i, а також образ $\varphi_i(S^1\times\{p\})$ для деякої точки $p\in\partial D^2$ (паралельний вузол K_i').

Дійсно образ $\varphi_i(S^1\times D^2)$ з точністю до ізотопії задається вузлом K_i. Гомоеоморфізм повноторія $S^1\times D^2$ на себе з точністю до ізотопії задається образом паралелі $S^1\times\{p\}$. Якщо α і β твірні фундаментальної групи тору $S^1\times S^1$, що породжені паралелю та меридіаном, то образ $S^1\times\{p\}$ задає елемент $\alpha+n\beta$ фундаментальної групи. Число n є числом обертів, на яке закручується паралель.

Означення. Паралельний вузол або число n, що його задає, називається *оснащенням*. Зачеплення, у якого для кожної компоненти задано оснащення, називається *оснащеним зачепленням*.

Розглянемо загальну ситуацію, коли розклад на ручки орієнтованого 4-многовида може містити ручки інших індексів (1,3,4). Відображення приєднання 1-ручки є вкладенням в $S^3=\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$ пари 3-дисків D_1^3, D_2^3. При цьому після приклейки 1-ручки до многовида M отримаємо многовид $M\#S^1\times D^3$. Те саме можна досягти, якщо склеїти диски D_1^3, D_2^3 за симетрією відносно площини α, що проходить через середину і перпендикулярно відрізку γ, який з'єднує центри цих дисків.

Якщо середня сфера 2-ручки (що є замкненою кривою) проходить через 1-ручки, то ми будемо зображати її як дуги в $\mathbf{R}^3\backslash\cup(D_1^3\cup D_2^3)_i$, які після ототожнення пар 3-дисків за симетріями відносно площин α_i дають замкнену криву.

Часто для зображення 1-ручок використовують пунктирне коло (коло з відміченою на ньому точкою). Це коло, що є межею досить малого диску B площини α з центром в точці перетину

$\alpha\cap\gamma$. При цьому відрізок γ стискається в точку і всі середні сфери 2-ручок, що перетинали 1-ручку, перетинають диск B.

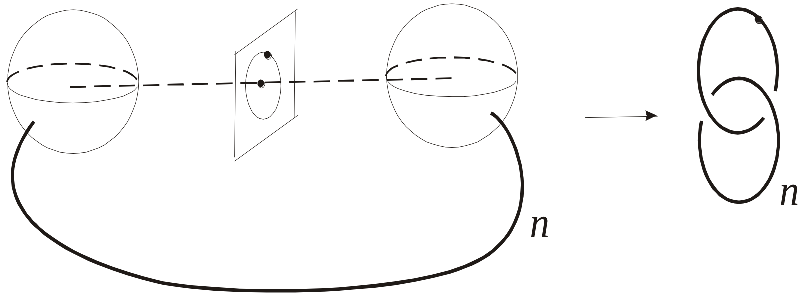

Рис. 26.

Оснащення 2-ручок визначається так само як і в 4.1.

Якщо M — замкнений многовид або він однозв’язний зі зв’язним краєм (а саме тільки такі випадки ми будемо розглядати), то приєднання 3- і 4-ручок з точністю до ізотопії задається однозначно. Тому слід пам'ятати лише про число 3-ручок.

Означення. Діаграмою Кірбі 4-многовида називається зачеплення, кожна компонента якого є пунктирною або має оснащення і крім того задане число 3-ручок.

Приклади. 4-вимірна сфера має порожнє зачеплення. Діаграми Кірбі многовидів $S^2\times D^2$, $\pm\mathbf{C}P^2$, $S^2\times S^2$, $S^2\tilde{\times}S^2$:

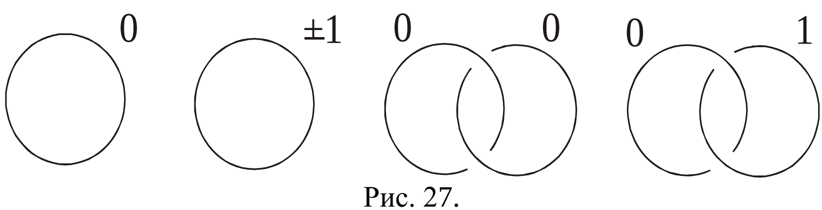

Рис. 27.

