

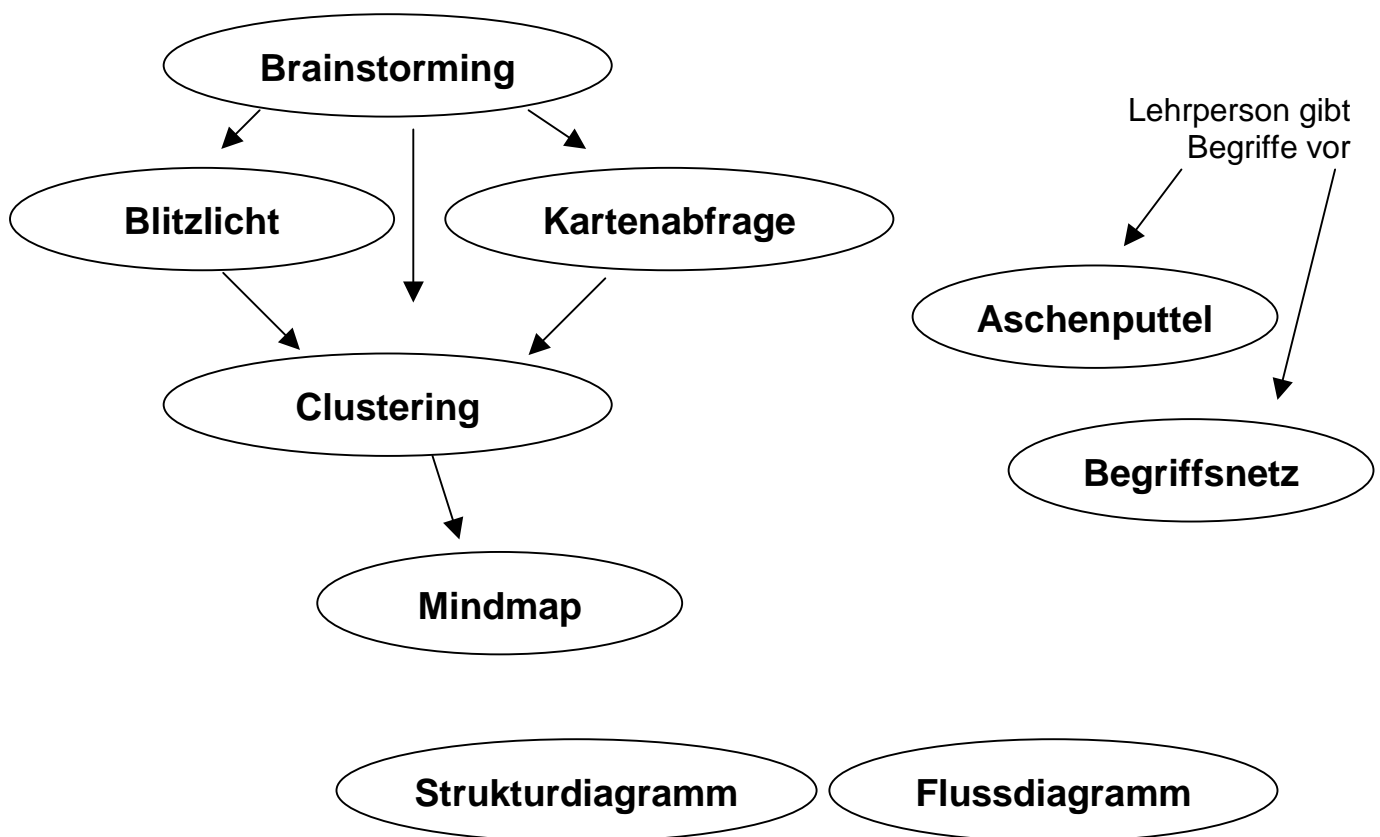
# Methoden zum Erfassen und Strukturieren im Mathematikunterricht

Erfassen und Strukturieren	2
Brainstorming	3
Kartenabfrage	4
Blitzlicht	4
Clustering (Ideennetz)	5
Clustering, Ideennetz (Quadratische Funktionen)	6
Mindmap	7
Mindmap (Quadratische Funktionen)	8
Begriffsnetz	9
Begriffsnetz (Binomialverteilungsformel)	10
Aschenputtel	12
Aschenputtel (Potenzfunktionen)	13
Strukturdiagramm	14
Flussdiagramm	14
Extrem- und Wendestellen: Bedingungen	15
Null-, Extrem- und Wendestellen: Rechenverfahren	15
Testturm	16
Vorgehen bei einer Extremwertproblem-Bearbeitung	17
Systematik der Bearbeitung gebrochen-rationaler Funktionen	18

# Erfassen und Strukturieren

---

- Methoden zur **Erfassung von Beiträgen**: Brainstorming, Kartenabfrage, Blitzlicht
- Methoden zum **Strukturieren durch Visualisieren**: Mindmap, Clustering, Begriffsnetz, Aschenputtel, Strukturdiagramm, Flussdiagramm



# Brainstorming

---

**Intention:** Schnelles Sammeln von verschiedenen Informationen oder Ideen

**Ablauf:** Die Schülerinnen und Schüler sollen zu einem Thema ihre Ideen, Gedanken oder Vorerfahrungen äußern. Sie werden nicht kommentiert, sondern unsortiert an die Tafel, auf Folie oder auf Karten geschrieben. Alle Ideen werden akzeptiert.

