

Міністерство освіти України

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію  
друкованого засобу масової інформації № 222,  
серія 33,  
20 червня 1997 р.

Адреса редакції :  
Україна, 330600,  
м. Запоріжжя, МСП-41,  
вул. Жуковського, 66

**Телефони**  
для довідок:  
(0612) 64-26-05,  
(0612) 69-98-26

**Факс:** 641724

# **В і с н и к**

## **Запорізького державного університету**

- **Фізико-математичні науки**
- **Біологічні науки**

**№1,1999**

**Запорізький державний університет**  
**Запоріжжя 1999**

Вісник Запорізького державного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. Біологічні науки / Головний редактор Толок В.О.-Запоріжжя: Запорізький державний університет, 1999.- 200с.

Затверджено Науковою Радою ЗДУ (протокол засідання № 5 від 29 грудня 1998 р.)

## **Редакційна рада**

Головний редактор - Толок В.О., доктор технічних наук, професор  
Відповідальний редактор – Сисоєв Ю.О., кандидат технічних наук, доцент

## **РЕДАКЦІЙНІ КОЛЕГІЇ:**

### **ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

Гришак В.З., д.т.н., проф. – заступник головного редактора,  
Приварников А.К., д.ф-м.н., проф., Тамуров М.Г., д.т.н., проф.,  
Гудрамович В.С., д.т.н., проф., Павленко А.В., д.ф-м.н., проф.,  
Пожуєв В.І., д.ф-м.н., проф., Цурпал І.А., д.т.н., проф..

Брехаря Г.П., д.ф-м.н., проф. – заступник головного редактора,  
Левітін В.В., д.ф-м.н., проф., Маслов В.В., д.ф-м.н., проф.,  
Псарьов В.І., д.ф-м.н., проф., Скалозуб В.В., д.ф-м.н., проф.,  
Терновий Ю.Ф., д.т.н., проф.

### **БІОЛОГІЧНІ НАУКИ**

Омельянчик Л.О., д.ф.н., проф. – заступник головного редактора,  
Бессонова В.П., д.б.н., проф., Бовт В.Д., д.б.н., проф.,  
Долгова Л.Г., д.б.н., проф., Єщенко В.А., д.м.н., проф.,  
Куликов Г.В., д.б.н., Матвеев М.М., д.б.н., проф.,  
Сергейчик С.О., д.б.н., Фролов О.К., д.м.н., проф.,  
Швіндлерман С.П., д.б.н., проф.

# ЗМІСТ

## ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

<b>МАТЕМАТИКА</b> .....	7
<b>АЛЕКСАНДРОВ А.И.</b> <i>ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ</i> .....	7
<b>БАКУРОВА Г.В.</b> <i>СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСКРЕТНИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ</i> .....	9
<b>БОГУН І.В.</b> <i>СКІНЧЕННОВИМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ В ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІОНАЛА</i> .....	15
<b>БУВАЙЛО Д.П., ТОЛОК В.О.</b> <i>ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ FORL ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА</i> .....	21
<b>ВИНЦЕР О.М.</b> <i>О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ О ЛЕСАХ</i> .....	26
<b>ГРИЦАК В.З., ГОЛОВАНЬ О.О.</b> <i>НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ СТИСНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПЕРІОДИЧНИМИ ТА ЛОКАЛІЗОВАНИМИ ДЕФЕКТАМИ ТОВЩИНИ</i> .....	29
<b>ГРИЦАК В.З., КАБАК В.М.</b> <i>ПРО ОДИН АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН, ПАРАМЕТРИ ЯКИХ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЧАСУ</i> .....	35
<b>ДУДАРЬОВА О.В.</b> <i>ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ІМОВІРНОСТЕЙ НАПРУГ І ЇХНІХ ШВИДКОСТЕЙ ПРИ КОЛИВАННІ ТРИЩАРОВИХ ПЛАСТИН</i> .....	40
<b>Д'ЯЧЕНКО Н.М.</b> <i>МНОЖИНИ ЧЕЗАРІВСЬКИХ СУМ РЯДІВ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ ТА ПРОСТОРІ <math>L_p [0,1]</math> (<math>1 &lt; p &lt; \infty</math>) ПРИ ДЕЯКИХ ОБМЕЖЕННЯХ</i> .....	43
<b>ЗВЬОЗДОЧКІНА О.А., ТОЛОК В.О.</b> <i>РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ</i> .....	49

**ЗІНОВЄСВ І.В.**

*ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ІЗ  
ЩІЛИНОЮ МІЖ ШАРАМИ..... 53*

**КЕЛЬДЕР Т. Л., ГЛУЩЕВСЬКИЙ В. В**

*АВТОМАТИЗАЦІЯ ПІДТРИМКИ ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ СУБ'ЄКТОМ ФОНДОВОГО  
РИНКУ..... 60*

**КОЗІНА Г.Л.**

*ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ 63*

**КОНДРАТЬЄВА Н.О.**

*ПРО ДЕЯКИЙ ПІДХІД ДО ПРОГНОЗУВАННЯ ПОВЕДІНКИ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ ..... 68*

**ЛИСЕНКО В. В., ТОЛОК О. В.**

*АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ  
ПІВПЛОЩИНІ З ВКЛЮЧЕННЯМИ РІЗНОЇ ФОРМИ..... 72*

**МАТВІЙШИНА Н.В., ТОЛОК В.О**

*ВИКОРИСТАННЯ СТАНДАРТИЗОВАНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ПРИ НАВЧАННІ  
ОПЕРАТИВНОГО ПЕРСОНАЛУ АЕС..... 76*

**НОВОЖИЛОВА М.В.**

*МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНОГО  
ПРОЕКТУВАННЯ..... 79*

**ПОЖУЕВ А.В.**

*НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ  
ДЛИНЫ..... 82*

**ПОЖУЕВА И.С.**

*РЕАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АРМИРОВАННОЙ СРЕДЕ НА ДЕЙСТВИЕ  
ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ ..... 86*

**ПОТАПЕНКО С.М., САВРАНЬСЬКА А.В.**

*ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ КОМБІНОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ З  
НЕРОЗШИРЕНИМ СПОСТЕРІГАЧЕМ ..... 90*

**ПРИВАРНІКОВА А.О.**

*ЙМОВІРНІСНІ ОЦІНКИ ДОПУСТИМОЇ СУМИ КРЕДИТІВ ..... 93*

**САЛИКІНА Н. В., ТОЛОК В. О.**

*ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ  
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В РАЙОНІ ТРИЩИНІ..... 97*

**СТЕГАНЦЕВА П.Г., ВЕЛИЧКО І.Г.**

*КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ФЛАГОВОГО ПРОСТОРУ..... 104*

**ТОЛОК А.В., МУХИН В.В.**

*ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ  
..... 108*

<b>ШВИДКА С.П.</b>	
<i>СТОХАСТИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ ПЛАСТИНИ.....</i>	<b>113</b>
<b>ШИШКАНОВА Г.А.</b>	
<i>ДО КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПЕРВІСНО ТОРКАЮТЬСЯ У ТОЧЦІ.....</i>	<b>118</b>
<b>ФІЗИКА.....</b>	<b>122</b>
<b>ГРЖОН В.В.</b>	
<i>ОСОБЛИВОСТІ МАРТЕНСИТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ЛЕГОВАНИХ КАРБІДОУТВОРЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ Fe-Ni-C СПЛАВАХ.....</i>	<b>122</b>
<b>ГОРБЕНКО В.І., ШВЕЦЬ Ю.О.</b>	
<i>ДВА ПІДХОДИ В ЗАСТОСУВАННІ МЕТОДІВ РІВНОВАЖНОЇ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ “ВОДЕНЬ-ТВЕРДЕ ТІЛО”.....</i>	<b>126</b>
<b>ЗАІКА В.І.</b>	
<i>ОСОБЛИВОСТІ ДЕСОРБЦІЇ ВОДНЮ З ТВЕРДОЇ СТАЛІ В НОРМАЛЬНИХ УМОВАХ.....</i>	<b>130</b>
<b>КАНІВЧЕНКО О.В.</b>	
<i>ВПЛИВ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВІДПАЛУ НА ЗМІНУ ОПТИЧНОЇ ГУСТИНИ ГРАНАТОВИХ СТРУКТУР.....</i>	<b>133</b>
<b>ЛЕВИТИН В.В., ЛОСКУТОВ С.В., СЕРПЕЦКИЙ Б.А.</b>	
<i>О ФИЗИЧЕСКОМ МЕХАНИЗМЕ РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ .....</i>	<b>135</b>
<b>ЛОСКУТОВ С. В.</b>	
<i>ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕЛЬЕФА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....</i>	<b>138</b>
<b>ОСИПОВ А.Е.</b>	
<i>ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ <math>E^3 \times S^1</math> .....</i>	<b>143</b>
<b>ПСАРЕВ В.И.</b>	
<i>АНАЛИЗ СОЛНЕЧНОГО СПЕКТРА С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ СРЕДСТВ ЭВМ.....</i>	<b>144</b>
<b>СТАДОВ С.А., ШВЕЦ Ю.А.</b>	
<i>МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТАВА ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИНДУЦИРОВАННОГО ГАЗОВЫМ ОКРУЖЕНИЕМ.....</i>	<b>147</b>
<b>ХРИПКО С.Л.</b>	
<i>ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СЛОЕВ ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ МЕТОДОМ ПРОСВЕЧИВАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ.....</i>	<b>153</b>

<b>БІОЛОГІЧНІ НАУКИ</b> .....	157
<b>БЕЛЕНІЧЕВ І.Ф., БАТУРА Н.Р., ТОЛОК А.Я., ОМЕЛЬЯНЧИК Л.О.</b> <i>ПРОТИЗАПАЛЬНА АКТИВНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ КОМПЛЕКСІВ, ВИЛУЧЕНИХ З ТРАВИ ЧЕБРЕЦЮ</i> .....	157
<b>БОВТ В.Д., ЄЩЕНКО В.А., МАЛЬКО М.М., ГРИГОРОВА Н.В., СКОРНЯКОВ В.І.</b> <i>ВМІСТ ЦИНКУ В ГРАНУЛОЦИТАХ КРОВІ ПРИ АЛКОГОЛІЗАЦІЇ ТА ДІЇ ПРОМИСЛОВИХ ФАКТОРІВ</i> .....	160
<b>ВАСИЛЕНКО Н.В.</b> <i>ОСОБЕННОСТИ АВИФАУНЫ г.ЗАПОРОЖЬЯ В ЗИМНИЙ ПЕРИОД 1997 г.</i> .....	162
<b>ГРИГОРЕНКО І.В.</b> <i>ВИВЧЕННЯ ПРОДИХОВОГО АПАРАТУ ЛИСТЯ ПРЕДСТАВНИКІВ РОДИНИ МАГНОЛІЄВИХ В УМОВАХ ПІВДЕННОГО СХОДУ УКРАЇНИ У ЗВ'ЯЗКУ З ПОСУХОСТІЙКІСТЮ</i> .....	167
<b>ДМІТРЯКОВ В.О., БЕЛЕНІЧЕВ І.Ф., ГУЙТУР М.М., БЕРЕЖНИЙ О.П.</b> <i>ОСОБЛИВОСТІ ПРОТІКАННЯ ВІЛЬНО-РАДИКАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ДИСПЛАСТИЧНИХ ФОРМАХ ВАД РОЗВИТКУ НИРОК У ДІТЕЙ ЗАПОРІЗЬКОГО ПРОМИСЛОВОГО РЕГІОНУ</i> .....	171
<b>ДОМБРОВСЬКИЙ К.О.</b> <i>ЗООПЛАНКТОН ЗАПЛАВНИХ ВОДОЙМ ВЕРХІВ'Я КАХОВСЬКОГО ВОДОСХОВИЩА</i> .....	173
<b>ДОМНИЧ В.И., ЕВСЕЕВА Т.А.</b> <i>К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДИКИХ КОПЫТНЫХ НА РАСТИТЕЛЬНЫЕ БИОЦЕНОЗЫ УКРАИНЫ</i> .....	179
<b>КОРЖ О.П.</b> <i>ВИКОРИСТАННЯ АНТИОКСИДАНТІВ ДЛЯ ВИРОЩУВАННЯ МОЛОДІ МИСЛИВСЬКОГО ФАЗАНА</i> .....	184
<b>КУЧКОВСЬКИЙ О. М.</b> <i>ПРО РОЛЬ ЦИНКУ В НЕЙРОМЕДІАТОРНІЙ ФУНКЦІЇ ГІПОКАМПУ</i> .....	187
<b>ОМЕЛЬЯНЧИК Л.О., БРАЖКО О.А., РИЛЬСЬКИЙ О.Ф., НОВОСАД Н.В., ЗАВГОРОДНІЙ М.П.</b> <i>ПОШУК БІОЛОГІЧНО АКТИВНИХ РЕЧОВИН НА ОСНОВІ S-(ХІНАЛЬДИНІЛ-4)-L (-)-ЦИСТЕЇНУ</i> .....	190
<b>ОМЕЛЬЯНЧИК Л.О., СІЧАВА О.М</b> <i>БІОЛОГІЧНО АКТИВНІ РЕЧОВИНИ ВОДНОГО КОМПЛЕКСУ КОРЕНІВ ЛОПУХА ВЕЛИКОГО (ARCTIUM LAPPA)</i> .....	193
<b>ПАЛАМАРЧУК І. Г</b> <i>ЗМІНИ ВИКЛИКАНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ПІДКОРКОВИХ ЗОРОВИХ ЦЕНТРІВ І КОРИ ВЕЛИКИХ ПІВКУЛЬ ПІСЛЯ МЕЗЕНЦЕФАЛІЧНОГО ПЕРЕРІЗУ СТОВБУРА МОЗКУ</i> .....	196

# МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

## ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Александров А.И.

В вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим оператор  $U : H \rightarrow H$ , обладающий свойством усиленной непрерывности. Это свойство заключается в том, что для любого элемента  $x \in H$  и любой последовательности  $\{x_n\}$  элементов  $H$ , слабо сходящейся к  $x$ , соответствующая последовательность  $\{U(x_n)\}$  сильно сходится к  $U(x)$ . Рассмотрим также отображение  $G : H \times H \rightarrow H$ , для которого выполнены следующие два условия:

- 1)  $\|G(x_1, y) - G(x_2, y)\| \leq \|x_1 - x_2\|$  для всех  $x_1, x_2, y \in H$ ;
- 2) существует положительная константа  $C$  такая, что  $\|G(y, x_1) - G(y, x_2)\| \leq C \cdot \|x_1 - x_2\|$ , для всех  $x_1, x_2, y \in H$ .

Оператор  $F : H \rightarrow H$ , порождаемый отображением  $G$  и оператором  $U$ , определим таким образом, что  $F(x) = G(x, U(x))$  для любого элемента  $x \in H$ . Докажем два утверждения о существовании неподвижной точки у оператора  $F$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $F$  отображает шар  $B[\theta, r] = \{x \in H \mid \|x\| \leq r\}$  в  $B[\theta, r]$ . Тогда в этом шаре существует хотя бы одна неподвижная точка оператора  $F$ .

**Доказательство.** Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  есть полная ортонормированная система элементов пространства  $H$ ,  $H_n$  – линейная оболочка первых  $n$  элементов данной системы,  $P_n$  – ортопроектор  $H$  на  $H_n$ . Рассмотрим уравнение

$$x = F_n(x), \tag{1}$$

в котором  $F_n(x) = P_n(F(x))$ . Так как  $F_n : H \rightarrow H$  – непрерывный оператор, отображающий выпуклое компактное множество  $\Omega_n = H_n \cap B[\theta, r]$  в  $\Omega_n$ , то из первого принципа неподвижной точки Шаудера [1] вытекает существование элемента  $x_n \in \Omega_n$ , удовлетворяющего уравнению (1).

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  есть последовательность решений уравнений (1), соответствующих различным значениям индекса  $n$ . Поскольку  $x_k \in B[\theta, r]$  для всех натуральных  $k$  и  $B[\theta, r]$  – слабо компактное множество, то существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  рассматриваемой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящаяся слабо в  $H$  к некоторому элементу  $x^* \in B[\theta, r]$ . Докажем, что  $x^*$  есть неподвижная точка оператора  $F$ .

Для элемента  $y = F(x^*)$  величина  $\|P_{n_k}(y) - x_{n_k}\|$  допускает следующую верхнюю оценку:

$$\begin{aligned} \|P_{n_k}(y) - x_{n_k}\| &= \|P_{n_k}(F(x^*)) - P_{n_k}(F(x_{n_k}))\| \leq \|F(x^*) - F(x_{n_k})\| = \\ &= \|G(x^*, U(x^*)) - G(x_{n_k}, U(x_{n_k}))\| \leq \|x^* - x_{n_k}\| + C \cdot \|U(x^*) - U(x_{n_k})\|. \end{aligned} \quad (2)$$

Из оценки (2) вытекает неравенство

$$\|P_{n_k}(y) - x_{n_k}\|^2 \leq \|x^* - x_{n_k}\|^2 + 2 \cdot \alpha_{n_k} \cdot \|x^* - x_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^2, \quad (3)$$

в котором  $\alpha_{n_k} = C \|U(x^*) - U(x_{n_k})\|$ . Так как для любого  $x \in H$  значение  $\|x\|^2$  равно скалярному произведению  $(x, x)$ , то соотношение (3) можно записать в виде

$$(P_{n_k}(y), P_{n_k}(y)) - 2(P_{n_k}(y), x_{n_k}) \leq (x^*, x^*) - 2(x^*, x_{n_k}) + 2 \cdot \alpha_{n_k} \cdot \|x^* - x_{n_k}\| + \alpha_{n_k}^2. \quad (4)$$

Переходя в неравенстве (4) к пределу при  $n_k \rightarrow \infty$ , получим неравенство

$$(y, y) - 2(y, x^*) \leq -(x^*, x^*),$$

означающее, что  $\|y - x^*\|^2 = 0$  и  $x^* = y$ . Так как  $y = F(x^*)$  и  $y = x^*$ , то  $x^* = F(x^*)$ .

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть оператор  $F$  отображает всё пространство  $H$  в некоторое ограниченное множество  $M \subset H$ . Тогда в  $M$  существует хотя бы одна неподвижная точка оператора  $F$ .

**Доказательство.** Для ограниченного множества  $M$  существует шар  $B[\theta, r]$ , содержащий в себе это множество. Из условий теоремы следует, что  $F(B[\theta, r]) \subset F(H) \subset M \subset B[\theta, r]$ . Таким образом, для оператора  $F$  и шара  $B[\theta, r]$  выполнено условие теоремы 1, из которой вытекает существование в этом шаре неподвижной точки оператора  $F$ . Поскольку  $F(B[\theta, r]) \subset M$ , то эта неподвижная точка содержится в  $M$ .

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь класс  $X_H$  всех таких операторов  $F_0 : H \rightarrow H$ , для каждого из которых существуют усиленно непрерывный оператор  $U : H \rightarrow H$  и удовлетворяющее условиям 1), 2) отображение  $G : H \times H \rightarrow H$ , заданные таким образом, что  $F_0(x) = G(x, U(x))$  для всех  $x \in H$ . Для класса  $X_H$  можно сформулировать очевидные обобщения доказанных утверждений.

**Теорема 3.** Если оператор  $F_0$ , принадлежащий классу  $X_H$ , отображает шар  $B[\theta, r]$  в  $B[\theta, r]$ , то в этом шаре существует хотя бы одна неподвижная точка оператора  $F_0$ .

**Теорема 4.** Если оператор  $F_0$ , принадлежащий классу  $X_H$ , отображает всё пространство  $H$  в некоторое ограниченное множество  $M \subset H$ , то в этом множестве существует хотя бы одна неподвижная точка оператора  $F_0$ .

Отметим, что класс  $X_H$  достаточно широк. Этому классу, например, принадлежат все нерастягивающие и усиленно непрерывные операторы. Действительно, для нерастягивающего оператора  $F_1 : H \rightarrow H$  и



усилено неперервного оператора  $F_2 : H \rightarrow H$  определим удовлетворяючіе условиям 1) и 2) отображения  $G_1, G_2 : H \times H \rightarrow H$  при помощи соотношений

$$G_1(x, y) = F_1(x) + y; \quad G_2(x, y) = \theta_1(x) + y; \quad x, y \in H, \quad (5)$$

в которых  $\theta_1 : H \rightarrow H$  есть нулевой оператор. Из (5) следуют равенства  $F_1(x) = G_1(x, \theta_1(x))$  и  $F_2(x) = G_2(x, F_2(x))$ , означающие, что  $F_1, F_2 \in X_H$ . Классу  $X_H$  принадлежат также все операторы, представимые в виде суммы нестягивающего и усилено неперервного операторов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

УДК 681.3

## СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСКРЕТНИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Бакурова Г.В.

Дана стаття є коротким звітом про основні результати досліджень стійкості розв'язків багатокритеріальних дискретних задач, що проводяться на кафедрі економічної кібернетики ЗДУ з 1989 року.

**Актуальність і коротка історія проблеми.** При розв'язку будь-якої реальної задачі дослідник завжди має справу з деякою моделлю задачі, яка є наближеною до вихідної. На базі задачі виникає деяка множина постановок для більш гнучкого відбиття особливостей моделі. Розв'язок усіх задач у сукупності дозволяє одержати більш точний та адекватний опис моделі. Така сукупність будується шляхом варіації деяких числових параметрів задач. Аналіз стійкості є одним з методів урахування погрешності у вимірі числових параметрів та їх впливу на одержуваний розв'язок.

Проблема дослідження стійкості докладно розроблена для оптимізаційних задач з "неперервними" вихідними даними. Через складність дискретних моделей, які при малих змінах у вихідних даних поводять себе непередбачено, ця проблема спочатку не отримала достатнього розвитку в дискретній оптимізації і почала ґрунтовно досліджуватися у 70-ті роки. Теоретичному дослідженню задач з повністю або частково цілочисельними змінними, що базується на використанні властивостей точково-множинних відображень присвячена монографія [10]. Конструктивний підхід до проблеми дослідження стійкості траєкторних задач дискретної оптимізації, основою якого є поняття радіуса стійкості, укладено в роботах [9]. В останній час з'явився новий напрямок дослідження питань стійкості – ймовірнісний [5,6]. На кафедрі економічної кібернетики ЗДУ вперше було розглянуто проблему локальної стійкості для багатокритеріальних траєкторних задач на графах та одержано формули радіуса стійкості для різних класів задач. Викладемо основні теоретичні положення цієї проблеми.

**Постановка траєкторних задач векторної оптимізації.** Системою підмножин (СП) називаємо пару  $(E, T)$ , де  $E$  - скінченна множина елементів, потужність  $|E| = q$ , а  $T$  - деяка сукупність непустих підмножин множини  $E$ , які називають траєкторіями і  $T = \{t\}$ .

У роботах [1-6, 9] розглядаються класи масових задач з двома типами зваження елементів  $e \in E$  ваговим та інтервальним :

**I тип.** На множині  $E$  задамо векторну вагову функцію (ВВФ)

$$w(e) = (w_1(e), \dots, w_v(e), \dots, w_n(e)), \quad (1)$$

де  $w_v(e) \in R \quad \forall v = \overline{1, n} \quad \forall e \in E$ .

На множині траєкторій  $T$  задамо векторну цільову функцію (ВЦФ)

$$F(t) = (F_1(t), \dots, F_\nu(t), \dots, F_n(t)), \quad (2)$$

вид критеріїв якої визначає класи задач  $Z_j, j = \overline{0,4}$ :

$$\text{- клас } Z_0: F_\nu(t) = \min_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \min_T, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$F_\nu(t) = \max_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \min_T, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$F_\nu(t) = \min_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \max_T, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$F_\nu(t) = \max_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \max_T, \quad \nu = \overline{1, n}; \quad (6)$$

$$\text{- клас } Z_1: F_\nu(t) = \sum_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\text{- клас } Z_2: F_\nu(t) = \sum_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = \overline{1, n-1},$$

$$F_\nu(t) = s(t) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = n; \quad (8)$$

$$\text{- клас } Z_3: F_\nu(t) = \sum_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = \overline{1, n-1},$$

$$F_\nu(t) = d(t) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = n; \quad (9)$$

$$\text{- клас } Z_4: F_\nu(t) = \sum_{e \in t} w_\nu(e) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = \overline{1, n-1},$$

$$F_\nu(t) = s(t) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = n-1,$$

$$F_\nu(t) = d(t) \rightarrow \text{opt}_T, \quad \nu = n.$$

При визначенні топологічних критеріїв (8), (9) завжди визнаємо, що  $E$  являє собою множину ребер даного графу  $G$ , при цьому підмножина  $t \subseteq E$  утворює зв'язний підграф  $t$  графу  $G$ :  $s(t) = \max_{e \in t} \text{deg } \nu$  - степінь  $t$ ,  $d(t)$  - діаметр  $t$ .

**II туп.** На множині  $E$  визначена інтервальна вагова функція (ІВФ)

$$w(e) = [w_1(e), w_2(e)], \quad (10)$$

де  $w_1(e)(w_2(e))$  - нижня (верхня) межа заданого інтервалу.

На множині траєкторій  $T$  визначена інтервальна цільова функція (ІЦФ), що містить такі критерії:

$$F_1(t) = \sum_{e \in t} w_1(e) \rightarrow \max_T, \quad (11)$$

$$F_2(t) = \sum_{e \in t} w_2(e) \rightarrow \max_T, \quad (12)$$

$$F_3(t) = \max_{e \in t} (w_2(e) - w_1(e)) \rightarrow \min_T. \quad (13)$$

ВЦФ  $F(t)$  вигляду (3)-(9) та ІЦФ (11)-(13) визначають на множині допустимих розв'язків (МДР) паретовську множину (ПМ)  $\tilde{T}$ , що містить усі паретовські оптимуми (ПО):  $\tilde{\tau} \in \tilde{T}$ , якщо не існує такої траєкторії  $t^0 \in T$ , для якої виконуються нерівності  $F(t^0) \leq F(\tilde{\tau}), F(t^0) \neq F(\tilde{\tau})$ . Багатокритеріальною задачею будемо називати задачу знаходження та зображення ПМ  $\tilde{T}$  в явному вигляді.

Якщо занумерувати усі елементи множини  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ , то індивідуальну ВВФ  $w(e)$  з класів  $Z_j, j = \overline{0,4}$  зручно трактувати як матрицю  $W = \|w_{\nu k}\|_{n \times q}$  у просторі  $R^{nq}$ ,  $\nu = \overline{1, n}, q = |E|$ . Змінюючи матрицю  $W$ , будемо одержувати різні індивідуальні задачі.

Для кожного класу масових задач  $Z_j, j = \overline{0,4}$  введені позначення індивідуальної задачі, тобто:  $z^n(W)$  - індивідуальна задача з класу  $Z_0$ ;  $z^*(W)$  - з класу  $Z_1$ ;  $z'(W)$  - з класу  $Z_j, j = \overline{2,4}$ ; задачу з ЩФ (11)-(13) позначаємо через  $z^i(W)$  і називаємо інтервальною. ПМ таких задач позначаємо відповідно  $T^n(W), T^*(W), T'(W)$ . Взагалі (без уточнення класу) символами  $T(W)$  та  $T(W)$  позначаємо МДР та ПМ задачі. Значення  $V$ -го критерію  $F_\nu(t)$  вигляду (3)-(6) в задачі  $z^n(W)$  будемо позначати через  $M_\nu(t, W)$ . Інтервальну задачу  $z^i(W)$  зводимо до задачі багатокритеріальної оптимізації з двома ваговими та одним мінімаксним критеріями.

**Постановка проблеми локальної стійкості.** Для задач з ВВФ (ІВФ) у просторі  $R^{nq}$  ( $R^{3q}$ ) задамо норму. Під нормою матриці  $B = \|b_{\nu k}\| \in R^{nq}$  будемо розуміти число  $\|B\| = \max \{ |b_{\nu k}| : \nu = \overline{1, n}, k = \overline{1, q} \}$ . Через  $\mathcal{B}(\varepsilon)$  позначаємо множину всіх таких матриць  $B$  з  $R^{nq}$ , що норма  $\|B\| \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0$ . Задачу  $z(W + B)$ , що одержана з вихідної задачі  $z(W)$  при складенні матриць  $W$  та  $B$ , будемо називати збуреною, а матрицю  $B$  - збурюючою.

Означення 1. Задача  $z(W)$  є  $\mathcal{E}$ -стійкою, якщо виконуються включення

$$T(W + B) \subseteq T(W) \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (14)$$

*Зауваження.* У роботі [5] було проведено дослідження  $\mathcal{E}$ -стійкості для випадків симетричного включення до означення (14) та строгої рівності між паретовськими множинами, знайдено необхідні та достатні умови  $\mathcal{E}$ -стійкості для цих означень. Далі цей напрямок набув розвитку в колег з Білорусі, наприклад, робота [8].

В індивідуальних задачах  $z^n(W)$ ,  $z^*(W)$ ,  $z'(W)$ ,  $z^i(W)$  з відповідних класів масових задач  $Z_j, j = \overline{0,4}$  для будь-якої траєкторії  $t^0 \in \overline{T(W)}$  визначимо множину парето-оптимальних траєкторій, що домінують траєкторію  $t^0$ . Для цього введемо позначення множин індексів  $\nu \in I_l, l = \overline{1,7}$ , якими занумеровані критерії (3)-(9), що являють собою неперехрещені підмножини  $I_l \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ . Тоді ця множина визначається таким чином:

- для класу  $Z_0$

$$T^n(W, t^0) = \{ \tau \in T^n(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tau) \geq 0, \nu \in I_l, l = \overline{1,4} \}, \quad (15)$$

$$\text{де } \tau_\nu^w(t^0, \tau) = M_\nu(t^0, W) - M_\nu(\tau, W), \nu \in I_1, I_2,$$

$$\tau_\nu^w(\tau, t^0) = M_\nu(\tau, W) - M_\nu(t^0, W), \nu \in I_3, I_4;$$

- для класу  $Z_j, j = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned} T'(W, t^0) &= \{ \tau \in T'(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tau) \geq 0, \nu \in I_6, I_7 \}, \\ T^*(W, t^0) &= \{ \tau \in T^*(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tau) > 0, \nu \in I_5 \}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } \tau_\nu^w(t^0, \tau) = F_\nu(t^0, W) - F_\nu(\tau, W), \nu \in I_l, l = \overline{5,7};$$

- для інтервальної задачі  $z^i(W)$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,2}(W, t^0) &= \{ \tilde{\tau} \in \tilde{T}_{1,2}(W) : \tau_\nu^w(\tilde{\tau}, t^0) > 0, \nu = 1, 2 \}, \\ \tilde{T}_3(W, t^0) &= \{ \tilde{\tau} \in \tilde{T}_3(W) : \tau_\nu^w(\tilde{\tau}, t^0) \geq 0, \nu = 3 \}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{де } \tau_\nu^w(\tilde{\tau}, t^0) = F_\nu(\tilde{\tau}, W) - F_\nu(t^0, W), \nu = \overline{1, 3}.$$

Для інтервальної задачі  $z^i(W)$  введемо два типи збурення вхідних даних, що не виводять вихідну задачу з класу інтервальних:

$$1) \mathfrak{B}_1(\varepsilon) = \{ B = \|b_{\nu k}\| : b_{\nu k} \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, b_1 + w_1 < b_2 + w_2 \}, \quad (18)$$

де  $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$  - вхідна вага,  $b(e) = [b_1(e), b_2(e)]$  - збурююча вага;

$$B_2(\varepsilon) = \left\{ B = \|b_{\nu k}\| : b_{\nu k} \leq \varepsilon, 0 < \varepsilon < \min_k \frac{d_k}{2} \right\}, \quad (19)$$

де  $d_k = w_{2k} - w_{1k}$  - ширина інтервалу,  $k = \overline{1, q}$ .

Радіусом стійкості будь-якої індивідуальної задачі  $z(W)$  назвемо число

$$\rho(W) = \sup \{ \varepsilon : \mathcal{T}(W + B) \subseteq \mathcal{T}(W) \forall B \in \mathfrak{B}(\varepsilon) \}.$$

Наведемо основні результати, що були одержані протягом останніх 3-х років.

**1.** Проведено дослідження  $\mathcal{E}$ -стійкості векторних задач на СП з векторною ваговою функцією. Розглянуто два випадки, що визначаються видом задач: частинний, що має аналог для однокритеріальних задач та загальний, що виникає в умовах багатокритеріальності. Відносно частинного випадку отримані результати, які аналогічні векторним траекторним задачам з лінійними критеріями, що розглядалися раніш у роботах [4-6]. У загальному випадку, коли можливим є вплив перехрещення паретовської та непаретовської траекторій, сформульовано необхідні та достатні умови  $\mathcal{E}$ -стійкості задач класу  $Z_0$ , а також визначено формулу радіуса стійкості. В їх формулюванні використано визначення  $i$ -го квазіоптимуму, що вводиться рекурентно:

-  $e_\nu(t^0 \cap \tilde{\tau})$  - ребро, на якому досягається рівність значень  $\nu$ -го критерію паретовської та непаретовської траекторій, тобто  $M_\nu(t^0, W) = M_\nu(\tilde{\tau}, W)$ ; множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначаємо через  $J(t^0, \tilde{\tau})$ ;

-  $M_\nu^1(\tilde{\tau}, W)$  - перший квазіоптимум траекторії  $\tilde{\tau} \in \tilde{T}^n(W, t^0)$ ;

$e_\nu^i(t^0 \cap \tilde{\tau})$  - ребро, на якому однакові  $i$ -ті квазіоптимуми траекторій  $t^0, \tilde{\tau}$  та виконується послідовність рівностей та нерівностей:

$$[M_\nu(t^0, W) = M_\nu(\tilde{\tau}, W)] > [M_\nu^1(t^0, W) = M_\nu^1(\tilde{\tau}, W)] > \dots > [M_\nu^i(t^0, W) = M_\nu^i(\tilde{\tau}, W)]$$

множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначаємо через  $J^i(t^0, \tilde{\tau})$ , де  $\nu \in J^{i-1}(t^0, \tilde{\tau})$ .

Формула обчислення радіуса стійкості має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \rho(W) &= \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)} \max_{\tilde{\tau} \in \tilde{T}^n(W, t^0)} \min \frac{1}{2} \left\{ \min_{\nu \in J^i(t^0, \tilde{\tau})} [(M_\nu(\tilde{\tau}, W) - M_\nu^i(\tilde{\tau}, W)), \right. \\ &\quad \left. (M_\nu(\tilde{\tau}, W) - M_\nu^i(t^0, W))] \right\} \min_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus J(t^0, \tilde{\tau})} \tau_\nu^w(t^0, \tilde{\tau}) \end{aligned} \quad (20)$$

2. Розглянуто вплив включення топологічних критеріїв степеня та діаметра на стійкість векторних задач з адитивними критеріями. Сформульовано критерій  $\mathcal{E}$ -стійкості задачі з топологічними критеріями. Знайдено формулу обчислення радіуса стійкості задачі  $z'(W)$  з класу  $Z_j, j = \overline{2,4}$ :

$$\rho(W) = \min_{t^0 \in \overline{T(W)} \tilde{T} \in \overline{T'(W, t^0)}} \max \min \left\{ \min_{v \in I_5} \frac{\tau_v^w(t^0, \tilde{T})}{c(t^0, \tilde{T})}, \tau_{v \in I_6, I_7}^w(t^0, \tilde{T}) \neq 0 \right\}, \quad (21)$$

де  $c(t^0, \tilde{T}) = |t^0| + |\tilde{T}| - 2|t^0 \cap \tilde{T}|$  - кількість різних ребер у парі траєкторій  $t^0, \tilde{T} \in T(W)$ .

3. Проведено дослідження  $\mathcal{E}$ -стійкості векторних задач на СП з інтервальною ваговою функцією. За допомогою лінійного перетворення, що залишає незмінними межі області значень інтервалу  $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ ,  $e \in E$  критерій (13) перетворено до максимізованого:

$$F_3(t) = \min_{e \in E} (D(W) - d_k) \rightarrow \max_T, \quad (22)$$

де  $d_k = w_{2k} - w_{1k}, k = \overline{1, q}$  - ширина інтервалу,  
 $D(W) = \min_{e \in E} d(e) + \max_{e \in E} d(e); d(e') = \min_{e \in E} d(e), d(e'') = \max_{e \in E} d(e)$ .

Введемо ще дві множини:

1) збурення, що не впливають на величини  $D(W)$  та  $d_k$ :

$$B_d(\varepsilon) = \{B = \|b_{vk}\| : b_{vk} \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0, (b_{2k} + w_{2k}) - (b_{1k} + w_{1k}) = d_k\}; \quad (23)$$

2) збурення, при яких  $D(W) = const$ , а  $d_k \neq const$ :

$$B_D(\varepsilon) = \{B = \|b_{vk}\| : b_{vk} \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0, 0 \leq \Delta_k \leq d(e'') - d_k\}, \quad (24)$$

де  $\Delta_k = b_{2k} - b_{1k}$ , - ширина інтервалу збурення.

Для кожного із збурень  $\mathcal{B}_1(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{B}_2(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{B}_d(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{B}_D(\varepsilon)$  досліджено умови  $\mathcal{E}$ -стійкості та визначено формули радіуса стійкості. Для наведення формул радіуса стійкості введені такі позначення:  $\tilde{T}' \in \overline{T_{1,2}(W, t^0)}, \tilde{T}'' \in \overline{T_3(W, t^0)}, \overline{T_{1,2}(W, t^0)} \cup \overline{T_3(W, t^0)} = \overline{T^{\wedge}(W, t^0)}$ ;

$M_3^i(\tilde{T}'', W)$  або  $M_3^i(t^0, W)$  -  $i$ -ті квазіоптимиуми у траєкторіях  $\tilde{T}'', t^0$ ;

$-'(t^0, \tilde{T}) = -(t^0, \tilde{T}) - \phi(t^0, \tilde{T})$  - кількість різних ребер у парі траєкторій  $t^0, \tilde{T} \in T(W)$ ;  $\phi(t^0, \tilde{T})$  - число входів ребер  $e'$  та  $e''$  у траєкторії  $\tilde{T}, t^0$ ;

$\tau_v^{*w}(\tilde{T}, t^0), v = 1, 2; \tau_3^{*w}(\tilde{T}, t^0)$  - позначення величин відповідно

$\tau_v^w(\tilde{T}, t^0), v = 1, 2; \tau_3^w(\tilde{T}, t^0)$ , що задовольняють нерівностям  $\tau_v^w(\tilde{T}, t^0) \geq \frac{\Delta^*}{2} c'(\tilde{T}, t^0), v = 1, 2$  та

$\tau_3^w(\tilde{T}, t^0) \geq \Delta^*$ , де  $\Delta^* = \min_k \Delta_k^*, \Delta_k^* = d(e'') - d_k$ .

Наступні формули радіуса стійкості наведені відповідно для збурень  $B_1(\varepsilon)$ ,  $B_2(\varepsilon)$ ,  $B_d(\varepsilon)$ ,  $B_D(\varepsilon)$ :

$$\rho_1(W) = \min_{t^0 \in \overline{T}(W)} \max_{\tau \in T^*(W, t^0)} \min \left\{ \frac{\tau_{1,2}^w(\tau', t^0)}{c'(t^0, \tau')}, \frac{1}{2} \left[ \min \left\{ (M_3^i(t^0, W) - M_3(\tau'', W)), (M_3^i(\tau'', W) - M_3(\tau'', W)) \right\}, \tau_3^w(\tau'', t^0) \right] \right\} \quad (25)$$

$$\rho_2(W) = \min \left\{ \rho_1(W); \min_k \frac{d_k}{2} \right\} \quad (26)$$

$$\rho_d(W) = \min_{t^0 \in \overline{T}(W)} \max_{\tau \in T_{1,2}^*(W, t^0)} \min_{\nu=1,2} \frac{\tau_\nu^w(\tau, t^0)}{c(t^0, \tau)} \quad (27)$$

$$\rho_D(W) = \min_{t^0 \in \overline{T}(W)} \max_{\tau \in T^*(W, t^0)} \min \left\{ \frac{\tau_{1,2}^{*w}(\tau', t^0)}{c'(t^0, \tau')}, \frac{1}{2} \left[ \min \left\{ (M_3^i(t^0, W) - M_3(\tau'', W)), (M_3^i(\tau'', W) - M_3(\tau'', W)) \right\}, \tau_3^{*w}(\tau'', t^0) \right] \right\} \quad (28)$$

### ЛІТЕРАТУРА

1. Bakurova A.V., Perepelitsa V.A., Zin'kovskaya J.S. Research of Stability of Vector Problem on Spanning Tree with Topological Criteria. IKM'97 digital proceedings. Bauhaus-Universitat/Weimar/Germany, 1997.- P.159-165 (article).
2. Бакурова А.В., Зиньковская Ю.С., Перепелица В.А. Исследование устойчивости векторных задач на системах подмножеств при дополнении ВЦФ топологическими критериями // Доповіді НАН України - 1998 - № 5 – С.89-92.
3. Бакурова Г.В., Зиньковська Ю.С. Дослідження стійкості 3-критеріальної задачі формування інвестиційного портфелю // Міжвідомчий зб. наук. пр. Машинна обробка інформації. - КДЕУ, 1997. - 59. - С.48-54.
4. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств // Доклады АН Беларуси – 1995. – Т.39 - № 2. – С.33-35.
5. Бакурова А.В. Исследование устойчивости и сложности некоторых задач дискретной многокритериальной оптимизации : Дис. ... канд. физ.-мат. наук: Запорожье: ЗГУ, 1993. – 100 с.
6. Бакурова Г.В., Перепелица В.О. Ймовірнісний аналіз складності і стійкості векторної задачі комівояжера // Доповіді АН України. – 1993 - № 11. – С.80-84.
7. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // ЖВМиМФ – Т.36 -№ 1.– 1996. – С.12-18.
8. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Математические заметки РАН. – М. – Т.63 – В.1 – 1998. – С.21-27.
9. Зиньковська Ю.С. Дискретні екстремальні задачі в умовах невизначеності: питання стійкості – Дис.: канд. фіз.-мат. наук. – Запоріжжя : ЗДУ, 1997. – 122 с.
10. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – К: Наукова думка, 1995. – 170 с.

## СКІНЧЕННОВИМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ В ЗАДАЧІ ПРО МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІОНАЛА

Богун І.В.

Розглянемо задачу про знаходження допустимого керування, яке мінімізує деякий функціонал.

Нехай процес описується рівнянням:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + p(t, x), \quad (1)$$

де  $p(t, x)$  - керування, а функція  $u(t, x)$  означена в області  $D = [0, T] \times [0, 1]$  та на межі цієї області задовольняє умовам:

$$\frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} + \alpha u(t, 1) = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = g(x), \quad (3)$$

де  $\alpha = const > 0$ , а  $g(x) \in L_2[0, 1]$  - задана функція.

Допустимими керуваннями будемо вважати функції із простору  $L_2(D)$ .

Нам потрібно знайти таке допустиме керування  $p(t, x)$  та такий відповідний до нього розв'язок задачі (1)-(3)  $u(t, x)$ , щоб на них функціонал

$$I[p] = \int_0^1 [u(T, x) - \phi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 p^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_0^1 u(t, x) Q(x, s) u(t, s) ds dx dt \quad (4)$$

набував найменше можливе значення. Тут  $\beta = const > 0$ ,  $\phi(x) \in L_2[0, 1]$  та  $Q(x, s) \geq 0$  - задані функції.

Подано розв'язок задачі (1)-(3) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; X'(0) = X'(1) + \alpha X(1) = 0,$$

тобто

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \quad (5)$$

Аналогічно поступимо з керуючою функцією та функцією  $g(x)$ :

$$p(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) X_n(x), \quad (6)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x). \quad (7)$$

Тоді задача (1)-(3) розпадеться на нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами для коефіцієнтів Фур'є функції  $u(t, x)$ :

$$u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = p_n(t), u_n(0) = g_n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Припустимо, що функцію  $Q(x, s)$  можна подати у вигляді:

$$Q(x, s) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{nm} q_n X_n(x) X_m(s), \quad (9)$$

де  $\delta_{nm}$  - символ Кронекера.

Якщо

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n X_n(x), \quad (10)$$

тоді функціонал (4) набуває вигляду:

$$I[p] = \sum_{n=1}^{\infty} \left( [u_n(T) - \phi_n]^2 + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \right). \quad (11)$$

Залишаючи скінченне число доданків у рядах (5)-(7), (9)-(11), ми зведемо початкову проблему до нескінченної системи незалежних задач про знаходження таких функцій  $p_n(t)$  та відповідних до них функцій  $u_n(t)$ , які задовольняють (8), щоб на парах  $p_n(t), u_n(t)$  функціонали

$$I_n = [u_n(T) - \phi_n]^2 + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \quad (12)$$

набували найменші можливі значення.

Оскільки допустимими керуваннями вважалися функції із простору  $L_2(D)$ , тому в скінченновимірній задачі будемо вимагати, щоб  $p_n(t) \in L_2[0, T]$ .

Для розв'язання нової задачі скористуємося методами динамічного програмування. Для цього введемо функціонал:

$$S_n[t, u_n] = \min_{\substack{p \in L_2 \\ t \leq \tau \leq T}} \left\{ [u_n(T) - \phi_n]^2 + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \right\},$$

де  $t \in [0, T]$ .

Рівняння Белмана для цього функціонала має вигляд:

$$-\frac{\partial S_n[t, u_n]}{\partial t} = \min_{p \in L_2} \left\{ \beta p_n^2(t) + q_n u_n^2(t) + \frac{\partial S_n[t, u_n]}{\partial u_n} (p_n(t) - \lambda_n^2 u_n(t)) \right\} \quad (13)$$

з початковою умовою

$$S_n[t, u_n] = [u_n(T) - \phi_n]^2. \quad (14)$$

Мінімум у правій частині (13) досягається при

$$p_n(t) = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial S_n[t, u_n]}{\partial u_n}. \quad (15)$$

Тоді (13) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial S_n[t, u_n]}{\partial t} = \frac{\partial S_n[t, u_n]}{\partial u_n} \left( \lambda_n^2 u_n(t) + \frac{1}{4\beta} \right) - q_n u_n^2(t). \quad (16)$$

Розв'язок рівняння (16) з початковою умовою (14) шукаємо у вигляді:



$$S_n[t, u_n] = K_n(t)u_n^2(t) + \varphi_n(t)u_n(t) + \eta_n(t), \quad (17)$$

де  $K_n(t), \varphi_n(t), \eta_n(t)$  - функції, які підлягають визначенню. Після підстановки (17) у рівняння (16) дістанемо такі задачі для визначення цих функцій:

$$K_n'(t) - 4\lambda_n^2 K_n(t) + q_n = \frac{3}{\beta} K_n^2(t), \quad (18)$$

$$\varphi_n'(t) - 2\lambda_n^2 \varphi_n(t) = \frac{3}{\beta} K_n(t) \varphi_n(t), \quad (19)$$

$$\eta_n'(t) = \frac{3}{4\beta} \varphi_n^2(t). \quad (20)$$

Враховуючи початкову умову (14), дістанемо початкові умови для задач (18)-(20), відповідно:

$$K_n(T) = 1, \quad (21)$$

$$\varphi_n(T) = -2\phi_n, \quad (22)$$

$$\eta_n(T) = \phi_n^2. \quad (23)$$

Таким чином, для визначення функції  $K_n(t)$  ми маємо рівняння Ріккати (18) з початковою умовою (21).

Заміною  $z_n(t) = \frac{3}{\beta} K_n(t) + 2\lambda_n^2$  рівняння (18) зводиться до вигляду:

$$z_n'(t) = z_n^2(t) - \left( 4\lambda_n^4 + \frac{3q_n}{\beta} \right), z_n(T) = 2\lambda_n^2 + \frac{3}{\beta}. \quad (24)$$

Частинним розв'язком цього рівняння є функція  $z_n(t) = \sqrt{4\lambda_n^4 + \frac{3q_n}{\beta}} \equiv b_n$ , знаючи яку, рівняння (24)

заміною  $y_n(t) = z_n(t) - b_n$  зводиться до рівняння Бернуллі, яке у свою чергу перетворюється до лінійного рівняння та легко інтегрується у квадратурах. При цьому ми отримуємо такий розв'язок задачі (18),(21):

$$K_n(t) = \frac{\beta}{3} \left( \frac{2b_n(a_n - 2b_n)}{a_n(e^{2b_n(T-t)} - 1) + 2b_n} + b_n - 2\lambda_n^2 \right), \quad (25)$$

де  $a_n = \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2 + b_n$ .

**ЛЕМА 1.** Якщо  $q_n \leq \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2$ , тоді функція  $K_n(t)$  задовольняє умові:  $0 \leq K_n(t) \leq 1$ .

Доведення. Відмітимо, що

$$a_n - 2b_n = \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2 - b_n = \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2 - \sqrt{4\lambda_n^4 + \frac{3q_n}{\beta}} \geq \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2 - \sqrt{4\lambda_n^4 + \frac{6\lambda_n^2}{\beta} + \frac{9}{\beta^2}} = 0.$$

Крім того,  $b_n - 2\lambda_n^2 \geq 0$ . Значить,  $K_n(t) \geq 0$ . Оскільки  $a_n - 2b_n \geq 0$ , то функція  $K_n(t)$  є неспадною та  $\forall t \in [0, T] K_n(t) \leq K_n(T) \leq 1$ , що й потрібно було довести.

Відмітимо, що умову  $q_n \leq \frac{3}{\beta} + 2\lambda_n^2$  можна здобути за рахунок зміни параметра  $\beta$ .

Знаючи функцію  $K_n(t)$ , з рівняння з відокремленими змінними (19) з початковою умовою (22) визначимо функцію

$$\varphi_n(t) = -\frac{4\phi_n b_n e^{b_n(T-t)}}{a_n(e^{2b_n(T-t)} - 1) + 2b_n}. \quad (26)$$

**ЛЕМА 2.** Функція  $\varphi_n(t)$  задовольняє умові:  $|\varphi_n(t)| \leq 2|\phi_n|$ .

Доведення. Оскільки

$$|\varphi_n'(t)| = \frac{4|\phi_n|b_n e^{b_n(T-t)}}{(a_n(e^{2b_n(T-t)} - 1) + 2b_n)^2} (a_n e^{2b_n(T-t)} + a_n - 2b_n) \geq 0,$$

то функція  $|\varphi_n(t)|$  є неспадною, тобто  $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(T)| = 2|\phi_n|$ , що й потрібно було довести.

Враховуючи (15) та (17), отримуємо, що

$$p_n(t) = -\frac{1}{2\beta} (2K_n(t)u_n(t) + \varphi_n(t)), \quad (27)$$

де функції  $K_n(t)$  та  $\varphi_n(t)$  визначаються формулами (25) та (26), відповідно. Після підстановки функції  $p_n(t)$  у вигляді (27) у рівняння (8) дістанемо задачу для визначення функції  $u_n(t)$ , з якої випливає, що

$$u_n(t) = e^{-\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right) d\tau} \left( g_n - \frac{1}{2\beta} \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right) ds} d\tau \right). \quad (28)$$

Таким чином, керування  $p_n(t)$  однозначно визначає розв'язок задачі (8).

**ТЕОРЕМА.** Керування (27), де функція  $u_n(t)$  визначається формулою (28), належить простору  $L_2[0, T]$ .

Доведення. Оцінимо

$$\begin{aligned} \int_0^T u_n^2(t) dt &= \int_0^T e^{-2\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right) d\tau} \left( g_n - \frac{1}{2\beta} \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right) ds} d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T e^{-2\int_0^t \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta}\right) d\tau} \left( g_n^2 + \frac{1}{4\beta^2} \left( \int_0^t |\varphi_n(\tau)| e^{\int_0^\tau \left(\lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta}\right) ds} d\tau \right)^2 \right) dt. \end{aligned}$$

З використанням результатів лем 1 та 2 одержимо, що

$$\int_0^T u_n^2(t) dt \leq 2 \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t} \left( g_n^2 + \frac{\phi_n^2}{\beta^2} \left( \int_0^t e^{\left(\lambda_n^2 + \frac{1}{\beta}\right)\tau} d\tau \right)^2 \right) dt \leq$$

$$\leq 2 \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t} \left( g_n^2 + \frac{\phi_n^2 e^{2\left(\lambda_n^2 + \frac{1}{\beta}\right)t}}{\beta^2 \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{\beta}\right)^2} \right) dt \leq \frac{g_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4}.$$

З врахуванням (27) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \int_0^T p_n^2(t) dt &= \frac{1}{4\beta^2} \int_0^T (2K_n(t)u_n(t) + \varphi_n(t))^2 dt \leq \frac{1}{2\beta^2} \int_0^T (4K_n^2(t)u_n^2(t) + \varphi_n^2(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\beta^2} \left( 4 \left( \frac{g_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right) + 2 \frac{\phi_n^2}{\lambda_n^2} \right) = \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\phi_n^2 + 2g_n^2}{\lambda_n^2} + 2 \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right) < \infty, \end{aligned}$$

тобто одержане нами керування є дійсно допустимим.

Таким чином, з допомогою апроксимації початкової задачі скінченновимірною системою, ми отримали такі наближення для функцій  $u(t, x)$  та  $p(t, x)$ , відповідно:

$$u^N(t, x) = \sum_{n=1}^N u_n(t) X_n(x), \quad (29)$$

$$p^N(t, x) = \sum_{n=1}^N p_n(t) X_n(x). \quad (30)$$

При цьому, як випливає з теореми,  $\forall N \quad p^N(t, x) \in L_2(D)$ .

Крім того, з останньої оцінки, отриманої в теоремі, випливає, що  $\int_0^1 (p^{N_1}(t, x) - p^{N_2}(t, x))^2 dx \rightarrow 0$

рівномірно по  $t$  при  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ , тобто існує гранична функція для послідовності наближень

$\{p^N(t, x)\}_{N=1}^\infty$ , яка дорівнює  $p(t, x) = \sum_{n=1}^\infty p_n(t) X_n(x)$ . А оскільки при  $N_1 \leq N_2$

$$\|p^{N_1}(t, x) - p^{N_2}(t, x)\|_{L_2}^2 = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \int_0^T p_n^2(t) dt \leq \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\phi_n^2 + 2g_n^2}{\lambda_n^2} + 2 \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right) \rightarrow 0$$

при  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ , тоді в силу повноти простору  $L_2(D)$  гранична функція  $p(t, x)$  належить цьому простору.

У [1] показано, що послідовність (29) фундаментальна у просторі  $W_2^{0,1}(D)$  та має своєю границею функцію (5), яка є єдиним узагальненим розв'язком задачі (1)-(3). У просторі  $W_2^{0,1}(D)$  будемо розглядати скалярний добуток

$$(u, v)_{W_2} = \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} dx dt + \alpha \int_0^T u(t, 1) v(t, 1) dt,$$

порядний норму, еквівалентну звичайній нормі цього простору. Тоді отримаємо таку оцінку відхилення скінченновимірного наближення  $u^N(t, x)$  від розв'язку задачі (1)-(3)  $u(t, x)$  за нормою простору  $W_2^{0,1}(D)$ :

$$\|u(t,x) - u^N(t,x)\|_{W_2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T \lambda_n^2 u_n^2(t) dt \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( g_n^2 + \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^2} \right).$$

Аналогічну оцінку отримаємо для відхилення скінченновимірного наближення функції  $p(t,x)$  у просторі  $L_2(\mathbf{D})$ :

$$\|p(t,x) - p^N(t,x)\|_{L_2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T p_n^2(t) dt \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{\phi_n^2 + 2g_n^2}{\lambda_n^2} + 2 \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right).$$

Крім того, оскільки функціонал (4) можна подати у вигляді  $I[p] = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ , де  $I_n$  визначається

формулою (12), оцінимо, як наближене значення цього функціонала  $I^N[p] = \sum_{n=1}^N I_n$  відхиляється від значення  $I[p]$ :

$$\begin{aligned} I[p] - I^N[p] &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( [u_n(T) - \phi_n]^2 + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \right) = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \left[ e^{-\int_0^T \left( \lambda_n^2 + \frac{K_n(\tau)}{\beta} \right) d\tau} \left( g_n - \frac{1}{2\beta} \int_0^T \phi_n(\tau) e^{\int_0^\tau \left( \lambda_n^2 + \frac{K_n(s)}{\beta} \right) ds} d\tau \right) - \phi_n \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ 2 \left[ 2e^{-2\lambda_n^2 T} \left( g_n^2 + \frac{\phi_n^2}{\beta^2} \left( \int_0^T e^{\left( \lambda_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) \tau} d\tau \right)^2 \right) + \phi_n^2 \right] + \beta \int_0^T p_n^2(t) dt + q_n \int_0^T u_n^2(t) dt \right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ 4g_n^2 + \frac{4\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta^2 \left( \lambda_n^2 + \frac{1}{\beta} \right)^2} + 2\phi_n^2 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\phi_n^2 + 2g_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{2\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right) + q_n \left( \frac{g_n^2}{\lambda_n^2} + \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}}{\beta \lambda_n^4} \right) \right\}, \end{aligned}$$

тобто

$$I[p] - I^N[p] \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ 4g_n^2 + 2\phi_n^2 + \frac{\phi_n^2 + g_n^2(2 + \beta q_n)}{\beta \lambda_n^2} + \frac{\phi_n^2 e^{\frac{2T}{\beta}}(6 + \beta q_n)}{\beta^2 \lambda_n^4} \right\}.$$

Таким чином, початкова задача була зведена до скінченної системи задач, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, здобуті розв'язки цих задач та оцінки відхилення наближених розв'язків від точних.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Богун И.В., Егоров А.И. О решении одной задачи оптимального управления/ Праці П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика-98": -Ч.1.- К.: Видавництво НТУУ «Київський політехнічний інститут», 1998.-С.29-38

УДК 539.3

### ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ FORL ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА

Бувайло Д.П., Толок В.О.

#### ВСТУП

Система FORL [3-7] являє собою новий зручний інструмент для розв'язку конкретних спеціалізованих задач механіки, що побудований за новою ідеологією - працює не в класі задач, а в класі схем їх розв'язків. Метою створення формульної мови й інструментальної системи FORL є бажання дати можливість користувачу-математику в рамках єдиного варіаційного формалізму досліджувати і вирішувати завдання математичної фізики в різній варіаційній постановці і з різним функціональним базисом. Мова FORL максимально наближена до предметної області математика-досліджувача. Система FORL дозволяє передати основну рутинну роботу з програмування процесу комп'ютеру, і в такий спосіб дати можливість користувачу займатися безпосередньо своєю проблемою.

Інструментальна система FORL опирається на абстрактний варіаційний опис математичної задачі і стандартні чисельні методи, не будучи прив'язаною до якогось класу завдань. Розвиток інструментальної системи FORL являє собою не кількісне нарощування множини припустимих для розв'язку задач, але якісне розширення можливостей системи.

Програмування на мові FORL не потребує від користувача істотних навиків у "традиційному" програмуванні, але – уміння користуватися варіаційним численням. Програмування на мові FORL полягає в описі загальної математичної постановки крайової задачі – функціонального базису, варіаційного принципу, граничних [і початкових умов] – і в описі чисельної реалізації розв'язку крайової задачі шляхом комбінування вбудованих в інструментальну систему стандартних чисельних методів.

Дана мова є спадкоємцем мови FORTU-1, розробленої д.т.н. проф. Толоком В.О.[6], і мови FORTU-2, реалізованої к.ф.–м.н. Гоменюком С.І. [7].

Нижче розглядається приклад дослідження за допомогою системи FORL задачі про коливання товстої плити під дією періодичного навантаження, розподіленого по поверхні плити. Плита зв'язана з жорсткою підставою. У центрі плити ослаблена наскрізним круглим отвором.

#### РОЗВ'ЯЗОК

Розв'язок задачі за допомогою системи FORL містить у собі такі етапи:

- Створення геометричної моделі досліджуваного об'єкта і дискретизація його на скінченні елементи. Для дослідження напружено-деформованого стану плити були створені дві геометричні моделі з різним функціональним (скінченно-елементним) базисом. Перша модель була складена з 5456 лінійних тетраедрів. Друга модель була складена з 682 квадратичних тетраедрів. Обидві моделі мали по 1338 вузлових точок.
- Вибір математичної моделі – конкретного варіаційного принципу – для формального опису поставленого завдання.
- Перекладання формального математичного опису на вхідну мову інструментальної системи. Опис схеми вирішення завдання (завдання функціоналу, гіпотез, граничних і початкових умов, констант і т.д.) у програмі на мові FORL(див. нижче).

- Виконання програми користувача FORL-інтерпретатором – підсистемою, відповідальною за синтаксичний аналіз і інтерпретацію інструкцій на мові FORL. На цьому етапі проводяться всі описані у вхідній схемі обчислення – будуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що відповідають різним описаним у програмі функціоналам, викликаються різні чисельні процедури. Якщо схема вирішення завдання була задана коректно, то інтерпретатор генерує листинг, що містить як отримане чисельне вирішення завдання (наприклад, зміщення, якщо задача розв'язувалась у переміщеннях), так і значення усіх функцій, описаних користувачем і залежать від шуканих величин (наприклад, деформації, напруги і т.п.).
- Аналіз отриманих чисельних результатів за допомогою вбудованої в систему FORL підсистеми візуального аналізу. Підсистема візуального аналізу містить ряд процедур, що дозволяють користувачу в зручній і наочній формі побачити розподіл функції по тілу, зміну геометрії тіла, диференціальні властивості розподілу, значення функції в будь-якій точці тіла і т.п.

Слід зазначити, що FORL-система спроектована так, що якщо на якомусь етапі її роботи були отримані результати, що не задовольняють користувача, то він може в інтерактивному режимі вносити необхідні зміни, для одержання потрібного результату.

### МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЗАДАЧІ

Основні розв'язувальні рівняння у задачах теорії пружності можуть бути виведені й отримані безпосередньо з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0,$$

де  $T$  - кінематична енергія,  $\Pi$  - потенційна енергія,  $A$  - робота зовнішніх і внутрішніх сил [1,2].

$$\Pi = \int_v (\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta \sigma_{zz} + \varepsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + \varepsilon_{xz} \delta \sigma_{xz} + \varepsilon_{yz} \delta \sigma_{yz}) dv$$

$$T = \int_v \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \delta \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \delta \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \delta \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) dv$$

$$A = \int_v (F_x \delta u_x + F_y \delta u_y + F_z \delta u_z) dv$$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \cos(\omega t),$$

де  $u_i$  - переміщення,  $\sigma_{ij}$  - компоненти тензора напруг,  $\varepsilon_{ij}$  - компоненти тензора деформацій,  $F_i$  - компоненти навантаження,  $\rho$  - щільність,  $t$  - час.

### ПРОГРАМА НА ВХІДНІЙ МОВІ FORL

// Завантаження з файла інформації про геометричну модель об'єкта

OBJECT Obj("object.dat") BEGIN

ARGUMENT x,y,z; // координатні осі

RESULT u,v,w; // базисні величини, що варіюються

// Умови жорсткого защемлення на нижній підставі

u(z==0.0) = 0.0; v(z==0.0) = 0.0; w(z==0.0) = 0.0;

CONSTANT E = 1.0, // Безрозмірний модуль пружності

n = 0.3, // Коефіцієнт Пуассона

Rho = 1.0, // Безрозмірний розмір щільності

C0 = SQRT( E\*((1-n)/((1+n)\*(1-2\*n))) /Rho ),

lambda = E\*n / ((1.0+n)\*(1.0-2.0\*n)), mu = E\*0.5 / (1.0+n),

D = lambda+2\*mu, H = lambda, X = mu;

// величини, що варіюються – формули від базисних

```

VARIATION Exx = DIFF(u,x), Eyy = DIFF(v,y), Ezz = DIFF(w,z);
VARIATION Exy = DIFF(u,y) + DIFF(v,x);
VARIATION Exz = DIFF(u,z) + DIFF(w,x);
VARIATION Eyz = DIFF(v,z) + DIFF(w,y);
VARIATION Sxx = D*Exx + H*Eyy + H*Ezz;
VARIATION Syy = H*Exx + D*Eyy + H*Ezz;
VARIATION Szz = H*Exx + H*Eyy + D*Ezz;
VARIATION Sxy = X*Exy, Sxz = X*Exz, Syz = X*Eyz;
// Функція, що описує навантаження, прикладене до об'єкта.
FUNCTION Right = IF(ABS(z-10)<0.01, -0.1, 0.0);
FUNCTION SXX=0.0, SYY=0.0, SZZ=0.0, SXY=0.0, SXZ=0.0, SYZ=0.0;
FUNCTION Px=0.0,Py=0.0,Pz=0.0;
FUNCTION Dx=0.0,Dy=0.0,Dz=0.0;
//Опис функціонала, необхідного для побудови матриці жорсткості
FUNCTIONAL Uc =
    0.5*(VMInteg(Sxx,Exx) + VMInteg(Syy,Eyy) + VMInteg(Szz,Ezz)
        + VMInteg(Sxy,Exy) + VMInteg(Sxz,Exz) + VMInteg(Syz,Eyz));
//Опис функціонала, необхідного для побудови матриці інерції
FUNCTIONAL Um = 0.5*(VMInteg(u,u) + VMInteg(v,v) + VMInteg(w,w));
// Опис функціонала для побудови вектора варіації віртуального навантаження
FUNCTIONAL Ur = VRWInteg(w,Right);
// Визначення досліджуваної частоти
CONSTANT T = 10.0 * 2.0 / C0, W = 2.0 * 3.1415926 / T, W2 = W * W * 0.3;
// Створення матриць інерції і жорсткості
MATRIX C(Uc), M(Um), V = C + W2 * M;
VECTOR R(Ur), P, Tmp;
Tmp = R;
// Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь і визначення
// розподілу інтенсивностей амплітуд в об'ємі тіла
SOLUTION(V, Tmp, R, P);
R >> u,v,w; // Розподіл результатів по базисних функціях
// Обчислення функцій, що описують ПДВ одним з вбудованих методів
SXX = MIDDLE(Sxx); SYY = MIDDLE(Syy); SZZ = MIDDLE(Szz);
SXY = MIDDLE(Sxy); SXZ = MIDDLE(Sxz); SYZ = MIDDLE(Syz);
// Визначення деформацій для наступного візуального аналізу
TRANSFORM u,v,w;
//Запис усіх результатів у спеціальному форматі
SAVELIST();
// Закінчення обробки об'єкта Obj
END

```

## РЕЗУЛЬТАТИ

Рисунки 1-9 були створені за результатами розрахунку за допомогою підсистеми візуалізації, реалізованої як частина системи FORL. Апарат візуального аналізу наочно відображає процеси поширення хвильових явищ на поверхні і – за допомогою розрізів – усередині досліджуваного тіла. За допомогою градацій сірого кольору показаний розподіл досліджуваної функції по розмірі. На рисунках подані для порівняння результати розрахунків по обох моделях. Показано розподіл амплітуд і максимальних нормальних напруг.

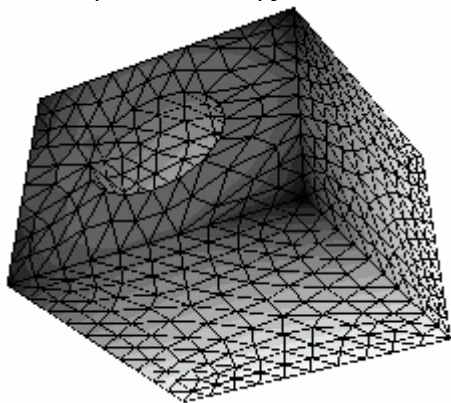


Рис. 1. Амплітуда  $U_z$   
(лінійна апроксимація)

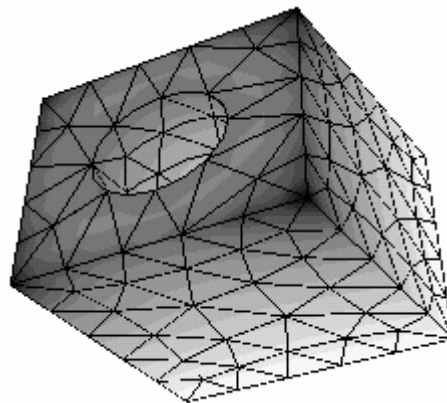


Рис. 2. Амплітуда  $U_z$  (квадратична апроксимація)

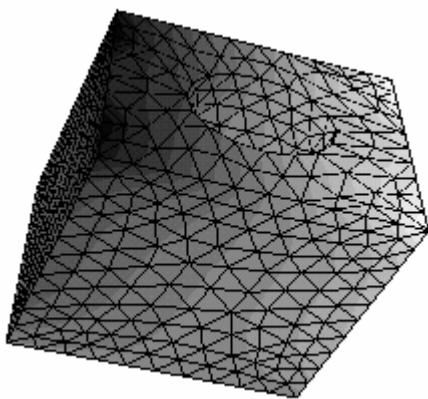


Рис. 3. Амплітуда  $U_y$   
(лінійна апроксимація)

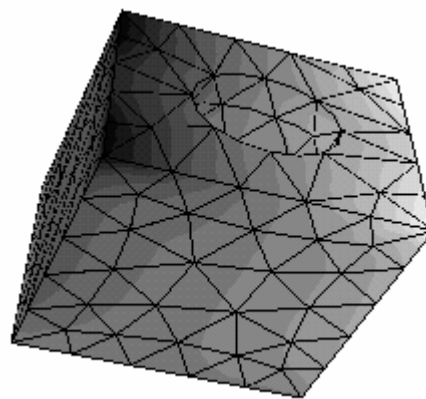


Рис. 4. Амплітуда  $U_y$   
(квадратична апроксимація)

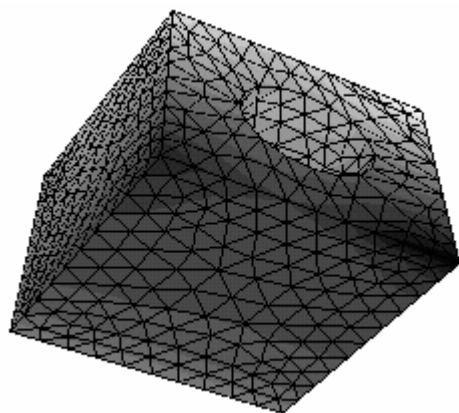


Рис. 5. Амплітуда  $U_x$   
(лінійна апроксимація)

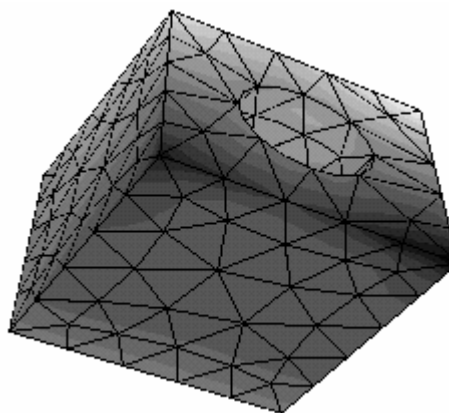


Рис. 6. Амплітуда  $U_x$   
(квадратична апроксимація)



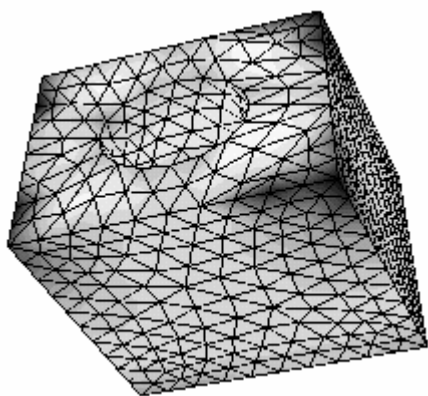


Рис. 7. Макс. норм. напруги  $S_{zz}$   
(лінійна апроксимація)

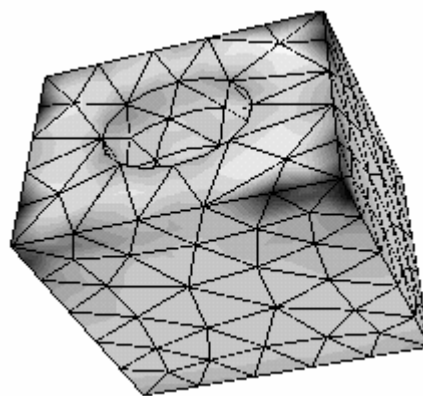


Рис. 8. Макс. норм. напруги  $S_{zz}$   
(квадратична апроксимація)

Приведемо для порівняння максимальні значення зображених на рисунках функцій для двох моделей при значеннях фізичних параметрів, приведених у програмі.

Функція	Лінійна модель	Квадратична модель
Амплітуда $U_x$	0.1874	0.2200
Амплітуда $U_y$	0.1784	0.2260
Амплітуда $U_z$	0.7549	0.9599
Макс. норм. напруги $S_{zz}$	0.1433	0.2047

Кількісні розбіжності складають від 14% до 29%. Є задовільний якісний збіг результатів для двох моделей.

Рис. 9 дає представлення про можливість дослідження об'ємного розподілу за допомогою перетинів. Площина розрізу підкреслена за допомогою ізоліній, що виділяють переходи колірної градації.

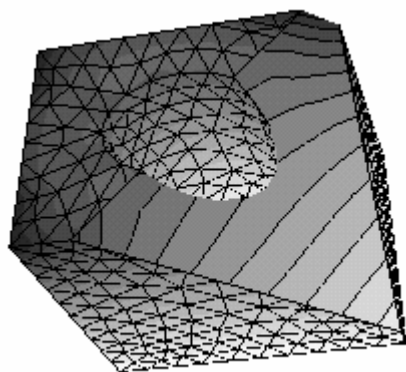


Рис. 9. Амплітуда  $U_z$   
(лінійна апроксимація, перетин)

Безсумнівною перевагою інструментальної системи FORL є легкість внесення змін у програму на вхідній мові системи, можливість швидкого переходу від одного функціонального базису (лінійного) до іншого (квадратичного), від однієї форми зовнішнього навантаження до іншої. По суті, описана вище програма реалізує цілий клас задач, що відрізняються параметрами, що варіюються. Видозмінюючи опис крайового завдання, користувач має можливість у діалоговому режимі досліджувати динамічні характеристики об'єкта, що конструюється.

Система FORL – новий потужний інструмент, придатний для вирішення сучасних завдань конструювання і комп'ютерного моделювання. Існуючі програмні комплекси для розрахунку задач механіки твердого тіла, що деформується – COSMOS, ANSYS, і ін. – націлені на масове вирішення типових завдань із цілком визначеною математичною моделлю. Перехід до іншої математичної моделі є для них часто неможливим. Але конструювання саме по собі не є стандартизованим тривіальним процесом. Система FORL саме спрямована на те, щоб дати інженеру можливість уточнювати і видозмінювати математичну модель у процесі конструювання. Вона може послужити доповненням до наявних програмних комплексів на пошуковому етапі конструювання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Розин Л.А. Вариационная постановка задач для упругих систем.– Л.: Из-во Ленинградского гос. ун-та.– 1978. –265 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.– М.: Мир.– 1987. – 444 с.
3. Gomenyuk S.I., Mukhin V.V., Tolok A.V. The instrumental system of solution and analysis of mathematical physics problems through method of finite elements (MFE).– XXII International school and conference on computer aided design – CAD-95.– Ukraine, Crimea, Yalta-Gurzuff, May 4-14,1995. С. 88-93
4. Buvaylo D.P.,Gomenyuk S.I.,Tolok A.V.,Tolok V.A. Instrumental System for the analyses of the problems of Theoretical and Applied Mechanics. Zbornik Rezimea Jumen Vrnjačka Banja'97 Abstracts Of The Yuctam Vrnjačka Banja'97 XXII Yugoslay Congress Of Theoretical and Applied Mechanics June 2.–June 7, 1997. С. 39-41
5. Tolok A.V.,Gomenyuk S.I. The instrumental system of Mechanics Problems Analysis of the deformed Solid Body. Internationales Kolloquium über Anwendungen Der Informatik Und Mathematik In Architektur Und Bauwesen.– Bauhause Universität Weimar . 1997.
6. Толлок В.А. Алгоритмическая система решения краевых задач теории упругости и пластичности, Автореферат на соискание уч. степени доктора техн. наук.– Ташкент. – 1972.– 265 с.
7. Гоменюк С.И., Толлок А.В., Толлок В.А. Инструментальная система анализа задач математической физики методами конечных элементов. В сб. Труды конференции ”САПР-96”.– М.: 1996. С. 48-53

УДК 519.6

## О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ О ЛЕСАХ

Винцер О.М.