Дійсно, в першій діаграмі 0-ручку можна розглядати як $D^2\times D^2$. Оскільки відображення приєднання є тривіальним, то в результаті отримаємо $D^2\times D^2\cup D^2\times D^2 = (D^2\cup D^2)\times D^2 = S^2\times D^2$.

З означення $\mathbf{C}P^2$ випливає, що існує його розклад на ручки, який містить 3 ручки, індекси яких 0, 2, 4. При цьому 2-ручка приєднується за незавузленим вузлом. Оскільки після її приєднання край отриманого многовида є сферою, то оснащення 2-ручки дорівнює ± 1. Тут знак залежить від орієнтації $\mathbf{C}P^2$.

В розкладі $S^2 \times S^2$ на ручки присутні одна 0-ручка, дві 2-ручки і одна 4-ручка (бо розклад S^2 складається з однієї 0-ручки і однієї 2-ручки). При цьому 2-ручки приєднуються як в першому прикладі за незавузленими вузлами з оснащенням 0. Коефіцієнт зачеплення цих вузлів дорівнює ± 1.

$S^2 \tilde{\times} S^2$ — це єдине нетривіальне розшарування над S^2 з шаром S^2.

Теорема. Кожний елемент $\alpha \in H_2(M)$ другої групи гомологій 4-вимірнрого многовида M може бути реалізований за допомогою вкладеної в M поверхні.

Доведення. Користуючись тим, що 2-цикли, що є межею одного і того самого 3-ланцюга можна реалізувати α за допомогою зануреної поверхні F. Для кожної точки x_i самоперетину цієї поверхні розглянемо досить малий 4-диск D_i з центром в x_i. Тоді $F \cap \partial D_i$ є зачепленням Хопфа в $S^3 = \partial D_i$. Оскільки кожне зачеплення Хопфа є краєм 2 рази перекрученої стрічки S_i, то замінивши всі $F \cap D_i$ на S_i отримаємо шукану поверхню.□

За кожною діаграмою Кірбі побудуємо матрицю зачеплення $A = (a_{ij})$, елементи якої a_{ij} є коефіцієнтами зачеплення між i-тим та j-тим колами діаграми. Орієнтації кіл індуковані орієнтаціями середніх дисків 2-ручок. a_{ii} — це коефіцієнт оснащення i-го кола. При цьому кола з точками (1-ручки) мають оснащення 0 і незачеплені між собою.

Розглянемо ситуацію, коли в розкладі на ручки відсутні 1 та 3-ручки. Тоді кожна 2-ручка задає твірну α_i групи гомологій $H_2(M)$. Поверхню F_i, що реалізує α_i можна отримати як об'єднання середнього диску i-тої ручки та поверхні в S^3, краєм якої є i-те коло. Легко бачити, що a_{ij} дорівнює індексу перетину поверхонь F_i, F_j після зведення їх до загального положення.

Операції введення-скорочення пари ручок та додавання ручок індукують операції з діаграмами Кірбі. Введення пари доповняльних 1-2-ручок рівносильне домальовуванню на діаграмі Кірбі пари таких кіл, одне з яких з точкою і є краєм диска B, а інше, що має довільне оснащення, перетинає диск B в одні точці як на рис. 27. Витирання пари таких кіл рівносильне скороченню пари 1-2-ручок. Введення-скорочення пари 2-3-ручок рівносильне домальовуванню-стиранню на діаграмі Кірбі незавузленного кола з оснащенням 0 і 3-ручки.

