

# Hinweise zur Konstruktion und Berechnung von Einflusslinien

## Definition:

Eine Einflusslinie (EL) liefert den Einfluss

- einer Wanderlast  $P = 1$  von festgelegter Wirkungsrichtung.
- längs des Tragwerks-Lastgurtes an beliebiger Stelle.
- nur auf eine bestimmte Zustandsgröße.
- an einem beliebigen Aufpunkt bzw. Tragwerkspunkt  $j$ .

Eine EL für eine Zustandsgröße (Kraftgröße, Weggröße) im Aufpunkt  $j$  gibt an, welchen Wert diese Größe in diesem Punkt annimmt, wenn eine Wanderlast  $P = 1$  an der Stelle  $x$  wirkt.

## 1. EINFLUSSLINIEN FÜR KRAFTGRÖßEN

### 1.1 EL für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen

#### 1.1.1 Analytische Methode

Diese Methode wird hier nicht näher erläutert.

#### 1.1.2 Kinematische Methode

Die Grundlage für das analytische Verfahren bildet das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* (PvV), welches aus der Vorlesung der Technischen Mechanik I und/oder II bekannt ist.

### Satz von Land:

Die EL einer Kraftgröße ist gleich der Biegelinie, die man erhält, wenn man am Ort der gesuchten Größe ein Gelenk einführt und im Gelenk einen zur Kraftgröße korrespondierenden Verschiebungssprung von  $-1$  einprägt.

### Erläuterung (nach Krätzig):

Die EL einer Kraftgröße  $S_i$  entsteht als Verschiebungslinie des Lastgurtes in Richtung der Belastung derjenigen kinematischen Kette, die sie ausbildet, wenn die zu  $S_i$  korrespondierende Weggröße  $d_i = 1$  angesetzt wird.

#### 1.1.2.1 Vorgehensweise

- a) Die zur Kraftgröße  $S_i$  korrespondierende Bindung an der gesuchten Stelle einfügen und das System somit befreien. Es entsteht zwangsläufig eine kinematische Kette, also ein 1-fach statisch unterbestimmtes (kinematisches) System.
- b) Eintragen der durch die eingeführte kinematische Bindung befreiten Kraftgröße in positiver Richtung (analog zum KGV).
- c) Ermittlung derjenigen virtuellen Verschiebungsfigur des Lastgurtes, für welche die zur Kraftgröße  $S_i$  korrespondierende Weggröße  $d_i$  gerade den Wert 1 annimmt. Diese Verschiebungsfigur kann mit Hilfe eines Polplans ermittelt werden.

## 1.2 EL für Kraftgrößen an statisch unbestimmten Systemen

### 1.2.1 Analytische Methode

#### 1.2.1.1 EL für Kraftgrößen unter Benutzung eines statisch bestimmten HS

##### Erläuterung (nach Krätzig):

Die EL einer Kraftgröße  $S_i$  für den Aufpunkt  $j$  eines  $a$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks entsteht durch die Überlagerung ihrer EL  $\eta_j$  am statisch bestimmten Hauptsystem mit einem Ergänzungszustand von EL  $\eta_{im}$  ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) der statisch Überzähligen. Die statisch Überzähligen sind dann mit dem jeweiligen Wert  $S$  der Kraftgröße im Aufpunkt  $j$  infolge des zugehörigen Einheitszustandes  $X_i = 1$  zu multiplizieren und zu superponieren.

Dieses Verfahren wird hier nur angesprochen. Es greift nicht bei allen Tragwerkssystemen.

#### 1.2.1.2 EL für Kraftgrößen unter Benutzung eines statisch unbestimmten HS

##### Erläuterung (nach Krätzig):

Die EL einer Kraftgröße  $S_i$  eines  $a$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks sind als Biegelinien des Lastgurtes geeigneter und beliebiger  $(a-1)$ -fach statisch unbestimmter Tragwerke interpretierbar. Diese Hilfssysteme entstehen dadurch, dass im jeweiligen Aufpunkt  $j$  die zur Kraftgröße  $S_i$  korrespondierende Klaffung „1“ wirksam wird.

##### **Vorgehensweise mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens**

- 1) Im Aufpunkt  $j$  wird der zur gesuchten Kraftgröße  $S_i$  korrespondierende Mechanismus (M-, Q- oder N-Gelenk) eingebaut und die zugehörige Kraftgröße bzw. das zugehörige Kräftepaar  $S_i = 1$  (analog zum KGV) angesetzt. Es entsteht somit – durch den Einbau eines Gelenkes – das  $(a-1)$ -fache statisch unbestimmte System.
- 2) Die zugehörigen Schnittgrößen werden nun infolge der angesetzten Kraftgröße  $S_i = 1$  am  $(a-1)$ -fach statisch unbestimmten System berechnet (z.B. mit Hilfe des KGV). Die Bestimmung der  $M_{(a-1)}$ -Linie ist dabei ausreichend.
- 3) Im Anschluss an die Bestimmung der  $M_{(a-1)}$ -Linie am  $(a-1)$ -fach statisch unbestimmten System muss die entsprechende Verformung am Aufpunkt bestimmt werden. Anschließend wird diese  $M_{(a-1)}$ -Linie mit Hilfe dieser Verformung normiert. Daraus ergibt sich die normierte M-Linie.