### 1. ОПИСАНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается такой случай векторной, т.е. многокритериальной задачи о лесах, как задача покрытия графа звездами [1]. Исходные данные такой задачи определяются  $n$ -вершинным графом  $G = (V, E)$ , в котором каждому ребру  $e \in E$  приписаны веса  $w_v(e) > 0$ ,  $v = 1, 2, \dots, N$ . Допустимым решением является такой остовный подграф [1]  $x = (V, E)$ ,  $E_x \subseteq E$ , в котором каждая компонента связности в  $x$  является  $h$ -вершинной звездой ( $n$ кратно  $h$ );  $X = \{x\}$  - множество всех допустимых решений (МДР). На МДР  $X$  определена векторная целевая функция (ВЦФ):

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x)), \quad (1)$$

состоящая из критериев вида MINSUM

$$F_v(x) = \sum_{e \in E_x} \omega_v(e) \rightarrow \min, \quad v = 1, 2, \dots, N_1, \quad N_1 \leq N \quad (2)$$

или из критериев вида MINMAX

$$F_v(x) = \max_{e \in E_x} \omega_v(e) \rightarrow \min, \quad v = N_1+1, \dots, N \quad (3)$$

При  $N \geq 2$  ВЦФ (1)–(3) определяет на МДР  $X$  паретовское множество (ПМ)  $\tilde{X} \subseteq X$  [1]. Искомым решением данной векторной задачи является так называемое полное множество альтернатив (ПМА)  $X^o$ . Подмножество  $X^o \subseteq \tilde{X}$  называется ПМА, если его мощность  $|X^o|$  минимальна и при этом выполняется равенство  $F(X^o) = F(\tilde{X})$ , где  $F(X^*) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x)): x \in X^*\} \forall X^* \subseteq X$ .

Термином “задача 1” условимся называть такой случай задачи покрытия графа звездами, который можно описать следующим образом:

- МДР  $X$  определяется множеством типовых графов  $H$ , состоящих из одной  $h$ -вершинной звезды;
- ВЦФ  $F(x)$  вида (1) - (3) состоит из двух критериев ( $N=2$ ), причем  $N_1 \leq 1$ , т.е. не более, чем один критерий имеет весовой вид (2), а остальные - минимаксный вид;
- искомым множеством альтернатив является ПМА.

Термином "задача 2" условимся называть такой случай задачи 1, когда в исходном графе  $G=(V,E)$  все ребра имеют одинаковые вторые веса, например,  $w_2(e)=1 \forall e \in E$  и  $N_1=1$ , т.е. первый критерий имеет весовой вид.

Заметим, что задача 2 представляет собой оптимизационную задачу, т.е. ее ПМА  $X^0$  состоит из элемента  $x \in X$ , оптимального по целевой функции

$$F_1(x).$$

## 2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 2

Рассматривая задачу 2, считаем, что  $n$  кратно  $h$ . Пусть  $n$ -вершинный граф  $G=(V,E)$  удовлетворяет условиям задачи 2; всякое покрытие  $x=(V, E_x) \in X$  состоит из  $m=n/h=[n/h]$  звезд;  $M=\binom{n}{m}$  количество

сочетаний из  $n=|V|$  элементов множества  $V$  по  $m$ ,  $i=1, 2, \dots$ , - нумерация этих сочетаний;  $W_i$  - подмножество вершин из  $V$ , образующих  $i$ -ое сочетание,  $\xi = \{W_i\}$  - множество всех вариантов этих сочетаний,  $1 \leq i \leq M$ .

Алгоритм  $\alpha_1$  решения задачи 2 состоит из итераций  $i=1, \dots, M, M+1$ , где первые  $M$  вариантов поставлены во взаимно-однозначное соответствие сочетаниям  $W_i \in \xi$ . Каждая итерация  $i \leq M$  состоит из следующих трех этапов.

Этап 1. Строим двудольный граф  $G'_i=(V'_1, V'_2, E')$ , где мощность долей  $|V'_1|=|V'_2|=m(h-1)$ . Множество  $V'_1$  получается путем  $(h-1)$ -кратного дублирования каждой из вершин сочетания  $W_i \in \xi$ ; полагаем  $V'_2 = \bigcup W_i$ ,  $W_i \subset V$ . Ребра  $e \in E'$  определяются следующим образом. Пусть в данном графе  $G$  существует ребро  $e=(v_1, v_2)$  такое, что  $v_1 \in W_i$  и  $v_2 \in (\bigcup W_i)$ . Тогда в графе  $G'$  каждый  $(h-1)$ -кратный дубль вершины  $v_1$  соединяем ребром с вершиной  $v_2 \in V'_2$  и приписываем этому ребру тот же вес  $w_1(e)$ , что и в графе  $G$ . В противном случае в графе  $G'_i$  ребра вида  $e=(v_1, v_2)$  отсутствуют.

Пусть  $Y_i=\{y\}$  - множество максимальных паросочетаний  $y=(V'_1, V'_2, E_y)$  графа  $G'_i$ .

Этап 2. Находим в  $Y_i$  элемент  $y_i$ , оптимальный по критерию:

$$F_1(y) = \sum_{e \in E_y} w_1(e) \rightarrow \min \quad (4)$$

Если для графа  $G$  МДР  $X$  содержит покрытие, состоящее из звезд, центры которых образуют множество  $W_i$ , то этап 2 заканчивает работу с результатом  $y_i$ , после чего следует этап 3. По построению  $y_i$  представляет собой совершенное паросочетание в  $G'_i$ . В противном случае этап 2, а вместе с ним итерация  $i$  являются безрезультатными, после чего осуществляется итерация  $i+1$ .

Этап 3. Для графа  $G$  строится покрытие  $x_i=(V, E_{x_i}) \in X$  следующим образом: в качестве центров звезд покрытия  $x_i$  фиксируются вершины множества  $W_i \subset V$ . Далее какая-либо вершина  $v' \in W_i$  соединяется с вершиной  $v'' \in (\bigcup W_i)$  тогда и только тогда, когда в совершенном паросочетании  $y_i$  множество его ребер  $E_{y_i}$  содержит ребро вида  $(v', v'')$ .

По завершению итераций  $i=1, \dots, M$  получаем множество  $X_1 \subseteq X$ , которое непусто, если  $X \neq \emptyset$ .

Итерация  $M+1$  осуществляется в случае, если  $X_1 \neq \emptyset$ : в  $X_1$  находим покрытие  $x^0$  минимального веса:

$$F_1(x^0) = \min_{x \in X_1} F_1(x) \quad (5)$$

**Лемма 1.** Если для данного графа  $G$  МДР  $X \neq \emptyset$ , то алгоритм  $\alpha_1$  находит оптимальное решение задачи 1.

Доказательство. Рассмотрим индивидуальную задачу 2 на данном графе  $G$ . Пусть  $x^*$  - один из ее оптимумов. Он представляет собой некоторое множество звезд, совокупность центров которых обозначим через  $W^*$ . Согласно определению  $\alpha_l$  существует  $W_i \in \xi$ , для которого в результате  $i$ -й итерации найдено покрытие  $x_i$ . Принимая во внимание (4), с учетом определения этапов 2 и 3 рассуждением от противного получаем равенство  $F_1(x_i) = F_1(x^*)$  и с учетом (5) - равенство  $F_1(x_i) = F_1(x^0)$ .

Лемма 1 доказана.

Пусть  $c_0$  - независящая от  $n$  константа или растущая и ограниченная сверху функция от  $n$ .

**Лемма 2.** Если  $h \geq n/c_0$ , то вычислительная сложность нахождения оптимума  $x^0$  с помощью алгоритма  $\alpha_l$  ограничена сверху полиномом от входа.

Доказательство. Как известно [2], трудоемкость нахождения оптимального совершенного паросочетания в  $n$  - вершинном графе ограничена сверху полиномом  $O(n^3)$ . Отсюда с учетом определения этапов 1 - 3 трудоемкость одной итерации алгоритма  $\alpha_l$  не превосходит  $O(n^3)$ . Следовательно, трудоемкость алгоритма  $\alpha_l$ :

$\tau(\alpha_l) \leq (M+1) O(n^3)$ , откуда при выполнении условий леммы 5.2 получаем оценку  $\tau(\alpha_l) \leq O(n^{c_0+3})$ ,  $c_1 \leq c_0$ .

Лемма 2 доказана.

### 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим задачу 1 на данном графе  $G \in \mathcal{J}(n, N, 2)$ . Для каждого сочетания  $W_i \in \xi$ ; существует подмножество  $X_i \subseteq X$  всех решений  $x \in X$ , состоящих из звезд, центры которых образуют множество  $W_i$ . ВЦФ  $F(x)$  задачи 1 определяет на  $X_i$  ПМ  $\tilde{X}_i \subseteq X$  и ПМА  $X_i^0 \subseteq X$ .

Используя этапы 1 и 2 итерации  $i$ , строим 2 - дольный граф  $G_i^1$  и рассматриваем для него множество  $Y_i = \{y\}$  всех совершенных паросочетаний. ВЦФ  $F(x)$  определяет ПМ  $\tilde{Y}_i \subseteq Y_i$  и ПМА  $Y_i^0 \subseteq Y_i$ , т.е.  $Y_i^0$  представляет собой искомое МА для соответствующей 2 - критериальной задачи о совершенных паросочетаниях, которую условимся называть "задача 1а".

Из определения этапов 1 - 3 итерации  $i$  получаем, что справедливы следующие два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.** Для всякого графа  $G \in \mathcal{J}(n, N, 2)$  и всякого  $W_i \in \xi$ ; существует взаимнооднозначное соответствие между элементами  $X_i$  и  $Y_i$ . При этом выполняются равенства  $F(Y_i^0) = F(X_i)$  и  $F(Y_i^0) = F(\tilde{Y}_i) = F(\tilde{X}_i) = F(X_i^0)$ .

**Лемма 4.** Для всякого графа  $G \in \mathcal{J}(n, N, 2)$  выполняются следующие соотношения задачи 1:

$$\tilde{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^M \tilde{X}_i \quad \text{и} \quad F(X^0) \subseteq \bigcup_{i=1}^M F(X_i^0).$$

Для решения последовательности вспомогательных задач 1 используем полиномиальный алгоритм  $\alpha_1^0$  [3]. Построим алгоритм  $\alpha_1^*$  решения задачи 1 в соответствии со следующей вычислительной схемой и ее обоснованием. Согласно теореме 1 [3] для каждого  $i=1, \dots, M$  алгоритм  $\alpha_1^0$  находим ПМА  $Y_i^0$  задачи 1, по которому согласно леммам 1 и 3 строятся ПМА  $X_i^0$  для подмножеств  $X_i$ ,  $i=1, \dots, M$ . Согласно лемме 4 путем попарного сравнения решений из объединения  $\bigcup_{i=1}^M X_i^0$  выделяется ПМА  $X^0$  задачи 1 на графе  $G$ . Тогда, в силу леммы 2 и полиномиальности алгоритма  $\alpha_1^0$ ,

**Теорема 1.** Если  $h \geq n/c_0$ , то вычислительная сложность нахождения ПМА задачи 1 с помощью алгоритма  $\alpha_1^*$  ограничена сверху полиномом от входа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика.- 1994.- Т. 6, вып. 1.- С. 3-33.
2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.- М.: Мир, 1985. - 512 с.
3. Перепелица В.А., Сергиенко И.В. К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика . - 1987 . - № 5 . - С. 85 - 93 .

УДК 517:539.3

## НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ СТИСНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПЕРІОДИЧНИМИ ТА ЛОКАЛІЗОВАНИМИ ДЕФЕКТАМИ ТОВЩИНИ

Гришак В.З., Головань О.О.

Питання про вплив дефектів товщини, періодично змінюваних уздовж осьової координати, на розмір критичних зусиль у стиснутій круговій циліндричній оболонці найбільш повно обговорювався в роботі [1]. З позицій лінійної теорії оболонок показано, що в ряді випадків геометричних та жорсткісних параметрів оболонки можливо зниження параметра критичних зусиль у залежності від амплітуди змінення товщини, хоча й в меншій мірі, ніж у залежності від недосконалостей геометричної форми.

У роботах [2,3] показано, що локалізовані недосконалості геометричної форми оболонки рівнонебезпечні, як і недосконалості періодичного типу.

Теоретичний та практичний інтерес має дослідження впливу періодичного та локалізованого змінення товщини оболонки на її стійкість із позицій геометрично нелінійного підходу з метою одержання наближеного аналітико-чисельного розв'язку задачі та вивчення поведінки досліджуваної системи у випадку наявності локалізованих дефектів товщини.

Розглядається кругова циліндрична оболонка радіуса  $R$ , довжини  $L$  та змінної товщини  $h$ . Надалі будемо припускати, що довжина оболонки досить велика і тому  $\frac{L}{R} \gg 1$ . Оболонка знаходиться під дією осьового стискального навантаження  $P_0$ .

У геометрично нелінійній постановці розв'язувальна система диференціальних рівнянь задачі прийме вид [4]:

$$\begin{aligned}
 H^2(\xi) & \left( \frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 F^*}{\partial \eta^4} \right) + 2 \left( \frac{dH}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - \\
 & - H(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left( \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - 2H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left( \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi^3} - \nu \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - \\
 & - 2(1+\nu)H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi \partial \eta^2} = \frac{12(1-\nu^2)L^2}{Rh_0} H^3(\xi) \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \\
 & + 12(1-\nu^2)H^3(\xi) \left( \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right), \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$H^3(\xi) \left( \frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W^*}{\partial \eta^4} \right) + \frac{L^2}{Rh_0} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + 3H^2(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left( \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + 3H^2(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left( \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi^3} + \nu \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + \\
& + 6H(\xi) \left( \frac{dH}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right) + 3H^2(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right) + \\
& + 3(1-\nu)H^2(\xi) \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{P_0 L^2}{D} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} = \\
& = \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2}, \tag{2}
\end{aligned}$$

де  $\xi = \frac{x}{L}$ ,  $\eta = \frac{y}{L}$  - безрозмірні координати в осьовому та круговому напрямках відповідно,

$H(\xi) = \frac{h(x)}{h_0}$  - товщина оболонки,  $W^*(\xi, \eta) = \frac{W(x, y)}{h_0}$  - нормальне переміщення,

$F^*(\xi, \eta) = \frac{\Phi(x, y)}{D}$  - функція напруги,  $h_0$  - номінальна товщина оболонки,  $E$  - модуль пружності,

$\nu$  - коефіцієнт Пуассона,  $D = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$  - циліндрична жорсткість.

Перший член у правій частині рівняння (1) містить безрозмірний параметр  $\frac{L}{h_0}$ . Оскільки ми

припускаємо, що циліндрична оболонка, що розглядається, має велику довжину, то  $\frac{L}{h_0} \gg 1$ .

Позначивши

$$\alpha = \frac{h_0}{L}, \tag{3}$$

де  $\alpha \ll 1$  - малий параметр у порівнянні з одиницею, будемо шукати розв'язок системи (1)-(2), представивши функції напруги і нормального переміщення у вигляді асимптотичних розкладань у ряд за параметром  $\alpha$ :

$$F^*(\xi, \eta) = \alpha^{-1} F_0(\xi, \eta) + F_1(\xi, \eta) + \dots \tag{4}$$

$$W^*(\xi, \eta) = W_0(\xi, \eta) + \alpha W_1(\xi, \eta) + \dots \tag{5}$$

Обмежимося в розкладаннях (4) - (5) тільки двома першими членами розкладання та підставимо їх у рівняння (1). Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра  $\alpha$ , одержуємо систему з двох рівнянь, причому перше з них є лінійним, а друге містить нелінійні члени з  $W_0(\xi, \eta)$ :

$\alpha^0$ :

$$\begin{aligned}
& H^2(\xi) \left( \frac{\partial^4 F_0}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 F_0}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 F_0}{\partial \eta^4} \right) + 2 \left( \frac{dH}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2} \right) - \\
& - H(\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} \left( \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2} \right) - 2H(\xi) \frac{dH}{d\xi} \left( \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi^3} - \nu \frac{\partial^3 F_0}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) -
\end{aligned}$$

$$-2(1+\nu)H(\xi)\frac{dH}{d\xi}\frac{\partial^3 F_0}{\partial\xi\partial\eta^2} = \frac{12(1-\nu^2)L}{R}H^3(\xi)\frac{\partial^2 W_0}{\partial\xi^2}, \quad (6)$$

$\alpha^1$  :

$$\begin{aligned} H^2(\xi)\left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4 F_1}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + \frac{\partial^4 F_1}{\partial\eta^4}\right) + 2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\xi^2} - \nu\frac{\partial^2 F_1}{\partial\eta^2}\right) - \\ - H(\xi)\frac{d^2 H}{d\xi^2}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\xi^2} - \nu\frac{\partial^2 F_1}{\partial\eta^2}\right) - 2H(\xi)\frac{dH}{d\xi}\left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial\xi^3} - \nu\frac{\partial^3 F_1}{\partial\xi\partial\eta^2}\right) - \\ - 2(1+\nu)H(\xi)\frac{dH}{d\xi}\frac{\partial^3 F_1}{\partial\xi\partial\eta^2} = \frac{12(1-\nu^2)L}{R}H^3(\xi)\frac{\partial^2 W_1}{\partial\xi^2} + \\ + 12(1-\nu^2)H^3(\xi)\left(\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 W_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 W_0}{\partial\eta^2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Використовуючи метод розділу змінних, будемо шукати розв'язок рівнянь (6) - (7) у такій формі:

$$F_0(\xi, \eta) = f(\xi)\cos(N\eta), \quad W_0(\xi, \eta) = w_0(\xi)\cos(N\eta), \quad (8)$$

$$F_1(\xi, \eta) = \hat{f}(\xi)\cos(\hat{N}\eta), \quad W_1(\xi, \eta) = w_1(\xi)\cos(\hat{N}\eta), \quad (9)$$

де  $N = \frac{nL}{R}$ ,  $n$  - число хвиль у круговому напрямку, (10)

$$\hat{N} = 2N \quad (11)$$

Підставивши співвідношення (8) - (9) у рівняння (6) - (7) відповідно, потім застосувавши метод Бубнова-Гальоркіна й інтегруючи в межах перетворення змінної  $\eta \in \left[0, \frac{2\pi R}{L}\right]$ , одержуємо звичайні диференціальні рівняння вигляду:

$$\begin{aligned} H^2 f^{(4)} - 2H\frac{dH}{d\xi}f''' + \left[-2N^2H^2 + 2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2 - H\frac{d^2H}{d\xi^2}\right] \cdot f'' + \\ + 2N^2H\frac{dH}{d\xi}f' + \left[N^4H^2 + 2\nu N^2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2 - \nu N^2H\frac{d^2H}{d\xi^2}\right] \cdot f = \\ = 4c^2z^2\alpha H^3w_0'' , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} H^2 \hat{f}^{(4)} - 2H\frac{dH}{d\xi}\hat{f}''' + \left[-2\hat{N}^2H^2 + 2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2 - H\frac{d^2H}{d\xi^2}\right] \cdot \hat{f}'' + \\ + 2\hat{N}^2H\frac{dH}{d\xi}\hat{f}' + \left[\hat{N}^4H^2 + 2\nu \hat{N}^2\left(\frac{dH}{d\xi}\right)^2 - \nu \hat{N}^2H\frac{d^2H}{d\xi^2}\right] \cdot \hat{f} = \\ = 4c^2z^2\alpha H^3w_1'' + 4c^2N^2H^3\left(-\frac{1}{2}\left(w_0'\right)^2 + \frac{1}{2}w_0w_0''\right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } c = \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad z = \frac{L}{\sqrt{Rh_0}}. \quad (14)$$

Будемо припускати, що товщина оболонки змінюється уздовж осьової координати за законом:

$$H(\xi) = 1 - \varepsilon \cos(2m\xi) \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right), \quad (15)$$

де  $m = \frac{pL}{R}$ ,  $p$  - число півхвиль в осьовому напрямку,  $\varepsilon$  - показник зміни амплітуди товщини оболонки,  $\mu^2$  - параметр, що впливає на характер локалізації.

Відповідно до [2] та (15) представимо функції  $w_0(\xi)$  й  $w_1(\xi)$  у такому виді:

$$w_0(\xi) = [A \cos(m\xi) + B \cos(3m\xi)] \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right), \quad (16)$$

$$w_1(\xi) = [C \cos(\bar{m}\xi) + D \cos(3\bar{m}\xi)] \cdot \exp(-\mu^2\xi^2), \quad (17)$$

де  $\bar{m} = 2m$ ,  $A, B, C, D$  - деякі довільні постійні.

Як і в лінійному випадку [5], функції  $f(\xi)$  і  $\hat{f}(\xi)$  будуть знайдені у вигляді асимптотичних розкладань за малими параметрами  $\varepsilon$  і  $\beta^2 = \frac{\mu^2}{m^2}$ :

$$f(\xi) = [\mathcal{F}_0(\xi) + \beta^2 \mathcal{F}_1(\xi)] \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right) + \varepsilon \varphi_1(\xi) \exp(-\mu^2\xi^2), \quad (18)$$

$$\hat{f}(\xi) = \left[ \hat{\mathcal{F}}_0(\xi) + \beta^2 \hat{\mathcal{F}}_1(\xi) \right] \exp(-\mu^2\xi^2) + \varepsilon \hat{\varphi}_1(\xi) \exp\left(-\frac{3}{2}\mu^2\xi^2\right). \quad (19)$$

У наданих вище виразах ми зневажаємо членами порядку  $\varepsilon^2$ ,  $(\beta^2)^2$ ,  $\varepsilon \cdot \beta^2$  і більш високих порядків. Підставляючи співвідношення (15), (16) - (17), (18) - (19) та їхні похідні у диференціальні рівняння (12) - (13), прирівнюючи коефіцієнти при параметрах  $\varepsilon^0$ ,  $\beta^2$  і  $\varepsilon^1$ , одержуємо систему диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами для визначення невідомих функцій  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \varphi_1$  і  $\hat{\mathcal{F}}_0, \hat{\mathcal{F}}_1, \hat{\varphi}_1$ . Для випадку, коли форма вигину має однакові хвильові числа  $n$  та  $p$  [1,3], тобто

$$p = n = \frac{p_0}{2}, \quad p_0 = \sqrt{2c \frac{R}{h_0}} - \text{ціле}, \quad (20)$$

розв'язки системи будуть мати вигляд:

$$\mathcal{F}_0 = A \cdot \left( -\frac{c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(m\xi) + B \cdot \left( -\frac{0.36c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(3m\xi), \quad (21)$$

$$\mathcal{F}_1 = A \cdot \left( \frac{c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(m\xi) + B \cdot \left( -\frac{0.0688c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(3m\xi) +$$



$$+ B \cdot \left( -\frac{0.192c^2 z^2 \alpha}{m} \right) \xi \sin(3m\xi) , \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & A \cdot \left( -\frac{0.5\nu c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(m\xi) + B \cdot \left( \frac{0.72c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.18\nu c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(m\xi) + \\ & + A \cdot \left( \frac{0.08c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.02\nu c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(3m\xi) + \\ & + B \cdot \left( \frac{0.06816568c^2 z^2 \alpha}{m^2} - \frac{0.0010650887\nu c^2 z^2 \alpha}{m^2} \right) \cos(5m\xi) , \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 = & -0.125c^2(A^2 + 9B^2) - 0.25 \left( \frac{c^2 z^2 \alpha C + c^2 m^2 AB}{m^2} \right) \cos(2m\xi) - \\ & - 0.01c^2 AB \cos(4m\xi) - \left( \frac{0.09c^2 z^2 \alpha D}{m^2} \right) \cos(6m\xi) , \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 = & (0.0625c^2 A^2 + 1.0625c^2 B^2) - 0.5mc^2 AB \xi \sin(2m\xi) - \\ & - (0.015625c^2 A^2 + 0.28125c^2 AB) \cos(2m\xi) - \\ & - 0.0126c^2 AB \cos(4m\xi) - 0.016mc^2 AB \xi \sin(4m\xi) - \\ & - 0.000625c^2 B^2 \cos(6m\xi) , \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 = & (-0.15625c^2 AB - 0.125c^2 \nu AB) + (0.0815625c^2 AB - \\ & - 0.00125c^2 \nu AB - 0.03125c^2 \nu (A^2 + 9B^2)) + \\ & + 0.03125c^2 A^2 + 0.28125c^2 B^2) \cos(2m\xi) + \\ & + (0.03375c^2 AB - 0.005c^2 \nu AB) \cos(4m\xi) + \\ & + (0.0052625c^2 AB - 0.00005c^2 \nu AB) \cos(6m\xi) . \end{aligned} \quad (26)$$

Підставимо отримані розв'язки (21-26) з урахуванням (15) і (16) - (17) у рівняння (2), попередньо замінивши в ньому

$$\frac{P_0 L^2}{D} = 4\lambda cz^2 , \quad (27)$$

де  $\lambda = \frac{P_0}{P_0}$  - параметр навантаження,  $P_0 = \frac{Eh_0^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$  - класичне стискальне навантаження для

однорідної оболонки постійної товщини  $h_0$ .

Застосувавши після підстановки метод Бубнова-Гальоркіна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi \frac{R}{L}} \left\{ \Omega_1 - \Omega_2 \right\} \begin{pmatrix} \cos(\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(m\eta) \\ \cos(3\xi) \exp\left(-\frac{\beta^2 \xi^2}{2}\right) \cos(m\eta) \\ \cos(2\xi) \exp\left(-\beta^2 \xi^2\right) \cos(2m\eta) \\ \cos(6\xi) \exp\left(-\beta^2 \xi^2\right) \cos(2m\eta) \end{pmatrix} d\xi d\eta = 0, \quad (28)$$

де  $\Omega_1, \Omega_2$  - ліва і права частини рівняння (2) відповідно,  $\xi = m\xi$ , одержимо нелінійну систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих  $A, B, C, D$  і  $\lambda$ . Надаючи невідому  $A$  конкретні числові значення, будемо одержувати відповідні йому значення параметра навантаження  $\lambda$  [6]. Залежності параметра навантаження  $\lambda$  від параметра амплітуди переміщення  $A$  при різних значеннях показників зміни амплітуди товщини  $\varepsilon$  та характеру локалізації  $\beta^2$  ( $\beta^2 = 0$  відповідає випадку періодичної змінюваності товщини оболонки) подані на рис.1.

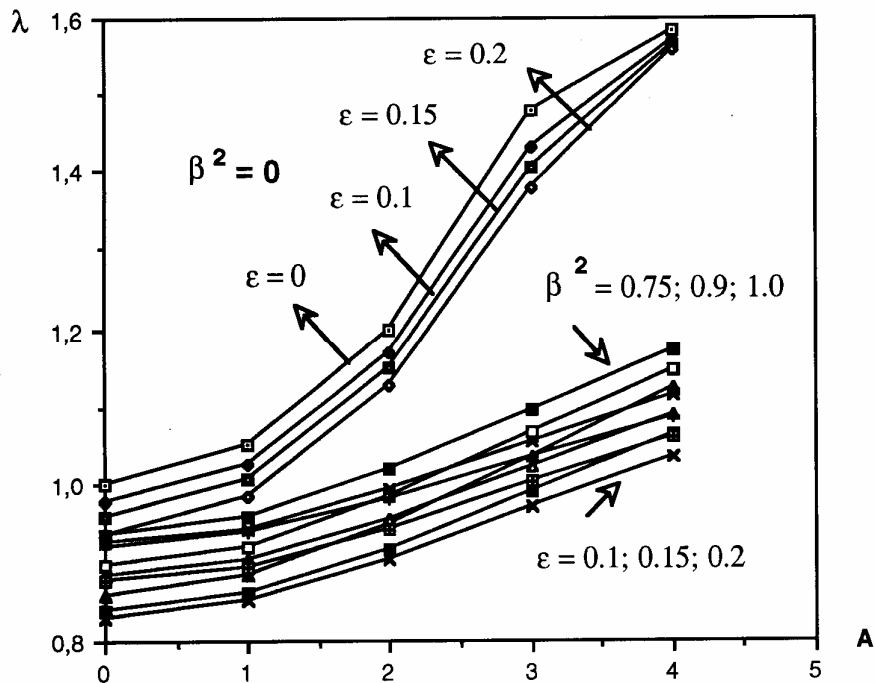


Рис.1. Залежність параметра  $\lambda$  від параметра амплітуди переміщення  $A$

Як випливає з чисельних розрахунків і зведених залежностей, при локалізованих дефектах товщини спостерігається зниження параметра критичного навантаження до 20% у порівнянні з ідеальною оболонкою. У закритичному стані це зниження може бути істотно більше (для значення  $A = 4$ , наприклад, воно складає  $\approx 40\%$ ), при цьому закритична крива трансформується із суперкритичної у транскритичну [7].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Koiter W.T., Elishakoff Y.W., Starnes J.H. "Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell of Variable Thickness", Int.J. Solids Structures, №6, 1994, 797-805.
2. Koiter W.T. "The Influence of More or Less Localized Short-wave Imperfections on the Buckling of Circula Cylindrical Shells under Axial Compression (in a first approximation)", Rep. WTHD 534, Delft, May 1974// Комплексний аналіз і його додатки.-М:Наука, 1978.-С.242-244.
3. Gristchak V.Z. "Asymptotic Formula for the Buckling Stress of Axially Compressed Circula Cylindrical Shells with More or Less Localized Short-wave Imperfections", Rep. WTHD 88, Delft, September 1976// Міцність і довговічність конструкцій.-К.:Наукова думка, 1980.

4. Власов В.З. Избранные труды . -М., 1962.-Т.1.-528с.
5. Грищак В.З., Головань О.О. Постановка та метод розв'язку задачі про вплив локалізованого зміння товщини оболонки на величину критичних зусиль// Вісник Запорізького державного університету. - 1998. -№1.- С.20-25.
6. Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ.-К.: Вища школа, 1983.-286с.
7. Gristchak V.Z. "Bifurcations and Postbuckling Behavior of Vibration of the Nonhomogeneous, Nonlinear Elastic System with Multiple Independent Bifurcation Parameters". Int.J. Solids Structures, Vol.26, № 8,1990, 821-831.

УДК 539.3

## ПРО ОДИН АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН, ПАРАМЕТРИ ЯКИХ ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ЧАСУ.

Грищак В.З., Кабак В.М.

Розглянемо випадок шарнірно обертої пластинки з краями, що вільно зміщуються в площині опорного контуру. Позначимо через  $a$  і  $b$  сторони пластинки, а товщину -  $h = h_0 h^*(\tau)$ . Модуль пружності матеріалу пластинки представимо у вигляді  $E = E_0 E^*(\tau)$ , притому вагу позначимо як  $\delta$ . Припустимо, що пластинка стискається уздовж однієї з сторін статичними зусиллями  $p$ , що прикладаються до граней пластинки. При цьому будемо вважати ці зусилля позитивними у випадку розтягання, а негативними при стиску. Також прийемо, що як вимушуюча сила  $q(\tau)$  на пластинку діє рівномірно розподілене поперечне навантаження, яке залежить від часу. При розгляді будемо враховувати початкові неправильності у формі серединної поверхні.

Ця задача за допомогою методу Бубнова - Гальоркіна збігається до розв'язку неоднорідного нелінійного рівняння другого порядку виду:

$$f''(\tau) + \omega^2(\tau)f(\tau) + \alpha(P(\tau)f^2(\tau) + Q(\tau)f^3(\tau)) = \gamma(\tau), \quad (1)$$

де

$$\omega^2(\tau) = \omega_0^2 \varphi(\tau),$$

тут

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 m^4 \left[ 1 + \left( \frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2}{12 \lambda^2 (1 - \mu^2)} \left( \frac{v h_0}{ab} \right)^2, \quad (2)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2} E^*(\tau) h^*(\tau)^2 - \frac{p^*}{P_0^*} + \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu^2) \left[ 1 + \left( \frac{n\lambda}{m} \right)^4 \right] F_0^2}{\left[ 1 + \left( \frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2} \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2} E^*(\tau),$$

$v = \sqrt{\frac{E_0 g}{\delta}}$  – швидкість поширення поздожніх хвиль у матеріалі пластинки,

$$\alpha = \frac{h_0}{a}, \quad Q(\tau) = \frac{\pi^4 m^4 E^*(\tau)}{16\lambda^2} \left[ 1 + \frac{n^4}{m^4} \lambda^4 \right] \frac{a}{h_0}, \quad P(\tau) = 3F_0 Q(\tau),$$

$$p^* = \bar{p} \frac{a^2 b^2}{v^2 h_0^2}, \quad p_0^* = \frac{\pi^2 m^2 \left[ 1 + \left( \frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2}{12\lambda^2 (1 - \mu^2)},$$

$$\gamma(\tau) = \frac{16ab\omega_0^2}{mn\pi^2 v^2 h(\tau) h_0} \bar{q}^*(\tau) + \frac{\omega_0^2 p^*}{p_0^*} F_0.$$

Розв'язок рівняння (1) визначаємо за допомогою методу подвійного асимптотичного розкладу [1]. Проблема вільних коливань систем із змінними параметрами розглянута в роботі [2]. Розв'язок нелінійного неоднорідного рівняння другого порядку (1) одержуємо у вигляді:

$$f(\tau) = \frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[ K - \frac{\gamma_2}{\omega_0} \right] + \frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[ L + \frac{\gamma_1}{\omega_0} \right] + \alpha \left\{ \frac{G_1(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \times \right.$$

$$\times \left[ \frac{K^2}{\omega_0} P_{112} + \frac{2KL}{\omega_0} P_{122} + \frac{L^2}{\omega_0} P_{222} + \frac{K^3}{\omega_0} P_{1112} + \frac{3K^2L}{\omega_0} P_{1122} + \right.$$

$$\left. + \frac{3KL^2}{\omega_0} P_{1222} + \frac{L^3}{\omega_0} P_{2222} \right] - \frac{G_2(\tau)}{\varphi(\tau)^{\frac{1}{4}}} \left[ \frac{K^2}{\omega_0} P_{111} + \frac{2KL}{\omega_0} P_{211} + \right.$$

$$\left. + \frac{L^2}{\omega_0} P_{221} + \frac{K^3}{\omega_0} P_{1111} + \frac{3K^2L}{\omega_0} P_{2111} + \frac{3KL^2}{\omega_0} P_{2211} + \frac{L^3}{\omega_0} P_{2221} \right] \left. \right\}, \quad (3)$$

де

$$G_1(\tau) = \cos \left( \int_0^\tau \omega_0 \varphi(z)^{\frac{1}{2}} dz \right), \quad G_2(\tau) = \sin \left( \int_0^\tau \omega_0 \varphi(z)^{\frac{1}{2}} dz \right),$$

$$\gamma_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)^{\frac{1}{4}}} G_1(z) dz, \quad \gamma_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{\gamma(z)}{\varphi(z)^{\frac{1}{4}}} G_2(z) dz,$$

$$P_{112} = P_{211} = \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1^2(z) G_2(z) dz, \quad P_{122} = P_{221} = \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1(z) G_2^2(z) dz,$$

$$P_{222} = \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_2^3(z) dz, \quad P_{111} = \int_0^\tau \frac{P(z)}{\varphi(z)^{\frac{3}{4}}} G_1^3(z) dz, \quad (4)$$

$$P_{1112} = P_{2111} = \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^3(z) G_2(z) dz, \quad P_{1122} = P_{2211} = \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^2(z) G_2^2(z) dz,$$

$$P_{1222} = P_{2221} = \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1(z) G_2^3(z) dz, \quad P_{2222} = \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_2^4(z) dz,$$

$$P_{1111} = \int_0^\tau \frac{Q(z)}{\varphi(z)} G_1^4(z) dz.$$

Отриманий нами розв'язок припускає існування коливань пластинки з періодом коливань  $2\pi/\omega(t)$ . У дійсності, для нелінійної системи період повинен істотно залежати від ступеня нелінійності системи. Тому, для того щоб наближений аналітичний розв'язок (3) описував реальну поведінку пластинки, необхідно визначити, як впливають коефіцієнти при нелінійних складових на частоту коливань пластинки. Щоб розв'язати цю задачу, застосуємо методику Ліндштедта - Пуанкаре [3].

Розглядаючи квазістатичну задачу, запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{df^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi f + \alpha P f^2 + \alpha Q f^3 = \alpha \gamma_1, \quad (5)$$

де

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (6)$$

Відповідно до методики Ліндштедта-Пуанкаре перетворимо незалежну перемінну в рівнянні (5):

$$s = \omega \tau. \quad (7)$$

Тоді рівняння (5) прийме вид:

$$\omega^2 \frac{df^2}{ds^2} + \omega_0^2 \varphi f + \alpha (P f^2 + Q f^3) = \alpha \gamma_1. \quad (8)$$

Представимо  $\omega$  і  $f$  у виді рядів по степенях  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2 + \dots, \\ \omega &= \omega_0 \sqrt{\varphi} + \alpha \omega_1 + \alpha^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи розкладання (9) у рівняння (8) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра  $\alpha$ , одержимо систему рівнянь для визначення невідомих функцій  $f_0, f_1, f_2, \omega_1, \omega_2$ :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \varphi f_0'' + \omega_0^2 \varphi f_0 &= 0, \\ \alpha^1 : \quad \omega_0^2 \varphi f_1'' + \omega_0^2 \varphi f_1 &= -2\omega_0 \sqrt{\varphi} \omega_1 f_0'' - P f_0^2 - Q f_0^3 + \gamma_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\alpha^2 : \quad \omega_0^2 \varphi f_2'' + \omega_0^2 \varphi f_2 = -2\omega_0 \sqrt{\varphi} \omega_2 f_0'' - 2\omega_0 \sqrt{\varphi} \omega_1 f_1'' - 2P f_0 f_1 - 3Q f_0^2 f_1 - \omega_1^2 f_0''.$$

Загальний розв'язок першого рівняння системи (10) може бути поданий у вигляді:

$$f_0 = a \cos(s + \psi), \quad (11)$$

де  $a$  і  $\psi$  - довільні постійні.

Тоді друге рівняння системи (10) прийме вид:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \varphi f_1'' + \omega_0^2 \varphi f_1 &= \left( 2\omega_0 \sqrt{\varphi} \omega_1 - \frac{3}{4} Q a^2 \right) a \cos(s + \psi) - \\ &- \frac{P a^2}{2} - \frac{P a^2}{2} \cos 2(s + \psi) - \frac{Q a^3}{4} \cos 3(s + \psi) + \gamma_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Щоб уникнути секулярних членів,  $\omega_1$  вибираємо таким чином:

$$\omega_1 = \frac{3}{8} \frac{Q a^2}{\omega_0 \sqrt{\varphi}}. \quad (13)$$

При цьому  $f_1$  буде мати вид:

$$f_1 = -\frac{Pa^2}{2\omega_0^2\varphi} + \frac{\gamma_1}{\omega_0^2\varphi} + \frac{Pa^2}{6\omega_0^2\varphi} \cos 2(s + \psi) + \frac{Qa^3}{32\omega_0^2\varphi} \cos 3(s + \psi). \quad (14)$$

Підставимо  $f_0$  й  $f_1$  у третє рівняння системи (10). З умови відсутності секулярних членів одержуємо  $\omega_2$  у вигляді:

$$\omega_2 = -\frac{5}{12} \frac{P^2 a^2}{\omega_0^3 \varphi \sqrt{\varphi}} + \frac{P\gamma_1}{\omega_0^3 \varphi \sqrt{\varphi}} + \frac{3}{256} \frac{Q^2 a^4}{\omega_0^3 \varphi \sqrt{\varphi}}. \quad (15)$$

Вираз для визначення частоти нелінійних коливань пластинки запишеться у формі:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\varphi} + \alpha \frac{3}{8} \frac{Qa^2}{\omega_0 \sqrt{\varphi}} + \frac{\alpha^2}{\omega_0^3 \varphi \sqrt{\varphi}} \left( -\frac{5}{12} P^2 a^2 + P\gamma_1 + \frac{3}{256} Q^2 a^4 \right). \quad (16)$$

Тоді

$$\omega^2 = \omega_0^2 \varphi_{NL}, \quad (17)$$

де

$$\varphi_{NL} = \varphi + \alpha \frac{3}{4} \frac{Qa^2}{\omega_0} + \frac{\alpha^2}{\omega_0^4 \varphi} \left( -\frac{5}{6} P^2 a^2 + 2P\gamma_1 + \frac{21}{128} Q^2 a^4 \right). \quad (18)$$

Підставляючи  $\varphi_{NL}$  замість  $\varphi$  у вираз (3) одержимо уточнений наближений аналітичний розв'язок рівняння (1).

Будемо розглядати пластинку з розмірами:  $a = 100\text{cm}$ ,  $b = 100\text{cm}$ ,  $h_0 = 0,5\text{cm}$ , початковий прогин  $w_0 = 0,5\text{cm}$ . Матеріал пластинки - сталь із фізико-механічними характеристиками: модуль пружності  $E_0 = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/cm}^2$ , питома вага  $\delta = 7,8 \text{ kg/cm}^3$ , коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Статичне зусилля приймемо  $p = 50\text{kg}$ . Будемо вважати, що як вимушуюча сила на пластинку діє рівномірно розподілене поперечне навантаження  $q(t) = 0,002 + 0,0003t \text{ kg} \cdot \text{sek/cm}^2$ , а в безрозмірному вигляді  $\bar{q}(\tau) = 2,47 + 0,39\tau$

На рис. 1 - 3 подані результати, здобуті за допомогою уточненого асимптотичного підходу і результати, отримані за допомогою методу Рунге-Кутта.

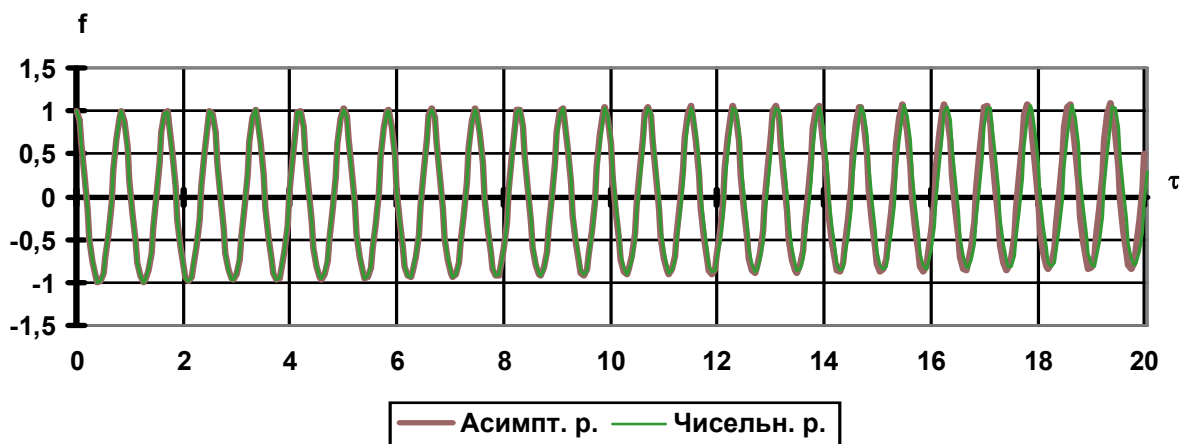


Рис.1 Амплітуда коливань пластинки за часом при  $E(\tau) = E_0$  і  $h(\tau) = h_0$

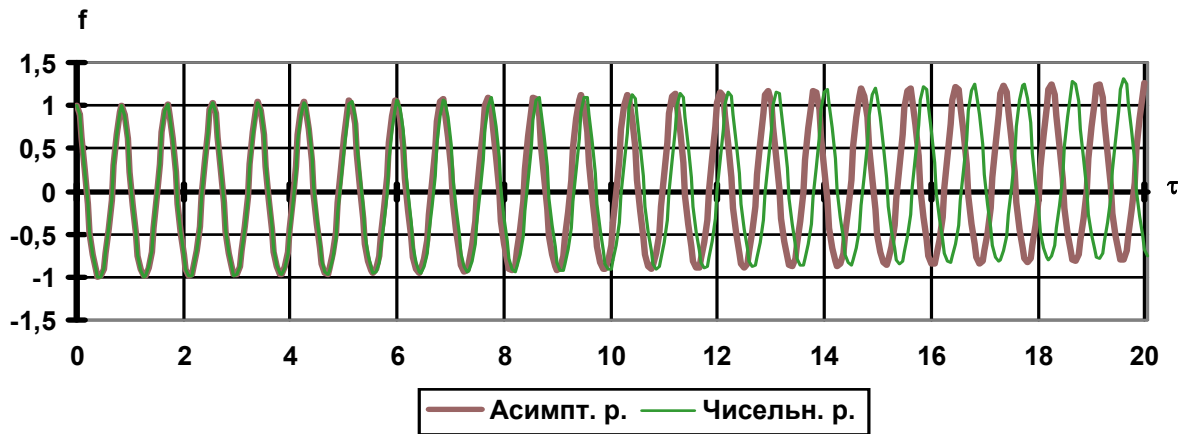


Рис.2 Амплітуда коливань пластинки за часом при  $E(\tau) = E_0(1 - 0,0195\tau)$  і  $h(\tau) = h_0$

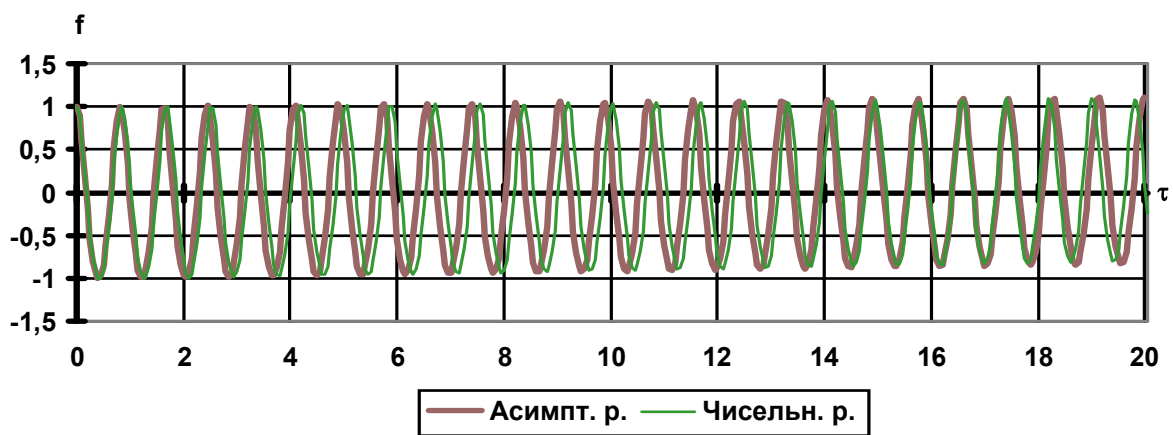


Рис.3 Амплітуда коливань пластинки за часом при  $E(\tau) = E_0$  і  $h(\tau) = h_0(1 - 0,004\tau)$

На рис. 4,5 подані результати, отримані за допомогою асимптотичного підходу при нелінійних ( $\alpha = 0,005$ ) і лінійних ( $\alpha = 0,0$ ) коливаннях пластинки.

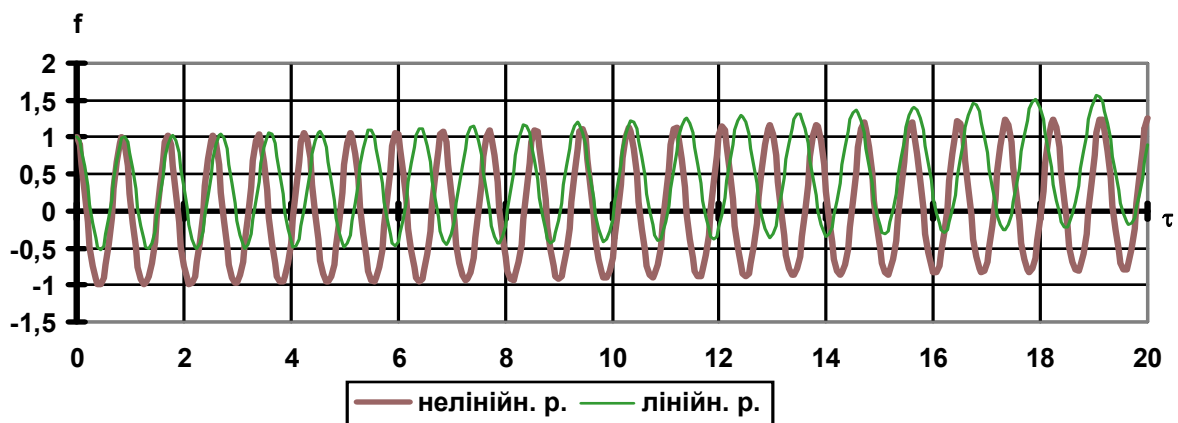


Рис.4 Амплітуда коливань пластинки за часом при  $E(\tau) = E_0(1 - 0,0195\tau)$  і  $h(\tau) = h_0$

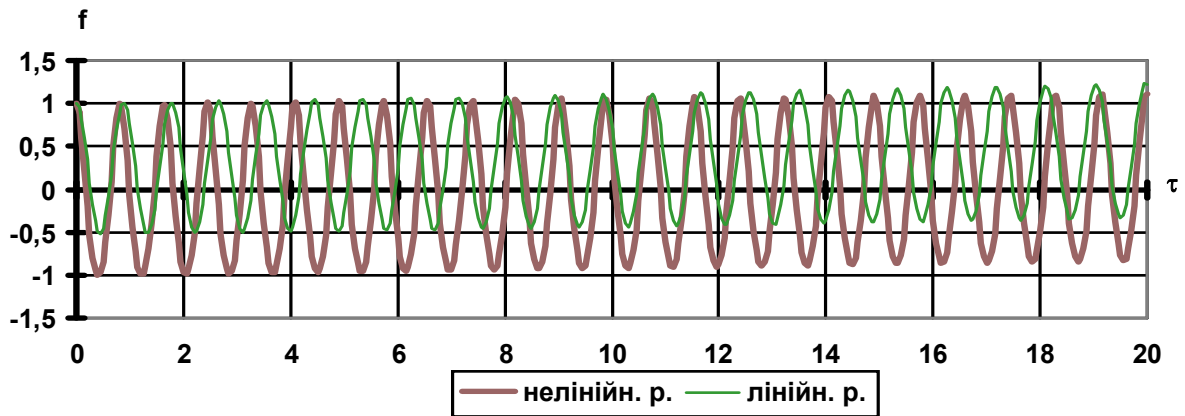


Рис.5 Амплітуда коливань пластинки за часом при  $E(\tau) = E_0$  і  $h(\tau) = h_0(1 - 0,004\tau)$

### ЛІТЕРАТУРА

1. Gristchak V.Z., Kabak V.N. Double Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technische Mechanik. - 1996. - № 4. - P. 285 - 296.
2. Gristchak V.Z., Golovan O.A. Asymptotic Solution for Nonlinear Dynamic of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technische Mechanik. - 1995. - № 3. - P. 183 - 190.
3. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. - М: Мир, 1976. - 456 с.

УДК 539.3+539.5

## ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ІМОВІРНостей НАПРУГ І ЇХНІХ ШВИДКОСТЕЙ ПРИ КОЛИВАННІ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН

Дударьова О.В.

1. Напруги в зовнішніх шарах.

У роботі використовуються формули для напруг у зовнішніх шарах симетричної будівлі тришарової круглої пластинки, через прогин і радіальні переміщення точок зовнішніх шарів [1], які виражені так:

$$\sigma_{r(1,2)} = \pm E_{np} \left\{ \left( \frac{du}{dr} + \mu_{np} \frac{u}{r} \right) \pm \left[ z \pm \left( h + \frac{\delta}{2} \right) \right] \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \mu_{np} \frac{dw}{dr} \right) \right\}; \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta(1,2)} = \pm E_{np} \left\{ \left( \mu_{np} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \pm \left[ z \pm \left( h + \frac{\delta}{2} \right) \right] \left( \mu_{np} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\}.$$

У (1) приведенний модуль пружності і приведенний коефіцієнт Пуассона визначаються по формулах [3].

$$E_{np} = \frac{1 - \nu^2}{h} \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2}; \quad \mu_{np} = \gamma_1 \nu_1 + \gamma_2 \nu_2 + \gamma_3 \nu_3.$$

Тут  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, E_1, E_2, E_3$  - коефіцієнти Пуассона і модулі пружності матеріалів шарів пластинки;  $h_j$  - товщини шарів.



$$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right]^{-1}.$$

Якщо не враховувати вплив поперечного зрушення в середньому шарі, то з [1] одержимо таку залежність між переміщеннями

$$u = - \left( h + \frac{\delta}{2} \right) \frac{dw}{dr} \quad (2)$$

Надалі припускається, що  $h_1 = h_3 = \delta$ ;  $h_2 = 2h$ , тобто розглядається пластинка симетричної будівлі.

Приймаючи до уваги (2), можна (1) записати так:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \mu_{np} \frac{dw}{dr} \right); \\ \sigma_{\theta(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( \mu_{np} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо вираз для нормальних переміщень при коливанні пластинки прийняти у вигляді:

$$w(r, t) = f(t)w(r),$$

то рівності (3) запишуться так:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \mu_{np} \frac{dw}{dr} \right) f(t); \\ \sigma_{\theta(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( \mu_{np} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) f(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Для вільно обертої пластинки з [2] випливає:

$$\frac{dw}{dr} = -4 \frac{r}{R^2} + 4b \frac{r^3}{R^4}; \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{4}{R^2} + 12b \frac{r^2}{R^4},$$

і тоді (4) можна привести до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( -\frac{4}{R^2} (1 + \mu_{np}) + 4b \frac{r^2}{R^2} (3 + \mu_{np}) \right) f(t); \\ \sigma_{\theta(1,2)} &= \pm E_{np} z \left( -\frac{4}{R^2} (1 + \mu_{np}) + 4b \frac{r^2}{R^2} (1 + 3\mu_{np}) \right) f(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для затисненого контура тришарової пластинки маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(1,2)} &= \pm E_{np} z \frac{4}{R^2} \left( \frac{r^2}{R^2} (3 + \mu_{np}) - (1 + \mu_{np}) \right) f(t); \\ \sigma_{\theta(1,2)} &= \pm E_{np} z \frac{4}{R^2} \left( \frac{r^2}{R^2} (1 + 3\mu_{np}) - (1 + \mu_{np}) \right) f(t). \end{aligned} \quad (6)$$

2. Щільності розподілу напруг.

Рівняння коливань тришарової пластинки отримане в [4].

Формули розподілу щільності імовірностей амплітуди і швидкостей мають вигляд:

$$p_1(f(t)) = C_1 \exp\left[-\frac{2}{S_0} \varepsilon B f^2(t)\right], p_2(f(t)) = C_2 \exp\left[-\frac{D_c}{S_0 D_m} \dot{f}^2(t)\right]. \quad (7)$$

Установлюючи залежність між  $f(t)$ ,  $\dot{f}(t)$  і напругами для тришарової круглої пластинки по формулах (7), визначаються їхні щільності імовірності.

Так, із (6), для  $\sigma_{r(1,2)}$  і  $\sigma_{\theta(1,2)}$  маємо:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma_{r(1,2)} \Psi_r(r, z); & f(t) &= \sigma_{\theta(1,2)} \Psi_\theta(r, z); \\ \dot{f}(t) &= \dot{\sigma}_{r(1,2)} \Psi_r(r, z); & \dot{f}(t) &= \dot{\sigma}_{\theta(1,2)} \Psi_\theta(r, z). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, z) &= \left\{ -E_{np} z \frac{4}{R^2} \left( \frac{r^2}{R^2} (3 + \mu_{np}) - (1 + \mu_{np}) \right) \right\}^{-1}; \\ \Psi_\theta(r, z) &= \left\{ -E_{np} z \frac{4}{R^2} \left( \frac{r^2}{R^2} (1 + 3\mu_{np}) - (1 + \mu_{np}) \right) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Підставляючи (8) у (7), одержимо:

$$\begin{aligned} p_1(\sigma_{r(1,2)}) &= C_1 \exp\left\{ -\frac{2\varepsilon}{S_0} B \sigma_{r(1,2)}^2 \Psi_r^2(z, r) \right\}; \\ p_1(\sigma_{\theta(1,2)}) &= C_1 \exp\left\{ -\frac{2\varepsilon}{S_0} B \sigma_{\theta(1,2)}^2 \Psi_\theta^2(z, r) \right\}; \\ p_2(\dot{\sigma}_{r(1,2)}) &= C_2 \exp\left\{ -\frac{D_c}{S_0 D_m} B \dot{\sigma}_{r(1,2)}^2 \Psi_r^2(z, r) \right\}; \\ p_2(\dot{\sigma}_{\theta(1,2)}) &= C_2 \exp\left\{ -\frac{D_c}{S_0 D_m} B \dot{\sigma}_{\theta(1,2)}^2 \Psi_\theta^2(z, r) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналіз (9) показує, що щільності розподілу  $p_1(\sigma_r)$  і  $p_1(\sigma_\theta)$ ,  $p_2(\dot{\sigma}_r)$  і  $p_2(\dot{\sigma}_\theta)$  рівні в точці  $r = 0$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Брюккер Л.Э., Наумова М.П. Симметричный изгиб круглых трехслойных пластин с легким заполнением. Расчеты элементов авиационных конструкций.- М.: Машиностроение, 1965.- Вып.4.- С.86-90.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек.- М.: Наука, 1972.- 432с.
3. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Теория упругих трехслойных конструкций в нелинейной постановке. Расчеты элементов авиационных конструкций.- М.: Машиностроение, 1965.- Вып.4.- С.99-103.
4. Дударьова О.В. Коливання ортотропних прямокутних і круглих пластин в стохастичному полі// Вісник ЗДУ .- 1998.-№1.- С. 30-34.

## МНОЖИНИ ЧЕЗАРІВСЬКИХ СУМ РЯДІВ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ ТА ПРОСТОРИ $L_p[0,1]$ ( $1 < p < \infty$ ) ПРИ ДЕЯКИХ ОБМЕЖЕННЯХ

Д'яченко Н.М.

У цій роботі ми знайдемо обмеження на спільний член ряду в скінченновимірному просторі та просторі  $L_p[0,1]$ , при яких з непорожності множини Чезарівських сум ряду витікає непорожність множини сум цього ряду. Також буде знайдено структуру множини Чезарівських сум при цих обмеженнях.

Нехай  $X$  - банаховий простір,  $X^*$  - спряжений до нього.

Послідовність  $y_n$  збігається за Чезаро, якщо збігається послідовність  $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  за нормою простору  $X$ .

**Визначення 1.** Ряд  $\sum_n x_n$  з елементами  $x_n$  з  $X$  називається збіжним (відповідно збіжним за Чезаро),

якщо послідовність його часткових сум  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  збігається за нормою простору (відповідно збігається за Чезаро). Якщо ряд  $\sum_n x_n$  збігається до  $y$  за Чезаро, будемо це позначати:  $\sum_n {}_c x_n = y$ .

**Визначення 2.** Множина таких  $x \in X$ , для яких існує переставлення натурального ряду  $\pi: N \rightarrow N$ , при якому ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$  збігається (відповідно збігається за Чезаро) до  $x$ , має назву **множини сум** (позначається:  $MC\left(\sum_n x_n\right)$ ) (відповідно **множини Чезарівських сум** (позначається:  $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$ )).

**Множиною граничних точок ряду** ( $MГТ\left(\sum_n x_n\right)$ ) називається множина тих  $x$  з  $X$ , для яких існує таке переставлення, що деяка підпослідовність часткових сум ряду  $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$  збігається до  $x$ .

Легко довести, що будь-який ряд, що збігається, збігається і за Чезаро, тому для будь-якого ряду

$$MC\left(\sum_n x_n\right) \subseteq MЧС\left(\sum_n x_n\right).$$

З класичного математичного аналізу відома [1] теорема Рімана, яка в термінах визначення 2 може бути сформульована таким чином.

**Теорема 1.** Якщо числовий ряд  $\sum_n x_n$  збігається умовно, то  $MC\left(\sum_n x_n\right) = R$ .

Якщо спільний член ряду  $x_n$  не прямує до нуля, то  $MC\left(\sum_n x_n\right) = \emptyset$ , однак  $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$  не обов'язково порожня. Відоме [3]

**Твердження 1.** Якщо  $x_n \in R$ , то  $MЧС\left(\sum_n x_n\right)$  може бути однією з чотирьох множин: а) порожньою, б) одноточковою, в) всією множиною  $R$ , г) множиною вигляду  $\alpha + \beta Z$ , де  $\alpha \in R, \beta \in R$ .

Випадок г) можливий лише для ряду зі спільним членом, який не прямує до нуля. У той же час Чезарівська множина сум може співпадати з множинами у вигляді а), б), в) для рядів зі спільним членом, як прямуючим так і непрямує до нуля.

З непорожності множини Чезарівських сум не завжди витікає непорожність множини сум. Які умови потрібно накласти на члени ряду, щоб з непорожності множини Чезарівських сум ряду випливалася непорожність множини сум цього ряду? Відповіді на це питання для рядів у скінченновимірному просторі і просторі  $L_p[0,1]$  ( $1 < p < \infty$ ) присвячена ця робота.

Для будь-якого ряду  $\sum_n x_n$  легко довести нерівності

$$-\infty \leq \underline{\lim} S_n \leq \underline{\lim} \sigma_n \leq \overline{\lim} \sigma_n \leq \overline{\lim} S_n \leq +\infty.$$

За допомогою цих нерівностей та на основі доведення теореми Рімана [1] легко довести таку лему.

**Лема 1.** Якщо числова послідовність  $a_n$  збігається до нуля, то наступні умови еквівалентні:

а)  $MC\left(\sum_n a_n\right) \neq \emptyset$ ;

б)  $MЧС\left(\sum_n a_n\right) \neq \emptyset$ ;

в) з того, що ряд  $\sum_n a_n$  абсолютно розбігається, витікає розбіжність рядів, утворених як з додатних так і з від'ємних його членів;

г) з того, що ряд  $\sum_n |a_n|$  розбігається за Чезаро, витікає розбіжність за Чезаро рядів, утворених як з додатних так і з від'ємних його членів.

**Наслідок 1.** Якщо числова послідовність  $a_n$  збігається до нуля, то непорожність  $MЧС\left(\sum_n a_n\right)$

еквівалентна непорожності  $MC\left(\sum_n a_n\right)$ .

Ряд  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

зі спільним членом, що прямує до нуля, за Чезаро збігається до  $\frac{1}{2}$ , а у звичайному розумінні розбігається. Однак множина сум цього ряду непорожня, оскільки непорожня множина Чезарівських сум. Крім того неважко довести, що для цього ряду

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = MЧС\left(\sum_n x_n\right) = R.$$

Для подальшого розгляду структури множини Чезарівських сум нам потрібні будуть множини

$$\Gamma = \left\{ f \in X^* : \sum_n |f(x_n)| < \infty \right\};$$

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in X : f(x) = 0 \forall f \in \Gamma \right\};$$

$$Q\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, k = 1, 2, \dots \right\};$$

$$P\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p} : i_1 < i_2 < \dots < i_p; p \in N \right\};$$

[M] - замикання  $M$ , тобто множина  $M$  зі всіма своїми граничними точками.

**Лема 2.** Нехай  $\sum_n x_n$  - ряд в просторі Банаха  $X$  такий, що  $\lim_n x_n = 0$  і  $MЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , тоді множина  $\left[Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\right]$  з кожним своїм елементом  $x$  містить і  $x + \Gamma_0$ .

**Доведення.** Нехай  $f \in X^* \setminus \Gamma$ , тоді ряд  $\sum_n |f(x_n)|$  розбігається. Оскільки  $MЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , то знайдемо  $y \in X$  і переставлення  $\pi$ , для яких  $\sum_n x_{\pi(n)} = y$ . Користуючись лінійністю та неперервністю функціоналу  $f$ , будемо мати

$$f(y) = f\left(\sum_n x_{\pi(n)}\right) = f\left(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_{\pi(i)}\right) =$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k f(x_{\pi(i)}) = \sum_n f(x_{\pi(n)})$$

Таким чином для числового ряду  $\sum_n f(x_n)$  маємо

$$\sum_n |f(x_n)| = \infty; \quad MЧС\left(\sum_n f(x_n)\right) \neq \emptyset; \quad \lim_n f(x_n) = 0,$$

тому за лемою 1 розбігаються ряди, утворені як з додатних так і з від'ємних членів ряду  $\sum_n f(x_n)$ .

Таким чином

$$\sup\{f(y) : y \in P\{x_n\}_{n=1}^\infty\} = +\infty,$$

оскільки  $P\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq Q\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , то

$$\sup\{f(y) : y \in Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\} = +\infty. \quad (1)$$

Лему будемо доводити від супротивного. Нехай існують такі  $x \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\right]$  і  $z \in \Gamma_0$ , що  $x + z \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\right]$ . Тоді за теоремою Хана – Банаха існує функціонал  $f \in X^*$ , який відокремлює  $x + z$  від опуклої замкненої множини  $\left[Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\right]$ , тобто

$$\sup\{f(y) : y \in Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\} < f(x + z). \quad (2)$$

У тому випадку, коли  $f \in \Gamma$  (оскільки  $z \in \Gamma_0$ , то  $f(z) = 0$ )  $f(x + z) = f(x)$ , звідки маємо суперечність з (2), тому що  $x \in \left[Q\{x_n\}_{n=1}^\infty\right]$ . У випадку, коли  $f \in X^* \setminus \Gamma$ , співвідношення (1) і (2) не можуть виконуватися водночас. Отримані в обох випадках суперечності доводять лему.

**Зауваження 1.** Аналогічно можна довести, що для будь-якого ряду  $\sum_n x_n$  у просторі Банаха  $X$  такого, що  $\lim_n x_n = 0$  і  $MЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , для якого завгодно  $x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i \in \left[Q\{x_n\}_{n=n_0+1}^\infty\right]$  виконано  $x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i + \Gamma_0 \subset \left[Q\{x_n\}_{n=n_0+1}^\infty\right]$ .

Наведемо деякі відомі теореми і леми.

**Теорема 2 (Штейниць) [5].** Якщо ряд  $\sum_n x_n$  у скінченновимірному просторі умовно збігається і  $\sum_n x_n = s$ , то

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = s + \Gamma_0.$$

Будемо говорити, що ряд  $\sum_n x_n$  в  $L_p[0,1]$   $r$ -абсолютно збігається, якщо збігається ряд  $\sum_n \|x_n\|^r$ , де  $r = \min\{2, p\}$ .

**Теорема 3 (аналог теореми Штейниця) [2].** Якщо ряд  $\sum_n x_n$  у просторі  $L_p[0,1]$  ( $1 < p < \infty$ ) умовно збігається і  $r$ -абсолютно збігається,  $\sum_n x_n = s$ , то

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = s + \Gamma_0.$$

**Теорема 4 [4].** Для того, щоб  $x$  належав  $MГТ\left(\sum_n x_n\right)$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого  $\varepsilon > 0$  і якої завгодно скінченної множини індексів  $U$  існувала скінченна множина індексів  $V$ , для якої

$$\left\| \sum_{i \in V} x_i - x \right\| < \varepsilon.$$

**Лема 3 [2].** Якщо на члени ряду  $\sum_v x_n$  у скінченновимірному просторі накласти обмеження  $\lim_n x_n = 0$ , а в просторі  $L_p[0,1]$  - обмеження  $r$ -абсолютної збіжності, тоді

$$MC\left(\sum_n x_n\right) = MГТ\left(\sum_n x_n\right).$$

**Лема 4 (про округлення коефіцієнтів) [2].** Якщо  $\{x_i\}_{i=1}^m$  підмножина скінченновимірного простору Банаха  $X$ , коефіцієнти  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset [0,1]$ , тоді існують округлені коефіцієнти  $\{\theta_i\}_{i=1}^m \subseteq \{0,1\}$  такі, що

$$\max_{k \leq m} \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \right\| \leq \dim X \max_{i \leq m} \|x_i\|$$

**Лема 4 (про округлення коефіцієнтів в  $L_p[0,1]$  ( $1 < p < \infty$ )) [2].** Якщо  $\{x_i\}_{i=1}^m$  підмножина простору  $L_p[0,1]$ , коефіцієнти  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset [0,1]$ , тоді існують округлені коефіцієнти  $\{\theta_i\}_{i=1}^m \subseteq \{0,1\}$  такі, що

$$\max_{k \leq m} \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \right\| \leq C_p \left[ \sum_{i=1}^m \|x_i\|^r \right]^{1/r},$$

де  $r = \min\{2, p\}$ ,  $C_p$  залежить тільки від  $p$ .

На основі попередніх лем і теорем доведемо твердження.

**Твердження 2.** Якщо на члени ряду  $\sum_n x_n$  у скінченновимірному просторі накласти обмеження  $\lim_n x_n = 0$ , а в просторі  $L_p[0,1]$  - обмеження  $r$ -абсолютної збіжності, то у випадку, коли  $MЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , то і  $MC\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , при цьому існує такий  $x_0$  з відповідного простору, що виконуються рівності

$$MЧС\left(\sum_n x_n\right) = MГТ\left(\sum_n x_n\right) = MC\left(\sum_n x_n\right) = x_0 + \Gamma_0$$

**Доведення.** Оскільки  $MЧС\left(\sum_n x_n\right) \neq \emptyset$ , то існують таке  $x_0$  з відповідного простору і таке переставлення  $\pi$ , що  $\sum_n x_{\pi(n)} = x_0$ . Тоді для лінійного неперервного функціоналу  $f$  виконано

$$f(x_0) = \sum_n x_{\pi(n)} f(x_{\pi(n)}).$$

Нехай  $x \in MЧС\left(\sum_n x_n\right)$ ,  $f \in \Gamma$ . Знайдемо переставлення  $\sigma$ , для якого  $\sum_n x_{\sigma(n)} = x$ . Тоді

$$f(x) = \sum_n x_{\sigma(n)} f(x_{\sigma(n)}).$$

Оскільки  $f \in \Gamma$ , то ряд  $\sum_n f(x_{\sigma(n)})$  збігається абсолютно, тому

$$f(x) = \sum_n x_{\sigma(n)} f(x_{\sigma(n)}) = \sum_n f(x_{\sigma(n)}) = \sum_n f(x_{\pi(n)}) = \sum_n x_{\pi(n)} f(x_{\pi(n)}) = f(x_0).$$

Тобто  $f(x - x_0) = 0$ . Таким чином,  $f \in \Gamma$ , тому  $x - x_0 \in \Gamma_0$ , або  $x \in x_0 + \Gamma_0$ . Нами доведено включення

$$MЧС\left(\sum_n x_n\right) \subseteq x_0 + \Gamma_0. \quad (3)$$

Припустимо тепер, що  $x \in x_0 + \Gamma_0$ . Нехай  $x'_n = x_{\pi(n)}$ . Доведемо, що

$$x_0 - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i \in \left[ \mathcal{Q}\{x'_n\}_{n=n_0+1}^\infty \right]. \quad (4)$$

Тоді можна буде використати зауваження 1 і здобути належність

$$x \in x_0 - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i + \Gamma_0 \subset \left[ \mathcal{Q}\{x'_n\}_{n=n_0+1}^\infty \right]. \quad (5)$$

Належність (4) виходить з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_{\pi(i)} = \lim_n \left( x'_1 + \frac{n-1}{n} x'_2 + \dots + \frac{n-n_0+1}{n} x'_{n_0} \right) + \\ &\quad + \lim_n \left( \frac{n-n_0}{n} x'_{n_0+1} + \frac{n-n_0-1}{n} x'_{n_0+2} + \dots + \frac{1}{n} x'_n \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_0} x'_i + \lim_n \frac{n-n_0}{n} \lim_n \left( x'_{n_0+1} + \dots + \frac{n-n_0-1}{n-n_0} x'_{n_0+2} + \frac{n-n_0-2}{n-n_0} x'_{n_0+3} + \dots + \frac{1}{n-n_0} x'_n \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_0} x'_i + \lim_n \sum_{i=0}^{n-n_0-1} \lambda_i x'_{n_0+i+1},$$

де  $\lambda_i = \frac{n-n_0-i}{n-n_0} \in [0,1]$  ( $0 \leq i \leq n-n_0-1$ ).

Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . Номер  $n_0$  виберемо у випадку скінченновимірного простору  $X$  таким, щоб

$$\|x'_n\| < \frac{\varepsilon}{2 \dim X} \text{ для будь-якого } n > n_0, \quad (6)$$

у випадку простору  $L_p[0,1]$  ( $1 < p < \infty$ ) -

$$\left[ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|x'_i\|^r \right]^{1/r} < \frac{\varepsilon}{2C_p}. \quad (7)$$

З співвідношення (5) і визначення множини  $\mathcal{Q}\{x'_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}$  випливає, що існують число  $N$  і коефіцієнти  $\{\lambda_i\}_{i=n_0+1}^N \subset [0,1]$ , для яких

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i - \sum_{i=n_0+1}^N \lambda_i x'_i \right\| < \varepsilon/2. \quad (8)$$

Зрозуміло, що в різних просторах ці коефіцієнти будуть різними, але для спрощення розгляду тут і далі для інших коефіцієнтів не будемо їх відрізняти.

Застосовуючи леми 3 і 4 про округлення коефіцієнтів і нерівності (6) і (7), знайдемо коефіцієнти  $\{\theta_i\}_{i=n_0+1}^N \subseteq \{0,1\}$  такі, що в скінченновимірному просторі

$$\left\| \sum_{i=n_0+1}^N \lambda_i x'_i - \sum_{i=n_0+1}^N \theta_i x'_i \right\| \leq \dim X \max_{n_0 < i \leq N} \|x'_i\| < \varepsilon/2, \quad (9)$$

у просторі  $L_p[0,1]$

$$\left\| \sum_{i=n_0+1}^N \lambda_i x'_i - \sum_{i=n_0+1}^N \theta_i x'_i \right\| \leq C_p \left[ \sum_{i=n_0+1}^N \|x'_i\|^r \right]^{1/r} \leq C_p \left[ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|x'_i\|^r \right]^{1/r} < \varepsilon/2. \quad (10)$$

Збираючи нерівності (8) з (9) або (10), за допомогою нерівності трикутника, будемо мати

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} x'_i - \sum_{i=n_0+1}^N \theta_i x'_i \right\| < \varepsilon.$$

Для використання теореми 4 позначимо через  $U'_{n_0}$  і  $V$  множини

$$U'_{n_0} = \{1, 2, \dots, n_0\}, \\ V = U'_{n_0} \cup \{i \in \{n_0+1, \dots, N\} : \theta_i = 1\}.$$

Оскільки будь-яку скінченну множину індексів  $U$  можна включити у деяку множину  $U'_{n_0}$ , то можна вважати без обмеження міркувань, що тією наперед заданою скінченною множиною  $U$ , що міститься у твердженні теореми 4, є множина  $U'_{n_0}$ . Множина  $U'_{n_0}$  міститься в  $V$  і виконується нерівність



$$\left\| x - \sum_{i \in I'} x'_i \right\| < \varepsilon.$$

Таким чином, за теоремою 4

$$x \in MGT\left(\sum_n x'_n\right) = MGT\left(\sum_n x_n\right). \quad (11)$$

З леми 3, теорем 2 і 3 витікає, що

$$MGT\left(\sum_n x_n\right) = MC\left(\sum_n x_n\right) = x + \Gamma_0. \quad (12)$$

Тобто ми довели, що множина сум непорожня.

З припущення, що  $x \in x_0 + \Gamma_0$ , маємо існування такого  $y \in \Gamma_0$ , що  $x = x_0 + y$ , а тоді разом з (11) і (12) одержимо

$$MЧС\left(\sum_n x_n\right) \supseteq MC\left(\sum_n x_n\right) = x + \Gamma_0 = x_0 + y + \Gamma_0 = x_0 + \Gamma_0. \quad (13)$$

Поєднуючи (3), (12) і (13) одержимо потрібну рівність

$$MЧС\left(\sum_n x_n\right) = MGT\left(\sum_n x_n\right) = MC\left(\sum_n x_n\right) = x_0 + \Gamma_0.$$

Залишається поки що відкритим питання про структуру Чезарівської множини сум ряду в скінченновимірному просторі зі спільним членом, не прямуючим до нуля.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. – М.,: изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
2. Кадец В.М., Кадец М.И. Перестановки рядов в пространствах Банаха. – Тарту: ТГУ, 1988.- 196 с.
3. Begeimihl F., Erdos P. Rearrangements of C-summable series //Acta Math. – 1954 - 92. P.35-53.
4. Hadwiger H. Uber das umordnungsproblem in Hilbertschen Raum //Math. Zeitschrift. – 1940. – 46. S. 70-79.
5. Steinitz E. Bedingt konvergente reihen und konvexe systeme //J. reine und Angew. Math. – 143. P.128-175; - 144. P.1-49; 1916 – 146. P.68-111.