Операція додавання 2-ручок на діаграмі Кірбі схожа на додавання мередіанів на діаграмі Хегора. Кожне оснащення визначає паралельне коло. З'єднаємо паралельні кола ручок, що додаються, такою стрічкою, що її основи лежать на цих колах і вона не перетинає інших кіл. Тоді сума 2-ручок H_i, H_j задається колом, що є об'єднанням паралельних кіл без основ стрічки з її боковими сторонами. Коефіцієнт оснащення суми задається формулою

$$a_{ii}+a_{jj}\pm 2a_{ij}.$$

Тут знак "+" чи "−" береться в залежності від того чи орієнтації кіл визначають одну й ту саму чи різні орієнтації границі стрічки.

Отже, операція додавання 2-ручок полягає в заміні оснащеного кола на його суму з іншим колом. При цьому, якщо j-та ручка заміняється на її суму з i-тою, то в матриці (a_{ij}) i-тий рядок додається до j-того і одночасно i-тий стовпчик додається до j-того стовпчика.

Додавання 2-ручок до 1-ручок таке саме як 2-ручок між собою, якщо коло з точкою замінити на коло з оснащенням 0.

Якщо дві діаграми Кірбі задають один і той самий 4-многовид, то від однієї до іншої можна перейти за допомогою операцій введеня-скорочення пар ручок, а також додавань ручок.

Теорема. Кожний замкнений орієнтовний 3-многовид є краєм деякого орієнтовного 4-многовида.

Наслідок. Кожний замкнутий орієнтовний 3-вимірний многовид може бути заданий за допомогою діаграми Кірбі без 1- та 3-ручок.

Зауважимо, що додавання до діаграми Кірбі незавузленого кола з оснащенням ± 1 рівносильне зв'язній сумі 4-многовида з $\mathbf{C}P^2$ і не змінює край многовида. Якщо дві діаграми Кірбі без 1- і 3-ручок задають один 3-многовид, то від однієї до іншої можна перейти за допомогою операцій додавання ручок та додавання чи витирання з діаграми незавузленного кола з оснащенням ± 1.

Задачі

1. Доведіть рівності (гомеоморфність) многовидів:
   а) $BK\#\mathbf{R}P^2=T^2\#\mathbf{R}P^2=\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$;
   б) $BK\#BK=T^2\#BK=\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$.
2. У 2n-кутнику склеєні (ототожнені) пари сторін. Чи буде отриманий у результаті склейки простір класичною поверхнею? Якщо так, то чи буде вона орієнтована та як визначити її рід?
3. Показати, що кожна класична поверхня може бути отримана із многокутника за допомогою склеювання між собою відповідних пар сторін.
4. Що буде, якщо лист Мьобіуса розрізати по середній лінії.
5. Довести, що кожний многовид є локально-компактним простором (кожна точка має компактний окіл).
6. Довести: многовид зв'язний $\Leftrightarrow$ він локально-зв'язний.
7. Показати, що на сфері не можно ввести атлас, що складається з однієї карти.
8. Довести, що такі многовиди гомеомрфні: $\mathbf{R}P^1\approx S^1$, $\mathbf{C}P^1\approx S^2$.
9. Довести, що наступні простори є гладкими многовидами та побудувати атлас карт для них: а) сфера S^n; b) двовимірний тор T^2; c) дійсний проективний простір $\mathbf{R}P^n$; d) комплексний проективний простір $\mathbf{C}P^n$.
10. Довести, що група невироджених матриць $GL(n, \mathbf{R})$ та група спеціальних ортонормованих матриць $SO(n)$ є гладкими многовидами. Обчислити їх розмірність.
11. Нехай тор $T^2 \in \mathbf{R}^3$ утворений обертанням кола навколо осі Oz (стандартне вкладення). Довести, що проекції на координатні осі є гладкими функціями на торі. Перевірити які з цих функцій є функціями Морса?
12. Нехай тор $T^2 \in \mathbf{R}^3$ стандартно вкладений в $\mathbf{R}^3$, Довести, що відображення f: $T^2\to S^2$, яке ставить кожній точці p є T^2 у відповідність одиничний вектор нормалі до тора T в точці р, є гладким.
13. Нехай M, L – гладкі многовиди, $N\subset M$ – підмноговид, f: $M\to L$

– гладке відображення. Довести, що обмеження $f|_N:N\to L$ – гладке відображення.