**Tipps:** Soll im Anschluss sortiert werden, sollte man die Ideen auf Karten schreiben, die dann umgehängt werden können.

Der Lehrer sollte sich entscheiden, ob er von jedem Ideen einfordern möchte (dann sollte er sich für eine Kartenabfrage (schriftlich) oder ein Blitzlicht (mündlich) entscheiden) oder ob er die Beteiligung den Schülerinnen und Schülern überlässt (dann kann es sein, dass sich nicht alle trauen, etwas zu sagen).

# Kartenabfrage

---

**Intention:** Schnelles Sammeln und Festhalten von verschiedenen Informationen oder Ideen von allen Schüler/innen

**Ablauf:** Schüler/innen oder -gruppen bekommen eine festgelegte Anzahl von Karten oder Papierstreifen (A5 oder A4) und schreiben zu dem genannten Thema/der Fragestellung je ein Stichwort oder je eine Antwort pro Karte auf. Die Karten werden nach thematischen Schwerpunkten sortiert und an der Wand des Klassenzimmers angeheftet. Die herauskristallisierten Themenschwerpunkte werden für die weitere Arbeit strukturiert oder z. B. auch in Gruppen bearbeitet.

**Tipps:**

- gute Strukturierungshilfe bzw. -übung für Schüler/innen
- Ideen und Beiträge gehen nicht wie in einer Diskussion verloren, sondern können später aufgegriffen werden, auch zurückhaltende Schüler/innen haben Möglichkeiten sich einzubringen

# Blitzlicht

---

**Intention:** Schnelles Sammeln von verschiedenen Informationen oder Ideen von allen Schüler/innen

**Beschreibung:** Zu einem vorgegebenen Thema, Streitpunkt, Begriff wird blitzlichtartig ein Kommentar eingeholt: jede/r Schüler/in sagt kurz einen Satz dazu.

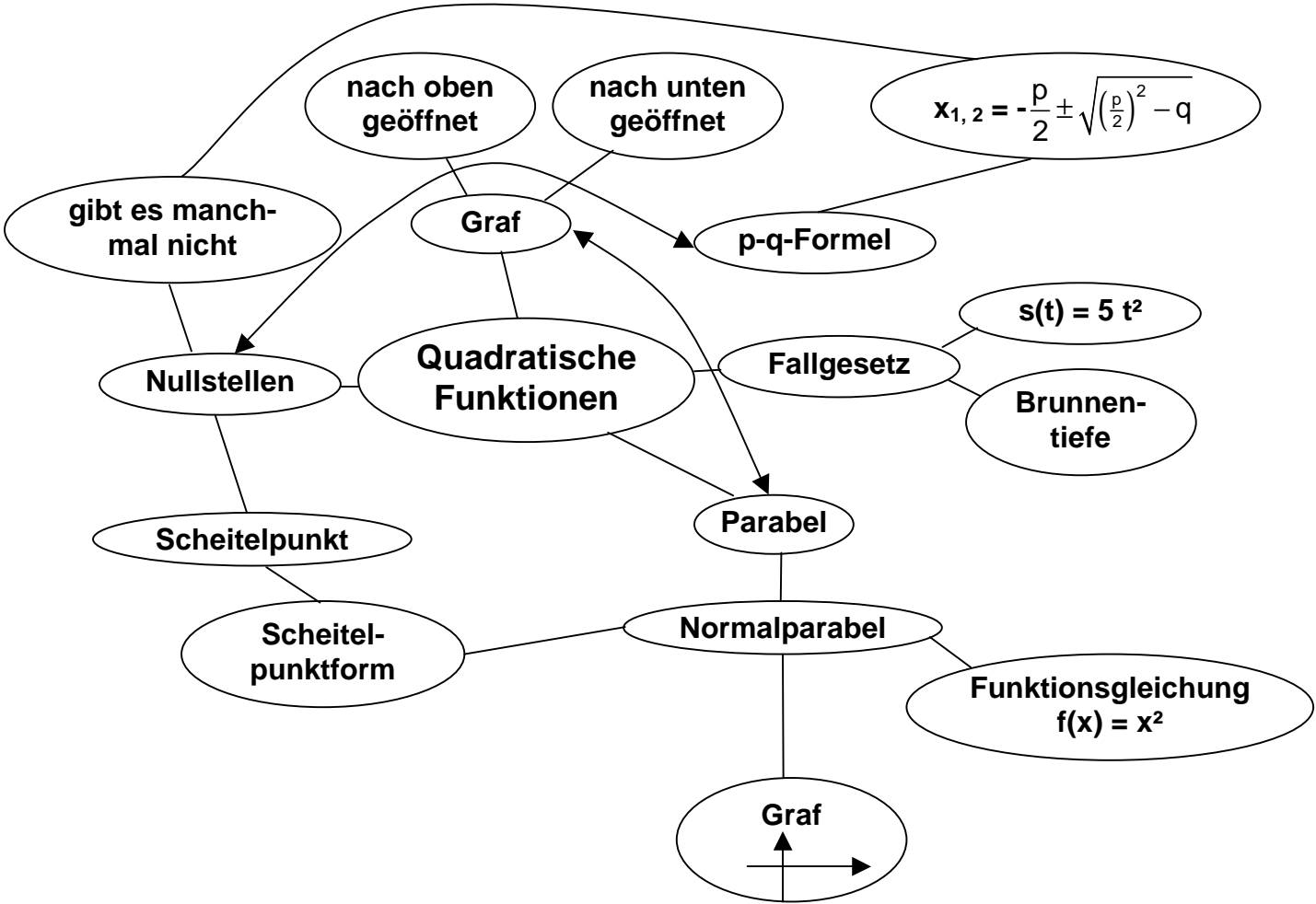
**Besondere Eignung** Das Verfahren ist ein Brainstorming, bei dem allerdings jede/r Schüler/in beteiligt ist. Es ist ähnlich der Kartenabfrage, erfolgt lediglich mündlich und erlaubt ganze Sätze statt nur eines Wortes.