УДК 519.642

## РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Звьоздочкіна О.А., Толлок В.О.

У роботі пропонується алгоритм, заснований на методі крайових елементів й аналітичному методі функцій Гріна для нестационарної задачі теплопровідності, для розв'язку змішаних задач стаціонарної термопружності з заданим нестационарним навантаженням у неоднорідній півплощині. Під неоднорідністю тут розуміється багатозв'язність області. Даний алгоритм, побудований для розв'язку задач стаціонарної теплопровідності і пружності, приведений у роботах [1,2]. Однак, при постановці нестационарної задачі теплопровідності для тієї ж області і при наявності таких же крайових умов, з'являється початкова умова і похідна за часом. При побудові алгоритму для розв'язку такої задачі можна використовувати той же метод крайових елементів у нестационарній постановці [3] або метод скінченних

різниць [4]. У даній роботі при побудові алгоритму для розв'язку змішаної нестационарної задачі використовувався метод крайових елементів.

Розглянемо динамічну задачу теплопровідності в півплощині з включенням. Припускаємо, що на частині межі заданий тепловий потік, на включенні температура або потік, є початковий розподіл температури. Треба знайти функцію розподілу температури за часом в півплощині з включенням. Математично цей процес описується так (рис.1):

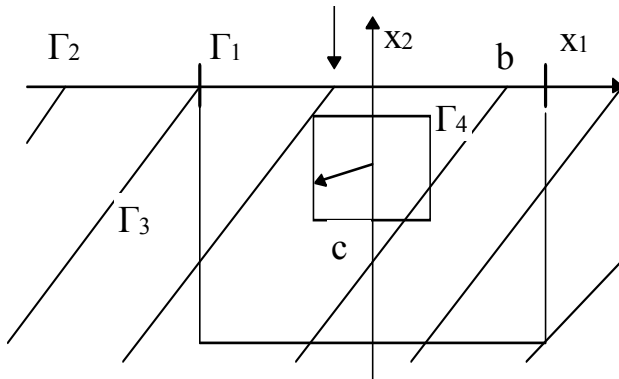


Рис. 1

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= f_1(x, t), \\ u \Big|_{\Gamma_2} &= f_2(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} &= f_4(x, t), \\ u(x, y, 0) &= \mu_0 \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\Gamma_1$  – частина прямої, на якій заданий тепловий потік,  $\Gamma_2$  – інша частина прямої, на якій задана температура,  $\Gamma_4$  – контур включення,  $\mu_0$  – температура, задана в початковий момент часу. Граничні і початкові умови погоджені.

При розв'язанні використовується модифікований метод крайових елементів, приведений у роботі [1]. З цією метою обмежимо прямокутником  $\Gamma_3$  нашу півплощину, однією з меж якого буде контур  $\Gamma_1$ , на якому і заданий тепловий потік. Отримано обмежену область із контуром  $\Gamma_3 \cup \Gamma_1$ . Тепер можна побудувати інтегральне рівняння для нової області. Як відомо [3], граничне інтегральне рівняння для нестационарної теплопровідності має такий вид:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi, t_F) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt = \\ = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, t_F, t) d\Gamma(x) dt + k \int_{\Omega} u_0(x, t_0) u^*(\xi, x, t_F, t_0) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $c(\xi)$  – функція тілесного кута в точці  $\xi$  межі [3],  $u(x, t)$  і  $q(x, t)$  – задані і невідомі крайові умови,  $u^*(\xi, x, t_F, t)$  і  $q^*(\xi, x, t_F, t)$  – фундаментальний розв'язок, що залежить від часу, та його нормальна похідна, останній доданок є інтеграл від початкових умов,  $\Omega$  - область, обмежена контуром  $\Gamma_3 \cup \Gamma_1$ .

Тепер, застосовуючи метод крокового інтегрування за часом, отримаємо чисельний розв'язок задачі. При цьому, оскільки фундаментальний розв'язок сам залежить від часу, звичайно можна застосовувати великі кроки за часом. Частина невідомих на межі  $\Gamma_3$  виражається через невідомі на контурі  $\Gamma_1$  по відомому аналітичному розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для півплощини [5]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi kt} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{4kt}\right) \right] \times \\ \times \mu(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{y}{4\pi k} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4k(t-\tau)}\right) \right] g(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mu(\xi, \tau)$  – початкова умова,  $g(\xi, \tau)$  – задана на межі півплощини крайова умова 1 роду.

Співвідношення (3) зв'язує кожную точку півплощини зі значенням функції на контурі  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Таким чином, можна виразити невідомі значення температури на контурі  $\Gamma_3$  через невідомі значення

температури  $g(\xi, \tau)$  на контурі  $\Gamma_1$ . Одержуємо повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язуючи яку отримуємо всі шукані невідомі. Потім, підставляючи в інтегральне рівняння (2) знайдені значення температури і потоку на прямокутнику, отримуємо розв'язок задачі (1) у середині області. При цьому коефіцієнт  $c(\xi)$  у цьому випадку буде дорівнювати одиниці. Розв'язок задачі (1) для необмеженої області поза прямокутником отримуємо через аналітичний розв'язок задачі для півплощини (3). Використовуючи покрокову схему за часом, приведену в роботі [3] можна одержати, таким чином, розв'язок задачі (1) у будь-який момент часу.

Для ілюстрації даного методу була розв'язана конкретна задача, у якій прийняли такі умови: початкові умови дорівнюють нулю, на контурі  $\Gamma_1$  заданий потік, рівний одиниці, на частині межі півплощини, що залишилася, задана нульова температура, на контурі включення задана одинична температура. Функції  $u$  і  $q$  через складність задачі та для простоти обчислень були взяті постійними. Межа контуру розбита з розрахунку по 25 елементів на одиницю довжини. Для побудови розв'язку в неоднорідній півплощині обмежуючий контур, повинний знаходитися від межі включення на відстані, рівній подвійному діаметру включення.

Нижче подані графіки отриманого розподілу температури в півплощині: на рис. 2 без включення; на рис.3 із включенням. Графік, коли на включенні заданий потік, не приведений тут, оскільки поведінка функції температури буде аналогічною. Центр квадратного включення знаходиться в т.  $(0, 0,5)$ , довжина боку дорівнює  $0,5$ . Розрахунки проводилися для часу з інтервалом від 0 до 2 із кроком  $0,1$ .

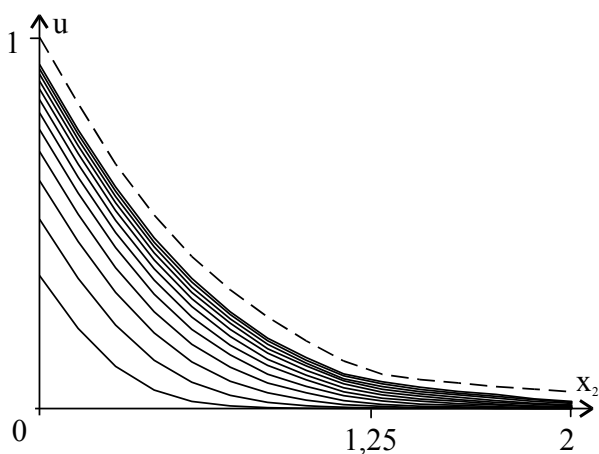


Рис. 2 Розподіл температури в півплощині за часом під дією теплового потоку

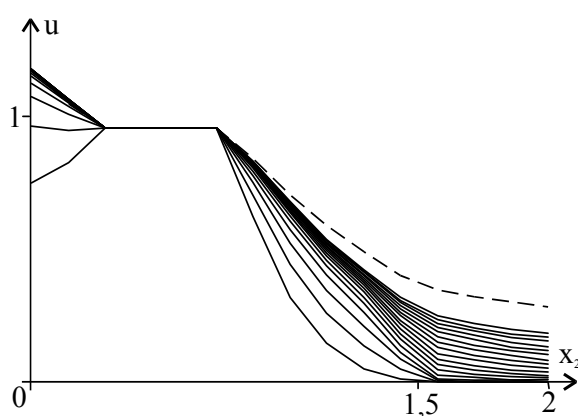


Рис. 3 Розподіл температури за часом у півплощині з квадратним включенням, на якому задана одинична температура

Як показують результати, у півплощині під дією заданого потоку на межі відбувається рівномірний розподіл температури. При цьому при переході через обмежуючий контур функція температура гладка, без стрибків. Таким чином, на даному прикладі показана ефективність використання побудованого алгоритму для розв'язку змішаних задач теплопровідності для півплощини в нестационарному випадку. Розв'язок задачі для неоднорідної півплощини за графіком функції розподілу температури теж гладкий при переході через обмежуючий контур. Однак, на відміну від розв'язку для однорідної півплощини, цей розв'язок приблизний і, відповідно, чим обмежуючий контур далі від межі включення, тим точніше буде розв'язок. При проведенні порівняльного аналізу розв'язків для різних розмірів обмежувачих контурів була отримана така закономірність, що обмежуючий контур повинний знаходитися від межі включення на відстані, рівній подвійному діаметру включення. Тобто подальше збільшення розмірів обмежувачого контуру уточнює розв'язок на десяту частку відсотка. Таким чином, побудованим алгоритмом можна розв'язувати змішані нестационарні задачі теплопровідності в багатозв'язній півплощині, при цьому на розв'язок не накладаються ніякі додаткові умови, на відміну від інших чисельних методів.

Отримані результати можна використовувати при побудові розв'язку стаціонарної пружної задачі, із заданим в області нестационарним тепловим навантаженням. У термінах теорії пружності [6] це буде побудова розв'язку стаціонарної незв'язної задачі термопружності, де як фіктивні масові сили виступає функція температури, яку отримали вище в кожний момент часу.

Розглянемо задачу про вдавлювання штампа в пружну півплощину. Ця задача відома як змішана крайова задача, коли на межі задані такі умови (рис. 4).

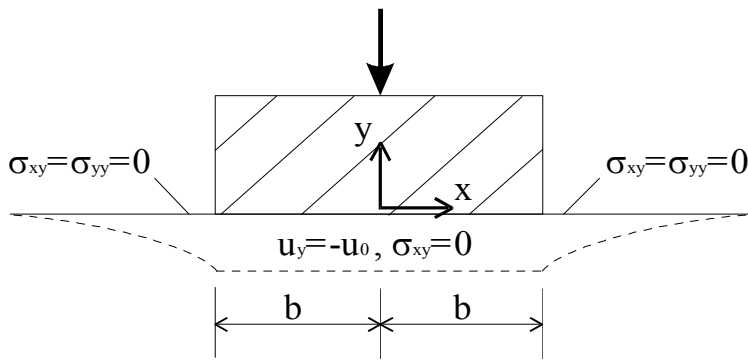


Рис. 4 Вдавлювання жорсткого штампa із мастилом

$$\begin{aligned} u_y &= -u_0, \quad |x| \leq b, \quad y=0, \\ \sigma_{xy} &= 0, \quad |x| < \infty, \quad y=0, \\ \sigma_{yy} &= 0, \quad |x| > b, \quad y=0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ці умови вимагають, щоб зміщення  $u_y$  безпосередньо під штампом,  $|x| \leq b, y=0$ , були постійними і дорівнювали  $-u_0$  ( $u_0 > 0$ ). Крім того, дотичні напруження  $\sigma_{xy}$  дорівнюють нулю на всій межі,

включаючи область  $|x| \leq b$  під штампом (передбачається, що мастило забезпечує умови, при яких на контакті штампa з півплощиною не виникають дотичні зусилля). І нормальні напруження  $\sigma_{yy}$  дорівнюють нулю при  $y=0$  для  $|x| > b$ , тобто в точках, де не задані зміщення  $u_y$ . Під штампом ( $|x| \leq b, y=0$ ) нормальні напруження невідомі. Розв'язок цієї пружної задачі поданий в [2]: алгоритм будувався на основі методу крайових елементів і розв'язку задачі Фламанa. Однак, присутність температурних навантажень як фіктивних сил приводить до деякої модифікації закону Гука [6]. Тобто додається права частина в інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \int_{\Omega} u_{ik,k}^*(\xi, x)Td\Omega, \end{aligned}$$

де інтеграл у лівій частині розуміється в змісті головного значення,  $T$  – температура задана в області  $\Omega$ ,  $G$  – модуль зрушення,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\alpha$  – коефіцієнт теплопровідності. При цьому, тому що з розв'язку попередньої задачі розподіл температури в кожний момент часу відомо на всій півплощині, то  $\Omega$  охоплює всю область, на яку впливають задані теплові крайові умови.

Застосовуючи побудований алгоритм, одержуємо розв'язок пружної задачі (4) в півплощині з включенням, із заданим нестационарним тепловим навантаженням.

На рис. 5 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, пунктиром виділені напруження у випадку, коли не задане теплове навантаження. Сама верхня лінія відповідає напруженням, отриманим при розв'язанні пружної задачі, коли теплове навантаження не залежить від часу. На рис. 6 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, але в півплощині є присутнім включення з заданим нульовим напруженням. Типи ліній відповідають описаним на рис. 5

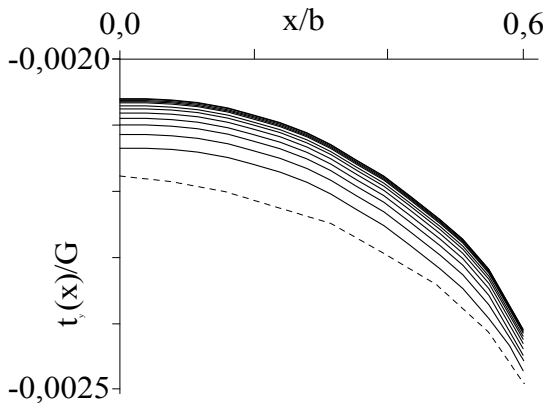


Рис. 5 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини під дією штампa з кроком за часом 0,1

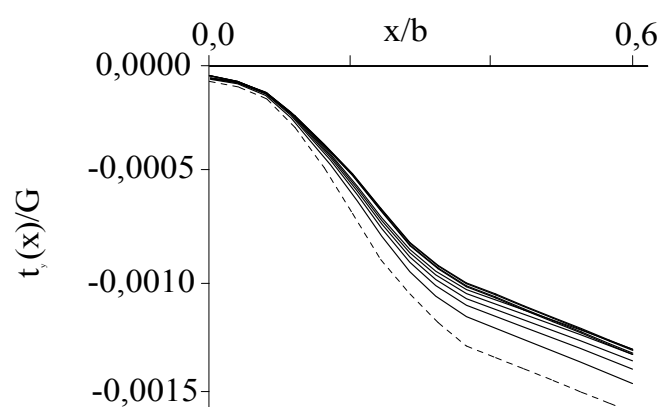


Рис. 6 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини з включенням під дією штампa з кроком за часом 0,1

Таким чином, як показують результати, під дією нестационарного теплового навантаження відбувається поступове зменшення напружень на межі під штампом і вони прагнуть до статичних. Графіки розподілу напружень і зміщень в однорідній і багатозв'язній півплощині тут не розглядаються, тому що вони мають аналогічний характер як і функція температури, графіки якої подані на рис. 2 і рис. 3.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Звьоздочкіна О. А., Толлок В. О. Про один спосіб розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – №1. – С.36-38.
2. Звьоздочкіна О. А., Толлок В. О. Про один метод розв'язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісник Державного університету “Львівська політехніка”, с. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 172-175.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987.–524 с.
4. Бахвалов Н. Численные методы. – М.: Наука, 1987. - С. 327.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – С. 474.
6. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ІЗ ЩІЛИНОЮ МІЖ ШАРАМИ

Зіновєєв І.В.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається багатошарова основа, у якій між двома сусідніми шарами є щілина довжиною  $2L$ . На берегах щілини відомі дотичні і нормальні напруження. На поверхні основи задане навантаження з кінцевим головним вектором. Потрібно визначити напруження і переміщення в довільній точці основи в припущенні, що деформація є плоскою.

Плоска задача про щілину в шаруватих середовищах розглядалася багатьма авторами [1,5]. Запропоновані аналітичні методи розв'язку задачі застосовувалися лише для середовищ, що містять не більш трьох шарів [1,3,6]. У гіданій роботі за допомогою теорії багатошарових основ складної структури пропонується метод зведення задачі про щілину між будь-якими шарами основи до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Основа містить довільне кінцеве число шарів. Пропонується ефективний метод чисельного розв'язку отриманої системи, заснований на квадратурних формулах найвищого алгебраїчного ступеня точності.

### 2. ВИВЕДЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ

Багатошаровою основою будемо вважати пакет необмежених у плані шарів постійної товщини, що лежить на пружному або абсолютно жорсткому півпросторі. Кожний шар основи є однорідним та ізотропним. Нижній шар основи лежить на півпросторі. Вважаємо, що всі шари основи зціплені. Нумерація шарів проводиться зверху вниз, починаючи з одиниці; півпростору надамо номер  $n+1$ . Величини, що відповідають  $k$ -му шару основи, будемо позначати нижнім індексом  $k$ .

Кожний шар віднесемо до місцевої декартової системи координат з початком на верхній межовій площині. Для визначеності вважаємо, що щілина знаходиться поміж  $m$ -м та  $m+1$ -м шарами основи ( $1 < m < n$ ). Осі  $Oz$  кожного шару спрямуємо всередину шару по нормалі до межової площини так, що вони розташовані на одній прямій і щілина займає дільницю  $x_m \in [-l, l]$ ,  $z_m = h_m$ . Напрямки осей  $Ox$  всіх місцевих декартових систем координат співпадають. Те ж саме вважаємо відносно осей  $Oy$ . Навантаження верхньої межі багатошарової основи і об'ємні навантаження в шарах основи вважаємо такими, що вони викликають плоску деформацію основи.

На берегах щілини відомі нормальні та дотичні напруження

$$\sigma_{zz_m}(x, h_m) = \sigma_{zz_{m+1}}(x, 0) = q(x), \quad \sigma_{xz_m}(x, h_m) = \sigma_{xz_{m+1}}(x, 0) = g(x). \quad (1)$$

Для спрощення цих міркувань вважаємо що  $q(x)$  - парна функція та  $g(x)$  - непарна, а навантаження на верхній межі основи симетричне відносно осі Oz.

На суміжних межах шарів основи виконуються такі умови:

при  $k \neq m$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_k}(x, h_k) &= \sigma_{xz_{k+1}}(x, 0), \quad \sigma_{zz_k}(x, h_k) = \sigma_{zz_{k+1}}(x, 0) \\ U_{x_k}(x, h_k) &= U_{x_{k+1}}(x, 0), \quad U_{z_k}(x, h_k) = U_{z_{k+1}}(x, 0), \end{aligned}$$

при  $k = m$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_m}(x, h_m) &= \sigma_{xz_{m+1}}(x, 0), \quad \sigma_{zz_m}(x, h_m) = \sigma_{zz_{m+1}}(x, 0) \\ \frac{\partial U_{x_{m+1}}(x, 0)}{\partial x} &= \frac{\partial U_{x_m}(x, h_m)}{\partial x} + \begin{cases} \varphi(x), & x \in [-l, l] \\ 0, & x \notin [-l, l] \end{cases}, \\ \frac{\partial U_{z_{m+1}}(x, 0)}{\partial x} &= \frac{\partial U_{z_m}(x, h_m)}{\partial x} + \begin{cases} \phi(x), & x \in [-l, l] \\ 0, & x \notin [-l, l] \end{cases}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\varphi(x)$ ,  $\phi(x)$  - невідомі функції, які необхідно побудувати таким чином, щоб відповідні їм напруження  $\sigma_{xz_m}(x, h_m)$ ,  $\sigma_{zz_m}(x, h_m)$  задовольняли умовам (1). Позначимо, що за фізичним змістом задачі  $\varphi(x)$  - парна функція та  $\phi(x)$  - непарна.

Піддамо умови сумісності деформації (2) m-го та m+1-го шарів прямому одновимірному інтегральному перетворенню Фур'є

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^k \bar{f}(\xi).$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} -i\xi \bar{U}_{x_{m+1}}(\xi, 0) &= -i\xi \bar{U}_{x_m}(\xi, h_m) + \bar{\varphi}(\xi), \\ -i\xi \bar{U}_{z_{m+1}}(\xi, 0) &= -i\xi \bar{U}_{z_m}(\xi, h_m) + \bar{\phi}(\xi), \\ \bar{\sigma}_{xz_m}(\xi, h_m) &= \bar{\sigma}_{xz_{m+1}}(\xi, 0), \quad \bar{\sigma}_{zz_m}(\xi, h_m) = \bar{\sigma}_{zz_{m+1}}(\xi, 0). \end{aligned} \quad (2')$$

Трансформанти напружень та переміщень у k-му шарі, згідно з [7], є лінійними комбінаціями четвірки допоміжних функцій,

$$\begin{aligned} \alpha_k(\xi) &= \bar{\sigma}_{z_k}^1 \Big|_{z=0}, \quad \beta_k(\xi) = \frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} p \bar{U}_{z_k}^1 \Big|_{z=0}, \\ \gamma_k(\xi) &= -\frac{E_k}{2(1-\nu_k^2)} i\xi \bar{U}_{x_k}^1 \Big|_{z=0}, \quad \delta_k(\xi) = -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{z_k}^1 \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (3)$$

що зв'язують напруження та переміщення у k-му шарі з умовами на його верхній межі:

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{x_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [2\nu_k \tau + \tau_1] + \beta_k [\tau + \tau_1] + \gamma_k [2\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [(3 - 2\nu_k)\tau + \tau_1], \\
\overline{\sigma}_{z_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \tau - \tau_1] + \beta_k [\tau - \tau_1] - \gamma_k \tau_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \tau + \tau_1], \\
-\frac{i\xi}{p} \overline{\sigma}_{xz_k}(\xi, z) &= -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \tau - \tau_1] + \beta_k \tau_1 + \gamma_k [\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \tau + \tau_1], \\
(-i\xi) 2G_k \overline{U}_{x_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} \tau_1 + \beta_k [w_2 \tau + \tau_1] + \gamma_k [\tau + \tau_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_3 \tau + \tau_1], \\
2G_k p \overline{U}_{z_k}(\xi, z) &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_3 \tau - \tau_1] + \beta_k [w_1 \tau - \tau_1] + \gamma_k [w_2 \tau - \tau_1] - \frac{\delta_k}{w_1} \tau_1,
\end{aligned} \tag{4}$$

де  $G_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}$  - модуль зсуву матеріалу шару,  $p = \xi l$ ,

$$w_1 = 2(1 - \nu_k), w_2 = 1 - 2\nu_k, w_3 = 3 - 4\nu_k, w_4 = 4(1 - \nu_k)^2$$

$$\tau = sh(pz), \tau_1 = ch(pz), \tau_1 = pz \cdot \tau, \tau_1 = pz \cdot \tau_1. \tag{4'}$$

Допоміжні функції (3) для сусідніх зціплених шарів зв'язано відомими лінійними однорідними рекурентними співвідношеннями [7]

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \beta_k [\hat{s} - \hat{c}_1] - \gamma_k \hat{s}_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1], \\
\Delta_k \beta_{k+1} &= \frac{\alpha_k}{w_4} [w_3 \hat{s} - \hat{c}_1] + \frac{\beta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] - \frac{\delta_k}{w_4} \hat{s}_1, \\
\Delta_k \gamma_{k+1} &= \frac{\alpha_k}{w_4} \hat{s}_1 + \frac{\beta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1] + \frac{\delta_k}{w_4} [w_3 \hat{s} + \hat{c}_1], \\
\delta_{k+1} &= -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] + \beta_k \hat{s}_1 + \gamma_k [\hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1],
\end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\Delta_k = \frac{E_k (1 - \nu_{k+1}^2)}{E_{k+1} (1 - \nu_k^2)}, p_k = ph_k, \hat{s} = sh(p_k), \hat{c} = ch(p_k), \hat{s}_1 = p_k \cdot \hat{s}, \hat{c}_1 = p_k \cdot \hat{c}.$$

Щоб отримати рекурентні співвідношення для  $m$ -го та  $m+1$ -го шарів, які не є повністю зціпленими, покладемо у формулах (4)  $k=m$ ,  $z=h_m$ . Враховуючи (3), приходимо до шуканих рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned}
\alpha_{m+1} &= \frac{\alpha_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \beta_k [\hat{s} - \hat{c}_1] - \gamma_k \hat{s}_1 - \frac{\delta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1], \\
\Delta_m \beta_{m+1} &= \frac{\alpha_k}{w_4} [w_3 \hat{s} - \hat{c}_1] + \frac{\beta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} - \hat{s}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] - \frac{\delta_k}{w_4} \hat{s}_1 + \beta_m^0, \\
\Delta_m \gamma_{m+1} &= \frac{\alpha_k}{w_4} \hat{s}_1 + \frac{\beta_k}{w_1} [w_2 \hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\gamma_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1] + \frac{\delta_k}{w_4} [w_3 \hat{s} + \hat{c}_1] + \gamma_m^0, \\
\delta_{m+1} &= -\frac{\alpha_k}{w_1} [w_2 \hat{s} - \hat{c}_1] + \beta_k \hat{s}_1 + \gamma_k [\hat{s} + \hat{c}_1] + \frac{\delta_k}{w_1} [w_1 \hat{c} + \hat{s}_1],
\end{aligned} \tag{5'}$$

$$\text{де } \beta_m^0 = \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \cdot \frac{i\xi}{p} \bar{\varphi}(\xi), \quad \gamma_m^0 = \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \cdot \frac{i\xi}{p} \varphi(\xi).$$

Одержані рекурентні співвідношення неоднорідні, що свідчить про належність основи з щілиною до типу основ складної структури. Тому в подальших міркуваннях можна спиратися на результати, одержані в роботах [8,9] для основ складної структури. Допоміжні функції  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$  для будь-якого шару основи не є незалежними: відповідні їм напруження в пружній півплощині (шар основи з номером  $n+1$ ) повинні зникати при  $z \rightarrow \infty$ . Умова зникнення напружень та переміщень при  $z \rightarrow \infty$  у півплощині дозволяє виразити дві з функцій  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$  через дві інші:

$$\begin{aligned} \beta_k &= -A_k(p)\alpha_k(\xi) + B_k(p)\delta_k(\xi) + L_k(\xi), \\ \gamma_k &= B_k(p)\alpha_k(\xi) - B_{\tau k}(p)\delta_k(\xi) + M_k(\xi), \quad k=1,2,\dots,n, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $A_k(p)$ ,  $B_{\tau k}(p)$ ,  $B_k(p)$ ,  $L_k(\xi)$ ,  $M_k(\xi)$ ,  $k=1,2,\dots,n$  - функції податливості багат шарової основи складної структури [9].

Функції податливості  $A_k(p)$ ,  $B_k(p)$ ,  $B_{\tau k}(p)$ ,  $k=1,\dots,n+1$  не залежать від способу навантаження основи. Вихідними для їх визначення служать функції податливості півплощини: для суцільної пружної півплощини  $A_{n+1} = B_{\tau n+1} = 1$ ,  $B_{n+1} = \frac{(1-2\nu_{n+1})}{2(1-\nu_{n+1})}$ ; для абсолютно жорсткої півплощини

$$A_{n+1} = B_{\tau n+1} = B_{n+1} = 0.$$

На відміну від функцій  $A_k(p)$ ,  $B_k(p)$ ,  $B_{\tau k}(p)$ , функції  $L_k(\xi)$ ,  $M_k(\xi)$ ,  $k=1,\dots,n+1$  залежать від засобу навантаження берегів щілини, але не залежать від функцій  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ . Тому при фіксованих умовах на берегах щілини функції  $L_k(\xi)$ ,  $M_k(\xi)$ ,  $k=1,\dots,n+1$ , також, як і функції податливості  $A_k(p)$ ,  $B_k(p)$ ,  $B_{\tau k}(p)$ ,  $k=1,\dots,n+1$  можуть бути визначені до розв'язку будь-якої межової задачі для основи з щілиною [9]. Опускаючи викладення, приведемо рекурентні співвідношення для функцій податливості  $L_k(\xi)$ ,  $M_k(\xi)$ ,  $k=1,\dots,n+1$

$$\begin{aligned} D_k(p)L_k(p) &= e^{-p_k} \Delta_k \left\{ -\beta_k^0 \cdot \left[ c + \frac{p_k s}{w_1} + \Delta_k B_{\tau k+1}(s + p_k c) + \Delta_k B_{k+1} p_k s \right] + \right. \\ &+ \left. \gamma_k^0 \cdot \left[ \frac{w_2 s - p_k c}{w_1} - \Delta_k B_{k+1}(s + p_k c) - \Delta_k A_{k+1} p_k s \right] \right\}, \\ D_k(p)M_k(p) &= e^{-p_k} \Delta_k \left\{ -\beta_k^0 \cdot \left[ -\frac{w_2 s + p_k c}{w_1} - \Delta_k B_{\tau k+1} p_k s + \Delta_k B_{k+1}(s - p_k c) \right] + \right. \\ &+ \left. \gamma_k^0 \cdot \left[ -c + \frac{p_k s}{w_1} - \Delta_k A_{k+1}(s - p_k c) + \Delta_k B_{k+1} p_k s \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } e_k = e^{-2p_k}, \quad s = \frac{(1-e_k)}{2}, \quad c = \frac{(1+e_k)}{2}, \quad N_k = \frac{1}{w_4}, \quad H_k = \Delta_{k+1}^2 [A_{k+1} B_{\tau k+1} - B_{k+1}^2],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_k &= \frac{\Delta_k}{1-\nu_k}, \quad D_k(p) = N_k [w_3 c^2 + p_k^2 e_k + e_k w_2^2] + \Delta_k A_{k+1} (s c - p_k e_k) + \\ &+ \Delta_k B_{\tau k+1} (s c + p_k e_k) + \frac{\tilde{\Delta}_k}{2} [B_{k+1} + A_{\tau k+1}] [w_2^2 s^2 + p_k^2 e_k] + H_k [s^2 - p_k^2 e_k], \end{aligned} \quad (8)$$

Надалі при визначенні істинних напружень та переміщень при допомозі зворотного одновимірного інтегрального перетворення Фур'є



$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (9)$$

виникають труднощі з обчисленням інтегралів Фур'є, так як деякі підінтегральні функції повільно спадають при  $p \rightarrow \infty$ . Тому доцільно оцінити поведження трансформант напружень та переміщень у багатошаровій основі при  $p \rightarrow \infty$ .

Аналіз поведження трансформант шуканих величин у шарах основи при  $p \rightarrow \infty$  показав, що лише в шарах з номерами  $l, m, m+1$  спадання трансформант може бути дуже повільним. В інших шарах швидкість спадання трансформант експоненціальна. Для виведення інтегральних рівнянь задачі виділимо повільно спадаючі доданки в трансформантах нормальних та дотичних напружень на верхній межі  $m+1$ -го шару.

Враховуючи (7), (8) маємо при  $p \rightarrow \infty$

$$c \rightarrow 0.5, \quad s \rightarrow 0.5, \quad A_k(p) \rightarrow 1, \quad B_k(p) \rightarrow \frac{w_2}{w_1}, \quad B_{\tau k}(p) \rightarrow 1,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D_k(p) = D_k^\infty = \frac{1}{4} \left\{ \frac{w_3}{w_4} + 2\Delta_k + \Delta_k \frac{w_2(1-2\nu_{k+1})}{w_1(1-\nu_{k+1})} + \Delta_k^2 \left[ 1 - \frac{1-2\nu_{k+1}}{4(1-\nu_{k+1}^2)} \right] \right\},$$

$$L_k D_k e^{P_k} = -\frac{1}{2} \left\{ \beta_k^0 (\tilde{\alpha} + p\tilde{b}) - \gamma_k^0 (\tilde{c} - p\tilde{b}) \right\} + O(p^s e^{-P_k}),$$

$$M_k D_k e^{P_k} = -\frac{1}{2} \left\{ -\beta_k^0 (\tilde{c} + p\tilde{b}) + \gamma_k^0 (\tilde{\alpha} - p\tilde{b}) \right\} + O(p^s e^{-P_k}),$$

де  $\tilde{\alpha} = 1 + \Delta_k$ ,  $\tilde{b} = \frac{1}{2(1-\nu_k)} + \Delta_k \frac{3-4\nu_{k+1}}{2(1-\nu_{k+1})}$ ,  $\tilde{c} = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)} - \Delta_k \frac{1-2\nu_{k+1}}{2(1-\nu_{k+1})}$ .

Використовуючи першу та четверту формули (3) та (5), отримаємо

$$\overline{\sigma}_{zz_{m+1}}(\xi, 0) = -\frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \overline{\psi}(\xi) \tilde{\alpha} - \overline{\varphi}(\xi) \tilde{c} \right\} + O(p_m e^{-P_m}),$$

$$\overline{\sigma}_{xz_{m+1}}(\xi, 0) = -\frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \overline{\varphi}(\xi) \tilde{\alpha} + \overline{\psi}(\xi) \tilde{c} \right\} + O(p_m e^{-P_m}),$$

де  $\overline{\varphi}(\xi)$ ,  $\overline{\psi}(\xi)$  - трансформанти Фур'є невідомих функцій, що підлягають визначенню.

Застосуємо зворотне перетворення Фур'є (9) до наведених вище виразів для  $\overline{\sigma}_{zz_{m+1}}(\xi, 0)$ ,  $\overline{\sigma}_{xz_{m+1}}(\xi, 0)$  та скористаємось властивістю перетворення Фур'є

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi}{p} \tilde{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Внаслідок цього прийдемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \varphi(x) \tilde{c} + 2\tilde{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t-x} dt \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= q(x), \\ \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ -\psi(x) \tilde{c} + 2\tilde{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_2(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= g(x), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\Theta_r = Q_r(p) \beta_m^0 + R_r(p) \gamma_m^0 + H_r(p) \alpha_1 + S_r(p) \delta_1, \quad r = 1, 2.$$

Фізичний зміст функцій  $\Theta_1(\xi)$ ,  $\Theta_2(\xi)$  такий

$$\Theta_1(\xi) = \overline{\sigma}zz_m(\xi, h_m) + \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \overline{\psi}(\xi) \overline{\alpha} - \overline{\varphi}(x) \overline{\mathcal{C}} \right\},$$

$$\Theta_2(\xi) = \overline{\sigma}xz_{m+1}(\xi, h_m) + \frac{1}{4D_m^\infty} \frac{E_m}{2(1-\nu_m^2)} \left\{ \frac{i\xi}{p} \overline{\varphi}(\xi) \overline{\alpha} + \overline{\psi}(\xi) \overline{\mathcal{C}} \right\}.$$

Отже, для одержання значень функцій  $Q_1(p)$ ,  $R_1(p)$ , ...,  $S_2(p)$  необхідно покласти рівній одиниці одну з функцій  $\beta_m^0$ ,  $\gamma_m^0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$ , а інші покласти рівними нулю. Після цього обчислити по наведених формулах величини  $\Theta_1(\xi)$ ,  $\Theta_2(\xi)$ . Ці обчислення доцільно виконувати на ЕОМ, керуючись формулами для розрахунків трансформант напружень у багатопаровій основі [7,9].

Виходячи з фізичного змісту задачі, можна зробити висновок, що  $\varphi(x)$ ,  $\overline{\varphi}(\xi)$ ,  $-\frac{i\xi}{p} \overline{\sigma}xz_1(\xi, 0) = \delta_1$ ,  $\overline{\sigma}zz_1(\xi, 0) = \alpha_1$  - є парними функціями,  $\psi(x)$ ,  $\overline{\psi}(\xi)$ ,  $\frac{i\xi}{p}$  - є непарними функціями. Враховуючи це, формули (10) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} \overline{\mathcal{C}} \varphi(x) + \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} 2\overline{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\psi(t)}{t-x} dt + \\ & + \frac{E_m}{\pi(1-\nu_m^2)} \left\{ - \int_0^l \psi(t) \int_0^{+\infty} Q_1(p) \cos(px) \sin(pt) dp dt + \int_0^l \varphi(t) \int_0^{+\infty} R_1(p) \cos(px) \cos(pt) dp dt \right\} + \\ & + \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \alpha_1(t, 0) \int_0^{+\infty} H_1(p) \cos(px) \cos(pt) dp dt + \int_0^{+\infty} \alpha x z_1(t, 0) \int_0^{+\infty} S_1(p) \cos(px) \sin(pt) dp dt \right\} = q(x), \\ & - \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} \overline{\mathcal{C}} \psi(x) + \frac{1}{D_m^\infty} \frac{E_m}{8(1-\nu_m^2)} 2\overline{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi(t)}{-l-t-x} dt + \\ & + \frac{E_m}{\pi(1-\nu_m^2)} \left\{ - \int_0^l \psi(t) \int_0^{+\infty} Q_2(p) \sin(px) \sin(pt) dp dt + \int_0^l \varphi(t) \int_0^{+\infty} R_2(p) \sin(px) \cos(pt) dp dt \right\} + \\ & + \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \alpha_1(t, 0) \int_0^{+\infty} H_2(p) \sin(px) \cos(pt) dp dt + \int_0^{+\infty} \alpha x z_1(t, 0) \int_0^{+\infty} S_2(p) \sin(px) \sin(pt) dp dt \right\} = g(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким чином отримана система двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ . Ця система повинна бути доповнена двома рівняннями, що виражають вимогу неперервності переміщень при обході контура щілини

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^{+l} \psi(t) dt = 0. \quad (12)$$

### 3. НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Щоб отримати наближений розв'язок одержаної системи сингулярних інтегральних рівнянь, слід з'ясувати характер особливостей розв'язку задачі на кінцях щілини. Особливості розв'язку визначаються характеристичними частинами рівнянь, тобто рівняннями

$$\overline{\mathcal{C}} \varphi(x) + 2\overline{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\psi(t)}{t-x} dt = q(x), \quad -\overline{\mathcal{C}} \psi(x) + 2\overline{\alpha} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi(t)}{-l-t-x} dt = g(x). \quad (13)$$

Аналіз характеристичних частин інтегральних рівнянь дозволив встановити, що шукані функції мають структуру такого виду:

$$\varphi(x) = \frac{r(x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \quad \psi(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \quad (14)$$

де  $r(x)$ , та  $s(x)$  - гладкі функції в інтервалі  $(-1, 1)$ , сильно осцилюючі у малих колах точок  $x = \pm 1$ . Як показали математичні експерименти В.А.Стулея [10], при розв'язанні систем сингулярних інтегральних рівнянь аналогічних системам (11), (12) значення функцій  $r(x)$  та  $s(x)$  визначаються з високою точністю

практично на всьому інтервалі  $(-1, 1)$  при допомозі методу скінченних сум. Для розв'язку рівнянь будемо користуватись методом кінцевих сум, що базується на квадратурних формулах гаусового типу [1]

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}} dt = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{f(t_k)}{\sqrt{l^2 - t_k^2}}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{-l(t - x_m)\sqrt{l^2 - t^2}} dt = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{f(t_k)}{(t_k - x_m)\sqrt{l^2 - t_k^2}},$$

де  $t_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2M}\right)$ ,  $x_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M}\right)$ ,  $m=1,2,\dots,M-1$ - відповідно розв'язання многочленів Чебишева  $T_{M-1}(x)$  та  $U_{M-1}(x)$  першого та другого роду. Внаслідок отримуємо систему  $2M$  лінійних алгебраїчних рівнянь, що містять значення шуканих функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  у точках  $t_k$  та  $x_m$ . Для одержання визначеної системи рівнянь виразимо  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  через відповідні значення функцій  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  в вузлах  $t_k$ ,  $k=1,2,\dots,M$  при допомозі інтерполяційних многочленів Лагранжа:

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{Ml^2} \sum_{k=1}^M \frac{T_m\left(\frac{x_m}{l}\right) \cdot \varphi(t_k)(l^2 - t_k^2)}{(x_m - t_k)T_{m-1}\left(\frac{t_k}{l}\right)}, \quad \psi(x) \approx \frac{1}{Ml^2} \sum_{k=1}^M \frac{T_m\left(\frac{x_m}{l}\right) \cdot \psi(t_k)(l^2 - t_k^2)}{(x_m - t_k)T_{m-1}\left(\frac{t_k}{l}\right)}$$

### ЛІТЕРАТУРА

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.:Наукова думка, 1976. - 444 с.
2. Крауч С., Старфілд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир,1987. - 328с.
3. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. О решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований сложной структуры. -В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. - Ереван, 1979, С.81-84.
4. Марченко М.В. Применение метода граничных элементов для исследования трещины на поверхности раздела двух материалов.// Вопросы прочности и пластичности.- Днепропетровск: ДГУ,1996.-С.59-67.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи теории упругости для тел с трещинами. -К.: Наукова думка, 1981. - 324с.
6. Вигдерович И.Е. Основные граничные задачи плоской теории упругости для многослойных оснований сложной структуры Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. - Днепропетровск: ДГУ,1980. - 18 с.
7. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. - Днепропетровск, 1985. - Ч.1,162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85,8789-В.
8. Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К. Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры. - Докл. АН УССР. Сер.А., 1979.-№6.-С. 434-438.
9. Приварников А.К. Граничные задачи теории упругости для многослойных оснований простой и сложной структуры.: Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. - М.,1982. - 41 с.
10. Стулей В.А. О методе конечных сумм решения сингулярных интегральных уравнений смешанных плоских задач теории упругости.// Устойчивость и прочность элементов конструкций. - Днепропетровск: ДГУ,1988. - С.5-9.

## АВТОМАТИЗАЦІЯ ПІДТРИМКИ ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ СУБ'ЄКТОМ ФОНДОВОГО РИНКУ

Кельдер Т. Л., Глущевський В. В.

Фундаментальна роль фінансового ринку в сучасній ринковій економіці полягає в акумулюванні заощаджень економічних агентів та використанні цих коштів для створення нового капіталу.

Фінансовий ринок країни, коли усунуто монопольне панування на ньому держави, стає сферою дії не адміністративних, а економічних законів. Перехід підприємств від державної до акціонерної форми власності означає, що весь прибуток, окрім податків, залишається в їх власності, що свої тимчасово вільні кошти підприємства будуть тримати на рахунках банків лише в тому разі, якщо їм буде забезпечена норма відсотку, відповідно до його ринкового рівня.

У ринковій економіці утворюється новий механізм перерозподілу грошових накопичень в найбільш ефективні галузі господарювання через ринок цінних паперів (фондовий ринок).

Згідно з Концепцією функціонування і розвитку фондового ринку в Україні “ринок цінних паперів (ЦП) є багатофункціональною системою, яка сприяє акумулюванню капіталу для інвестиції у виробничу та соціальну сферу, структурній перебудові економіки, позитивній динаміці соціальної структури суспільства, підвищення добробуту громадян за рахунок володіння та вільного розпорядження цінними паперами, підготовленості населення до ринкових відносин” [1].

Інституційні інвестори все більше використовують персональні електронно-обчислювальні машини (ПЕОМ) для управління інвестиціями. Потенційне значення ПЕОМ – це можливість обробляти великі масиви даних та відразу ж отримувати результати у вигляді таблиць, графіків, рисунків тощо. Інвестор оцінює можливості купівлі або перспективи продажу ЦП швидше, точніше та в більш наглядній формі. У зв'язку з постійним вдосконаленням ПЕОМ з'являється потенційна можливість створення програмного забезпечення, спеціально призначеного для аналізу ринку ЦП – експертної системи (ЕС).

Пропонується концептуальна схема розробки експертної системи даного типу (рис.1), яка містить п'ять програмних блоків. Кожен з перелічених блоків має свою структуру, особливості та призначений для виконання строго визначених операцій.

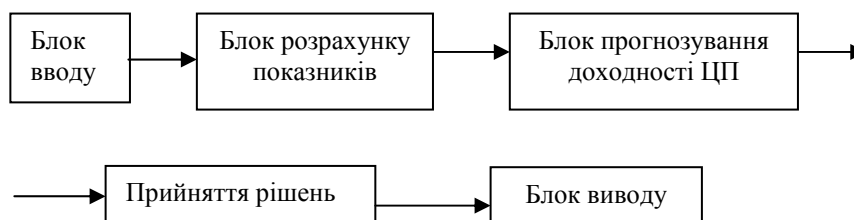


Рис. 1 Схема експертної системи

Блок вводу містить у собі чотири модулі за різновидами вхідної інформації (рис.2).



Рис. 2 Схема блоку вводу

1. Економічна та загальнополітична інформація, яка дає фактичний матеріал для прогнозування тенденцій в економіці, політиці та соціальній сфері в масштабах країни (напр., податки, державні

видатки, управління державним боргом, відсоткові ставки, інфляція, зовнішня торгівля та валютні курси та інше).

2. Інформація про стан галузі, яка дає фактичну картину та прогностичні дані її розвитку (баланси галузей народного господарства, міжгалузеві баланси, тощо).

3. Інформація про інвестиційну привабливість підприємства (фірми), яка дає можливість аналізувати його фінансову спроможність щодо прийнятих зобов'язань (балансовий звіт, звіт про прибутки та збитки, звіт про рух грошових коштів, звіт про зміни в акціонерному капіталі).

4. Інформація про ціни, яка містить поточні котировки, курси ЦП, а також про динаміку котировок та обсягів продажу ЦП за попередні періоди.

Кінцевий результат роботи цього блоку є сформовані відповідні бази даних.

Блок розрахунку показників призначений для перетворення введеної інформації та її подання у вигляді коефіцієнтів, або інших показників. Він поданий такими модулями (рис.3) :

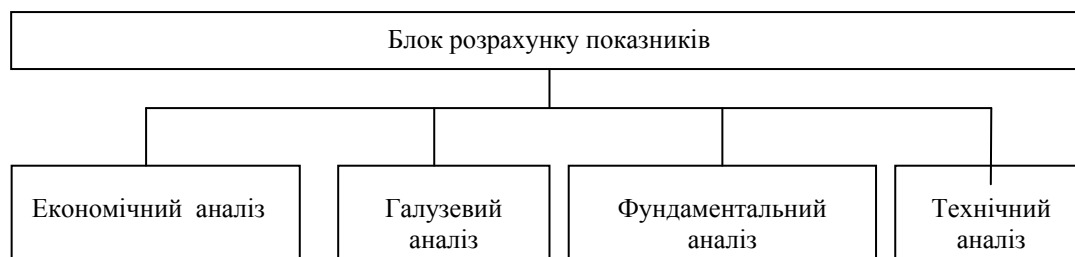


Рис. 3 Схема блоку розрахунку показників

1. Економічний аналіз, метою якого є визначення рівня стабільності економіки, від якого, в свою чергу, залежить ступінь доходності ЦП.

2. Галузевий аналіз спрямований на вивчення конкурентоспроможності конкретної галузі народного господарства в порівнянні з іншими. Результати аналізу :

- правовий клімат галузі і регіону;
- ступінь розвитку інфраструктури;
- фактори ринку, що впливають на збут;
- конкурентне напруження ринку;
- альтернативні способи інвестування та ін.

3. Фундаментальний аналіз фінансового становища підприємства (фірми). Зміст цього виду аналізу та взаємозв'язок між його розділами показано на рис. 4.

4. Технічний аналіз спрямований на фактори, які впливають на динаміку курсів ЦП. До показників, що розраховуються у цьому блоці, можна віднести : доходність ЦП (ефективність), варіація чи відхилення ефективності від сподіваної величини, як міри ризику, та інше [2].

Блок прогнозування складається з трьох модулів (рис.5):

1. Об'єктивна доходність ЦП: визначає прогностичну доходність ЦП, враховуючи інформацію щодо фінансового становища суб'єкта аналізу, галузевого фактору, а також загальноекономічної ситуації в країні та її вплив на діяльність емітента; містить в собі чотири підмодулі.

2. Статистична доходність ЦП: використовуються розраховані в модулі "Технічний аналіз" показники руху та обсягу продажу ЦП на фондовому ринку.

3. Блок зіставлення: дає інтегральний показник прогностичної доходності ЦП.

Блок прийняття рішень включає два взаємозв'язаних між собою модулі (рис. 6):

1. Оптимізація.
2. Оперативне керування.

Вхідні дані для цього блоку зберігаються в проміжній базі даних, яка формується на етапі прогнозування доходності ЦП емітентів, що аналізуються.

Блок виводу – це заключний етап роботи експертної системи, результатом якої, наприклад, можуть бути рекомендації особі, яка приймає рішення, щодо формування інвестиційного портфеля.

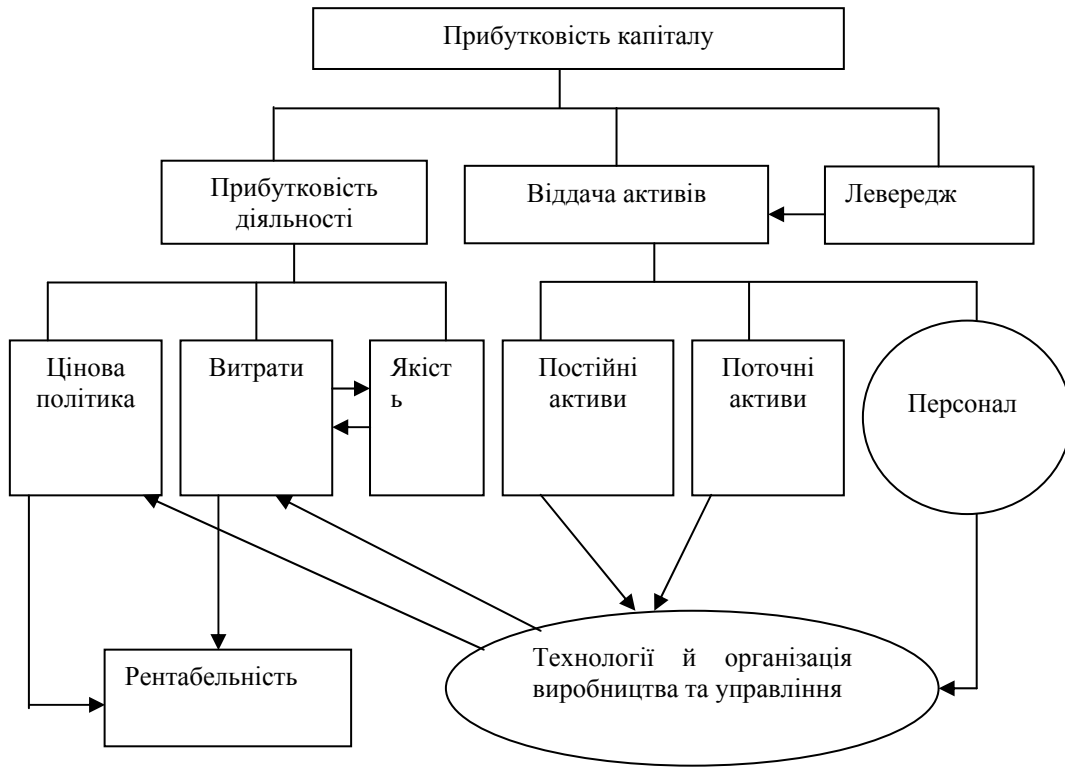


Рис. 4. Зміст аналізу господарської діяльності підприємства

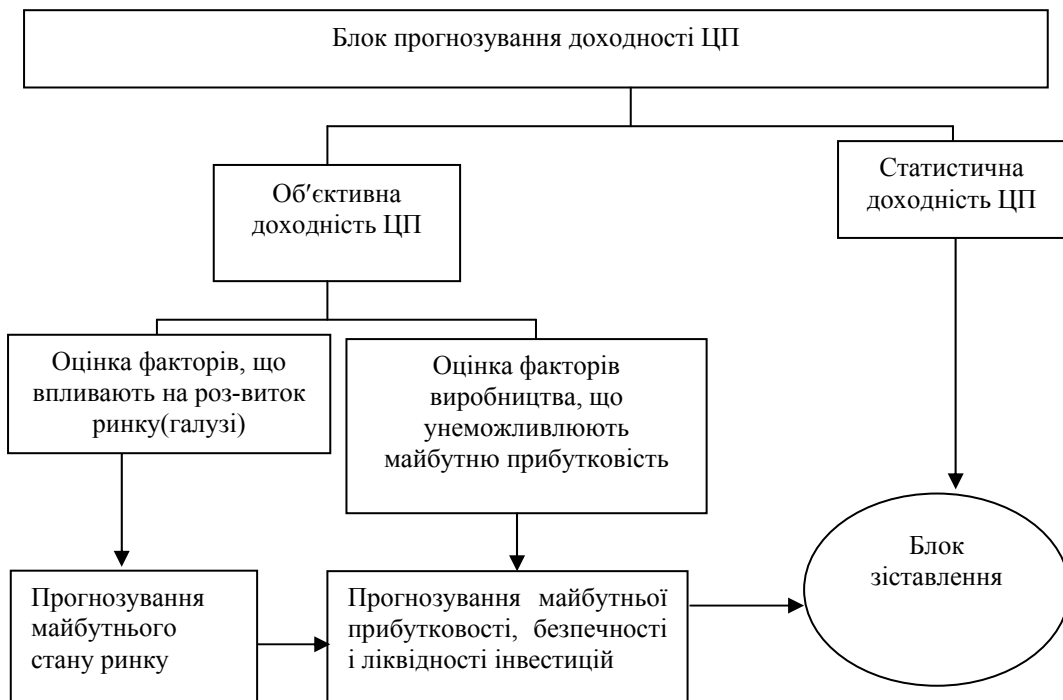


Рис. 5 Схема блоку прогнозування доходності ЦП

На закінчення буде слушним зробити таке зауваження – незважаючи на те, що, на жаль, неможливо користуватися повною мірою загальновідомими методами оцінки пакетів ЦП, оскільки нині ринок ЦП в Україні лише зароджується, існують усі передумови для створення системи підтримки прийняття рішень (експертні системи), яка, базуючись на досягненнях в області інформатики, економетрики та евристичному досвіді, може стати одним із засобів підвищення якості і ефективності управлінських рішень.

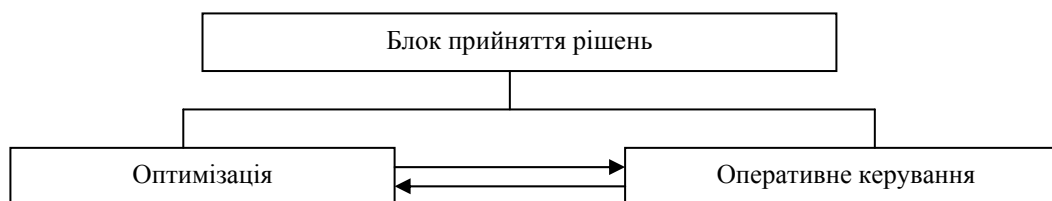


Рис. 6 Схема блоку прийняття рішень

## ЛІТЕРАТУРА

1. Концепція функціонування і розвитку фондового ринку в Україні, схвалена постановою Верховної Ради України 22 вересня 1995р.// Финансовая Украина. – 1996. -№4
2. Гитман Л.Дж., Джонк М.Д. Основы инвестирования. Пер. с англ.-М.: Дело, 1997.-1008с.
3. Мендрул О.Г., Шевчук І.А. Ринок цінних паперів: Навч. Посібник.-К.: КНЕУ, 1998.-152с.

УДК 519.68(001.4)

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Козіна Г.Л.

Досліджуються відомі ([1], [2]) задачі на графах - про остовні дерева, про досконалі паросполучення, про комівояжера - з інтервально-зваженими ребрами та інтервальною цільовою функцією вагового вигляду. Такі постановки задач виникають, коли параметри задачі невідомі точно і їхня невизначеність описується через інтервали. У роботі дане поняття допустимого розв'язку і введений порядок на множині допустимих рішень відносно цільової функції. Цей порядок породжує паретовську множину альтернатив. Окрім паретовської, розглядаються і інші множини альтернатив: повна множина альтернатив і лексикографічна множина альтернатив. У гіршому випадку паретовська множина альтернатив і повна множина альтернатив співпадають з множиною допустимих розв'язків. Оскільки потужність множини допустимих розв'язків має експоненціальну оцінку [3], тому припускається недоцільним пошук усіх представників паретовської і повної множини альтернатив. У роботі запропоновані алгоритми, що дозволять знаходити усіх представників лексикографічної множини альтернатив. Для задач про остовні дерева і про досконалі паросполучення ці алгоритми є поліноміальними.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай даний  $n$  - вершинний граф  $G = (V, E)$ , в якому кожному ребру  $e \in E$  приписана інтервальна вага  $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ . Допустимий розв'язок визначається у формі підграфа  $x = (V, E_x)$ ,  $E_x \subseteq E$ . Позначимо множину усіх допустимих розв'язків через  $X$ . На множині  $X$  визначимо інтервальну цільову функцію таким чином

$$w(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \quad (1)$$

Очевидно, що  $w(x) = [w_1(x), w_2(x)]$ ,

$$\text{де } w_i(x) = \sum_{e \in E_x} w_i(e), \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Введемо порядок на множині допустимих розв'язків  $X$ .

**Визначення 1.** Допустимий розв'язок  $x$  “краще” допустимого розв'язку  $y$ , якщо кінці інтервалу  $w(x)$  не переважають відповідних кінців інтервалу  $w(y)$  ( $w_i(x) \leq w_i(y)$ ,  $i = 1, 2$ ) і принаймні один кінець інтервалу  $w(x)$  суворо менш відповідного кінця інтервалу  $w(y)$ .

**Визначення 2.** Допустимий розв'язок  $\tilde{x}$  називається паретовським оптимумом, якщо для нього не існує “кращого” допустимого розв'язку.

Всі паретовські оптимуми утворюють паретовську множину альтернатив  $\tilde{X}$ .

### МНОЖИНИ АЛЬТЕРНАТИВ

У ролі розв'язку інтервальної задачі може бути визначена як паретовська множина, так і інші множини альтернатив, які є її підмножинами. Найбільш розповсюдженими є повна множина альтернатив і лексикографічна множина.

Паретовську множину альтернатив можна розбити на класи еквівалентності, що містять елементи з однаковими значеннями інтервальної цільової функції. Якщо взяти по одному представнику з кожного класу еквівалентності, то ці розв'язки утворять множину, яку ми назвемо **повною множиною альтернатив**. Позначимо повну множину альтернатив через  $\hat{X}$ . Помітимо, що на відзнаку від паретовської множини повна множина альтернатив визначається неоднозначно, якщо існують паретовські рішення з однаковими значеннями цільової функції. Якщо всі елементи паретовської множини мають одне і те ж значення цільової функції, то повна множина альтернатив складається з одного елементу - будь-якого з паретовських розв'язків.

Після вибору повної множини альтернатив, у ній можна виділити лексикографічну множину альтернатив. У повній множині альтернатив завжди існують розв'язок  $x^*$  з мінімальним значенням лівої межі інтервалу цільової функції і розв'язок  $x^{**}$  з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції:

$$\begin{aligned} x^* : w_1(x^*) &= \min\{w_1(x) | x \in \hat{X}\} \\ x^{**} : w_2(x^{**}) &= \min\{w_2(x) | x \in \hat{X}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Підмножина повної множини альтернатив, що об'єднує розв'язки  $x^*$  і  $x^{**}$ , називається **лексикографічною множиною альтернатив**. Позначимо лексикографічну множину альтернатив через  $\hat{X}_{lex}$ . Помітимо, що лексико-графічна множина альтернатив  $\hat{X}_{lex}$  може складатися або з одного, або з двох елементів.

Очевидні такі включення  $\hat{X}_{lex} \subseteq \hat{X} \subseteq \tilde{X} \subseteq X$ .

### ОЦІНКИ ПОТУЖНОСТІ МНОЖИН АЛЬТЕРНАТИВ

**Твердження 1.** Якщо потужність лексикографічної множини дорівнює 1,  $|\hat{X}_{lex}| = 1$ , то потужність повної множини альтернатив також дорівнює 1,  $|\hat{X}| = 1$ , а паретовська множина  $\tilde{X}$  складається з розв'язків з однаковими значеннями інтервальної цільової функції.

**Доказ.** Нехай  $x^* = x^{**} = x'$ , тоді з співвідношень (3) витікає, що  $w_1(x') \leq w_1(x)$  і  $w_2(x') \leq w_2(x)$  для будь-якого розв'язку  $x$  з повної множини альтернатив  $\hat{X}$ . Таким чином, згідно з визначенням 1, розв'язок  $x'$  є “кращим” для будь-якого розв'язку з  $\hat{X}$  або співпадає з ним по значенню інтервальної цільової функції. Останнє неможливо, тому що повна множина альтернатив містить по одному представнику з кожного класу еквівалентності. А оскільки повна множина альтернатив є підмножиною паретовської множини, то, згідно з визначенням 2, воно не повинно містити інші елементи, окрім  $x'$  (тому що будь-які інші розв'язки не були б паретовськими). Отже, повна множина альтернатив  $\hat{X}$



складається з одного елементу, а саме - розв'язку  $x'$ . Це означає, що паретовська множина  $\tilde{X}$  містить один клас еквівалентності, тобто усі його елементи мають одне і те ж значення інтервальної цільової функції.

Твердження доведене.

Оцінимо потужність повної множини альтернатив  $\hat{X}$  у гіршому випадку.

**Твердження 2.** Для кожної задачі, що розглядається - про остовні дерева, досконалі паросполучення, комівояжера - існує таке інтервальне зважування ребер графа  $G$ , при якому повна множина альтернатив, паретовська множина альтернатив і множина допустимих розв'язків співпадають:

$$\hat{X} = \tilde{X} = X.$$

**Доведення.** Розглянемо задачу про остовні дерева на  $n$ -вершинному графі  $G = (V, E)$  з інтервально-зваженими ребрами. Нехай граф  $G$  має  $m$  ребер. Перенумеруємо ребра графа  $G$  числами  $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Нехай  $R = 2^{m+1} + 1$ . Призначимо кожному ребру  $e \in E$  інтервальну вагу в відповідності до його номера  $t(e)$ :

$$w(e) = [2^{t(e)}, R - 2^{t(e)}].$$

Нехай  $X$  - множина усіх остовних дерев графа  $G$ . Тоді для будь-якого остовного дерева  $x \in X$ , згідно з (2), маємо

$$w(x) = [w_1(x), QR - w_1(x)], \quad (4)$$

де  $Q = n - 1$  (кожне остовне дерево в  $n$ -вершинному графі має рівно  $n - 1$  ребро).

Очевидно, що в графі  $G$  немає остовних дерев з однаковими значеннями інтервальної цільової функції, тому що

$$\forall x \in X \quad w_1(x) = \sum_{e \in E_x} 2^{t(e)}$$

і розклад по мірах  $2$  єдиний. Крім того, для кожного розв'язку  $x \in X$  не існує розв'язку  $y \in X$ , що був його "краще" (см (4)):

якщо  $w_1(x) < w_1(y)$ , то  $w_2(x) > w_2(y)$ ;

якщо  $w_1(x) > w_1(y)$ , то  $w_2(x) < w_2(y)$ .

Таким чином, будь-який розв'язок  $x \in X$  є паретооптимальним, тобто  $\tilde{X} = X$ , а оскільки всі значення інтервальної цільової функції різноманітні, то  $\hat{X} = \tilde{X}$ . Звідси  $\hat{X} = \tilde{X} = X$ .

Твердження доведене.

Аналогічним образом цей факт доводиться для задачі про досконалі паросполучення (ЗСП) ( $Q = n/2$ ) і задачі комівояжера ( $Q = n$ ) (ЗК).

Для повного  $n$ -вершинного графа  $G$  відомі [3] наступні значення потужності множини допустимих розв'язків  $X$ :

$$|X| = \begin{cases} n^{n-2} & \text{ЗОД} \\ \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}} & \text{ЗСП} \\ (n-1)!/2 & \text{ЗК} \end{cases}$$

Таким чином, в гіршому випадку повна множина альтернатив  $\hat{X}$  і паретовська множина  $\tilde{X}$  мають експоненціальні оцінки потужності. Звідси бачиться недоцільність пошуку усіх представників цих множин.

Побудуємо алгоритм, що дозволить знайти усіх представників лексикографічної множини альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ .

### АЛГОРИТМ

Нехай даний граф  $G = (V, E)$  і потрібно знайти лексикографічну множину альтернатив  $\hat{X}_{lex}$  для задачі комівояжера з інтервально зваженими ребрами. Без втрати загальності будемо вважати, що всі інтервальні ваги ребер мають цілі кінці (множення на додатну константу всіх інтервалів не змінює паретовську множину).

**Алгоритм  $\alpha$  побудови лексикографічної множини альтернатив  $\hat{X}_{lex}$**

1. Обчислимо

$$S_1 = \sum_{e \in E} w_1(e),$$

$$S_2 = \sum_{e \in E} w_2(e).$$

2. Покладемо

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{S_2 + 1}.$$

3. Застосуємо алгоритм (наприклад, метод гілок і меж), який розв'язує задачу комівояжера на мінімум з цільовою функцією

$$F(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x).$$

4. Нехай  $x^*$  - розв'язок, що отриманий в результаті застосування алгоритму п. 2-3, тобто

$$F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in X. \quad (5)$$

5. Покладемо

$$\lambda_1 = \frac{1}{S_1 + 1}, \quad \lambda_2 = 1.$$

6. Застосуємо алгоритм (наприклад, метод гілок і меж), який розв'язує задачу комівояжера на мінімум з цільовою функцією

$$F(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x).$$

7. Нехай  $x^{**}$  - розв'язок, що отриманий в результаті застосування алгоритму п. 5-6, тобто

$$F(x^{**}) \leq F(x) \quad \forall x \in X. \quad (6)$$

8. Якщо  $w(x^*) = w(x^{**})$ , то будь-який один з розв'язків -  $x^*$  або  $x^{**}$  - утворить лексикографічну множину альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ , яка відповідає деякій повній множині альтернатив  $\hat{X}$ .

Якщо  $w(x^*) \neq w(x^{**})$ , то розв'язки  $x^*$  і  $x^{**}$  утворюють лексикографічну множину альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ , яка відповідає деякій повній множині альтернатив  $\hat{X}$ .

**Твердження 3.** Побудовані за алгоритмом  $\alpha$  розв'язки  $x^*$  і  $x^{**}$  є паретовськими оптимумами.

**Доказ.** Доведемо твердження від супротивного. Нехай розв'язок  $x^*$  не є паретовським. Тоді, згідно з визначенням 2, для нього існує "кращий" розв'язок:

$$\exists \bar{x} \in X \quad w_1(\bar{x}) \leq w_1(x^*), \quad w_2(\bar{x}) \leq w_2(x^*) \quad (7)$$

і принаймні одна з цих нерівностей суворі.

Оскільки  $\lambda_1 > 0$  і  $\lambda_2 > 0$  і одна з нерівностей (7) суворі, то

$$\lambda_1 w_1(\bar{x}) + \lambda_2 w_2(\bar{x}) < \lambda_1 w_1(x^*) + \lambda_2 w_2(x^*)$$

або 
$$F(\bar{x}) < F(x^*),$$

але це суперечить (5). Отже, розв'язок  $x^*$  є паретооптимальним.

Аналогічно доводиться паретооптимальність розв'язку  $x^{**}$ .

Твердження доведене.

**Твердження 4.** Якщо  $w(x^*) = w(x^{**})$ , то будь-який один з розв'язків -  $x^*$  або  $x^{**}$  - утворить лексикографічну множину альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ , яка відповідає деякій повній множині альтернатив  $\hat{X}$ . Якщо  $w(x^*) \neq w(x^{**})$ , то розв'язки  $x^*$  і  $x^{**}$  утворять лексикографічну множину альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ , яка відповідає деякій повній множині альтернатив  $\hat{X}$ .

**Доказ.** Згідно з твердженням (3), розв'язки  $x^*$ ,  $x^{**}$  є паретовськими оптимумами. Виберемо повну множину альтернатив  $\hat{X}$ , що містить розв'язок  $x^*$ . За алгоритмом  $\alpha$  для розв'язку  $x^*$  маємо  $F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in X$ , тобто

$$w_1(x^*) + \frac{1}{S_2 + 1} w_2(x^*) \leq w_1(x) + \frac{1}{S_2 + 1} w_2(x) \quad \forall x \in X. \quad (8)$$

Оскільки  $\frac{1}{S_2 + 1} w_2(x) < 1 \quad \forall x \in X$ , то з (8) слідує  $w_1(x^*) \leq w_1(x) \quad \forall x \in X$ , а значить, для вибраної повної множини альтернатив  $\hat{X}$  вірно

$$w_1(x^*) \leq w_1(x) \quad \forall x \in \hat{X}, \quad (9)$$

тобто розв'язок  $x^*$  є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням лівої межі інтервалу цільової функції.

Аналогічно для розв'язку  $x^{**}$  одержуємо нерівність

$$w_2(x^{**}) \leq w_2(x) \quad \forall x \in \hat{X}, \quad (10)$$

тобто розв'язок  $x^*$  є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції.

Якщо  $w(x^*) \neq w(x^{**})$ , то за визначенням лексикографічної множини альтернатив обидва розв'язки  $x^*$  і  $x^{**}$  є її представниками.

Якщо  $w(x^*) = w(x^{**})$ , то з (10) слідує  $w_2(x^*) \leq w_2(x) \quad \forall x \in \hat{X}$ , тобто розв'язок  $x^*$  є лексикографічним оптимумом з мінімальним значенням правої межі інтервалу цільової функції. У цьому випадку розв'язок  $x^*$  має мінімальні в повній множині альтернатив  $\hat{X}$  значення лівої і правої меж інтервалу цільової функції і, отже, є єдиним лексикографічним оптимумом у цій множині альтернатив.

Твердження доведене.

Твердження 3 і 4 обґрунтовують вірність застосування алгоритму  $\alpha$  для побудови лексикографічної множини альтернатив  $\hat{X}_{lex}$ .

**Зауваження.** Описаний у роботі алгоритм дозволяє знаходити лексикографічну множину альтернатив для задачі комівояжера з інтервальними параметрами. Аналогічний підхід застосовується для інтервальних задач про досконалі паросполучення і про остовні дерева. Для цих задач означений алгоритм буде поліноміальним, якщо використовувати відомі [1] поліноміальні алгоритми розв'язування задач про досконалі паросполучення і про остовні дерева з дійсними параметрами.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.- М: Мир,1978.
2. Kozina, G.L. and Perepelitsa, V.A. Interval Spanning Trees Problem: Solvability and Computational Complexity, Interval Computations, 1, (1994), pp. 42--50.
3. Emelichev, V.A. and Perepelitsa, V.A. Complexity of vector optimization problems on graphs, Optimization, 22 (6) (1991), pp. 903--918.

УДК 007.681.518.2

## ПРО ДЕЯКИЙ ПІДХІД ДО ПРОГНОЗУВАННЯ ПОВЕДІНКИ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ

Кондратьєва Н.О.

В умовах постійного ускладнення світу машин механізмів, розвитку техніки і технології, цілеспрямованої діяльності людини, що приводять до ускладнення штучного середовища, взаємовідносин між людиною і природою, необхідність прогнозування поведінки складних систем є особливо актуальною.

До характерних рис складних систем варто віднести багатомірність, різнотипність властивостей об'єкта і важкість у формуванні моделі у зв'язку з нестачею знань про внутрішні функціональні взаємозв'язки.

Для прогнозування деякої виділеної властивості об'єкта при відсутності інформації про його структуру і внутрішні взаємозв'язки використовується в основному спосіб міркувань за аналогією. Для цього проводяться виміри деяких виділених властивостей об'єкта дослідження і складається емпірична таблиця. Формулювання закономірностей видається досить складною проблемою, оскільки вони повинні служити основним джерелом інформації про внутрішню структуру і функціональні зв'язки підсистем [1].

Виділення системи на об'єкті носить індивідуальний характер і визначається метою й обмеженнями на дослідження.

У зв'язку з вищевказаним, видається необхідним процес прогнозування поведінки складних систем проводити в рамках автоматизованої системи, організованої на основі ієрархічного підходу до розв'язку системних задач.

Ієрархічна організація відображає рівень знання щодо феноменів, які розглядаються [2].

Вирішення проблеми обробки різнотипних даних здійснюється на самому нижньому рівні ієрархії шляхом абстрагування множини властивостей  $a_i$  і їхніх проявів  $A_i$  в абстрактні множини змінних  $v_i$  і їхніх значень  $V_i$  за допомогою введених каналів спостереження  $o_i$  й абстрагування  $e_i^{-1}$ , реалізованих за допомогою функції

$$o_i : A_i \rightarrow V_i$$

гомоморфною щодо передбачуваних властивостей множин  $A_i$  і  $V_i$ , а також функцією

$$e_i^{-1} : V_i \rightarrow A_i,$$

ізоморфною щодо математичних властивостей множини  $V_i$  і  $V_i$ , де  $V_i$  - множина станів конкретної змінної.

Прогноз поведінки складної системи проводиться на параметричній множині  $W$ , що вводиться аналогічно змінним за допомогою відповідних функцій

$$w_j : B_j \rightarrow W_j,$$

$$\xi_j^{-1} : W_j \rightarrow B_j,$$

де  $B_j$  - множина проявів базових властивостей системи на об'єкті,  $\dot{W}_j, W_j$  - множини станів відповідно до конкретного й узагальненого параметра,  $W_j$  - канали спостереження для базової змінної,  $\xi_j^{-1}$  - канал абстрагування для базової змінної. Таким чином, формування вхідної системи  $S$  - системи нульового рівня завершується формуванням абстрактних множин виділених змінних і параметрів. Вхідна система включає три примітивні системи:

$$O = (\{(a_i, A_i) \mid i \in N_n\}, \{(b_j, B_j) \mid j \in N_m\}),$$

$$I = (\{(v_i, V_i) \mid i \in N_n\}, \{(w_j, \dot{W}_j) \mid j \in N_m\}),$$

$$I = (\{(v_i, V_i) \mid i \in N_n\}, \{(w_j, W_j) \mid j \in N_m\})$$

і відношення між ними

$$Q = (\{(A_i, \dot{V}_i, O_i) \mid i \in N_n\}, \{(B_j, \dot{W}_j, w_j) \mid j \in N_m\}),$$

$$\xi = (\{(V_i, V_i, e_i) \mid i \in N_n\}, \{(\dot{W}_j, W_j, \xi_j) \mid j \in N_m\}),$$

де  $O$  - система об'єкта,  $I$  і  $I$  - відповідно конкретна й узагальнена системи,  $Q$ ,  $\xi$  і - відповідно повний канал спостереження й повний канал абстрагування/конкретизації.

Тоді вхідну систему можна представити таким способом

$$S = (O, I, I, Q, \xi).$$

Дані, одержувані в результаті спостереження або виміру на наступному рівні ієрархії, представляються функцією

$$d : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V},$$

де  $\mathbf{W} = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m,$

$$\mathbf{V} = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m.$$

Перший епістемологічний рівень ієрархії представляє систему даних

$$D = (I, d).$$

Породження даних або прогноз станів проводиться на основі виділення параметрично інваріантних обмежень або сусідства змінних на загальній параметричній множині  $\mathbf{W}$ . Параметрично інваріантне обмеження на упорядкованій параметричній множині визначається за допомогою маски

$$M \subseteq V \times R,$$

так, що усякій  $(v_i, r_j) \in M$  відповідає одне рівняння

$$S_{k,W} = v_i, r_j(W)$$

для змінних  $v_i \in V$  і правил зрушення  $r_j \in R$ , причому  $r_j$  - це однозначна функція

$$r_j : W \rightarrow W.$$

Для упорядкованої множини  $W$  правило зрушення може бути задане рівнянням

$$r_j(W) = W + \rho,$$

де  $\rho$  - ціла константа.  $S_{k,W}$  - вибіркові змінні, обумовлені маскою  $M$ . Повний стан вибірових змінних визначається таким рівнянням

$$C = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{|M|}.$$

Поведінка вибірових змінних  $S_i$  задається за допомогою функції поведінки

$$f_B : C \rightarrow \{0,1\},$$

де  $f_B(c) = 1$ , якщо стан  $c$  входить у перелік, і  $f_B(c) = 0$  у противному випадку.

