O Matematyku, rycerzu Gwiazdy Pitagorejskiej,

czyli tentamen mythologiae mathematicae

Marek KORDOS, Warszawa

Wstęp dla rozpaczliwie trzeźwo myślących

Słowo *mit* ma u wielu odbiorców negatywne konotacje. Traktuje się je jako synonim rozmijania się z rzeczywistością, fantazjowania, tendencyjnego upiększania twardych faktów, czy nawet aberracji intelektualnej. Warto więc poświęcić chwilę refleksji nad tym, czym mit był, czym jest i do czego może służyć.

Mity były pierwotnie jedyną formą zanotowania, utrwalenia historii. Mit przekazywał przez tysiąclecia ludom (niepiśmiennym przez większość tego czasu) nie tylko dzieje ich gatunku czy plemienia, ale też w zgrabnej formie pozwalał zakonotować sobie nauki z owych dziejów płynące. Personifikował więc – gwoli lepszego zapamiętania – tendencje, cechy, zjawiska, cnoty i umiejętności. Do dziś pamiętamy zwieńczenie tego okresu mitologii utrwalone chyba już na zawsze w homeryckiej *Iliadzie* i *Odyssei.*

W czasach Herodota (czyli wojen perskich) mity – uwolnione od obowiązku jedynego wehikułu historii – zaczęły pełnić inną rolę. Stały się odtąd przekaźnikiem wzorców chwalebnych postaw, postaci takich jak Leonidas, Mucius Scaevola, Roland, czy Zawisza Czarny. Już ta krótka lista pozwala zauważyć, że to znaczenie mitu było wykorzystywane przez wiele wieków i przecież uzupełniamy ją dalej, wpisując na nią bohaterów *Kamieni na szaniec* Aleksandra Kamińskiego, czy Che Guevarę.

Taka rola mitu uzyskała też i bardziej kompleksową postać – mit stał się sposobem kodyfikacji etosu określonych grup społeczeństwa, w tym także całych narodów. Prostym przykładem tej ostatniej postaci mitu jest polski sarmatyzm (mimo swej kompletnie ahistorycznej nazwy). Ale warto odnotować też np. to, co pisze Daniel Defoe w *Przypadkach Robinsona Cruzoe* – rozliczne nieszczęścia swojego bohatera, przedstawiciela klasy średniej, przypisuje złamaniu przez niego norm swojej klasy przez nawiązanie kontaktów, a nawet interesów z arystokratą. Mit pozwala więc nie tylko łączyć, ale i dzielić.

Szczególnie szeroki zasięg miała w Europie mitologia rycerska i zawarty w niej kodeks postępowania, a nawet myślenia. Warto zwrócić uwagę na meandry jego powstawania. Wydaje się, że potrzeba jego wyodrębnienia przyszła wraz z wojnami krzyżowymi, gdy pod jednym sztandarem mieli walczyć zbrojni wywodzący się z niesłychanie zróżnicowanych wszystkich kultur Europy od Atlantyku po Morze Czarne. Stworzenie jednolitego kodeksu normatywnego dla nich wszystkich, wypracowanie etosu postępowania powszechnie uznanego za chwalebny było niezbędne. Ale też – na szczęście – nie powstał on przez narzucenie wszystkim norm wywodzących się z jednego ośrodka. Kodeks rycerski i jego legendy powstały przez nawarstwienie się tego, co wartościowego zostało przyniesione z różnych stron. Były tam i anegdoty, i dogmaty, i wzniosłe przykłady, i oczywiste zmyślenia. Za ramę posłużyła legenda arturiańska, doskonale nadająca się jako spoiwo, bo niemająca żadnych rzeczywistych podstaw, a stanowiąca absurdalną w swej istocie próbę połączenia w jedno idei druidycznych i chrześcijańskich, nawiązująca zarówno do legend celtyckich, jak galijskich, rzymskich, a nawet germańskich. Mimo tej absurdalności (a może dzięki niej) jest dziś elementem europejskiej kultury i wszyscy wiemy, kto to był król Artur, kim była Ginewra, umiemy wymienić imiona przynajmniej czterech Rycerzy Okrągłego Stołu, wiemy, co to jest Excalibur, a co to Święty Graal itd.

Dla ilustracji owej przypadkowości gromadzenia elementów mitologii rycerskiej – dwa przykłady.

Jean le Meingre, czyli marszałek Boucicaut, pewnego razu uchylił kapelusza, mijając na ulicy elegancko ubrane damy lekkich obyczajów, co wywołało huragan śmiechu towarzyszących mu rycerzy. Na to niespeszony marszałek odrzekł: *Wolałbym okazać swój szacunek dziesięciu dziewkom, niż zaniedbać tego wobec jednej zacnej damy* – z czego uczyniono jeden z kanonów rycerskiej dworskości.

Drugi przykład pokazuje, że mitologia może też posłużyć dobrej sprawie, wskazując wyjście z sytuacji – zdawałoby się – bez wyjścia. Fundamentalnym warunkiem, jaki musiał być spełniony, aby wyprawy krzyżowe mogły się odbywać, było danie gwarancji, że krzyżowiec po powrocie zastanie swój dom, swoją rodzinę, swój majątek nienaruszony. Gwarancje takie mógł dać tylko Kościół i on też takie gwarancje dawał, zdając sobie przy tym sprawę z tego, że umocni to znacznie jego pozycję. Istotny kłopot sprawiały w tej sprawie żony krzyżowców, bo dość masowo pod wieloletnią nieobecność mężów rodziły dzieci. W pojedynczych przypadkach dałoby się to załatwić represjami, ale w większej skali stawiałoby to pod znakiem zapytania pewność gwarancji dawanych krzyżowcom. I wtedy pomogła legenda arturiańska: odgrzebano dawnego druidyjskiego poetę, Myreddina, przemianowano go na czarodzieja Merlina i obdarzono (między innymi) umiejętnością pojawiania się w sypialniach słomianych wdów i to w postaci ich nieobecnych mężów – w tej sytuacji musiały one wypełniać małżeńskie obowiązki, a o żadnej niewierności przy tym mowy być nie mogło.

Doskonałym zbiorem źródeł do studiowania genezy etosu rycerskiego jest *Jesień Średniowiecza* Johana Huizungi. Przepięknym i kompletnym kompendium kodeksu rycerskiego jest opracowana dla dzieci opowieść *O księciu Gotfrydzie, rycerzu Gwiazdy Wigilijnej* Haliny Górskiej – dziełko to tym bardziej zasługuje na uwagę, iż życie i śmierć jego autorki stanowiły pełną realizację owego rycerskiego kodeksu.

Pozwoliłem sobie na nieco frywolne przykłady, ale etos rycerski ma u nas tak wielkie poszanowanie, że i kpić z niego można bez obaw, iż zostaniemy posądzeni o crimen laese maiestatis. Klasycznym przykładem są tu choćby *Krzyżacy* Henryka Sienkiewicza, gdzie najwznioślejsze przykłady rycerskości są idealnie wymieszane z kpinami z niej, bez szkody ani dla powagi pierwszych, ani krotochwilności drugich.

Będąc sługami idei równie pięknej, jak rycerskość, powinniśmy uświadamiać sobie, jak wygląda mitologiczna wersja naszego posłannictwa, tym bardziej że jest owa mitologia bardzo mało znana, a przykłady pomiatania naszym posłannictwem przez ostatnie pół roku można było licznie, codziennie obserwować we wszystkich środkach masowego rażenia (by użyć nazwy pochodzącej – o czym mało kto wie – od Fidela Castro).

Proszę więc o posłuchanie historii

o Matematyku, rycerzu Gwiazdy Pitagorejskiej,

którą niżej w dwunastu opowieściach przedstawiam.

I Dając mu słowo, praludzkie stado ludzkim plemieniem uczynił...

Nasze, ludzkie, dzieje zaczynają się w epoce zwanej neolitem, a w Polsce do niedawna jeszcze epoką kamienia gładzonego lubieżnie, acz bezsensownie nazywanej. Neolit ów to czas powstawania struktury społecznej, a do tego potrzebna jest komunikacja intelektualna, możliwość ustalania kontraktów, zbiorowe ocenianie zachowań współplemieńców. To wszystko stworzyło największy, jak dotąd, wynalazek ludzkości – SŁOWO.

Zrazu było to wywołanie konkretnego obiektu: imię własne lub konkretna czynność. Ale potem potrzebne okazały się inne słowa, takie jak „kobieta", „pies", „zgoda". Z czasem niezbędne okazały się i takie, jak „drapieżnik", „przyjaźń". A niebawem pojawiły się całkiem już skomplikowane, jak „żywe stworzenie" czy wręcz „życie", „mróz", „kierunek".

Doniosłość tego daru, jakim jest słowo, dostrzec można najdobitniej tam, gdzie go nie ma (czy też dostęp do niego jest bardzo utrudniony). Myślę o ludziach, którym nie dane jest słyszeć. Oglądałem szkolne podręczniki do klas początkowych dla niesłyszących. Podczas gdy słyszące dzieci są uczone sprawnego nakreślenia liter, na stronach elementarza dziecko niesłyszące ma napisane słowo, na przykład „okno", otoczone najrozmaitszymi realizacjami:

Miałem przyjemność na zajęciach poznać wybitnego przedstawiciela społeczności niesłyszących, studiującego u nas Bogdana Szczepankowskiego. Jest on zapewne znany także sporej liczbie emerytalnej już dzisiaj części telewidzów, gdyż notorycznie wygrywał pierwszy telewizyjny quiz *Kombinuj i licz* prowadzony przez Wojciecha Pijanowskiego przed czterdziestu laty. Bogdan Szczepankowski pełnił również funkcję „ministra oświaty" w Polskim Związku Głuchych – od niego też dowiedziałem się o specyfice edukacji niesłyszących. O tym, jak wysoka jest ta bariera, świadczy fakt, iż wówczas w Polsce były tylko trzy osoby niesłyszące od urodzenia, a legitymujące się wyższym wykształceniem – mam nadzieję, że dziś jest lepiej.