14. Довести, що композиція гладких відображень – гладке відображення.
15. Показати, що проекція прямого добутку двох многовидів на кожний співмножник є гладким відображенням.
16. Довести, що гладка функція на гладкому компактному многовиді M може бути подана як координата при деякому вкладенні M в $\mathbf{R}^n$.
17. Навести приклад гладкого взаємно однозначного відображення, що не є дифеоморфізмом.
18. Довести, що стереографічна проекція є дифеоморфізмом.
19. Довести, що при $n\neq m$ простори $\mathbf{R}^n$ і $\mathbf{R}^m$ недифеоморфні.
20. Довести, що множина Diff(M) всіх дифеоморфізмів многовида M на себе є групою відносно операції композиції.
21. Довести, що двовимірний гладкий замкнений многовид занурюється в $\mathbf{R}^3$.
22. Довести, що якщо $\dim X<\dim Y$, а $f:X\to Y$ – гладке відображення, то $f(X)\neq Y$.
23. Доведіть, що простір CP^1 гомеоморфний сфері S^2.
24. Довести, що група SO(2) гомеоморфна колу. Якому многовиду гомеоморфна група O(2)?
25. Довести, що група SO(3) гомеоморфна проективному простору $\mathbf{R}P^3$.
26. Доведіть, що многовид SO(n) – зв'язний простір.
27. Покажіть, що многовиди гомеоморфні $U(n)\cong S^1\times SU(n)$.
28. Довести, що компактний гладкий многовид M вкладається в евклідів простір $\mathbf{R}^N$ відповідної розмірності $N<\infty$.
29. Довести, що добуток сфер $S^n\times S^m$ вкладається в $\mathbf{R}^{n+m+1}$.
30. Довести, що сферу S^{n-1} можна представити у вигляді об'єднання $(S^r\times D^{n-r})\cup(D^{r+1}\times S^{n-r-1})$ зі спільною межею $S^r\times S^{n-r-1}$.
31. Довести, що групи SL($n,\mathbf{R}$), SO(n) є гладкими підмноговидами в просторі $M(n,\mathbf{R})=\mathbf{R}^{n^2}$ усіх дійсних квадратних матриць порядку n.
32. Довести, що групи SL(n, $\mathbf{C}$), SU(n) є гладкими підмноговидами в просторі $M(n,\mathbf{C})=\mathbf{C}^{n^2}$ усіх комплексних квадратних матриць порядку n.
33. Довести, що коли $\dim X<\dim Y$, а $f: X\to Y$ – гладке, то $f(X)\neq Y$.

34. Нехай X^n – замкнений многовид, $f : X^n \to Y^n$ — гладке відображення, $y_0 \in Y$ – регулярна точка відображення f. Довести, що прообраз $f^{-1}(y_0)$ складається зі скінченного числа точок.
35. Нехай $f : S^n \to \mathbf{R}P^n$ – відображення, яке ставить точці $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ у відповідність пряму, що проходить через точку x і початок координат в $\mathbf{R}^{n+1}$. Довести, що f – гладке відображення і у нього усі точки регулярні. Знайти прообраз $f^{-1}(y)$.
36. Нехай f: SO(n) $\to S^{n-1}$ – відображення, яке ставить кожній ортогональній матриці у відповідність її перший стовпець. Довести, що у відображення f усі точки регулярні. Знайти прообраз $f^{-1}(y)$.
37. Нехай f : U(n) $\to S^{2n-1}$ – відображення, яке ставить кожній унітарній матриці у відповідність її перший стовпець. Довести, що у відображення f усі точки регулярні. Знайти прообраз $f^{-1}(y)$.
38. Довести, що множина V(n,k) усіх ортонормованих систем з k векторів у евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$ наділяється структурою гладкого многовиду. Знайти його розмірність. Показати, що V(n,1) = S^{n-1}, V(n,n) = O(n).
39. Довести, що множина $G(n,k)$ усіх k-вимірних підпросторів у евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$ наділяється структурою гладкого многовиду. Знайти його розмірність. Показати, що $G(n,1) = \mathbf{R}P^{n-1}$, $G(n,k) = G(n,n-k)$.
40. Перевірити, чи орієнтовані такі многовиди: a) сфера S^n; в) тор T^2; c) проективний простір $\mathbf{R}P^n$; d) комплексний проективний простір CP^n ; e) групи GL(n, $\mathbf{R}$), U(n), SO(n); f) пляшка Клейна.
41. Довести, що кожний однозв'язний многовид — орієнтовний.
42. Довести, що коли M^n підмноговид евклідового простору $\mathbf{R}^{n+1}$, то він орієнтовний.
43. Довести, що многовиди S^3 і SU(2) дифеоморфні.
44. Довести, що $\mathbf{R}P^n$ — орієнтований при $n = 2k-1$ та неорієнтований при $n = 2k$.
45. Довести, що будь-який відкритий n-вимірний многовид гомотопічно еквівалентний $(n-1)$-вимірному комплексу.
46. Довести, що якщо $\pi_1(M^n) = 0$, то многовид M^n орієнтовний.
47. Довести, що якщо тривимірний компактний замкнений