Для породження даних необхідно введення визначника входу-виходу, що дозволяє розділити основні змінні  $V_i$  на вхідні і вихідні. Таке оголошення робиться за допомогою функції

$$u : N_n \rightarrow \{0,1\},$$

такий, що якщо  $u(i) = 0$  або  $u(i) = 1$ , то це означає, що  $v_i$  є відповідно вхідною або вихідною. Так, у випадку розподілу змінних необхідно введення розподілу й у вибірові змінні  $S_i$ . Це можливо здійснити через маску  $M$ , розбивши задану маску на дві підмаски

$$\tilde{M} = (M, M_e, M_{\bar{e}}),$$

для котрої справедливо, що  $M_e, M_{\bar{e}} \subset M; M_e \cup M_{\bar{e}} = M, M_e \cap M_{\bar{e}} = \emptyset$ ,

де  $\tilde{M}$  - маска спрямованої системи,  $M$  - вхідна маска,  $M_e$  - підмаска, що визначає вхідні вибірові змінні,  $M_{\bar{e}}$  - підмаска, що визначає вихідні вибірові змінні. Через підмаски  $M_e$  і  $M_{\bar{e}}$  визначаються дві множини станів:

$$E = \times_{k \in K_e} S_k,$$

$$\bar{E} = \times_{k \in K_{\bar{e}}} S_k,$$

де  $K_e$  і  $K_{\bar{e}}$  - множини ідентифікаторів вибірових змінних, обумовлених  $M$ , що вводяться за допомогою функцій

$$\lambda_e : M_e \rightarrow K_e,$$

$$\lambda_{\bar{e}} : M_{\bar{e}} \rightarrow K_{\bar{e}}.$$

Тоді, функція поведінки для спрямованих систем має вигляд

$$\hat{f}_B : E \times \bar{E} \rightarrow [0,1].$$

Спрямована система з поведінкою визначається трійкою

$$\bar{F}_B = (\bar{I}, \tilde{M}, \hat{f}_B).$$

Породна функція поведінки для нейтральних систем вводиться за допомогою розподілу  $M$  маски на дві підмаски  $M_g$  і  $M_{\bar{g}}$ , тобто

$$M_G = (M, M_g, M_{\bar{g}}),$$

де  $M_g$  - породжена маска,  $M_{\bar{g}}$  - маска, що породжує.

Породна функція поведінки задається функцією

$$f_{GB} : \bar{G} \times G \rightarrow \{0,1\},$$

при  $\bar{G} = \times_{k \in K_{\bar{g}}} S_k, G = \times_{k \in K_g} S_k,$

де  $G, \bar{G}$  - множини станів вибірових змінних  $S_k, K_g, K_{\bar{g}}$  - множини ідентифікаторів, обумовлених маскою  $M_G$ .

Породна функція поведінки для спрямованих систем задається четвіркою

$$\widehat{M}_G = (M, M_e, M_g, M_{\bar{g}}),$$

де  $\{M_e, M_g, M_{\bar{g}}\}$  - це розбивка  $M$ .

Тоді породна функція поведінки для спрямованих систем задається таким чином

$$f_{GB} : E \times \bar{G} \times G \rightarrow [0,1].$$

Обчислення розподілу імовірностей робиться через функцію  $f_B(c)$  відповідно до маски  $M$ .

Будь-яка маска характеризується глибиною, тобто числом стовпів, що визначаються як

$$\Delta M = 1 + \max \rho - \min \rho,$$

де оператори  $\max$  і  $\min$  застосовні до всіх цілих  $(v_i, t + \rho) \in M$ . У той же час, вибір глибини маски  $\Delta M$  обмежений складністю обчислювальної обробки.

Так для системи з п'ятьма змінними  $v_i$  і глибиною маски  $\Delta M = 4$  число змістовних підмасок  $N(n, \Delta M) = 742,568$ , що представляє значну важкість обчислювального характеру.

За кількісну оцінку ступеня недетермінованості супутньому породженню даних може бути використана ентропія

$$H(f(c) | c \in C) = - \sum_{c \in C} a(c) \log_2 f(c).$$

Тоді при заданій породній масці  $M_G$  для нейтральних систем породна нечіткість визначається як

$$H(G | \bar{G}) = - \sum_{g \in \bar{G}} f(\bar{g}) \sum_{g \in G} f(g | \bar{g}) \log_2 f(g | \bar{g})$$

або  $H(G | \bar{G}) = H(c) - H(\bar{G})$ ,

а для спрямованої системи

$$H(G | E \times \bar{G}) = H(c) - H(E \times \bar{G}).$$

Мінімальне значення породної нечіткості визначає кращий варіант у змісті визначення прогнозу або передісторії при обраній масці  $M_G$ .

Таким чином, прогнозування стану складної системи здійснюється за двома критеріями: складність і нечіткість, шляхом ранжировки підмасок  $M_i \in M, i = 1, \dots, n$  і відповідних до них нечіткостей  $H(\times)$ . Даний підхід може бути використаний для розв'язку найбільш важливих задач, що виникають при виділенні системи на об'єкті дослідження, при обробці емпіричних даних при вивченні складних систем різної фізичної природи.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Лобов Г.С. Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. – Новосибирск: Наука, 1981, 161 с.
2. Клар Дж. Абстрактное понятие системы как методологического средства. Исследования по общей теории систем. - М.: Наука, 1969.- 430с.
3. Клар Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач.- М.: Радио и связь, 1990.- 544 с.

## АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМИ РІЗНОЇ ФОРМИ

Лисенко В. В., Толлок О. В.

Розглянемо задачу про стаціонарне поширення тепла в півплощині з включенням, де на межі області задані змішані крайові умови. Під включенням розуміється багатозв'язність області.

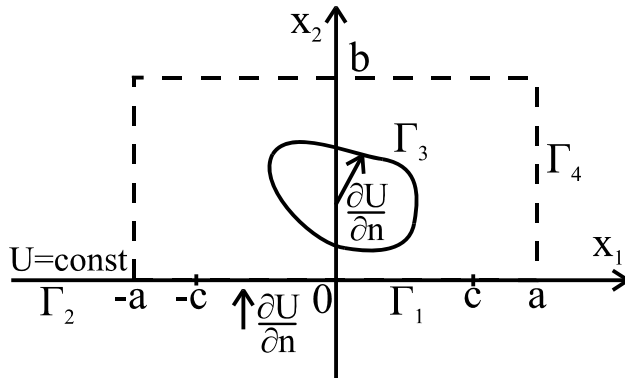


Рис. 1 Змішана задача теплопровідності для півплощини з включенням

Математично цей процес описується так (рис.1):  $\nabla^2 u(x) = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \bar{q}_1(x), \quad (1)$$

$$u(x)|_{\Gamma_2} = \bar{u}_1(x),$$

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} = \bar{q}_2(x);$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\Gamma_1$  – частина півплощини, на якій заданий тепловий потік,

$x_1 \in [-c, c]$ ,  $\Gamma_2$  – інша частина межі півплощини,  $\Gamma_3$  – границя включення,  $\Gamma_4$  – контур, на одній стороні якого розташований відрізок  $[-c, c]$ . На межі включення можуть бути задані потік, температура або змішані умови.

Цю задачу будемо розв'язувати за допомогою змішаного алгоритму на базі методу крайових елементів та методу функцій Гріна [1], що застосовувався для автоматизації подібної задачі тільки без включення [2]. У даній роботі подані викладення і розрахунки розв'язку задачі теплопровідності для півплощини з включенням у вигляді багатокутника.

Для цього обмежимо прямокутником  $\Gamma_4$  півплощину із включенням, на одній із сторін якого буде розташований контур  $\Gamma_1$ , де заданий тепловий потік. Розіб'ємо новий контур і межу включення на граничні елементи і побудуємо розв'язок методом крайових рівнянь [3].

У випадку постійних елементів дискретна форма для крайового інтегрального рівняння приймає вигляд системи рівнянь (2):

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{\Gamma_j} q_j^* d\Gamma - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} q_j \int_{\Gamma_j} u_j^* d\Gamma + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} u_j \int_{\Gamma_j} q_j^* d\Gamma - \sum_{j=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} q_j \int_{\Gamma_j} u_j^* d\Gamma + \\ + \sum_{j=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} u_j \int_{\Gamma_j} q_j^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_1} \bar{q}_j \int_{\Gamma_j} u_j^* d\Gamma - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \bar{u}_j \int_{\Gamma_j} q_j^* d\Gamma + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} \bar{q}_j \int_{\Gamma_j} u_j^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

$i=1..N,$

де  $q_j$  – шукані розміри потоку,  $u_j$  – шукані розміри температури,  $\bar{q}_i$  – задані розміри потоку,  $\bar{u}_i$  – задані розміри температури,  $c_i=1/2$  (тому що для постійних елементів границя завжди є “гладкою”),  $u^*$  – вагова

функція,  $q^* = \frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $N_k$  – кількість крайових елементів на границі  $\Gamma_k$  ( $k=1..4$ ),  $\Gamma_{k_j}$  – довжина  $j$ -го елемента

на границі  $\Gamma_k$ ,  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ . При цьому на границі включення можуть бути задані як функція температури, тоді невідомими будуть  $q_j$  або її похідна, тоді невідомими будуть значення температури  $u_j$ . Як вагову функцію візьмемо фундаментальний розв'язок для площини (3).



$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (3)$$

де 
$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Координати джерела  $(\xi_1, \xi_2)$  вибираємо посередині крайового елемента.

Підставляючи вагову функцію для кожної точки в (2), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами якої є криволінійні інтеграли першого роду, що обчислюються для кожного елемента.

Похідна за нормаллю обчислюється аналітично з автоматичним визначенням направляючих косинусів нормалі до осей за допомогою формули (4).

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} n_2, \quad (4)$$

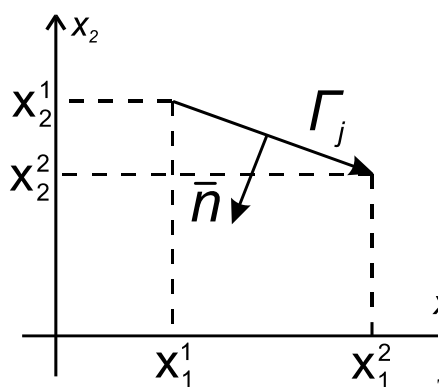
де  $n_i = \cos(\vec{n} \wedge x_i)$ ,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до крайового елемента (рис. 2).



Рис. 2 Правило проведення нормалі (а – зовнішня задача, б – внутрішня задача).

Криволінійний інтеграл, після перетворень у визначений, одержуємо у такому вигляді (5):

$$\oint_{\Gamma_j} f(x_1, x_2) d\Gamma = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2} f(x_1(t), x_2(t)) dt, \quad (5)$$



$$x_1(t) = x_1^1 \frac{1}{2(1-t)} + x_1^2 \frac{1}{2(1+t)},$$

$$x_2(t) = x_2^1 \frac{1}{2(1-t)} + x_2^2 \frac{1}{2(1+t)},$$

де  $(x_1^1, x_2^1)$  і  $(x_1^2, x_2^2)$  – координати початку і кінця крайового елемента (рис. 3),  $t \in [-1, 1]$ ,  $\Gamma_j$  – довжина  $j$ -го елемента.

Рис. 3 Геометрія крайового елемента

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2) містить  $N$  рівнянь і  $N+N_4$  невідомих. Додаємо до системи рівняння (6), що виражають значення температури в кожній точці прямокутного контуру  $\Gamma_4$  через значення температури на границі  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ :

$$u_k = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_1+N_2} u_j \arctg \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \Big|_{c_{j-1}}^{c_j}, \quad (6)$$

де  $k=N_1+N_2+N_3+1 \dots N_1+N_2+N_3+N_4$ ,  $c_{j-1} = x_{1j}^1$  і  $c_{j-1} = x_{1j}^2$  – границі інтегрування, і одержуємо повну систему рівнянь (7), розв’язавши яку ми одержимо значення всіх невідомих, крім значень температури на контурі  $\Gamma_4$ :

$$\begin{aligned}
 c_i u_i + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left[ \int_{\Gamma_{1j}} q_j^* d\Gamma - \frac{1}{\pi} \sum_{k=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} \operatorname{arctg} \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \Big|_{c_{j-1}}^{c_j} \right] - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} q_j \int_{\Gamma_{2j}} u_j^* d\Gamma + \\
 + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} u_j \int_{\Gamma_{3j}} q_j^* d\Gamma - \sum_{j=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} q_j \int_{\Gamma_{4j}} u_j^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_1} \bar{q}_j \int_{\Gamma_{1j}} u_j^* d\Gamma - \\
 - \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} \bar{u}_j \left[ \int_{\Gamma_{2j}} q_j^* d\Gamma - \frac{1}{\pi} \sum_{k=N_1+N_2+N_3+1}^{N_1+N_2+N_3+N_4} \operatorname{arctg} \frac{x_{1k} - y_1}{x_{2k}} \Big|_{c_{j-1}}^{c_j} \right] + \sum_{j=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} \bar{q}_j \int_{\Gamma_{3j}} u_j^* d\Gamma \quad (7)
 \end{aligned}$$

Значення температури на контурі  $\Gamma_4$  можна виразити через значення температури на границі  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  за формулою (6), тому що температура на контурі  $\Gamma_1$  була знайдена з розв’язку системи (7), а температура на межі  $\Gamma_2$  задана за умовою задачі.

Даний алгоритм був реалізований у системі Borland Delphi 3.0. Система рівнянь розв’язана методом Гаусса [4]. Інтегралі обчислені за допомогою квадратурної формули Гаусса [3]. Для прямокутника розв’язок записується у вигляді інтегрального представлення, для частини області, що залишилася, через функцію Гріна.

Нижче приведені результати розв’язку даної задачі в півплощині з включенням у вигляді ромба для області розміром  $-2.00 \leq x_1 \leq 2.00$   $0.00 \leq x_2 \leq 2.00$ ,  $a=1.00$ ,  $b=1.00$ , з апроксимацією по 30 постійних елементів на кожному контурі.

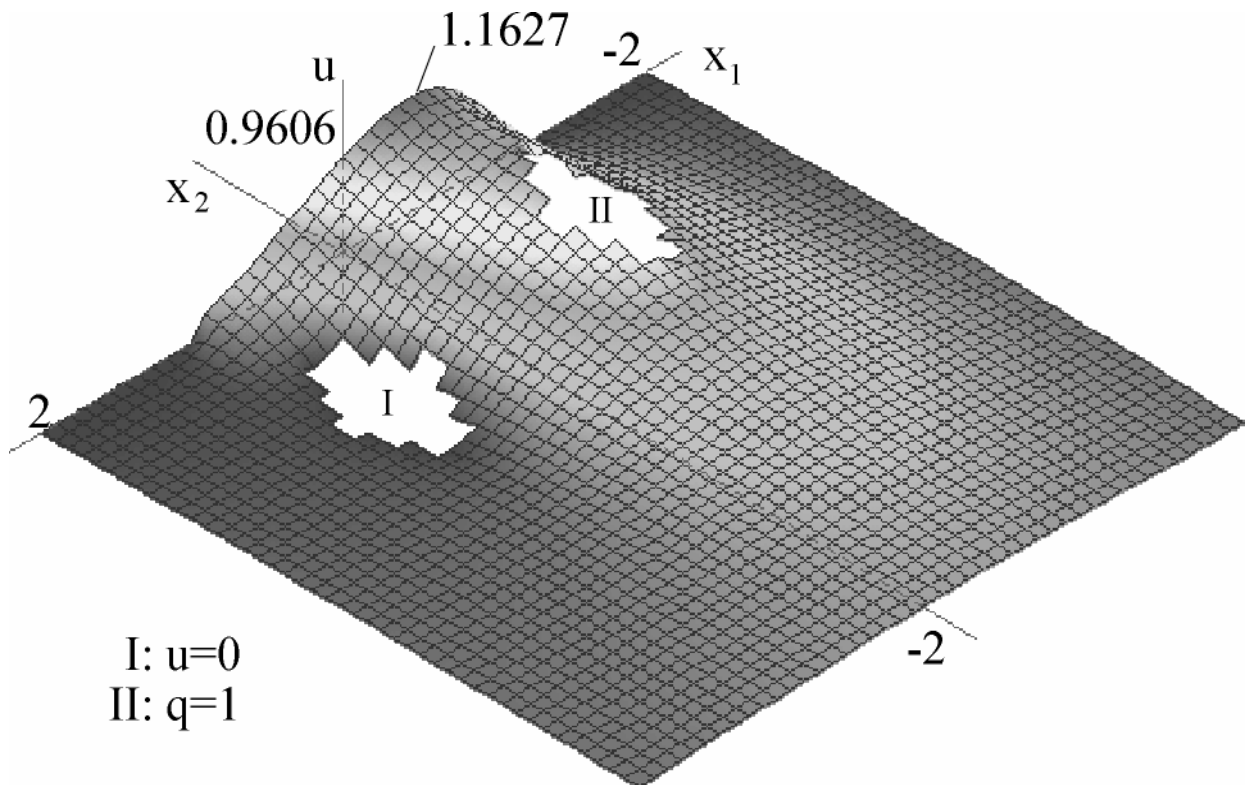


Рис. 4 Розподіл температури в півплощині з включеннями у вигляді ромба. На границі включень задана нульова температура (I) і одиничний потік (II).

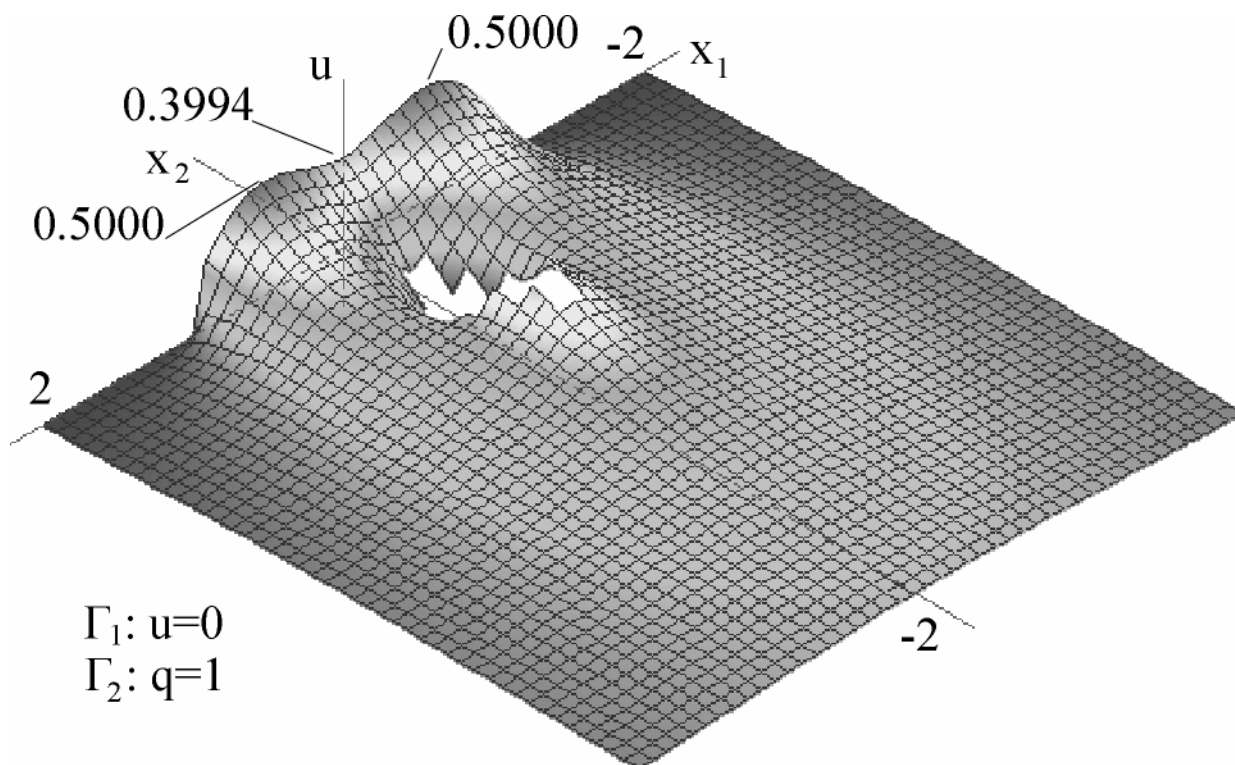


Рис. 5 Розподіл температури в півплощині з включенням у вигляді ромба.

На верхній границі включення задана *нульова температура* ( $\Gamma_1$ ),  
на нижній – *одичинний потік* ( $\Gamma_2$ ).

Як показують результати, форма включення і задані на ній будь-якого типу крайові умови відповідно впливають на розподіл температури в області поряд із включенням і на границі півплощини, на якій заданий тепловий потік. Застосування форми ромба у виді контуру включення не обмежує загальності побудованого розв'язку. Також можна одержати розв'язки для включення будь-якої форми, контур якого можна апроксимувати відрізками.

Таким чином, можна зробити висновок про те, що створена підсистема розрахунку і візуального аналізу результатів розв'язання задач теплопровідності для багатозв'язних необмежених областей. Створена підсистема дозволяє розв'язувати змішані задачі стаціонарної теплопровідності для необмеженої області з різною формою включення і з заданими на ньому будь-якого типу крайовими умовами.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Звьоздочкіна О. А., Толлок В. О. Про один спосіб розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького держуніверситету. – 1998. – №1. – С. 36 – 38.
2. Лисенко В. В., Толлок О. В. Автоматизація процесу розв'язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини // Вісник Запорізького держуніверситету. – 1998. – №1. – С. 53 – 54.
3. Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Бахвалов Н. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – С.156, 267.

## ВИКОРИСТАННЯ СТАНДАРТИЗОВАНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАТЬ ПРИ НАВЧАННІ ОПЕРАТИВНОГО ПЕРСОНАЛУ АЕС

Матвіїшина Н.В., Толок В.О

У статті наведені результати дослідження процесу забування навчального матеріалу у двох групах оперативного персоналу АЕС. Визначаються числові характеристики процесу забування і число відновлень знань протягом досить великого проміжку часу.

Найважливішою проблемою є проблема виміру результатів діяльності, дослідження параметрів засвоєння і забування, визначення їхньої структури. Результати діяльності того, кого навчають, є об'єктом контролю.

Складний і багатогранний характер контролю знань не дозволяє робити однозначні твердження щодо його результатів при плануванні цього процесу. Про них можна говорити як про ймовірні, можливі. Відомим є факт, що той самий метод, ті самі форми організації контролю, майже при однакових початкових умовах, дають різні результати. Є всі підстави розглядати результат контролю як вірогідний і на його основі розглядати вірогідні моделі контролю знань. До таких моделей, наприклад, ставляться моделі стандартизованого контролю знань [4,5].

Навчання і контролю знань оперативного персоналу атомних станцій у даний час приділяється досить велика увага [6], проте моделі стандартизованого контролю знань не застосовуються.

У цій статті пропонується розглянути приклад використання стандартизованого контролю знань при навчанні оперативного персоналу АЕС.

Нехай за деяким курсом складена програма контролю, що містить  $N \gg 1$  питань і завдань. Для кожного, кого навчають, усі контрольні питання програми діляться на дві групи:

- питання, навчальний матеріал яких засвоєний (1);
- питання, навчальний матеріал яких не засвоєний (0).

Якщо число незасвоєних питань по всій програмі контролю складає  $M$ , то їхня частка дорівнює

$$P=M/N.$$

Звичайно, число питань  $N$  велике, і тому доцільно ставити тому, кого навчають, не усі  $N$  питань, а вибірку обсягу  $n$ . Якщо  $m$  - число неправильних відповідей на питання вибірки, тоді оцінка частки помилок дорівнює

$$p=m/n.$$

Визначимо:

$P(t)$  - обсяг незасвоєного матеріалу при дослідженні процесу засвоєння;

$Q(t)$  - обсяг засвоєного матеріалу при дослідженні процесу забування;

$\lambda(t)$  - інтенсивність забування: відношення частоти забування до очікуваного числа незабутих питань в інтервалі часу  $(0,t)$ ;

$\mu(t)$  - інтенсивність засвоєння: відношення частоти засвоєння питань до очікуваного числа забутих питань в інтервалі часу  $(0,t)$ ;

$\nu(t)$  - число забувань.

Надалі будемо розглядати тільки числові характеристики процесу забування.

Розглянемо приклад контролю знань із урахуванням забування.

За курсом «Загальні правила безпеки» складена програма контролю знань оперативного персоналу АЕС (50 питань). У таблиці наведені результати дослідження процесу забування навчального матеріалу у двох групах оперативного персоналу реакторного відділення АЕС (у кожній групі по 10 чоловік). Для персоналу реакторного відділення обрана вибірка з 35 питань.

t (mic.)	0	7	9
$Q_{1i}$	0.837	0.82	0.812
$Q_{2i}$	0.908	0.858	0.85
$\bar{Q}_i$	0.872	0.839	0.831
$y_{1i}$	-0.178	-0.198	-0.208
$y_{2i}$	-0.096	-0.153	-0.162

$Q_{1i}$ ,  $Q_{2i}$  - ймовірності правильних відповідей у першій і другій групах під час  $i$ -ї відстроченої перевірки;

$Q_0$  - ймовірність правильної відповіді в початковий момент часу  $t$ ;

$$y_{1i} = \ln Q_{1i}, \quad y_{2i} = \ln Q_{2i}, \quad \bar{Q}_i = \frac{1}{2}(Q_{1i} + Q_{2i}).$$

Для дослідження використовуємо метод регресійного аналізу [1,2].

Якщо час забування має експоненціальний розподіл, то обсяг засвоєного матеріалу  $Q(t)$  при дослідженні процесу забування змінюється за експонентою:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\lambda t}.$$

Якщо зробити деякі перетворення, можна одержати:

$$y_{теор.} = a - \lambda(t - \bar{t}),$$

де  $y_{теор.}$  - теоретична лінія регресії процесу забування;

$a, \lambda$  - параметри регресійного рівняння.

Оцінка для теоретичної лінії регресії має вигляд:

$$y_{оцін.} = \hat{a} - \hat{\lambda}(t - \bar{t}),$$

де

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i y_i}{\sum_{i=1}^k n_i}; \quad \hat{\lambda} = -\frac{\sum_{i=1}^k n_i (t_i - \bar{t}) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k n_i (t_i - \bar{t})^2};$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i t_i}{\sum_{i=1}^k n_i}; \quad \bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ji}, \quad i = 1, \dots, k;$$

$n_i$  - число вимірів у момент часу  $t_i$ ;  $k$  - число перевірок.

У нашому випадку,  $n_i = 2$ ,  $k = 3$ . Крім того,  $\hat{a} = \ln \hat{Q}_0$ .

Підставляючи необхідні значення у вищенаведені вирази, одержимо:

$$\bar{t} = 5.33;$$

$$\hat{a} = -0.19;$$

$$\hat{\lambda} = 0.082 \text{ міс}^{-1}$$

Це означає, що забування матеріалу відбудеться в середньому через 12 місяців.

Підставляючи отримані параметри  $\hat{a}$ ,  $\hat{\lambda}$  у рівняння регресії, маємо:

$$y_{\text{оцін.}} = 0.25 - 0.082t$$

$$\hat{Q}_0 = 0.826.$$

Отже, обсяг засвоєного матеріалу при дослідженні процесу забування змінюється таким чином:

$$\hat{Q}(t) = 0.826e^{-0.082t}.$$

Залежність  $\hat{Q}(t)$  можна використовувати, наприклад, для планування повторень навчального матеріалу, при доборі і корекції методів навчання і т.д.

Нехай необхідно визначити з ймовірністю 0.9 число відновлень знань з навчального матеріалу протягом  $t=24$  міс.

Протягом досить великого проміжку часу  $(0, t)$ , із ймовірністю  $(1 - \alpha)$  число забувань можна одержати, використовуючи нерівність [4]:

$$\frac{t}{T} - U_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T\sqrt{T}} < \nu(t) < \frac{t}{T} + U_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T\sqrt{T}},$$

де  $U_{\alpha/2}$  - квантілі нормованого нормального розподілу, що знаходяться у відповідних таблицях [1];

$T = M(\tau) = \frac{1}{\lambda}$  - математичне чекання часу забування ( $\tau$  - час забування);

$\sigma^2 = D(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$  - дисперсія часу забування;

$M\{\nu(t)\} = \frac{t}{T}$  - математичне чекання числа забувань.

Для  $(1 - \alpha) = 0.9$ , із таблиць квантилів нормального розподілу, одержуємо:

$$U_{\alpha/2} = 1.28.$$

Отже, виконується нерівність:

$$\nu(t) < M\{\nu(t)\} + U_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T\sqrt{T}}$$

Підставляючи всі наявні значення, одержуємо:

$$T = \frac{1}{0.082} = 12;$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{0.082^2} = 149.3; \quad \sigma = 12.2;$$

$$M\{v(t)\} = \frac{24}{12} = 2;$$

$$v(t) < 2 + 1.28 \cdot \frac{12.2 \cdot 4.9}{12 \cdot 3.45} \approx 3.$$

Таким чином, можна сказати, що з можливістю 0.9 протягом 24 місяців з інтенсивністю забування  $\lambda = 0.082 \text{ mic}^{-1}$  достатньо три відновлення знань за навчальним матеріалом курсу «Загальні правила безпеки».

### ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., 1977.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. - М., 1976.
3. Матвейшина Н.В. Анализ деятельности оперативного персонала АЭС и задачи совершенствования контроля знаний операторов // Придніпровський науковий вісник.- 1998. – №.52.
4. Свиридов А.П. Основы статистической теории обучения и контроля знаний. - М., 1981.
5. Свиридов А.П. Применение методов планирования эксперимента при обучении обучающихся и контролируемых машин. - М., 1976.
6. Чачко А.Г. Подготовка операторов энергоблоков. Алгоритмический подход. - М., 1986.

УДК 519.85

## МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Новожилова М.В.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо таку оптимізаційну задачу геометричного проектування [1]. Нехай в арифметичному евклідовому просторі  $R^2$  маємо замкнену обмежену многозв'язну область  $S_0$ , що задана в загальній системі координат  $XOY$ . Кожна компонента  $w_c$ ,  $c=1,2,\dots,K$  лінійної зв'язності границі  $S_0$  - жорданова крива, яка обмежує в загальному випадку неопуклий многокутник. Позначимо  $w_K$  компоненту лінійної зв'язності границі  $S_0$ , що містить всі інші компоненти.

Нехай також маємо скінченний набір  $S$  об'єктів розміщення - неопуклих замкнених многокутників  $S = \{S_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Положення кожного многокутника  $S_i$  у просторі  $R^2$  характеризується вектором параметрів розміщення  $(x_i, y_i, \phi_i)$ , пов'язаним з центром  $O_i$  власної системи координат  $X_iO_iY_i$  об'єкта  $S_i$ . Перші два параметри  $(x_i, y_i)$  визначають трансляцію об'єкта  $S_i$ , а параметр  $\phi_i$  є кутом повороту системи  $X_iO_iY_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Далі будемо ототожнювати позначення  $S_i$  та  $S_i(x_i, y_i, \phi_i)$ .

Задача полягає у визначенні мінімальної довжини  $z$  області  $S_0$  при виконанні умов взаємного неперетину об'єктів  $(S_i, S_j)$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , і умов розміщення набору  $S$  в області  $S_0$ .

Математичне формулювання задачі, що розглядається, має вигляд:

$$\text{визначити:} \quad \min z, \quad (1)$$

при такій системі обмежень:

$$S_i(x_i, y_i, \phi_i) \subset S_0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2)$$

$$\text{int}S_i(x_i, y_i, \phi_i) \cap \text{int}S_j(x_j, y_j, \phi_j) = \emptyset, \quad i, j=1,2,\dots,n, \quad i \neq j, \quad (3)$$

де  $\text{int}S_i(\cdot)$  - внутрішність многокутника  $S_i$ ;  $\emptyset$  - порожня множина.

Було показано [2], що аналітична модель цієї задачі має вигляд

$$\text{знайти: } \min_{D \in R^{3n+1}} z, \quad (4)$$

де область припустимих розв'язків  $D$  визначається структурою нелінійних нерівностей [1]

$$\sigma_D = \bigcap_{k=1}^{nK} \sigma_k \cap \left\{ \bigcap_{q(i,j)=1}^{n(n-1)/2} \sigma_{ij} \right\}, \quad (5)$$

причому структури  $\sigma_k$  і  $\sigma_{ij}$  є аналітичними описами умов (2) і (3) відповідно;

$q, k$  - номери пар об'єктів  $(S_i, S_j)$ , і пар "об'єкт  $S_i$  - компонента  $w_c$ " відповідно, тобто  $q=f(i,j)$ ,  $k=f(i,c)$ ,  $i,j=1,\dots,n$ ,  $i \neq j$ ,  $c=1,2,\dots,K$ .

**2. Методологія локальної оптимізації задачі (4-5).** Розглянемо методологію розв'язання задачі (4-5), враховуючи такі властивості області  $D$  [2].

**Властивість 1.** Функції лівих частин обмежень, які формують область  $D$ , є нелінійними та в околі кожної точки області не є опуклими або вигнутими, причому матриці Гессе (матриці інших похідних) цих функцій вироджені.

**Властивість 2.**

$$D = \bigcup_{\varepsilon=1}^E D_\varepsilon, \quad (6)$$

де  $D_\varepsilon$  - неопукла точкова множина, яка є множиною розв'язків певної системи

$$G(\Psi)X - C \geq 0 \quad (7)$$

нелінійних та лінійних нерівностей порядку  $J=O(3[(n-1)*n/2 + Kn])$ , яку містить структура  $\sigma_D$ . Зауважимо, що для деяких точок  $X$  області  $D$  виконується таке співвідношення:

$$X \in \bigcap_{\gamma=1}^{\Gamma} D_{eg}, \quad \Gamma < E.$$

**Властивість 3.** Зафіксуємо значення вектору параметрів  $\Psi_{const} = \{\phi_i\}_{i=1,2,\dots,n} = const$ . У перетині області  $D_\varepsilon$  гіперплощиною  $\Psi_{const}$  лежить деяка многогранна опукла множина  $D_{linear} \in R^{2n+1}$ , яка, в свою чергу, є областю припустимих розв'язків лінійної задачі розміщення вигляду [3]:

$$X^* = (x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, \dots, x_n^*, y_n^*, z^*) = \arg \min_{D_{linear} \in R^{2n+1}} z, \quad (8)$$

де область  $D_{linear}$  задана такою системою обмежень

$$S_i(x_i, y_i, const) \subset S_0, \quad i=1,\dots,n, \quad (9)$$

$$\text{int}S_i(x_i, y_i, const) \cap \text{int}S_j(x_j, y_j, const) = \emptyset, \quad i,j=1,\dots,n, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Аналітичним записом системи (9-10) є структура лінійних нерівностей [3].

**Властивість 4.** Область  $D$  у загальному випадку є незв'язною множиною.

Задача (4-5) належить до класу многовимірних многоекстремальних оптимізаційних задач з лінійною функцією цілі та нелінійними неопуклими обмеженнями.

Із властивості 2 області  $D$  випливає, що точка  $X_{opt}$  локального екстремуму функції цілі  $z$  задачі повинна задовольняти умову:

$$X_{opt} = \arg \min_{X \in D_{eg}} z \quad (11)$$

для всіх підмножин  $D_{eg} \subset D$ , що містять  $X_{opt}$ ,  $g=(1,2,\dots,J)$ .

Метод розв'язання задачі складається з таких кроків:



I. Визначається початкове значення  $X_0$  і підобласть  $D_{0g}$ , що містить  $X_0$ , тобто  $X_0 \in D_{0g}$ .

II. Виконується  $k$ -а ітерація:

II.1. Шукається розв'язок задачі:

$$\text{знайти } X^* = \arg \min_{X \in D_{eg}} z, \quad (11^*)$$

де підмножина  $D_{eg}$  задана системою нерівностей (7):

II.2. Перевіряється умова (11). Якщо ця умова не виконується, то визначається така підобласть  $D_{eg+1}$ , яка містить  $X_i$ , та розв'язується задача п. II.1.

Дослідження властивостей задачі (11) показало, що процес її розв'язування можна побудувати таким чином:

1. Розв'язання задачі вигляду (8-10). Аналітичним зображенням вершини  $X^*$  є система  $F^*X-C=0$  активних у вершині  $X^*$  обмежень, тобто вершина  $X^*$  задовольняє ці обмеження як рівності. Очевидно, система  $F^*X-C=0$  має ранг  $2n+1$ . Зауважимо, що вершина  $X^*$  може бути виродженою, тобто вона може задовольняти як рівності більш ніж  $2n+1$  обмежень системи.

2. Перехід до нелінійної моделі та розв'язування задачі локальної оптимізації на множині  $D_e \in R^{3n+1}$  вигляду (7). При цьому  $X_k = \{X^*, \Psi_{const}\}$  - початкова точка задачі нелінійної оптимізації. Відмітимо, що система нелінійних рівностей  $F_k(\Psi)X_k - C=0$  порядку  $M$  ( $3n+1 > M \geq 2n+1$ ) визначає певний нелінійний многовид  $V$ , що є підмножиною границі області  $D_e$ , тобто  $V \in Fr D_s$ . Отже,  $X_k$  також належить границі області  $D_e$ .

Таким чином, перетворення лінійної задачі (8-11) у нелінійну (7), тобто занурення до простору всіх незалежних змінних задачі, дозволяє сформулювати алгоритм розв'язування задачі локальної оптимізації (7) як послідовність наступних етапів:

Етап А. Визначення напряму руху  $p_k$ .

Етап В. Визначення максимального значення кроку  $\alpha_k$  у напрямі  $p_k$  такого, що точка  $X_{k+1} = X_k + \alpha_k p_k$ ;  $X_{k+1} \in Fr D_s$  та  $z(X_{k+1}) \leq z(X_k)$ .

Розв'язання задачі А зводиться до задачі пошуку безумовного екстремуму відповідної функції Лагранжа

$$L(l, X_k) = z - \sum_{l=1}^M l_j * f_j(X_k) \quad (12)$$

задачі (7) вздовж кривої [4]:  $C = \{X(a): X(a) = X_l + q_1(a)s + q_2(a)d, a \geq 0\}$ , де вектор  $s$  є розв'язок деякої системи рівностей  $Bs_k = -g_k$ , причому матриця  $B_k$  є додатно визначеною апроксимацією невизначеної матриці  $H_{xx}(l, X_k)$  Гессе функції  $L(l, X_k)$ ; вектор  $d$  - напрям від'ємної кривини, вектор  $g_k$  - градієнт функції Лагранжа у точці  $X_k$ ;  $l$  - вектор множників Лагранжа. Відмітимо, що до складу функції Лагранжа входять тільки функції  $f_j(X_k)$  лівих частин активних у точці  $X_k$  обмежень, тобто обмежень системи нелінійних рівностей  $F_k(\Psi)X_k - C=0$ .

**Т е о р е м а 1.** Матриця Гессе  $H_{xx}(l, X)$  функції Лагранжа (12) задачі (7) має ранг не більш ніж  $2n$ , де  $n$  - кількість об'єктів, що розміщуються.

**Т е о р е м а 2.** Визначення максимального значення кроку  $\alpha_k$  відповідно до кутових параметрів розміщення не залежить від значень параметрів  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ .

Застосовуючи теореми 1 і 2, можна довести такий важливий конструктивний результат.

**Т е о р е м а 3.** Методологія пошуку локального мінімуму задачі вигляду (7) є мінімізація за групами кутових параметрів та параметрів трансляції.

Більш того, значення напряму і кроку для параметрів трансляції  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$  визначаються на етапі В "припасуванням" цих параметрів таким чином, щоб точка  $X_{k+1}$  знов задовольняла систему рівностей  $F_{k+1}(\Psi)X_{k+1} - C=0$ . Для цього визначаються нові значення коефіцієнтів системи, урахуваючи нові значення  $\{\phi_{k+1,i}\}_{i=1,2,\dots,n}$  кутів повороту, далі значення кутових параметрів фіксують, після чого система  $F_{k+1}X - C=0$  з новою матрицею коефіцієнтів розглядається як система лінійних рівностей та розв'язується відносно параметрів трансляції  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Пандорин А.К. Оптимизация упаковок плоских многоугольников. // Доклады АН УССР. - 1987. - Сер.А, N 2. - С. 79-81.
2. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V. The allocation problem of non-convex polygons with rotations in System Modelling and optimization // Proceeding of 17-th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization.- 1995, P.559-565.
3. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V. Mathematical Model and Method of Searching for a Local Extremum for the Non Convex Oriented Polygons Allocation Problem // European Journal of Operational Research.- 1996.-P.190-210.
4. Goldfarb D. Curvilinear path steplength algorithms for minimization which use directions of negative curvature // Mathematical Programming.-1980.-18 P.31-40.

УДК 539.3

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Пожуев А.В.

В настоящей работе найдено решение задачи о действии подвижных нагрузок на цилиндрическую оболочку конечной длины, подкрепленную по наружной поверхности продольными ребрами жесткости и содержащую внутри упругий инерционный наполнитель. Движущаяся нагрузка передается на оболочку только через ребра, вне ребер нагружение отсутствует. Учитывается дискретность расположения ребер путем записи для них уравнений движения балок с последующим удовлетворением условий сопряжения.

Для описания движения оболочки используются уравнения с учетом деформации сдвига и инерции вращения (типа Тимошенко). Движение каждого ребра описывается уравнением теории балок

$$E_{\delta_i} \cdot I_i \cdot \frac{\partial^4 Z_{\delta_i}}{\partial x^4} + \rho_{\delta_i} \cdot F_i \cdot \frac{\partial^2 Z_{\delta_i}}{\partial t^2} = p_{\delta_i}(x, t) - q_{0i}(x, t) \quad (i=1, L), \quad (1)$$

где  $p_{\delta_i}(x, t)$  - интенсивность заданной нагрузки на соответствующее ребро,  $q_{0i}(x, t)$  - неизвестная реакция со стороны оболочки, приходящаяся на погонную единицу длины  $i$ -ой балки.

Движение наполнителя подчиняется динамическими уравнениями теории упругости:

$$(\lambda_c + 2\mu_c) \text{grad div } \bar{w} + \mu_c \text{rot rot } \bar{w} = \rho_c \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \quad (2)$$

При решении данной задачи были рассмотрены граничные условия для жесткого и скользящего контакта наполнителя с оболочкой:

а) для случая скользящего контакта:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{rr} = -q_r; \quad u_r = w; \quad (3)$$

б) для случая идеального контакта:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_{rx} = q_x; \quad \sigma_{r\theta} = q_\theta; \quad \sigma_{rr} = q_r; \\ u_x = w; \quad u_\theta = u - h\chi_x/2; \quad u_\theta = v - h\chi_\theta/2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a, b$  - наружный и внутренний радиусы наполнителя. Внутренняя поверхность наполнителя принимается свободной от напряжений, тогда

$$\text{при } r = b \quad \sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rr} = 0$$

Контакт между ребрами и оболочкой происходит по осям балок, следовательно, внешняя нагрузка на оболочку равна сумме давлений, передаваемых через каждое ребро, на осях балок ( $\theta = \theta_k$ ) перемещения оболочки равны прогибам балок с противоположным знаком.

Для решения данной задачи переходим во всех уравнениях к безразмерным переменным, относим все линейные величины к наружному радиусу заполнителя. Интегрирование уравнений движения заполнителя осуществляем путем введения потенциальных функций. После их подстановки применяем преобразование Лапласа по времени, после чего раскладываем все искомые функции в ряды Фурье по осевой и угловой координатам. Получаем в пространстве изображений волновые уравнения:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} - \frac{m^2}{r_*^2} - (\beta^2 + \lambda^2 p^2) \right) \cdot \Phi = 0, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} - \frac{m^2}{r_*^2} - (\beta^2 + p^2) \right) \cdot \{\Psi, X\} = 0$$

где  $\lambda^2 = \frac{1-2\nu_c}{2(1-\nu_c)}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{\delta}$ ,  $p, n, m$  – параметры преобразования Лапласа и разложений в ряды Фурье,

$\delta$  – безразмерная длина системы. Решением полученных уравнений являются линейные комбинации функций Бесселя от мнимого аргумента первого и второго рода с неизвестными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \Phi_m(r_*) &= A_m K_m(m_R r_*) + B_m I_m(m_R r_*) \\ \Psi_m(r_*) &= C_m K_m(m_S r_*) + D_m I_m(m_S r_*) \\ X_m(r_*) &= E_m K_m(m_S r_*) + S_m I_m(m_S r_*) \\ m_R &= \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 p^2}, \quad m_S = \sqrt{\beta^2 + p^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя аналогичные преобразования к уравнениям оболочки типа Тимошенко, получаем:

$$\begin{aligned} \{V^*, W^*, \chi_\theta, q_\theta^*, q_r^*, F^*\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{V_n^*, W_n^*, \chi_{\theta n}, q_{\theta n}^*, q_{r n}^*, F_n^*\}_n \cdot \sin(\beta x^*) \\ \{U^*, \chi_x, q_x^*\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{U_n^*, \chi_{x n}, q_{x n}^*\}_n \cdot \cos(\beta x^*) \\ \{U_n^*, W_n^*, \chi_{x n}, q_{r n}^*, F_n^*\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \{U_n^*, W_n^*, \chi_{x n}, q_{r n}^*, F_n^*\}_m \cdot \cos(m\theta) \\ \{V_n^*, \chi_{\theta n}, q_{\theta n}^*\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \{V_n^*, \chi_{\theta n}, q_{\theta n}^*\}_m \cdot \sin(m\theta) \\ -\beta^2 \cdot U_{mn}^* - m^2 \frac{1-\nu}{2} \cdot U_{mn}^* + \beta m \frac{1+\nu}{2} \cdot V_{mn}^* - \nu \beta \cdot W_{mn}^* - \rho_* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot U_{mn}^* &= -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2} \cdot \frac{q_{xmn}^*}{G_m} \quad (7) \\ m\beta \frac{1+\nu}{2} \cdot U_{mn}^* - \beta^2 \frac{1-\nu}{2} \cdot V_{mn}^* - m^2 V_{mn}^* - m \left[ 1 + \frac{(1-\nu)k^2}{2} \right] \cdot W_{mn}^* + \frac{1-\nu}{2} k^2 \chi_{\theta mn} - \\ - \rho_* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot V_{mn}^* &= -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2} \cdot \frac{q_{\theta mn}^*}{G_m} \\ \nu \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x_*} + \frac{\partial V^*}{\partial \theta} - \frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \left[ \frac{\partial^2 W^*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial \theta^2} \right] + W^* + \rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 W^*}{\partial \tau^2} - \\ - \frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \frac{\partial \chi_x}{\partial x_*} - \frac{1-\nu}{2} \cdot k^2 \cdot \frac{\partial \chi_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{1-\nu}{2\gamma\phi_2 G_m} \cdot (F^* + q_r^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial x_*} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x_* \partial \theta} + \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x_*^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \theta^2} - 6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \chi_x - \\
& - \rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial \tau^2} = -3 \frac{1-\nu}{\gamma \phi_2^2 G_m} \cdot q_x^* \\
& -6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial \theta} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x_* \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \theta^2} - 6k^2 \cdot \frac{1-\nu}{\phi_2^2} \chi_\theta - \\
& - \rho_* \cdot \frac{1-\nu}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \chi_\theta}{\partial \tau^2} = -3 \frac{1-\nu}{\gamma \phi_2^2 G_m} \cdot q_\theta^*
\end{aligned}$$

Затем выражаем неизвестные переменные через компоненты тензора перемещений в оболочке. Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов при функциях Бесселя, в которую также входит неизвестная реакция со стороны балок. Поэтому обратный ход алгоритма может начать осуществляться только после того, как к уже полученной системе уравнений с помощью условий сопряжения будут подключены полученные после применения одномерного разложения в ряд Фурье по  $x$  и преобразования Лапласа по времени уравнения движения балок.

Разрешая систему для определения коэффициентов, находим трансформанты напряженно-деформированного состояния в любой точке оболочки, заполнителя и ребер. Окончательное решение задачи сводится к суммированию рядов Фурье и обращению преобразования Лапласа.

В качестве примера рассмотрен случай двух ребер жесткости, места контакта которых с оболочкой определяются координатами  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi$ . В начальный момент времени к ребрам прикладывается нормальная сосредоточенная нагрузка. Были рассмотрены как неподвижные нагрузки, расположенные на расстоянии  $a_1$  от начала координат, так и движущиеся вдоль ребер с постоянной скоростью  $c$ . Аналитически сосредоточенная подвижная нагрузка описывается следующим образом:

$$p(x_*, \tau) = p_0 \cdot \delta(x - c_* \tau) \quad (8)$$

Для этого случая выражение для трансформанты нормального перемещения примет вид

$$u_r = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 - 2 \cdot k^* \cdot \nu^*} \cdot a_m \cdot T_1(\beta, m, 1) \cos(m\theta) \sin(\beta x_*), \quad (9)$$

$$\text{где} \quad k^* = 2(1 + \nu_\delta) \gamma_\delta I^* \beta^4 + \rho_\delta F \cdot p^2; \quad \nu^* = \sum_{i=0}^{\infty} T_1(\beta, m, 1) \cdot a_m$$

$$\begin{aligned}
T_1(\beta, m, r_*) &= \left[ \frac{m}{r_*} K_m(m_R r_*) - m_R K_{m+1}(m_R r_*) \right] \cdot A_m + \\
&+ \left[ \frac{m}{r_*} I_m(m_R r_*) + m_R I_{m+1}(m_R r_*) \right] \cdot B_m + \beta \left[ \frac{m}{r_*} K_m(m_S r_*) - m_S K_{m+1}(m_S r_*) \right] \cdot C_m + \\
&+ \beta \left[ \frac{m}{r_*} I_m(m_S r_*) + m_S I_{m+1}(m_S r_*) \right] \cdot D_m + \frac{m}{r_*} K_m(m_S r_*) \cdot E_m + \frac{m}{r_*} I_m(m_S r_*) \cdot S_m.
\end{aligned}$$

При расчетах принимались следующие значения безразмерных параметров

$$\begin{aligned}
\nu = \nu_c = \nu_{\delta_1} = \nu_{\delta_2} = 0,3; \quad \rho^* = 12,5; \quad k^2 = 2/3; \quad \rho_{\delta_1}^* = \rho_{\delta_2}^* = 25; \quad c_* = 0,4 \\
I_1^* = I_2^* = 0,0001/24; \quad \delta = 5; \quad F_1^* = F_2^* = 0,005; \quad \gamma_{\delta_1} = \gamma_{\delta_2} = 2 \cdot \gamma.
\end{aligned}$$

Число членов ряда по пространственной и по угловой переменным, а также число членов обратного преобразования Лапласа определялись путем численных экспериментов так, чтобы обеспечивалась по всем искомым величинам относительная точность в 3%.

На рис. 1 - 2 показано изменение во времени нормального контактного перемещения и напряжения на границе оболочки и заполнителя для подвижной нагрузки. Рассматривался случай идеального контакта. Из рисунков видно, как происходит переходный процесс для различных отношений модуля сдвига оболочки и заполнителя (для кривой 1  $\gamma = 250$ , 2 - 125, 3 - 62.5).

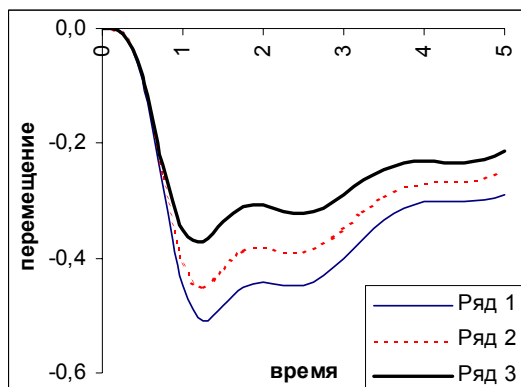


Рис. 1

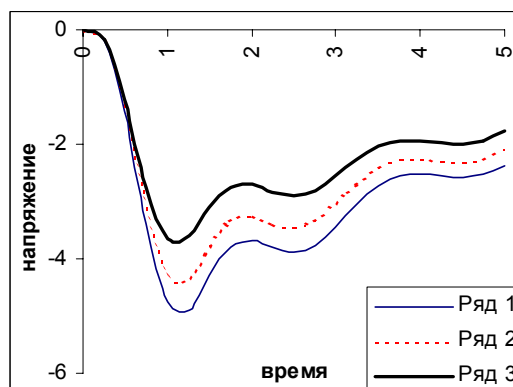


Рис. 2

Рисунки 3 - 4 иллюстрируют характер распределения деформации по осевой координате для различных фиксированных моментов времени (кривая 1 -  $\tau = 0.5$ , 2 -  $\tau = 1$ , 3 -  $\tau = 3$ ).

Проведенные расчеты показали надежность и эффективность предложенного подхода для анализа переходных процессов в слоистых конструкциях с дискретными подкреплениями. Полученные графики дают ясную картину нестационарного процесса и позволяют определить область применимости стационарных задач.

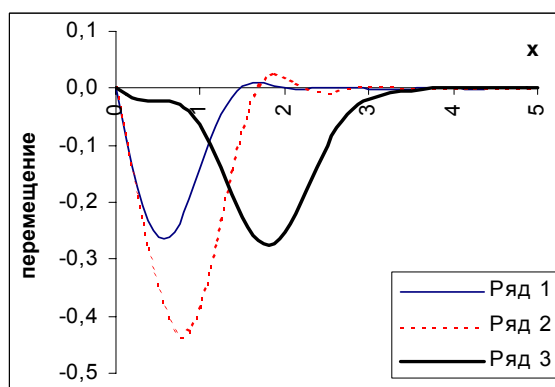


Рис. 3

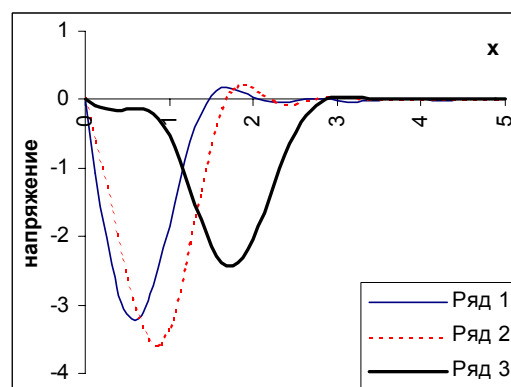


Рис. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Пожув В.И. Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок. – М.: МАИ, 1992. – 136 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

## РЕАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АРМИРОВАННОЙ СРЕДЕ НА ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Пожуева И.С.

1. В данной работе построена модель деформирования и предложен алгоритм определения деформационных свойств композиционного материала при действии подвижных нагрузок. Рассматривается задача о движении нагрузок с докритической постоянной скоростью вдоль бесконечно длинной цилиндрической оболочки толщиной  $h$  и радиусом  $a$ , окаймленной армированным слоем. Внешний контур композиционного материала скреплен с абсолютно жестким пространством и является окружностью радиуса  $R$  (рис. 1). В данной постановке определяется напряженно-деформированное состояние системы “цилиндрическая оболочка - композит”, вызванное движением внутри оболочки двух симметричных нагрузок, движущихся вдоль оболочки с постоянной скоростью  $c$ .

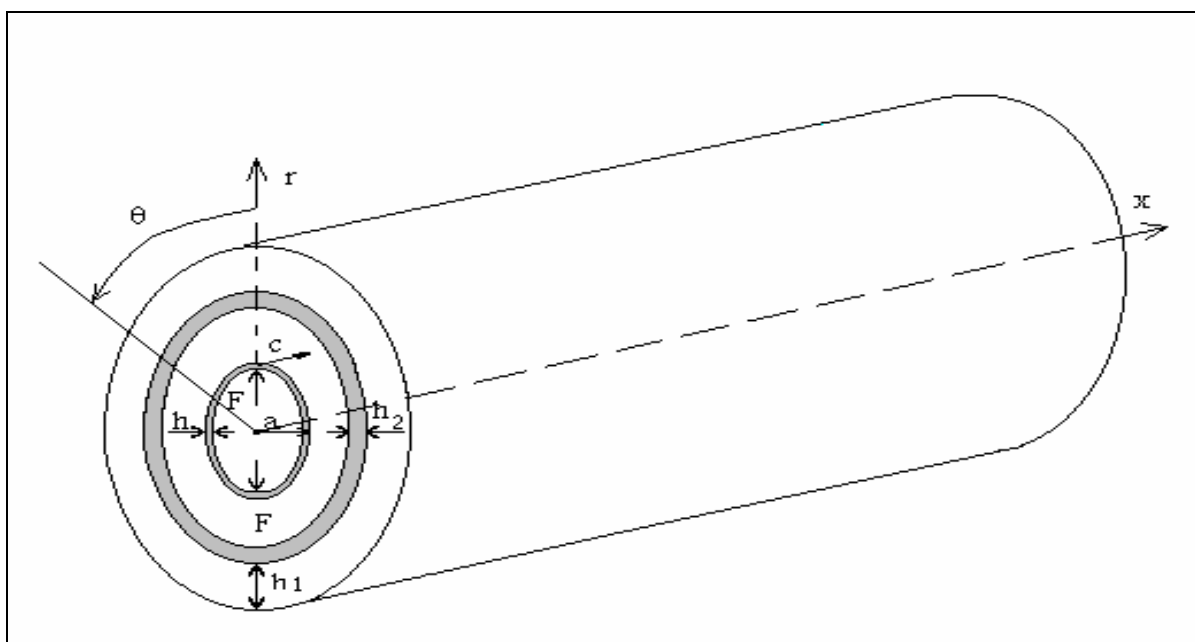


Рис.1

Будем рассматривать модель слоистого материала, в которой каждый слой представляет собой однородный, изотропный, линейно-упругий материал, причем слои матрицы и армировки чередуются. Каждый слой матрицы и армировки имеет одни и те же физические характеристики:  $\lambda_i, \mu_i$  – параметры Ламе,  $\rho_i, \nu_i, G_i$  – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига. Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к слою матрицы, имеют индекс 1, к армировке – индекс 2.

В настоящей работе в уточненной постановке, когда движение слоев композита описывается динамическими уравнениями теории упругости, а оболочка подчиняется уравнениям типа Тимошенко [1,2], рассмотрено нестационарное напряженно-деформированное состояние системы. Основное внимание уделено моментам времени, близким к началу нагружения.

Построен алгоритм определения деформационных свойств композита и построены диаграммы деформирования материала при различных значениях упругих характеристик компонентов описанной выше системы.

Движение композита подчиняется динамическим уравнениям теории упругости, которые в векторной форме имеют вид:

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \text{grad div } \overline{\varpi}_i + \mu_i \text{rot rot } \overline{\varpi}_i = \rho_i \frac{\partial^2 \overline{\varpi}_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\bar{\omega}(U_x, U_\theta, U_R)$  - вектор перемещения точек среды;  $\lambda_i = \frac{2\nu_i G_i}{1-2\nu_i}$ ;  $\mu_i = G_i$ .

Задача сводится к совместному интегрированию уравнений движения оболочки и каждого слоя композита при выполнении граничных условий. Для удобства дальнейших вычислений перейдем к безразмерным переменным, относим все величины к радиусу срединной поверхности оболочки  $a$ .

Тогда граничные условия для жесткого контакта на границе раздела оболочки с композитом

( $r = r_1 = 1 + \frac{\beta}{2}$ ) будут иметь вид:

$$\sigma_{RR1} = -q_R, \quad \sigma_{R\theta1} = -q_\theta, \quad \sigma_{Rx1} = -q_x, \quad U_{R1} = W, \quad U_{x1} = U + \frac{\beta}{2}\chi_x, \quad U_{\theta1} = V + \frac{\beta}{2}\chi_\theta \quad \text{на}$$

границе раздела матрицы и армировки ( $r = r_2 = 1 + \frac{\beta}{2} + \beta_1$ ,  $r = r_3 = 1 + \frac{\beta}{2} + \beta_1 + \beta_2$  и т.д.):

$\sigma_{RR1} = \sigma_{RR2}$ ,  $\sigma_{R\theta1} = \sigma_{R\theta2}$ ,  $\sigma_{Rx1} = \sigma_{Rx2}$ ,  $U_{R1} = U_{R2}$ ,  $U_{x1} = U_{x2}$ ,  $U_{\theta1} = U_{\theta2}$ ; на границе раздела композита с пространством ( $r = R/a$ ):  $U_{R1} = 0$ ,  $U_{x1} = 0$ ,  $U_{\theta1} = 0$ . При этом введены следующие обозначения:

$$\tau = c_{s1} \frac{t}{a}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \rho_1^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \gamma = \frac{G}{G_1}, \quad \gamma_1 = \frac{G_1}{G_2}, \quad c_{sk}^* = \frac{G_k}{\rho_k}, \quad c_k^* = \frac{c}{c_{sk}}, \quad \beta = \frac{h}{a}, \quad \beta_k = \frac{h_k}{a}$$

2. Для интегрирования уравнений движения композита вводим три потенциальные функции [2,3]:

$$U_R = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

Дальнейший ход решения приводит к записи уравнений движения оболочки и композита в пространстве изображений в комплексной форме в результате интегрального преобразования Фурье по пространственной переменной и интегрального преобразования Лапласа по времени. Затем раскладываются все искомые функции в ряды Фурье по угловой координате [2]. В результате для оболочки получим систему уравнений:

$$\xi^2 U_m + m^2 \frac{1-\nu}{2} U_m + i\xi m \frac{1+\nu}{2} V_m + i\xi \nu W_m + \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} U_m = \frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \frac{q_{xm}}{G_1} \quad (3)$$

$$i\xi m \frac{1+\nu}{2} U_m - \xi^2 \frac{1-\nu}{2} V_m - m^2 V_m - m \left( 1 + \frac{(1-\nu)k^2}{2} \right) W_m + \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{\theta m}$$

$$- \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} V_m = - \frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \frac{q_{\theta m}}{G_1}$$

$$- i\xi \nu U_m + m V_m + \frac{(1-\nu)k^2}{2} (\xi^2 W_m + m^2 W_m) + W_m + \rho^* p^2 \frac{1-\nu}{2\gamma} W_m$$

$$+ i\xi \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{xm} - m \frac{(1-\nu)k^2}{2} \chi_{\theta m} = - \frac{1-\nu}{2\gamma\beta} \left( \frac{q_{Rm}}{G_1} - \frac{F_m}{G_1} \right)$$

$$6i\xi k^2 \frac{1-\nu}{\beta^2} W_m - i\xi m \frac{1+\nu}{2} \chi_{\theta m} - \left( \xi^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( m^2 + \frac{12k^2}{\beta^2} + \frac{\rho^* p^2}{\gamma} \right) \right) \chi_{xm} = - \frac{3(1-\nu)}{\gamma\beta^2} \frac{q_{xm}}{G_1}$$

$$6k^2 m \frac{1-\nu}{\beta^2} W_m + i\xi m \frac{1+\nu}{2} \chi_{xm} - \left( m^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \xi^2 + \frac{12k^2}{\beta^2} + \frac{\rho^* p^2}{\gamma} \right) \right) \chi_{\theta m} = - \frac{3(1-\nu)}{\gamma\beta^2} \frac{q_{\theta m}}{G_1}$$

Здесь  $\xi$ ,  $p$  – параметры преобразований Фурье и Лапласа соответственно,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $G$  – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига оболочки.

Для композита получим видоизмененные волновые уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - m_{Ri}^2 \right) \varphi_{mi} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - m_{Si}^2 \right) \{ \psi_{mi}, \chi_{mi} \} = 0 \end{array} \right. , \quad (4)$$

где

$$m_{R1} = \sqrt{\xi^2 + \Theta_1^2 p^2}, \quad m_{S1} = \sqrt{\xi^2 + p^2}, \quad m_{R2} = \sqrt{\xi^2 + \Theta_2^2 p^2 \gamma_1 / \rho_1^*},$$

$$m_{S1} = \sqrt{\xi^2 + p^2 \gamma_1 / \rho_1^*}, \quad \Theta_i^2 = \frac{1 - 2\nu_i}{2(1 - \nu_i)}.$$

Общие решения уравнений (4) имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_{mi}(r) &= D_{mi} K_m(m_{Ri} r) + E_{mi} I_m(m_{Ri} r) \\ \psi_{mi}(r) &= L_{mi} K_m(m_{Si} r) + N_{mi} I_m(m_{Si} r) \\ \chi_{mi}(r) &= S_{mi} K_m(m_{Si} r) + P_{mi} I_m(m_{Si} r) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и используя закон Гука [3], для каждого слоя матрицы и армировки определяем компоненты перемещения и напряжения в пространстве изображений. После этого удовлетворяем граничным условиям, в результате чего получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Для упрощения вычислений введем следующие отношения функций Бесселя:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{K_{m+1}(m_{R1} r_2)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} & S_2 &= \frac{K_m(m_{R1} r_2)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} & S_3 &= \frac{K_m(m_{R1} r_1)}{K_{m+1}(m_{R1} r_1)} \\ S_4 &= \frac{I_{m+1}(m_{R1} r_2)}{I_m(m_{R1} r_1)} & S_5 &= \frac{I_m(m_{R1} r_2)}{I_m(m_{R1} r_1)} & S_6 &= \frac{I_{m+1}(m_{R1} r_1)}{I_m(m_{R1} r_1)} \end{aligned}$$

Аналогичные отношения вводятся для  $m_{S1}$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  и т.д. Тогда неизвестные коэффициенты удобно обозначить следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{mi}^* &= D_{mi} K_{m+1}(m_{Ri} r_1) \frac{G_1}{F_m} & E_{mi}^* &= E_{mi} I_m(m_{Ri} r_1) \frac{G_1}{F_m} & L_{mi}^* &= i L_{mi} K_{m+1}(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} \\ N_{mi}^* &= i N_{mi} I_m(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} & S_{mi}^* &= S_{mi} K_{m+1}(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} & P_{mi}^* &= P_{mi} I_m(m_{Si} r_1) \frac{G_1}{F_m} \end{aligned}$$

В результате мы имеем  $6 \cdot i$  линейных алгебраических уравнений относительно  $6 \cdot i$  неизвестных коэффициентов -  $D_{mi}^*$ ,  $E_{mi}^*$ ,  $L_{mi}^*$ ,  $N_{mi}^*$ ,  $S_{mi}^*$ ,  $P_{mi}^*$ ,  $i=1,2,3...$ . Решая полученную систему, находим их численные значения. Подставив полученные неизвестные в соответствующие формулы, определяем трансформанты перемещений и напряжений в пространстве изображений.

3. В качестве примера возьмем нагрузку вида:

$$F = F_0 h(x^* - c^* \tau) \delta(\theta - \theta_k) \quad h(x^* - c^* \tau) = \begin{cases} 1 & |x^* - c^* \tau| \leq a^* \\ 0 & |x^* - c^* \tau| > a^* \end{cases} \quad (6)$$

$\delta(\theta - \theta_k)$  - дельта-функция Дирака,  $k$  - количество нагрузок.

Рассматривалось две симметричные нагрузки, при этом  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \Pi$ . К данной нагрузке применим преобразование Фурье по координате  $x^*$ , а затем разложим ее в ряд Фурье по  $\theta$  получим:

$$\bar{F} = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \frac{F_0 \sin(\xi a^*)}{\xi} e^{-i \xi c^* \tau} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\theta) \quad (7)$$



$$a_m = \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \delta(\theta - \theta_k) \cos(m\theta) d\theta = \frac{2}{\Pi} (1 + (-1)^m)$$

После применения преобразования Лапласа к каждому члену ряда, имеем:

$$F_m = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \frac{F_0 \sin(\xi a^*)}{\xi} \frac{p - ic^* \xi}{p^2 + c^{*2} \xi^2} a_m \quad (8)$$

Для дальнейших вычислений подставим полученную нагрузку в выражения для компонент перемещения и напряжения, просуммируем ряды и применим обратное преобразование Фурье. Обратное преобразование Лапласа производится численно методом смещенных многочленов Лежандра.

На примере двуармированного композитного материала рассмотрены некоторые случаи взаимодействия описанной выше системы. При анализе численных результатов построены диаграммы деформирования армированных композитов при следующих значениях безразмерных параметров:

$$\gamma_1 = 0.2, \quad \rho^* = 20, \quad \rho_1^* = 0.2, \quad c^* = 0.2, \quad \beta_1 = 0.3, \quad \beta_2 = 0.15, \quad a^* = 0.2, \quad \beta = 0.1.$$

На рис. 2 - 3 приведены кривые зависимостей радиального перемещения и напряжения по времени, кривые 1-3 соответствуют  $\gamma = 500, 250, 100$ .

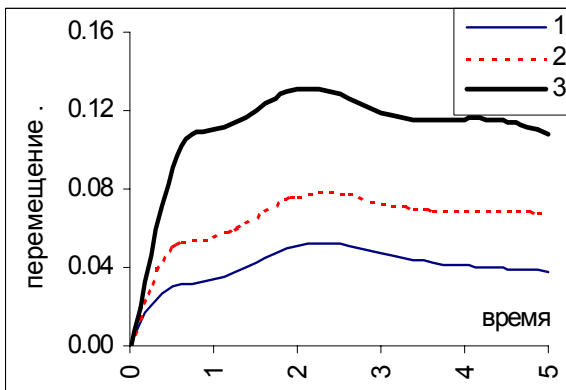


Рис. 2

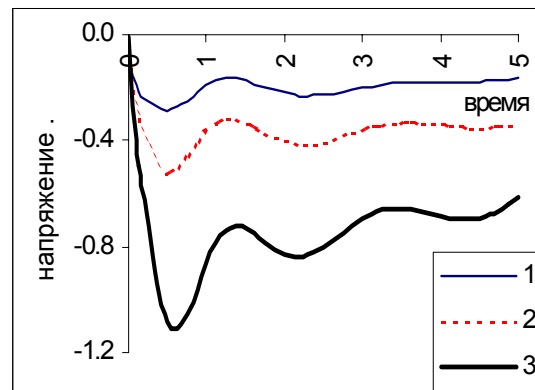


Рис. 3

На рис. 4 - 5 показано изменение прогибов оболочки и радиального напряжения по длине, а на рис. 6 - 7 - по угловой координате для различных моментов времени. Кривая 1 соответствует  $\tau=0.5$ , 2- $\tau=2$ , 3- $\tau=4$ . При этом  $\gamma = 100$ .

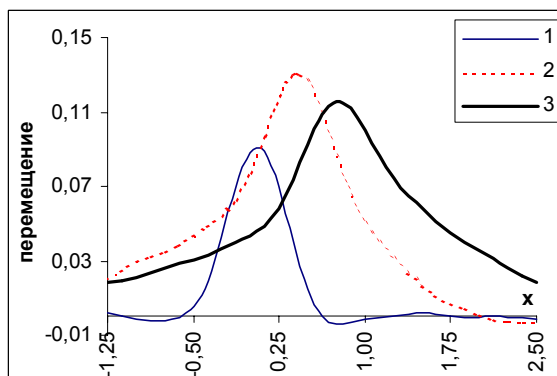


Рис. 4

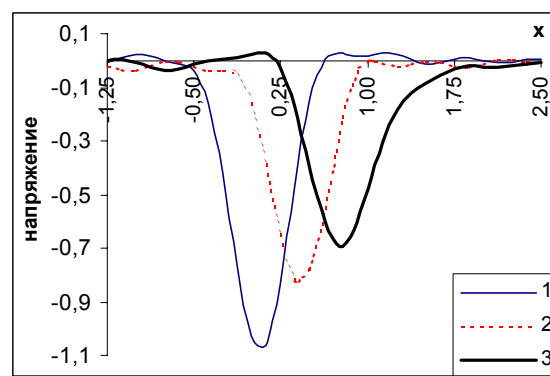


Рис. 5

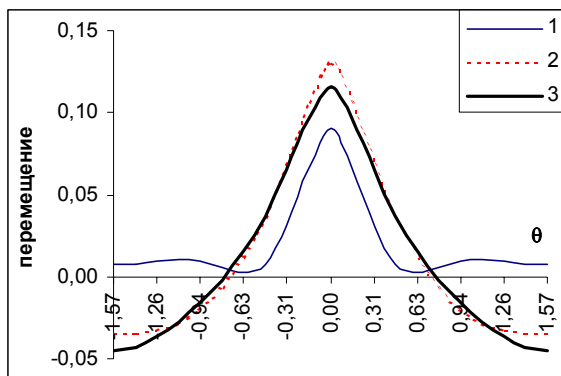


Рис. 6

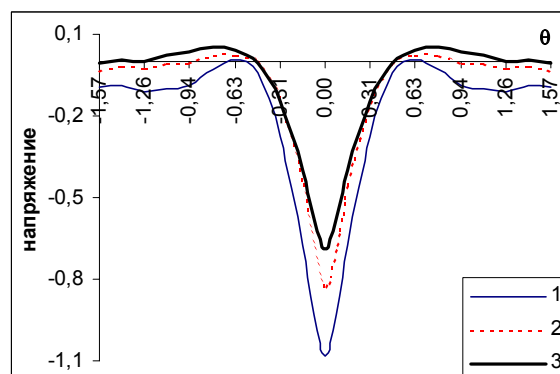


Рис. 7

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкции со средой.- Київ, Наук. Думка, 1979.- 284с.
2. Горшков А.Г, Пожуев В.И, Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок.-М.: Изд. МАИ, 1992.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981, 223 с.
4. Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике- М.: Изд. И\*Л, 1953.

УДК 336.714

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ КОМБІНОВАНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ З НЕРОЗШИРЕНИМ СПОСТЕРІГАЧЕМ

Потапенко С.М., Савранська А.В.

У роботі [1] для забезпечення робастності був запропонований алгоритм управління зі спостерігачем вектора стану та оцінкою вектора невизначеності по нев'язці спостерігача. Ця оцінка використовувалась у законі управління для компенсації вектора невизначеності (комбінована система управління). Однак внаслідок відсутності методів дослідження, строго доведення робастності запропонованої системи не було проведено. У роботах [2,3] був розроблений математичний апарат дослідження робастності сингулярно - збуджених систем.

Метою цієї статті є дослідження робастної стійкості запропонованої системи управління [1] за допомогою розробленого в [2,3] математичного апарату.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gf(x, u), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

$$G = B \cdot Q, \quad (3)$$

де  $x \in R^n$  - вектор стану системи,  $u \in R^m$  - вектор управління,  $y \in R^r$  - вектор спостереження;  $A, B, C, G$  - відомі сталі матриці розмірностей відповідно  $n \times n; m \times n; r \times n; n \times \alpha$ ;  $f \in R^\alpha$ ,  $f(0,0) \neq 0$ . Для функції  $f(x, u)$  існує стала  $M$  така, що на довільному скінченному відрізку  $[0, T]$  має місце нерівність  $\|f(x, u)\| \leq M$

(3) - умова узгодженості управління та невизначеності  $f$ . При виконанні цієї умови вектор управління завжди може компенсувати вектор невизначеності  $f$ .

Нехай трійка  $(A, B, C)$  цілком керована та спостережувана. Для (1), (2) спостерігач можна подати у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}^0 \quad (4)$$

де  $\hat{x}$  - оцінка вектора  $X$ ;  $L$  - матриця коефіцієнтів підсилювання спостерігача.

З урахуванням (2) рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(\hat{x} - x).$$

Похибка оцінювання

$$\tilde{x} = \hat{x} - x, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0 \quad (5)$$

де  $\tilde{x}^0 = \hat{x}^0 - x^0$ .

Віднімаючи (1) від (4), можна записати

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} - Gf(x, u). \quad (6)$$

Внаслідок спостережуваності пари  $(A, B)$  спектр  $A + LC$  можна зробити довільним. Позначимо

$$A_L := \varepsilon(A + LC), \quad (7)$$

де  $\varepsilon > 0$  - малий параметр.

Тоді з (6) одержимо

$$\varepsilon\dot{\tilde{x}} = A_L\tilde{x} - \varepsilon Gf(x, u). \quad (8)$$

Закон управління будемо задавати у вигляді

$$u = -P\hat{x} - R(C\hat{x} - y) = -P\hat{x} - RC\tilde{x} = -P(x + \tilde{x}) - RC\tilde{x}, \quad (9)$$

де  $P$  та  $R$  - сталі матриці коефіцієнтів закону управління.