Problem znaczenia mowy staje się jeszcze bardziej jaskrawy, gdy zauważymy, jak wielu matematyków nie widzi i jak wielu z nich osiąga wyniki na najwyższym światowym poziomie.

a to okno w pokoju, a to bulaj okrętowy, a to wystawa sklepowa, witraż, szyba samochodowa itd. itp. Okazuje się, że najtrudniejszą rzeczą jest przekazanie informacji, że te wszystkie różne obiekty jednym i tym samym słowem oznaczamy. Odkrycie tego, że słowa w swej ogromnej większości nie oznaczają obiektów, lecz abstrakty, u ludzi używających mowy zazwyczaj nigdy nie ma miejsca – jest bowiem zbędne: nie odkrywamy tego, co praktycznie stosujemy od dziecka. Dla kogoś względem mowy zewnętrznego odkrycie i przyswojenie tej prawidłowości jest niesłychanie trudne do osiągnięcia.

Ostatni z wyżej podanych przykładów – „kierunek" – świetnie demonstruje jeszcze jedną konsekwencję nieustannego posługiwania się abstraktami. Otóż używając abstraktu, możemy się porozumiewać nawet w sytuacji, gdy nie mamy pojęcia, jaka jest jego egzemplifikacja w myślach naszego rozmówcy. Bo, faktycznie, czym jest kierunek? Może azymutem (jak zapewne myśli żeglarz)? A może zbiorem prostych równoległych (czego zapewne wymaga w szkole nauczyciel)? Albo punktem horyzontu (jak myśli o nim malarz tradycjonalista)? Bo może też być tendencją (jak pojmują go pewnie socjologowie)? A listę tę z pewnością można kontynuować.

Patrząc na to z dzisiejszego punktu widzenia: relacja (abstrakt $\Leftrightarrow$ klasa jego desygnatów) to przecież jedyne, czego potrzeba, by mówić o teorii i jej modelach.

Pewne z abstraktów okazały się mieć jeszcze dodatkowy walor: niezmienność desygnatów. Każdy bez wahania przyzna, że jedynka była w owym neolicie (kiedy by on nie był) tą samą jedynką, którą posługiwał się Euklides, a potem Newton czy Hilbert, a także my sami w pierwszej klasie (a niektórzy i potem). Podczas gdy np. nasze mieszkania zmieniały się radykalnie – szałas, namiot, chałupa, dom, blok. Nic przeto dziwnego, że słowa oznaczające owe matematyczne desygnaty – zwłaszcza liczby, a więc liczebniki – zmieniały się wolniej od innych słów. Antropolodzy strukturalni na tej mniejszej zmienności opierają wiele swoich dociekań, np. o wędrówkach ludów wnioskują właśnie poprzez badanie liczebników. Typowy rezultat: ludy celtyckie, zepchnięte przez następne nacje prawie do oceanu (Szkoci, Irlandczycy, Walijczycy, Bretończycy, Baskowie) mają liczebniki ukształtowane w rytmie dwudziestkowym; widać więc, że kiedyś Galowie wypchnęli ich z dzisiejszej Francji – dowód: *quatre-vingt*, cztery dwudziestki, jako francuska nazwa liczby 80; Duńczycy Celtów wyparli później – u nich dwudziestka króluje jeszcze w wielu liczebnikach, nawet dziwnych: *hal(f)-fjerd-sinds-tyve*, czyli 75 jako wpół do czwartej dwudziestki.

II ograniczając, ofiarował nieograniczony horyzont pewności…

Parę tysięcy lat później, gdy podział początkowych zbieraczy – pożerających wszystko, co tylko pożreć się dało – na tych, co obrali stałe miejsca pobytu, w pielęgnacji sprzyjających ich roślin widząc źródło dostatku, i na tych, którzy najpierw biegali za zwierzyną, by potem stać się jej pasterzami-koczownikami, ugruntował się ostatecznie, pasterze uderzyli na rolników. Zapisali konieczność owego ataku nawet w Piśmie Świętym, gdzie wyraźnie opisana jest krzywda dobrego pasterza Abla, zabitego przez podłego rolnika Kaina. Z innych relacji wiemy o skutecznym na prawie trzysta lat najeździe pasterskich Hyksosów na rolniczy Egipt. Koniec owych zmagań to opisana przez Homera wojna trojańska. Co było podczas ośmiuset lat oddzielających te zdarzenia, właściwie nie wiemy – historycy nazywają ten okres Wiekami Ciemnymi, bo w powszechnych zmaganiach niszczono wszystko, co dla nich mogłoby się stać podstawą snucia domysłów. Wiemy, co było potem – zaczęło się to, co historią (w odróżnieniu od poprzedniej prehistorii) nazywamy.

Wśród herosów symbolizujących stworzenie nowego ładu, obok zwycięzcy militarnego – Tezeusza, obok twórcy zgrzebnej zrazu demokracji – Drakona, obok wreszcie twórcy ekonomicznego ładu niewolniczego państwa – Solona, stał twórca nowego pojmowania świata – Tales.

Nauczył on, że nie jest nam potrzebna wiedza pełna, lecz pewna. Wiedza pełna zresztą istnieć nie może – nauczał. – Gdybyśmy bowiem wiedzę pełną posiedli, musiałaby ona – jako opisująca wszystko – być co najmniej tak skomplikowana, jak opisany przez nią Wszechświat, a przez swą komplikację stałaby się całkowicie nieprzydatna.

Wiedza pewna zatem musi opisywać tylko pewne aspekty świata, ale przez swą niezawodność da się zastosować w każdej, mogącej zdarzyć się jej posiadaczom, sytuacji.

I zadekretował, iż wiedza pewna w atomach występuje, w niepodzielnych częściach, które twierdzeniami nazwał. I nauczał też, jak owe atomy są zbudowane, więcej – jak je budować należy.

Pierwszy warunek jest taki, by twierdzenie – atom wiedzy pewnej – nie orzekało o konkretnych obiektach, lecz o abstraktach. Gdy ponad dwa tysiące lat później Mikołaj Kopernik odkrył twierdzenie, iż zły pieniądz wypiera dobry pieniądz, nie miał na widoku żadnej konkretnej waluty, lecz pieniądz-abstrakt, przez co moc jego twierdzenia do dziś – często z przykrością – odczuwamy. Pewna wiedza o ciążeniu dotyczy nie tylko siły, która powoduje, że upadający nam na stopę kamień może ją uszkodzić, lecz o abstrakcie, który powoduje również, iż nasze łodzie nie toną, a balony mogą nas unieść w górę.

Drugi warunek mówi o zależnościach owe abstrakty łączących – mają być formalne (co bynajmniej nie oznacza, że symboliczne). Formalne – to znaczy muszą mieć jednoznaczne, ostre znaczenie. Gdy na przykład głosił, że odcinek ma tyle samo punktów, co prosta, to z pogardą odrzucał argumenty tych, którzy wskazywali, iż po odrzuceniu odcinka na prostej jeszcze wiele punktów pozostanie. Mówił bowiem, że *tyle samo* oznacza, iż można punkty odcinka i prostej połączyć w rozłączne pary. A to przecież wie każdy, kto widział zwykły, myśliwski łuk. A łuk to przecież wygięty odcinek – ustawiwszy go cięciwą równolegle do jakiejś prostej, widzimy, że każda strzała poprowadzona ze środka tej cięciwy przez któryś z punktów łuku trafi w jakiś punkt prostej, a dla różnych punktów łuku (czy prostej) będą to różne punkty prostej (czy łuku).

Na koniec wreszcie trzeci warunek orzekał, iż każde twierdzenie musi być sądem warunkowym. Wątpiących pytał, czy wierzą, że woda płynie z góry na dół. A gdy ci go zapewniali, że trudno w to wątpić, pytał ich, czy widzieli fontannę. Warunki dotyczące pojedynczego twierdzenia nazywał założeniami, a dotyczące całej grupy twierdzeń – aksjomatami.

Ale najistotniejsze w jego nauce było stwierdzenie najważniejszego prawa, jakim rządzi się Wszechświat – związku przyczynowego. Każda rzecz ma swoją przyczynę – głosił. Przyczyny mają też twierdzenia. Jedne z nich są przyczynami innych. W ten sposób twierdzenia układają się w sieć stworzoną przez wiążące je związki przyczynowe, sieć wyrastającą z leżących u jej podstawy aksjomatów.

Cała ta sieć, a więc twierdzenia i sposób ich pozyskiwania, nosi dziś nazwę metodologii dedukcyjnej. I tak powstała talesowska koncepcja wiedzy pewnej, nazywana dziś nauką.

Nie jest przypadkiem, iż metodologię dedukcyjną stworzyli koczownicy, ludzie żyjący – z konieczności – w zmiennych warunkach. Ludzie prowadzący osiadły tryb życia mogą pozwolić sobie, aby na wszystko mieć po prostu nieodwołujący się do żadnej nauki przepis. Z żadnego prawa fizyki nie wynika, że sposobem na pozyskanie wody jest odkręcenie kranu, a najwłaściwszą reakcją na pożar jest wykręcenie numeru 112 czy 998. Koczownik natomiast musiał wiedzieć, że wody należy szukać raczej w dolinach niż na szczytach, a pożar należy udusić, przykrywając go jakąś płachtą, zalewając wodą lub przysypując piaskiem.

Rewelacją drugiej połowy XX wieku było odkrycie, że metodologia dedukcyjna powstała tak późno, i że poprzednie wielkie cywilizacje posługiwały się innym sposobem gromadzenia wiedzy. Tą zasadniczą różnicą okazał się zdumiewający fakt nieposługiwania się w kulturze sumeryjskiej, egipskiej, chaldejskiej, a nawet jeszcze achajskiej związkiem przyczynowym. Jego poprzednikiem było następstwo czasowe. Wiadomo było, że po nocy nadejdzie dzień, a po zimie wiosna. Tak było i będzie, bo o tym poucza nas doświadczenie. Skrupulatna analiza wskazała, że nawet matematyczna wiedza tamtych kultur, tamtych epok była uzyskiwana w ten sposób. Powstał więc termin: metodologia empiryczna.