Der Normierungsfaktor  $\delta$  ermittelt sich wie folgt :

$$EI \cdot \delta_{jj} = \int_0^l M_{(a-1)} \cdot M_0 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \delta_{jj} = \frac{\int_0^l M_{(a-1)} \cdot M_0 \cdot dx}{EI} \quad (\text{tatsächliche Verformung am Aufpunkt})$$

$$\Rightarrow \delta = -\frac{1}{\delta_{jj}} = -\frac{1}{\int_0^l M_{(a-1)} \cdot M_0 \cdot dx} \cdot EI \quad (\text{Normierungsfaktor})$$

Anmerkung : Sollte z.B.  $EA \neq \infty$  sein, muss dieser Anteil ebenfalls bei der Normierung berücksichtigt werden!

##### **Diese Normierung erfolgt nur bei EL für Kraftgrößen!**

- 4) Die Biegelinie  $w(x)$  des Lastgurtes (also die Verschiebungen in Richtung der Wanderlast  $P$ ) kann dann mit Hilfe der normierten M-Linie ermittelt werden.

### Vorgehensweise mit Hilfe des Weggrößenverfahrens

- 1) Im Aufpunkt  $j$  wird die zur gesuchten Kraftgröße  $S_i$  korrespondierende Klaffung von „1“ (Moment: Knick, Querkraft: Sprung) eingepägt. Diese Klaffung wird als Lastfall am entsprechenden Stab behandelt, das zugehörige Kräftepaar  $S_i = 1$  wird also **nicht** angesetzt! Die Stabendkraftgrößen sind für diese Klaffungen in den Arbeitsblättern aufgeführt. Es entsteht somit auch kein  $(a-1)$ -fach statisch unbestimmtes System.
- 2) Die zugehörigen Schnittgrößen werden nun infolge der angesetzten Klaffung von „1“ am  $a$ -fach statisch unbestimmten System mit Hilfe des WGV berechnet. Die Bestimmung der M-Linie ist dabei ausreichend.
- 3) Die so bestimmte M-Linie ist bereits die normiert (s.o.). Eine Berechnung des Normierungsfaktors  $\delta$  ist hier unter Verwendung des WGV nicht mehr nötig.
- 4) Die Biegelinie  $w(x)$  des Lastgurtes (also die Verschiebungen in Richtung der Wanderlast  $P$ ) kann dann mit Hilfe der mit dem WGV bestimmten M-Linie ermittelt werden.

### 1.2.2 Kinematische Methode

Die EL für Kraftgrößen statisch unbestimmter Systeme können **nicht** mit Hilfe kinematischer bzw. grafischer Verfahren ermittelt werden!

## 2. EINFLUSSLINIEN FÜR WEGGRÖßEN

### 2.1 EL für Weggrößen an statisch bestimmten Systemen

#### 2.1.1 Analytische Methode

Die Vorgehensweise ist analog zu der Vorgehensweise an statisch unbestimmten Systemen. Da das System statisch bestimmt ist, ist die statisch unbestimmte Berechnung der M-Linie nicht erforderlich.

#### 2.1.2 Kinematische Methode

Eine kinematische Methode existiert nicht und ist unsinnig.

### 2.2 EL für Weggrößen an statisch unbestimmten Systemen

#### 2.2.1 Analytische Methode

##### Erläuterung (nach Krätzig):

Die EL  $\eta_j$  einer Weggröße  $d_i$  eines a-fach statisch unbestimmten Tragwerks entsteht als Biegelinie  $\delta_j$  (bzw.  $w(x)$ ) des Lastgurtes in Richtung der Wanderlast P dieses a-fach statisch unbestimmten Tragwerks, wenn im Aufpunkt j die zur jeweiligen Weggröße  $d_i$  korrespondierende Kraftgröße  $S_i = „1“$  wirkt.

Die EL für eine Einzelverformung  $d_i$  ist identisch mit der Biegelinie  $w(x)$  des Lastgurtes infolge einer Einheitskraftgröße  $S_i$ , die in die Richtung der gesuchten Verformung wirkt.

##### 2.2.1.1 Vorgehensweise

- 1) Im Aufpunkt j ist das vorgegebene System in Richtung der gesuchten Verschiebung bzw. Verdrehung mit  $F = 1$  bzw.  $M = 1$  zu belasten (bei gesuchten gegenseitigen Verformungen wird das entsprechende Kräftepaar ansetzt).
- 2) Die zugehörigen Schnittgrößen werden dann nur infolge der angesetzten Einheitskraftgröße  $F$  bzw.  $M$  am statisch unbestimmten System berechnet (z.B. mit Hilfe des KGV). Die Bestimmung der M-Linie ist dabei ausreichend.
- 3) Die Biegelinie  $w(x)$  des Lastgurtes (also die Verschiebungen in Richtung der Wanderlast P) kann dann mit Hilfe der M-Linie ermittelt werden.
- 4) **Diese ermittelte Biegelinie  $w(x)$  ist identisch mit der gesuchten EL für die gesuchte Weggröße  $d_i$ .**

#### 2.2.2 Kinematische Methode

Die EL für Weggrößen statisch unbestimmter Systeme können **nicht** mit Hilfe kinematischer bzw. grafischer Verfahren ermittelt werden!