Підстановка (9) в (1), (8) дає

$$\dot{x} = (A - BP)x - B(P + RC)\tilde{x} + Gf(x, \tilde{x}), \quad (10)$$

$$\varepsilon\dot{\tilde{x}} = A_L\tilde{x} - \varepsilon Gf(x, \tilde{x}). \quad (11)$$

Нехай  $BR = L$ . Тоді система (10), (11) перепишеться у вигляді

$$\dot{x} = (A - BP)x - BP\tilde{x} - (LC\tilde{x} - Gf(x, \tilde{x})), \quad (12)$$

$$\varepsilon\dot{\tilde{x}} = A_L\tilde{x} - \varepsilon Gf(x, \tilde{x}). \quad (13)$$

Система (12), (13) - сингулярно - збуджена,  $x$  и  $\tilde{x}$  - вектори стану повільних та швидких процесів відповідно.

Вироджену систему отримаємо, якщо покладемо  $\varepsilon = 0$

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s - BP\tilde{x}_s - (LC\tilde{x}_s - Gf(x_s, \tilde{x}_s)), \quad (14)$$

$$0 = A_L\tilde{x}_s. \quad (15)$$

З (15) маємо

$$\tilde{x}_s \equiv 0. \quad (16)$$

Звідси випливає, що

$$\dot{x}_s \equiv 0 \quad (17)$$

З порівняння (1) та (4) з урахуванням (5) одержуємо

$$\dot{x} = Ax + LCx - Gf(x, u).$$

Співвідношення (16), (17) дозволяють записати

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_u(x, x, u, \varepsilon) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (LCx - Gf(x, u)) = 0.$$

Таким чином, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $\varphi_u(x, x, u, \varepsilon) \rightarrow 0$  і сингулярно - збуджена система (12), (13) перепишеться у вигляді

$$\dot{x} = (A - BP)x - BPx - \varphi(x, x, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (18)$$

$$\dot{x}_s = A_L x_s - \varepsilon Gf(x, x), \quad (19)$$

де  $\varphi(x, x, \varepsilon)$  одержуємо підстановкою  $u$  з (8) у вираз  $\varphi_u(x, x, u, \varepsilon)$ .

Вироджена система (14), (15) набуває вигляду

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s - BPx_s, \quad (20)$$

$$0 = A_L x_s. \quad (21)$$

Підставляючи  $x_s \equiv 0$  у (20), одержимо

$$\dot{x}_s = (A - BP)x_s \quad (22)$$

Проведемо дослідження цієї системи на рівномірну асимптотичну стійкість у цілому та великому, використовуючи результати, одержані у [2], [3].

Функції  $[(A - BP)x - BPx]$  і  $A_L x$  - неперервні та задовольняють умові Ліпшиця по  $x$  та  $x$  в деякій відкритій області  $G$  простору змінних  $(x, x, t)$ .

Роз'язок (15) - неперервна, ізольована функція. Для системи (22) виконуються умови існування та єдиності роз'язку. Функція  $(A - BP)x_s$  задовольняє умові Ліпшиця по  $X_s$ .

$x_s \equiv 0$  є ізольованою точкою спокою приєднаної системи

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = A_L x(\tau), \quad (23)$$

де  $\tau$  - розтягнутий час,  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ .

Точка спокою  $x(\tau)$  системи (23) є рівномірно асимптотично стійкою за Ляпуновим (в силу *гурвіцевості* матриці  $A_L$ ). Функції  $\varphi(x, x, \varepsilon)$  та  $\varepsilon Gf(x, x)$  прямують до нуля, коли  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким чином, виконуються всі умови теореми з роботи [2].

Згідно з цією теоремою, існує стала  $\varepsilon_0 > 0$  така, що при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  роз'язок  $(x(t, \varepsilon), x_s(t, \varepsilon))$  задачі (18), (19) існує на відрізку  $0 \leq t \leq T$ , єдиний та задовольняє граничним рівностям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_s(t), \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_s(t, \varepsilon) = 0, \quad \text{при } 0 < t \leq T. \quad (25)$$

Таким чином, розв'язок системи (18), (19) за досить малий проміжок часу увійде в малий окіл виродженого розв'язку. Розглянемо цю систему при початкових умовах

$$x(T, \varepsilon) = x^{0*} \quad (26)$$

$$x_s(T, \varepsilon) = x^{0*} \quad (27)$$

Функції  $[(A - BP)x - BPx]$  та  $A_L x$  мають неперервні обмежені похідні по  $x$  та  $x$ . Матриця  $A_L$  - оборотна, внаслідок її гурвіцевості.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = A_L x \quad (28)$$

Через гурвіцевість матриці  $A_L$  ця система рівномірно асимптотично стійка. Матрицю  $P$  будемо вибирати з умови, щоб система (22) була асимптотично стійка.

Таким чином, для системи (18), (19) виконуються всі умови теореми 1 з роботи [2]. Отже, існує стала  $\varepsilon_0 > 0$  така, що для всіх  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  роз'язок  $(x(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon))$   $(x(T, \varepsilon) = x^{0*}, x(T, \varepsilon) = x^{0*})$  системи (18), (19) рівномірно асимптотично стійкий відносно малих відхилень  $X^{0*}$  та довільних відхилень  $\tilde{X}^{0*}$ .

Матрицю  $P$  вибираємо з умови, щоб роз'язок виродженої системи був рівномірно асимптотично стійким у великому з початковими умовами з області  $G$ . Тоді виконуються всі умови теореми 2 роботи [3] і роз'язок системи (18), (19) є рівномірно асимптотично стійким у великому.

У випадку, коли  $G$  - увесь фазовий простір, матимемо стійкість у цілому.

**Твердження:** Нехай даний об'єкт управління (1), (2), для якого виконуються такі умови:

- трійка  $(A, B, C)$  повністю керована та спостережувана,
- виконується умова узгодженості  $G = B \cdot Q$ ,
- $A, B, C, G$  - відомі сталі матриці,
- для функції  $f(x, u)$  існує стала  $M$  така, що на будь-якому скінченному відрізку  $[0, T]$  існує нерівність  $\|f(x, u)\| \leq M$ .

Тоді для спостерігача (4) та регулятора (9) завжди можна підібрати матриці коефіцієнтів  $L, P, R$  такі, що повна система управління (1), (2), (4), (9) буде робастно стійка у цілому.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Потапенко Е.М. Сравнительная оценка робастных систем управления с различными типами наблюдателей. //Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1995. - №1. -С. 109-117.
2. Потапенко Е.М., Савранская А. В. Обобщение теоремы Тихонова для сингулярно - возмущенной системы. - Роботи П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика – 98".- Ч.1. - К., 1998. - С. 111-121.
3. Потапенко Е.М., Савранская А.В. Равномерная асимптотическая устойчивость сингулярно - возмущенной системы при постоянно действующих возмущениях. - Роботи П'ятої Української конференції з автоматичного управління "Автоматика – 98". - Ч.1. - К., 1998. - С. 334-340.

УДК 336.774.5

## ЙМОВІРНІСНІ ОЦІНКИ ДОПУСТИМОЇ СУМИ КРЕДИТІВ

Приварнікова А.О.

В умовах нестабільної економіки різко збільшується ризик від операцій кредитування внаслідок неповернення кредитів, тому важливо оцінити допустиму суму кредитів, яка не порушує стабільності роботи кредитних установ.

Сума неповернених кредитів  $S$  пропорціональна сумі виданих кредитів  $Q$ ;

$$S = kQ, \quad (1)$$

де  $k$  - доля неповернених кредитів.

У загальному випадкові  $Q$  і  $k$  випадкові величини з законами розподілу  $f_1(Q), f_2(k)$ .

Нехай  $R$  - гранична величина втрат від кредитних операцій, яка не порушує стабільності кредитної установи. У загальному випадку її також можна вважати випадковою величиною з законом розподілу  $f_3(R)$ .

Будемо вважати, що стабільність кредитної установи забезпечена, якщо втрати від кредитування не перевищують  $R$  із заданою ймовірністю:

$$P(S < R) = H. \quad (2)$$

Якщо  $R$  не випадкова величина ( $R = R_0$ ), стабільність забезпечується за умови:

$$P(S < R_0) = H. \quad (3)$$

При відомому законі розподілу  $f(k, Q)$  закон розподілу  $g(S)$  можна представити у вигляді [1]:

$$g(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{Q} f\left(\frac{S}{Q}, Q\right) dQ \quad (4)$$

Вважаючи випадкові величини  $Q, k$  незалежними, закон їх розподілу представимо у вигляді:

$$f(k, Q) = f_1(Q) f_2(k) = f_1(Q) f_2\left(\frac{S}{Q}\right). \quad (5)$$

Таким чином, закон розподілу неповернених сум кредитів можна представити:

$$g(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{Q} f_1(Q) f_2\left(\frac{S}{Q}\right) dQ. \quad (6)$$

Тоді  $H$  згідно з (2) є ймовірність попадання в область  $D$ , обмежену  $S > 0, R > 0, S < R$ :

$$H = P(S < R) = \iint_D f(R, S) dR dS \quad (7)$$

Приймаючи  $R, S$  незалежними, тобто  $f(R, S) = g(S) f_3(R)$ , одержимо:

$$H = \int_0^{+\infty} f_3(R) \left[ \int_0^R g(S) dS \right] dR = \int_0^{+\infty} g(S) \left[ \int_S^{+\infty} f_3(R) dR \right] dS \quad (8)$$

Для випадку, коли  $R = R_0$  згідно з (3) маємо:

$$H = \int_0^{R_0} g(S) dS. \quad (9)$$

У загальному випадку  $g(S)$  задається в інтегральній формі (6). У деяких випадках  $g(S)$  можна представити аналітично. Якщо  $Q$  розподілено за законом рівномірної густини в інтервалі

$(Q_{min}, Q_{max})$ , тобто  $f_1(Q) = \frac{1}{Q_{max} - Q_{min}}$ , а  $k$  за законом Релея  $f_2(k) = \frac{k}{a^2} e^{-\frac{k}{2a^2}}$ ,

тоді для  $g(S)$  одержимо:

$$g(S) = \frac{S\sqrt{2\pi}}{(Q_{max} - Q_{min})a} \left[ \Phi\left(\frac{S}{Q_{min}a}\right) - \Phi\left(\frac{S}{Q_{max}a}\right) \right], \quad a = \frac{m_k}{\sqrt{\pi/2}}, \quad (10)$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  - функція Лапласа,  $m_k$  - математичне сподівання  $k$ .

Якщо в (1)  $Q$  не являється випадковою величиною, а  $k$  - випадковою, то закон розподілу  $S$  як функції випадкового аргументу  $k$  можна представити у вигляді:

$$g(S) = \frac{1}{Q} f_2\left(\frac{S}{Q}\right) \quad (11)$$

За допомогою (8) можна одержати залежність:

$$Q = \varphi(a_i, b_i, H), \quad (12)$$

де  $a_i, b_i$  - параметри законів розподілу  $f_2(k), f_3(R)$ .

Величина  $Q$  є ймовірнісною оцінкою допустимої суми кредитів, яка забезпечує стабільність роботи кредитної установи з ймовірністю  $H$ .

Приймаючи типові закони розподілу  $f_2(k), f_3(R)$ , можна одержати співвідношення для обчислення  $Q$ . При знаходженні інтегралів (8) використані результати [2].

Якщо  $f_2(k), f_3(R)$  розподілені за нормальним законом, одержимо:

$$Q = \frac{m_R(1 - \gamma^2 V_R^2)}{m_k(1 + \gamma\sqrt{V_R^2 + V_k^2} - \gamma^2 V_R^2 V_k^2)}, \quad (13)$$

де  $m_R, m_k$  - математичні сподівання випадкових величин  $R$  і  $k$ ,  $V_R, V_k$  - їх коефіцієнти варіації,  $\gamma$  - квантиль рівня  $H$  стандартного нормального розподілу.

Формулою (13) можна користуватися при коефіцієнтах варіації  $V < 0.2$ .

Для логнормального розподілу  $f_2(k), f_3(R)$  маємо:

$$Q = \frac{m_R \sqrt{1 + V_R^2}}{m_k \sqrt{1 + V_R^2} \exp\left\{\gamma \sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_k^2)]}\right\}}. \quad (14)$$

У більшості випадків  $Q$  входить у вираз для  $H$  у неявному вигляді.

Якщо  $k$  розподілено за законом Релея, а  $R$  - за нормальним, маємо:

$$H = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi\mu^2 V_R^2}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{\frac{4}{\pi\mu^2} + 2V_R^2}\right\}; \quad \mu = \frac{m_R}{Qm_k}. \quad (15)$$

При розподілі  $k$  за експоненціальним законом з параметром  $\lambda = \frac{1}{m_k}$ , а  $R$  - за нормальним,

одержимо:

$$H = 1 - \left[0,5 + \Phi\left(\frac{1}{V_R} - \mu V_R\right)\right] \exp\left\{-\mu + \frac{V_R^2 \mu^2}{2}\right\}. \quad (16)$$

Коли  $R = R_0$ , тобто не є випадковою величиною, у формулах (13)-(16) треба взяти  $m_R = R_0$ ,  $V_R = 0$ .

У цьому випадку із співвідношень (15), (16) можна також одержати  $Q$  в явному вигляді.

Для розподілу  $k$  за законом Релея:

$$Q = \frac{R_0 \sqrt{\pi/2}}{m_k \sqrt{-2 \ln(1-H)}}. \quad (17)$$

При розподілі  $k$  за експоненціальним законом з параметром  $\lambda = \frac{1}{m_k}$ :

$$Q = -\frac{R_0}{m_k \ln(1-H)}. \quad (18)$$

Закони розподілу  $f_2(k)$ ,  $f_3(R)$  і їх параметри встановлюються шляхом статистичного аналізу діяльності кредитної установи за попередній період і переносяться на майбутнє. В умовах нестабільної економіки більш перспективними можуть виявитись експертні оцінки.

Вважаючи розподіли  $k, R$  нормальними і маючи оптимістичний  $(k_{min}, R_{max})$  і песимістичний  $(k_{max}, R_{min})$  прогнози, можна оцінити параметри розподілу:

$$m_k = \frac{k_{max} + k_{min}}{2}, \quad \sigma_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{6}, \quad V_k = \frac{\sigma_k}{m_k};$$

$$m_R = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}, \quad \sigma_R = \frac{R_{max} - R_{min}}{6}, \quad V_R = \frac{\sigma_R}{m_R}. \quad (19)$$

Розглянемо на прикладі ймовірнісну оцінку допустимої суми кредитів при експертних оцінках  $R$  і  $k$ :  $k_{min} = 0.2$ ,  $k_{max} = 0.5$ ,  $R_{min} = 600$  тис.грн.,  $R_{max} = 900$  тис.грн.

При  $H = 0.997$  ( $\gamma(H) = 2.748$ ) за формулою (13)  $Q = 1\,405\,608$  грн.; за формулою (14)  $Q = 1\,402\,589$  грн, тобто при однакових математичних сподіваннях і коефіцієнтах варіації результати близькі.

Так як  $R, k$  додатні величини, то при відомих оцінках числових характеристик перевагу слід віддати гіпотезі про логнормальний розподіл.

Зробимо оцінку впливу закону розподілу  $k$  на середню величину долі неповернених кредитів  $m_k$ . Так

як  $k$  належить інтервалу  $(0;1)$ , то при  $m_k = 0,5$ ,  $V_k = \frac{1}{3}$  і нормальному розподілі ймовірність

попадання в цей інтервал складає  $0,9973$ . Для однопараметричних законів Релея і експоненціального через ймовірність попадання в заданий інтервал можна оцінити  $m_k$ . При ймовірності  $0,9973$  попадання в інтервал  $(0;1)$  закону Релея відповідає  $m_k = 0,364$ , а експоненціальному -  $m_k = 0,169$ .

Таким чином, розглядаючи гіпотетичні закони розподілу долі неповернених кредитів, можна прийняти для стабільної економіки - експоненціальний закон, періоду стабілізації - Релея, нестабільної - нормальний (логнормальний).



## ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.: Физматгиз, 1962.-564с.
2. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем.- М.: Мир, 1980.-604с.

УДК 514.

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В РАЙОНІ ТРІЩИНИ

Саликіна Н. В., Толлок В. О.

Аналітичний розв'язок задач про тріщину нормального відриву для смуги скінченних розмірів, навантаженої силами, що розтягують, із крайовою або центральною тріщиною подано в роботі [1] у виді розкладу комплексної функції напружень Вестергарда в ряд, при виключенні з якого членів вищих порядків обчислюються напруження, що виникають поблизу тріщини:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_x &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma; \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2};\end{aligned}\tag{1}$$

де  $K_1$  — коефіцієнт інтенсивності напружень, $r$  — відстань від вершини тріщини до деякої точки плоского тіла, $\theta$  — кут між вектором  $r$  і віссю абсцис, $\sigma$  — величина сили, рівномірно розподіленої по краю смуги.

Для розв'язку задачі розрахунку напружень і зміщень у районі тріщини пропонується ітераційний алгоритм із використанням методу крайових елементів, описаного в роботі [2]. В основу алгоритму покладена ідея розбивки тіла на 2 області, границею контакту яких є передбачувана лінія поширення тріщини. Запишемо граничне інтегральне рівняння з [3]:

$$\frac{1}{2} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ji}^*(\xi, x) \sigma_i(x) d\Gamma(x);\tag{2}$$

де  $u_{ji}^*(\xi, x)$  — функція фундаментальних переміщень, $\sigma_{ji}^*(\xi, x)$  — функція фундаментальних напружень.

Думаємо, що досягнуте критичне навантаження, що викликає розрив у небезпечній точці. Уведемо такі позначення:  $\Gamma_1$  — границя контакту двох областей (рис.1),  $n_l$  — кількість елементів розбивки границі  $\Gamma_1$ . Нехай  $l$ -й крайовий елемент містить точку розриву. Визначимо граничні умови на лінії  $\Gamma_1$ .

На 1-ому кроці ітерації: для першої області думаємо зміщення на  $\Gamma_1$  рівними нулю. Береги тріщини вільні від напружень, тому в  $l$ -ому крайовому елементі  $\sigma_{i(l)}$  рівні нулю. На кожному кроці ітерації буде виконуватися рівність нулю напружень для  $l$ -го крайового елемента. Уводячи чисельні апроксимації і замінюючи інтегральне рівняння системою алгебраїчних рівнянь, знаходимо  $\sigma_{i(n)}^{(1)}$ ,  $n \neq l$ , а також переміщення для  $l$ -го елемента, а точніше для нижнього берега тріщини.

На границі контакту для 2-ої області задаємо відповідно напруження  $\sigma_{i(n)}^{(1)}$ , де  $n \neq l$ . Аналогічно знаходимо переміщення  $u_{i(n)}^{(2)}$ ,  $n \neq l$  на лінії продовження тріщини, а також зміщення для верхнього берега тріщини. Переміщення  $u_{i(n)}^{(2)}$  будуть відомими граничними умовами на  $\Gamma_1$  для 1-ої області на другій ітерації. Отже, загальне ітераційне граничне рівняння для  $\Gamma_1$  виглядає так:

$k$ -я ітерація для 1-ої області:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi) + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ji}^*(\xi, x) u_i^{(k)}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \sigma_{ji}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_1} u_{ji}^*(\xi, x) \sigma_i^{(k)}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u_{ji}^*(\xi, x) \sigma_i(x) d\Gamma(x), \quad (3)$$

де  $u_i^{(k)}$  — відомі величини у вузлових точках границі  $\Gamma_1$ .

$k$ -я ітерація для 2-ої області:

$$\frac{1}{2}u_j(\xi) + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ji}^*(\xi, x) u_i^{(k+1)}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \sigma_{ji}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma_1} u_{ji}^*(\xi, x) \sigma_i^{(k)}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} u_{ji}^*(\xi, x) \sigma_i(x) d\Gamma(x), \quad (4)$$

де  $\sigma_i^{(k)}$  — відомі величини у вузлових точках границі  $\Gamma_1$ .

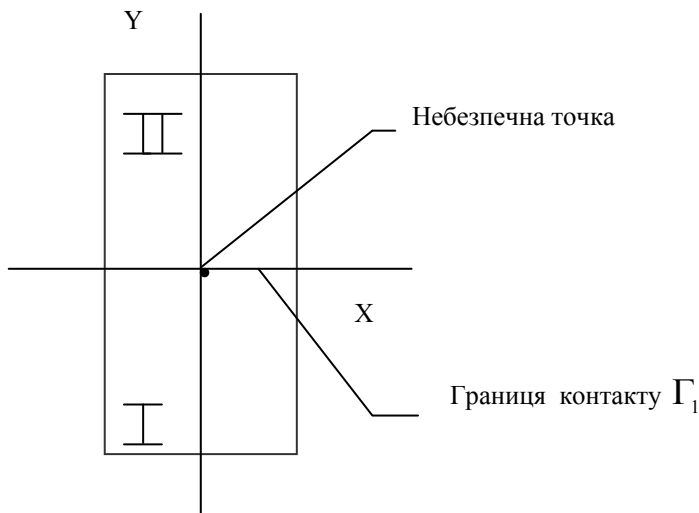


Рис.1. Розбивка плоского тіла на дві області

Довжина тріщини в даному алгоритмі дорівнює довжині  $l$ -го елемента. Висока концентрація напружень у вершині тріщини, що утворилася, приведе до подальшого росту по лінії контакту. У цьому випадку ітераційна процедура застосовується для розрахунку тріщини, довжина якої включає декілька крайових елементів.

Приведемо результати тестування алгоритму на прикладах деяких задач про тріщину для смуги скінченних розмірів:

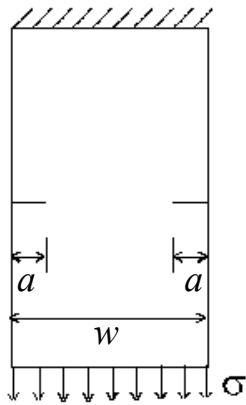
1. Смуга шириною  $w=1$  см і довжиною  $S=8$  см із двома симетрично розташованими щодо осі ординат крайовими тріщинами

рівномірно навантажена силами, що розтягують  $\sigma = 500.0$  Мпа. Верхній край смуги жорстко затиснений (рис.2).

2. Смуга шириною  $w=0.6$  см і довжиною  $S=8$  см із крайовою тріщиною, верхній край котрої жорстко затиснений, рівномірно навантажена силами, що розтягують  $\sigma = 500.0$  Мпа (рис.3).

3. Смуга шириною  $w=1$  см і довжиною  $S=8$  см із центральною тріщиною верхній край котрої жорстко затиснений, рівномірно навантажена силами, що розтягують  $\sigma = 500.0$  Мпа (рис.4).

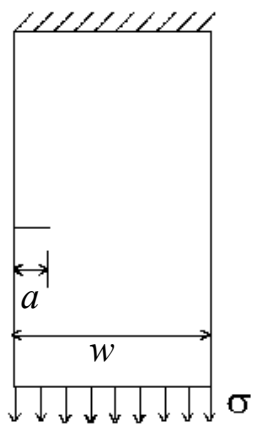
Коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.3$  і модуль Юнга  $E=0.2 \times 10^7$ . Для розглянутих задач границею контакту є вісь абсцис (рис.1), що впливає з граничних умов навантаження і формул (1) (відповідно до цих формул кут поширення тріщини  $\theta=0$ ). Для демонстрації швидкості збіжності обмежимося розглядом результатів для прикладу (2) (табл.1). Кількість елементів розбивки границі  $\Gamma_1$   $n_l=12$ .



$$1. K_1 = Y\sigma\sqrt{a};$$

$$Y = 1.99 + 0.76\frac{a}{w} - 8.48\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{w}\right)^3;$$

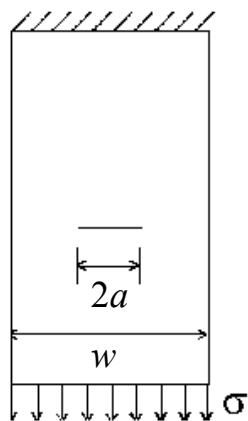
Рис.2. Задача про тріщину (1) для лінійно-пружного тіла



$$2. K_1 = Y\sigma\sqrt{a};$$

$$Y = 1.99 - 0.41\frac{a}{w} + 18.7\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4;$$

Рис.3. Задача про тріщину (2) для лінійно-пружного тіла



$$3. K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\sec\frac{\pi a}{w}\right)^{1/2};$$

Рис.4. Задача про тріщину (3) для лінійно-пружного тіла

Таблиця 1— Напруження і зміщення на лінії контакту при довжині тріщини, що включає один крайовий елемент

перша область					друга область			
еле- мент	$u_x^{(1)}$	$u_y^{(1)}$	$\sigma_s^{(1)}$	$\sigma_n^{(1)}$	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\sigma_s^{(1)}$	$\sigma_n^{(1)}$
1	0.000000	0.000000	-130.8	795.7	-0.000003	0.000902	130.8	795.7
2	0.000000	0.000000	-125.7	433.2	-0.000003	0.000902	125.7	433.2
3	0.000000	0.000000	-87.3	439.3	-0.000003	0.000902	87.3	439.3
4	0.000000	0.000000	-56.4	446.3	-0.000003	0.000902	56.4	446.3
5	0.000000	0.000000	-28.2	455.8	-0.000003	0.000902	28.2	455.8
6	0.000000	0.000000	-1.7	464.4	-0.000003	0.000902	1.7	464.4
7	0.000000	0.000000	24.2	472.8	-0.000003	0.000902	-24.2	472.8
8	0.000000	0.000000	51.6	483.2	-0.000003	0.000902	-51.6	483.2
9	0.000000	0.000000	82.3	502.7	-0.000003	0.000902	-82.3	502.7
10	0.000000	0.000000	123.0	534.1	-0.000003	0.000902	-123.0	534.1
11	0.000000	0.000000	138.6	1009.3	-0.000003	0.000902	-138.6	1009.3
12	0.000006	0.000033	0.0	0.0	-0.000003	0.000869	0.0	0.0
еле- мент	$u_x^{(2)}$	$u_y^{(2)}$	$\sigma_s^{(2)}$	$\sigma_n^{(2)}$	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\sigma_s^{(2)}$	$\sigma_n^{(2)}$
1	-0.000003	0.000902	-130.5	795.6	-0.000003	0.000902	130.5	795.6
2	-0.000003	0.000902	-125.6	433.3	-0.000003	0.000902	125.6	433.3
3	-0.000003	0.000902	-87.2	439.4	-0.000003	0.000902	87.2	439.4
4	-0.000003	0.000902	-56.4	446.4	-0.000003	0.000902	56.4	446.4
5	-0.000003	0.000902	-28.2	456.0	-0.000003	0.000902	28.2	456.0
6	-0.000003	0.000902	-1.8	464.6	-0.000003	0.000902	1.8	464.6
7	-0.000003	0.000902	24.2	472.9	-0.000003	0.000902	-24.2	472.9
8	-0.000003	0.000902	51.4	483.3	-0.000003	0.000902	-51.4	483.3
9	-0.000003	0.000902	82.1	502.7	-0.000003	0.000902	-82.1	502.7
10	-0.000003	0.000902	122.8	534.0	-0.000003	0.000902	-122.8	534.0
11	-0.000003	0.000902	138.5	1008.9	-0.000003	0.000902	-138.5	1008.9
12	0.000003	0.000935	0.0	0.0	0.000003	0.000869	0.0	0.0
еле- мент	$u_x^{(3)}$	$u_y^{(3)}$	$\sigma_s^{(3)}$	$\sigma_n^{(3)}$	$u_x^{(4)}$	$u_y^{(4)}$	$\sigma_s^{(3)}$	$\sigma_n^{(3)}$
1	-0.000003	0.000902	-130.2	795.7	-0.000003	0.000902	130.2	795.7
2	-0.000003	0.000902	-125.5	433.3	-0.000003	0.000902	125.5	433.3
3	-0.000003	0.000902	-87.1	439.4	-0.000003	0.000902	87.1	439.4
4	-0.000003	0.000902	-56.4	446.4	-0.000003	0.000902	56.4	446.4
5	-0.000003	0.000902	-28.1	455.9	-0.000003	0.000902	28.1	455.9
6	-0.000003	0.000902	-1.8	464.5	-0.000003	0.000902	1.8	464.5
7	-0.000003	0.000902	24.2	472.9	-0.000003	0.000902	-24.2	472.9
8	-0.000003	0.000902	51.4	483.2	-0.000003	0.000902	-51.4	483.2
9	-0.000003	0.000902	82.1	502.7	-0.000003	0.000902	-82.1	502.7
10	-0.000003	0.000902	122.8	534.0	-0.000003	0.000902	-122.8	534.0
11	-0.000003	0.000902	138.4	1009.0	-0.000003	0.000902	-138.4	1009.0
12	0.000003	0.000935	0.0	0.0	0.000002	0.000869	0.0	0.0

Як видно з таблиці, ми використовуємо усього лише три наближення для досягнення збіжності розв'язку. Швидка збіжність характерна і для розв'язків прикладів (1) і (3). Найбільш важливою характеристикою напружено-деформованого стану у вершини тріщини є розтягуюче напруження  $\sigma_n$ . Саме досягнення ним критичного значення є загальною умовою розриву [4]. Порівняємо результати розрахунку нормальних напружень з аналітичними, обчисленими за формулою (1). Зіставлення розв'язків представимо у виді графіків аналітичної і наближеної функцій розподілу напружень (рис.5, рис.7, рис.9). На рисунках уведені такі позначення:  $a$  — довжина граничного елемента,  $w$  — ширина розглянутої смуги,  $u_n$  і  $u_s$  — відповідно нормальні і дотичні зміщення. На кожному з рисунків приведені графіки аналітичного і наближеного розподілу нормальних напружень, що відповідають довжині тріщини, рівної  $a, 2a, \dots, 6a$  (тобто що включає  $n$  (для задачі (3) —  $2n$  крайових елементів), де  $n$  змінюється від 1 до 6). По отриманих графіках щодо всіх розглянутих прикладів видно, що ріст тріщини тягне за собою ріст нормальних напружень. В усіх випадках чисельні результати знаходяться в узгодженні з аналітичним розв'язком за винятком точок, що знаходяться на великій відстані від вершини тріщини, де формули (1) не є точними для визначення напружень удалині від вершини тріщини. Форму тріщини, що поширюється, також можна визначити відповідно до зміщень для нижнього і верхнього берегів тріщини, що відповідають нульовим напруженням. На рис.6,8,10 зображені фрагменти тіла, що деформується, із тріщиною для прикладів (1)-(3).

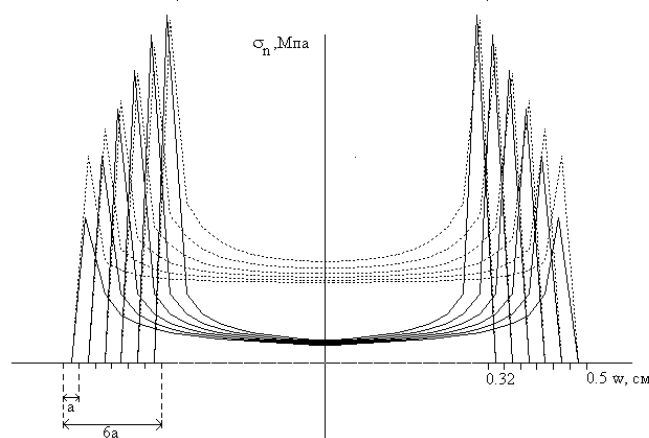


Рис.5. Розподіл нормальних напружень  $\sigma_n$  на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (1)

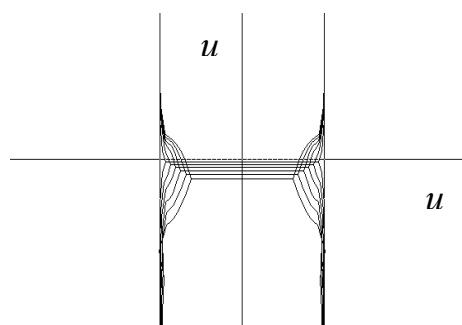


Рис. 6. Поширення двох симетрично розташованих щодо осі ординат тріщин для прикладу (1)

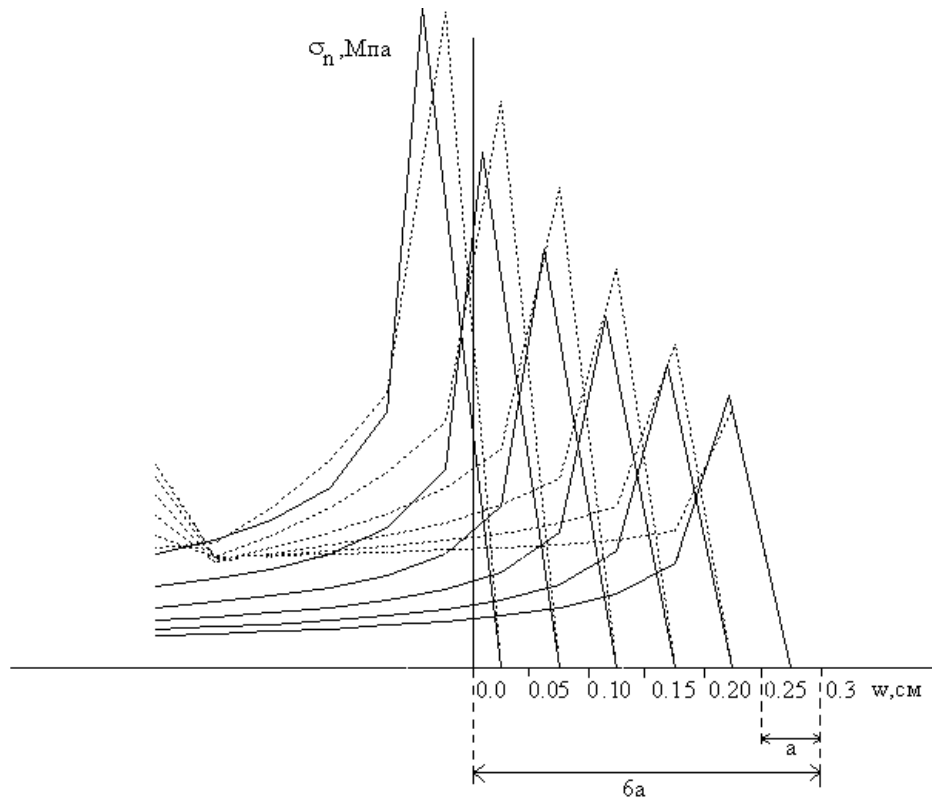


Рис.7. Розподіл нормальних напружень  $\sigma_n$  на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (2)

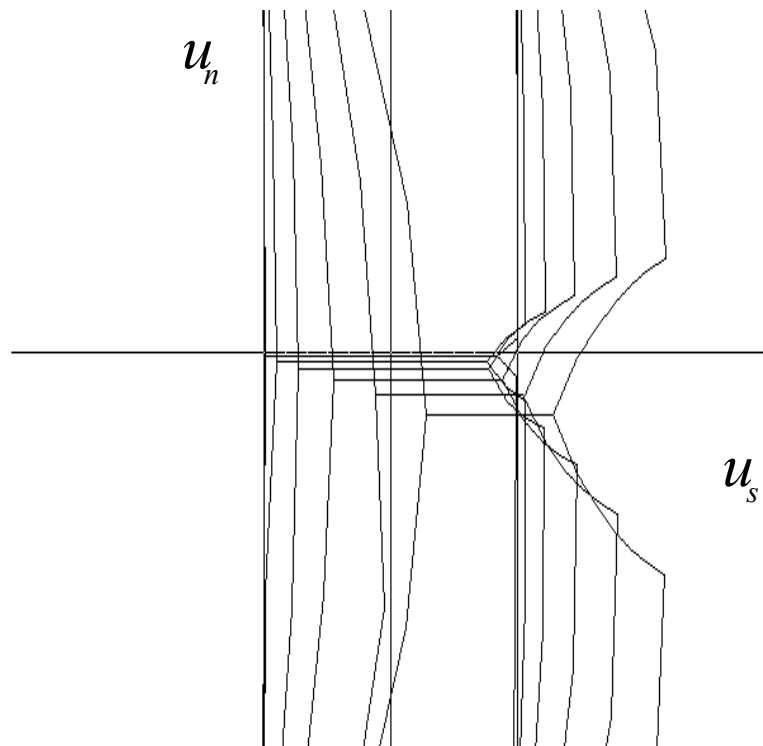


Рис.8. Поширення крайової тріщини для прикладу (2)

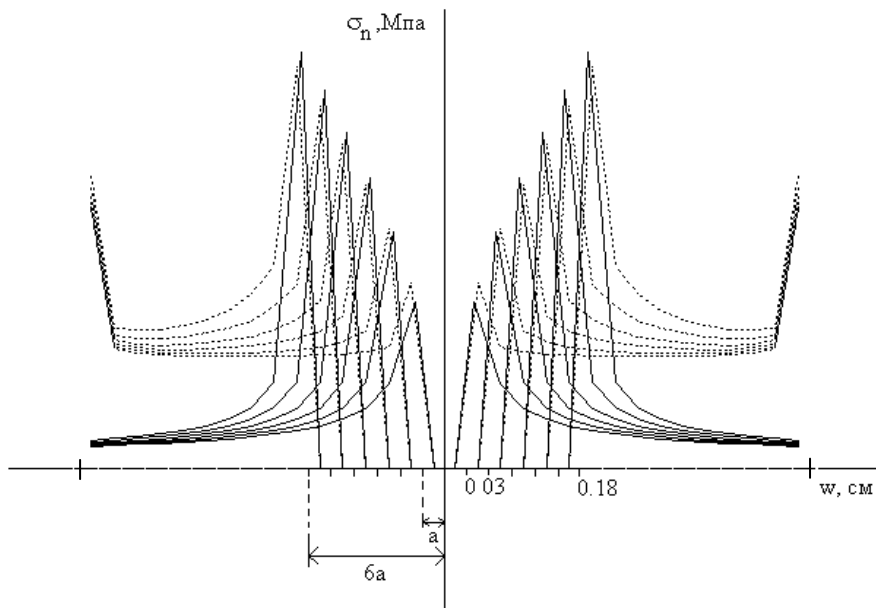


Рис.9. Розподіл нормальних напружень  $\sigma_n$  на лінії продовження тріщини у відповідності з аналітичним (суцільна крива) і наближеним (штрихова крива) розв'язками для прикладу (3)

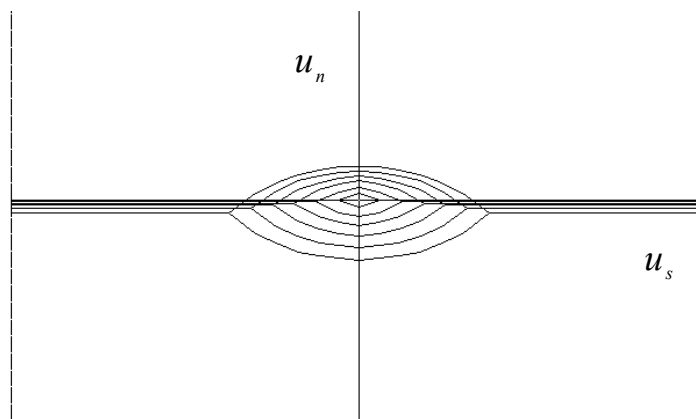


Рис.10. Поширення центральної тріщини

Графіки чисельного й аналітичного розв'язків розглянутих задач про тріщину показують узгодженість в околиці вершини тріщини. Моделювання явища нормального відриву для даних конфігурацій дає реальну картину поширення тріщини.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Брок Д. Основы механики разрушения – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела – М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие – М.: Наука, 1981. – 688 с.

## КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ФЛАГОВОГО ПРОСТОРУ

Стеганцева П.Г., Величко І.Г.

Флаговий простір відноситься до класичних неєвклідових просторів і його метричні особливості добре вивчені ( див., наприклад, [1,2,3]). Флагова геометрія являє собою математичну модель принципу відносності механіки Галілея - Ньютона [2]. Стаття, що пропонується, присвячена диференціальній геометрії кривих та поверхонь флагового простору.

**1. Різні означення флагового простору.** Сучасні основи геометрії включають три аспекти : аксіоматичний, проєктивний, метричний. В аксіоматику флагового простору включаються всі аксіоми системи Вейля, крім аксіоми  $V_4^*$ , яка замінюється такою аксіомою :

$V_4^*$ . Існує хоча б один вектор, скалярний квадрат якого додатній. Існують принаймні два лінійно незалежних вектора, скалярні квадрати яких рівні нулю.

Таким чином, базовою частиною флагової геометрії, як і євклідової, є афінна геометрія, але їх метричні властивості різні. Векторно- аксіоматичну побудову флагового простору здійснено, наприклад, у роботі [3]. У ній також розглянуто деякі питання аналітичної геометрії прямих і площин цього простору. Зауважимо лише, що прямі і площини флагового простору нерівноправні, існують три типи прямих та площин: неізотропні, слабо ізотропні та сильно ізотропні. Це пояснюється тим, що згідно з аксіоматикою флаговий простір містить два типи ненульових векторів – з додатнім і рівним нулю скалярним квадратом, у той час як у євклідовому просторі будь-який ненульовий вектор має додатній скалярний квадрат.

Проєктивно - групова точка зору на геометрію полягає в наступному. У проєктивному просторі фіксується деяка фігура  $F$  і з проєктивної групи перетворень проєктивного простору виділяються ті перетворення, відносно яких фігура  $F$  інваріантна. Ці перетворення також утворюють групу, яка називається фундаментальною групою. Сама фігура називається абсолютом геометрії. Вивчення інваріантів фундаментальної групи і складає предмет геометрії.

З цієї точки зору флаговим простором називається проєктивний простір, абсолют якого складається з проєктивної площини  $\omega$ , подвійної дійсної прямої  $g$  на ній та подвійної дійсної точки  $\Omega$  на прямій  $g$ . Абсолют флагового простору називається ще флагом. Матриця перетворень фундаментальної групи флагового простору має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

З метричної точки зору флаговий простір є простором з квадратичною метрикою. Вона задається за допомогою квадратичної форми, значення якої на векторі  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  визначається за формулою  $f(\bar{x}) = x_1^2$ .

**2. Канонічний репер кривої. Дериваційні формули.** Криві флагового простору будемо задавати за допомогою векторної функції  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Натуральним параметром кривої назвемо такий параметр  $S$ , для якого виконується умова

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1. \tag{1}$$

Оскільки у флаговому просторі вектор  $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$  має модуль  $|\bar{a}|$ , що дорівнює  $|x_a|$ , то вимога

(1) рівносильна вимозі  $|\dot{x}(t)| = 1$ . Наприклад, параметризація кривої  $\bar{r}(t) = (t, t^2, t^3)$  є натуральною. Для переходу до натуральної параметризації кривої достатньо за натуральний параметр взяти першу координату векторної функції, що задає криву.



**Означення.** Дотичною до кривої в даній точці називається пряма, що проходить через цю точку в напрямку вектора  $\bar{r}'(t)$ .

Дотична до кривої у відповідності до класифікації векторів флагового простору може бути неізотропною, слабо ізотропною або сильно ізотропною прямою.

**Означення.** Стичною площиною кривої в даній точці назвемо площину, що проходить через цю точку в напрямку векторів  $\bar{r}'(t)$  та  $\bar{r}''(t)$ .

Крім скалярного добутку двох векторів будемо розглядати ще одну бінарну операцію на множині усіх векторів флагового простору, а також тернарну операцію на цій множині. Результати цих операцій будемо називати відповідно добутком двох і добутком трьох векторів.

Добутком двох векторів  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$  та  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$  флагового простору називається

число  $\overline{ab} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , а добутком трьох векторів  $\bar{a}, \bar{b}$  та  $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$  - число

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ці операції мають такі властивості:

1.  $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$
2.  $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\overline{ab})$
3.  $\overline{ab} = -\overline{ba}$
4.  $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\overline{bc} = \overline{a_1bc} + \overline{a_2bc}$
5.  $(\lambda\bar{a})\overline{bc} = \lambda(\overline{abc})$

Будемо розглядати у флаговому просторі тільки ті криві, що мають у кожній своїй точці неізотропний дотичний вектор.

У кожній точці  $M$  неізотропної кривої  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  флагового простору побудуємо такий репер  $\{M, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3\}$ , для якого виконуються умови:

1. Вектор  $\overline{m}_1$  є одиничним вектором дотичної прямої.
2. Вектор  $\overline{m}_2$  лежить у стичній площині, ортогональний до вектора  $\overline{m}_1$ , причому  $\overline{m}_1 \overline{m}_2 = 1$ .
3. Вектор  $\overline{m}_3$  напрямлений так, що  $\overline{m}_1 \overline{m}_2 \overline{m}_3 = 1$ .

Таким чином, якщо крива має рівняння  $\bar{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ , тобто параметризована натуральним параметром, то  $\overline{m}_1 = \bar{r}'(x) = (1, y'(x), z'(x))$ . Для знаходження вектора  $\overline{m}_2$  необхідно продиференціювати вектор  $\bar{r}'(x)$  ще раз, і, так як вектор  $\overline{m}_1$  одиничний, то вектори  $\bar{r}''(x)$  і  $\overline{m}_1$  ортогональні, тому вектори  $\bar{r}''(x)$  і  $\overline{m}_2$  колінеарні. Коефіцієнт колінеарності знаходимо із вимоги 2.

Таким чином,  $\overline{m}_2 = \frac{\bar{r}''(x)}{y''(x)} = \left( 0, 1, \frac{z''(x)}{y''(x)} \right)$ .

Вектор  $\overline{m}_2$  будемо називати *одиничним вектором головної нормалі*. Він є слабо ізотропним вектором. Очевидно, що вимозі 3 задовольняє вектор  $\overline{m}_3 = (0, 0, 1)$ , тобто одиничний вектор бінормалі один і той же в довільній точці кривої і є сильно ізотропним вектором. Побудований репер можна називати

ортонормованим, маючи на увазі, що нормування відбувається за допомогою вимог  $\overline{m_1} \overline{m_2} = 1$  та  $\overline{m_1} \overline{m_2} \overline{m_3} = 1$ , оскільки говорити про норму ізотропних векторів немає сенсу.

Якщо крива має рівняння  $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , тобто її задано не в натуральній параметризації, то вектор  $\overline{r}''(t)$  вже не буде ортогональним до дотичної прямої і для знаходження вектора  $\overline{m_2}$  застосовуємо процес ортогоналізації. Одержимо

$$\overline{m_1} = \frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|} = \left( \pm 1, \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{z'(t)}{x'(t)} \right), \quad \overline{m_2} = \left( 0, 1, \frac{z''(t) \mp \frac{x''(t)z'(t)}{|x'(t)|}}{y''(t) \mp \frac{x''(t)y'(t)}{|x'(t)|}} \right), \quad \overline{m_3} = (0, 0, 1)$$

Неважко отримати дериваційні формули побудованого репера кривої, які будемо називати як і в евклідовому просторі формулами Френе кривої. Перша формула, очевидно, має вигляд  $\frac{d\overline{r}}{dx} = \overline{m_1}$ , де  $x$  натуральний параметр.

Далі,  $\frac{d\overline{m_1}}{dx} = k\overline{m_2}$ , де  $k = y''(x)$ . Продиференціювавши ще один раз, одержимо  $\frac{d\overline{m_2}}{dx} = \left( 0, 0, \left( \frac{z''(x)}{y''(x)} \right)' \right)$  тобто  $\aleph = \left( \frac{z''(x)}{y''(x)} \right)'$

Остання формула Френе має вигляд  $\frac{d\overline{m_3}}{dx} = \overline{0}$ .

Таким чином, матриця дериваційних формул Френе має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \aleph \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де  $k$  і  $\aleph$  є скалярними функціями параметра  $x$ .

**3. Кривина та скрут. Частинні випадки кривих.** Будемо називати  $k$  і  $\aleph$ , що визначаються формулами Френе, відповідно *кривиною* та *скрутом* кривої. Легко вивести формули для обчислення кривини і скриту кривої, що задана в натуральній параметризації.

Дійсно, добуток  $\frac{d\overline{r}}{dx} \frac{d^2\overline{r}}{dx^2}$  дорівнює  $k$ , а добуток  $\frac{d\overline{r}}{dx} \frac{d^2\overline{r}}{dx^2} \frac{d^3\overline{r}}{dx^3}$  дорівнює  $k^2\aleph$ .

Таким чином, отримуємо  $k = \frac{d\overline{r}}{dx} \frac{d^2\overline{r}}{dx^2}$ ,  $\aleph = \frac{\frac{d\overline{r}}{dx} \frac{d^2\overline{r}}{dx^2} \frac{d^3\overline{r}}{dx^3}}{\left( \frac{d\overline{r}}{dx} \frac{d^2\overline{r}}{dx^2} \right)^2}$ .

Як і у евклідовому просторі систему рівнянь  $\begin{cases} k = k(x) \\ \aleph = \aleph(x) \end{cases}$ , де  $x$  - натуральний параметр, будемо називати натуральними рівняннями кривої.

Розглянемо питання про знаходження параметричних рівнянь кривої за її натуральними рівняннями.

Нехай натуральні рівняння кривої мають вигляд  $\begin{cases} k = \text{const} \\ \aleph = \text{const} \end{cases}$ . Будемо шукати параметричні рівняння цієї

кривої у вигляді  $\bar{r}(x) = (x, y(x), z(x))$ . Так як  $k = y''(x)$ , то  $y(x) = \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2$ . Оскільки

$\aleph = \left(\frac{z''(x)}{y''(x)}\right)'$ , то  $z(x) = \frac{k\aleph x^3}{6} + C_3x^2 + C_4x + C_5$  де  $C_1, \dots, C_5$  - довільні сталі. Одержані криві є аналогами гвинтових ліній євклідового простору.

Інший частинний випадок дають натуральні рівняння  $\begin{cases} k = \text{const} \\ \aleph = 0 \end{cases}$ . Отримаємо криву

$\bar{r}(x) = \left(x, \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2, C_3x^2 + C_4x + C_5\right)$ . За її неявними рівняннями

$$\begin{cases} y = \frac{kx^2}{2} + C_1x + C_2 \\ y - z = (C_1C_3 - C_4)x + C_2C_3 - C_5 \end{cases} \quad \text{можна зробити висновок, що вона плоска.}$$

Плоскі криві флагової геометрії, що мають постійну кривину, називаються циклами[2].

**4. Поверхні флагового простору. Дотична площина та нормаль.** Поверхні флагового простору будемо задавати векторною функцією двох скалярних аргументів  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ . Параметричні рівняння поверхні можна записати у вигляді  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ .

**Означення.** Поверхня  $F$ , що задана за допомогою векторної функції  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ , називається *регулярною*, якщо в кожній її точці вектори  $\bar{r}_u$  та  $\bar{r}_v$  неколінеарні.

**Означення.** *Дотичною площиною*  $T_M F$  регулярної поверхні  $F$  у точці  $M$  називається площина, що визначається векторами  $\bar{r}_u$  та  $\bar{r}_v$ .

Зупинимось лише на випадку поверхонь, в яких дотична площина в кожній точці неізотропна. Будемо пов'язувати з кожною точкою  $M$  регулярної неізотропної поверхні рухомий репер  $(M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ . Розглянемо криві перетину поверхні  $F$  площинами, що проходять через пряму  $g$  абсолютна флагового простору. Такі площини у відповідності до класифікації площин сильно ізотропні.

Розглянемо також криві перетину поверхні площинами, що проходять через пряму  $\Omega A$  абсолютна, де  $A$  - полюс прямої  $g$  [4]. Ці площини слабо ізотропні. Будемо розглядати таку параметризацію поверхні, в якій розглянуті криві першої сім'ї є координатними лініями  $u = \text{const}$ , а криві другої сім'ї - координатними лініями  $v = \text{const}$ . Тоді вектор  $\bar{r}_v$  є дотичним вектором кривої першої сім'ї і він слабо ізотропний, а вектор  $\bar{r}_u$  - неізотропний вектор, що визначає напрям дотичної прямої до кривої другої сім'ї. Введемо позначення  $(\bar{r}_u, \bar{r}_u) = E$ . Ясно, що  $E > 0$ .

Таким чином, якщо параметри  $u$  і  $v$  поверхні вибрано описаним вище способом, то вектори  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  рухомого репера в точці  $M$  поверхні виберемо таким чином:  $\bar{e}_1 = \bar{r}_u, \bar{e}_2 = \bar{r}_v, \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Сильно ізотропну пряму, що проходить через точку  $M$  поверхні, будемо називати *нормаллю* до поверхні.

Означимо на поверхні *першу квадратичну форму* рівністю  $I = d\bar{r}^2$ . Оскільки  $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ , то  $I = Edu^2$ . Очевидно, що  $I$  невизначена для ізотропних кривих. Якщо ж крива неізотропна, то за

допомогою  $I$  можна визначити її довжину  $s = \int_a^b |d\bar{r}| = \int_a^b \sqrt{I}$ .

Другою квадратичною формою поверхні будемо називати квадратичну форму  $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ , коефіцієнти якої обчислюються за формулами  $L = \bar{r}_{uu}\bar{r}_u\bar{r}_v$ ,  $M = \bar{r}_{uv}\bar{r}_u\bar{r}_v$ ,  $N = \bar{r}_{vv}\bar{r}_u\bar{r}_v$ .

Дериваційні формули побудованого рухомого реперу поверхні можна по аналогії з евклідовим простором записати у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{r}_{11} &= \Gamma_{11}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{11}^2 \bar{r}_2 + \alpha \bar{e}_3, \\ \bar{r}_{12} &= \Gamma_{12}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{12}^2 \bar{r}_2 + \beta \bar{e}_3, \\ \bar{r}_{22} &= \Gamma_{22}^1 \bar{r}_1 + \Gamma_{22}^2 \bar{r}_2 + \gamma \bar{e}_3,\end{aligned}\tag{2}$$

де  $\bar{r}_1 = \bar{r}_u$ ,  $\bar{r}_2 = \bar{r}_v$ ,  $\bar{r}_{11} = \bar{r}_{uu}$ ,  $\bar{r}_{12} = \bar{r}_{uv}$ ,  $\bar{r}_{22} = \bar{r}_{vv}$ . Для обчислення коефіцієнтів  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$  та  $\alpha, \beta, \gamma$  дериваційних формул домножимо кожен з рівностей (2) скалярно на вектор  $\bar{r}_1$ , а потім на вектор  $\bar{r}_2$ , а також знайдемо добутки  $\bar{r}_{11}\bar{r}_1\bar{r}_2$ ,  $\bar{r}_{12}\bar{r}_1\bar{r}_2$ ,  $\bar{r}_{22}\bar{r}_1\bar{r}_2$ . З урахуванням того, що

$$(\bar{r}_1, \bar{r}_1) = E, (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 0, (\bar{r}_2, \bar{r}_2) = 0,$$

одержимо  $\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}$ ,  $\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}$ ,  $\Gamma_{22}^1 = 0$ ,  $\alpha = \frac{L}{r_1 r_2 e_3}$ ,  $\beta = \frac{M}{r_1 r_2 e_3}$ ,  $\gamma = \frac{N}{r_1 r_2 e_3}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой. - Киров: Кировский государственный педагогический институт имени В.И.Ленина, 1991. - 121с.
2. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. - М.: Наука, 1969. - 212с.
3. Понарин Я.П. Построение трехмерной флаговой геометрии на основе системы аксиом Вейля. - Депонировано в ВИНТИ 22.03.82, 1252-82 ДЕП. - 19с.
4. Кованцов М.И. Проективная геометрия. - К.: Вища школа, 1969.

УДК 681.3:771.537.442

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Толок А.В., Мухин В.В.

В предлагаемом способе визуального анализа используются известные принципы исследования функций посредством производных. Этот принцип предполагает выделение таких функциональных свойств, как *возрастание и убывание функции, определение экстремальных точек, максимум и минимум функции, выпуклость и вогнутость, а также точки перегиба функции.*

Задача состоит в получении наглядных графических образов как вспомогательных элементов отображения этих свойств для выделения некоторых "качеств" исследуемой функции.

Под *графическим образом* вспомогательных элементов в данном случае будем понимать совокупность отрезков, отображающих конкретные функциональные свойства посредством использования градаций цветового изменения.

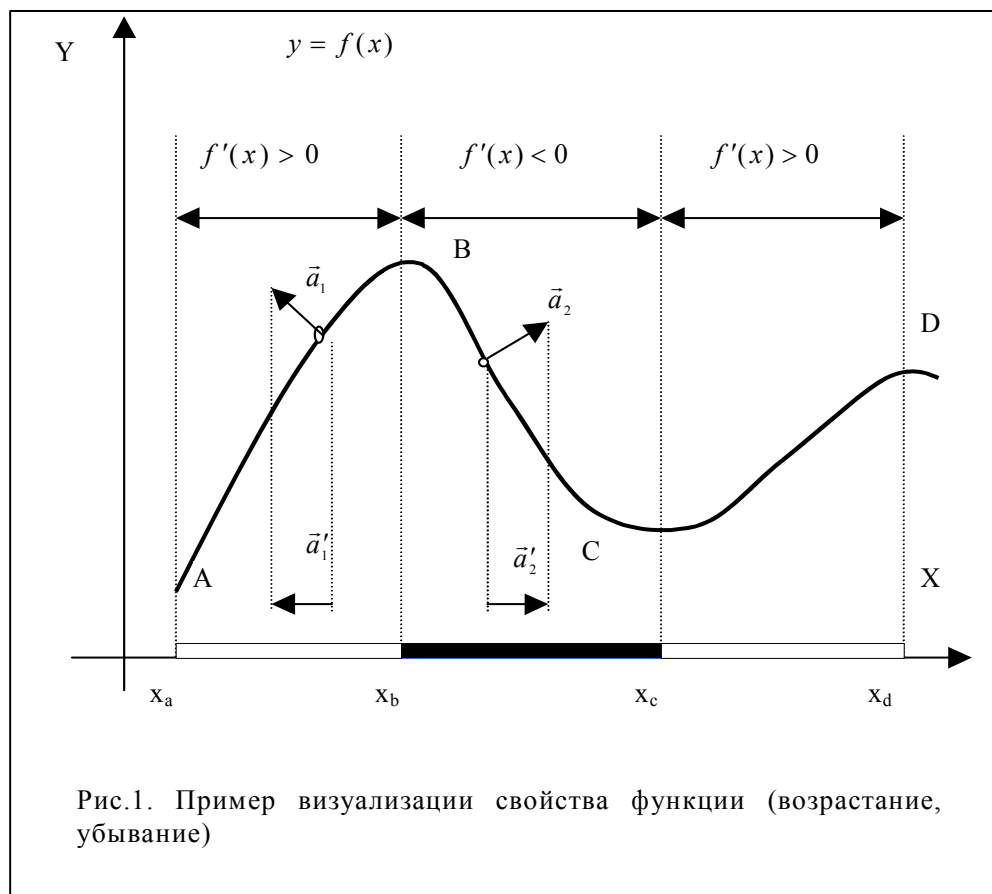
Рассмотрим общую концепцию, на которой построен предлагаемый подход исследования функции.

### Возрастание и убывание функции.

По определению [1-5] функция  $f(x)$  называется возрастающей на некотором промежутке, если на этом промежутке производная  $f'(x) > 0$ , и убывающей, если  $f'(x) < 0$ .

Исходя из определения, свойство возрастания и убывания функции делится на чередование двух «качеств» вдоль рассматриваемой числовой оси  $x$  и не зависит от количественных характеристик, таких как изменение уклона возрастания или изменение уклона убывания. Этот факт позволяет выделить понятия «возрастания» и «убывания» как проявления свойства, отображаемого как область, принадлежащую одному из этих качеств и окрашенную в соответствующий цвет.

На рис. 1 показан пример визуального выделения проявлений свойства «возрастания и убывания» с помощью окраски числовой оси соответственно белым и черным цветом.



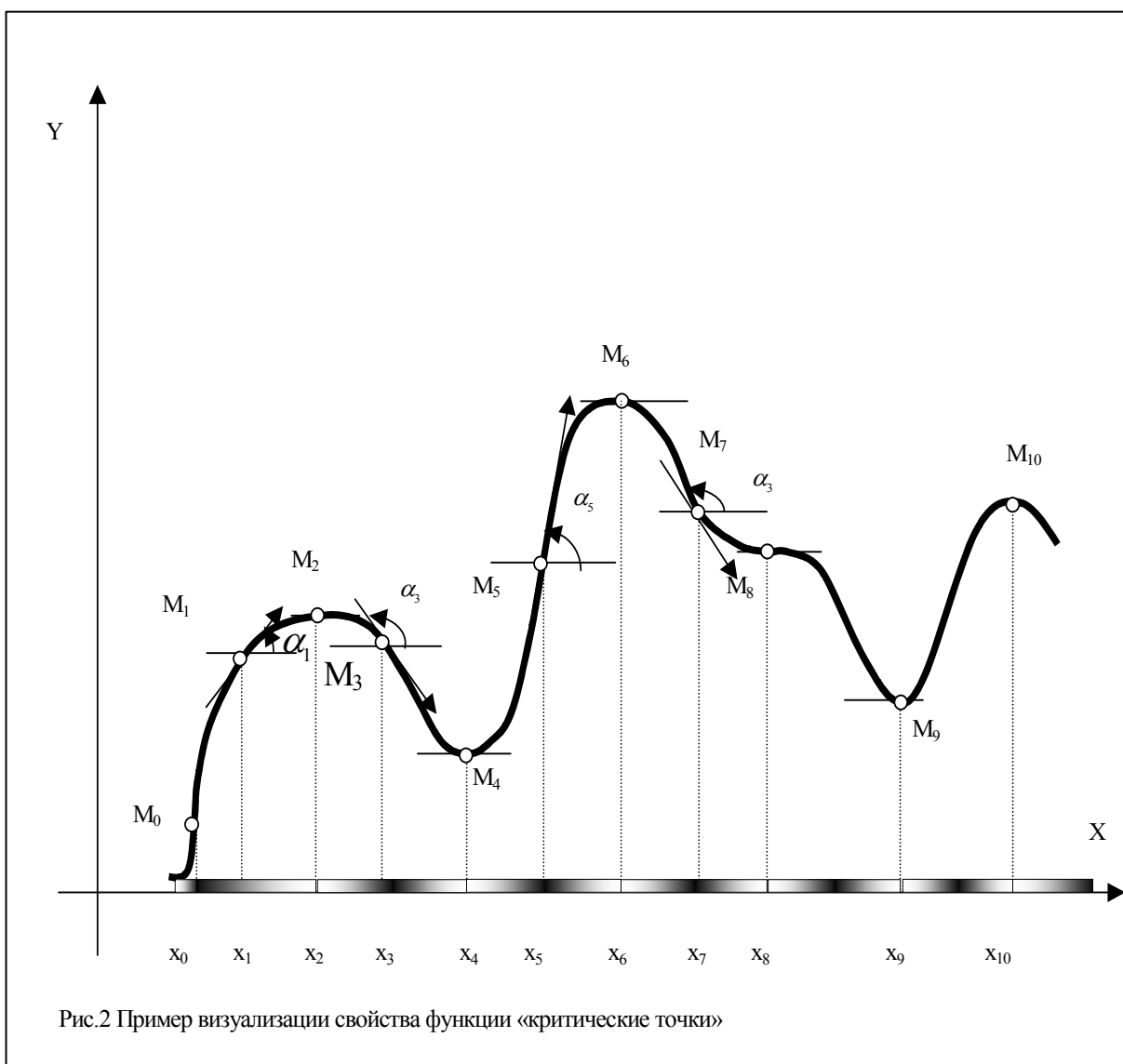
Интересным является тот факт, что одномерный образ несёт визуальную информацию о свойстве возрастания и убывания и определяет положение экстремальных точек функции. Геометрический смысл заключается в определении направления проекции вектора нормали  $\vec{a}'$  для каждой точки кривой на ось  $Ox$ . Если направление проекции нормали совпадает с положительным направлением самой оси, определяемым направлением её единичного вектора  $\vec{i}$ , то можно утверждать, что функция убывает, в противном случае функция возрастает, т.е.

$$\vec{a}' \uparrow \uparrow \vec{i} \rightarrow f'(x) < 0,$$

$$\vec{a}' \uparrow \downarrow \vec{i} \rightarrow f'(x) > 0.$$

Однако в рассмотренном выше образе отсутствует информация о всех критических точках исследуемой функции и отсутствуют выпуклые и вогнутые зоны, поэтому неопределимы точки перегиба.

**Критические точки.** Под критическими точками принято понимать значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или в бесконечность либо терпит разрыв. Эта информация также подлежит визуализации посредством цветовых или тоновых сочетаний. Например, использование градаций цветового перехода “от черного к белому” позволяет отобразить области существования критических точек (рис.2), при этом отбрасывается информация о возрастании и убывании исследуемой



функции. Геометрический смысл заключается в определении угла  $\alpha$ , образуемого вектором нормали для каждой точки кривой и осью  $Ox$ . Если наклон нормали совпадает с наклоном оси  $Ox$ , то можно утверждать, что производная функции стремится к бесконечности. Если направление нормали перпендикулярно оси  $Ox$ , то можно утверждать, что производная функции равна нулю, т.е.

$$\bar{a} \perp \bar{r} \rightarrow (f'(x) \rightarrow \infty),$$

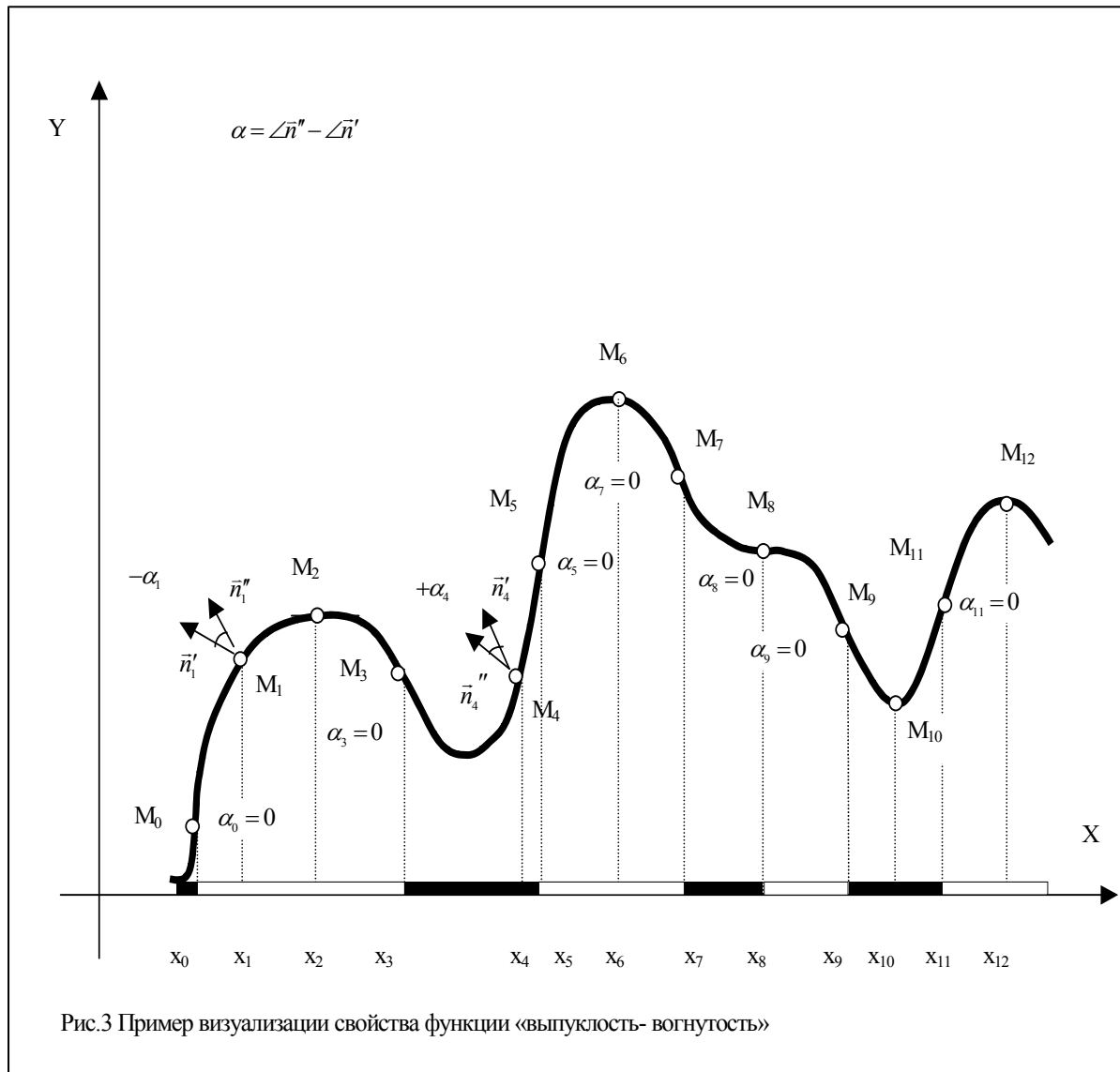
$$\bar{a} // \bar{r} \rightarrow f'(x) = 0.$$

Присвоив каждому из этих случаев соответственно черный и белый цвет, а промежуточным положениям вектора нормали - соответствующую градацию перехода от черного к белому, получим искомый образ (рис. 2). Полученный результат достаточно наглядно отображает изменение кривизны исследуемой функции, отбросив информацию о возрастании и убывании, а также выпуклости и вогнутости. К тому же полностью отсутствует информация о максимуме и минимуме рассматриваемой кривой.

#### Выпуклость – вогнутость.

Точка  $M_i$  будет являться точкой перегиба, если существует вторая производная  $f''(x_i) = 0$ , причём имеющая в противоположных окрестностях этой точки разные знаки. Область функции  $f(x)$ , где вторая производная  $f''(x) < 0$  называется **выпуклым**, а при  $f''(x) > 0$  - **вогнутым участком функции**  $f(x)$ .

Геометрически процедуру определения выпуклых и вогнутых участков можно представить как изменение угла наклона вектора нормали  $\alpha$  в окрестности точки  $M_i$ . Это изменение можно записать как угол между нормальными векторами в точках  $M_i'$  и  $M_i''$ , расположенных в противоположных окрестностях точки  $M_i$  при условии сохранения последовательности обхода. В этом случае интерес представляет не значение угла, а его знак - направление изменения угла  $\alpha$  (рис.3).



Определив знак угла как качество, соответствующее проявлениям свойства «выпуклость - вогнутость» и присвоив каждому из них определенный цвет, например, белый и черный соответственно, получаем области, характеризующие знак второй производной.

#### Максимум и минимум.

Из определения следует, что если существует производная  $f'(a)$ , то функция  $f(x)$  может иметь в точке  $a$  внутренний максимум или минимум лишь в том случае, когда при  $x = a$

$$f'(a) = 0 \text{ (необходимое условие экстремума).}$$

Если существует вторая производная  $f''(a)$ , то функция  $f(x)$  имеет в точке  $a$

максимум при  $f'(a) = 0$  и  $f''(a) < 0$ ,

минимум при  $f'(a) = 0$  и  $f''(a) > 0$ .

Имея графические аналоги для исследования обоих случаев рис.2 и рис.3, предлагается использовать комбинированный способ определения искомых точек (рис.4.)

На рис.4 наглядно отображаются области существования локальных максимумов и минимумов рассматриваемой функции, где максимум включает в себя сочетание белого цвета в критической точке первого образа с белым цветом области выпуклости функции, а минимум включает в себя сочетание белого цвета в критической точке с черным цветом области вогнутости функции.

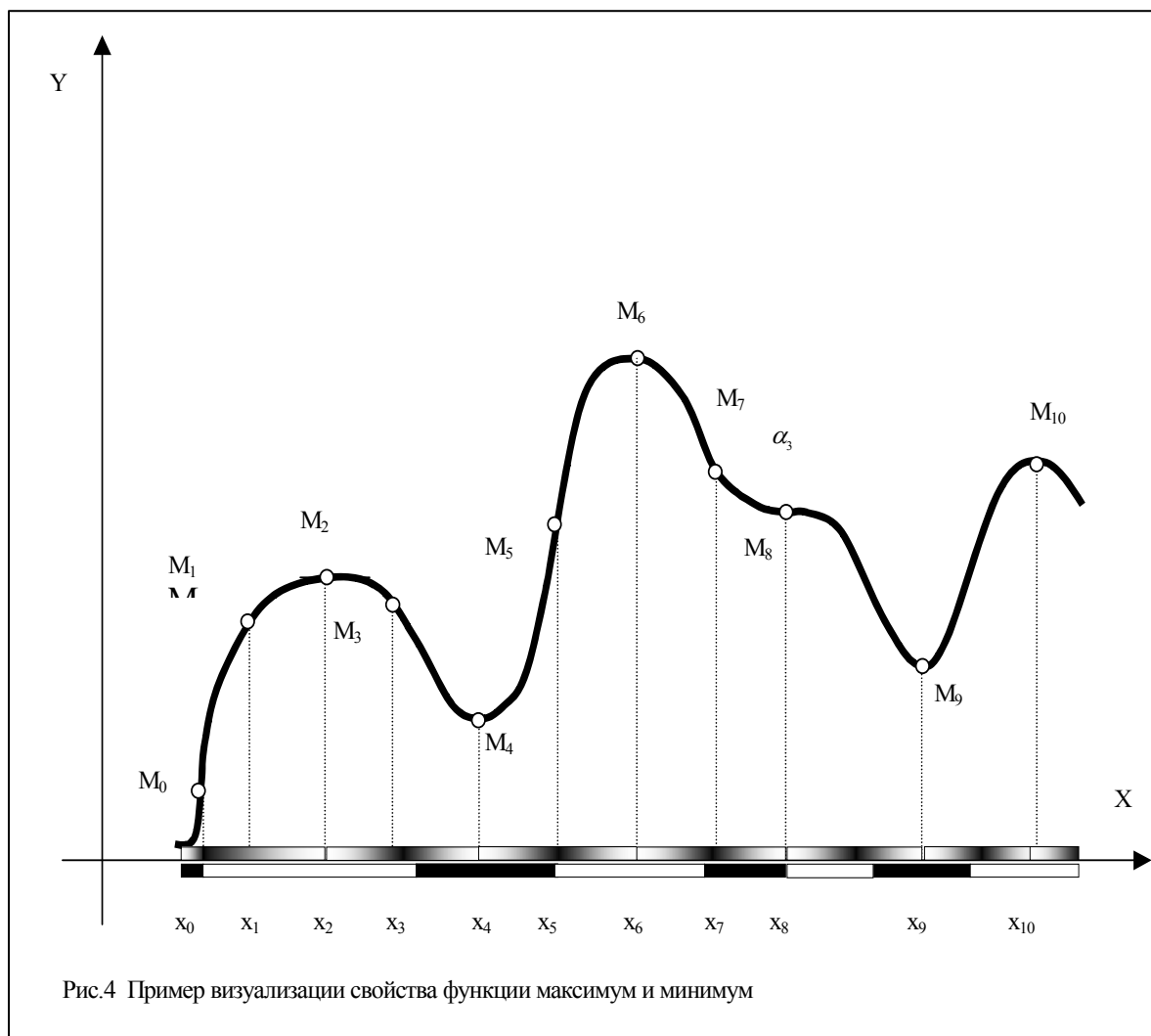


Рис.4 Пример визуализации свойства функции максимум и минимум

Таким образом, для исследуемой кривой можно выделить множество аргументов  $x = \{x_2, x_6, x_{10}\}$ , значение функции для которых будет локальным максимумом, и множество аргументов  $x = \{x_0, x_4, x_9\}$ , значение функции для которых будет локальным минимумом.

Критическая точка  $M_8$  не относится ни к одному из перечисленных множеств, поскольку  $f''(x_8) = 0$ , а значит, не выполняется второе условие определения.

Предлагаемый способ исследования функции одного аргумента достаточно легко переносим на анализ поверхности функции двух переменных  $f(x, y)$ , где по тому же принципу пространственный образ разбивается на плоские проекции, отображающие вышеперечисленные области, содержащие визуальную информацию о свойствах функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наук. Думка, 1979. – 320 С.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. -М.: Наука, 1969.- Т.1. - 607 С.
3. Капран И.А. Практические занятия по высшей математике.-Харьков, 1970.- С.212-568.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов.-М.:Высшая школа, 1988. - С. 18 – 271.
5. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. –К.:Наук.Думка, 1972. - С.171-224.



## СТОХАСТИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ ПЛАСТИНИ

Швидка С.П.

Розглядається тонка ізотропна прямокутна пластина із сторонами  $a$ ,  $b$  та товщиною  $h$  з прямокутними включеннями однакової жорсткості  $D_i$ , що знаходиться під дією поверхневого випадкового навантаження. Дослідження проводиться при припущеннях, що прийняті в [1,2], з використанням імпульсивних функцій. Це дозволяє розглядати суцільну пластинку-модель із змінними параметрами щільності  $\rho$  та жорсткості  $D$ , еквівалентною конструкції з включеннями. Досліджуються пластини шарнірно оперті по зовнішньому контуру.