Do dziś w wielu obszarach posługujemy się tą metodologią. Najpopularniejszym dziełem pisanym zgodnie z jej zasadami jest książka kucharska, gdzie podany jest sposób postępowania, który prowadzi do pozyskania smakowitych produktów. Nikt jednak nie wymaga od autorów książek kucharskich dowodu, że przepis jest skuteczny. Zresztą takiego dowodu być nie może – jedyne, co dowodzi skuteczności, to wielowiekowa praktyka.

W 1972 roku Donald Knuth w pracy *Ancient Babylonian algorithms* przedstawił pogląd, że wiedza o liczbach i figurach czasów przedgreckich nie jest pramatematyką, lecz prainformatyką. Dziś sądzą tak praktycznie wszyscy historycy matematyki.

I z pewnym niepokojem należy uświadomić sobie, że dzisiejsza, prawie już dyrygująca światem informatyka też odstępuje od dowodzenia swoich algorytmów, zadowalając się przetestowaniem powstających programów.

III harmonię, którą utrzymuje się wszystko — nie wyłączając bogów — badać nakazał...

Jest taki zdumiewający moment w dziejach świata, gdy my, ludzie, uznaliśmy za niezbędne udzielenie odpowiedzi na pytanie, co właściwie wyróżnia nas spośród wszelkich żywych stworzeń. Było to w wieku −VI. Owa niezbędność pojawiła się we wszystkich stronach świata, we wszystkich kulturach i – co jeszcze dziwniejsze, wobec braku możliwości bezpośredniego, a choćby nawet sensownie szybkiego kontaktu – pojawiła się jednocześnie.

Spośród odpowiedzi, których udzielono zapewne więcej, największą liczbę zwolenników, a więc i największe znaczenie uzyskało sześć. Warto się im przyjrzeć i pomyśleć o tym, jak są one obecne i dziś w naszym życiu.

Oczywiście, daty narodzin i śmierci nie są istotne (ani też bardzo dokładne) – podaję je dlatego, by tym bardziej uwypuklić, jak bardzo wszyscy wymienieni byli rówieśnikami.

Bogaty i wykształcony mandaryn K'ung-fu-tsy (−551; −470), znany w Europie jako Konfucjusz, istotę człowieczeństwa widział w umiejętności wytworzenia ładu społecznego i podporządkowania się jemu.

Ubogi włóczęga (tu – rzecz jasna – wiemy tylko tyle, że było to współcześnie) Lao-tsy, co znaczy *stary mędrzec*, za wyróżniający atrybut człowieka uważał zdolność wytknięcia sobie celu i wytrwałego dążenia, by go osiągnąć – dziś nazywamy tę doktrynę taoizmem.

Indyjski książę Wardhamana Mahavira (∼ −599; −527), znany powszechnie jako *Dżina – Zwycięzca*, uważał człowieka za jedyną istotę uznającą życie za najwyższą wartość.

Z kolei w Indochinach książę Siddharta Gautama (∼ −580; −527), po doznaniu mistycznej iluminacji – stąd jego przydomek *Budda – Przebudzony* – za fundament człowieczeństwa uznał zdolność do wyrzeczeń, której pełne wykorzystanie ma człowieka wprowadzić w stan doskonałości – *nirwanę*.

Reformator mazdaimu, religii perskiej, Zaratusztra (Grecy mówili o nim Zoroaster) – przez wielu uważany jeno za personifikację idei – człowieczeństwo widział w umiejętności odróżniania dobra od zła i w walce dobra ze złem (*Ormuzda* z *Arymanem*).

Europa była w tym gronie reprezentowana przez Pitagorasa z Samos (−572; −497), twórcę kolonii greckiej w Krotonie, na południu Italii. Głosił on, że Wszechświat jest tak pełen sprzeczności, że – aby nie zginął – *istnieć musi Harmonia, którą utrzymuje się wszystko, nie wyłączając bogów* i w potrzebie poszukiwania i badania tej Harmonii widział istotę człowieczeństwa.

Zatem powołana wówczas tożsamość człowieka to: urzędnik, hipis, ekolog, altruista, moralista, uczony.

Stąd mamy: prawo, wolność, pokorę, ofiarność, etykę i naukę.

Jakże piękny jest ofiarowany nam – ludziom nauki – udział w esencji egzystencji ludzkiej.

IV Świat cały na palcach zliczyć próbował...

Harmonia najbardziej widoczna być miała wśród liczb, figur, dźwięków i ciał niebieskich. Najczystsze bowiem, najprostsze i najbardziej niezmienne były opisujące je abstrakty. Dziś dziwić nas może obecność w tym gronie ciał niebieskich – zważmy jednak, że ciała niebieskie w owych czasach to były świecące punkty na stałe przytwierdzone do sfery niebieskiej.

Pierwsze odkrycie świadczące o słuszności wyboru tych właśnie dziedzin dotyczyło struny. Stwierdzono – co i dziś potwierdzić każdy sobie może – że dwie jednakowe i jednakowo napięte struny, gdy jedna z nich zostanie o połowę skrócona, będą pięknie współbrzmieć. Podobnie będzie, gdy długości strun będą się miały jak 2 do trzech. I gdy będą się miały jak 3 do czterech.

Dziś te interwały nazywamy odpowiednio oktawą, kwartą i kwintą.

Nie od rzeczy jest odnotować, że czar pierwszego odkrycia dotyczącego harmonii spowodował dzisiejsze ograniczenie zakresu tego słowa – najczęściej obecnie pojęcie harmonii kojarzy się nam z muzyką.

Trudno było powstrzymać się od zachwytu – oto liczby okazują się opisywać to samo, co dźwięki. Trudno też było powstrzymać się od wykroczenia poza granicę faktycznie uzyskanego rezultatu – ukuto kompletną i ostateczną zasadę harmonii:

harmonia wyraża się stosunkiem liczb naturalnych i jest tym pełniejsza, im liczby te są mniejsze.

Odwołanie się do liczb naturalnych wynikało nie tylko z faktu, że innych liczb praktycznie nie było (bo przecież przyzwoite ułamki to też stosunki liczb naturalnych). Brało się to również z dominującego wówczas przekonania, że obserwowana wokół różnorodność zjawisk i form powstaje jako rozmaite kombinacje niewielkiej tylko liczby podstawowych klocków. Oczywiście, każdy rodzaj klocków – nazywany pierwiastkiem lub żywiołem – może występować w wielu egzemplarzach. Rodzajów tych jest jednak niewiele – Demokryt, na przykład, sądził, że wszelkie obiekty materialne to zmyślne kombinacje czterech zaledwie żywiołów: ognia, powietrza, wody i ziemi.

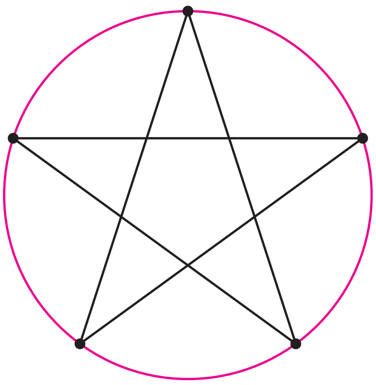
Głębokie przekonanie o słuszności takiej liczbowej definicji harmonii kazało poszukać jej odpowiednika w geometrii. Niewątpliwy był fakt, znany już wtedy od stuleci, że zrzutowanie równoległe równomiernej podziałki wykreślonej na jednej prostej na inną prostą daje na niej również równomierną podziałkę, choć jej odcinki mogą być inne od tych z podziałki pierwotnej. Zatem stosunki miar, uzyskiwane przez zastosowanie przy mierzeniu jednej z tych podziałek, będą takie same, jak stosunki miar, gdy używać będziemy drugiej z nich. Fakt ten nazywany był (i jest) twierdzeniem Talesa, co bynajmniej nie oznacza, iż dowiódł tego Tales, lecz jest to nazwa honorowa – w dzisiejszej terminologii powinno ono nosić nazwę: *twierdzenie imienia Talesa*. Powstawało pytanie, jak może wyglądać jego dowód. I przyjmowano argumentację najprostszą: podzielmy odcinki podziałki na obu tych prostych na jednakowe, takie same na obu prostych kawałki; jeśli jakaś liczba kawałków, składająca się na odcinek podziałki na pierwszej z tych prostych, rzutuje się na jakąś (być może inną) liczbę tych samych odcinków na drugiej prostej, składających się na odcinek podziałki na drugiej prostej, to stosunek tych liczb opisuje nam stosunek rezultatów uzyskanych przez mierzenie jedną bądź drugą podziałką.

Widać od razu niedoskonałość tej argumentacji: skąd wziąć pewność, że taki kawałek, mieszczący się całkowitą liczbę razy tak w odcinku jednej, jak i drugiej podziałki, istnieje. Luka ta, wobec triumfującego atomizmu (nawet przecież wiedza pewna występowała w porcjach – twierdzeniach) nie była dostrzegana. Ale niedostrzegane niebezpieczeństwo niebezpieczeństwem być nie przestaje. Jest nawet bardziej groźne: gdy odkryto (zapewne dokonał tego Hipokrates z Chios – tylko imiennik tego od lekarzy, który wywodził się z Kos), że takiego – mieszczącego się całkowitą liczbę razy w boku i całkowitą liczbę razy w przekątnej kwadratu – odcineczka nie ma, zwątpiono we wszystko, czego dokonano do tej pory.

Wierzący w Harmonię pitagorejczycy w ogromnej liczbie stracili wiarę. Ale gorszy jeszcze los dotknął tych, którzy stoczyli się na zgoła przeciwstawne do intelektualnych idei pitagoreizmu stanowisko – powstała sekta *akuzmatyków*, którzy uzyskanej niepokonanej trudności nadali walor mistycznej tajemnicy i badania naukowe zamienili na pełną czci kontemplację niepojmowanego. Można by rzec – zrealizowali o ponad pół tysiąclecia późniejszą doktrynę *credo, quia absurdum.* Potęga umysłu, której spodziewał się po ludziach Pitagoras, ustąpiła słabości ducha.