# Clustering (Ideennetz)

---

- Intention:** (Wieder-)Einstieg in ein Thema
- Beschreibung:** Beim Ideennetz wird ein Begriff als Kern vorgegeben. Dies ist der Kern des Clusters. Ideen, Einfälle, Assoziationen werden dann in der Reihenfolge der Gedanken astartig an den Kern notiert. Weiterführende Einfälle werden durch Linien mit den vorhergehenden, ein völlig neuer Einfall direkt mit dem Kern verbunden. Jeder Schüler erstellt ein eigenes Ideennetz.
- Besondere Eignung:** Das Ideennetz ist im Gegensatz zur → Mindmap und zum → Begriffsnetz ausschließlich ein Brainstorming-Verfahren. Ideennetze veranschaulichen durch die Abbildung der individuellen Begriffsassoziationen der einzelnen Schüler die aktuelle Lernausgangslage zu einem Thema.
- Hinweise:** Es entstehen bildliche Gedankenketten, die oft nur stückweise fachlogische Struktur haben. Im Gegensatz zum → Begriffsnetz werden hier nicht erlernte Begriffe strukturiert und somit bereits Gelerntes vertieft, sondern Ideen und Gedanken zu einem neuen Gebiet in eine Struktur gebracht.  
Oder: Da mit dieser Methode auch Wissen abgerufen werden kann, das nur bildlich im Gehirn abgespeichert ist, bietet sich diese Methode zur Reaktivierung von Vorwissen an.
- Beispiel:** Ein Brainstorming erfolgt durch eine Kartenabfrage. Die Karten werden "geclustert", heißt: in Themenfeldern auf einer Wand zusammengefügt, deren Verbindung untereinander markiert wird.