многовид M^3 однозв'язний, то M^3 — гомотопічно еквівалентний сфері S^3.

48. Побудувати приклад тривимірного замкненого компактного многовиду M^3, такого, що M^3 —гомологічна сфера (тобто має такі ж цілочисельні гомології, що і сфера S^3), але $\pi_1(M^3) \neq 0$.
49. Довести, що ейлерова характеристика непарновимірного замкненого многовида дорівнює 0.
50. Довести, що група $G = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ не може бути фундаментальною групою жодного замкненого компактного тривимірного многовида.
51. Довести, що кожна група зі скінченним числом твірних та співвідношень є фундаментальною групою деякого замкненого п'ятивимірного многовида.
52. Нехай $f : S^1 \times S^1 = T^2 \to \mathbf{R}^3$ – стандартне вкладення, $\phi : S^1 \to T^2$ – вкладення S^1, що реалізує цикл типу (p,q), де $(p,q) = 1$. Обчислити групу отриманого вузла $f \circ \phi : S^1 \to \mathbf{R}^3$.
53. Нехай група вузла $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ дорівнює $\mathbf{Z}$. Що можна сказати про такий вузол?
54. Довести, що $TS^1 \cong S^1 \times \mathbf{R}$.
55. Нехай f: $M \to N$ – гладке відображення гладких многовидів. Довести, що відображення df: $TM \to TN$ є гладким.
56. Довести, що топологічний простір не може мати дві структури многовидів різних розмірностей.
57. Довести, що групи гомологій компактного многовида скінченно породжені.
58. Перевірити, чи будуть функціями Морса проекції на координатні осі та функція відстані до початку координат для поверхонь другого порядку, заданих канонічними рівняннями в тривимірному просторі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. — Х., 1995.
2. Милнор Д. Теория Морса. — М., 1965.
3. Милнор Д. Теорема об h-кобордизме. — М., 1969.
4. Милнор Д., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. — М., 1972.
5. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — М., 1981.
6. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980.
7. Понтрягин Л.С. Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий. — М., 1976.
8. Постников М.М. Введение в теорию Морса. — М., 1971.
9. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — М., 2004.
10. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія. — К., 2004.
11. Пришляк О.О. Теорія Морса. — К., 2002.
12. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно-линейную топологию. — М., 1974.
13. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. — М., 1989.
14. Хирш М. Дифференциальная топология. — М., 1979.
15. Шарко В.В. Функции на многообразиях. — К., 1990.
16. Bring M. Introduction to differential topology. — N.Y., 1994.
17. Hatcher A. Algebraic topology. — Cambridge, 2002.
18. Lee J.M. Introduction to topological manifolds. — N.Y., 2000.
19. Matsumoto Y. An introduction to Morse theory. – Trans. Math.monograph. V.208, 2001.

ЗМІСТ