I to stało się w późniejszych wiekach potężną przestrogą przed przyjmowaniem generalnych, wszystko objaśniających dogmatów.

W pentagram na piedestał stawiając, w najpotężniejszy oręż nas wyposażył…



Zapewne nie wszyscy zwrócili uwagę, że stosowanie złotej proporcji jako normy w komponowaniu proporcji ciała ludzkiego nie było bezmyślną doktryną: na greckich posągach kolano tak kobiety jak mężczyzny dzieli nogę w złotej proporcji – jednak u kobiety dłuższą częścią w tym podziale jest udo, u mężczyzny zaś łydka. Tak zresztą jest i w życiu!

Byli wszelako i tacy, którzy nie upadli na duchu, i przyczynę niepowodzenia upatrywali nie w bezsilności myśli ludzkiej, lecz tylko w lekkomyślnie przyjętej doktrynie, iż *wszystko jest liczbą*.

Oczywiście, znaleźli się od razu ekstremiści, którzy w miejsce tej doktryny hasło *liczby zostawmy kupczykom* chcieli głosić. Lecz większość przychyliła się do głębszego rozumienia twierdzenia Talesa i zaproponowała związanie harmonii z geometryczną proporcją.

Jej symbolem stał się pentagram – gwiaździsty pięciokąt foremny. Jego proporcje uznano za złote. Oznaczało to, że odcinek jest idealnie, w złotym stosunku podzielony przez ten ze swoich punktów, który powoduje, iż odcinek tak się ma do swojej większej części, jak owa część do części mniejszej.

Kult takiego podziału rozpowszechnił się tak dalece, że nie tylko noszono medaliki w kształcie pentagramu, ale nawet rzeźbiarze, jak Fidiasz czy Praksyteles, rzeźbionym postaciom takie proporcje nadawali. I dziś skłonni jesteśmy takim proporcjom ciała przyznawać najwyższe walory piękna.

Wszelako nie na tym polegała główna wartość zwrócenia się w kierunku geometrycznych proporcji. U podstaw zajmowania się nimi leży geometryczne podobieństwo – fakt, że możemy narysować dwie figury, które uznamy za jednakowe, choć różnić się one będą wielkością: dla nas o tożsamości figury decydują jej proporcje, a nie jej rozmiar.

Co znaczy *dla nas*? Dziś nic, ale jeszcze sto pięćdziesiąt lat temu znaczyło – *dla Europejczyków.*

Szczęśliwym zrządzeniem losu już pitagorejczycy, własności figur odkrywając, zdecydowali się na tę geometrię, którą mamy dziś w szkole, w pracy, wszędzie, geometrię euklidesową później nazwaną. Zapewne nie zdawali sobie wtedy sprawy, że mogą istnieć inne geometrie i już absolutnie pewnie nie wiedzieli, że w tych „innych" figury różnych rozmiarów takich samych własności mieć nie mogą. Ale wybierając tak, zdecydowali, że nasz mały i słabo zaludniony kontynent z czasem postawi swą stopę na głowach ludów „reszty świata".

Pierwszym zastosowaniem możliwości rysowania w różnych skalach był plan i mapa. Greccy hoplici znaczną część swoich sukcesów zawdzięczali temu, iż przed ich akcją greccy kupcy umieli na swoich szatach czy garnkach narysować plan umocnień przyszłego przeciwnika. Grecy byli bardzo dumni z tego, że oni tak umieją, a inni nie – jest to odnotowane w podaniu o wejściu do labiryntu na Krecie, by zabić Minotaura (w rzeczywistości wymordować ukrywających się tam tubylców) – znana nam wszystkim „nić Ariadny" to właśnie rysunek wykonywany na tarczy przez wchodzącego do labiryntu wojownika, umożliwiający mu oczywiste wyjście z niego po wykonanej robocie. Tak zresztą Grecy okradli egipski labirynt w Hawara. Tak dwa tysiące lat później niepiśmienny zbir Pizarro mógł skutecznie walczyć z imperium Inków – jak wyglądały ich „mapy", każdy może przekonać się w dowolnym muzeum Azji i Pacyfiku: do ich odczytania potrzebny był fachowiec. Na wschodzie podobnie niewielki oddział Jermaka potrafił zhołdować Rosji Syberię. To my dopłynęliśmy do Chińczyków, choć oni mieli kompasy prawie 500 lat wcześniej od nas.

Jeszcze większe znaczenie odegrał rysunek techniczny, umożliwiający wykonywanie kopii urządzeń (nawet ogromnych rozmiarów) bez dysponowania wzorcowym egzemplarzem. Że nie jest to oczywiste, świadczy odnotowany przykład niewiary w takie rowiązanie u – skądinąd uważanego za wybitnego – Juliusza Cezara: gdy jego wojskowi inżynierowie oświadczyli, że potrafią na podstawie swoich rysunków zbudować nad kanałem La Manche galery, potrzebne ich wodzowi do inwazji na Brytanię, ten kazał „na wszelki wypadek" przenieść jedną na barkach legionistów przez całą Galię (czyli z Tulonu do Calais). To właśnie rysunek techniczny umożliwił powstanie przemysłu.

Nie od rzeczy jest wspomnieć o niejako lustrzanym przypadku do galery Cezara. Otóż w Epoce Meji, otwarciu Japonii na świat pod koniec XIX wieku, Japończycy zakupili w Anglii plany pancernika dla powstającej ich floty wojennej. Anglicy dostarczyli im plany błędne, co spowodowało katastrofę, w której Japonia straciła nie tylko znaczne fundusze, lecz także ponad tysiąc zabitych. Nic dziwnego, że potem wyrażali białym swą wdzięczność od 1905 po 1945 rok.

Dominację podobieństwa w naszej kulturze można zaobserwować również w muzyce: progi w gryf gitary są wbijane tak, że tworzą figurę samopodobną – skrócenie strun przez przyciskający je do wybranego progu uchwyt (zwany *capo*) powoduje jedynie przestrojenie jej w inną tonację – podobnej operacji nie można wykonać na żadnym z pozaeuropejskich instrumentów.

I tak, tchórzliwa ucieczka przed liczbami okazała się w efekcie drogą do niewyobrażalnych sukcesów.

VI prawdziwe, wszystkoopisujące liczby stworzył...

Przeciwstawne do akuzmatyków (która to nazwa oznacza mniej więcej nasłuchujących bądź uczniów) stronnictwo pitagorejczyków nazwało się matematykami (od greckiego *matein* – wiedzieć), a więc uczonymi (nie każdy dziś wie, że nazwa naszego zawodu jest taka ambitna!). I jakoś hasło porzucenia liczb nie bardzo do tej nazwy pasowało. Niewiele więc ponad stulecie od dzielącego pitagorejczyków kryzysu znaleźli się młodzi, ambitni matematycy, którzy uparli się pogodzić liczby z Harmonią.

Ambitny ten program zaczęto od stworzenia pierwszej bodaj w historii teorii prawdziwie aksjomatycznej. Jeśli bowiem rację miałby Tales, to powinno by się uzyskiwać ciekawe rezultaty, rozważając rzeczy opisane tylko przez ich własności, oderwane od jakichkolwiek desygnatów. Taką teorią stała się **teoria wielkości jednego rodzaju**.

Wielkości jednego rodzaju miałyby mieć następujące fundamentalne (a więc definiujące je) własności:
• gdy mamy dwie takie wielkości, to jest też tego samego rodzaju wielkość będąca ich sumą;
• dla każdej wielkości istnieje tego samego rodzaju wielkość większa od niej 5, 7 czy n razy;
• zawsze można stwierdzić, czy dwie takie wielkości są równe, a jeśli nie są, to która jest większa;
• jeśli pierwsza taka wielkość jest mniejsza od drugiej, to istnieje tego samego rodzaju wielkość uzupełniająca ją do tej drugiej;
• każdą wielkość można skończenie zwielokrotnić tak, aby stała się większa od z góry danej drugiej wielkości tego samego rodzaju.

Widać w tym ducha talesowskiej wiedzy pewnej: opisujemy równie dobrze strukturę długości, ciężarów, pól, objętości, czasu, liczb i czego tylko kto zechce. Powstaje zatem pytanie, jak do tego mają służyć liczby. I odpowiedź została udzielona bez wahania i w duchu dominującego wówczas sposobu myślenia: liczby mają opisać proporcję dowolnie obranych wielkości jednego (obojętnie którego) rodzaju.

Równocześnie zaproponowane zostały dwa sposoby posłużenia się liczbami naturalnymi do opisu wielkości jednego rodzaju. Bo mylne jest przeświadczenie, że matematyka rozwija się jak ciasto drożdżowe – po prostu rośnie. Matematyka to wędrówka, w której czekają nas rozdroża, błędne drogi, grzęzawiska, obejścia, przepaście. Zresztą żadna nauka nie powstaje w inny sposób.

Pierwsza propozycja, której autorem był Teajtetos, polegała na tym, że proporcję dwóch wielkości opisywać miał ciąg liczb naturalnych. Uzyskiwało się go przez stosowanie dzielenia z resztą, takiego samego, jakie dziś wykonują dzieci w podstawówce, tyle że zauważono, iż dzielić z resztą można nie tylko liczby. Dziś takie ciągi nazywane są ułamkami łańcuchowymi lub ułamkami ciągłymi.

Pewien niepokój, jaki może powstać w związku z wrażeniem obcości tych nazw, nie powinien przerażać – jest to dowód, że propozycji tej nie uznano za najlepszą, choć w chwili powstania zachwycono się, jak dosłownie łączy obie pitagorejskie doktryny: pierwotną – arytmetyczną i pokryzysową – geometryczną. Mianowicie, złota proporcja wedle tego sposobu wyrażała się nieskończonym ciągiem samych jedynek, a więc ideał geometryczny opisany był najmniejszą liczbą.