# Clustering, Ideennetz (Quadratische Funktionen)

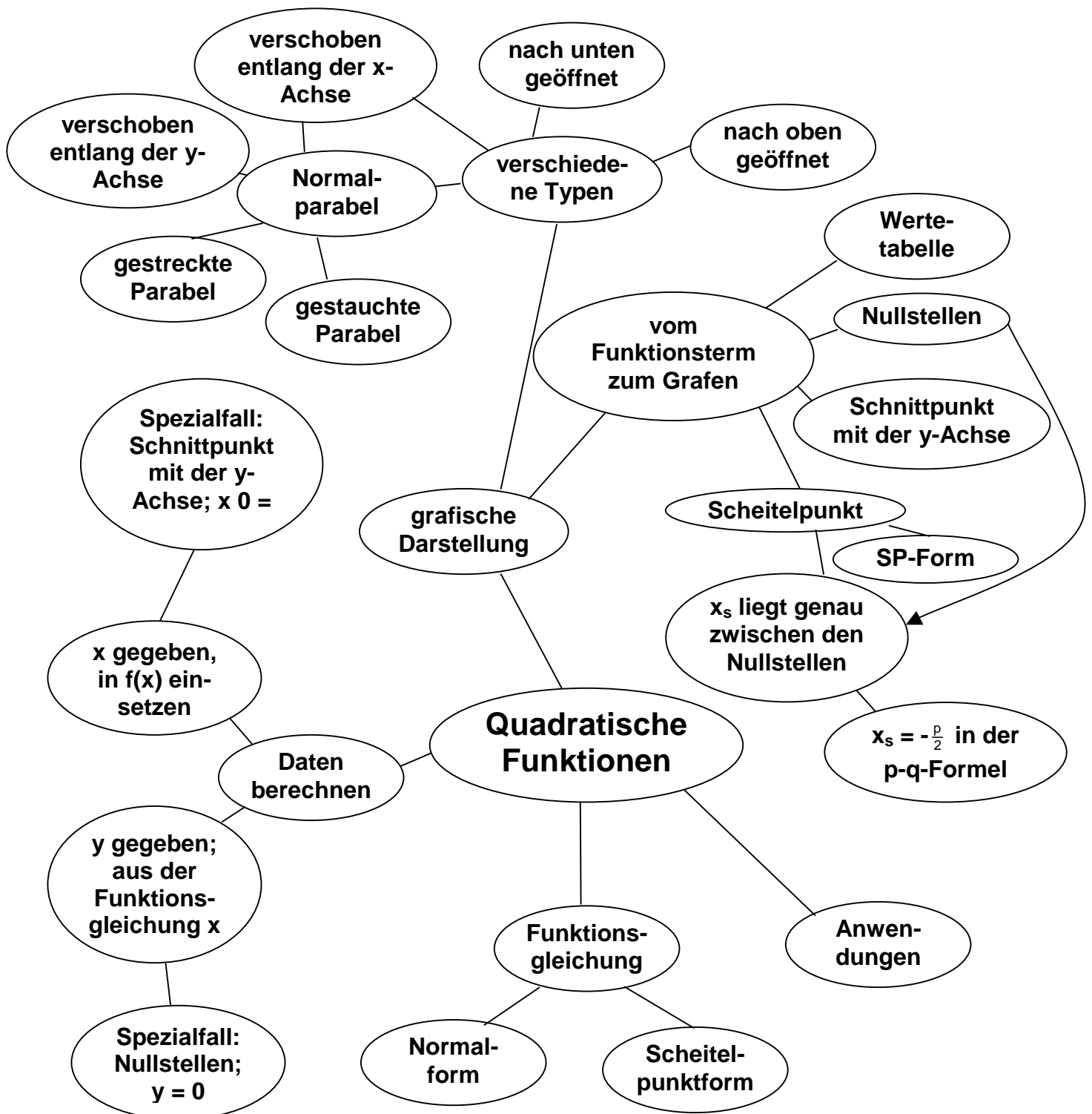


# Mindmap

---

- Beschreibung:** Ausgehend von einem zentralen Begriff wird eine verzweigte, meist farbige hierarchische "Ast"-Struktur von Begriffen, Stichworten und Bildern hergestellt. Die Äste stellen Aspekte des Oberbegriffs im Zentrum dar. Ein **definiertes Zentrum** enthält den zentralen Begriff oder das Thema. **Betonungen** heben wichtige Informationen durch den Gebrauch von Blasen, Pfeilen oder Wellenlinien hervor. **Farbe** erleichtert die Merkfähigkeit und helfen bei der Organisation unterschiedlicher Begriffe. **Schlüsselworte** wirken als Auslöser, um unterschiedliche Worte und Ideen freizusetzen. Ketten liefern Verbindungen zwischen Ideen und Konzepten. **Visualisierungen**, Illustrationen, Formen und bildliche Details erleichtern die Erinnerung.
- Besondere Eignung:** Die Mindmap kann in vielen Phasen des Unterrichts zur Strukturierung eingesetzt werden: Brainstorming, Textaufbereitung, Wiederholung, Themenzusammenfassung, ...
- Hinweise:** Mit der Mindmap wird Wissen übersichtlich kategorisiert, strukturiert und gegliedert. Das → Begriffsnetz stellt darüber hinaus das Beziehungsgeflecht in kommentierter Form dar. Das → Ideennetz (Clustering) sammelt lediglich in assoziativer Form Begriffe und ist ein reines Brainstorming-Verfahren. Eine → Kartenabfrage kann als Vorarbeit für eine Mindmap genutzt werden.

# Mindmap (Quadratische Funktionen)



bzw. Alternativ: Ein Mindmap zu Funktionsgleichungen, eines zu Grafen ..., eines zur Zusammenfassung der Teilmindmaps