У більшості випадків характеристики діючих на деформівну систему випадкових навантажень можна вважати незмінними у досить широких інтервалах спостереження. Це дозволяє трактувати навантаження як стаціонарний випадковий процес. Крім того, майже всі стаціонарні випадкові навантаження, що становлять інтерес, є ергодичними [3]. Одними з найважливіших є навантаження, математичне сподівання яких дорівнює нулю, а спектральна щільність має вигляд:

$$S_q(x_1, y_1, x_2, y_2, i\omega) = \frac{S}{2\pi} \delta(x_2 - x_1) \delta(y_2 - y_1), \quad (1)$$

$$S_q(x_1, y_1, x_2, y_2, i\omega) = \psi(\omega) \exp(-\alpha|x_1 - x_2| - \beta|y_1 - y_2|), \quad (2)$$

де  $\delta$  - дельта-функції;  $S$  - інтенсивність білого шуму,  $\psi(\omega)$  - дійсна додатня функція частоти,  $\alpha, \beta$  - дійсні додатні числа або функції частоти.

Вихідне рівняння руху пластини має вигляд [1,2]. Функція, що апроксимує прогин пластини з включенням, задається у вигляді ряду за формами власних коливань  $W_{mn}(x, y)$ :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(t) W_{mn}(x, y), \quad (3)$$

де  $W_{mn}(x, y) = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$ ,  $\alpha_m = m\pi/a$ ;  $\beta_n = n\pi/b$ ,  $f_{mn}(t)$  - випадкові функції часу (узагальнені координати).

Застосування до стохастичного диференціального рівняння [2] варіаційного методу Бубнова-Гальоркіна зводить поставлену задачу до системи стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + 2\gamma_{mn} \omega_{mn} \frac{df_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 f_{mn} = Q_{mn}(t), \quad m, n = \overline{1, \infty}. \quad (4)$$

Тут  $Q_{mn}(t)$  - узагальнені сили,

$$Q_{mn}(t) = \frac{1}{A_{mn}} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) W_{mn}(x, y) dx dy,$$

де

$$A_{mn} = \int_0^a \int_0^b \rho h W_{mn}^2(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Дисипативні члени введені вже після переходу до звичайних диференціальних рівнянь,  $\gamma_{mn}$  - коефіцієнти затухання відповідних форм коливань. Решта позначень відповідає [4].

Той факт, що система рівнянь (4) розпалася на окремі рівняння, дає можливість досліджувати поведінку кожної узагальненої координати  $f_{mn}$  незалежно від інших. Для того, щоб зробити висновок про поведінку пружної системи треба також враховувати кореляцію між різними ступенями свободи. Система рівнянь (4) досліджується за допомогою методу диференціальних рівнянь відносно моментних

функцій [3]. Якщо зовнішнє навантаження є стаціонарним процесом, то моментні функції другого порядку залежать лише від різниці часу  $\tau = t_2 - t_1$ .

Спектральні щільності та кореляційні функції стаціонарного випадкового процесу зв'язані між собою співвідношеннями Вінера-Хінчина, враховуючи які, отримують спектральні щільності  $S_{f_{mn} f_{rs}}(i\omega)$  для узагальнених координат:

$$S_{f_{mn} f_{rs}}(i\omega) = S_{Q_{mn} Q_{rs}}(i\omega) \left( (\omega_{mn}^2 - 2i\varepsilon_{mn}\omega - \omega^2) (\omega_{rs}^2 + 2i\varepsilon_{rs}\omega - \omega^2) \right)^{-1}, \quad (6)$$

$$m, n, r, s = \overline{1, \infty}$$

де  $\varepsilon_{mn} = \gamma_{mn} \omega_{mn}$ .

Для випадкових навантажень, спектральні щільності яких мають вигляд (1), (2), відповідно отримуємо:

$$S_{Q_{mn} Q_{rs}}(i\omega) = \frac{sab \delta_{mnr}}{8\pi A_{mn} A_{rs}}, \quad (7)$$

$$S_{Q_{mn} Q_{rs}}(i\omega) = \frac{\psi(\omega)(ab)^2}{16A_{mn} A_{rs}} I_{mr}(\omega) J_{ns}(\omega), \quad (8)$$

де

$$I_{mr}(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{m^2 \pi^2} \left\{ \frac{\alpha a}{1 + (\alpha_m^*)^2} + \frac{2[1 - (-1)^m e^{-\alpha a}]}{(1 + (\alpha_m^*)^2)^2} \right\}, & m = r; \\ \frac{8}{mr \pi^2} \frac{1 - (-1)^m e^{-\alpha a}}{(1 + (\alpha_m^*)^2)(1 + (\alpha_r^*)^2)}, & m \neq r. \end{cases}$$

$$I_{mr}(\omega) = 0, \quad m \neq r, |m \pm r| - \text{непарне}, \quad (9)$$

де  $\alpha_m^* = \alpha a / (m\pi)$ ;  $\alpha_r^* = \alpha a / (r\pi)$ .

$$J_{ns}(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi^2} \left\{ \frac{\beta b}{1 + (\beta_n^*)^2} + \frac{2[1 - (-1)^n e^{-\beta b}]}{(1 + (\beta_n^*)^2)^2} \right\}, & n = s; \\ \frac{8}{ns \pi^2} \frac{1 - (-1)^n e^{-\beta b}}{(1 + (\beta_n^*)^2)(1 + (\beta_s^*)^2)}, & n \neq s. \end{cases}$$

$$J_{ns}(\omega) = 0, \quad n \neq s, |n \pm s| - \text{непарне}, \quad (10)$$

де  $\beta_n^* = \beta b / (n\pi)$ ;  $\beta_s^* = \beta b / (s\pi)$ .

За відомими спектральними щільностями знаходять математичні сподівання, кореляційні функції та інші характеристики другого порядку для вихідного процесу та його похідних. У випадку, коли стохастичне навантаження є просторово-часовим білим шумом, отримуємо наступні співвідношення ймовірнісних характеристик для нормального прогину  $w(x, y, t)$ :

кореляційну функцію

$$K_w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sab \exp(-|\tau| \varepsilon_{mn})}{16A_{mn}^2 \varepsilon_{mn} \omega_{mn}^2} \left( \cos \tau \omega_\varepsilon + \frac{\varepsilon_{mn}}{\omega_\varepsilon} \sin |\tau| \omega_\varepsilon \right) \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1 \sin \alpha_m x_2 \sin \beta_n y_2, \quad (11)$$

дисперсію

$$\sigma_w^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sab}{16A_{mn}^2 \varepsilon_{mn} \omega_{mn}^2} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1 \sin \alpha_m x_2 \sin \beta_n y_2, \quad (12)$$

спектральну щільність

$$S_w(i\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sab}{8\pi A_{mn}^2} \left( (\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_{mn}^2 \omega^2 \right)^{-1} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1 \sin \alpha_m x_2 \sin \beta_n y_2, \quad (13)$$

де  $\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \varepsilon_{mn}^2}$ .

Отримана кореляційна функція (11), крім дисперсії, залежить від двох параметрів  $\varepsilon_{mn}$  і  $\omega_{mn}$ , значення яких суттєво впливають на властивості процесу та зумовлюють загальний характер його реалізацій. Параметр  $\varepsilon_{mn}$  характеризує швидкість зменшення кореляційної залежності між ординатами процесу; значення відношення  $\varepsilon_{mn} / \omega_\varepsilon$  характеризує “ступінь нерегулярності процесу”: при малому значенні цього відношення ординати процесу, що взяті через періоди часу  $2\pi / \omega_\varepsilon$ , мають сильну кореляцію і реалізація процесу схожа на синусоїду; при великому значенні  $\varepsilon_{mn} / \omega_\varepsilon$  періодичність з частотою  $\omega_\varepsilon$  непомітна. Дисперсія (12) дозволяє робити висновок про амплітудні значення випадкового процесу, що є визначаючим для оцінок динамічної міцності. З формули видно, що дисперсія зменшується при збільшенні жорсткості, демпфірування та маси пластини.

Для порівняльного аналізу зручніше використовувати нормовану кореляційну функцію:

$$r_w(\tau) = K_w / \sigma_w^2. \quad (14)$$

Щоб привести (13) до безрозмірного вигляду, використано характерне значення частоти  $\omega_0$ , введене як [3]:

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_0 g}{\rho_0 h}},$$

де  $\rho_0, D_0$  - щільність і жорсткість основної області матеріалу пластини.

У випадку суцільної пластини співвідношення (11)-(13) мають той же вигляд, що і результати, наведені в роботі [3]. При дослідженні питання про збіжність ряду (11) можна побачити, що внаслідок наявності множника  $e^{-|z|\varepsilon_{mn}}$  зазначений ряд збігається рівномірно для  $t \geq t_0 > 0$  при будь-якому  $t_0 > 0$ .

Нижче наведено результати деяких обчислень за співвідношеннями (11)-(14) для пластини з параметрами [4]:  $a = b = 100$  см,  $h = 0.5$  см,  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$  кгсек<sup>2</sup>/см<sup>4</sup>,  $\mu = 0.3$ ,  $\varepsilon_{mn} = 0.02\omega_{mn}$ . На рис. 1 зображено криві, які характеризують зміну нормованої кореляційної функції нормального прогину в точці  $(0.15a; 0.15b)$  квадратної пластини з центральним квадратним вирізом із стороною  $0.25a$  в залежності від числа членів ряду. Із графіків можна бачити, що криві нормованих кореляційних функцій у випадках  $m=n=2$ ,  $m=n=5$ ,  $m=n=10$  практично збігаються. Характер зміни нормованої кореляційної функції прогину в центрі пластини в залежності від жорсткості включення демонструється на рис.2. Як видно, збільшення параметру  $\psi = (D_0 - D_i) / D_0$  веде до зменшення кореляції прогинів. Вздовж осі абсцис відкладались величини відносних розмірів вирізу – відношення довжини сторони вирізу  $a^*$  до довжини сторони пластини  $a$ . Вздовж осі ординат відкладались величини параметру дисперсії прогину  $K_{\sigma_w^2}$ , рівного відношенню дисперсії прогину пластин з отвором до дисперсії суцільної пластини. Вплив розташування центру непідкріпленого квадратного вирізу  $(x_c; y_c)$  на дисперсію прогину в точці пластини  $(0.15a; 0.15b)$  ілюструється графіками рис.3. Проведене теоретичне дослідження дозволяє зробити висновок, що дисперсія прогину пластини незначно змінюється при зміщенні центра вирізу

вздовж осей симетрії та дещо різко – до кутів пластини. Зміну величини параметра дисперсії прогину в центрі пластини  $K_{\sigma_w^2}$  в залежності від жорсткості центрального

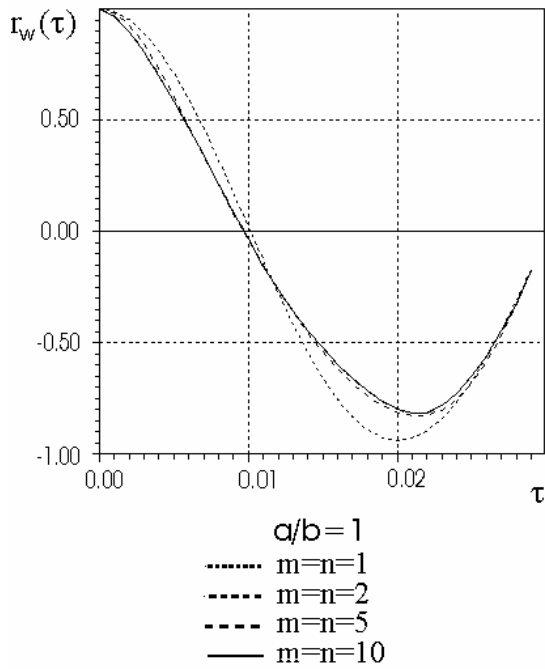


Рис.1. Нормовані кореляційні функції прогину пластини з центральним квадратним вирізом із стороною  $0.25a$ .

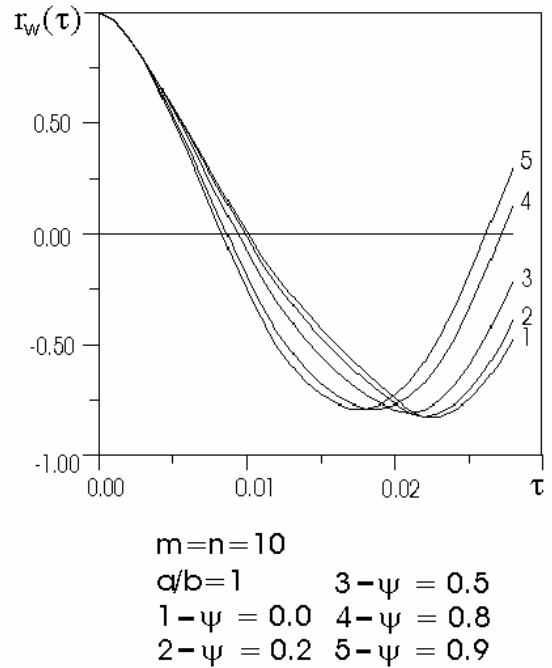


Рис.2. Нормовані кореляційні функції прогину пластини з центральним квадратним включенням із стороною  $0.5a$ .

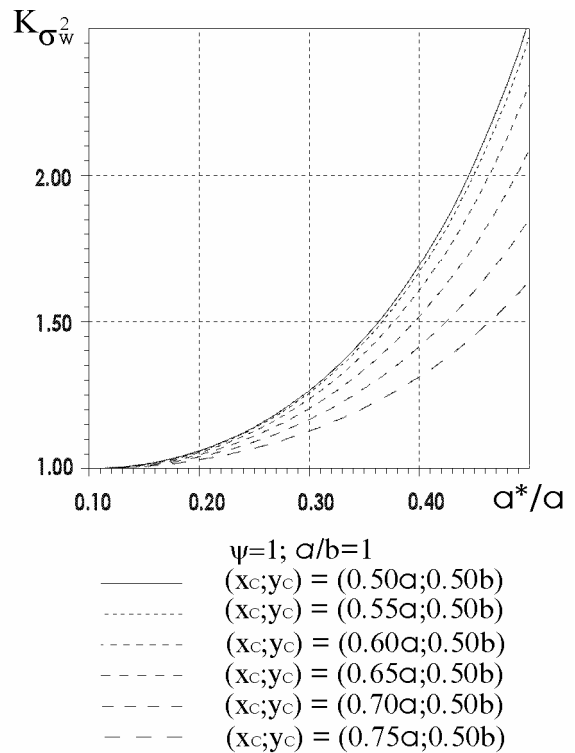
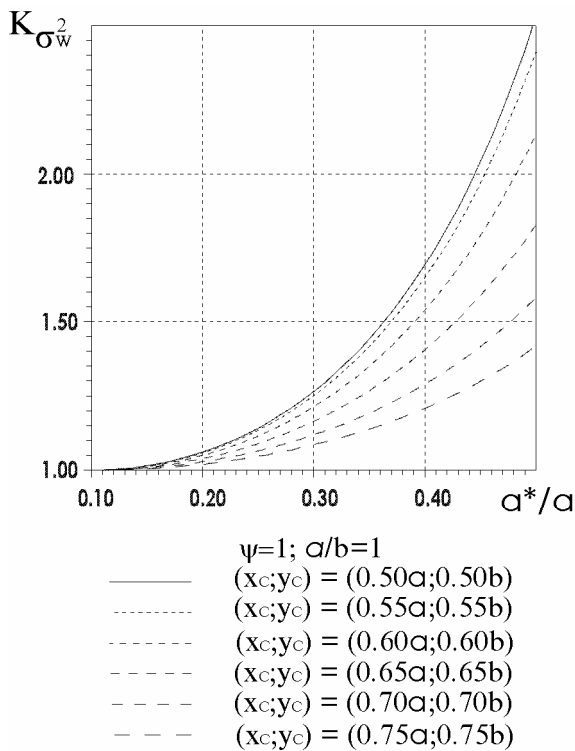


Рис.3. Вплив розташування центра квадратного вирізу на величину параметра дисперсії прогину пластини.

квадратного включення демонструють графіки рис.4. В усіх випадках характерним є зростання коефіцієнта  $K_{\sigma_w^2}$  при збільшенні відносних розмірів включення, що пояснюється впливом на дисперсію прогину маси пластини, яка має іншу жорсткість. На рис.5 зображено графіки спектральної щільності для прогину в центрі квадратної пластини з центральним квадратним включенням із стороною  $0.5a$ .

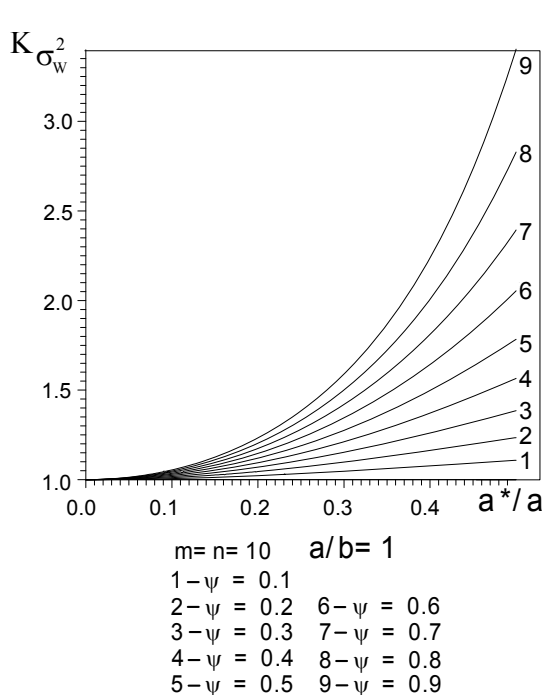


Рис.4. Вплив відносного розміру квадратного включення на величину параметра дисперсії прогину пластини.

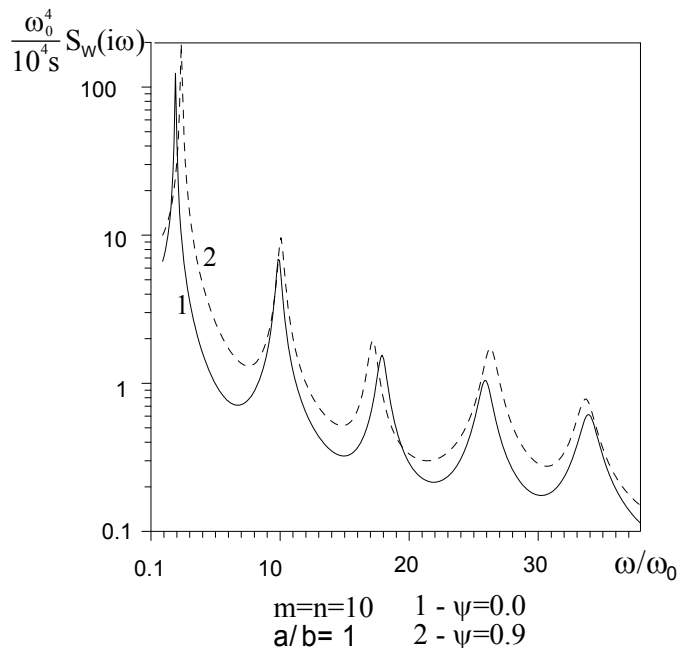


Рис.5. Спектральні щільності прогину в центрі пластини з центральним квадратним включенням із стороною  $0.5a$ .

Значення спектральної щільності відкладені в логарифмічному масштабі. Кожен максимум функції відповідає одній з власних частот пластини. Перший максимум відповідає нижчій власній частоті коливань пластини, яка при зменшенні жорсткості включення зростає. Оскільки спектр випадкового процесу в основному зосереджено у відносно вузькій області частот навколо власних частот коливань пластини, то процес є вузькосмуговим. Припущення про вузькосмуговість процесу на виході для систем з малим затуханням добре підтверджується експериментально та є цілком обґрунтовано [6].

Таким чином, отримані формули дозволяють проводити аналіз ймовірнісних характеристик пластин з включеннями від геометричних та фізичних параметрів при випадкових навантаженнях з метою вибору їх оптимальних значень.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями.- М.: Машиностроение. -1981.- 191 с.
2. Швидка С. П. Коливання прямокутних пластин з включеннями як відгук на дію поверхневого випадкового навантаження // Вісник Запорізького держ. університету. - ЗДУ, 1998.- №1 – С. 81-83.
3. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. - М. Наука, 1979.- 336с.
4. Швыдкая С. П. Распределение экстремумов временных амплитуд случайного процесса колебаний пластин с включениями // Придніпровський наук. вісник. Механіка та математика – 1997.- №12(23) – С. 9-11.
5. Диментберг М.Ф. Вынужденные колебания пластин при нагрузке, представляющей собой пространственно-временной случайный процесс // Инжен. журнал.- 1961.- т.1.- вып.2.
6. Макеев В.П. Гриненко Н.И. Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций.- М.:Наука, 1984.- 231с.

## ДО КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПЕРВІСНО ТОРКАЮТЬСЯ У ТОЧЦІ

Шишканова Г.А.

При розгляданні задачі про контакт двох пружних тіл звичайно припускається, що обидва тіла обмежені опуклими поверхнями і у точці дотику мають загальну дотичну площину. Точка первісного дотику стиснутих тіл є регулярною точкою поверхонь обох тіл. Стиснення відбувається під дією сил  $Q$ , лінія дії яких перпендикулярна загальній дотичній площині до поверхонь тіл у точці первісного дотику.

Випадок, коли для поверхні одного із стиснутих тіл або для поверхонь обох тіл, що зазнають тиснення, точка первісного дотику є особливою, розглядався для вісесиметричної контактної задачі.

Зокрема, розглядалися випадки, коли точка первісного дотику стиснутих тіл є кутовою точкою осьового перерізу поверхні одного із тіл, що зазнають стиснення, або осьовий переріз поверхні одного із контактуючих тіл має в точці первісного дотику неперервно обертову дотичну, але кривина перерізу в цій точці нескінченно велика [1,3].

При відсутності радіальної симетрії розв'язання аналогічних контактних задач пов'язано з певними математичними труднощами.

Розглянемо невісесиметричну контактну задачу при стисненні двох тіл, коли точка первісного дотику тіл для поверхні одного з них є кутовою точкою. Початок координат помістимо в точку первісного дотику і вважатимемо, що рівняння поверхонь, обмежуючих стиснені тіла, є

$$z^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}, \quad Az = x^2 + y^2. \quad (1)$$

Позначимо через  $\Omega$  проекцію області контакту на площину  $z=0$  і через  $p(x,y)$  - нормальне тиснення в точці контакту з координатами  $(x,y)$  та вважатимемо, що тертя відсутнє. У такому випадку в області контакту повинно виконуватися рівняння [1], яке запишемо в циліндричних координатах:

$$\iint_{\Omega} \frac{p(\rho, \theta)}{r} d\Omega = c \left( \bar{\delta} - \rho_0^2 - a_1 \rho_0 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right), \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0), \quad (\rho_0, \theta_0) \in \Omega, \\ Ac &= \frac{\pi E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{\pi E_2}{1 - \nu_2^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$E_1, E_2$  - модулі пружності;  $\nu_1, \nu_2$  - коефіцієнти Пуассона для стиснених тіл;

$\varepsilon$  - ексцентриситет,  $\varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ,  $\beta < \alpha$ ,  $\varepsilon < 1$ ,  $a_1 = \frac{A}{\alpha}$ ,  $\frac{\bar{\delta}}{A} = \delta$  - зближення точок контактуючих тіл.

Нормальне тиснення, що діє в області контакту  $\Omega$ , повинно врівноважуватися рівнодійною  $Q$  зовнішніх стискуючих сил, що діє на кожне із стиснених тіл.

$$\iint_{\Omega} p(\rho, \theta) d\Omega = Q. \quad (4)$$

Щоб знайти невідому площину контакту  $\Omega$ , невідоме тиснення  $p(\rho, \theta)$  та зближення тіл, потрібно до рівнянь (2), (4) додати умову на межі  $\Gamma$  площинки контакту, де  $p(\rho, \theta)$  дорівнює нулю, тобто

$$p(\rho, \theta)|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Через те, що права частина рівняння (2) залежить від  $\varepsilon$ , природно припустити, що шуканий розподіл тиснення  $p(\rho, \theta)$ , який діє в області  $\Omega$ , зближення точок стиснених тіл та невідоме рівняння межі  $\Gamma$  площинки контакту мають бути подані у вигляді розкладу за параметром  $\varepsilon$ :

$$p(\rho, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} p_i(\rho, \theta); \quad \delta = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \delta_i; \quad (6)$$

$$\rho = a(1 + f(\varepsilon, \theta)); \quad (7)$$

де 
$$f(\varepsilon, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} f_i(\theta).$$

Функції  $f_i(\theta)$ ,  $p_i(\rho, \theta)$ - неперервні і мають неперервні похідні різних порядків у  $\Omega$ .

Щоб виконати умову (4) на межі площинки контакту введемо нові змінні  $(R, \varphi)$  за формулами

$$\begin{aligned} \rho &= R(1 + f(\varepsilon, \varphi)) \\ \theta &= \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Перетворення (8) рівняння (7) межі  $\Gamma$  області  $\Omega$  переводить у рівняння  $R=a$  кола  $D$ , крім того, при  $\varepsilon=0$  -  $\rho=R$ .

У нових змінних розклад (6) для  $p(\rho, \theta)$  має вигляд:

$$p(R, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(R, \varphi) \varepsilon^{2i}. \quad (9)$$

Тут  $P_i(R, \varphi)$  для  $i=0,1,2$ , необхідні в перших наближеннях, пов'язані з невідомими  $p_i(\rho, \theta)$  такими залежностями

$$\begin{aligned} P_0(R, \varphi) &= p_0(R, \varphi). \\ P_1(R, \varphi) &= p_1(R, \varphi) + p'_0(R, \varphi) \cdot Rf_1(\varphi). \\ P_2(R, \varphi) &= p_2(R, \varphi) + p'_0(R, \varphi) \cdot Rf_2(\varphi) + \\ &+ p'_1(R, \varphi) \cdot Rf_1(\varphi) + \frac{1}{2} p''_0(R, \varphi) \cdot R^2 f_1^2(\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Штрих позначає похідну за змінною  $R$ .

Інтеграл, що входить у рівняння (2), також представимо у вигляді розвинення за степенями  $\varepsilon$ . При цьому врахуємо, що рівняння контура  $\Gamma$  області інтегрування  $\Omega$  з викинутою особливою точкою залежить від  $\varepsilon$  [2,4].

Далі, розвинувши за степенями  $\varepsilon$  праву частину рівняння (2), а також рівняння рівноваги (4) та граничну умову (5), одержуємо рекурентні системи рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів у рядах (6), (7), (9):

$$\begin{aligned} c(\bar{\delta}_i - \varphi_i(\rho_0, \theta_0)) &= \iint_D \frac{P_i(\rho, \theta)}{r} ds + \Phi_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}), \\ Q_i &= \iint_D P_i(\rho, \theta) ds + F_i(P_0, P_1, \dots, P_{i-1}), \\ P_i(\rho, \theta)|_{\rho=a} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Тут } a_1 \rho \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \rho^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\rho, \theta) \varepsilon^{2i}, \quad (12)$$

$$Q_0 = Q; \quad Q_i = 0 \text{ при } i \neq 0; \quad D: 0 \leq \rho \leq a. \quad (13)$$

Інтегро-диференціальні оператори, що входять до складу систем (11), необхідні в перших наближеннях при  $i=0,1,2$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 0, \quad \Phi_1(P_0) = L_1(P_0); \\ \Phi_2(P_0, P_1) &= L_1(P_1) + L_2(P_0); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L_1(P_0) &= (1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1(\theta) d\Omega, \\ L_2(P_0) &= (1 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}) \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_2(\theta) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_0^2} \iint_D \frac{P_0(\rho, \theta)}{r} f_1^2(\theta) d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_0 &= 0; \quad F_1(P_0) = 2 \iint_D P_0(\rho, \theta) f_1(\theta) d\Omega, \\ F_2(P_0, P_1) &= \iint_D [2P_1(\rho, \theta) f_1(\theta) + 2P_0(\rho, \theta) f_2(\theta) + P_0(\rho, \theta) f_1^2(\theta)] d\Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, при визначенні функції  $p(\rho, \theta)$ , що характеризує розподіл нормального тиснення на площинці контакту, зближення тіл  $\delta$  та рівняння контуру площинки контакту  $\Omega$ , які є розв'язком задачі для невідомої області  $\Omega$ , у кожному наближенні приходимо до розв'язання аналогічної задачі (11) для кругової області  $D$ .

При практичних розрахунках для обчислення нормального тиснення на площинці контакту  $\Omega$  вздовж променя  $\theta = \theta_*$ , що проходить через точку  $M(\rho_*, \theta_*)$  на контурі області  $\Omega$ , одержуємо таку залежність:

$$p(\rho, \theta_*) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \left( \frac{\rho}{\rho_*}, \theta_* \right) \varepsilon^{2i}.$$

У нульовому наближенні при розв'язанні поставленої задачі замість системи рівнянь (2), (4) при умові (5) для визначення функції  $p(\rho, \theta)$  і  $\delta$ , а також рівняння межі  $\Omega$  (7) маємо для кругової області  $D$  систему рівнянь (11) при  $i=0$ , яка має такий розв'язок при  $A=1$  в (1):

$$\begin{aligned} p_0(\rho) &= c_{10} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} + c_2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \\ \delta_0 &= \frac{\pi a}{2} \left( a_1 + \frac{4a}{2\pi} \right), \quad c_{10} = -\frac{ca_1}{2\pi}; \quad c_2 = \frac{4ca_1}{\pi^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $a$  є дійсним коренем рівняння

$$a^3 + \frac{3a_1\pi}{16} a^2 - \frac{3Q}{8c} = 0. \quad (18)$$

Враховуючи одержані співвідношення (17), коефіцієнти в рядах (6) при  $\varepsilon^2$  визначаємо, розв'язуючи систему (11) при  $i=1$ . Виходячи з її вигляду, розв'язок маємо представити у вигляді

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 2n\theta; \\ P_1(\rho, \theta) &= \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos 2n\theta + c_{11} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} \end{aligned} \quad (19)$$



З умови задовільнення розв'язку (19) рівнянням системи (11) при  $i=1$  визначасмо невідомі сталі  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $c_{11}$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{a_1 c}{16\pi(c_2 - c_{10})}; \quad A_1 = \frac{3a_1 c}{8\pi(2c_2 + c_{10})}; \\ A_n &= 0, \quad n \neq 0, 1; \quad D_n = 0; \quad n \neq 0, 1. \\ D_0 &= A_0 c_2; \quad D_1 = A_1 c_2; \quad c_{11} = \frac{c a_1}{8\pi}; \\ \bar{\delta}_1 &= \frac{a a_1 \pi}{16}. \end{aligned} \quad (20)$$

Знання розв'язків (17), (19) у нульовому і першому наближеннях дозволяє із системи (11) одержати таку систему при  $i=2$ , розв'язком якої є функції:

$$P_2(\rho, \theta) = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} (G_0 + G_1 \cos 2\theta + G_2 \cos 4\theta) + c_{12} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}; \quad (21)$$

$$f_2(\theta) = B_0 + B_1 \cos 2\theta + B_2 \cos 4\theta,$$

$$B_0 = \frac{1}{c_2 - c_{10}} \left[ \frac{2A_0^2 + A_1^2}{4} (c_{10} - 2c_2) + \frac{13}{32} c_{11} + c_{11} A_0 + \frac{c_{10}}{2} A_0^2 \right];$$

$$B_1 = \frac{1}{2c_2 + c_{10}} \left[ -\frac{9}{4} c_{11} - c_{11} A_1 + c_{10} A_0 A_1 \right];$$

$$B_2 = \frac{4}{16c_2 - 5c_{10}} \left[ -\frac{15}{32} c_{11} + c_2 A_1^2 - \frac{13}{16} A_1^2 c_{10} \right]. \quad (22)$$

$$c_{12} = -\frac{13c a_1}{128}; \quad G_0 = c_2 B_0; \quad G_1 = c_2 B_1;$$

$$G_2 = 2c_2 B_2 - \frac{1}{2} c_{10} B_2 - \frac{1}{2} c_2 A_1^2 + \frac{3}{8} A_1^2 c_{10};$$

$$\bar{\delta}_2 = \frac{\pi^2 a}{4c} (c_2 A_1^2 - 4c_{11} A_0 + 2c_2 A_0^2 + 2c_{12} - 4c_{10} B_0 + 4c_2 B_0).$$

Отримані залежності (17), (19), (21) разом з (18), (20), (22) визначають розв'язок (6), (7) з точністю до  $\varepsilon^4$ .

Припускаючи, що  $Q$  така, що  $a=a_1$ , одержуємо рівняння контура  $\Gamma$  області контакту  $\Omega$  з точністю до  $\varepsilon^4$  у вигляді:

$$\rho = a(1 + \varepsilon^2 (-0,03525 + 0,1832 \cos 2\theta) + \varepsilon^4 (-0,04164 + 0,1502 \cos 2\theta + 0,02010 \cos 4\theta)).$$

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.:Наука, 1980.-304 с.
2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.
3. Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. - 270 с.
4. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой// Прикладная механика. - 1990. - т.26. - №5. - С. 9-15.

## ФІЗИКА

УДК 669.15\*24 – 194 : 669 – 172 : 620.181

### ОСОБЛИВОСТІ МАРТЕНСИТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ЛЕГОВАНИХ КАРБІДОУТВОРЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ Fe-Ni-C СПЛАВАХ

Гіржон В.В.

При нагріві залізонікелевих сплавів, легованих вуглецем, як було показано раніше [1, 2], проявляється термічна нестабільність аустеніту, в результаті якої змінюється вміст вуглецю в  $\gamma$  - твердому розчині. Зміна хімічного складу аустеніту суттєво впливає на характеристики фазових перетворень, структурний стан та весь комплекс фізико-механічних властивостей сплаву. Легування Fe-Ni-C сплавів вольфрамом або молібденом повинно призводити до підвищення термічної нестабільності аустеніту, пов'язаної як з утворенням карбідів, так і графіту, та змінювати температурний інтервал його нестабільності, а значить і впливати на кінетику наступних мартенситних перетворень при термоциклічній обробці (ТЦО) таких сплавів.

За об'єкти досліджень були вибрані сплави 50H21M3 (0,52 мас. % C; 21,1 мас. % Ni; 3,1 мас. % Mo) та 140H8B2 (1,41 мас. % C, 8,1 мас. % Ni, 2,0 мас. % W), 140H10 (1,4 мас. % C, 10,2 мас. % Ni), які виплавлялись в індукційній печі та мали аустенітну структуру при кімнатній температурі після гартування в холодну воду від 1100 °C.

ТЦО сплавів за участю  $\gamma \leftrightarrow \alpha$  - переходів призводила до дещо інших закономірностей кінетики прямого мартенситного переходу під впливом фазового наклепу, ніж у нелегованих сплавах системи Fe-Ni-C. Так, при нагріві сплаву 50H21M3 зі швидкістю 60 K/c в інтервалі зворотного перетворення перші три  $\gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$  - переходи стабілізували аустеніт, а внаслідок подальшого термоцикування ефект стабілізації зменшувався, тобто по відношенню до першого  $\gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$  - перетворення спостерігалась активізація прямого  $\gamma \rightarrow \alpha$  - перетворення (рис.1). Ізотермічне перетворення при нагріві свіжогагтованого зразка від температури рідкого азоту не фіксувалось. Проте при нагріві в область температур 300 - 500 °C фіксувалось підвищення намагніченості, якого раніше не було виявлено для середньовуглецевого сплаву 45H25 [2].

Стабілізація аустеніту була пов'язана, в основному, зі структурними факторами: збільшенням густини дефектів структури, подрібненням зерна фазонаклепаного аустеніту, пластичною деформацією [3]. А активізація - з нестабільністю  $\gamma$  - твердого розчину в областях, збіднених вуглецем, в яких формувались виділення графіту та карбідів.

Вихід вуглецю з ґратки аустеніту в процесі ТЦО був підтверджений рентгенографічними дослідженнями за прецезійним вимірюванням параметра ґратки аустеніту  $a_\gamma$  після нагріву зразків у соляній купелі до 800°C і наступного гартування у воду: у вихідному стані  $a_\gamma = 0,3594$  нм, після першого термоциклу  $a_\gamma = 0,3591$  нм, а після тридцятого -  $a_\gamma = 0,3588$  нм. При цьому максимальна температура нагріву під час термоцикування відповідала температурі максимального зменшення  $a_\gamma$ .

Очевидно, що як стабілізуючі, так і активізуючі мартенситне перетворення фактори під час ТЦО діяли одночасно. Проте після першого і другого термоциклів переважали стабілізуючі фактори, оскільки структурні зміни в аустеніті на цьому етапі термообробки були максимальними внаслідок досить значної повноти  $\gamma \rightarrow \alpha$  - перетворення. Разом з тим в процесі нагріву зразків у соляній купелі з наступним гартуванням у воду під час ТЦО процес виходу вуглецю з  $\gamma$  - твердого розчину повністю не відбувався. Після трьох  $\gamma \leftrightarrow \alpha$  - переходів структурні зміни в аустеніті, викликані фазовим наклепом, практично завершилися, а вихід вуглецю продовжувався. Внаслідок цього магнітометрично відмічалось деяке переважання активізуючих факторів. Після 30 термоциклів вихід вуглецю з ґратки аустеніту практично завершився (параметр ґратки  $a_\gamma$  залишався постійним). Це призвело до того, що вплив стабілізуючих і активізуючих факторів на пряме мартенситне перетворення практично зрівноважився - подальша ТЦО не призводила до зміни кількості мартенситу при зануренні зразків у рідкий азот.

Зниження швидкості нагріву в інтервалі зворотного  $\alpha \rightarrow \gamma$  - переходу до 0.08 К/с викликало інтенсифікацію розглянутих процесів - стабілізація аустеніта спостерігалась лише після першого термоциклу. Наступне термоцикування призводило до поступової активізації прямого мартенситного перетворення (рис. 2).

Нагрів зразків сплаву 140Н8В2 також виявив область термічної нестійкості аустеніту, в якій внаслідок часткового збіднення вуглецем  $\gamma$  - твердого розчину, параметр  $a_\gamma$  кристалічної ґратки змінювався за немонотонною кривою (рис. 3). Температура максимальної нестійкості аустеніту, яка відповідала мінімуму параметра  $a_\gamma$ , відрізнялась від такої для ідентичного за вмістом вуглецю сплаву 140Н10 на 120 - 140 °С. При цьому інтервал нестійкості був зсунутим у бік більш високих температур. Збіднення аустеніту вуглецем, обчислене за зменшенням параметра  $a_\gamma$ , згідно з [4] складало 0,46 мас. % та 0,35 мас. % відповідно для сплавів 140Н10 и 140Н6В2.

При охолодженні сплаву 140Н6В2 з вихідного стану до температури рідкого азоту в ньому (як і в сплаві 140Н10) відбувалось пряме мартенситне перетворення з формуванням 18 % мартенситу (рис. 4), а після охолодження з інтервалу термічної нестійкості  $\gamma$  - твердого розчину - додатково ще 53%. Це було пов'язане з тим, що зі зменшенням кількості вуглецю в аустеніті мартенситна точка підвищувалась [5] і після охолодження сплаву від 400 °С вона вже перевищувала кімнатну температуру. З магнітометричних кривих видно, що при відігріванні обох сплавів, загартованих у рідкому азоті, до температур -70 ÷ -80 °С в переохолодженому аустеніті утворювалось до 5% ізотермічного мартенситу. Його формування можна пов'язати з релаксацією внутрішніх напруг у залишковому аустеніті, які виникли в результаті прямого  $\gamma \rightarrow \alpha$  - переходу [5, 6]. Нагрів загартованих сплавів до температур вищих за 800 °С призводив до повторного розчинення вуглецю в  $\gamma$  - твердому розчині і до відтворення параметра  $a_\gamma$ . При цьому зворотний  $\alpha \rightarrow \gamma$  - перехід завершувався раніше від повторного розчинення вуглецю (рис. 3, 4).

### ВИСНОВКИ:

1. При охолодженні легованих карбідоутворюючими елементами аустенітних сплавів у рідкому азоті і наступному нагріві мартенситне перетворення в них може відбуватись у три етапи: в процесі прямого охолодження, при відігріванні від температури гартування та в результаті охолодження до кімнатної температури після нагріву в інтервал нестійкості аустеніту.
2. Легування Fe-Ni-C сплавів карбідоутворюючим елементом викликає зсув температурного інтервалу нестійкості аустеніту в бік більш високих температур, що пов'язане з утворенням важкорозчинних карбідів типу  $Fe_3W_3C$ .

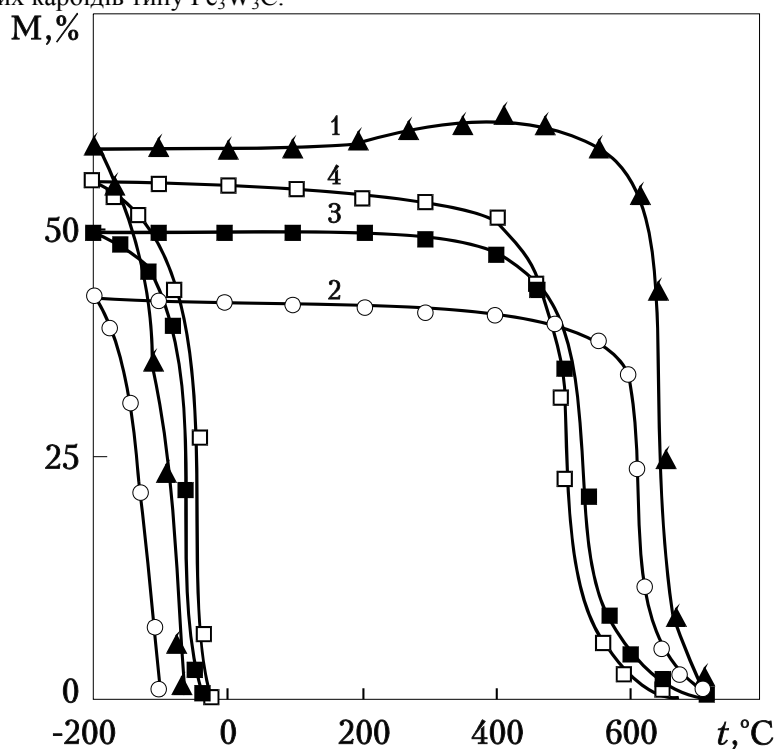


Рис.1. Термомагнітні криві сплаву 50Н21М3: 1 - вихідний стан; 2 - після трьох; 3 - після десяти; 4 - після тридцяти  $\gamma \leftrightarrow \alpha$  - переходів. Швидкість нагріву в інтервалі зворотного  $\alpha \rightarrow \gamma$  - переходу - 60 К/с

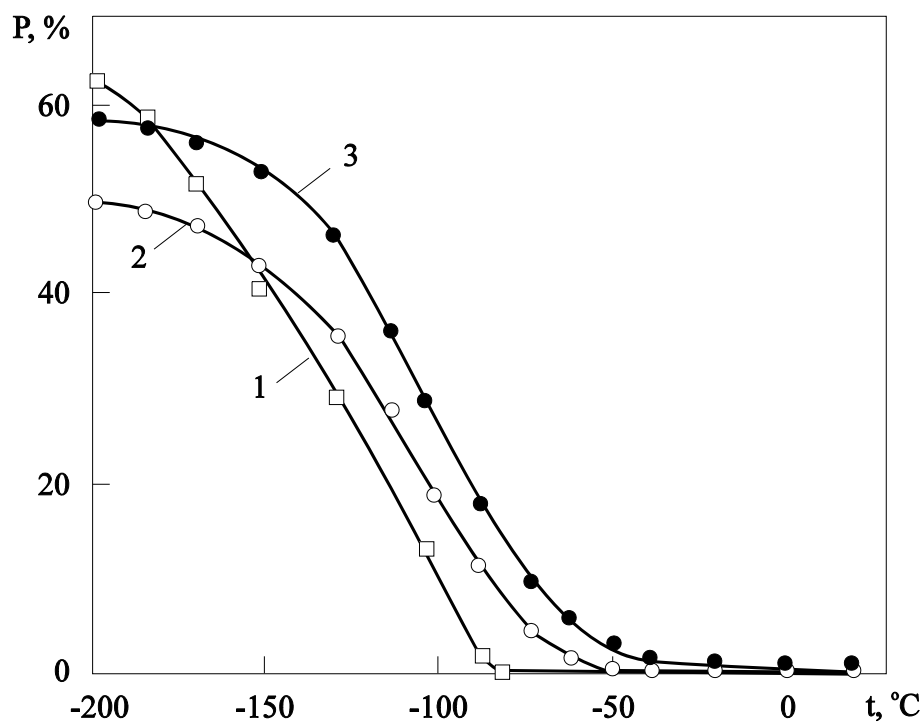


Рис.2. Зміна намагніченості сплаву 50H21M3 в процесі охолодження його від кімнатної температури після термоцикування зі швидкістю нагріву в інтервалі зворотного  $\alpha \rightarrow \gamma$  - переходу 0,08 К/с: 1 - вихідний стан; 2 - після першого; 3 - після четвертого термоциклу

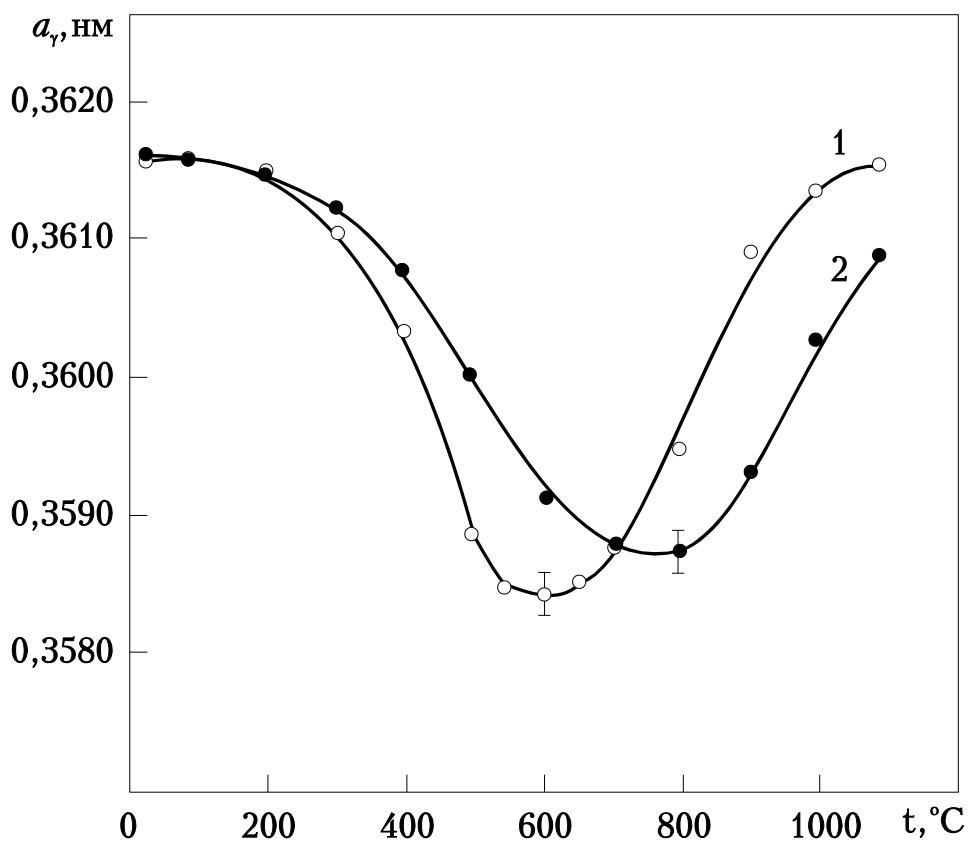


Рис. 3. Зміна параметра ґратки аустеніту  $a_\gamma$  сплавів 140H10 (1) та 140H6B2 (2) після старіння в  $\gamma$  - області (час старіння при кожній температурі - 1 хв)

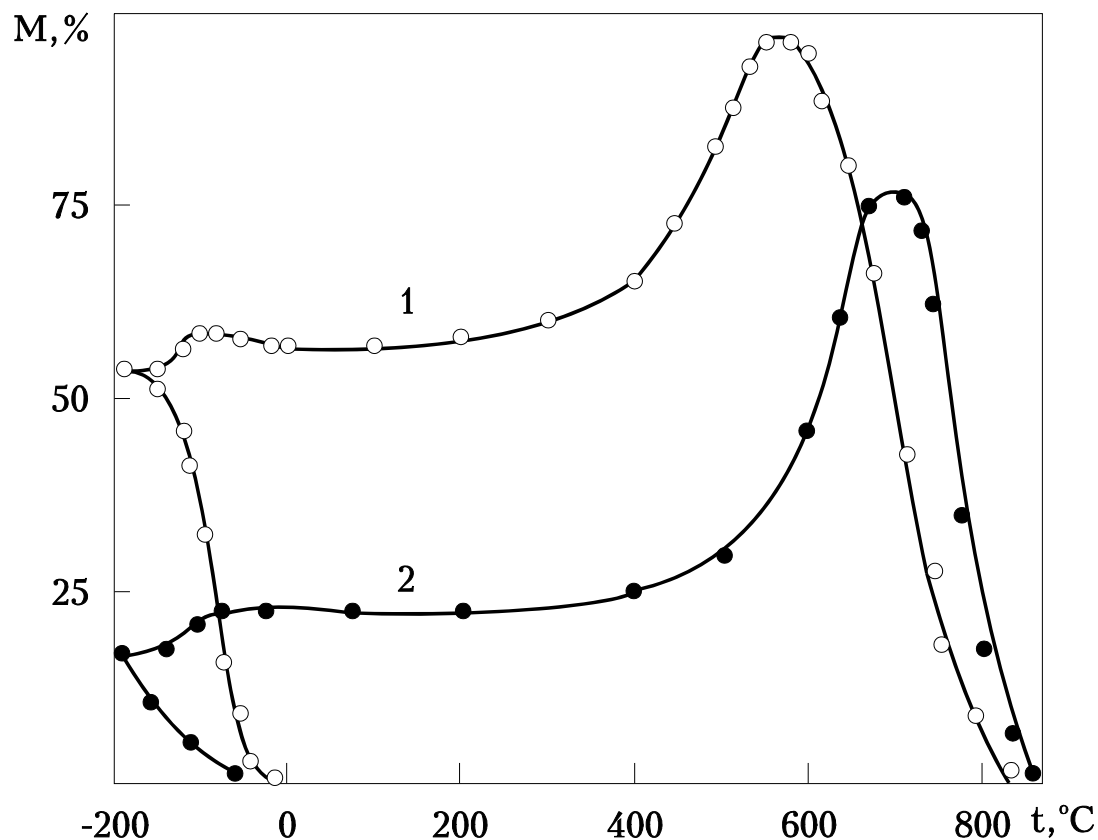


Рис.4. Магнітометричні криві охолодження та ступінчастого нагріву сплавів 140Ni10 (1) та 140Ni6B2 (2)

### ЛІТЕРАТУРА

1. Горский В.В., Данильченко В.Е., Охрименко В.А. Термическая нестабильность аустенита высоконикелевой стали // *Металлофизика*. - 1984. - т. 6. - № 6. - С. 112 - 116.
2. Бондарь В.И., Гиржон В.В., Данильченко В.Е. Влияние термоциклирования на мартенситное превращение в железоникелевых сплавах // *ФММ*. - 1991. - № 1. - С. 159-164.
3. Фазовый наклеп аустенитных сплавов на железоникелевой основе/ К.А.Мальшев, В.В.Сагарадзе, И.П.Сорокин и др. - М.: Наука, 1982.- 260 с.
4. Reed R.P., Schramm R.B. Lattice parameters of martensite and austenite in Fe-Ni alloys // *J. Appl. Phys.*- 1960. - V. 40. - N 9. - P. 3453 - 3458.
5. Курдюмов Г.В., Утевский Л.М., Энтин Р.И. Превращения в железе и стали.- М.: Наука, 1977. - 238 с.
6. Лысак Л.И., Николин Б.И. Физические основы термической обработки стали.- К.: Техніка, 1975. - 304 с.

## ДВА ПІДХОДИ В ЗАСТОСУВАННІ МЕТОДІВ РІВНОВАЖНОЇ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ “ВОДЕНЬ- ТВЕРДЕ ТІЛО”

Горбенко В.І., Швець Ю.О.

Останнім часом у металургії та напівпровідникових технологіях поширюється використання водню для впливу на структурні, фізичні та електрофізичні властивості матеріалів [1-3]. Як правило, наводнювання відбувається в системах з підвищеним вмістом атомарної компоненти, яка має високу хімічну активність. Для більшості випадків, це вимагає точного підбору параметрів та режимів обробки. Тривалість експериментальних досліджень та специфічність необхідного для цього обладнання потребує проведення попереднього прогностичного аналізу вибраної системи.

Значна база даних, прозорість методів та добре розроблені сучасні алгоритми ставлять рівноважну термодинаміку, серед інших методів, у найвигідніший стан. Але коло задач, безпосередньо пов'язаних з рівноважними системами, занадто вузьке. Однак, рівняння методів рівноважної термодинаміки можуть застосовуватись і для моделювання систем, що знаходяться в деякому стаціонарному стані і містять радикальні компоненти в підвищеній концентрації, до яких саме і відноситься атомарний водень. У цій роботі розглядаються два підходи до моделювання таких систем: з використанням методу констант хімічних реакцій та методу екстремуму термодинамічного потенціалу.

*Метод констант хімічних реакцій.* Система рівнянь у цьому методі складається [4]: з рівнянь закону діючих мас по числу незалежних реакцій; з відношень матеріальних балансів атомів, які входять до системи; закону Дальтона. Так як ця система рівнянь є нелінійною, то її розв'язок знаходять ітераційними методами, які дуже добре алгоритмізуються та програмуються.

Звичайно, метод дозволяє визначати склад термодинамічної системи у стані рівноваги. Для відображення підвищеного вмісту атомарного водню введемо коефіцієнт зміщення для реакції дисоціації молекулярного водню на атоми. Хімічна реакція та її коефіцієнт мають вигляд



$$K_r = \frac{P_H^2}{P_{H_2}}, \quad (2)$$

де  $K_r$  – коефіцієнт реакції у рівновазі;

$P_H$  та  $P_{H_2}$  – парціальні тиски атомарного та молекулярного водню, відповідно.

Тепер припустимо, що на систему діє зовнішнє джерело збудження, результатом чого є підвищення концентрації атомарної компоненти водню. У цьому випадку коефіцієнт реакції (1) буде мати вигляд

$$K_r^* = \frac{(P_H^*)^2}{P_{H_2}^*}, \quad (3)$$

де  $K_r^*$  – коефіцієнт реакції у стані збудження;

$P_H^*$  та  $P_{H_2}^*$  – парціальні тиски атомарного та молекулярного водню при збудженні системи.

Так як величина тиску атомарного водню під час дії збудження більше, ніж у стані рівноваги системи, то для коефіцієнтів реакції існує  $K_r^* > K_r$ . Для моделювання фізико-хімічних процесів у системі зі збудженням зручно користуватись не коефіцієнтом  $K_r^*$ , а його відношенням до  $K_r$ :

$$\gamma_s = \frac{K_r^*}{K_r} \quad (5)$$

Величину  $\gamma_s$  назвемо коефіцієнтом зміщення реакції, так як вона має всі властивості коефіцієнта реакції. Зрозуміло, що коефіцієнт  $\gamma_s$  не несе механізму, який викликає підвищення вмісту атомів, а лише констатує це.

Тепер розглянемо систему “водень-оксид міді”, в якій при підвищенні концентрації водневих атомів експериментально спостерігається відновлення оксиду до металу при кімнатній температурі. До розгляду включимо такі речовини:  $H_{(г)}$ ,  $H_{2(г)}$ ,  $O_{(г)}$ ,  $O_{2(г)}$ ,  $H_2O_{(г)}$ ,  $CuH_{(г)}$ ,  $Cu_{(г)}$ ,  $Cu_{(тв)}$ ,  $Cu_2O_{(г)}$ ,  $Cu_2O_{(тв)}$ ,  $CuO_{(г)}$ ,  $CuO_{(тв)}$ . Так як для порівняння з експериментом достатньо знати поведінку конденсованих речовин, результати обчислень проаналізуємо тільки для  $Cu_{(тв)}$ ,  $Cu_2O_{(тв)}$ ,  $CuO_{(тв)}$ . На рис.1 показані  $Cu_{(тв)}$  та  $Cu_2O_{(тв)}$  оскільки

$CuO_{(тв)}$  залишається термодинамічно не вигідним при будь-яких значеннях  $\gamma_s$ . Перехід  $Cu_2O_{(тв)} \Rightarrow Cu_{(тв)}$ ,

або іншими словами - відновлення оксиду міді до металу, відбувається в діапазоні значень  $\ln \gamma_s$  від 25.15 до 25.60. При подальшому зростанні зміщень у конденсованому стані залишається тільки метал. Це добре узгоджується з експериментальними даними, так як при обробці зразків концентрація атомів водню становила близько  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ , що відповідає значенню  $\ln \gamma_s \approx 100$ .

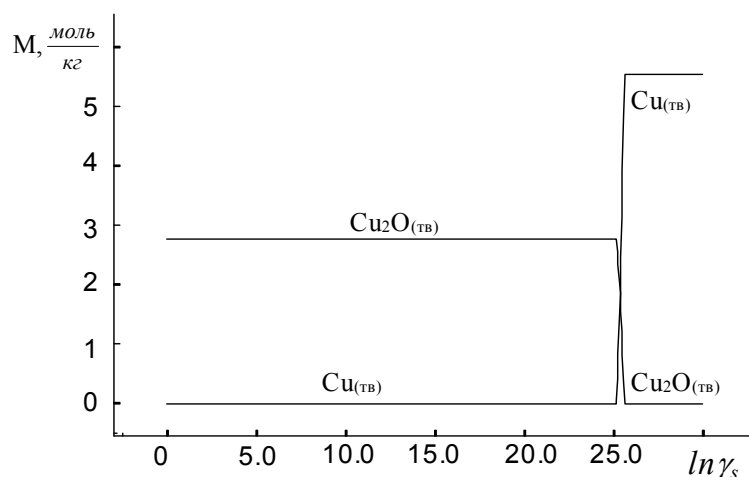


Рис.1. Залежність складу конденсованої фази в системі “водень – оксид міді” від величини зміщення у реакції дисоціації молекулярного водню.

Слід відзначити, що представлений підхід може застосовуватись для розгляду впливу на систему будь-якої радикальної компоненти.

*Метод екстремуму термодинамічного потенціалу.* Незважаючи на прозорість підходу в методі констант хімічних реакцій при моделюванні систем з підвищеним вмістом однієї радикальної компоненти, задача значно ускладнюється при використанні його до розгляду систем з двома такими компонентами і практично не розв’язується при більшому їх числі. Для обчислення таких систем найбільш придатним є метод екстремуму термодинамічного потенціалу, оскільки він дозволяє ввести енергетичні характеристики взаємодії зовнішнього збудження та газових компонент. Система рівнянь у цьому методі обов’язково містить [5,6]: рівняння для газоподібних та конденсованих речовин, по їх числу в системі; рівняння постійності сумарної маси для кожного з хімічних елементів системи та рівняння газового стану.

Розглянемо систему "нейтральна газова фаза - тверде тіло", яка збуджується електричним розрядом і знаходиться в квазірівноважному (стаціонарному) стані. Газова фаза цієї системи характеризується надрівноважним вмістом декількох радикальних компонент. Відомо, що коли концентрація недисоційованих молекул  $N^o$  значно перевищує концентрацію продисоційованих  $N^d$ , то має місце лінійна залежність між швидкістю утворення радикалів та потужністю розряду [7]. Тоді для двох різних компонент газової фази відношення між енергіями, які вони поглинають від зовнішнього джерела, може бути записане в вигляді

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{N_2^o}{N_1^o} \quad (6)$$

де  $n_i$  – коефіцієнт пропорційності, що має смисл чутливості  $i$ -тої компоненти до енергетичного впливу.

Загальна величина енергії, що споживається цими компонентами дорівнює:

$$\Delta E = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{N_2^o}{N_1^o} \cdot E_1 + E_1 \quad (7)$$

Після узагальнення останнього на випадок  $m$ -тої кількості компонент отримаємо

$$\Delta E = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n_1} \cdot \frac{N_i^o}{N_1^o} \cdot E_1 \quad (8)$$

При моделюванні значення величини  $\Delta E$  задається і принципово може оцінюватись з даних контрольного експериментального дослідження. Найбільш зручною розмірністю  $\Delta E$  є [Дж/м<sup>3</sup>], так як у цьому випадку її значення не залежить від інших вхідних даних.

Величину  $\Delta E$  можливо виразити через приведену до одного молю речовини парціальну кількість поглиненої енергії

$$\Delta G_i^s = \frac{E_i \cdot N_A}{N_i^o}, \quad (9)$$

де  $N_A$  – число Авогадро.

Саме на величину  $\Delta G_i^s$  змінюються термодинамічні характеристики  $i$ -тої речовини  $\Delta G_i^* = \Delta G_i^o + \Delta G_i^s$ , які безпосередньо використовуються при обчисленнях. Якщо припустити, що компоненти газової фази підпорядковуються законам ідеального газу, то з (8) та (9) неважко отримати зв'язок між заданою величиною енергії, яка поглинається системою, та термодинамічними параметрами індивідуальних речовин

$$\Delta E = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n_1} \cdot p_i \cdot \frac{\Delta G_i^s}{RT}, \quad (10)$$

де  $R$  – універсальна газова стала;

$p_i$  – парціальний тиск  $i$ -тої газоподібної компоненти.

Включення рівняння (10) до процесу обчислення потребує проведення декількох загальних циклів. Перший цикл проводять при  $\Delta E=0$ , в кінці якого отримують склад системи в рівновазі. Після визначення рівноважних значень парціальних тисків  $p_i$ , з (6), (9) та (10) розраховують  $\Delta G_i^s$  і, припускаючи їх постійними, проводять новий цикл обчислень за звичайним алгоритмом. З отриманих  $p_i$  знову визначають зміни термодинамічних характеристик та проводять наступний цикл. Процес продовжується до тих пір, поки зміни парціальних тисків та  $\Delta G_i^s$  у двох послідовних циклах будуть меншими за деяку наперед задану величину.

Запропонована техніка термодинамічних обчислень була застосована для моделювання модифікації складу приповерхневих шарів фосфіду індію під дією нейтральних газоподібних компонент, що утворюються ВЧ-розрядом у зволоженому водні. Експериментально така система характеризується підвищеною концентрацією атомарного водню і при температурах 100-300°C, залежно від вмісту парів води у газовій фазі, може іти або до металізації поверхні фосфіду індію, або до її окислення [8].

Моделювання було проведено для системи  $H_2/H_2O/InP$ , яка включала 20 газоподібних і 9 конденсованих речовин, з використанням алгоритму пошуку екстремума функціонала характеристичної термодинамічної функції [5]. При цьому припускали, що тільки для газоподібних молекул  $H_2$  та  $H_2O$  значення коефіцієнтів  $n_{H_2}$  і  $n_{H_2O}$  відмінні від нуля, а відношення їх величин  $n_{H_2}/n_{H_2O}$  дорівнює 1. На рис.2 показані розрахункові дані зміни складу конденсованих фаз від величини  $\Delta E$  з двома фіксованими



значеннями матеріальних відношень  $[O]/[H]$  0.1 і 0.3. Результати отримані при температурі  $T = 150^\circ\text{C}$ . Дані моделювання добре узгоджуються з експериментальними.

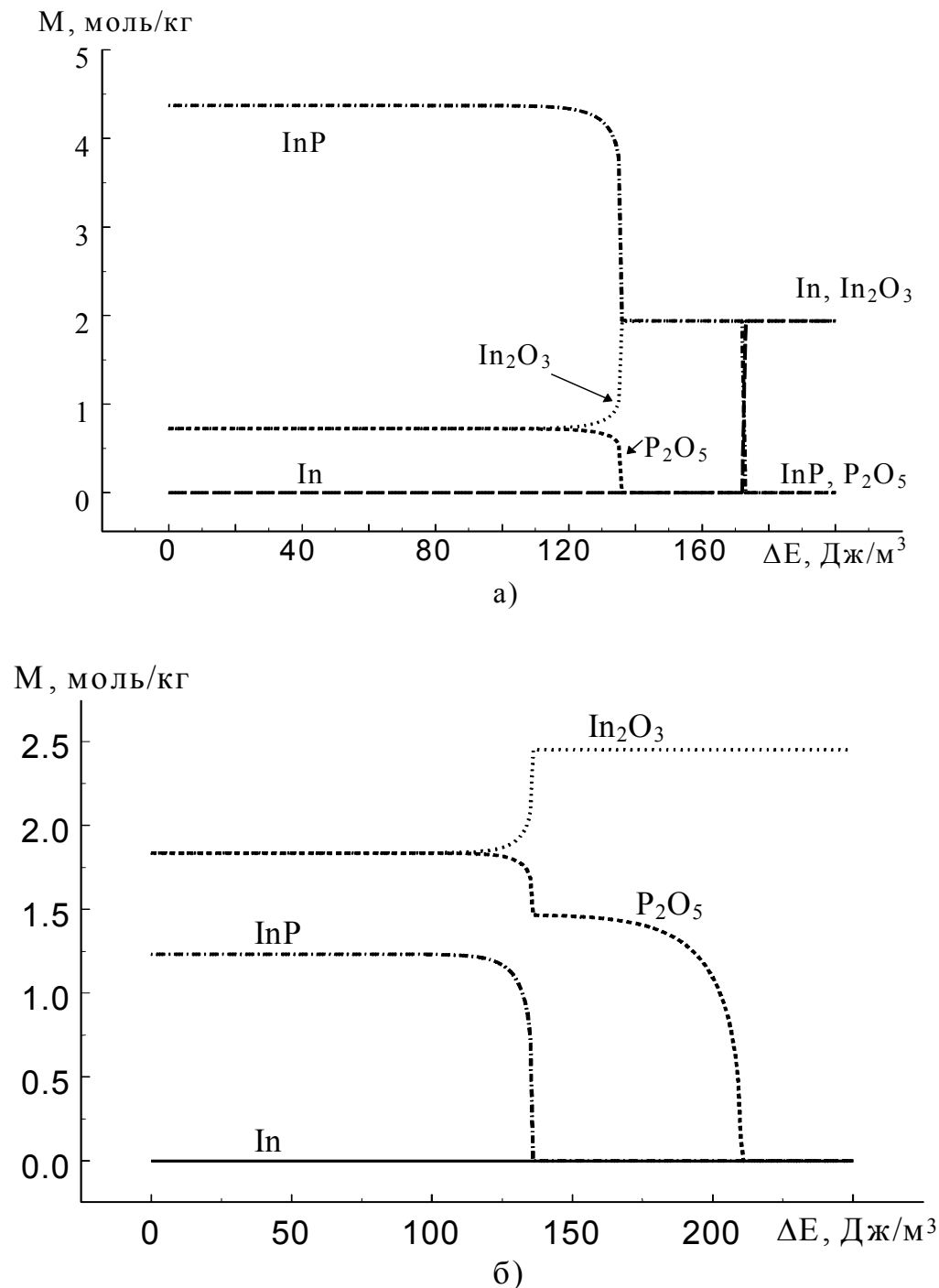


Рис.2. Залежність складу конденсованої фази в системі "InP – H – O" від величини зміщення  $\Delta E$

$$\text{а) } \frac{[O]}{[H]} = 0.1; \quad \text{б) } \frac{[O]}{[H]} = 0.3.$$

Таким чином, наведені методики дозволяють використовувати рівняння методів рівноважної термодинаміки до моделювання систем з підвищеним вмістом радикальних компонент. У протилежність методу констант хімічних реакцій, у методі екстремуму термодинамічного потенціалу може бути розглянута будь-яка кількість радикальних компонент, які знаходяться у підвищеній концентрації. Слід відзначити, що коефіцієнти  $n_i$  можуть бути отримані з дослідів взаємодії речовин та збуджуючого випромінювання і подальше застосовуватись до будь-яких систем.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гельд П.В., Рябов Р.А., Мохрачева Л.П. Водород и физические свойства металлов и сплавов: Гидриды переходных металлов.-М.: Наука, 1985.-232с.
2. S.J.Pearton, J.W.Corbett and T.S.Shi. Hydrogen in crystalline semiconductors// Appl.Phys.A.- 1987.-v.43.- p.153-198.
3. S.A.Ringel. Hydrogen-extended defect interactions in heteroepitaxial InP materials and devices// Solid State Electronics.-1997.- v.41, No.3.- p.359-380.
4. Сурис А.Л. Плазмохимические процессы и аппараты.- М.:Химия,1989.-304с.
5. Снярев Г.Б., Ватолин Н.А., Трусов Б.Г., Моисеев Г.К. Применение ЭВМ для термодинамических расчетов металлургических процессов.-М.: Наука, 1982.- 264с.
6. Новоселова А.В., Глазов В.М., Смирнова Н.А. и др. Термодинамика и материаловедение полупроводников.-М.: Металлургия, 1992.- 392с.
7. Образование и стабилизация свободных радикалов/ под ред. А.Басса и Г.Бройда.: Пер. с англ.- М.: Инлит, 1962.- 622с.
8. V.Gorbenko, J.Shvets, A.Gorban'. Oxidation and matallization in H<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O/InP system// Electrochemical Society Proceeding, SOTAPPCS XXVII.- 1997.- v.9721.- p.375-381.

УДК 669. 18-122:546. 11

## ОСОБЛИВОСТІ ДЕСОРБЦІ ВОДНЮ З ТВЕРДОЇ СТАЛІ В НОРМАЛЬНИХ УМОВАХ

Заїка В.І.

У роботі використовували розроблену методику [1], яка, на відміну від інших, дозволяє безперервно реєструвати виділення водню з металу протягом тривалого часу. У даному випадку досліджували процес десорбції металургійного водню з гарячекатаної арматурної сталі 80С діаметром 18 мм із структурою сорбітоподібного перліту і термічно зміцненої з прокатного нагріву сталі 35ГС із структурою тростобейніту того ж діаметру.

У перші часи витримки металу після прокатки (рис.1) (початковий вміст водню в прокаті складав 14,9-18,8·10<sup>-3</sup> % (ат.)) спостерігається інтенсивне виділення водню, потім виділення припиняється, після чого знову відновлюється. Подібний характер виділення водню відбувається і на термічно впорядкованій сталі 35ГС (вміст водню складав 22,7-27,2·10<sup>-3</sup> % (ат.)), з тією відмінністю, що різке зниження швидкості десорбції проявляється на більш пізніх стадіях витримки, ніж у сталі 80С.

Проаналізуємо отримані нами експериментальні дані. Після прокатки водень у металі знаходиться в розчиненому вигляді в пересиченому стані, а також у різноманітного роду пастках. При кімнатній температурі частина розчиненого водню досить швидко виділяється з твердої сталі в атмосферу внаслідок різкого зниження розчинності водню зі зниженням температури. Через вилучення в атмосферу водню термодинамічна рівновага між воднем у розчині і воднем у пастках різноманітного типу (на дислокаціях, границях розділення карбід - матриця, у порах, неповностях і т.д.) порушується, і для звільнення водню з пасток необхідно збіднення розчину воднем до деяких критичних значень. У результаті, швидкість виділення водню з пасток ще не розвивається. При достатньому збідненні розчину воднем починається звільнення водню з пасток з найменшою силою захоплення, і швидкість десорбції зростає, а потім у міру виснаження пасток даного типу знову починає падати. У міру поступового збіднення розчину воднем починають послідовно звільнятися пастки з все більшою силою захоплення, що призводить до стрибкоподібної кривої десорбції.

Ефективний коефіцієнт дифузії водню в приведених сталях визначається за допомогою емпіричного рівняння, що за формою аналогічне розв'язку рівняння Фіка другого порядку, перетвореного за допомогою функцій Бесселя в рівняння першого порядку.

На підставі термодинамічного аналізу процесу дифузії при наявності в металі пасток, проведеного Оріані [2], і з урахуванням отриманих ефективних коефіцієнтів дифузії, математичні розрахунки дають значення енергії взаємодії водню з пастками 22,3-24 кДж/моль. Ці результати не дуже сильно

відрізняються від енергії взаємодії між воднем і дислокаціями в сталях (27,9 кДж/моль), визначеної за ефектами внутрішнього тертя [3].

Очевидно, дислокації не є єдиним типом недосконалостей кристалічної ґратки, відповідальних за низьке значення коефіцієнтів дифузії при кімнатних температурах.

Розглянемо детально цей процес на прикладі звільнення водню з дислокаційних пасток. При відході в атмосферу дифузійно - рухливого водню з металу, концентрація водню у твердому розчині зменшується і критична температура насичення дислокацій атомами водню, згідно з рівнянням [4] істотно знижується

$$T_k = U_0 / k \cdot \ln 1 / C_0, \quad (1)$$

де  $U_0$  - максимальна енергія зв'язку атомів з дислокаціями;

$C_0$  - середня концентрація водню в розчині в атомних відсотках.

Наприклад, при видаленні водню зі сталі 80С у кількості 4·10<sup>-3</sup>% (ат.) критична температура насичення дислокацій  $T_k$  знижується приблизно до 240 - 260 К, якщо прийняти енергію взаємодії атомів водню і дислокацій [ 5 ]  $U_0 = 0,1-0,2$  еВ, а початкову концентрацію водню 17,3-19,8·10<sup>-3</sup> % (ат.). Це призводить до того, що тепловий рух починає руйнувати або самі атмосфери Коттрелла, або сегрегації водню в областях скупчення дислокацій, що сприяє підвищенню швидкості десорбції водню із металу з поступовим загасанням процесу.

На кінетику виділення водню зі сталей можуть впливати різноманітні чинники металургійного виробництва. Зокрема, при виготовленні вони піддаються різноманітним пластичним деформаціям у залежності від необхідного рівня міцності. Для з'ясування їхнього впливу на характер виділення водню при кімнатній температурі провели такі експерименти. Пластинки киплячої сталі 08кп розміром 150x5x1,5 мм, вирізані з чистої зони кипіння та вмістом вуглецю 0,06 %, відпалювали у вакуумі при температурі 923 К протягом 45 хв., обезжирювали, а потім наводнювали в 10 %-ому розчині сірчаної кислоти протягом 4 годин при густині струму  $D_k = 500$  А/м<sup>2</sup>. Після наводнювання, для запобігання виділення водню зі сталі, зразки кадмірували в кислому електроліті (кг/л=0,1 CdSO<sub>4</sub>·8/3H<sub>2</sub>O·0,1H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>). Товщина кадміруваного прошарку досягала 12-15 мкм. Надалі для більш рівномірного розподілу водню по перетині пластинки піддавали відпалу при температурі 423 К на протязі 1 г. Частина кадміруваних після відпалу зразків піддавалася різноманітного ступеня деформації.

Після деформації відбувалося зняття кадміруваного прошарку в 15%-ому розчині NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub>. Сліди вологи прибирали фільтрувальним папером, а потім зразки послідовно поміщали в установку для реєстрації кінетики десорбції водню з металу.

На рисунку 2 поданий характер виділення водню зі сталі 08кп з різноманітним ступенем деформації. У сталі, без деформації, спостерігається різке виділення водню, потім слідує перелом кривої і з цього моменту зменшується інтенсивність виділення водню.

Пластична деформація призводить до уповільнення виділення водню зі сталі в порівнянні з недеформованим станом. Зі збільшенням деформації металу на кінетичних кривих виникає ще один перегиб, починаючи з якого швидкість виділення водню ще більш сповільнюється. При ступені деформації 48% він перетворюється практично в горизонтальний відрізок, як і на рисунку 1, що замінюється ростом кривої, але вже з меншою швидкістю. Протяжність горизонтальних площадок, з посиленням деформації, незначно збільшується. У зв'язку з тим, що зі зростом ступеня пластичної деформації збільшується густина дислокацій, можна припустити певний зв'язок інертності газовиділення з густиною дислокацій.