Druga propozycja wydać się może dziwna przez to, że nie wiąże ona z proporcją danych dwóch wielkości jednego rodzaju jednego obiektu, lecz dwie ich zbiorowości. Propozycja Eudoksosa była bowiem taka: uznajemy proporcję dwóch wielkości jednego rodzaju za tożsamą z proporcją dwóch wielkości innego rodzaju, gdy dowolny stosunek liczb naturalnych mniejszy od jednej z tych proporcji jest mniejszy i od drugiej, a dowolny większy od jednej jest też większy od drugiej (była, oczywiście, receptura, jak to sprawdzać). Czyli każdej proporcji wielkości jednego rodzaju odpowiadały dwie zbiorowości: jedna zawierała stosunki liczb naturalnych przybliżających ją „z dołu", a druga stosunki przybliżające ją „z góry".

Podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, o tej własności, że każda z liczb jednej z nich jest mniejsza od każdej liczby z drugiej – czyli właśnie takie zbiorowości, o jakich mówi Eudoksos – nazywamy dziś *przekrojem Dedekinda*. Dzieje się to nie dlatego, by umniejszyć wielkość Eudoksosa, lecz dlatego, że podczas gdy Eudoksos mówił, iż każda proporcja-liczba jest przekrojem, Dedekind dodał: i każdy przekrój jest liczbą, co dało początek współczesnej teorii liczb rzeczywistych.

Propozycja Eudoksosa została przyjęta powszechnie i z pewnym ulepszeniem Richarda Dedekinda jest używana do dziś, a uzyskane w ten sposób wszelkie możliwe proporcje nazywane są liczbami rzeczywistymi. Ich funkcja jest taka, że pozwalają – przy wyborze w każdej klasie wielkości jednego rodzaju jakiejś z nich jako jednostki – zmierzyć wszystkie wielkości.

Zachwyt nad tym rozwiązaniem dotarł najsilniej do tych, którzy najpełniej matematykę rozumieli. Można go znaleźć u Archimedesa w pracy *Pomiar koła* i w fundamentalnym dziele Izaaka Newtona *Philosopiae Naturalis Principia Mathematica*.

Newton pisze (w tłumaczeniu na język współczesny) tak. Niezrównoważony musiałby być ten, kto chciałby podzielić rozciągłość w przestrzeni przez rozciągłość w czasie – przestrzeni przez czas dzielić się nie da, bo to rzeczy różnych rodzajów. Ale, oczywiście, można podzielić liczbę, opisującą rozciągłość w przestrzeni, przez liczbę opisującą rozciągłość w czasie – to przecież są takie same liczby. Co otrzymamy? Oczywiście, liczbę, której interpretacja należy do nas (tu stosowne byłoby uważać ją za prędkość). Możliwość opisywania **najrozmaitszych** wielkości **tymi samymi** liczbami powoduje, że matematykę można stosować we wszystkich dyscyplinach nauki.

Od wynalazku Eudoksosa matematyka faktycznie stała się królową nauk.

VII nieskończoność na dwie części rozpłatał...

Wszelako lęk przed błędem pozostał. Skąd można było mieć pewność, że to, co się przydarzyło koncepcjom pierwszego okresu pitagoreizmu, nie przydarzy się tym nowym – choć tak wspaniałym – rozwiązaniom?

Sprawy liczb i figur wydawały się uporządkowane, ale istniała jeszcze hydra wystawiająca coraz to nowe głowy w każdym właściwie poruszanym problemie. Ile jest liczb naturalnych? A ile jest liczb pierwszych? Ile w końcu punktów ma prosta? A jaka jest ona długa? Słowo *nieskończoność* pojawiało się w każdym niemal rozumowaniu.

Temat był podjęty z ogromną pasją zwłaszcza przez Parmenidesa i jego uczniów. Owi eleaci (bo kształcili się w Elei) co prawda nazywali swoje wywody tylko aporiami – trudnościami – ale nie ukrywali swojego pesymizmu w kwestii bezpieczeństwa rozumowań matematyków. Byli bowiem przekonani, że błąd (chwilowo się nieujawniający) tkwi głęboko – w strukturze podstawowych pojęć, fundamentalnych abstraktów matematyki. Już sam fakt, że figury miały – jakoby – składać się z punktów, wydawał im się gwarantujący powstanie sprzeczności. Wyobrażonej ciągłości prostej przeciwstawiali rozumowania wskazujące, że pewnych punktów na niej brakuje.

Choćby sławny problem Achillesa i żółwia: Achilles z łatwością może przegonić stokrotnie wolniej od niego biegnącego żółwia, ale dogonić go nie może. Istotnie, jeśli na początku odziela go od żółwia dystans, który Achilles przebiega w kwadrans, to po dwóch kwadransach wyścigu Achilles będzie znacznie wyprzedzał biegnącego w tym samym kierunku żółwia. Wszelako dogonić go nie może – za każdym razem, gdy dobiegnie do miejsca, gdzie poprzednio był żółw, ten znajdzie się niewiele, ale jednak przed nim i taki stan rzeczy powtarzać się będzie bez końca.

Problem ten, jako zagadnienie sportowe jest, oczywiście, bez sensu. Ale przecież sformułowano go w innym celu: miał pokazać, jak łatwo można skonstruować trudną do objaśnienia matematycznego zagadkę. Ten problem był błahy, ale co będzie, gdy tego rodzaju zamęt zdarzy się w poważnej sytuacji?

Głębokie spojrzenie na tę problematykę zaprezentował Arystoteles. Dostrzegł on mianowicie, że słowo *nieskończoność* dotyczy dwóch, zupełnie niepodobnych sytuacji. Zdecydował się nawet zaordynować, że jedna z tych nieskończoności jest dobra, pożyteczna, druga natomiast zła, szkodliwa i wiodąca na manowce.

Dobra nieskończoność, zwana nieskończonością potencjalną, to znana z dziecięcych zabaw fraza „a ja zawsze o jeden więcej". A więc jest to proces, który zawsze można kontynuować. Tu zresztą mieści się rozwiązanie aporii Achillesa i żółwia, bowiem posługując się tą dobrą nieskończonością (w tym przypadku – ciągiem geometrycznym), można obliczyć, że żółw zostanie dogoniony dokładnie po kwadransie pomnożonym przez 100/99. Nieskończoność potencjalna jest jak czas – biegnie w nieskończoność, choć zawsze dysponujemy tylko jego skończoną ilością. Symbolem tej dobrej nieskończoności jest ∞.

Jest jednak i nieskończoność zła, zwana aktualną. To ona jest obecna w zdaniu „odcinek ma nieskończoną liczbę punktów". Słowem, zachowuje się nie jak proces, lecz jak stabilny stan. Nie jak czas, lecz jak przedmiot.

Arystoteles zdecydowanie zakazywał posługiwania się nieskończonością aktualną. Zakaz ten był tak przejmujący, że matematycy przestrzegali go ponad 2100 lat. Wyłamał się z niego dopiero Georg Cantor, fundując matematykom dość kłopotliwy prezent, jakim jest teoria mnogości. Nieskończoności aktualnych okazało się nieskończenie wiele, a nawet nieskończenie wiele rodzajów. Oznaczają je różne litery, takie jak $\aleph$, $\mathfrak{c}$, ω itd. itp.

Wielu jednak chciałoby powrócić do stanu pierwotnej dzikości, gdy – jak u Euklidesa – prosta miała zawsze skończoną długość, którą jednak można było stosownie do potrzeb przedłużać, a o liczebności liczb pierwszych pisało się, że gdyby było ich skończenie wiele, to ich iloczyn powiększony o 1 nie mógłby istnieć: nie byłby liczbą pierwszą, bo od każdej liczby pierwszej byłby większy, a nie byłby też liczbą złożoną, bo przez żadną liczbę pierwszą by się nie dzielił.

Wielu sądzi, że iloczyn początkowych liczb pierwszych plus jeden jest liczbą pierwszą, co łatwo sprawdzić. Spostrzeżenie to jest jednak prawdziwe tylko dla niedostatecznie pracowitych weryfikatorów.

Nie od dziś jednak wiadomo, że zjedzenie jabłka z drzewa wiadomości dobrego i złego nieodwołalnie wyklucza z raju, a raj utracony nigdy odzyskany być nie może.

VIII by od poplątania języków – jak w Wieży Babel – uchronić, znakami żonglować nauczył...

W −220 roku rolnicze Chiny, będące akurat w stadium rozproszenia na drobne (w skali europejskiej) królestwa, po raz pierwszy muszą stawić czoła najazdowi koczowników – Mongołów. Wywołana najazdem panika doprowadziła do niemal natychmiastowego zjednoczenia. Na czele powstałego cesarstwa stanął Quin-shi-huang-ti. Jego rządy były niezwykle skuteczne, ale też i bardzo zdecydowane, żeby nie powiedzieć brutalne. Najbardziej znany jest z tego, że nakazał budowę Wielkiego Muru, który skutecznie bronił Chiny przed najazdami przez prawie 1500 lat. Ostatnio popularny jest też w Europie dzięki wystawom terrakotowej „armii", jaka została umieszczona w jego grobowcu.

Znaczące najazdy ludów pasterskich miały w Chinach potem miejsce jeszcze dwa razy: Kubiłaj-chan podbił Chiny w 1279 roku na 90 lat, a potem Mandżurowie w 1644 roku na lat 267. Jak widać – w odróżnieniu od Europy – w Chinach kultura rolnicza nigdy przez kulturę pasterską nie została zdominowana.

Ale główną jego zasługą jest reforma pisma, dzięki której to ogromne państwo zachowuje jedność, mimo nieprzebranej wręcz mnogości zamieszkujących je ludów. Quin-shi-huang-ti ustanowił mianowicie nowe, jednolite pismo chińskie, nakazując wszystkie istniejące teksty przepisać w nowy sposób lub zniszczyć (i karząc śmiercią posiadanie tekstów zapisanych innym stylem).