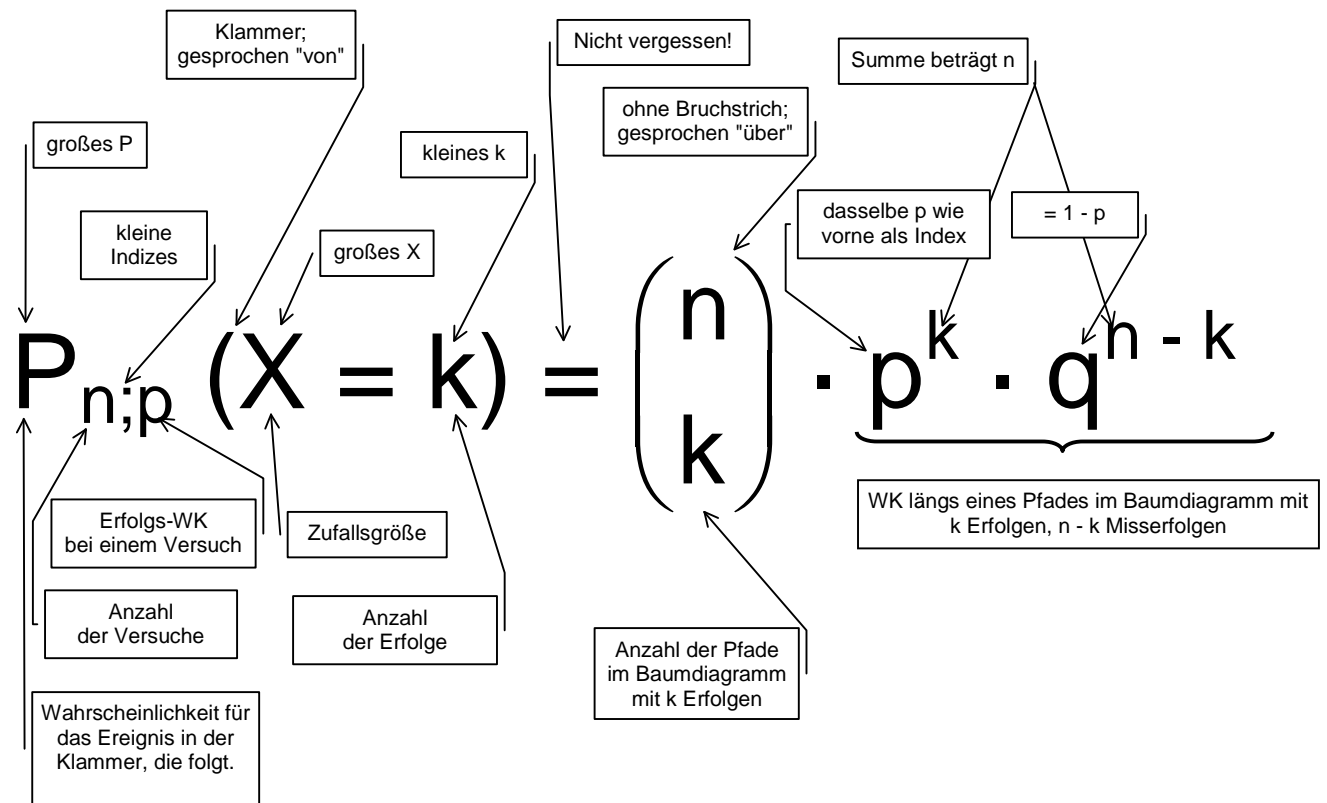
# Begriffsnetz

---

- Beschreibung:** Vorher erarbeitete oder vorgegebene Begriffe und Beziehungen werden bildhaft in einer Netzstruktur dargestellt.
- Besondere Eignung:** Das Begriffsnetz dient der Zusammenfassung, Strukturierung und Visualisierung eines Beziehungsgeflechtes.
- Hinweise:** Die Schülerinnen und Schüler sollen die vorgegebenen Begriffe selbstständig mit Pfeilen vernetzen oder in eine vorgegebene Netzstruktur eintragen. Auch wenn es der → Mindmap optisch ähnlich ist, hat das Begriffsnetz doch eine ganz andere Funktion: Mit der Mindmap wird Wissen übersichtlich kategorisiert, strukturiert und gegliedert. Das Begriffsnetz stellt darüber hinaus das Beziehungsgeflecht in kommentierter Form dar.

# Begriffsnetz (Binomialverteilungsformel)

Formales:



## Bedeutungen:

1. Notiere die Berechnungsformel für einen 15-stufigen Versuch mit 8 Erfolgen und  $p = 0,3$  und berechne die Wahrscheinlichkeit.
2. Wie lautet der Name der Verteilung?
3. Wie lauten die beiden Regeln zur Wahrscheinlichkeits-Berechnung im Baumdiagramm?
4. Was ist eine Bernoulli-Kette?
5. Wie beginnt die X-Festlegung immer?
6. Wie viele Pfade mit 9 Erfolgen gibt es im 20-stufigen Baumdiagramm?
7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad von denen aus 6), wenn  $p = 0,25$ ?
8. Wie lauten die Bedingungen für das Binomialverteilungsmodell?
9. Wie ist  $\binom{n}{k}$  definiert? Heißt: Wie musst du rechnen, wenn dein Taschenrechner keine nCr-, aber eine n!-Taste hat?

1.  $P_{15; 0,3}(X = 8) = \binom{15}{8} \cdot 0,3^8 \cdot 0,7^7 \approx 3,5 \%$
2. Binomialverteilung
3. Pfadmultiplikationsregel: Längs des Pfades werden die Astwahrscheinlichkeiten multipliziert.  
Ereignisadditionsregel: Die Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu einem Ereignis gehören, werden addiert.
4. Eine Bernoulli-Kette ist eine Abfolge von n Wiederholungen desselben Versuchs mit jeweils nur zwei Ergebnissen.
5. X: Zahl der ...
6. Es gibt  $\binom{20}{9} = 167\,960$  Pfade – alle mit derselben Wahrscheinlichkeit.
7.  $0,25^9 \cdot 0,75^{11} \approx 1,6 \cdot 10^{-7}$
8. Es gibt immer nur zwei Ausfälle, jeweils immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p bzw.  $1 - p$ .  
(Die immer gleiche Wahrscheinlichkeit p bedeutet, dass die Ausfälle unabhängig voneinander sind, die nachfolgenden Versuchsausfälle hängen nicht von den vorhergehenden ab.)
9.  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

# Aschenputtel

---

<b>Intention:</b>	Strukturen bilden und Informationen (Begriffe) zu- bzw. einordnen!
<b>Ablauf:</b>	Eine vorgegebene Liste von Begriffen (Informationen) sollen in zusammengehörige Begriffe sortiert und jeweils mit einem Oberbegriff versehen werden.
<b>Beispiel aus der Biologie:</b>	Echsen, Karpfen, Forellen, Meisen, Lachse, Hunde, Krokodil, Adler, Enten, Salamander, Wale, Fledermäuse, Barsche, Schlangen, Katzen, Frösche, Kröten, Schildkröten, Spatzen, Molche
<b>Lösung:</b>	Säugetiere: Katzen, ... Fische: Karpfen, ... Vögel: Meisen, ... Lurche: Salamander, ... Kriechtiere: Schlangen, ...

# Aschenputtel (Potenzfunktionen)

---

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$f(x) = x^{18}$$

$$f(x) = x^{19}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

$$f(x) = -x^{10}$$

$$f(x) = x^{-6}$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = \frac{5}{x^4}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

---

## LÖSUNGEN

---

### Oberbegriffe und Zuordnungen

- Potenzfunktionen mit natürlichen

$$x^3; x^{18}; x^{19}; -x^{10}$$

negativen

$$x^{-2}; \frac{1}{x}; x^{-6}; \frac{5}{x^4}$$

positiv gebrochenen

$$\sqrt[5]{x}; x^{\frac{5}{3}}; \sqrt{x}$$

negativ gebrochenen Exponenten

$$\frac{1}{\sqrt{x}}; \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

- Potenzfunktionsgraphen mit

Achsensymmetrie

$$x^{-2}; x^{18}; -x^{10}; x^{-6}; \frac{5}{x^4}$$

Punktsymmetrie

$$x^3; x^{19}; \frac{1}{x}; x$$

weder Achsen- noch Punktsymmetrie  $x^2 + x$

Lässt man für ungerade Wurzeln auch negative Radikanden zu, so ist auch  $\sqrt[5]{x}$ ;  $x^{\frac{5}{3}}$ ;  $-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$  punktsymmetrisch.