Якщо попередньо наводнену, а потім деформовану на 48% сталь 08кп після вторинного часткового кадмірування піддати відпалу при 473 К на протязі 1,5 години, то на кінетичній кривій переривання газовиділення не спостерігається (рис.2).

Очевидно, відпал сприяє перерозподілу водню, перегрупуванню дислокацій та взаємній анігіляції дислокацій різного знаку, до розрядки локальних напруг. Це призводить до зміни стану та густини дислокацій, а також відображається на взаємодії останніх із воднем і, як наслідок, на кінетиці виділення водню зі сталі. Експериментально показано, що поява горизонтальних площадок на кінетичних кривих від вмісту водню в сталі не залежить. Виходячи з рисунка 2 можна вважати, що до певного ступеня деформації «осілий» на дислокаціях водень звільняється відносно легко, а з її збільшенням цей процес утруднюється.

У експериментах з виділення водню з відпаленої сталі 08кп ми вважаємо, що початкове різке виділення водню на кінетичних кривих обумовлено звільненням границь зерен від водню, оскільки вони є слабкими пастками [5]. При деформації відпаленої сталі 08кп у металі з'являються знову утворені дислокації, на яких сегрегує водень. Дифузійна рухливість водню в даному випадку нижче, оскільки відомо, що коефіцієнти дифузії дуже чутливі до порушень регулярності кристалічної ґратки.

Велика кількість ступенів на кривій десорбції при кімнатній температурі може бути пов'язана з тим, що в цих експериментах розрізняються більш тонкі стани водню в пастках.

Можна вважати, що доки в системі метал-водень є термодинамічні і кінетичні умови для десорбції водню з певного виду пасток, доти вони будуть певною мірою впливати на кінетику виділення.

Проведені дослідження дозволяють зробити висновок про нерівномірну (ступеневу) десорбцію водню з твердої сталі при кімнатній температурі, обумовленої поступовим звільненням пасток одного типу, включаючи дислокації, їхнім виснаженням і переходом до іншого типу.

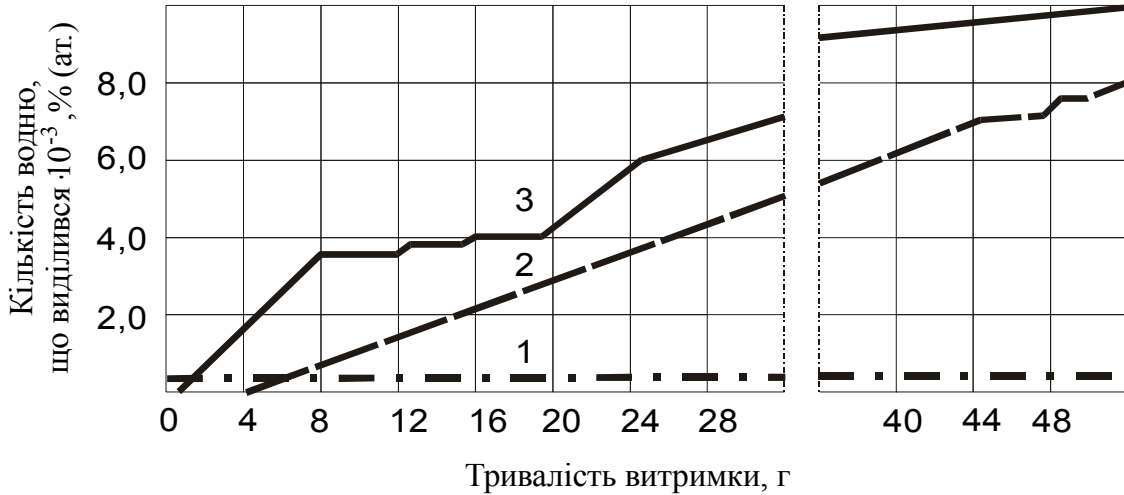


Рис. 1 Кінетика виділення водню з твердої сталі залежно від тривалості витримки при кімнатній температурі: 1-показник стабільності системи; 2-сталь 35ГС; 3-сталь 80С.

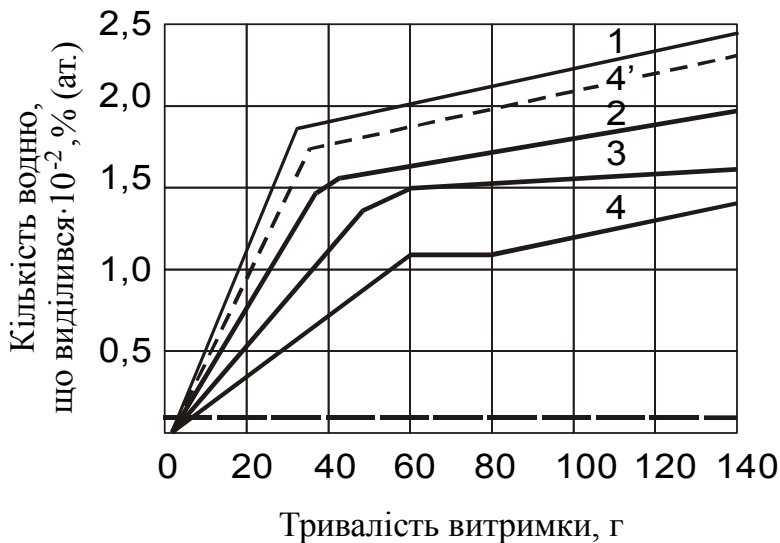


Рис. 2 Криві виділення водню зі сталі 08кп залежно від ступеня пластичної деформації: 1 - 0 %; 2 - 23 %; 3 - 30 %; 4 - 48 %; 5 - 48 % + відпал при 473 К протягом 1,5 г.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Колачев Б.А., Заика В.И., Чернышев Б.А., Сапиро В.С. О природе скачкообразного выделения водорода из проката при комнатной температуре. //Известия вузов. Черная металлургия. – 1984. - №1. – С. 109-111.
2. Oriani R.A. The diffusion and trapping of hydrogen in steel. //Acta Met.–1970.–18.–p. 147-157.
3. Шведов Н.И., Кодес Е.С., Рябов Р.А. - Влияние водорода на внутреннее трение в железоникелевом сплаве // Физические свойства металлов и сплавов. Труды УПИ. – Свердловск, 1974. – Т.231. – С.142-145.
4. Коттрелл А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. – М.: Металлургиздат, 1958. – 267 с.
5. Гельд П.В., Рябов Р.А. Водород в металлах и сплавах. – М.: Металлургия, 1974. – 272с.

## ВПЛИВ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВІДПАЛУ НА ЗМІНУ ОПТИЧНОЇ ГУСТИНИ ГРАНАТОВИХ СТРУКТУР

Канівченко О.В.

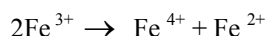
Відпал застосовується для зменшення кількості дефектів у матеріалі, в якому концентрація дефектів перевищує термодинамічну рівноважну величину. Термодинамічні рушійні сили доводять концентрацію дефектів до рівноважного значення. Наприклад, відпал зворотних радіаційних дефектів гранатових структур після дії  $\gamma$ -випромінювання вказує, що при  $T = 600$  °С прості радіаційні центри релаксують. У процесі відпалу враховуються не тільки вакансії і міжвузельні атоми, але й домішкові атоми і пов'язані комплекси дефектів. Відпал бездомішкових гранатових структур вказує, що при підвищених температурах до  $1000$  °С склад оксидних сполук може несуттєво відхилятися від стехіометричного, і для таких сполук зі складною будовою величину теплового розширення визначає алюмінієва в АІГ або залізна в ЗІГ жорстка підгратка.

Домішки, які є структурними дефектами в гранатах, можуть відігравати роль центрів, через які в процесі непрямих "перестрибів" відбувається рекомбінація індукованих опроміненням дефектів.

Проведені експерименти з високотемпературного відпалу структури граната вказують, що на коефіцієнт поглинання, а відповідно, на концентрацію структурних дефектів, має вплив не тільки температура, але і тривалість відпалювання, що свідчить про різну природу виникнення дефектів, пов'язаних з особливостями домішкових граток гранатових структур.

Деякі особливості властиві ферит-гранатовій плівці при дії високотемпературного відпалу. Так, наприклад, у видимому і ближньому інфрачервоному діапазонах, маються смуги поглинання, що визначаються суперпозицією вкладів від внутрішньоіонних електродипольних переходів. Причому, у структурі граната іони  $Fe^{3+}$  перебувають у викривлених октаедричних і тетраедричних позиціях всередині полієдрів, утворених іонами кисню. І той факт, що здійснюються заборонені за спіном і парністю переходи іонів заліза у видимому світлі, пояснюється існуванням кооперативного ефекту спарених спінових комплексів, який знімає заборону за спіном для одноіонних переходів. У видимому діапазоні домінуючий вклад у коефіцієнт поглинання вносять два переходи в кристалічному полі а- і d-підгратки. Зі зростанням температури вікно прозорості зміщується в область великих значень довжини хвиль, що обумовлено двома причинами: слабким зміщенням переходів у ІЧ області і розширенням піків поглинання, причому, другий механізм домінуючий.

Для пояснення природи додаткового поглинання в ближньому ІЧ діапазоні з  $4000\text{ см}^{-1}$  до  $1000\text{ см}^{-1}$  допускається можливість утворення пар іонів заліза



Проте, основна причина додаткового поглинання пов'язується з розкиданням донорів і акцепторів, що супроводжується наявністю іонів двох- і чотирьохвалентного заліза. Процес відновлення йде за такою схемою:



Зростання оптичного поглинання можна пояснити тільки припустивши парний перехід заліза із трьохвалентного у двохвалентне в а- і d- підгратках граната за рахунок змішування збуджених станів іонів заліза двох- і чотирьохвалентного. У процесі відпалу відбувається одночасне формування іонів заліза чотирьохвалентного і кисневої вакансії. При додатковій дії  $\gamma$ -випромінювання виникають радіаційні дефекти, пов'язані з локалізацією дірок на іонах кисню і утворенню складних комплексних сполук, що містять іони заліза з дробовою валентністю 2-3 і 3-4 та іони кисню.

Причому радіаційні дефекти кисню є парамагнітними центрами, які вносять додатковий вклад у магнітну підсистему ферит-гранатів.

Крім того, було досліджено вплив величини і напрямку магнітного поля на коливальні спектри в парі  $O^{2-} \rightarrow Fe^{3+}$ , де іони заліза є центрами зародження нової магнітної фази. Зміна в процесі відпалу концентрації іонів заліза призводить до зміни спин-хвильового спектра іонів кисню і заліза, а кисневі вакансії під дією  $\gamma$ -променів перетворюються в парамагнітні центри, які під дією магнітного поля орієнтуються. Спектри поглинання ферит-гранатової плівки після дії високотемпературного відпалу,  $\gamma$ -випромінювання та магнітного поля зображені на рис.1.

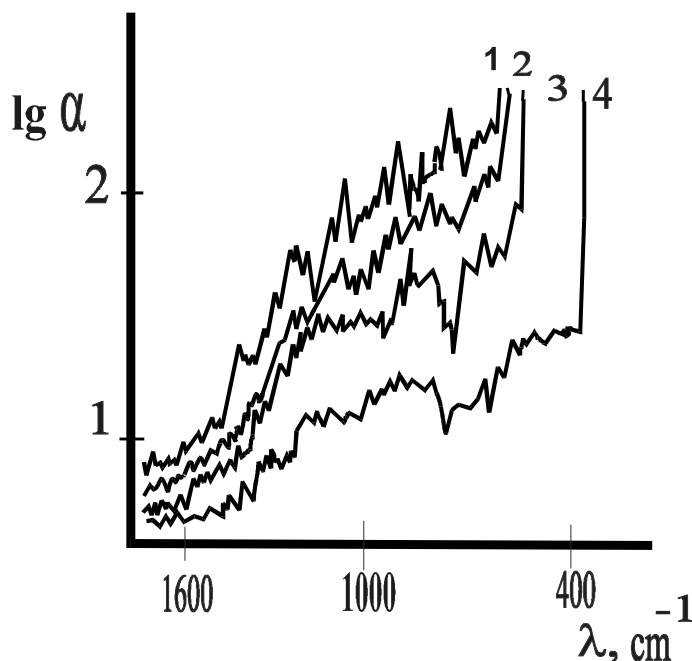


Рис. 1 Спектри поглинання ЗІГ в ІЧ діапазоні, де 1-початковий спектр, 2 – відпалений, 3- опромінений, 4- намагнічений

Практичне застосування одержаних результатів дає можливість регулювати оптичні властивості плівки, зокрема, коефіцієнт прозорості (коефіцієнт поглинання) у залежності від величини магнітного поля. Чим більша напруженість магнітного поля, тим вищий коефіцієнт прозорості обробленої плівки.

Так, наприклад, ферит-гранатову плівку, вирощену на кристалах  $Gd_3Ga_5O_{12}$  у напрямку (111) з домішками іонів  $Y, Bi, Tm$ , піддавали високотемпературному відпалу на повітрі при  $T=1000^{\circ}C$  протягом однієї години. Охолоджували зразки в печі до кімнатної температури, потім опромінювали на устаткуванні ЛМБ -1 закритого типу "Гамма" -1 М  $\gamma$ - випромінювання радіоактивного ізоотопу  $Cs^{137}$ , дозою  $10^2 - 10^8 R$ , і намагнічували в рівномірному магнітному полі, напруженість якого змінювалася для одержання бажаного коефіцієнта прозорості.

Таким чином, після спеціальної обробки, яка включає відпалювання і опромінення, у плівці відбуваються структурні зміни, які дозволяють регулювати коефіцієнт прозорості величиною магнітного поля (рис.2).

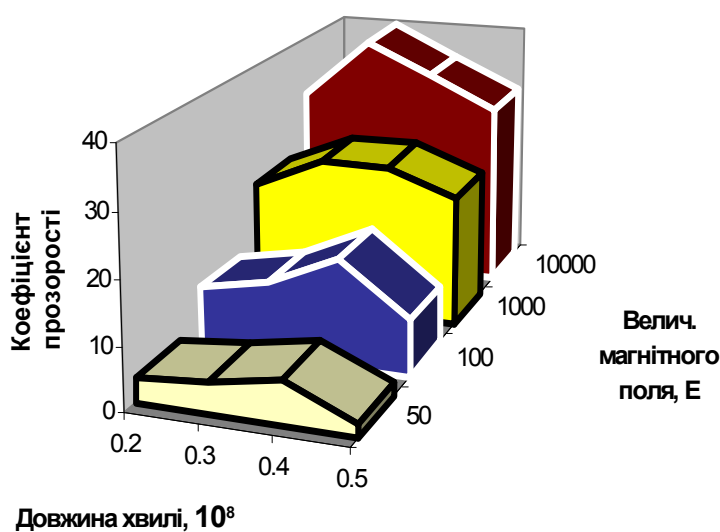


Рис.2 Залежність коефіцієнта прозорості від величини магнітного поля обробленої (відпаленої та опроміненої) плівки  $(Y, Bi)_3(Fe, Ga)_5O_{12}$  в ІЧ діапазоні.

## О ФИЗИЧЕСКОМ МЕХАНИЗМЕ РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Левитин В.В., Лоскутов С.В., Серпецкий Б.А.

Известно, что усталость является крайне опасным видом разрушения материалов. Изучение физического механизма процессов усталости и разработка методов прогнозирования сопротивления усталости представляются весьма актуальными.

Задачей данной работы было изучение влияния знакопеременных напряжений на работу выхода электронов (РВЭ). Нами экспериментально измерялась контактная разность потенциалов (КРП) методом динамического конденсатора [1]. Методика измерений КРП в процессе испытаний на усталость описана в работе [2]. По полученным значениям КРП рассчитывалась работа выхода. Объектом исследования служили специальные стали и алюминий. Плотность дислокаций в образцах оценивалась также методом гармонического анализа рентгеновских интерференций.

Структурная эволюция поверхности металлов отражается в изменении распределения РВЭ по поверхности (рис. 1). С ростом наработки выделяются два характерных участка на кривых распределения РВЭ. Первый связан с пластическим деформированием материала поверхностного слоя в зоне максимальных напряжений. Важными особенностями этого участка являются локализованность падения РВЭ в области максимальных деформаций и насыщение РВЭ при определённой наработке.

Второй участок соответствует росту РВЭ. Он непосредственно прилегает к первому. Возможными механизмами, объясняющими эффект роста РВЭ в поле циклических напряжений, являются: сглаживание атомарной шероховатости; образование поверхностных микротрещин; поверхностная диффузия в поле касательных напряжений.

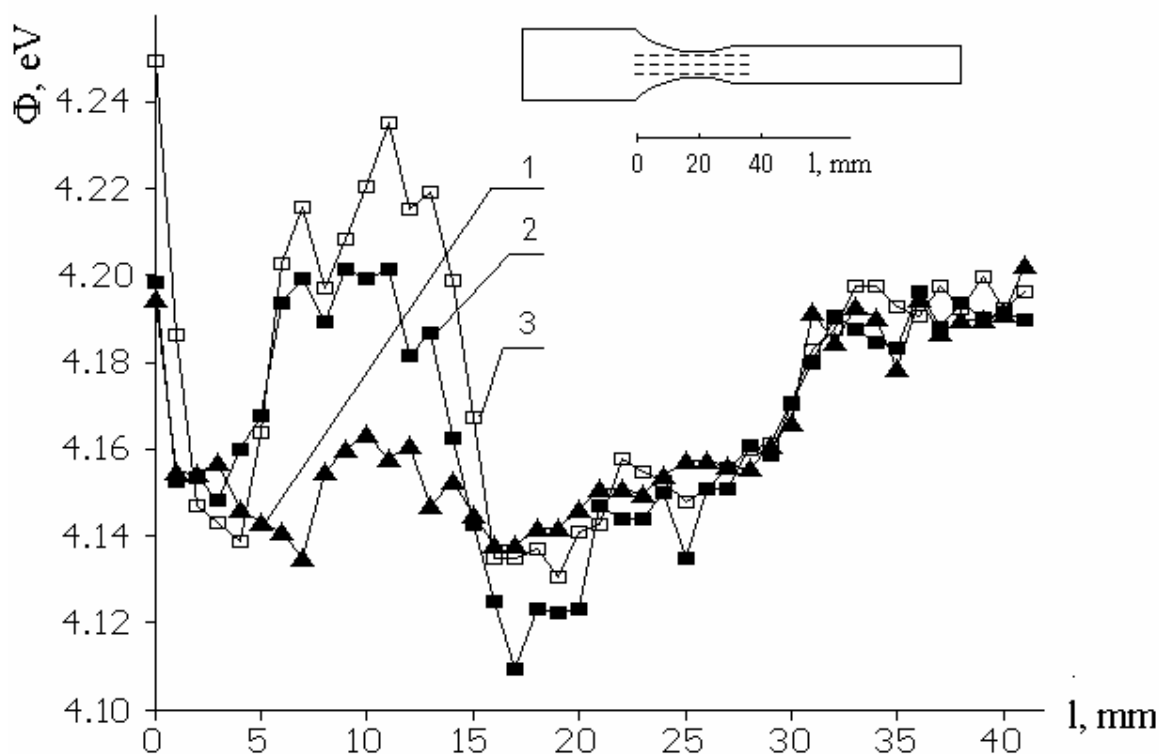


Рис. 1. Распределение РВЭ вдоль поверхности образца из стали ЭП479 для наработок 1 – 28; 2 – 85; 3 – 93 млн. циклов

Известно, что при циклическом нагружении металлов активизируется вакансионный механизм деформирования [3]. Поэтому выглаживание атомарной шероховатости возможно за счёт потока

вакансий с поверхности. Если источниками этих вакансий будут основания атомарных ступенек, то такой процесс в конечном счёте эквивалентен поверхностной диффузии, приводящей к заполнению поверхностных микровпадин материалом ближайших микровыступов. В итоге, за рост РВЭ, по видимому, отвечает поверхностная диффузия, активируемая циклическими напряжениями.

Нами высказано предположение, что минимумы потенциального рельефа на кривых распределения РВЭ по поверхности образцов связаны с появлением на поверхности атомарных ступенек, которые несут электрический заряд. Ступеньки сопровождают зарождение и выход на поверхность деформационных дислокаций,двигающихся под влиянием знакопеременных механических напряжений. Таким образом, картина потенциального рельефа обладает прогнозируемыми возможностями, поскольку она формируется факторами, предшествующими разрушению.

Выполненное исследование структурных изменений под влиянием циклических напряжений позволяет предположить существование двух основных стадий:

1. Стадия обратимых структурных перестроек, когда величина РВЭ для данной точки поверхности периодически уменьшается и увеличивается, колеблясь вблизи некоторого среднего значения.
2. Стадия необратимых структурных изменений в материале поверхностного слоя, когда РВЭ в данной точке монотонно уменьшается вплоть до разрушения образца.

В зоне активных циклических деформаций на формирование энергетического рельефа основное влияние оказывает изменение структуры самого металла. Рассматривая только кристаллографические факторы, мы предполагаем, что образование выступов, заряженных ступенек приводит к уменьшению РВЭ, а провалы и микротрещины сопровождаются ростом РВЭ. Очевидно, что могут действовать одновременно или сменяя друг друга оба эти фактора.

Если металлический образец подвергнут циклическим напряжениям, то, как известно, происходит генерирование дислокаций. Существует пороговое напряжение  $\tau_s$ , выше значений которого этот процесс может начаться. Оно может быть записано в виде:

$$\tau_s = \mu_s \cdot b \cdot \sqrt{n \cdot \rho_0} / (2 \cdot \pi) \quad (1)$$

где  $\mu_s$  - модуль сдвига;  $b$  - вектор Бюргерса;  $n$  - число дислокаций в скоплении;  $\rho_0$  - начальная плотность дислокаций.

Зародившиеся дислокации под влиянием внешних переменных напряжений движутся в пересекающихся системах скольжения. Часть из них выходит на поверхность. В результате выхода дислокаций на поверхность образуются поверхностные ступеньки. Известно, что эти ступеньки несут электрический заряд и, следовательно, образуют электрические диполи [3]. Вклад дислокационных диполей приводит к уменьшению работы выхода.

Авторы вывели следующее уравнение для изменения плотности дислокаций в процессе испытаний материала на усталость [2]:

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \delta \cdot V_0 \exp\left(-\frac{U_0 + b^3 \cdot \tau_s}{k \cdot T}\right) \cdot \int_{t_{so}}^{t_{sf}} \exp\left(\frac{b^3 \cdot \tau_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{k \cdot T}\right) \cdot dt, \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность дислокаций;  $\delta$  - коэффициент размножения дислокаций;  $V_0$  - предэкспоненциальный множитель;  $U_0$  - энергия активации движения дислокаций;  $\tau_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$  - переменное напряжение;  $t_{so}$  и  $t_{sf}$  начальное и конечное времена дислокационного движения в пределах полупериода соответственно;  $k$  - постоянная Больцмана;  $T$  - температура.

Уравнение (2) было решено численно с помощью ПК для разных значений амплитуды приложенного напряжения. Плотность дислокаций в поверхностном слое была вычислена для каждого цикла. Начальная концентрация дислокаций в Al была равна  $\rho_0 = 3.75 \times 10^7 \text{ см}^{-2}$ . Скорость размножения дислокаций была выбрана равной  $d\rho/dN = 37.5 \text{ см}^{-2} \times \text{циклов}^{-1}$ . Критериями для выбора значений этих величин были экспериментальные данные работы [4], а также согласование расчетной кривой  $\rho(N)$  с нашими экспериментальными данными.

Если значения этих величин известны, то нет необходимости знать константы  $\delta$ ,  $V_0$ ,  $U_0$ . Следующие разумные значения других констант были выбраны (для Al):  $\mu_s = 2.70 \times 10^4 \text{ МПа}$ ;  $b = 2.86 \times 10^{-10} \text{ м}$ ;  $\tau_m = 82 \text{ МПа}$ ;  $\omega = 5.88 \times 10^3 \text{ рад/с}$ ;  $T = 300 \text{ К}$ .

Результаты вычислений плотности дислокаций в Al приведены на рис. 2. Соответствие между экспериментальными точками и расчетной кривой удовлетворительное. Увеличение плотности дислокаций сопровождается уменьшением РВЭ.



Приращение РВЭ из-за увеличения плотности ступенек может быть выражено следующей формулой [5]:

$$\Delta\Phi = -A \cdot \mu \cdot n, \quad (3)$$

где  $\Phi$  в эВ;  $A$  - константа, равная  $3.77 \times 10^{-15}$  эВ $\times$ см<sup>2</sup>/D;  $\mu$  - дипольный момент, деленный на межатомное расстояние в D/см;  $n$  - плотность ступенек в см<sup>-1</sup> ( $1D = 3.34 \times 10^{-32}$  Кл $\times$ см).

Из уравнения (3) мы можем получить:

$$d\Phi/dN = -A \cdot \mu \cdot dn/dN. \quad (4)$$

С другой стороны, появление ступенек вызвано выходом дислокаций на поверхность. Уравнение сохранения для дефектов кристаллической решетки в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\rho_s \cdot L \cdot V \cdot dt = dn \cdot \bar{h} \cdot L, \quad (5)$$

где  $L$  - размер кристалла;  $V \cdot dt$  - средняя длина свободного пробега дислокаций к поверхности;  $dn$  - приращение числа ступенек на единицу поверхности;  $\bar{h}$  - средняя высота ступенек.

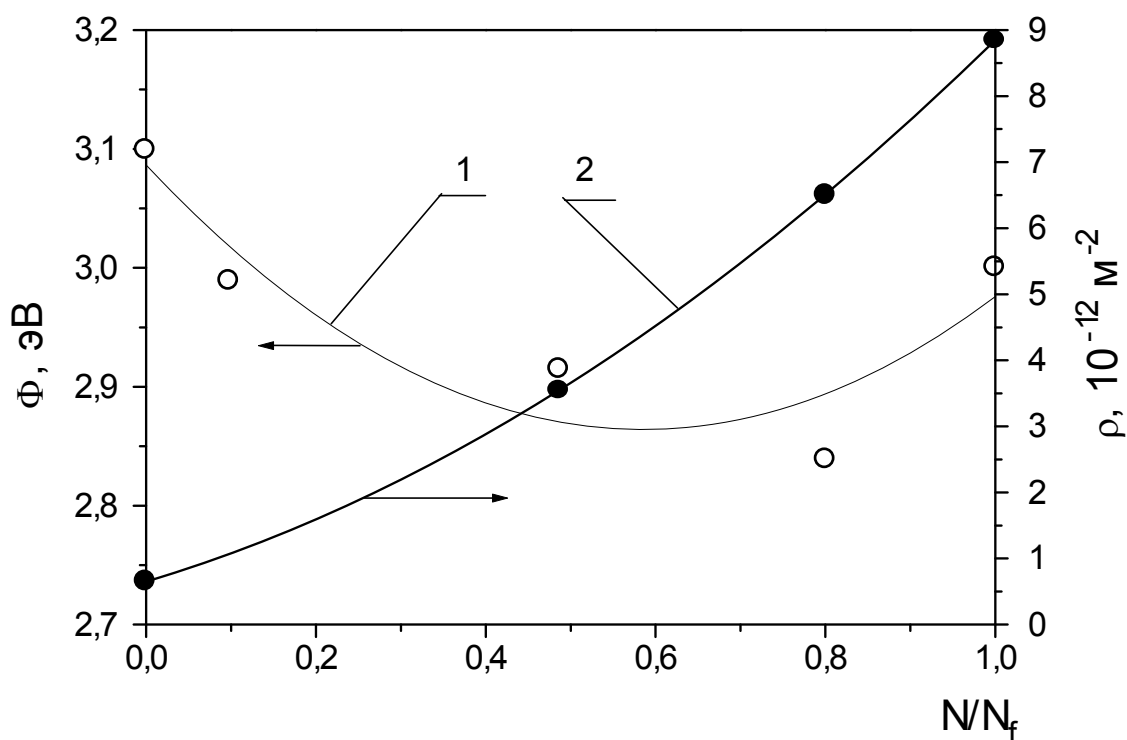


Рис. 2. Влияние усталостных испытаний на РВЭ и плотность дислокаций в Al.

1 - РВЭ в зависимости от  $N/N_f$ , где  $N_f$  - число циклов до разрушения;

2 - вычисленная кривая плотности дислокаций согласно уравнению (2);

• - Al, экспериментальные данные рентгеновских измерений,  $\rho$  ( $N/N_f$ );

$\tau_m = 52$  МПа;  $\omega = 5881$  рад/с.

Таким образом, скорость формирования (образования) ступенек за цикл определяется плотностью дислокаций и скоростью их движения:

$$dn/dN = 2 \cdot \pi \cdot \rho_s \cdot V / (\omega \cdot \bar{h}). \quad (6)$$

Подставив формулу (6) в уравнение (4), мы можем получить

$$d\Phi/dN = -2 \cdot \pi \cdot A \cdot \mu \cdot \rho_s \cdot V / (\omega \cdot \bar{h}). \quad (7)$$

Для алюминия было найдено, что  $d\Phi/dN = -1.67 \times 10^{-7}$  эВ/цикл. Теперь мы можем оценить некоторые величины, исходя из полученных экспериментальных данных. Однако, предварительно необходимо сделать некоторые разумные предположения, потому что некоторые значения неизвестны.

Примем что:  $\mu = e \times b / (b \times 3.34 \times 10^{-32}) = 4.79 \times 10^{12}$  D/см. Примем  $\bar{h} \approx b$ . Тогда скорость дислокаций в соответствии с уравнением (7) равна  $2.27 \times 10^{10}$  см/цикл. Это соответствует скорости  $2.12 \times 10^{-7}$  см/с = 7.71 б/с. Так как скорость размножения дислокаций  $dp/dN = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V / \omega$ , мы можем определить коэффициент размножения дислокаций  $\delta = 4.79 \text{ см}^{-1} \times \text{цикл}^{-1}$ . Поскольку скорость размножения дислокаций теперь известна, из (4) мы получаем  $dn / dN = 318 \text{ ступенек} \times \text{цикл}^{-1} \times \text{см}^{-2}$ .

## ВЫВОДЫ

Систематически измерены значения работы выхода электронов при усталости металлов. Наблюдалось уменьшение работы выхода как результат накопления усталостных повреждений. Измерена плотность дислокаций в процессе усталости; данные расчетов эволюции дислокационной плотности удовлетворительно совпали с экспериментом. Причиной падения РВЭ при усталости служит формирование заряженных ступенек в результате выхода дислокаций на поверхность образца.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вудраф Д., Делчар Т. Современные методы исследования поверхности: Пер. с англ.- М.: Мир, 1989.- 564 с.
2. Levitin V.V., Loskutov S.V., Pravda M.I. and Serpetzky B.A. Influence of cyclic stresses upon the electronic work function for the metal surface // Solid State Communications.- 1994.- Vol. 92.- N12.- p.973 - 976.
3. Алёхин В.П. Физика прочности и пластичности поверхностных слоёв материалов.- М.:Наука,1983.- 280 с.
4. Матохнюк Л.Е. Ускоренные усталостные испытания высокочастотным нагружением. – К.: Наук. думка, 1988.- 200 с.
5. Besocke K., Krahl-Urban, Wagner H. Dipole moments associated with edge atomic: a comparative study on stepped Pt, Au and W surfaces.- Surface Science, 1977, № 68. – P. 39 – 46.

УДК 537.533.2:539.37

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕЛЬЕФА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Лоскутов С. В.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений развития физики твёрдого тела является изучение изменений в структуре свободной поверхности в процессе деформирования металлов. Деформация металлов в значительной мере связана с развитием дислокационной структуры. При этом приращение свободной поверхности обусловлено выходом на неё дислокаций и образованием различного рода поверхностных кристаллических дефектов. В результате выхода дефектов из объёма на поверхность нарушается равновесие в электронной подсистеме и происходит перераспределение электронов в соответствии с микрогеометрией поверхностного дефекта.

Следить за изменениями в распределении электронной плотности позволяет метод контактной разности потенциалов (КРП) [1]. Важнейшей особенностью метода КРП является возможность определения одной из основных энергетических характеристик металла  $\Phi$  - работы выхода электрона (РВЭ) [2].

Так как деформационные процессы в значительной степени отражаются в формировании дефектной структуры металлических поверхностей, то необходимо установить взаимосвязь изменений РВЭ с эволюцией кристаллической структуры металлов в процессе деформирования. На пути решения этой проблемы была поставлена задача исследовать закономерности распределения и эволюции РВЭ по поверхности пластически деформированных металлов.

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для измерения КРП в настоящей работе использовался метод динамического конденсатора [3]. Цилиндрический электрод сравнения диаметром 1,4 мм изготавливался из золота ( $\Phi = 4,3$  эВ). Методика исследования заключалась в растяжении образцов до образования “шейки” текучести и измерении распределений РВЭ по поверхности до и после деформирования. РВЭ определяли сканированием с шагом 1 мм по трём линиям (по краям и в центре вдоль рабочей области образцов) с точностью до 5 мэВ. С целью изучения влияния процессов адсорбции и десорбции молекул воздуха на изменение РВЭ поверхность образцов при измерениях подвергалась воздействию ультрафиолетового облучения (УФО) с помощью ртутной лампы.

В качестве материалов для исследования были использованы поликристаллический алюминий технической чистоты и стали марок Ст.3, ЭП479, ЭП866. Изготавливались образцы с размерами рабочей части  $10 \times 5 \times 4$  мм<sup>3</sup> из алюминия и  $10 \times 4 \times 2,4$  мм<sup>3</sup> для сталей. Обработка поверхности образцов включала шлифование наждачными шкурками и финишную полировку алмазной пастой. После механической обработки образцы химически полировались и выдерживались до испытаний около месяца с целью установления термодинамического равновесия со средой.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис.1 и рис.2 представлены кривые распределения РВЭ в области “шейки” для исследованных материалов. Все особенности протекания пластического течения металлов отражаются на этих кривых. Так, например, формирование двух участков с максимальной степенью пластического деформирования выражается на кривой 1 рис.1 двумя локальными прогибами. В ряде экспериментов было обнаружено, что для каждого металла существует предельное значение РВЭ, вызванное пластическим деформированием до разрушения.

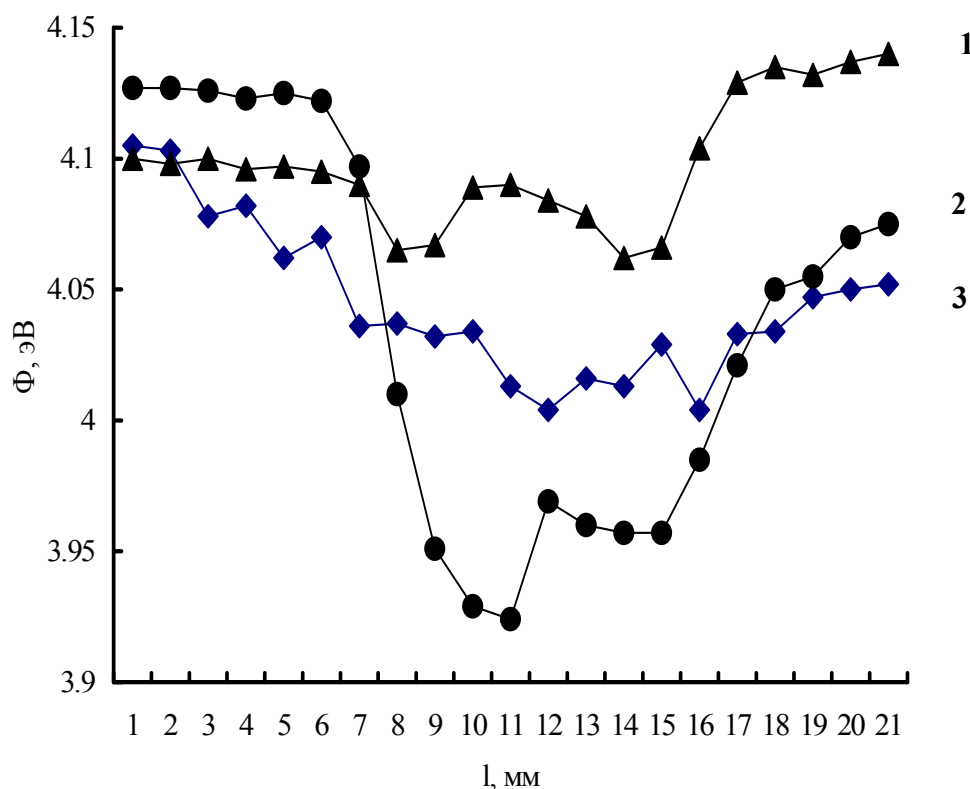


Рис.1. Потенциальный рельеф поверхности металлов после образования “шейки” текучести. Сталь марок: 1 – ЭП479; 2 - Ст.3; 3 – ЭП866.

При воздействии УФО на поверхность металлов в процессе измерений КРП наблюдается относительное смещение кривых распределения 1 и 2 на рис.2.

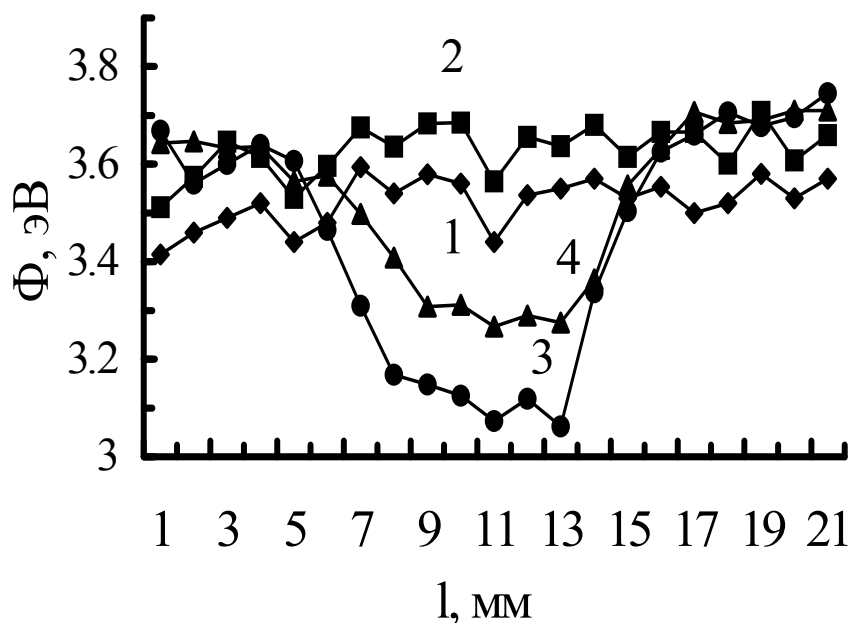


Рис.2. Потенциальный рельеф поверхности алюминия до и после деформирования. До деформирования: 1 – без УФО; 2 – с УФО; 3 – сразу после деформирования; 4 – то же через 24 часа.

Причём для алюминия УФО приводит к росту РВЭ, а для сталей и ряда других исследованных материалов (титана, цинка, монокристаллического ниобия, меди) характерно уменьшение РВЭ. Это явление объясняется тем, что адатомы на поверхности металла, поглотив энергию ультрафиолетового излучения, покидают поверхность, изменяя величину электростатического барьера, и, в результате РВЭ изменяется [4]. Направление изменения РВЭ определяется зависимостью, которая является обобщением многочисленных экспериментальных данных [5]. При малой степени заполнения поверхности адатомами с уменьшением концентрации адатомов РВЭ растёт, а при высоких степенях заполнения РВЭ уменьшается с выходом на насыщение. По-видимому, в случае для алюминия характерен участок, где РВЭ растёт с увеличением десорбции.

Формирование кривой 3 на рис.2 вызвано протеканием пластических деформаций в рабочем сечении образца при растяжении. Причём изменение РВЭ охватило всю область рабочей части образца, достигая максимума в области “шейки”. Но уже через 24 часа после деформации приращение РВЭ в центре “шейки” уменьшилось приблизительно на 100 мэВ для алюминия и на 30 - 50 мэВ для сталей.

Известно влияние вакуумного отжига на изменение РВЭ металлов [5]. Отжиг поверхностных дефектов, создаваемых ионной бомбардировкой, вызывал рост РВЭ. Представляет интерес изучение влияния вакуумного отжига деформационных дефектов на изменение РВЭ. Отжиг алюминиевых образцов, деформированных растяжением до 40 % был выполнен в вакууме не хуже  $3 \cdot 10^{-5}$  мм. рт. ст. при температуре 520 °K в течение двух часов с последующим охлаждением в вакууме. Измерения РВЭ по поверхности образцов выполнялись каждый день, поэтому номер измерения на рис.3 соответствует дню измерения.

Представленные на рис.3 кривые 1 (без УФО) и 2 (УФО) определяют кинетику изменения РВЭ участка поверхности, не испытывавшего пластическое деформирование. Воздействие УФО вызывает смещение РВЭ в сторону роста. Кривые 3 (без УФО) и 4 (с УФО) описывают кинетику РВЭ пластически деформированных участков поверхности. Область деформирования определяется начальными участками этих кривых, видно, что РВЭ при этом уменьшается. С течением времени, как уже отмечалось выше, РВЭ выходит на насыщение. Вакуумный отжиг (после 16-ого и 17-ого измерений) значительно увеличивает РВЭ по всей поверхности. Причём изменения РВЭ, вызванные отжигом для деформированной и недеформированной поверхностей, существенно не отличаются.

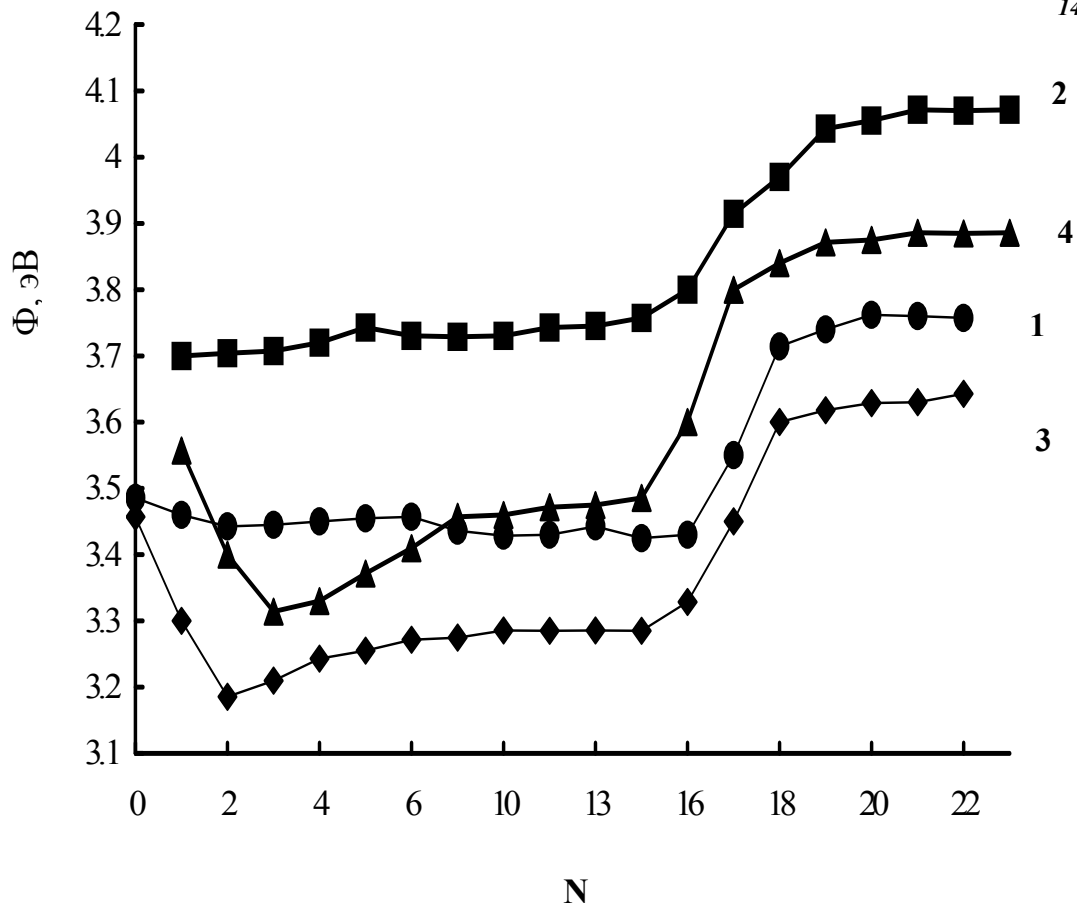


Рис.3. Кинетика РВЭ по поверхности алюминия для различных измерений: на недеформированном участке 1 – без УФО, 2 – с УФО; на деформированном 3 – без УФО, 4 – с УФО.

Процесс отжига вызвал новое энергетическое состояние металлической поверхности и после установления адсорбционно-десорбционного равновесия на поверхности образовались кривые энергетического распределения со значительно большими значениями РВЭ по сравнению с состоянием поверхности до отжига. Обнаружено, что РВЭ для недеформированной части поверхности при УФО приближается к значениям РВЭ для чистого монокристаллического алюминия. Также было замечено, что с течением времени восстановилось геометрическое подобие кривых полученных без УФО и при УФО.

Таким образом, в результате отжига на экспериментальных кривых сохранился деформационный энергетический пик, но кривые сдвинулись в область больших значений РВЭ. Возможным объяснением этого является сохранение различий в атомарной шероховатости участков поверхности, испытавших пластическое деформирование (образование дислокационных ступенек) и участков не затронутых процессом дефектообразования. Поэтому поверхностная составляющая РВЭ, зависящая от распределения электронной плотности на границе металла, приводит к формированию кривой потенциального рельефа поверхности с явно выраженным деформационным пиком. Увеличение же общего уровня РВЭ может быть связано с изменением объёмной составляющей РВЭ, вызванным отжигом структурных дефектов. Возможно, что процесс отжига затронул и кристаллиты, выходящие на свободную поверхность. Известно, что увеличение размеров кристаллитов приводит к росту РВЭ.

Результаты исследования закономерностей изменения РВЭ по поверхности пластически деформируемых металлов позволили установить следующее выражение для приращения РВЭ :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 \{1 - \exp[-\alpha(e - e_0)]\}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - безразмерный параметр деформирования;  $e$  - относительная деформация;  $e_0$  - относительная деформация, соответствующая началу пластического течения материала.

Элементарный акт пластической деформации связан с выходом на свободную поверхность дислокационной моноатомной ступеньки. Уже в объёме кристалла перераспределение электронов в окрестности дислокации приводит к образованию дипольного момента [6,7]. Таким образом можно говорить о переносе дислокационных диполей на свободную поверхность при деформировании.

Зависимость РВЭ от плотности атомарных ступенек на поверхности ряда металлов экспериментально исследовалась в работе [8]. Авторы этой работы обнаружили, что зависимость РВЭ от плотности моноатомных ступенек на поверхности кристалла может быть описана следующим выражением:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q \cdot P \cdot n, \quad (2)$$

$P$  - дипольный момент на единицу длины поверхностной ступеньки;  $n$  - плотность поверхностных ступенек;  $q$  - заряд электрона;  $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная. На основании зависимостей (1) и (2) была оценена плотность линейных деформационных диполей на различных участках поверхности образцов из алюминия, в предположении, что каждый из этих диполей пересекает образец поперёк в рабочей части. Результаты расчёта показали, что относительной деформации до 20 % соответствует линейная плотность деформационных диполей  $(1 - 1,5) \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Обнаружено, что полученные таким образом значения плотности деформационных диполей совпадают по порядку величины с плотностью тонких следов скольжения для алюминия по данным электронной микроскопии [6].

И в завершение я выражаю свою искреннюю благодарность М. И. Правде за помощь при проведении измерений и проф. В.В.Левитину за постоянный интерес и поддержку при выполнении этой работы.

### ВЫВОДЫ

1. В работе предложена методика визуализации деформационного рельефа металлических поверхностей на основе измерений распределённых КРП по поверхности образцов.
2. Показано, что большей степени деформации соответствуют большие изменения РВЭ, а при достижении определённой деформации изменение РВЭ достигает предельного значения.
3. Исследована кинетика изменения РВЭ пластически деформированных участков образцов. Показано, что релаксация РВЭ в основном определяется адсорбционно-десорбционными процессами на поверхности. Деформационный рельеф на основе измерений РВЭ сохраняется в течение длительного времени (по нашим данным до 10 месяцев). Влияние вакуумного отжига сказывается на частичном сглаживании деформационного рельефа, но при этом всё ещё сохраняется информация о пластически деформированных участках образцов.
4. Показано, что зависимость РВЭ от деформации может быть описана на основе зависимости РВЭ от концентрации адсорбирующихся на поверхности атомов. Полученные при этом оценочные значения плотности линий скольжения вышедших на поверхность дислокаций хорошо согласуются с известными литературными данными.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Craig P.P. Direct observation of stress-induced shifts in contact potentials // Phys.Rev.Lett. - 1969. - 22, № 14. - P. 1093 - 1096.
2. Савицкий Е.М., Буров И.В., Литвак Л.Н. Работа выхода элементов // ДАН СССР. - 1974. - 218, № 4. - С. 818 - 820.
3. Поверхностные свойства твёрдых тел / Под ред. М. Грина. - М.: Мир, 1972. - 432 с.
4. Лоскутов С.В., Левитин В.В., Погосов В.В. Об измерении работы выхода электронов методом динамического конденсатора // Поверхность. - 1992. - 8.- С.121 - 123.
5. Фоменко В.С. Эмиссионные свойства материалов. Справочник. - Киев, Наукова думка, 1981. - 340 с.
6. Ван Бюрен. Дефекты в кристаллах. - М.: Изд. иностранной литературы, 1962. - 584 с.
7. Фридель Ж. Дислокации. - М.: Мир, 1967. - 644 с.
8. Besocke K., Krahl-Urban, Wagner H. Dipole moments associated with edge atoms: a comparative study on stepped Pt, Au and W surfaces // Surface Science. - 1977. - 68. - P.39 - 46.

## ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ $E^3 \times S^1$

Осипов А.Е.

Концепция материальной частицы [1–3], предложенная с использованием дополнительного пространственного измерения, позволяет связать динамическую массу  $m(v)$  с радиусом кривизны  $R$  траектории частицы на 4-цилиндре  $E^3 \times S^1$ .

В случае  $v = \text{const}$  (по крайней мере на одном витке траектории) для радиуса кривизны можно показать, что

$$R = \frac{r_0^2}{r}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус  $\perp v$  - сечения 4-хмерного цилиндра в окрестности частицы,  $r_0$  – радиус траектории покоящейся в  $E^3$  частицы.

В [2] отмечено, что характерная зависимость  $r = r_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ , проявляющаяся в данной модели, дает возможность ассоциировать геометрический параметр  $r$  с релятивистской массой  $m(v)$  частицы. Это достигается посредством связи  $mr = m_0 r_0$ , откуда и вытекает

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (2)$$

Таким образом, для радиуса кривизны (1) получаем

$$R = \frac{r_0}{m_0} \cdot m(v). \quad (3)$$

Соотношение  $m \sim R$  по сравнению с  $m \sim r^{-1}$  представляется более интересным и глубоким, так как радиус кривизны траектории частицы теснее связан с самой частицей и ее движением нежели радиус цилиндрической поверхности, на которую траектория накручивается. В этом смысле возникает возможность вообще отказа от модельной гиперповерхности  $E^3 \times S^1$  в пользу рассмотрения лишь собственно уравнений траектории.

Интерес могут представлять прежде всего всевозможные замкнутые траектории (петли) как связанные состояния, т.е. частицы со своей – новой массой покоя.

Естественно считать одновитковую частицу в нашей модели как истинно элементарную. Причем дихотомизм направлений движения определяет двузначие электрического заряда: "+" и "-". Поэтому двух- и более витковые петли в силу электромагнитного взаимодействия будут составлять иерархическую последовательность частиц (лептонов) в порядке возрастания нестабильности. Конфигурация квазистабильных петель будет определяться электромагнитным взаимодействием и, в свою очередь, определит массу частицы как усредненный по длине петли радиус кривизны  $R$ :

$$m_0(n) = \frac{m_0}{2\pi r_0^2} \oint_{n=1,2,\dots} R ds, \quad (4)$$

где  $ds$  – элемент длины дуги траектории,  $m_0 = m_0(1)$ ,  $n$  – число витков в петле. Интеграл (4) необходимо рассматривать с обязательным для нашей модели ограничением [2]: длина каждой петли одинакова и равняется  $2\pi r_0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Крапивной А.В., Осипов А.Е. Концепция частицы в модели  $E^3 \times S^1$  / Тези доповідей наукових конференцій викладачів і студентів ЗДУ. – Запоріжжя: ЗДУ, 1993. Вип. III. Част. I. – С. 16–17.

2. Осипов А.Е. Вывод и физическая интерпретация уравнений для геодезических в модели  $E^3 \times S^1$ . Математика, физика. Сборник научных трудов, посвященных 10-летию университета. – Запорожье, 1995. С. 130–131.
3. Осипов О.Ю. Прояв співвідношення невизначеностей у моделі  $E^3 \times S^1$ .// Вісник Запорізького державного університету:Фізико-математичні науки. – Запоріжжя, 1998.-№1.- С. 100–101.

УДК 535.375.36

## АНАЛИЗ СОЛНЕЧНОГО СПЕКТРА С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ СРЕДСТВ ЭВМ

Псарев В.И.

Основной механизм переноса энергии электромагнитного излучения из центра Солнца наружу – поглощение (фотоионизация внутренних оболочек атомов [1, 2]) и переизлучение его с постепенным увеличением длины волны атомов по мере понижения температуры и удаления от центральных слоев к наружным. Прохождение света через фотосферу наружу также сопровождается изменением его интенсивности вследствие поглощения многократного переизлучения и рассеяния. Поглощение уменьшает интенсивность первичного пучка излучения, а переизлучение увеличивает ее.

Настоящая работа посвящена аналитическому описанию прослеживаемого непрерывного солнечного спектра, простирающегося от длинных инфракрасных волн до короткого ультрафиолетового излучения.

Для состояния локального термодинамического равновесия градиент излучения равен нулю и интенсивность, представляемая формулой Планка, должна зависеть только от температуры [2]. В этом случае функция источника излучения

$$S_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left[ \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $c$  – скорость света;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура по шкале Кельвина.

В формуле (1) перейдем к относительной энергии фотона  $\varepsilon = \frac{h\nu}{kT}$ , где  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ . Получим

$$I_1(\varepsilon) = f_0 \varepsilon^3 [\exp(\varepsilon) - 1]^{-1}, \quad (2)$$

где  $f_0 = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}$ .

С учетом поглощения и рассеяния спектральная мощность каждого излучающего элемента фотосферы, лежащего на луче зрения, можно представить в виде (ср. [2], 135)

$$I_2(\varepsilon) = f_1 [1 - \exp(-b\varepsilon)], \quad (3)$$

где  $b$  – постоянная.

С другой стороны, учитывая, что непрерывное поглощение света в фотосфере, в основном, определяется фотоионизацией отрицательных ионов водорода [1], можно записать

$$I_3(\varepsilon) = f_2 [\exp(\varepsilon - \varepsilon_0) + 1]^{-1}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_0$  – так называемая энергия прозрачности.

Следовательно, учитывая (2)-(4), обобщенное выражение для плотности распределения мощности излучения в солнечном спектре запишется в таком виде

$$I(\varepsilon) = c \cdot \varepsilon^a [1 - \exp(-b\varepsilon)] \cdot [\exp(\varepsilon) - 1]^{-1} \cdot [\exp(\varepsilon - \varepsilon_0) + 1]^{-1}, \quad (5)$$



где  $a$ ,  $b$  и  $\varepsilon_0$  определяются из данных опыта.

Возможности и правомерность описания непрерывного солнечного спектра функцией (5) оценим с помощью соотношения между ее моментами (см. также [3]).

Соотношение между моментами. Для целей последующего сопоставления с экспериментальными данными функцию (5) представим в таком виде  $I_n(\varepsilon) = \varepsilon^n I(\varepsilon)$ , где  $n$  может принимать целочисленные и дробные значения больше нуля. Прологарифмируем это выражение, а затем продифференцируем. Получим  $\varepsilon dI_n(\varepsilon) = nI_n(\varepsilon)d\varepsilon + \varepsilon^{n+1}dI(\varepsilon)$ .

Проинтегрируем слева и справа в пределах от 0 и до  $\infty$  с учетом того, что  $\varepsilon I_n(\varepsilon) \Big|_0^\infty = 0$ , и

соотношение между моментами примет такой вид

$$(n + a + 1)M_n + bM_{n+1-\gamma_1} = M_{n+1-\gamma_2} + M_{n+1-\gamma_3}, \quad (6)$$

где значения моментов относительно  $\varepsilon = 0$ :  $M_n = \int_0^\infty \varepsilon^n I(\varepsilon)d\varepsilon$ ;

$$M_{n+1-\gamma_1} = \int_0^\infty \varepsilon^{n+1} I(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\gamma_1(\varepsilon)}, \quad \gamma_1(\varepsilon) = \exp(b\varepsilon) - 1;$$

$$M_{n+1-\gamma_2} = \int_0^\infty \varepsilon^{n+1} I(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\gamma_2(\varepsilon)}, \quad \gamma_2(\varepsilon) = 1 - \exp(-\varepsilon);$$

$$M_{n+1-\gamma_3} = \int_0^\infty \varepsilon^{n+1} I(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\gamma_3(\varepsilon)}, \quad \gamma_3(\varepsilon) = 1 + \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon);$$

Если моменты распределения мощности излучения от какого-либо источника удовлетворяют соотношению (6), то это распределение должно описываться функцией (5), естественно, с какой-то определенной точностью.

Сопоставление с экспериментом. Оценим с помощью (5) и соотношения между моментами (6) качество отображения ими распределения мощности излучения в солнечном спектре [4]. Экспериментальные значения интенсивности света  $I(\varepsilon)$  для каждой длины волны приведены в таблице. Распределение  $I(\varepsilon)$  нормировано на единицу и характеризуется моментами  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$  и  $4$ ) относительно среднего значения  $m_s$ , имеет отрицательный коэффициент асимметрии  $S_k$  с четко выраженным максимумом ( $ex = -0,335$ ). Его сопоставление с функцией (5) позволило определить численные значения величин  $a = 4,0$ ,  $b = 4,2$  и  $\varepsilon_0 = 8,7$ . Следовательно, анализу подлежит численная формула

$$I'(\varepsilon) = 1.054 \cdot 10^{-2} \cdot \varepsilon^4 (1 - e^{-4.2\varepsilon}) \cdot (e^\varepsilon - 1)^{-1} \cdot (e^{\varepsilon - \varepsilon_0} + 1)^{-1}, \quad (7)$$

с помощью которой рассчитаны значения  $I'(\varepsilon)$ , приведенные в той же таблице. Она также определяет спектральное распределение интенсивности и должна удовлетворять соотношению (6) между моментами.

Обозначим через  $l_n = (n + 5)M_n + 4,2M_{n+1-\gamma_1}$  и величину  $r_n = M_{n+1-\gamma_2} + M_{n+1-\gamma_3}$  – так называемые пакеты моментов [3]. Их численные значения для экспериментального распределения интенсивности, соответствующие отдельным  $n$ , не сильно отличаются друг от друга. Этот факт указывает на правомерность описания с помощью (7) распределения интенсивности в реальном солнечном спектре. Но это также означает, что спектральный состав света, излучаемого Солнцем (после учета влияния поглощения в земной атмосфере и присутствия линий Фраунгофера) в визуальной области, не соответствует планковскому ни при какой температуре (в формуле (7) величина  $a = 4$ , что больше 3). Далее, максимумы экспериментального распределения и рассчитанного с помощью (7) практически совпадают, хотя их коэффициенты асимметрии незначительно отличаются друг от друга. Коротковолновая часть спектра описывается с помощью (7) хуже, чем длинноволновая. Однако

численное значение  $\varepsilon_0 = 8.7$  отражает известный экспериментальный факт о резком ослаблении непрерывного спектра Солнца в интервале коротких длин волн (см., например, [1]).

Таблица - Данные анализа спектра в центре солнечного диска ( $T = 6050^\circ\text{K}$ )

$\lambda$ , мкм	$\varepsilon_0$	$I(\varepsilon) \cdot 10^2$	$I'(\varepsilon) \cdot 10^2$	Значения моментов и их пакетов
5,0	0,476	0,08	0,0768	$m_s = 4,396$
4,0	0,595	0,15	0,1493	$m_2 = 2,758$
3,0	0,794	0,33	0,3328	$m_3 = -0,131$
2,5	0,952	0,54	0,5346	$m_4 = 20,266$
2,0	1,190	0,98	0,9177	$s_K = -2,861$
1,8	1,323	1,30	1,1673	$ex = -0,335$
1,6	1,488	1,73	1,5037	$n = 0; M_0 = 22,143$
1,4	1,701	2,12	1,9672	$l_0 = 11,076$
1,2	1,984	2,61	2,6010	$r_0 = 10,969$
1,0	2,381	3,26	3,4459	$n = 0,5; M_{0,5} = 45,778$
0,8	2,976	4,22	4,4296	$l_{0,5} = 251,83$
0,7	3,405	4,71	4,8410	$r_{0,5} = 248,79$
0,6	3,968	5,22	5,1088	$n = 1; M_1 = 98,854$
0,5	4,762	4,77	4,5348	$l_1 = 593,17$
0,48	4,960	4,63	4,3149	$r_1 = 584,75$
0,46	5,176	4,55	4,0527	$n = 2; M_2 = 512,82$
0,44	5,411	3,95	3,7482	$l_2 = 3589,78$
0,42	5,669	3,50	3,3997	$r_2 = 3529,20$
0,40	5,952	2,77	3,0102	$n = 3; M_3 = 2982,40$
0,38	6,265	1,87	2,5825	$l_3 = 2359,30$
0,36	6,613	1,77	2,1247	$r_3 = 23448,50$
0,34	7,003	1,53	1,6499	
0,32	7,440	1,19	1,1846	
0,30	7,936	0,77	0,760	
0,28	8,503	0,33	0,417	
0,26	9,157	0,17	0,186	
0,24	9,920	0,07	0,064	
0,22	10,822	0,05	0,016	
0,20	11,904	0,01	0,0028	

Примечание:  $I(\varepsilon) = \lambda \cdot I_\lambda(O)$  – экспериментальное значение интенсивности;  $I_\lambda(O)$  – интенсивность излучения центра диска Солнца для спектра со сглаженными неоднородностями [4]. О других обозначениях смотрите в тексте.

В заключение заметим, задача о распределении излучения в фотосфере Солнца, при наличии поглощения, переизлучения и рассеяния света, чрезвычайно трудна и недоступна. В простейшем, модельном случае обычно определяется поле излучения, которое характеризуется определенной интенсивностью, зависящей от частоты, координат и направления луча, но только не от времени. Такой подход лежит в основе стационарной теории переноса излучения. Гораздо более сложной является задача о нестационарном переносе излучения и, тем более, в неравновесной динамичной среде, какой является солнечная фотосфера. В этой связи, значительный интерес представляет качественный анализ реального солнечного спектра с привлечением средств ЭВМ при введении обобщенных функций на

основе плотности распределения Планка с последующим их сопоставлением с экспериментальным непрерывным спектром. При этом важную роль играет необходимость использования соотношения между собственными моментами испытываемой функции распределения.

Подобный метод анализа спектрального излучения проиллюстрирован в настоящей работе. Он позволяет получать ценную информацию о процессах, протекающих в фотосфере Солнца по наблюдениям его непрерывного спектра (на поверхности Земли, за пределами земной атмосферы, с помощью спутников и др.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. ФЭС – физический энциклопедический словарь. Т.4. – М.: Советская энциклопедия, 1965. – 592с.
2. Гибсон Э. Спокойное Солнце. – М.: Мир, 1977. – 408с.
3. Псарев В.И. Проблема моментов распределений в статистической физике //Известия вузов. Физика. – 1997. - №4. – С.92-97.
4. Аллен К.У. Астрофизические величины (справочник). – М.: Мир, 1977. – 446с.

УДК 53.072+536.3+541.12.012.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТАВА ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИНДУЦИРОВАННОГО ГАЗОВЫМ ОКРУЖЕНИЕМ

Сгадов С.А., Швец Ю.А.

Обработка поверхностей при помощи активированной газовой фазы в электрическом разряде, пламенах, при фотовозбуждении и других энергетических воздействиях находит широкое применение в технологиях, связанных с очисткой, оксидированием, нитрированием поверхности твердых тел, их травлением, осаждением на поверхности различных покрытий [1, 2]. Такие процессы, с целью моделирования, обычно описываются методами химической кинетики [3]. При этом получают системы дифференциальных уравнений (чаще всего нелинейных и неоднородных), содержащие параметры, которые подбираются эмпирически из условия согласования результатов моделирования с экспериментальными данными для каждого конкретного случая. Последнее обстоятельство не позволяет использовать такие модели для прогнозирования изменения состава вновь изучаемых систем, оценки режимов ведения разрабатываемых технологических процессов.

Наряду с методами химической кинетики широкое применение для изучения состава систем находят методы равновесной термодинамики [4]. Такие методы используют термодинамические параметры, которые получены на основе независимых экспериментальных данных, надежно установлены и табулированы [см., например, 5].

Однако рассматриваемые системы в принципе неоднородны, а поэтому неравновесны. Ситуацию усложняет еще и то обстоятельство, что для получения конечного результата, стоящего перед конкретным процессом, отдельные части системы специально выводятся из равновесия под действием внешнего энергетического воздействия. Это затрудняет термодинамическое моделирование систем, в которых существенно как расположение границ фаз, так и распределение веществ по объему.

Так как большинство вышеупомянутых процессов ведутся в стационарных режимах, то авторами сделана попытка применить термодинамические методы для описания процессов взаимодействия активированных газов с поверхностью твердого тела. При этом класс рассматриваемых систем был ограничен обратимыми системами, для которых характерна неизменность состава при стационарном ведении процесса и подвижность при изменении внешних параметров.

Задачей моделирования являлось:

- прогнозирование изменений состава приповерхностных слоев кристаллического образца;
- определение распределения растворенных веществ по глубине образца.

Для моделирования выбрана протяженная одномерная гетерогенная система, которая включает в себя кристаллический образец, взаимодействующий с активизированной газовой смесью. Данную систему условно можно разделить на две области:

- приповерхностную область твердого тела, химический состав которой претерпевает изменения под действием активированной газовой фазы;
- область объема твердого тела, которую можно рассматривать как твердый раствор, параметры которого также могут изменяться под действием изменений в газовой фазе.

Области воздействия внешнего источника возбуждения припишем координатную точку  $x=0$  (приповерхностные слои над образцом), а задней поверхности образца  $x=L$ . При моделировании будем также предполагать, что в процессах основную роль играют электрически нейтральные частицы.

Для преодоления вышеописанных трудностей термодинамического моделирования система разбивается по длине на  $M$  частей таким образом, что в каждой из получившихся элементарных ячеек термодинамические характеристики можно считать однородными. В основе разбиения должен также лежать принцип микрообратимости Онзагера, согласно которому размер элементарной ячейки в газовой фазе должен быть никак не меньше длины свободного пробега, а в твердом теле - больше длины межатомных связей.

Каждая из элементарных ячеек, в силу принципа локального равновесия [4], характеризуется набором термодинамических характеристик, в том числе и свободной энергией Гиббса  $G$ , значение которой для равновесного случая будет минимальным. Стационарное состояние ячейки отличается от равновесного тем, что ее состав отклоняется от равновесного под воздействием совокупности сторонних сил (извне данной ячейки), к которым можно отнести разность химических потенциалов между ячейками, воздействие внешних энергетических полей и т.п. Как следствие этого, изменяется и свободная энергия элементарной ячейки. Такое отклонение от равновесия можно описать введением сверхравновесной поправки - слагаемого в выражения для химического потенциала, которая будет иметь смысл работы, совершенной внешними силами над ячейкой. Стационарному состоянию в этом случае будет также соответствовать минимум функционала  $G_m$  для  $m$ -й ячейки с учетом этих сверхравновесных поправок.

К ограничениям, наложенным условиями материального баланса в каждой ячейке, необходимо учесть диффузию продуктов реакций в соседних ячейках. Следовательно, значения концентраций  $n_i(x)$  (т.е. количеств веществ в объеме ячейки) должно подчиняться закону непрерывности, описываемого уравнением массопереноса. Это означает, что решение уравнение массопереноса следует искать на классе функций  $n_i(x)$ , удовлетворяющих минимуму функционала  $G(n(x_m))$  для окрестности  $m$ -й ячейки, что приводит от краевой задачи для концентраций к краевой задаче для величины, характеризующей отклонение от равновесия при помощи подстановки специального вида.

Для  $m$ -й элементарной ячейки, содержащей  $I$  растворенных веществ,  $K$  индивидуальных твердых фаз и состоящих из атомов сорта  $J$ , функционал, соответствующий потенциалу энергии Гиббса, будет иметь вид [5]:

$$G_m = \sum_{i=1}^I n_{im} \left( c_{im} + \ln \frac{n_{im}}{\sum_{i=1}^I n_{im}} + \varphi_{im} \right) + \sum_{k=1}^K n_{km} c_{km} + \sum_{j=1}^J \lambda_{jm} \left( b_{jm} - \sum_{k=1}^K a_{jk} n_{km} - \sum_{i=1}^I a_{ji} n_{im} \right) \quad (1)$$

где  $\lambda_{jm}$  - коэффициенты Лагранжа,  $n_{im}$  - количество  $i$ -го компонента растворенного вещества в  $m$ -й ячейке при действии внешнего источника возбуждения;

$n_{km}$  - количество  $k$ -го вещества конденсированной фазы в той же ячейке при действии внешнего источника воздействия;

$c_{im} = \frac{\Delta_{f,0} H_{im}}{RT} - \frac{\Phi_{im}^*}{R} + \ln p$  - приведенное стандартное изменение химического потенциала вещества;

$c_{km} = \frac{\Delta_{f,0} H_{km}}{RT} - \frac{\Phi_{km}^*}{R}$  - то же для индивидуальных конденсированных фаз;

$\Delta_{f,0}H$ ,  $\Phi^*$ ,  $R$ ,  $p$ ,  $T$  - энтальпия образования в стандартном состоянии, приведенная энергия Гиббса, газовая постоянная, давление в газовой фазе и температура, соответственно;

$\varphi_{im}$  - сверхравновесная поправка к химическому потенциалу  $i$ -го вещества в  $m$ -й ячейке, отражающая влияние внешнего, относительно данной ячейки воздействия (в том числе и со стороны соседних ячеек).

При этом учитывалось условие материального баланса для каждой из ячеек на основании закона сохранения и принципа локального равновесия в виде:

$$\sum_{i=1}^I a_{ji} n_{im} + \sum_{k=1}^K a_{jk} n_{km} = b_{jm}. \quad (2)$$

Здесь  $b_{jm}$  - количество атомов сорта  $j$  в  $m$ -й ячейке;

$a_{ji}$ ,  $a_{jk}$  - стехиометрические коэффициенты.

Приравняв производные функционалов (1) к нулю и исключив переменные, приходим к  $M$  системам уравнений, описывающих локальное равновесие в каждой из ячеек:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m \sum_{i=1}^I a_{ji} \exp \left( \sum_{j=1}^J a_{ji} \lambda_{jm} - c_{im} - \varphi_{im} \right) + \sum_{k=1}^K a_{jk} n_{km} = b_{jm}, \quad (j = 1..J), \\ \sum_{i=1}^I \exp \left( \sum_{j=1}^J a_{ji} \lambda_{jm} - c_{im} - \varphi_{im} \right) = 1, \\ \sum_{k=1}^K a_{jk} \lambda_{jm} - c_{ik} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь  $P_m$  - общее количество вещества в  $m$ -й ячейке.

Решение системы (3) позволяет определить химический состав  $(n_{im}, n_{km})$  каждой из  $M$  элементарных ячеек и, соответственно, распределение веществ вдоль рассматриваемой системы.

Необходимо заметить, что переменные  $n_{im}$  и  $\lambda_{im}$  связаны соотношением

$$n_{im} = P_m \exp \left( \sum_{j=1}^J a_{ji} \lambda_{jm} - c_{im} - \varphi_{im} \right), \quad (4)$$

которое следует из явного вида производной  $\frac{\partial G_m}{\partial n_{im}}$ . Легко видеть, что  $n_{im}$  можно выразить через

равновесные (без внешнего воздействия) количества  $I$ -го вещества в  $m$ -й ячейке  $n_{im}^*$ :  $n_{im} = n_{im}^* e^{-\varphi_{im}}$ .

Данное выражение дает основание для определения сверхравновесных поправок из, например, экспериментально определенных значений  $n_{im}$  и  $n_{im}^*$ :

$$\varphi_{im} = - \ln \frac{n_{im}}{n_{im}^*}. \quad (5)$$

Для учета взаимодействия соседних ячеек, решения системы (3) вида (4) должны удовлетворять уравнению диффузии вида:

$$D_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_i = F_i(n, x), \quad (6)$$

где  $F_i(n, x)$  - учитывает взаимодействие  $i$ -го вещества с границами.

Подставляя  $n(x)$  в виде (5) в уравнение (7), получаем уравнение для распространения возмущения в системе:

$$n_i^* \left( \frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 - \frac{dn_i^*}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} - \frac{d^2 n_i^*}{dx^2} = F_i(n_i^* e^{-\varphi_i}, x) e^{\varphi_i} / D_i, \quad (7)$$

$$\text{где } n_i^* = P \exp \left( \sum_{j=1}^J a_{ji} \lambda_j - c_i \right) \quad (8)$$

формально соответствует равновесному невозмущенному количеству растворенного вещества.

Вообще говоря, граничные условия для (7) могут быть получены из граничных условий уравнения массопереноса согласно схеме:

$$n_i(x_0) = n_i^0 \quad \rightarrow \quad \varphi_i \Big|_{x=0} = - \ln \frac{n_i}{n_i^*}, \quad (9)$$

$$n_i'(x=L) = \Pi_i \quad \rightarrow \quad \varphi_i' \Big|_{x=L} = \sum_j a_{ji} \lambda_j' + \frac{P'}{P} - c_i' - \frac{\Pi_i}{P}, \quad (9a)$$

где  $n_i^*$  - равновесная концентрация,  $\Pi_i$  - величина, пропорциональная потоку  $i$ -го вещества при  $x=L$ .

Так же можно предположить отсутствие возмущения на задней поверхности образца и заменить условие (9a), приравняв  $\varphi_i' \Big|_{x=L} = 0$ .

Величины  $\varphi_{im} = \varphi_i(x_m)$  и  $\lambda_{jm}$  взаимозависимы, поэтому целесообразно воспользоваться методом Зейделя, разделив процесс решения системы (3) и дифференциального уравнения (7), подставляя поочередно полученные значения  $\varphi_{im}$  в систему (4), а полученные из нее  $\lambda_{jm}$  в коэффициенты и краевые условия уравнения (7).

Если рассматриваемый процесс находится в стационарном состоянии, то можно потребовать выполнения принципа детального равновесия в смысле постоянства количества атомов в каждой элементарной ячейке и в объеме в целом. С другой стороны в результате химических реакций атомы не исчезают и не возникают, а происходит их перераспределение, как между веществами, так и в пространстве. А отсюда вытекает, что если система содержит  $J$  сортов атомов, то для концентрации атомов  $j$ -го сорта должен выполняться закон сохранения в форме:

$$\nabla^2 b_j = 0, \quad j=1..J \quad (10)$$

Решением соответствующей краевой задачи для уравнений (10) на разностной сетке есть величины  $b_{jm}$ , входящие в системы уравнений вида (3). Таким образом, стационарное состояние системы в общем случае описывается решением системы нелинейных уравнений (3) и краевых задач дифференциальных уравнений (7), (10).

Полученная выше модель позволяет описать твердый раствор как смесь идеальных газов (приближение, которое работает во многих случаях, особенно при низких концентрациях примесей). Поэтому нетрудно транслировать описание переноса в газовой фазе на описание распределения примесей в твердом теле, рассмотрев его как совокупность элементарных ячеек. С этой целью необходимо написать условие согласования двух частей системы для решения разностных схем дифференциальных уравнений (8) и (10) в газовой среде и твердом растворе.