My, Europejczycy, mamy trudności z dostrzeżeniem doniosłości tego kroku, kojarzącego się nam z reformą ortografii lub, co najwyżej, z wprowadzeniem w Rosji grażdanki przez Piotra I. Trudność bierze się stąd, że w szeroko rozumianym kręgu kultury śródziemnomorskiej pismo – od czasów jeszcze sumeryjskich – ma charakter fonetyczny: widząc jego znaki, wiemy, jaki dźwięk one opisują – napis wskazuje, jakie dźwięki mamy z siebie wydawać (choć byśmy czytali po cichu). Tymczasem pismo chińskie jest ideograficzne – ono notuje nie dźwięki, a znaczenia. Wobec tego ludzie znający to pismo mogą odczytywać je głośno na różne sposoby, w zależności od używanego języka. Zatem mnogość języków nie uniemożliwia posiadania wspólnej – nie tłumaczonej, a tożsamej – literatury tak pięknej, jak naukowej czy technicznej. Tak więc brutalna reforma cesarza doprowadziła do tego, że ponad miliardowe dziś Chiny, mówiące kilkunastoma wielkimi językami, mają jedną kulturę, jedną naukę, jedną technikę zapisaną w jednakowo dla wszystkich czytelny sposób.

Ale przecież i my to znamy. Napis $\sqrt{2}$ Polak odczyta jako „pierwiastek kwadratowy z dwóch", Anglik jako „square root of two", Rosjanin jako „квадратный корень с двох", a mówiący innymi językami w jeszcze inny sposób.

Tak więc tak zwane wzory matematyczne mają jednoznaczną treść, a nie mają jednoznacznego odczytania fonetycznego.

Nie sposób powiedzieć, czy twórcy matematycznej symboliki wiedzieli o reformie Quin-shy-huang-ti. Niewątpliwie jednak zrobili dokładnie to, co i on. Na ich korzyść przemawia tylko to, że nie wprowadzili swojej reformy pisania za pomocą represji (choć zapewne wielu uczniów byłoby innego zdania).

Za istotny początek rachunków symbolicznych należy uznać *Hisab al-dżabr ua'l-mukabala*, czyli *Sztukę redukcji i przenoszenia* Muhammada ibn Musa al-Chwarizmiego (w *Imieniu róży* Kuvarizmiego), napisaną w epoce świetności arabskiej kultury i nauki, w wieku IX. Dzieło to, początek algebry (*al-dżabr*) stanowiące, kazało zająć się rachunkiem symbolicznym wszystkim znaczącym matematykom, co zaowocowało tym, że owa algebra jest dziś dominującą gałęzią matematyki.

W Europie konsekwentne wprowadzenie symboliki matematycznej należy datować od tekstów Francoisa Viète'a, pisanych w przerwach starć, w których wraz z Henrykiem IV przepędzał Hiszpanów z Francji w XVI wieku.

Nie jest jasne, czy sam Quin-shi-huang-ti zdawał sobie sprawę z tego, jak doniosłe konsekwencje ma jego reforma. Podobnie nie wiemy, czy twórcy symboliki matematycznej nie traktowali jej jedynie jako sposobu skrótowego zapisu, coś w rodzaju stenografii. Faktem jest jednak, że symbolika matematyczna spowodowała, iż matematyka jest najbardziej całoświatową nauką i że, korzystając z jednego języka pisanego, posługuje się pismem ideograficznym, a nie alfabetycznym, czego uświadomienie sobie dla wielu matematyków może być sporym zaskoczeniem.

IX w głębinę fizis Wszechświata sięgając, kamień filozoficzny ową fizis opisujący wydobył...

Wśród aporii Zenona była jedna o charakterze odmiennym od pozostałych. Chodzi o tak zwany paradoks strzały: w każdym momencie wystrzelona z łuku strzała znajduje się w jakimś punkcie – kiedy wobec tego leci?

Wyjaśnienie tej trudności dziś nie przedstawia większego kłopotu: wiemy, że do opisu zachowania punktu materialnego położenie nie wystarcza – trzeba jeszcze określić pęd. Oba te pojęcia są wprawdzie związne (np. zasadą nieoznaczoności Heisenberga), ale odtworzenie jednej z drugiej jest niemożliwe. Ów pęd opisuje właśnie fakt, że strzała leci. Ale to wiemy dziś.

Ruch u myślicieli dawnych wieków występował jako szczególny przypadek zmienności. **Zmienność**, jako coś odrębnego od **stanu**, to był średniowieczny odpowiednik dzisiejszego pędu i położenia, ale dotyczył wszelkich zjawisk, wśród których zjawiska mechaniczne odgrywały tylko marginalną rolę. Tak rozważali te sprawy tak zwani scholastycy, tacy jak XIV-wieczny Tomasz Bradwardine z Oxfordu, czy wiek późniejszy Mikołaj Oresme z Paryża.

Skoncentrowanie się w tych rozważaniach na powrót ku mechanice to pomysł Galileusza. Znalazł on też piękną nazwę dla owej własności strzały, która opisuje w dowolnym jej położeniu, że ona leci – *prędkość chwilowa* – i zasugerował, iż należy udoskonalić tak nasze rachunki, abyśmy – doskonale sobie radząc z obliczeniem prędkości w jakimś przedziale czasu – potrafili obliczać i prędkość chwilową w „punkcie” czasu. W dzisiejszej terminologii chciał więc wprowadzenia pochodnej.

I tak matematyka, chcąc poradzić sobie z opisem zmienności, sięgnęła do fizyki, jako do wzorcowych dla matematyki – a w jakimś stopniu od niej niezależnych – związków pojęć.

Rewolucja była głębsza, niż się na pozór zdaje – dotychczas wszelkie matematyczne intuicje wywodzone były ze statycznej geometrii nieruchomych figur i z natury niezmiennych liczb. Tutaj zasugerowano, że figury i liczby mogą się poruszać, przekształcać, a więc trzeba było swoje intuicje budować od nowa.

Jak ogromną trudność sprawia przestawienie się ze statycznej geometrii na dynamiczną, można było zaobserwować w Polsce, gdy w 1967 roku zastąpiono licealne podręczniki geometrii Iwaszkiewicza podręcznikami Krygowskiej. Ci, którzy tego nie pamiętają, mogą odnotować tylko tyle, że dziś wróciliśmy do geometrii statycznej, i liczyć na to, że któryś z uczniów liceum – a nawet któryś z nauczycieli – potrafi wymienić choćby wszystkie rodzaje izometrii płaszczyzny, absolutnie nie można.

I ta trudność okazała się niebotyczną, niedającą się pokonać barierą nawet dla największych. Pojęciem pochodnej – jako odpowiednikiem prędkości chwilowej – posługiwano się, ale z przełożeniem tego na język ścisłych rozumowań nie umiano się uporać.

Newton wymyślił dziwny obiekt oznaczany o, który w pewnych (matematycznych) okolicznościach zachowywał się jak zero, a w innych można było przez owo o dzielić. Wstydził się zresztą tej niedoskonałości i nie chciał opublikować zasad tych zabiegów, choć z nich korzystał (np. przy wyprowadzaniu prawa powszechnego ciążenia) i dopiero po jego śmierci uczniowie wydali, „podpisane” przez niego *Method of fluxions*.

Leibniz, z właściwą sobie fantazją zaopatrzył – w celu obliczania pochodnych – każdą liczbę rzeczywistą w monadę: otoczkę podobną do śluzu, jaki otacza namoczone ziarnko rzeżuchy zasianej przed Wielkanocą. W owej monadzie (złożonej z dość egzotycznych elementów) nie mieściła się żadna inna liczba rzeczywista, oprócz właścicielki tej monady. Specjalny rodzaj rachunku na monadach pozwalał w prostszych przypadkach obliczać za ich pomocą pochodne.

Euler z kolei posługiwał się spostrzeżeniem, że zero pomnożone przez dowolną liczbę też jest zerem, z czego wnosił, że mnożąc zero np. przez dwa, dostajemy dwa razy większe zero. Ten absurdalny pomysł potrafił wykorzystać skutecznie, uzyskując wiele niewątpliwych rezultatów.

Lagrange wreszcie, wyszydzając wymienione wyżej pomysły wybitnych poprzedników, kazał wierzyć, że każda funkcja jest wielomianem (być może nawet nieskończonego stopnia), bo obliczanie pochodnych dla wielomianów jest łatwe.

Piękną ideę do tych bezowocnych zabiegów wniósł Louis Augustin Cauchy, wprowadzając pojęcie otoczenia. Chodziło o to, aby rozpatrując to, co się dzieje w jakimś punkcie, obserwować, co dzieje się w punktach mu najbliższych.

Wyniki Cauchego doprowadził do stanu konkretnych, precyzyjnych rachunków Carl Weierstrass, wprowadzając znane studiującym analizę matematyczną epsilony i delty.

Te, trwające trzysta lat zmagania, miały jeszcze dodatkową, napędzającą je siłę. Otóż, zastanawiając się nad funkcjonowaniem Wszechświata, Pierre Simon Laplace doszedł do wniosku, że znajomość zmienności jakiegoś zjawiska pozwala odtworzyć jego przebieg tak przeszły, jak przyszły. Stworzył nawet nurt filozoficzny, zwany *determinizmem*, którego wyznawcy sądzili, iż pełna znajomość świata połączona z nieograniczoną sprawnością rachunkową pozwoliłaby poznać na drodze obliczeń całą jego przeszłość i przyszłość.

Jeśli pominiemy podnoszenie poglądów Laplace'a do rangi filozofii, trzeba stwierdzić, że odtwarzanie przebiegu zjawisk z ich zmienności jest najpowszechniej obecnie stosowaną metodą nauk przyrodniczych i społecznych. Możliwość uzyskania na tej drodze sensownych rezultatów gwarantuje uzyskane przez Cauchy'ego w latach trzydziestych XIX wieku twierdzenie o rozwiązalności równań różniczkowych zwyczajnych i uzyskane w trzydzieści lat później twierdzenie Sophie Kowalewskiej (pierwszej kobiety – profesora uniwersytetu) o rozwiązalności równań różniczkowych cząstkowych. Bo równaniami różniczkowymi nazywa się problem odtwarzania przebiegu zjawiska z jego zmienności.