# Strukturdiagramm

---

**Beschreibung:** Ein Strukturdiagramm ist die abstrakte, netzartige Darstellung eines Sachverhaltes. Wichtige Fachbegriffe werden in verzweigter Struktur so dargestellt, dass daraus ihre Logik und innere Struktur hervorgeht.

**Besondere Eignung:** Es bietet sich bei Beschreibungen von gegliederten Handlungen oder Prozessen an und kann so sehr gut z. B. als Grundlage für längere mündliche Schülerbeiträge dienen.

**Hinweise:** Die Struktur aus Ober- und Unterbegriffen und Beziehungspfeilen sollte gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet und gesichert werden. Bewährt hat sich das Anordnen von Begriffs- und Pfeilkärtchen in Gruppenarbeit. Während das Strukturdiagramm Strukturzusammenhänge darstellt, werden im → Flussdiagramm auch funktionale Zusammenhänge und zeitliche Abläufe dargestellt. Beim Strukturdiagramm gibt es in der Regel nur eine Lösung, wohingegen es beim → Begriffsnetz viele gleichwertige Lösungen geben kann (Begriffsnetze repräsentieren individuelles Wissen).

# Flussdiagramm

---

**Beschreibung:** Das Flussdiagramm stellt in einem Pfeildiagramm Vorgänge, Handlungen oder Lösungswege grafisch dar, um einen funktionalen Zusammenhang oder einen zeitlichen Ablauf zu verdeutlichen. Es ähnelt in seiner Struktur den visualisierten Algorithmen von Computerprogrammen.

**Hinweise:** Die Fachinhalte müssen eine hinreichend logische Kettenstruktur aufweisen, damit sich das Darstellen in einem Pfeildiagramm über mehrere Stufen lohnt. Geeignet sind z. B. Ursache-Wirkungs-Ketten oder Ja/Nein-Entscheidungsabläufe.

---

## BEISPIELE ZU BEIDEN DIAGRAMMEN IM ANSCHLUS

---

Extrem- und Wendestellen; Testturm; Extremwertproblem; gebrochen-rationale Funktionen

# Extrem- und Wendestellen: Bedingungen

Extremstellen	Notwendig für die Existenz einer Extremstelle $x_E$ ist $f'(x_E) = 0$ .	Aus der Gleichung lassen sich alle potentiellen Extremstellen ermitteln. Sie sind noch nicht sicher, aber weitere gibt es nicht.
	Hinreichend für die Existenz einer Extremstelle $x_E$ ist $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$ . Oder: $f'(x_E) = 0$ mit Vorzeichenwechsel.	Die oben berechneten $x_E$ -Werte werden geprüft durch Einsetzen in $f''(x)$ . Ist $f''(x_E) \neq 0$ , so handelt es sich um eine Extremstelle. Ist $f''(x) = 0$ , so prüft man, ob ein Vorzeichenwechsel bei $f'(x_E)$ vorliegt. Ergibt sich $f''(x_E) > 0$ , so liegt ein Tiefpunkt vor. Ist $f''(x_E) < 0$ , so liegt ein Hochpunkt vor.
Wendestellen	Notwendig für die Existenz einer Wendestelle $x_W$ ist $f''(x_W) = 0$ .	Aus der Gleichung lassen sich alle potentiellen Wendestellen ermitteln. Sie sind noch nicht sicher, aber weitere gibt es nicht.
	Hinreichend für die Existenz einer Wendestelle $x_W$ ist $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ . Oder: $f''(x_W) = 0$ mit Vorzeichenwechsel.	Die oben berechneten $x_W$ -Werte werden geprüft durch Einsetzen in $f'''(x)$ . Ist $f'''(x_W) \neq 0$ , so handelt es sich um eine Wendestelle. Ist $f'''(x_W) = 0$ , so prüft man, ob ein Vorzeichenwechsel bei $f''(x_W)$ vorliegt.

MUED-Broschüre: Einführung in die Differentialrechnung, Seite 83

# Null-, Extrem- und Wendestellen: Rechenverfahren

Hat man von einem Funktionsgraphen die Nullstellen (dort schneidet der Graf die x-Achse), die Hoch/Tiefpunkte und Wendepunkte, so lässt er sich schnell skizzieren. Hier in Kurzfassung das Verfahren zur Ermittlung der markanten Punkte.

	f	f'	f''	f'''
Nullstellen	1. $x_N$ -Werte bestimmen durch $f(x) = 0$ . Punkte notieren: $N_1(. 0)$ ; $N_2(. 0)$			
Extrempunkte	3. Für sichere $x_E$ -Werte aus 2 den $y_E$ -Wert berechnen durch $f(x_E)$ . Punkte notieren: $H(. .)$ ; $T(. .)$	1. Mögliche $x_E$ -Werte bestimmen aus $f'(x) = 0$ .	2. Prüfung der $x_E$ -Werte aus 1 durch Einsetzen in $f''(x)$ . $f''(x_E) > 0 \Rightarrow T$ $f''(x_E) < 0 \Rightarrow H$	
Wendepunkte	3. Für sichere $x_W$ -Werte aus 2 den $y_W$ -Wert berechnen durch $f(x_W)$ . Punkte notieren: $W_1(. .)$ ; $W_2(. .)$		1. Mögliche $x_W$ -Werte bestimmen aus $f''(x) = 0$ .	2. Prüfung der $x_W$ -Werte aus 1 durch Einsetzen in $f'''(x)$ . $f'''(x_W) \neq 0?$