### 3. BESTIMMUNG VON ORDINATEN DER BIEGELINIE

#### 3.1 Reduktionssatz

Werden nur die Ordinaten an einigen wenigen Stellen des Lastgurtes benötigt, so reicht es dann aus, die Verschiebungen  $w$  an den entsprechenden Stellen mit Hilfe des Reduktionssatzes zu ermitteln.

#### 3.2 $\omega$ -Verfahren

Sollen die Ordinaten der Biegelinie an mehreren Stabpunkten (z.B. an den Fünftelpunkten) bestimmt werden, so kann das  $\omega$ -Verfahren (analog zu den Übungen) zur Bestimmung der Verschiebungen  $w$  auf die M-Linie angewendet werden.

Zur Verbesserung der Genauigkeit kann zusätzlich mit Hilfe des Reduktionssatzes an ausgesuchten Stellen (in der Regel bei  $l/2$ ) eine Einzelpunktverschiebung (analog zu den Übungen) bestimmt werden. Man nennt dies die „Durchbiegung in den kritischen Punkten“. Anwendungen hierzu werden in den Übungen behandelt.

#### 3.3 Formale Integration der Biegelinie

Dieses Verfahren ist bereits aus der Vorlesung Technische Mechanik I und II bekannt. Für die zuvor bestimmte M-Linie kann die „formale“ Integration der Biegelinie angewendet werden. Durch die Einführung einer Koordinate  $x$  wird die Gleichung  $M(x)$  bestimmt. Danach wird  $M(x)$  zweimal integriert, so dass man die Durchbiegungsfunktion  $w(x)$  unter Berücksichtigung der geometrischen RB erhält. Durch das Einsetzen der  $x$ -Koordinate der entsprechenden Stellen in  $w(x)$  können die jeweiligen Durchbiegungen  $w$  bestimmt werden.

### 4. AUSWERTUNG VON EL FÜR DIE GEGEBENE BELASTUNG

#### 4.1 Auswertung für Einzellasten

Soll die ermittelte EL für angreifende Einzellasten  $F$  am Lastgurt ausgewertet werden, wird die Durchbiegung  $w$  direkt am Lastangriffspunkt der Einzellast benötigt.

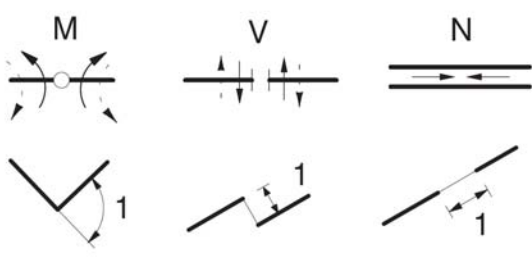
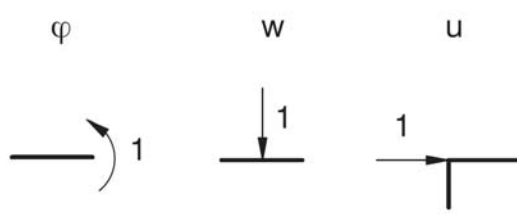
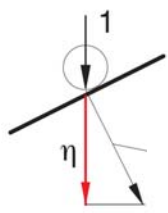
$$\left. \begin{array}{l} S_j \\ d_j \end{array} \right\} = F_i \cdot \eta_i$$

Die Ordinate  $\eta_i$  an dieser Stelle von  $F$  muss zuvor durch die oben genannten Verfahren ermittelt werden (analog bei statisch bestimmten Systemen, siehe Übungen).

#### 4.2 Auswertung für verteilte Lasten

Soll die ermittelte EL für angreifende verteilte Lasten (Rechtecklast, Dreiecklast usw.) am Lastgurt ausgewertet werden, so kann die Durchbiegung nicht durch Ermittlung von Einzelordinaten bestimmt werden. Hier kann u. a. die Simpson-Regel (siehe Arbeitsblatt) angewendet werden. Dieses Verfahren wird in den Übungen erläutert.

## 5. DUALITÄT ZWISCHEN DEN EINFLUSSLINIEN FÜR KRAFTGRÖßEN UND VERSCHIEBUNGSGRÖßEN (WEGGRÖßE)

	EL für Kraftgröße	EL für Verschiebungsgröße
<b>Satz</b>	Satz von Land	Satz von Betti-Maxwell
<b>Last (Ursache)</b>	 <p>Einheitsverformung -1</p>	 <p>Einheitskraftgröße 1</p>
	EL $\eta$ = Biegelinie des Lastgurtes projiziert auf die Lastrichtung  <p>Verschiebung des Lastgurtes</p>	