Owa możliwość uzyskania sensownych rezultatów nie gwarantuje tego, że możliwości te dadzą się zrealizować. Zaskakujące jest, że dziś nie wiemy np. do końca, jak lata samolot, a nawet, w jaki sposób leci woda z kranu, choć korzystamy skutecznie z tych urządzeń.

X liczbę światów, by wszystkim służyły, rozmnożył...

Idea, aby matematyczne rozumowania rozpoczynać od ustalenia, jakie przesłanki mają stanowić ich podstawę, czyli od ustalenia aksjomatów, wydawała się nie nosić w sobie żadnych niebezpieczeństw. Było oczywiste, że za aksjomaty mają służyć sądy proste, zrozumiałe i niewątpliwie prawdziwe.

Wystarczy jednak przez chwilę podejrzliwie przyjrzeć się poprzedniemu zdaniu, by odkryć, że jest w tym wiele elementów uznaniowych. Jak mówi sentencja przysłowia w naszym kraju przypisywanego Chińczykom: nie ma w tym nic złego, ale może być.

Najbardziej znanym, najbardziej rozpowszechnionym i najbardziej cenionym dziełem naukowym są *Elementy* Euklidesa. Powstałe w −III wieku, nawet pod względem liczby wydań drukiem ustępują tylko *Biblii*. Ich pięć postulatów, z których została wyprowadzona cała geometria i arytmetyka, w powszechnym mniemaniu spełniało wszelkie wyliczone wyżej wymagania. Ale do czasu.

Piąty postulat Euklidesa brzmi:
Jeśli dwie proste przecięte trzecią tworzą kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.
Rzeczywiście, zarówno liczba liter, jak liczba słów w tym zdaniu jest większa od liczby liter czy słów użytych łącznie do sformułowania pozostałych czterech postulatów.

W IV wieku pełen bezgranicznej czci dla minionej greckiego świata wielkości Proklos stwierdził, iż piąty z tych postulatów jest …zbyt długi. Uzasadnił to zawiłymi rozważaniami, z których wynikać miało, iż Euklides zamieścił ten postulat tylko roboczo, ze względu na to, że chciał – gnębiony ciężką chorobą – zdążyć z zakończeniem pisania *Elementów*. Chciał też – gdy siły pozwolą – zastąpić niezręczny postulat jego dowodem przeprowadzonym na podstawie przyzwoitych pierwszych czterech. Niestety, śmierć nie pozwoliła. Więc my – w dowód naszej czci dla Euklidesa – powinniśmy to zadanie wykonać.

Trudno wyobrazić sobie bardziej irracjonalny wywód i bardziej bezzasadne żądanie. Ale matematycy na każde intelektualne zadanie reagują w ten sam sposób – gotowi są poświęcić życie, by mu podołać. Tak się stało i w tej sprawie. Przez 1500 lat praktycznie każdy matematyk pozostawił po sobie próby dowodu piątego postulatu z początkowych czterech. Było to przyczyną wielu dramatów, bo wszystkie te rozumowania okazywały się błędne, a to dlatego, że gdzieś trafiała się w nich jakaś niewynikająca z czterech postulatów przesłanka.

Pojawiły się zatem podejrzenia, iż może dowód jest niemożliwy do przeprowadzenia, co sugeruje – gdy wątpimy w prostotę i oczywistość piątego postulatu – możliwość istnienia geometrii, w której on prawdziwy nie jest.

Problem stawał się wobec tego coraz bardziej znany, by w XVIII wieku dostąpić zaszczytu, jakim było zajęcie się nim przez Immanuela Kanta. Kant, dzielący nasze sądy na sądy *a priori*, a więc przyniesione z narodzeniem na świat, i sądy *a posteriori*, a więc nabyte w drodze życiowych doświadczeń, matematykę zaliczył do tych pierwszych. Wykluczało to wobec tego istnienie alternatywnych teorii matematycznych opisujących ten sam – abstrakcyjny przecież – obiekt. Geometria może zatem być tylko jedna, a skoro ta euklidesowa sprawdza się od tysięcy lat, więc wszelkie badania, co mogłoby ją zastąpić czy też z nią konkurować, pozostają poza granicami nauki.

Takie sformułowanie zakazu badań nie mogło być i nie było przez matematyków zaakceptowane. Liczba badających sprawę piątego postulatu wzrosła wydatnie, bo do matematyków przyłączali się również przedstawiciele innych dyscyplin, choćby dla wyrażenia swego protestu przeciw zakładaniu nauce kagańca.

O ewentualnej alternatywnej geometrii dowiedziano się wiele. Nikt jednak nie wiedział, co zrobić z faktem istnienia alternatywnych teorii jednej przecież otaczającej nas przestrzeni.

Rozpaczliwą próbę podjęli dwaj młodzi ludzie, Rosjanin Mikołaj Łobaczewski i Węgier Janos Bolyai. Uzyskawszy szereg rezultatów opisujących tę alternatywną geometrię, skłonni byli obrazoburczo głosić, że to ich geometria jest jedyna prawdziwa. Życie obu ich potraktowało surowo, bo obaj zakończyli je poza społeczeństwem i w skrajnej depresji. Ale problem, co zrobić z zaistniałą sytuacją, żądał rozstrzygnięcia.

Problem równoprawności geometrii Euklidesa i Bolyai–Łobaczewkiego został rozwiązany w 1870 roku przez Felixa Kleina. Zauważył on mianowicie, że jeśli jakaś teoria da się wymodelować w innej, to jest co najmniej tak samo niesprzeczna jak ta druga. Jeśliby więc udało się wymodelować geometrię Bolyai–Łobaczewsiego w geometrii Euklidesa i geometrię Euklidesa w geometrii Bolyai–Łobaczewskiego, to poziom poprawności obu z nich byłby ten sam. Po czym zrealizował oba wymodelowania.

Napięcie było tak wielkie, że nikt nie dostrzegł wskazanego rozwiązania, co było tym bardziej dziwne, że zostało ono znalezione na polecenie służbowe. Carl Gauss, też zamieszany w te sprawy, polecił Bernardowi Riemannowi, aby ten sprawę omówił w swoim wykładzie habilitacyjnym. Wykład ten odbył się w 1854 roku i nosił tytuł *O hipotezach leżących u podstaw geometrii.* Zawierał zaś konkretne przepisy, za pomocą których można skonstruować dowolnie wiele geometrii, to jest teorii spełniających powszechnie przyjęte wobec geometrii oczekiwania. Takiego rozwiązania nikt nie oczekiwał, więc wykład potraktowano jedynie jako popis błyskotliwości intelektualnej.

Czternaście lat później okazało się jednak, że złożony w bibliotece Uniwersytetu w Getyndze tekst wykładu został przez kogoś przeczytany i – na dodatek – ze zrozumieniem. Tym kimś był fizyk, Hermann Helmholtz, który swoje refleksje wyraził w pracy *O faktach leżących u podstaw geometrii.* Praca zawiera rozważania nad pytaniem, które z geometrii, skonstruowanych w myśl pomysłu Riemanna, mogą mieć zastosowanie w fizyce.

A całość jest podsumowana poważną refleksją wyrzucającą matematykę poza obręb nauk przyrodniczych. Wedle Helmholtza matematyka to skrzynia z narzędziami do uprawiania przyrodoznawstwa, a każdy z jego przedstawicieli może do tej skrzyni sięgnąć i wybrać sobie takie narzędzie, które do jego problemu, do obiektów, którymi się zajmuje, najlepiej pasuje i – oczywiście – którego używać potrafi.

To ostre przemieszczenie matematyki na mapie całokształtu nauki początkowo budziło opory i to zarówno matematyków, jak filozofów, a nawet i przyrodoznawców. Dziś jednak zostało przyjęte i to z takim zapałem, że około

70% matematyków zajmuje się produkcją owych narzędzi matematycznych dla innych nauk, czyli matematycznych modeli najróżniejszych zjawisk – od problemów techniki, fizyki i chemii, przez genetykę, medycynę, ekonomię, po kulturę i sztukę.

Rewelacyjnie zaskakujący tekst noblisty Eugene Wignera o „zaskakującej skuteczności matematyki” jest dziś zbiorem truizmów w rodzaju rozważań o zdumiewającej skuteczności młotka przy wbijaniu gwoździ – matematyka jest skutecznym narzędziem, bo w tym celu jest i była tworzona.

XI by tym pewniejszymi uczynić nasze kroki, otchłań pod stopami ukazał…

O ile dla filozofów czy dla przyrodników istnienie różnych „matematyk”, czyli alternatywnych teorii aspirujących do opisywania tych samych zjawisk stało się bezprzedmiotowe z chwilą uznania pozaprzyrodniczego charakteru matematyki, o tyle dla samych matematyków problem ich korzeni stawał się coraz bardziej ważny i domagający się szybkiego wyjaśnienia.

Puszka Pandory, jaką otworzyło złamanie arystotelesowskiego zakazu używania nieskończoności aktualnej, czyli powstanie teorii mnogości, od razu zafundowała matematykom szereg atrakcji, jakich wcale sobie nie życzyli. O ile chętnie przystawano na fakt, że odcinek ma tyle samo punktów co prosta, to już sam winowajca, Georg Cantor, nie chciał zaakceptować udowodnionego przez siebie (!) faktu, że tyleż punktów ma kwadrat i tyleż sześcian. Odkrycie, że może istnieć ciągłe przekształcenie odcinka $\langle 0,\ 1\rangle$ w ten sam odcinek, które w żadnym, najmniejszym choćby przedzialiku nie jest monotoniczne, też budzi zgrozę. A przecież czyhały jeszcze rewelacje polegające na tym, że kulę można rozbić na pięć części, z których po przemieszczeniu (bez deformacji!) powstaną dwie kule identyczne z wyjściową. Okrzyk „ratunku” wydawał się jedynym wyjściem, ale pod czyim adresem należało wołać?