MUED-Broschüre: Einführung in die Differentialrechnung, Seite 84

# Testturm

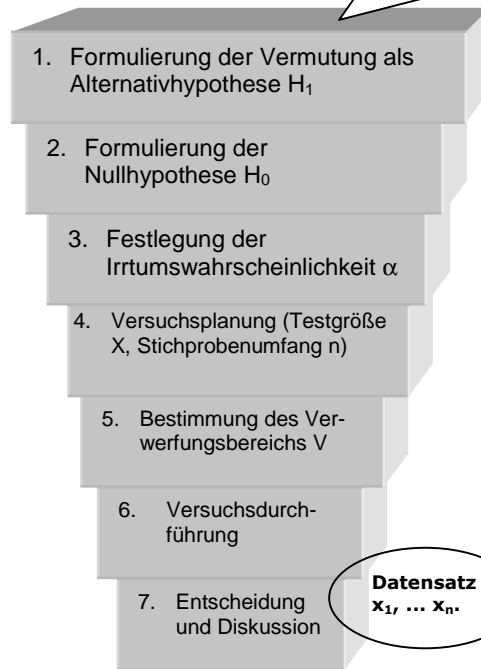
## Linksseitiger Test:

Ein Medikament soll auf den Markt kommen, von dem behauptet wird, dass es den Ausbruch einer Krankheit besser verhindere als bisherige Mittel, bei denen es in 70 % der Fälle doch zu einem Ausbruch der Krankheit kommt.

1.  $H_1$ : Das neue Medikament senkt die Zahl der Erkrankungen;  $p < 0,7$  (linksseitig).
2.  $H_0$ : Das neue Medikament wirkt wie die bisherigen;  $p = 0,7$ .
3.  $\alpha = 5 \%$ ;  $n = 30$
4.  $X$ : Anzahl der Patienten, bei denen nach der Medikamentengabe die Krankheit ausbricht. Die Zufallsgröße  $X$  ist binomialverteilt.

5.  $P(X \leq 16) \approx 4,0 \%$   
 $P(X \leq 17) \approx 8,5 \%$   
 $V = \{0, 1, \dots, 15, 16\}$ .
6. Beim Test ergeben sich z. B. a) 17 Erkrankte, b) 14 Erkrankte.
7. a) Da  $17 \notin V$ , wird  $H_0$  nicht verworfen und  $H_1$  nicht akzeptiert. Das neue Medikament wird nicht als besser akzeptiert (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %).  
b) Da  $14 \in V$ , wird  $H_0$  verworfen und  $H_1$  akzeptiert. Das Medikament wird als besser akzeptiert und für den Markt zugelassen ( $\alpha = 5 \%$ ).

Aufgrund von Vorüberlegungen oder Vorerfahrungen gelangt man zu einer Vermutung statistischer Art.

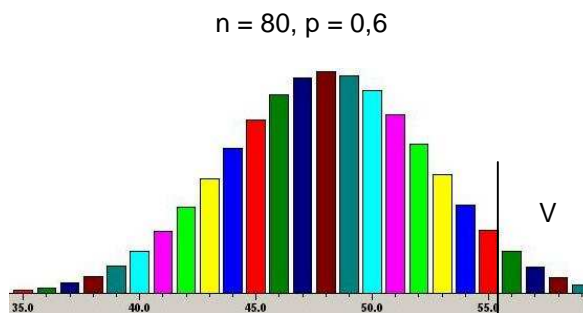
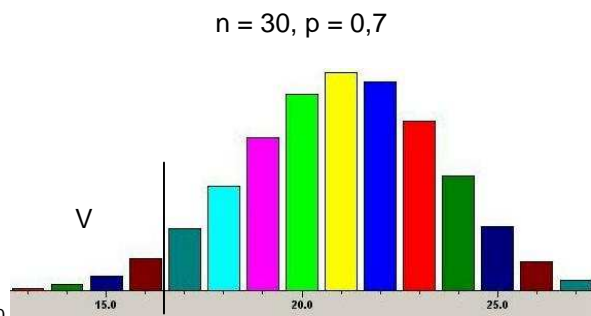


## Rechtsseitiger Test:

Eine Krankheit wird mit bisher bekannten Mitteln mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % geheilt. Von einem neuen Medikament wird nach Vortesten behauptet, dass es höhere Heilungsquoten habe.

1.  $H_1$ : Das neue Medikament erhöht die Heilungsquote;  $p > 60 \%$  (rechtsseitig).
2.  $H_0$ : Das neue Medikament wirkt wie die bisherigen;  $p = 0,6$ .
3.  $\alpha = 5 \%$ ;  $n = 80$
4.  $X$ : Zahl der Patienten, die das neue Medikament erhalten und gesunden.  $X$  ist binomialverteilt.
5.  $P(X \leq 54) \approx 93,3 \%$   
 $P(X \leq 55) \approx 95,8 \%$   
 $V = \{56, 57, \dots, 80\}$ , da erst  $P(X = 56)$  ganz oberhalb von 95 % liegt.