Poszukiwanie adresata takiego wołania powołało do życia nową dyscyplinę *podstawy matematyki*. Jej zadaniem było wskazanie fundamentu, na którym matematyka stoi, i do którego można by się było odwoływać w chwili zwątpienia, że to wszystko, co robimy, ma jakikolwiek sens.

Idealizm sugerujący, że matematyka jest czystą spekulacją intelektualną, a jako taka, daje się wyprowadzić z logiki, zaowocował skonstruowaniem tak zawiłej struktury, że żaden przyzwoity matematyk przyznać się do niej nie chciał.

Zjawili się purytanie, w matematyce nazywający się intuicjonistami (potem konstruktywistami), którzy drogą zakazów i ograniczeń chcieli matematykę uzdrowić. Terapia zadziałała, ale usuwając z matematyki anomalne nowotwory, usunięto tyle zdrowej tkanki, że prawie nikt nie chciał się tej terapii poddawać.

Taka purytańska, konstruktywna matematyka jednak nie zginęła: okazało się, że jest to akurat ta część matematyki, która daje się włożyć do komputera. Tak więc dziś owi purytanie to matematycy na służbie u computer science.

Najwięcej nadziei wiązano z cynikami, którzy odmawiali matematyce jakiegokolwiek widma semantycznego, traktując ją jako grę. Przybrawszy miano formalistów wymyślili sobie coś, co się nazywało teorią matematyczną i było udoskonalonym i sformalizowanym wcieleniem talesowskiego ideału. Był to zatem zbiór zdań w tym sensie zamknięty, że jego zdania nie były już przyczyną żadnych zdań spoza tego zbioru. Udoskonalenie polegało na narzuceniu pięciu warunków, jakie każda taka teoria musiała spełniać. Były to: *niesprzeczność*, co oznacza, że z dwóch zdań przeciwnych w języku tej teorii do niej mogło należeć co najwyżej jedno; *zupełność*, co oznacza, że z dwóch takich zdań do teorii należeć musi co najmniej jedno; *kategoryczność*, co oznacza, że dowolne dwa opisywane przez nią obiekty są izomorficzne (co oznacza, że wszystkie własności mają takie same); *rozstrzygalność*, co polega na istnieniu przepisu na sprawdzenie, czy dane zdanie należy do tej teorii czy nie; *aksjomatyzowalność*, co polega na tym, że istnieje skończony zbiór zdań będący przyczyną wszystkich zdań danej teorii. Nie wchodząc w szczegóły, można od razu stwierdzić, że choć da się taką pięcioprzymiotnikową teorię zbudować, żadna z przyzwoitych teorii matematycznych takich własności nie ma.

Ogromne wrażenie zrobiło też powszechnie wymieniane (proszę się nie bać – tylko z nazwy) twierdzenie Kurta Gödla (z lat czterdziestych XX wieku), które mówi, że jakkolwiek byśmy nie wzbogacali aksjomatów arytmetyki, zawsze będą takie twierdzenia, dla których nie będzie istniał dowód.

Problemy teorii mnogości straciły na znaczeniu, gdy w latach siedemdziesiątych XX wieku Paul Cohen wykazał, że większość z nich ma rozwiązanie takie, jakiego życzy sobie rozwiązujący – wszystko zależy od tego, jaką teorię mnogości sobie przysposobi (należałoby raczej powiedzieć, wymusi – metoda budowy owej teorii na żądanie nazywa się w sposób nie budzący wątpliwości: *forcing*).

Wszystkie te, pozornie niezwiązane fakty złożyły się na niedającą się ominąć konstatację: nie ma żadnej takiej głębszej mądrości, dla której matematyka jest zwykłym zastosowaniem.

Płynie z tego nauka, którą niektórzy pojmują optymistycznie: możesz mieć taką matematykę, jaką chcesz, jaka ci jest potrzebna. Niektórzy wszakże patrzą na rzecz ponuro: wyłącznie sami ponosimy odpowiedzialność za to, jaką matematykę tworzymy – odpowiedzialność przed sobą i innymi.

Pragmatycznie rzecz ujmując matematycy, na własne życzenie dłubiąc we własnych wnętrznościach, odkryli, że muszą wydorośleć. I większość wydoroślała, patrząc na badaną przez siebie matematykę, jak na przyrodę cudownej, tajemniczej wyspy, gdzie można natknąć się na grzęzwiska, które nigdy nie zaznały pewnika wyboru, zaplątać się w krzakach teorii grafów, galopować po prerii przestrzeni Banacha, i tak dalej i dalej ...

W matematyce, jak w życiu, mamy swój jedyny, niepowtarzalny świat i od nas tylko zależy, jak z niego będziemy korzystać, i jak będziemy umieli się cieszyć jego niezrównanym pięknem.

XII naśladując igraszki losu, ład z chaosem pogodził.

Matematyka, jako wywodząca się z koncepcji wiedzy pewnej, z wątpliwościami podchodziła do sugestii, jakoby miała się zająć również niepewnością.

Harmonia niewątpliwie poddaje się matematycznej obróbce, ale czy podda się jej los? Pierwsza wątpliwość bierze się z pytania, czy los to dobrze zdefiniowany abstrakt, czy też może raczej trudne do zdefiniowania zjawisko fizyczne.

Matematyka miała wątpliwości, ale matematycy mniej. Dopóki zresztą sprawa ograniczała się do hazardu, można było swoje zaangażowanie traktować jako rodzaj rozrywki umysłowej. Sprawa stawała się bardziej nieoczywista jednak, gdy mniej lub bardziej otwarcie angażowali się w próby oszacowań niewątpliwie losowych sytuacji, na jakich opierały się bujnie rozkwitające od XVII wieku loterie (to jeszcze można było podciągnąć pod hazard) i – odgrywające coraz większą rolę – ubezpieczenia. Taka firma Lloyd stanowiła przecież w imperialnej Anglii niemal ostoję stabilności warstwy kupieckiej.

Efektywność oszacowań, jakich dopracowywali się matematyczni eksperci wspierający rozmaite gałęzie gospodarki, nie nasuwała jednak rozwiązań mogących swym standardem matematycznym równać się ze współcześnie tworzoną matematyką. Bernoulli opisał prawidłowości pojawiające się przy wielokrotnym powtarzaniu identycznego doświadczenia, a sto lat później Laplace za obowiązujący model przyjmuje możliwość podzielenia każdego zdarzenia losowego na „bardzo drobne" jednakowo prawdopodobne zdarzenia elementarne, co ostro kontrastuje z precyzją i zaawansowaniem matematycznych technik używanych potem do operowania tym modelem.

Jakichś prób matematyzacji zjawisk losowych poszukuje się przeważnie w statystyce, nie mogąc wyjść poza utożsamianie prawdopodobieństwa z częstością występowania jakiegoś zjawiska.

I w tym miejscu matematyka wchodzi w związki z fizyką. O ile jednak przy badaniu zmienności fizyka dostarczyła bardzo prostego, wzorcowego modelu, tutaj stanowiła raczej wyrzut sumienia dla starającej się pod koniec XIX wieku sprostać jej zamówieniom matematyki.

Rozwijająca się fizyka statystyczna domagała się sprawnych matematycznych narzędzi. Fizyka zjawisk atomowych wskazywała potrzebę ogólnych metod, gdy posługiwała się trzema aż statystykami: Maxwella–Boltzmanna, Bosego–Einsteina, Fermiego–Diraca. A matematycy nie byli w stanie wyjść poza ogólnikowe obietnice: David Hilbert w swoim wykładzie programującym matematykę XX wieku stwierdza: „należałoby zaksjomatyzować niektóre działy fizyki, na przykład rachunek prawdopodobieństwa", wypychając tym samym probabilistykę poza obręb matematyki.

Przełamanie jest zaskakujące dla wszystkich: Andriej Kołmogorow stwierdza, że prawdopodobieństwo to po prostu miara unormowana, a więc obliczana przy założeniu, iż za miarę całości przyjmujemy 1.

I tak niespełna 80 lat temu rodzi się najmłodsza gałąź matematyki. Rachunek prawdopodobieństwa podbija od tego czasu prawie wszystkie obszary matematyki. Bowiem wszyscy odkrywają coraz pełniej to, co matematyka tym sposobem zyskała: mierząc, uzyskujemy możność uzyskiwania pewności z niepewności.

Zjawisko znane od dawna z termodynamiki: nie wiemy, jak poruszają się pojedyncze cząsteczki, wiemy jednak, że wynikają z tego kategoryczne prawa zapewniające niezawodne funkcjonowanie urządzeń energetycznych, znajduje zastosowanie nawet w sposobie dowodzenia twierdzeń – Pàl Erdős dowodzi istnienia pewnych obiektów, obliczając, że prawdopodobieństwo trafienia na nie jest większe od zera. Na przeciwnym biegunie powstaje teoria ergodyczna.

Pokonanie lęku przed stosowaniem metod matematyki w procesie uzyskiwania pewnych wniosków z niepewnych danych skutkuje wejściem matematyki we wszelakiego rodzaju obszary, których główną cechą jest niestabilność. Sławny „efekt motyla" – ostra zależność przebiegu zjawiska od minimalnych wahnięć parametrów początkowych – nie jest obecnie już stwierdzeniem bezradności – zaczynamy panować nad nieopanowanym. Wiemy, jak wiele możemy wiedzieć, nie wiedząc wszystkiego. Zaczynamy widzieć ład w chaosie.

Nic już nie jest w stanie nam się oprzeć. Tak przynajmniej sądzimy.

Na zakończenie przestroga

Nie każdy, czytając te opowiastki, znajduje w nich swoją mitologię matematyki. Dobrze jednak, gdy stwierdza – ja mam inną. Gdy jednak stwierdzi, że żadnej nie ma – powinien się zaniepokoić.

Albowiem – jak twierdzi *Apokalipsa* – przyjdą fałszywi prorocy i cuda czynić będą. A przecież to my jesteśmy odpowiedzialni nie tylko za to, jaka będzie matematyka i jacy będą matematycy. Ponosimy również odpowiedzialność za to, jak matematykę postrzegają inni.