6. Beim Test ergaben sich a) 50 Gesundete b) 59 Gesundete.
7. a) Da  $50 \notin V$ , wird  $H_0$  nicht verworfen,  $H_1$  nicht akzeptiert. Das neue Medikament wird nicht als besser akzeptiert (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %).  
b) Da  $59 \in V$ , wird  $H_0$  verworfen und  $H_1$  akzeptiert. Das Medikament wird als besser akzeptiert und für den Markt zugelassen ( $\alpha = 5 \%$ ).





## Vorgehen bei einer Extremwertproblem-Bearbeitung

### A) Modellbildung

1. Problemstellung beschreiben
2. Variablen festlegen
3. Zielfunktion aufstellen (ggf. in Abhängigkeit von mehreren Variablen)
4. Nebenbedingung(en) aufstellen
5. Mit 4. die Zielfunktion als Funktion einer Variablen ausdrücken
6. Infragekommendes Intervall für die Variable notieren
7. Reformulierung der Problemstellung aus 1. als mathematisierte Aufgabe

### B) Arbeiten im mathematischen Modell

8. Evtl. Skizze des Funktionsgraphen über dem interessierenden Intervall
9. Erste Ableitung bilden und deren Nullstelle(n) bestimmen
10. Prüfen, ob die Werte im interessierenden Intervall liegen
11. Zweite Ableitung bilden und die potentiellen Extremwerte mit Hilfe der 2. Ableitung prüfen (oder eine andere hinreichende Begründung für relative Extrema nutzen)
12. Extremalwerte der anderen Variablen und der Zielfunktion berechnen
13. Mögliche Randextrema überprüfen

### C) Re-Interpretation

14. Gesamtantwort auf die Ausgangsproblemstellung aus 1. formulieren
15. Evtl. das in A) entwickelte Modell erweitern und korrigieren

*Der Teil B kann auch allein durch Punkt 8 und 12 ersetzt werden. Mit grafikfähigen PCs oder TCs (Taschencomputer) lässt sich z. B. ein Tiefpunkt problemangemessen genau ablesen.*

*Heinz Böer, Sammlung Extremwertprobleme 1, MUED-Bücher-Bunt, Appelhülsen, 2007, Seite 7*

# Systematik der Bearbeitung gebrochen-rationaler Funktionen

Funktionen, die als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen darstellbar sind, werden **gebrochen-rationale Funktionen** genannt

1. Faktorisierung von Zähler- und Nennerfunktion (möglichst weitgehend),
2. Festlegung des Definitionsbereichs und Bestimmung der Polstellen:  
Nennerfunktion gleich Null setzen
3. Gegebenenfalls Bestimmung der hebbaren Definitionslücken:  
Ist sowohl Nenner- als auch Zählerfunktion an einer Stelle  $x_h$  gleich Null, so lässt sich die Funktion durch eine andere ersetzen, die in  $x_h$  erklärt ist, sonst aber überall gleich der Ausgangsfunktion ist. Man kürzt  $(x - x_h)$  aus Zähler- und Nennerfunktion heraus.
4. Berechnung der Schnittstellen mit den Achsen:
  - a) Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)
  - b) Ermittlung des Schnittpunktes mit der y-Achse
5. Ermittlung der Asymptoten:
  - a) Grad der Zählerfunktion = Grad der Nennerfunktion:  
Die Asymptote ist eine Parallele zur x-Achse. Man erhält sie, indem Zähler und Nenner durch die höchste Potenz von  $x$  dividiert werden und der Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$  untersucht wird.
  - b) Grad der Zählerfunktion < Grad der Nennerfunktion:  
Die Asymptote ist die x-Achse. Das sieht man, wenn man durch die höchste Potenz des Zählers dividiert (siehe Fall a).
  - c) Der Grad der Zählerfunktion > Grad der Nennerfunktion.  
Die Asymptote findet man mittels Polynomdivision als den ganzrationalen Teil bei der Zerlegung des Funktionsterms in einen ganzrationalen und einen echt-gebrochenen Teil. (Spezialfall: Grad der Zählerfunktion = Grad der Nennerfunktion + 1: Die Asymptote ist eine Gerade.)
6. Verlauf des Grafen
  - a) in der Nähe der Polstellen. Untersuche die Funktionswerte bei Annäherung an die Polstellen von oben und unten, z.B. durch Einsetzen von x-Werten, die sehr nah bei den Polstellen liegen.
  - b) für  $x \rightarrow +\infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$ . Prüfe, ob die Funktionswerte für große bzw. kleine x-Werte oberhalb oder unterhalb der Asymptotenwerte liegen.
7. Falls der Grafenverlauf genauer interessiert: Berechnung der Extrem- und Wendepunkte.
8. Handskizze: Zeichnen Sie die Ergebnisse aus 1 bis 6 bzw. 7 ein und verbinden sie die Punkte plausibel und elegant.

Ohne Punkt 7 passt die Bearbeitung bereits in der 11.1. Die Handskizze (8) ist grob auch ohne genaue Kenntnis von Extrem- und Wendepunkten mit den anderen Daten möglich.

*Heinz Böer, Konkurrenzgeschwindigkeit der Bahn, MUED-Bücher-Bunt, Appelhülsen, 1999, Seite 4*