Рассмотрим границу раздела фаз считая, что граница раздела проходит между  $\sigma=0$  и  $\sigma+1$  ячейкой. Ячейка  $m = \sigma$  должна соответствовать слою толщиной  $h$  адсорбированного газа. Следующая ячейка ( $m = \sigma + 1$ ) соответствует приповерхностному слою твердого тела толщиной  $h_1$ . Поскольку обе фазы различаются химическим составом, то на границе коэффициенты диффузии терпят скачок. При этом, поскольку проникновение диффузанта проходит стадию адсорбции, то для потоков вещества слева и справа поверхности для одного и того же вещества ввиду принципа детального равновесия должно выполняться соотношение:

$$D_- \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_- = D_+ \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_+, \quad (11)$$

где  $D_-$ ,  $D_+$  - коэффициенты диффузии для данного вещества в газе и в твердом теле одного и того же вещества. Разделив обе части (11) на  $D_+$  и, воспользовавшись определением количества атомов в ячейке  $b_{jm}$ , получаем соотношение для приповерхностного участка:

$$\frac{\partial b_j}{\partial x} \Big|_+ = \sum_i a_{ji} \frac{D_-}{D_+} \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_-. \quad (12)$$

Если ввести разностные операторы  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$ , определяемые как конечные разности

$$\Delta_- y = y_\sigma - y_{\sigma-1}, \quad \Delta_+ y = y_{\sigma+1} - y_\sigma, \quad (13)$$

то тогда (12) можно записать в виде разностной схемы:

$$\Delta_+ b_j = \frac{h}{h_1} \sum_i a_{ji} \frac{D_-}{D_+} \Delta_- b_j. \quad (14)$$

Рассматривая  $n$ ,  $c$ ,  $\lambda$  как функции координаты  $x$ , подставим выражение (5) в (11). После некоторых преобразований получим:

$$D_- \left( \frac{\partial \ln P}{\partial x} \Big|_- + \sum_j a_{ji} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \Big|_- - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_- - \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\alpha}} \Big|_- \right) = D_+ \left( \frac{\partial \ln P}{\partial x} \Big|_+ + \sum_j a_{ji} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \Big|_+ - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_+ - \frac{\tilde{\alpha}_i}{\tilde{\alpha}} \Big|_+ \right) \quad (15)$$

Толщины слоев  $h$  и  $h_1$  выбираются таким образом, чтобы ячейки  $\sigma$  и  $\sigma+1$  можно было рассматривать во взаимном термодинамическом равновесии отдельно от объемных, то есть стало бы возможным применить к ним условие равенства химических потенциалов, которое в данном случае может быть сформулировано через параметры  $\lambda_{jm}$ , имеющие смысл химического потенциала на атом, в виде:

$$\lambda_{j\sigma} = \lambda_{j\sigma+1}. \quad (16)$$

Используя граничное условие (9а) и равенство (16), из (15) можно получить выражение для  $\Delta_+ \varphi$  в явном виде:

$$\Delta_+ \varphi_i = \ln \frac{P_{\sigma+1}}{P_\sigma} - \Delta_+ c_i - \frac{D_-}{D_+} \frac{h_1}{h} \delta \varphi_{i\Pi}, \quad (17)$$

где  $\delta \varphi_{i\Pi}$  - величина, определяющая влияние поверхности на концентрацию  $i$ -го вещества в приповерхностной зоне вне зависимости от остальных веществ. Смысл этой поправки будет еще более очевиден, если для выбора размеров околоповерхностных ячеек воспользоваться критерием

$$\frac{D_-}{D_+} \frac{h_1}{h} \cong 1. \quad (18)$$

Тогда получаем выражение для скачка величины  $\varphi_{im}$  на границе:

$$\Delta_+ \varphi_i = \ln \frac{P_{\sigma+1}}{P_\sigma} - \Delta_+ c_i - \delta \varphi_{i\Pi}. \quad (19)$$

Если не учитывать энергетического влияния поверхности на прилежащие слои, то пренебрегая последним слагаемым в (18), получим:

$$\Delta_+ \varphi_i \approx \ln \frac{P_{\sigma+1}}{P_\sigma} - \Delta_+ c_i. \quad (20)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (20) описывает равновесие газ - твердое тело в простейшем случае для растворения вещества в твердом теле, а также испарения или конденсации паров твердого тела.

Алгоритм для расчета стационарного состояния при влиянии внешнего возмущения будет иметь следующий вид:

1. Для каждой  $m$ -й ячейки решается система уравнений вида (3) относительно переменных  $\lambda_{jm}$ ,  $P_m$ ,  $n_{km}$  при некотором значении количества атомов в данной ячейке  $b_{jm}^t$  (здесь  $t$  - номер итерации). Для полученного набора величин  $\lambda_{jm}$  для каждой ячейки оценивается влияние соседних, путем вычисления поправки  $\varphi_{im}^t$  из уравнения (7) для  $\varphi(x)$ .
2. Выполняется пересчет распределения атомов  $b_{jm}^{t+1}$  по ячейкам реактора из решения краевой задачи для  $b(x)$  дифференциального уравнения (10).
3. Оценивается сходимость полученных результатов из сравнения значений величин  $n_{km}$ ,  $\lambda_{jm}$  и  $\varphi_{im}$  на текущей и предыдущей итерациях. Если норма их разности больше некоторой наперед заданной величины  $\varepsilon$ , то выполняется новая итерация.
4. По найденным значениям  $P_m$ ,  $\lambda_{jm}$  и  $\varphi_{im}$ , определяются искомые распределения  $n_{im}$  и  $n_{km}$ .

В качестве начального приближения можно взять равномерное распределение  $b_{jm}$ , а для  $\varphi_{im} = 0$ .

Тогда на первом шаге алгоритма будет получено первое приближение для  $\lambda_{jm}$ .

Таким образом, стационарное состояние химической гетерофазной системы, вызванное источником возмущения химического состава, описывается при помощи минимумов функционалов вида (1), соответствующих смещений свободной энергии Гиббса от равновесного значения в элементарных ячейках системы, распространение которого по системе описывается дифференциальными уравнениями вида (7). Влияние границы, учитывается введением скачка смещения (19) для согласования массопереноса в газовой и конденсированной фазе. При этом за счет рассмотрения приграничных к поверхности раздела фаз зон (элементарных ячеек) описывается не только растворение примесей в твердом теле, но сорбционные явления. Важно отметить, в этом смысле, что величина  $\Delta_+ c_i$ , соответствующая скачку свободной энергии поверхность - раствор описывает изменение энергии свободной частицы в процессе внедрения в поверхностные слои твердого тела.

Итак, полученная математическая модель позволяет описывать влияние активизированной газовой фазы на процессы, протекающие в приповерхностном слое и объеме твердого образца, исходя из термодинамических характеристик процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сурис А.Л. Плазмохимические процессы и аппараты.- М.: Химия, 1989.-304с.
2. Lantos P.V., Jonson N.M., Street R.A. Light-enhanced hydrogen motion in  $\alpha$ -SiH //Phys. Rev. Lett. - 1991.- 67, № 19. - p 2686-2689.
3. Лавренко В.А. Рекомбинация атомов водорода на поверхности твердых тел. - К.: Наукова думка, 1973. - 204 с., ил.
4. Глазов В.М. Химическая термодинамика и фазовые равновесия.- М.: Металлургия, 1988.- 560 с.
5. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание: В 4-ч т./Гурвич Л.В., Вейц И.В.и др. - М.: Наука, 1978-1982.



## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СЛОЕВ ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ МЕТОДОМ ПРОСВЕЧИВАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ

Хрипко С.Л.

Большой интерес для многих исследователей представляет структура слоев пористого кремния [1-3]. Наиболее точные результаты дают исследования методом просвечивающей электронной микроскопии.

Известно, что несовершенства в кристаллах вызывают вокруг себя поле искажений. Такие поля в электронном просвечивающем микроскопе приводят к локальным изменениям дифракционного контраста при прохождении электронного пучка. Знание поля искажений позволяет предсказать контраст, и наоборот, по характеру контраста можно определить тип наблюдаемых дефектов. Поэтому были проведены исследования по выявлению природы дефектов, которые получали анодным травлением в растворе плавиковой кислоты. Если верно предположение, что исследуемые дефекты представляют собой поры, то они должны иметь вакансионную природу.

В зависимости от метода наблюдения контуры изображений дефекта могут исчезать, поэтому был применен метод дефокусировки [4]. Этим методом удается выявить поры диаметром до 10 нм [5].

Исследование образцов с пористой поверхностью проводили на кремниевых структурах с эпитаксиальным слоем n-типа, диаметром 76 мм и ориентацией (111). Толщина эпитаксиального слоя, измеренная методом сферического шлифа, составила 32-35 мкм. Удельное электрическое сопротивление измеряли четырехзондовым методом, его величина составила 20 Ом\*см.

На лицевой стороне пластины выполнялось анодное травление в растворе плавиковой кислоты. Созданный слой пористого кремния толщиной 1-5 мкм имел плотность 1,4-1,9 г/см<sup>3</sup>.

Для изучения структуры образца на просвечивающем электронном микроскопе необходимо было уменьшить его толщину, т.к. толщина просвечивающей области в электронном микроскопе с  $U=100$  kV

должна находиться в пределах  $800-1000 \overset{0}{\text{Å}}$ . С этой целью пластины помещали в установку химико-динамического травления и закрепляли в специальном фторопластовом держателе. Травление пластины происходило с тыльной стороны.

Раствор приготавливался из смеси плавиковой и азотной кислот в соотношении 1:8.

Процесс травления считался окончанным, когда область травления становилась желто-красного цвета, т.е. образовывалось отверстие. Остановка травления осуществлялась заливкой в стакан ледяной уксусной кислоты и последующей промывкой дистиллированной водой, после чего образец снимался с фторопластовой шайбы и промывался в толуоле.

Области образца, расположенные рядом с вытравленным отверстием, имели необходимую толщину, равную  $200-600 \overset{0}{\text{Å}}$ .

При исследовании дефектов выявлено, что они распределены неравномерно и имеют черно-белый контраст изображения и круглую форму (рис.1). Причем этот контраст они дают в чисто динамических условиях когда  $S=0$  при  $\vec{g}=[220]$  и  $\vec{g}=[422]$ , подобно малым дислокационным петлям. Однако относительно малые размеры не позволяют определить их тип (рис.2).

Так как форма фигур контраста неопределенна для выявления кристаллографической природы дефектов решетки был применен метод внутреннего - внешнего контраста, описанный в работе [6].

Используя методику, изложенную в работе [7] и полученные результаты исследований, был определен вектор Бюргерса  $\vec{b}$ . Все возможные варианты сочетаний значений семейства отражающих плоскостей при  $\vec{g}=[220]$  и  $\vec{g}=[422]$ , и значений вектора Бюргерса  $\vec{b}=1/2[100]$ ,  $\vec{b}=1/3[111]$  и  $\vec{b}=1/2[110]$  присущи малым дислокационным петлям. Поэтому наблюдаемые дефекты можно рассматривать как малые дислокационные петли с вектором Бюргерса  $\vec{b}=1/2[100]$  и  $\vec{b}=1/2[110]$ .

Анализ черно-белого контраста изображения дефектов на фотографиях показал, что линия нулевого контраста прямая, а области черного и белого поля приблизительно одинаковы (рис.2). Исходя из полученных фотоснимков и результатов определения вектора Бюргерса  $\vec{b}$ , можно сказать, что фигуры

изображения дефекта соответствуют условию  $|\vec{n} \times \vec{b}| > 0$ . Для малых упруго напряженных центров сферической симметрии, чтобы определить природу петли, необходимо определить знак произведения  $|\vec{g} \times \vec{l}|$  на изображениях и найти глубину залегания дефекта.

Для определения плоскости залегания пор был применен метод, описанный в работе [8]. Для описания черно-белого контраста изображения вводится вектор  $\vec{l}$ , определяемый как направление от центра черной области к центру белой области изображения позитива. Направление вектора  $\vec{l}$ , характеризующего изменение контраста изображения с черного на белый, параллельно проекции вектора Бюргерса  $\vec{b}$  на плоскость изображения в случае чисто краевой петли, для которой вектор дифракции  $\vec{g}$  также параллелен проекции вектора Бюргерса  $\vec{b}$ . В других же случаях направление вектора  $\vec{l}$  не параллельно направлению вектора Бюргерса  $\vec{b}$  и нормали  $\vec{n}$  к плоскости петли. Исследование зависимости угла  $\varphi_l$  между вектором дифракции  $\vec{g}$  и вектором  $\vec{l}$ , как функции направлений  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$ , описанной в работе [9], позволило определить предполагаемые плоскости залегания  $\{111\}$  и  $\{100\}$ , что соответствует малым дислокационным петлям вакансионного типа, то есть порам.

Был определен диаметр пор, который составил  $40-210 \text{ \AA}^0$  в зависимости от условий анодной обработки. Количество пор при подсчете на фотоснимках находилось в пределах  $4 \cdot 10^8 - 8 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ . Заметим, что при этом размер пор возрастает с увеличением плотности тока, времени анодной обработки и толщины пленки пористого кремния. Количество пор максимально при их диаметре, равном  $40-80 \text{ \AA}^0$ . Из этого следует, что дальнейшее увеличение диаметра пор происходит не только за счет растворения кремния на стенках пор, но и за счет вторичного эффекта объединения мелких, близко расположенных пор.

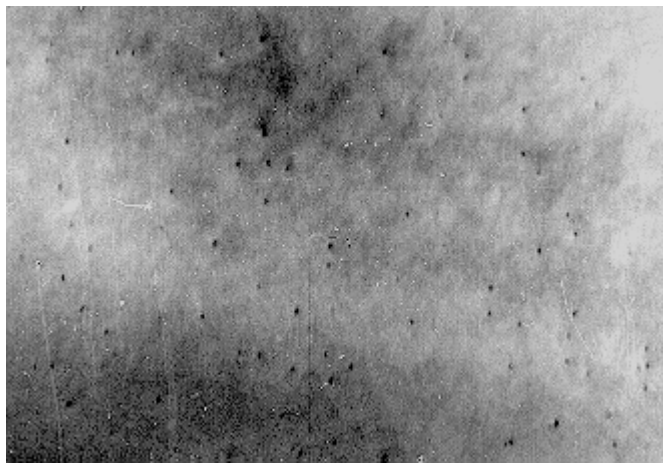
Для изучения структуры пористого кремния были проведены исследования электронограмм поверхности с различными объемными плотностями пористого кремния. На рис.3а представлена электронограмма от образца с порами диаметром  $80 \text{ \AA}^0$ . Анализ электронограммы показал, что система рефлексов имеет видоизмененную форму по сравнению с электронограммой образца без пор (рис.3б.).

Из анализа электронограмм образцов с пористой структурой видно, что образцы имеют дополнительные рефлексы, которые соответствуют включениям аморфной фазы. При увеличении плотности тока анодной обработки от  $5,0$  до  $30,0 \text{ мА/см}^2$  доля аморфной фазы увеличивается. Анализ электронограмм поверхности с различными объемными плотностями пористого кремния показал, что рефлексы, которые соответствуют кристаллографическим плоскостям, не исчезают, а линии Кикучи, характерные для монокристаллического кремния, также имеют место (рис.4).

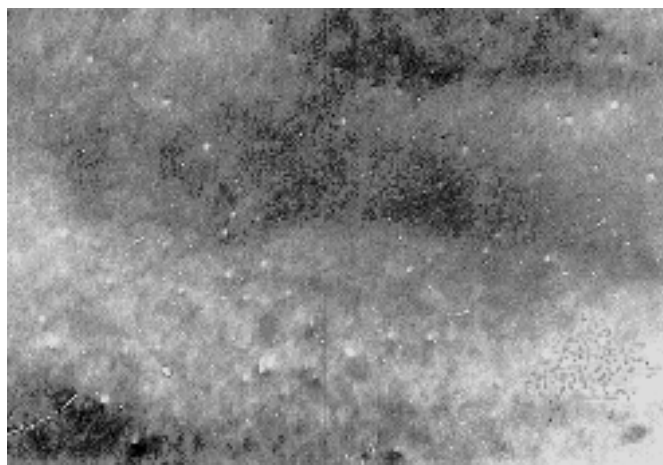
В результате исследований можно сделать выводы:

На основании проведенных исследований было установлено, что несовершенства, образующиеся при анодном травлении в растворе плавиковой кислоты, являются дефектами вакансионного типа.

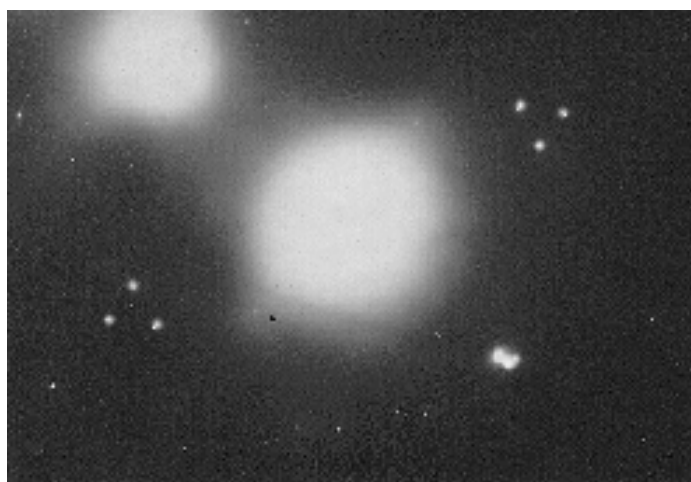
1. Наблюдаемые дефекты малых размеров можно рассматривать как малые дислокационные петли с вектором Бюргерса  $\vec{b} = 1/2[100]$  и  $\vec{b} = 1/2[110]$ .
2. Был определен диаметр пор, который составил  $40-210 \text{ \AA}^0$  в зависимости от условий анодной обработки. Количество пор при подсчете на фотоснимках находилось в пределах  $4 \cdot 10^8 - 8 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ .
3. Анализ электронограмм образцов с пористой структурой показал, что рефлексы, которые соответствуют кристаллографическим плоскостям не исчезают, а возникают включения аморфной фазы. Доля аморфной фазы увеличивается с ростом плотности тока анодной обработки от  $5,0$  до  $30,0 \text{ мА/см}^2$ .



**Рис.1.** Просвечивающая электронная микроскопия слоев пористого кремния. Плотность анодного тока  $15 \text{ mA/cm}^2$ . Время травления 5 мин. Ускоряющее напряжение 100 кэВ. Кинематические условия.



**Рис.2.** Просвечивающая электронная микроскопия слоев пористого кремния. Плотность анодного тока  $15 \text{ mA/cm}^2$ . Время травления 5 мин. Ускоряющее напряжение 100 кэВ. С добавлением 30%  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  в электролит.

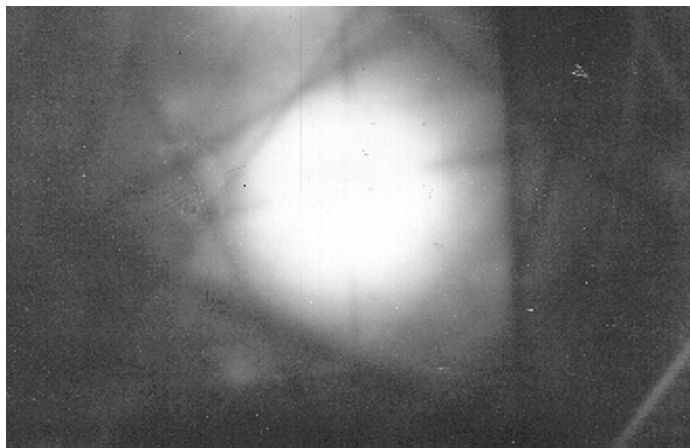


а) пористый кремний



б) кремний без пористого слоя

**Рис.3.** Просвечивающая электронная микроскопия (режим микродифракции).



**Рис.4.** Просвечивающая электронная микроскопия слоев пористого кремния.  
Плотность анодного тока  $15 \text{ mA/cm}^2$ .

Время травления 5 мин. Ускоряющее напряжение 100 кэВ, электронограмма при  $S \approx 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T.Unagami. Formation mechanism of porous silicon layers in hydrofluoric acid solution// J.Electrochem.Soc., –1980. –Vol.127, N2, –P.476-483.
2. Лабунов В.А., Бондаренко В.П., Борисенко В.Е. Пористый кремний в полупроводниковой электронике// Зарубежная электронная техника. –1978. –№15(185). –С.3-48.
3. Smith R.L., Collins S.D. Porous silicon morphologies and formation mechanism// Sensor and Actuators. Ser.A. –1990. V.23. Iss.1-3. –P.825-829.
4. Ruhle M. In: Proc. Intern. Conf. On radiation-induced voids in metals, Albany, 1971, eds. J.W. Corbett and L.C. Ianiello (U.S.A.E.C., 1972). –P.255-263.
5. Wilkens M. Studies of point defect clusters by transmission electron Microscopy, in vacancies and interstitials in metals, eds. Seeger et al. (north-Holland, Amsterdam, 1970) –p.485-491.
6. T.J. Magee, R.H. Morris and C.D. Melvin, Phys. Stat. Sol. (a). 13 (1972).
7. Wilkens M., Foll H. Black-white vector  $\vec{l}$  at small dislocation loops// Phys.stat.sol. (a). –1978. –N49. – P.555-563.
8. Ohr S.M. Directions of the black-white contacts of dislocation loops// Phys.stat.sol. (a). –1976. –N38. – P.553-557.
9. Katerbau K.H. The contrast of dynamical images of small lattice defects in the electron microscope// Phys. stat. sol. (a). –1976. –N38. –P.463-475.

# БІОЛОГІЧНІ НАУКИ

УДК 615.276

## ПРОТИЗАПАЛЬНА АКТИВНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ КОМПЛЕКСІВ, ВИЛУЧЕНИХ З ТРАВИ ЧЕБРЕЦЮ

Беленічев І.Ф., Батура Н.Р., Толлок А.Я., Омельянчик Л.О.

Сучасна медицина володіє значною кількістю різноманітних лікарських препаратів, які спроможні впливати на розвиток запального процесу. Проте, не дивлячись на значні успіхи, досягнуті в області фармакології протизапальних засобів, пошук нових високоефективних та малотоксичних препаратів триває. Сполуки, які пропонуються у якості протизапальних засобів, повинні володіти спроможністю впливати на проліферативні процеси, а також вираженими анальгізуючими властивостями. Вони повинні мати велику широту терапевтичного ефекту, бути нешкідливими при довготривалому застосуванні, не мати або мати мінімально виражені побічні ефекти. Бажано, щоб нові протизапальні засоби мали також жаропонижачий ефект, імуномодулюючі та антиоксидантні властивості. Вони повинні бути дешеві, технологічні у виробництві, синтезуватися або вилучатися із доступної вітчизняної сировини. Найбільш перспективним в цьому плані є пошук таких протизапальних засобів серед рослинної сировини. Так, аналізуючи літературні дані [1], нами була звернена увага на рослини роду *Thymus*, що містять велику кількість біологічно активних речовин, які в перспективі можуть бути використані як антиоксидантні і протизапальні засоби.

Даний етап досліджень передбачав проведення початкового вивчення протизапальних властивостей екстрактів чебрецю з метою виявлення спроможності впливати на модельований гострий запальний процес.

### МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Об'єктом дослідження були експериментальні водо- (ВК) та спирторозчинний (СК) комплекси, вилучені за раніше розробленою нами методикою комплексного використання трави чебрецю [2, 3].

ВК являє собою рідину коричневого кольору з характерним запахом, яка має густину  $\approx 0.99$  г/мл. Водний комплекс, екстрагований з 100 г абсолютно сухої сировини, містить: сухого залишку  $24.210 \pm 0.199$  г, простих фенолів  $0.226 \pm 0.004$  г, поліфенольних сполук, які здатні окислюватися перманганатом калію,  $6.531 \pm 0.098$  г.

СК - рідина зелено- коричневого кольору з запахом етанолу, яка має густину  $\approx 0.85$  г/мл. Спиртовий комплекс, вилучений з 100 г абсолютно сухої сировини, містить: сухого залишку  $5.654 \pm 0.093$  г, простих фенолів  $0.216 \pm 0.004$  г, поліфенольних сполук, які здатні окислюватися перманганатом калію,  $1.480 \pm 0.046$  г.

Дослідження проводилися на білих щурах лінії Вістар обох статей, масою  $220 \pm 20$  г., отриманих з розплідника Одеського медичного університету. Щурі були стандартизовані за фактором годування і перед дослідженнями були витримані на двотижневому карантині.

Для розрахунку разової дози досліджуваних препаратів було проведено визначення їх гострої токсичності за стандартною методикою В.М. Прозоровського [4]. Екстракти, що вивчалися, вводилися перорально згідно з припущеним шляхом їх введення в клініці. В експерименті, при дослідженні окремих доз кожної витяжки, використовувалось по 6 тварин.

Досліди з вивчення протизапальної активності проводилися на моделях гострого запального набряку, який був викликаний субплантарним введенням в задню лапку щура 0.1 мл 1% розчину карагеніну та 0.1 мл 2.5% розчину формальдегіду. Названі моделі рекомендовані Фармакологічним комітетом України для вивчення нестероїдних протизапальних фармакологічних речовин. Вимірювання об'єму лапки проводилися за допомогою онкометра до початку досліду і через 1, 3, 5 годин (при формаліновій моделі запалення) і через 6, 12, 24 та 48 годин (при карагеніновій моделі запалення). Досліджувані екстракти чебрецю вводилися перорально за 30 хвилин до введення флогогенного агента в дозах  $1/50$  від  $LD_{50}$ , що в перерахунку на сухий залишок ВК складає 0.169 мг, СК - 0.004 мг. СК безпосередньо перед введенням розводили дистильованою водою. За фармакологічний еталон був вибраний нестероїдний протизапальний препарат бутадіон, який вводився перорально в дозі 10 мг/кг [5, 6].

З метою більш детального вивчення протизапальних властивостей ВК та СК у крові експериментальних тварин визначалися хімічні маркери запалення - гістамін і серотонін. При формаліновій моделі запалення забір крові проводився через 1 годину після розвитку патології, а при карагеніновій моделі - через 6 годин. Для цього 0.2 мл плазми забраної крові вливали в 0.6 М хлорну кислоту з подальшою нейтралізацією 5 М карбонатом калію. Отриманий безбілковий екстракт розділяли за допомогою тонкошарової хроматографії на пластинках "Silufol" у системі диметилформамід : оцтова кислота : метанол : вода ( 2:2:2:1). Після розділення гістамін і серотонін елюювали 2Н соляною кислотою при 4°C на протязі 12 годин. Кількісне визначення гістаміну і серотоніну проводили спектрофотометричним методом по забарвленню 1,4-дигідроксибенzenом при довжині хвилі 532 нм [10].

Усього при вивченні протизапальної активності використано 56 щурів.

## РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Гостра токсичність, визначена за вище згаданою методикою, для ВК складає 4100 (3300 ÷ 5000) мг/кг, для СК трави чебрецю дорівнює 890 (780 ÷ 1020) мг/кг. В останньому випадку тварини гинули при явищах інтоксикації, яка характеризувалася пригніченням центральної нервової системи, зокрема бульбарних центрів, що визначало зупинення дихання.

Результати дослідження протизапальної активності експериментальних комплексів представлені в таблицях 1-4. Дані, наведені в таблицях, оброблені загальноприйнятими методами статистики з розрахунком середнього арифметичного та його стандартної похибки. Достовірність похибки результатів дослідів менше 0.05.

Таблиця 1- Вивчення впливу водо- та спирторозчинного комплексів на набряк лапок щурів на формаліновій моделі запалення

Препарат	Набряк лапки (мл) через:		
	1 год.	3 год.	5 год.
СК	0.33 ± 0.07	0.30 ± 0.07	0.25 ± 0.06
ВК	0.35 ± 0.08	0.31 ± 0.06	0.27 ± 0.08
Бутадіон	0.38 ± 0.08	0.35 ± 0.03	0.32 ± 0.07
Контроль	0.42 ± 0.06	0.49 ± 0.07	0.52 ± 0.06

Таблиця 2 - Вплив водо- та спирторозчинного комплексів на рівень гістаміну та серотоніну (нМоль/г білку крові), у відтікаючій крові в умовах формалінового запалення

Препарат	Гістамін	Серотонін
СК	10.4 ± 0.07	12.5 ± 0.10
ВК	12.0 ± 0.09	13.2 ± 0.12
Бутадіон	13.8 ± 0.14	15.1 ± 0.11
Контроль	14.2 ± 0.10	16.8 ± 0.12
Інтакт	9.8 ± 0.09	11.4 ± 0.07

Таблиця 3 - Вивчення впливу водо- та спирторозчинного комплексів на набряк лапок щурів на карагеніновій моделі запалення

Препарат	Набряк лапки (мл) через:			
	6 год.	12 год.	24 год.	48 год.
СК	0.28 ± 0.04	0.20 ± 0.05	0.15 ± 0.03	0.09 ± 0.01
ВК	0.31 ± 0.05	0.26 ± 0.05	0.19 ± 0.02	0.12 ± 0.01
Бутадіон	0.35 ± 0.06	0.28 ± 0.07	0.23 ± 0.02	0.13 ± 0.02
Контроль	0.42 ± 0.06	0.46 ± 0.07	0.45 ± 0.05	0.31 ± 0.04

Таблиця 4 - Вплив водо- та спирторозчинного комплексів на рівень гістаміну та серотоніну (нМоль/г білку крові), у відтікаючій крові в умовах карагенінового запалення

Препарат	Гістамін	Серотонін
СК	11.0 ± 0.07	13.7 ± 0.07
ВК	11.4 ± 0.03	14.5 ± 0.06
Бутадіон	12.0 ± 0.06	16.4 ± 0.10
Контроль	13.6 ± 0.08	17.5 ± 0.11
Інтакт	10.4 ± 0.07	12.6 ± 0.08

Як видно з представлених таблиць, які відображають динаміку розвитку величини запального набряку, досліджувані екстракти чебрецю володіють явно вираженими антиексудативними властивостями. Слід відмітити, що на обох моделях запалення обидва екстракти чебрецю по силі дії перевищують ефект відомого протизапального засобу - бутадіону. Так, на формаліновій моделі комплекси, що вивчаються, виявляють антиексудативну активність вже з першої години спостереження, котра найбільш посилюється на п'ятій годині від початку спостереження - у момент максимального розвитку набряку. Якщо дослідити дію експериментальних комплексів по відношенню до контролю в загальній динаміці розвитку формалінового набряку, то СК перевищує по активності бутадіон на 11.5%, а ВК - на 8%.

Таким чином, найбільш перспективним у цьому плані можна назвати СК. набряк лапки через 5 годин після введення СК під час експериментів на моделі формалінового запалення складав 48% по відношенню до контролю, у той час, як під дією бутадіона приблизно дорівнював 61.5%.

При вивченні антиексудативних властивостей екстрактів чебрецю на карагеніновій моделі гострого запального набряку було встановлено, що зниження ступеню набряку спостерігалось з перших строків експерименту (1- 6 годин). До дванадцятої години спостереження - часу максимального розвитку набряку - антиексудативна активність досліджуваних комплексів була найвищою. Через дві доби після введення флогогенного агента набряк практично зникав. Даний ефект був найбільш виражений під дією СК чебрецю. Його протизапальна активність виявилася на 16.5% вище, по відношенню до контролю в загальній динаміці розвитку запального набряку, тоді як ВК по силі активності перевищував бутадіон на 6.8%.

Таким чином, експериментальні водо- і спирторозчинні комплекси, вилучені з трави чебрецю, володіють вираженою антиексудативною активністю, перевіреною на двох моделях гострого запального набряку, яка співпадає по строках спостереження з розвитком експериментального набряку, але є протилежною що до напрямку.

Під час досліджень рівня вмісту в крові експериментальних тварин біогенних амінів - гістаміну та серотоніну, які є маркерами запального ушкодження тканин, був виявлений їх підвищений вміст у перші строки спостереження на обох моделях патології. Призначення екстрактів чебрецю знижувало виділення у кров'яне русло як серотоніну, так і гістаміну, при цьому ступінь зниження був достовірно більший, чим під час застосування бутадіона. Встановлений факт може підтвердити, що механізм антиексудативної дії комплексів, що вивчалися, подібний до дії нестероїдних протизапальних засобів. Однак більш висока, ніж у фармакологічного аналогу, антиексудативна активність комплексів і більш виражений ступінь зниження рівня гістаміну і серотоніну в крові експериментальних тварин свідчать, що в механізмі фармакологічної дії екстрактів чебрецю можуть бути присутні і мембраностимулюючий і антиоксидантний ефекти.

## ВИСНОВКИ

1. Спирто- і водорозчинні комплекси чебрецю відносяться до класу малотоксичних і практично нетоксичних сполук.
2. Визначена протизапальна активність експериментальних комплексів чебрецю: дія фракції водорозчинних речовин перевищує ефективність фармакологічного стандарту препаратів нестероїдної групи - бутадіона - на 8% і 6.8%, спиртового комплексу на - 11.5% і 16.5% відповідно на формаліновій і карагеніновій моделях запального набряку, у розрахунку, зробленому відносно контролю в загальній динаміці розвитку запалення.
3. Дослідження доводять перспективність отримання препаратів протизапальної дії на основі експериментальних водо- і спирторозчинного комплексів, вилучених з трави чебрецю.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Батура Н.Р. До питання про комплексне використання трави чебрецю // Вісник Запорізького держ. ун-ту. - 1998. - № 1. - С. 159-161.
2. Батура Н.Р., Толлок А.Я., Омелянчик Л.О. Оптимізація умов вилучення комплексів діючих речовин з трави чабрецю // Фармацевтичн. журн. - 1997. - № 1. - С. 103-106.
3. Толлок А.Я., Батура Н.Р. Порівняльний аналіз фенольних сполук в екстрактах чебрецю // Вісник Запорізького держ. ун-ту. - 1998. - № 1. - С. 161-171.
4. Прозоровский В.М. Определение токсичности и кумулятивных свойств биологически активных веществ. - М.: Медицина, 1971. - 268 с.
5. Glenn E.M. Simple laboratory procedures for the evolution of topically-active anti-inflammatory drugs. - Agents a. actions. - 1978, vol. 8. - P. 497-503.
6. Методы скрининга и фармакологического изучения противовоспалительных, анальгезирующих и жаропонижающих средств / Метод. рекомендации. Авт. Ф.П. Тринус, В.М. Клебанов, Н.А. Мохарт. - К: Здоров'я, 1974. - 27 с.

УДК 669.5:61

## ВМІСТ ЦИНКУ В ГРАНУЛОЦИТАХ КРОВІ ПРИ АЛКОГОЛІЗАЦІЇ ТА ДІЇ ПРОМИСЛОВИХ ФАКТОРІВ

Бовт В.Д., Єщенко В.А, Малько М.М., Григорова Н.В., Скорняков В.І.

Цинк у клітинах виконує важливі функції. Він необхідний для активності багатьох ферментів, стабілізує клітинні мембрани [1-9]. Дія шкідливих факторів на організм людини та тварин позначається насамперед на активності ферментів і проникливості клітинних мембран. Можна припустити, що порушення метаболізму цинку в клітинах лежить в основі клітинно-молекулярних механізмів патологічних процесів, які викликаються зазначеними факторами. Серед останніх особливої уваги заслуговують речовини, що зв'язують цинк (сірководень та ін.), а також токсичні метали (ртуть, мідь), які витискують цинк із його комплексів з біолігандами. У літературі накопичились дані про зниження концентрації цинку в клітинах крові при алкоголізації організму [10]. У зв'язку з цим важливо було вивчити характер порушень клітинного метаболізму даного металу. Підвищений інтерес до досліджень цинку в клітинах при дії алкоголю пояснюється також тим, що цей метал є необхідною складовою алкогольдегідрогенази, яка каталізує процеси утворення етилового спирту в організмі.

У робітників гарячих цехів металургійних об'єктів багато цинку втрачається з потом. Важливо було з'ясувати, як при цьому змінюється клітинний метаболізм цього металу.

Для з'ясування ступеня вираженості порушень обміну цинку в клітинах у випадку комбінованої дії алкоголю, сірководню, токсичних металів і високої температури нами були виділені групи осіб, які регулярно споживали алкоголь, та особи, які утримувалися від його споживання.

Найбільш вигідним об'єктом досліджень у людей служили клітини крові. Для дослідження впливу шкідливих речовин у промисловості на метаболізм цинку у клітинах внутрішніх органів були використані миші, які утримувалися у тих же самих цехах, в яких працювали особи, що обстежувалися.

Дослідження проводились на 132 особах та 75 мишах. Контролем служили особи та тварини, які не зазнавали дії алкоголю та шкідливих факторів у промисловості. Для вивчення впливу на організм цих факторів обстежувались особи, які регулярно споживали алкоголь і зазнавали впливу сірководню, токсичних металів і високої температури на промислових об'єктах. При цьому вивчався вплив факторів окремо та в комбінації з алкоголізацією організму.

Вплив алкоголю на метаболізм цинку в клітинах крові та внутрішніх органів досліджувався у мишей в умовах лабораторії поза виробництвом. Дія сірководню та токсичних речовин вивчалась на живих тест-об'єктах тобто мишах, які знаходились у відповідних цехах на промислових об'єктах. Алкоголізували тварин введенням у шлунок через зонд по 2 мл/кг етилового спирту. Вливання алкоголю повторювали дев'ятикратно з інтервалами в три дні.



У людей кров брали з пальця, у мишей - з хвоста. Мазки крові фіксували в парах формаліну з подальшим фарбуванням протягом 3 годин 0,2%-ним водно-аміаковим розчином дитизону, або одночасно фарбували і фіксували протягом 1 хвилини 0,01%-ним ацетоновим розчином 8-(п-толуолсульфоніламіно)-хіноліну (8-ТСХ). Робочий розчин дитизону отримували шляхом п'ятикратного розведення дистильованою водою його основного розчину.

Для виготовлення останнього на водяній бані перемішували протягом 10 хвилин при температурі 70°C суміш, яка складалась з 30 мл дистильованої води, 0,6 мл 25%-ного розчину гідроокису амонію, 400 мг дитизону. При фільтруванні на фільтрі залишалось близько чверті наважки дитизону, тобто отримували 1%-ний водно-аміаковий розчин реагенту.

Тварин забивали, використовуючи декапітацію, добували тонкий кишечник, підшлункову та передміхурову залози. Шматочки органів фіксували в холодному ацетоні (+4°C) протягом 12 годин, потім через ксилоли доводили до парафіну. Парафінові зрізи товщиною 5-10 мкм фарбували протягом 3 год 0,2%-ним (робочим) розчином дитизону, або флуорохромували протягом 1 хвилини 0,01%-ним ацетоновим розчином 8-ТСХ.

На препаратах, забарвлених дитизоном, у цитоплазмі клітин виявлялись гранули, які при дослідженні їх у світлому полі мали пурпурно-червоний колір, а у темному полі світились рожево-червоним кольором.

При фарбуванні за допомогою 8-ТСХ в цих гранулах виявлялась жовто-зелена люмінесценція. Для збудження оптичної застосовували світлофільтр ФС-1, а в якості захисного (окулярного) використовували світлофільтр із скла ЖС-18.

В зернистих лейкоцитах та клітинах тканин вдавалось підрахувати кількість гранул. Тому для визначення вмісту цинку використовувались напівкількісний і кількісний методи. Перший оснований на бальній системі визначення інтенсивності реакції. За один бал приймали слабопозитивну, два бали - помірну, три бали - виражену за інтенсивністю реакцію. Кількісний метод заснований на підрахунку кількості гранул з рахунку на одну клітину.

У мазках крові, забарвлених дитизоном, інтенсивність реакцій у контрольних осіб складала  $1,3 \pm 0,08$ , алкоголізованих -  $0,9 \pm 0,08$  ( $p < 0,001$ ), у осіб, що зазнали впливу сірководню -  $1,0 \pm 0,07$  ( $p < 0,05$ ), токсичних металів -  $0,9 \pm 0,09$  ( $p < 0,05$ ), високої температури -  $1,0 \pm 0,08$  ( $p < 0,05$ ).

На препаратах крові, флуорохромованих 8-ТСХ, у контролі інтенсивність реакції складала  $1,4 \pm 0,10$ . При дії алкоголю, сірководню, токсичних металів, високої температури показники дорівнювали відповідно  $1,0 \pm 0,08$  ( $p < 0,05$ ),  $1,1 \pm 0,08$  ( $p < 0,05$ ),  $1,1 \pm 0,07$  ( $p < 0,05$ ),  $1,0 \pm 0,09$  ( $p < 0,05$ ).

Приведені дані вказують на суттєву відмінність від контролю у всіх групах обстежених осіб. Інакше кажучи, у всіх випадках розвивався дефіцит цинку в клітинах.

При підрахунку кількості дитизонових гранул в зернистих лейкоцитах отримані цифри: у контрольних осіб -  $141 \pm 5,2$ , алкоголізованих осіб -  $116 \pm 4,8$  ( $p < 0,001$ ), у осіб, які зазнали впливу сірководню -  $122 \pm 6,1$  ( $p < 0,01$ ), токсичних металів -  $119 \pm 4,4$  ( $p < 0,01$ ), високої температури -  $112 \pm 6,8$  ( $p < 0,01$ ). Такі ж результати отримані при підрахунку числа гранул 8-ТСХ: контроль -  $143 \pm 5,1$ , дія алкоголю -  $120 \pm 4,8$  ( $p < 0,01$ ), сірководню -  $126 \pm 5,5$  ( $p < 0,05$ ), токсичність металів -  $119 \pm 4,2$  ( $p < 0,01$ ), високої температури -  $115 \pm 5,4$  ( $p < 0,01$ ). Алкоголь потенціював дію шкідливих факторів у промисловості у відношенні розвитку дефіциту цинку в гранулоцитах крові.

Як показали дані, які були отримані на тваринах (тест-об'єктах), зміни цинку в гранулоцитах крові відповідають за характером і ступенем вираженості змін клітинного метаболізму цього металу у внутрішніх органах. У алкоголізованих мишей вміст цинку у всіх досліджених клітинах був зниженим. Такі ж самі зміни виявлялись у гранулоцитах крові і клітинах внутрішніх органів у мишей (тест-об'єктів), які зазнавали впливу сірководню та токсичних металів.

Встановлена нами відповідність характеру та ступеня вираженості змін метаболізму цинку у гранулоцитах крові та клітинах внутрішніх органів дозволяє нам рекомендувати цитохімічні реакції дитизону та 8-ТСХ в зернистих лейкоцитах в якості діагностичних тестів при цинковій недостатності, що викликається різноманітними патогенними факторами.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ещенко В. А. Гистохимическое исследование цинка // Цитология. - 1978. - № 8. - С. 927-933.
2. Малько М. М. Метаболізм цинку в клітинах при фізичних навантаженнях, іммобілізації та алкоголізації // Вісник ЗДУ. - 1998. - № 1. - С. 123-125.
3. Bettger W. J., O'Dell L. L. A critical physiological role of zinc in the structure and function of biomembranes // Life Sci. - 1981. - V. 28. - P. 1405-1438.

4. Chausmer A. B. Zinc, insulin and diabetes //J. Am. Coll. Nutr. - 1998. - V. 17. - P. 109-115.
5. Huang T. M., Hung H. C., Chang T. C. Solvent kinetic isotope effects of human placental alkaline phosphatase in reverse micelles //Biochem. J. - 1998. - V. 330. - P. 267-275.
6. Nogales E., Wolf S. G., Downing K. H. Structure of the alpha beta tubulin dimer by electron crystallography //Nature. - 1998. - V. 391. - P. 199-203.
7. Valee B. L. Zinc: biochemistry, physiology, toxicology and clinical pathology //Biofactors. - 1988. - V. 1. - P. 31-36.
8. Vignolini F., Nobili F., Mengheri E. Involvement of interleukin-1beta in zinc deficiency-induced intestinal damage and beneficial effect of cyclosporine A // Life Sci. - 1998. - V. 62. - P. 131-141.

УДК: 598.2 (477.64): 501. 5

## **ОСОБЕННОСТИ АВИФАУНЫ г.ЗАПОРОЖЬЯ В ЗИМНИЙ ПЕРИОД 1997 г.**

Василенко Н.В.

Последние десятилетия характеризуются бурным ростом урбосистем. В этих условиях изучение авифауны и населения птиц городов имеют важное теоретическое и практическое значение. Быстрые и существенные изменения среды обитания требуют дальнейшего продолжения таких исследований, так как высокая экологическая пластичность некоторых видов птиц обуславливает возможность использования их как модельных объектов экологической адаптации в условиях антропогенного воздействия на природу. Настоящая работа является продолжением программы (Гудина, Василенко, 1996) по изучению орнитофауны г. Запорожье.

Город Запорожье - областной центр, один из крупнейших экономических, научных и культурных центров Украины. Расположен по обоим берегам Днепра. Состоит из 7-ми городских районов. На 1990 г. общая площадь города составляла - 31253 га, из которых под застройкой находилось - 16548 га, открытые почвы, зелёные массивы и насаждения занимали - 13606 га (Ковтун, 1990). С ростом города площадь, занятая под застройкой, увеличивается, а территория зеленых насаждений сокращается. Высокая степень концентрации промышленных предприятий привела к ухудшению экологической обстановки в городе (Кулинич, 1996). Общий облик городской застройки неоднороден. Наряду с участками современного городского типа есть улицы, где новостройки чередуются со старыми одноэтажными домами, сохранились улицы, по своему характеру приближающиеся к сельским, а по окраинам выросли новые микрорайоны. В административную черту города входят также о.Хортица и остатки плавневого леса - Запорожская лесная дача. Полоса лиственной посадки тянется вдоль берегов Днепра, через весь город соединяясь с частью городских парков и плавнями.

Работа проводилась с 21.12.1997 г. по 16.02.1998 г. Учеты велись по методике комплексного маршрутного учета с фиксированной полосой в закрытых биотопах - 50 м и в открытых - 100 м. В жилых кварталах учеты проводились по улицам, при этом проглядывались и дворы. Учеты проводились в оптимальное время (Луговой, Майхрук, 1974) с 9 до 15 часов. Общая протяженность маршрута составила 60 км. При обработке полученных результатов использовались система баллов и индексы доминирования по А.П.Кузякину (1962). Редкими считались виды, обилие которых составляет от 0,1 до 0,9 особей на 1 км (+); обычными - от 1 до 9 особей (++); многочисленными - от 10 до 99 (+++) и весьма многочисленными - от 100 и более на 1 км учета (++++). Показатели биомассы рассчитывались на основе собственных и литературных (Винокуров и др., 1976) данных. Типы фауны птиц приводятся по Б.К.Штегману (1938). Систематическое положение зарегистрированных видов представлено в соответствии с "Конспектом орнитологической фауны СССР" (Степанян, 1990).

Исследования проводились в разных городских местообитаниях (биотопах), которые отражают разную степень антропогенной освоенности: 1.Район индивидуальной застройки. 2.Район преимущественно 5-ти этажной застройки. 3.Район преимущественно 9-ти этажной застройки. 4.Район новостройки. 5.Район парков. 6.Район лесопарка.

Район индивидуальной застройки ранее составлял основу города, часть находилась на окраине города или являлась пригородными селами, в разное время вошедшими в черту города. Приусадебные участки малы. Непосредственно строениями (одноэтажные дома, сараи, гаражи) занята незначительная площадь. Остальная территория является дворами, огородами или засажена садами и кустарниками. Улицы в

*Біологічні науки*

большинстве не асфальтированы. Уличные посадки представлены тополями, кленами или фруктовыми деревьями, а из кустарников - сиренью. Район граничит с новым многоэтажным кварталом.

Результаты учетов птиц в этом районе приведены в таблице 1.

Таблица 1.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Учас-тие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	Passer domesticus	1946	194,6	++++	84,31	5468.3
2.	Passer montanus	203	20,3	+++	8,79	485.2
3.	Corvus frugilegus	59	5,9	++	2,56	1846.7
4.	Parus major	55	5,5	++	2,38	95.1
5.	Streptopelia decaocto	21	2,1	++	0,90	410.5
6.	Spinus spinus	6	0,6	+	0,26	7.9
7.	Dendrocopos major	5	0,5	+	0,21	44.8
8.	Pica pica	5	0,5	+	0,21	115.0
9.	Dendrocopos syriacus	2	0,2	+	0,08	15.8
10.	Corvus cornix	2	0,2	+	0,08	94.0
11.	Parus caeruleus	2	0,2	+	0,08	2.2
12.	Accipiter nisus	1	0,1	+	0,04	20.3
13.	Garrulus glandarius	1	0,1	+	0,04	15.6
Всего:		2308	230,8			8621.1

Район преимущественно 5-ти этажной застройки занимает “старый центр” города. Его здания разнообразны по архитектуре. Среди них есть старые одноэтажные дома, часто сильно обветшалые, или одиночные новые 9-ти этажные. Природная растительность практически не сохранилась, но дворы хорошо озеленены. Имеются скверы. Старые деревья растут и вдоль улиц. Преобладают клены, тополя, робиния. На отдельных участках встречаются густые заросли кустарников. Здания занимают более 50 % территории. Большая часть площади заасфальтирована.

Результаты учета птиц в этом районе приведены в таблице 2.

Таблица 2.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Участие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	Passer domesticus	907	90,7	+++	61,07	2548,7
2.	Corvus frugilegus	156	15,6	+++	10,50	4882,8
3.	Parus major	137	13,7	+++	9,22	237,0
4.	Streptopelia decaocto	109	10,9	+++	7,34	2130,9
5.	Columba livia	107	10,7	+++	7,20	2889,0
6.	Passer montanus	20	2,0	++	1,34	47,8
7.	Spinus spinus	18	1,8	++	1,21	23,9
8.	Corvus cornix	11	1,1	++	0,74	517,0
9.	Parus caeruleus	10	1,0	++	0,67	10,9
10.	Dendrocopos major	3	0,3	+	0,20	26,9
11.	Pica pica	3	0,3	+	0,20	69,0
12.	Accipiter nisus	2	0,2	+	0,13	40,6
13.	Dendrocopos syriacus	2	0,2	+	0,13	15,8
Всего:		1485	148.5			13440.3

Район 9-ти этажной застройки расположен на снесенных кварталах старой индивидуальной застройки, на месте пустырей. Преобладают девятиэтажки, построенные в 70-х годах. Основная часть зданий панельные, реже кирпичные. Кварталы имеют обширные внутренние дворы. Характерны широкие газоны. Имеются стройплощадки. Территория хорошо озеленена, но старых деревьев мало. Преобладают тополя, клены. Встречаются вязы, березы, каштаны, липа, рябина. Здания занимают примерно половину территории, большая часть которой между ними заасфальтирована. Результаты учетов птиц в этом районе приведены в таблице 3.

Таблица 3.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Участие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	<i>Passer domesticus</i>	1183	118,3	++++	50,38	3324,2
2.	<i>Streptopelia decaocto</i>	375	37,5	+++	15,97	7331,2
3.	<i>Columba livia</i>	299	29,9	+++	12,73	8073,0
4.	<i>Corvus frugilegus</i>	231	23,1	+++	9,83	7230,3
5.	<i>Passer montanus</i>	151	15,1	+++	6,43	360,9
6.	<i>Parus major</i>	97	9,7	++	4,13	167,8
7.	<i>Corvus cornix</i>	8	0,8	+	0,34	376,0
8.	<i>Pica pica</i>	2	0,2	+	0,08	46,0
9.	<i>Accipiter nisus</i>	1	0,1	+	0,04	20,3
10.	<i>Dendrocopos syriacus</i>	1	0,1	+	0,04	7,9
Всего:		2348	234,8			26937,6

Район новостройки представлен жилыми массивами последних десятилетий. Основная часть зданий 9-16 этажные. Расположены на окраине города, на месте сельхоз.полей, пустырей, осушенной части плавней. Территория слабо озелененная, не благоустроенная, повсюду встречаются остатки строительного мусора. Асфальтом покрыта лишь проезжая часть некоторых улиц и тротуары у жилых домов. Жилые кварталы граничат с естественными лесными массивами, агроценозами, полезащитными лесополосами. Результаты учетов птиц в этом районе представлены в таблице 4.

Таблица 4.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Участие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	<i>Passer domesticus</i>	972	97,2	+++	67,78	2731,3
2.	<i>Columba livia</i>	304	30,4	+++	21,19	8208,0
3.	<i>Corvus frugilegus</i>	115	11,5	+++	8,01	3599,5
4.	<i>Passer montanus</i>	14	1,4	++	0,97	33,5
5.	<i>Galerida cristata</i>	8	0,8	+	0,55	33,7
6.	<i>Parus major</i>	8	0,8	+	0,55	13,8
7.	<i>Corvus cornix</i>	7	0,7	+	0,48	329,0
8.	<i>Pica pica</i>	4	0,4	+	0,27	92,0
9.	<i>Accipiter nisus</i>	1	0,1	+	0,06	20,3
10.	<i>Falco tinnunculus</i>	1	0,1	+	0,06	21,6
Всего:		1434	143,4			15082,7

В район парков нами включены большие и малые парки, скверы, ботанический сад, площади участков, занятых газонами. Наиболее крупными парками являются: парк “Дубовая роща”, “Победы”, “Трудовой славы”, им.Пушкина, им.Гагарина. Основу их растительности составляют лиственные породы

искусственной посадки, а также частично сохранившиеся остатки естественного лиственного леса. Доля хвойных деревьев незначительна. Кустарниковый ярус развит слабо. Характерна высокая рекреационная нагрузка и интенсивная деятельность парковых служб.

Результаты учетов птиц в этом районе представлены в таблице 5.

Таблица 5.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Участие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	<i>Corvus frugilegus</i>	379	37,9	+++	41,92	11862,7
2.	<i>Parus major</i>	171	17,1	+++	18,91	295,8
3.	<i>Passer domesticus</i>	153	15,3	+++	16,92	429,9
4.	<i>Passer montanus</i>	70	7,0	++	7,74	167,3
5.	<i>Columba livia</i>	20	2,0	++	2,21	540,0
6.	<i>Corvus cornix</i>	19	1,9	++	2,10	893,0
7.	<i>Pica pica</i>	18	1,8	++	1,99	414,0
8.	<i>Parus caeruleus</i>	17	1,7	++	1,88	18,5
9.	<i>Fringilla coelebs</i>	17	1,7	++	1,88	37,0
10.	<i>Streptopelia decaocto</i>	12	1,2	++	1,32	234,6
11.	<i>Dendrocopos major</i>	8	0,8	+	0,88	71,7
12.	<i>Garrulus glandarius</i>	7	0,7	+	0,77	109,2
13.	<i>Dendrocopos syriacus</i>	5	0,5	+	0,55	39,5
14.	<i>Accipiter nisus</i>	2	0,2	+	0,22	40,6
15.	<i>Dendrocopos minor</i>	2	0,2	+	0,22	4,6
16.	<i>Erithacus rubecula</i>	2	0,2	+	0,22	3,2
17.	<i>Picus canus</i>	1	0,1	+	0,11	9,8
18.	<i>Regulus regulus</i>	1	0,1	+	0,11	0,5
Всего:		904	90,4			15171,9

Район лесопарка (так называемая Запорожская лесная дача) расположен в долине Днепра. Это сохранившийся небольшой участок пойменного леса. Большую часть не заболоченной территории которого занимают насаждения тополя черного, дуба черешчатого, вяза, шелковицы черной, ивы ломкой. В подросте преобладает поросль клена ясенелистого, вяза гладкого. Подлесок развит слабо и представлен боярышником, лохом узколистным, бересклетом европейским. Имеется амфора кустарниковая. Травяной покров развит хорошо. Часть территории входит в административную черту города, где на намывных песках строится м-н «Южный», непосредственно примыкающий к лесу, располагаются базы отдыха и профилактории. Территория испытывает значительную рекреационную нагрузку.

Результаты учетов птиц в этом районе представлены в таблице 6.

Таким образом за период исследований учтено 28 видов птиц, принадлежащих к 6 отрядам и 15 семействам. Из них зимняк, крапивник, желтоголовый королек, чиж встречаются только в зимнее время. В зоогеографическом отношении основу зимней орнитофауны города составляют транспалеарктический комплекс - 16 видов (57,1 %), вдвое меньше трансголарктический - 6 (21,4 %), западно-палеарктический - 5 видов (17,8 %). Доля древне-средиземноморского комплекса невелика - 1 (3,5 %). В экологическом плане преобладает лесная группа - 19 видов (67,9 %), синантропная - 4 (14,3%), лесостепная - 2 (7,1 %). Доля степных (1 вид 3,5 %), политопных (1 вид 3,5 %) и кустарниковых (1 вид 3,5 %) птиц незначительна.

Таблица 6.

№ п/п	Виды	Всего учтено птиц	В ср. на 10 га	Оценка в баллах	Участие в %	Биомасса (г/10 га)
1.	<i>Fringilla coelebs</i>	130	13,0	+++	27,83	283,4
2.	<i>Parus major</i>	52	5,2	++	17,55	141,8
3.	<i>Corvus frugilegus</i>	46	4,6	++	9,85	1439,8
4.	<i>Regulus regulus</i>	40	4,0	++	8,56	23,2
5.	<i>Passer montanus</i>	30	3,0	++	6,42	71,7
6.	<i>Parus caeruleus</i>	28	2,8	++	5,99	30,5
7.	<i>Corvus cornix</i>	27	2,7	++	5,78	1269,0
8.	<i>Pica pica</i>	16	1,6	++	3,42	368,0
9.	<i>Dendrocopos major</i>	8	0,8	+	1,71	71,7
10.	<i>Garrulus glandarius</i>	8	0,8	+	1,71	124,8
11.	<i>Turdus merula</i>	8	0,8	+	1,71	72,0
12.	<i>Buteo lagopus</i>	6	0,6	+	1,28	689,8
13.	<i>Troglodytes troglodytes</i>	6	0,6	+	1,28	5,4
14.	<i>Certhia familiaris</i>	6	0,6	+	1,28	5,3
15.	<i>Accipiter nisus</i>	4	0,4	+	0,85	81,3
16.	<i>Phasianus colchicus</i>	4	0,4	+	0,85	496,0
17.	<i>Asio otus</i>	4	0,4	+	0,85	110,4
18.	<i>Dendrocopos minor</i>	4	0,4	+	0,85	9,2
19.	<i>Corvus corax</i>	4	0,4	+	0,85	476,0
20.	<i>Erithacus rubecula</i>	4	0,4	+	0,85	8,7
21.	<i>Picus canus</i>	2	0,2	+	0,42	19,6
Всего:		467	46,7			5797,6

Зима 1997-1998 гг. характеризуется почти полным отсутствием снежного покрова и незначительными отрицательными температурами. В более снежные и морозные зимы в городе появляются огромные стаи рябинника с незначительным количеством свиристелей, например 24.01.96. Нерегулярно залетает тетеревиный. В январе 1985 г. нами наблюдался полевой жаворонок, кормящийся на газоне совместно с полевыми воробьями. Этой же зимой на территории ЗЛД нами наблюдалась московка. В парках города и лесопарке в зимы 1995-1996 гг., и 1996-1997 гг. встречались дубоносы, до 1 апреля держались обыкновенные снегири (Василенко, 1997).

Наибольшее количество видов, отмеченных нынешней зимой, выявлено в районе лесопарка - 21 (75,0 %). Наименьшее - в районе 9-ти этажной застройки и новостройки - 10 (35,7 %). В остальных биотопах: р-н индивидуальной застройки и 5-ти этажек - 13 видов (46,4 %), в р-не парков - 18 (64,2 %).

Таким образом, для р-нов городской застройки характерны небольшие различия в видовом составе. Основу их составляют: домовый и полевой воробьи, сизый голубь, кольчатая горлица, грач, большая синица. Доминирует домовый воробей. Наибольшей численности он достигает в районе индивидуальной застройки, что связано с избытком антропогенных кормов и обилием мест, используемых как укрытие в ночное и дневное время.

Высокая численность грача связана с массовыми кормежками его в городе. Птицы в утренние часы летят в город, а вечером - в прилегающие лесные массивы. Одна из таких ночевок, численностью более 1500 особей, обнаружена нами в районе лесопарка (Моргунова, Корж, Василенко, 1998).

В сравнении с репродуктивным периодом численность полевого воробья и большой синицы выше, а кольчатой горлицы ниже (Гудина, Василенко, 1996).

Сизый голубь особенно многочислен в районах 9-ти этажек и новостройки. Это объясняется использованием этим видом конструктивных особенностей зданий названных кварталов.

Самыми малочисленными оказались: перепелятник, обыкновенная пустельга, сирийский дятел, сойка. Из них обыкновенная пустельга отмечена только в одном районе города. В предыдущие зимы нами этот вид не отмечался, отсутствуют и литературные данные, однако для региона такие встречи известны (Май, Гудина, 1996).

Район парков и лесопарка заметно отличается от жилых кварталов доминантами, количественным составом, большим видовым разнообразием.

Таким образом, при возрастании антропогенных нагрузок происходит нарушение и упрощение природных экосистем. От слабо измененных лесных территорий к урбанизованным сокращается число зимующих видов птиц. Одновременно возрастает плотность птиц в урбанизированных ландшафтах, главным образом за счет немногих синантропных видов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Н.В. Весенний пролет птиц в окрестностях г.Запорожье в 1996 г. // Актуальні питання збереження і відновлення степових екосистем. - Аскания-Нова, 1998. - С. 234-245.
2. Виноградова Н.В., Дольник В.Р., Ефремов В.Д., Паевский В.А. Определение пола и возраста воробьиных фауны СССР: Справочник. - М.: Наука, 1976. - 190с.
3. Гудина А.Н., Василенко Н.В. Влияние разных типов застройки на структуру населения и численность птиц большого индустриального города (на примере г.Запорожье) // Урбанізоване навколишнє середовище: охорона природи та здоров'я людини. - К., 1996. - С.160-165.
4. Ковтун В.В., Степаненко А.В. Города Украины: Экономико-географический справочник. - К.: Высшая школа. - 1990. - С.98-100.
5. Кузякин А.П. Зоогеография СССР. Ученые записки Московского областного педагогического института. Т.109. Биогеография. Вып.1. - М., 1962.
6. Кулинич А.П. Промышленное загрязнение атмосферы в городах и населенных пунктах Украины // Урбанізоване навколишнє середовище: охорона природи та здоров'я людини. - К., 1996. - С.71-74.
7. Луговой А.Е., Майхрук М.И. О проведении учетов птиц в городе // География и экология наземных позвоночных. Вып.2. - Владимир, 1974. - С.53-59.
8. Май А.И., Гудина А.Н. Зимующие птицы лесополос верховьев Каховского водохранилища // Праці Українського орнітологічного товариства. - К., 1996. - С.122-124.
9. Моргунова Т.С., Корж А.П., Василенко Н.В. К сезонной динамике врановых в зеленой зоне г.Запорожья // VIII Всеукраїнська наукова конференція аспірантів та студентів (Охорона навколишнього середовища та раціональне використання природних ресурсів). - Донецьк, 1998. - Т.2. - С.82-83.
10. Степанян Л.С. Конспект орнитологической фауны СССР. - М.: Наука, 1990. - С.1-726.
11. Штегман Б.К. Основы орнитогеографического деления Палеарктики. Фауна СССР. Птицы. - М.-Л. 1(2), 1938. - С. 1-156.

УДК 581.17

## ВИВЧЕННЯ ПРОДИХОВОГО АПАРАТУ ЛИСТЯ ПРЕДСТАВНИКІВ РОДИНИ МАГНОЛІЄВИХ В УМОВАХ ПІВДЕННОГО СХОДУ УКРАЇНИ У ЗВ'ЯЗКУ З ПОСУХОСТІЙКІСТЮ

Григоренко І.В.

Магнолієві є екзотичними, високодекоративними видами деревних рослин. Збагачення такими видами міського ландшафту суттєво підвищило його естетичність та витривалість. Оскільки представники родини магнолієвих в умовах південного сходу України знаходяться в більш засушливому кліматі, ніж їх початкове місце мешкання, заслуговує уваги вивчення їх водного режиму.

Як відзначає В.К.Василевська [1], використання в екології рослин анатомічного методу дослідження складає уяву про ступінь спеціалізації виду, дає змогу робити висновки про його походження, зрозуміти шляхи його адаптації до умов існування, оцінити його пластичність та потенціальні функціональні можливості.

Одним з показників, які дозволяють скласти певне уявлення про ступені витривалості до зневоднювання, є анатомо-морфологічні ознаки листя. Деякі дослідники надають особливого значення морфології замикаючих клітин [2].

Стан продику тісно пов'язаний з водним режимом рослин (оводненістю листя, транспірацією та ін.), вологістю ґрунту та метеорологічними факторами [3], швидкість вітру над поверхнею листя теж відіграє важливу роль у регуляції руху продихів [4].

Метою нашої роботи є вивчення анатомічних показників продихового апарату та динаміки розкриття продихової щілини в залежності від часу доби та вегетаційного періоду видів родини магнолієвих в умовах південного сходу України.

## МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

У вигляді дослідних об'єктів були використані 4 види представників родини магнолієвих: магнолія кобус (*Magnolia kobus* DC.), магнолія Суланжа (*M. soulangeana* Soul.), магнолія оберненояйцевидна (*M. obovata* Thunb.) та тюльпанне дерево (*Liriodendron tulipifera* L.). Досліджувані 16-річні модельні деревні рослини ростуть у Запорізькому ботанічному саду у відкритому ґрунті.

Враховуючи різне водозабезпечення частин крони даних видів, для аналізу бралось листя (3-5-й лист від основи пагона) з верхнього, середнього та нижнього ярусів крони. Стан продихів вивчали за допомогою методу відтисків (метод Г.Х.Молотковського). Повторення досліду багаторазове [3].

Вивчали тип продихового апарату, розміри продихів, продиховий індекс [5], кількість продихів на одиницю листової поверхні. Вимірювання проводились за допомогою лінійного окуляр-мікромметра. Одержані дані оброблялись методами варіаційної статистики [6].

Для зручності порівняння ступеня відкриття продихової щілини в різних видів магнолієвих ввели бальну оцінку. Для цього повне відкриття оцінили в 5 балів. При вивченні відкриття продихової щілини в різні місяці відбір проб проводився у 12 годин.

## РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

У результаті проведених нами досліджень було встановлено, що всі вивчені види мають парацичний тип продихового апарату. Продири зосереджені лише на нижньому епідермісі та відсутні поблизу жилок. Вони знаходяться на рівні інших клітин епідермісу.

Як бачимо з таблиці 1, форма та величина продихів у різних видів магнолієвих неоднакова. Так, у магнолії кобус їх розміри - 13,3511,5 мкм, побічні клітини нерівні, оболонки клітин злегка хвилясті. У магнолії Суланжа продири мають розміри 18,5510,0 мкм, які розташовані одиночно, замикаючі клітини рівні. Продири в магнолії оберненояйцевидної - 15,358,9 мкм, розташовані одиночно. У тюльпанного дерева продири великі - 16,8511,9 мкм, дві побічні клітини однакові за розмірами та формою.

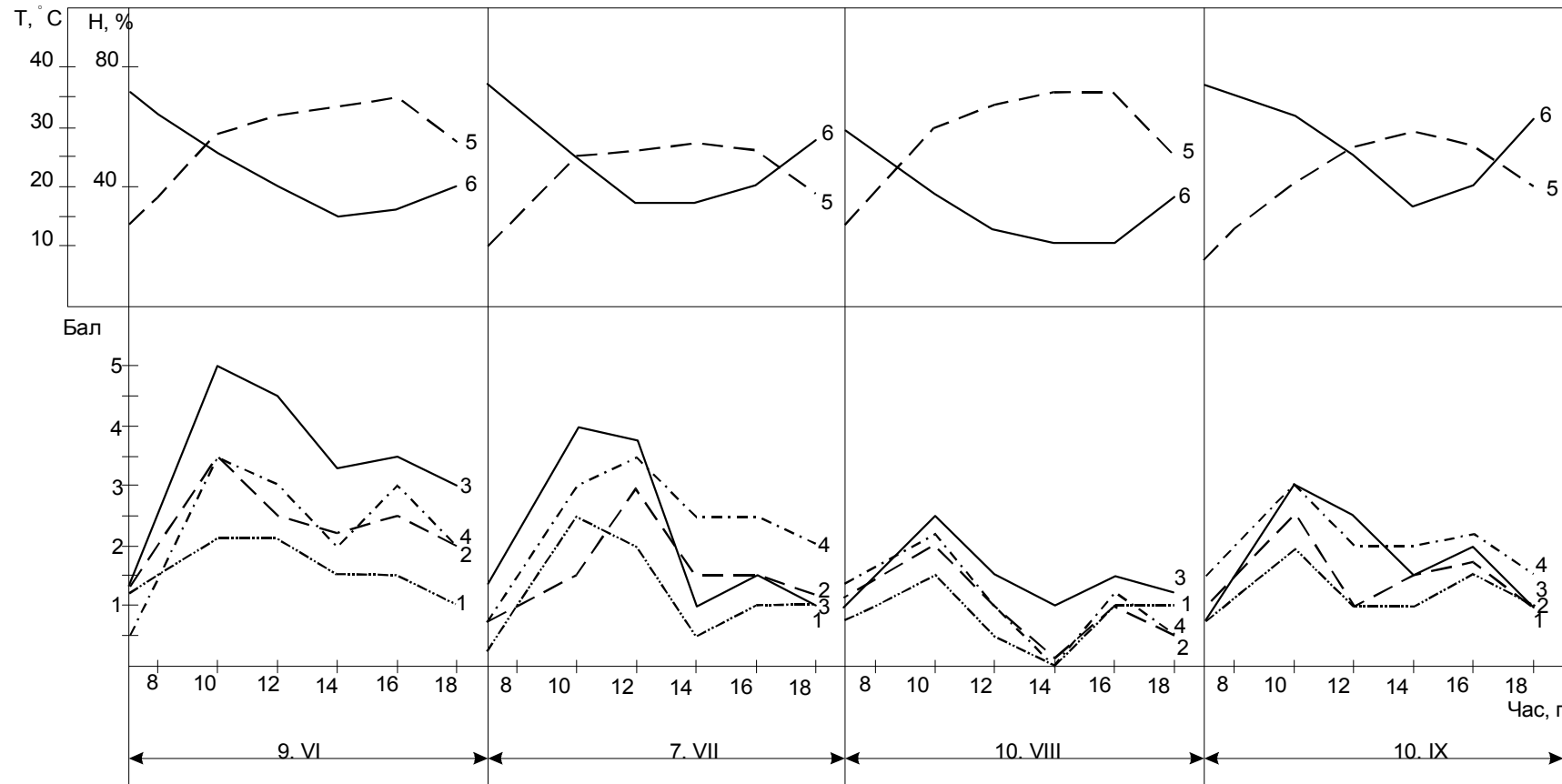
Таблиця 1 - Кількісна характеристика продихового апарату листя представників родини магнолієвих

Вид	Розміри продихів, мкм		Кількість продихів на 1 мм <sup>2</sup>	Продиховий індекс, %
	Довжина	Ширина <sup>1</sup>		
Магнолія кобус	13,3±1,0	11,5±0,4	350,3±1,2	28,0±1,6
Магнолія Суланжа	18,5±0,9	10,0±0,3	242,0±3,2	28,7±2,3
Магнолія оберненояйцевидна	15,3±0,4	8,9±0,2	323,7±2,5	13,0±0,2
Тюльпанне дерево	16,8±0,3	11,9±0,7	127,4±1,4	10,2±0,9

<sup>1</sup>Дана ширина при замкнутій продиховій щілині.

Найбільшу довжину мають продири магнолії Суланжа – 18,5 мкм, а найменшу – магнолії кобус – 13,3 мкм. Найменшу ширину – продири магнолії оберненояйцевидної – 8,9 мкм, сама велика ширина відмічається у тюльпанного дерева – 11,9 мкм.





1- *Magnolia kobus*, 2- *M. soulangeana*, 3- *M. obovata*, 4- *Liriodendron tulipifera*,

5- температура повітря, 6- відносна вологість повітря.

Рис. 1 - Добові ритми продигових рухів представників родини магнолієвих у залежності від метеоумов на протязі періоду вегетації 1998р.

Заслуговує уваги при анатомічних дослідженнях листка показник кількості продохів на  $1\text{мм}^2$  площі. Досліджені нами види по цьому параметру можна розташувати в такій послідовності: магнолія кобус, магнолія оберненояйцевидна, магнолія Суланжа та тюльпанне дерево. Якщо порівняти одержані нами результати з даними, які одержано для досліджуваних нами видів Н.Ф.Мінченко та Т.П.Коршук в умовах міста Києва [7], можна зробити висновок, що в магнолії Суланжа цей показник співпадає, а в магнолії кобус та магнолії оберненояйцевидної він нижчий в умовах південно-східної України.

Враховуючи стандартну шкалу оцінки за Б.Р.Васильєвим [5], продоховий індекс магнолії кобус та магнолії Суланжа можна охарактеризувати як дуже великий, він становить 28,0% та 28,7% відповідно. У магнолії оберненояйцевидної (13,0%) продоховий індекс середній, а в тюльпанного дерева (10,2%) він – малий.

Для виявлення залежності між поведінкою продохів та температурою і відносною вологістю повітря необхідно простежити за їх змінами як на протязі доби, так і на протязі вегетаційного періоду.

На рисунку 1 дані добові ритми динаміки продохової щілини листя на фоні зміни факторів зовнішнього середовища на протязі вегетаційного сезону 1998 р.

На початковий період вегетації ( 9.06.), коли листовий апарат рослин розвинений ще недостатньо, навіть при достатньо напружених атмосферних умовах продохова щілина широко відкрита вдень. Поволі різниця між видами по ширині розкриття продохової щілини з 8 до 19 годин дня зменшується. Криві денного ходу продохових рухів набувають більш повільного характеру.

Денний хід продохових рухів у всіх вивчених видів мав двопіковий характер. Перший пік відзначається в 10-11 годин, а другий – у 16-17 годин. Найбільш яскраво це було виражено у магнолії кобус. У цього виду пониження вологості повітря та підвищення його температури вдень приводило до звуження продохової щілини, навіть до повного її закриття. У магнолії кобус, магнолії Суланжа та тюльпанного дерева зі збільшенням температури повітря та зменшенням його вологості в липні – серпні, період, коли продохова щілина закрита повністю вдень, збільшується. У магнолії оберненояйцевидної повного зімкнення стінок замикаючих клітин не помічалось.

Досліджувані види суттєво відрізняються за поведінкою продохів на протязі дня та на протязі вегетаційного періоду.

М.Д.Кушніренко, Е.А.Гончарова, О.М.Бондарь для більш повної характеристики продохових рухів рекомендують простежити динаміку цього показника за вегетаційний період [3].

Найбільшим ступінь відкриття продохів у всіх досліджуваних видів був на початку червня, потім, з приходом посухи, він понижався, підскачавши знов у вересні. Листя магнолії оберненояйцевидної відрізнялось найвищим балом відкриття продохів. Менш за все продохова щілина була відкрита в цей період у магнолії кобус, у найбільш посушливий період цей показник складав всього 0,5 балів. Магнолія Суланжа та тюльпанне дерево знижували ступінь відкриття продохів у серпні. На початку серпня він у них складав 1 бал, потім у магнолії Суланжа цей показник знижувався до 0,5 балу, у тюльпанного дерева, однак, він підскакував до 1,5 балів на кінець серпня та продовжував зростати до кінця вересня.

## ВИСНОВКИ

Вивчивши розміри та стан продохів представників родини магнолієвих, які ростуть в умовах південного сходу України, слід відмітити, що в магнолії кобус кількість продохів на  $1\text{мм}^2$  вища, ніж в інших видів. Найменша кількість продохів на одиницю площі листка в тюльпанного дерева.

Дослідження денного ходу продохових рухів показало, що він має двопіковий характер у всіх розглянутих видів.

Магнолія кобус характеризується найкращою регуляційною здатністю продохів в умовах посушливого клімату в порівнянні з іншими вивченими видами. Магнолія Суланжа та тюльпанне дерево декілька поступаються в цьому показнику магнолії кобус. Сама ж низька пристосованість до температурних умов та умов вологості даного регіону відмічена у магнолії оберненояйцевидної.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Василевская В.К. Развитие экологической анатомии в СССР// Бот. журнал.-Л., 1979.- Т.64, №5.- С.88-91.
2. Wilkinson Н.Р. The plant surface ( mainly leaf)// Anatomy of the dicotyledons: In 2 vol.- Oxford: Clarendon Press, 1979.- V.1.- P.97-165.
3. Кушніренко М.Д., Гончарова Е.А., Бондарь А.М. Методы изучения водного обмена и засухоустойчивости плодовых растений.- Кишинев, 1970.- 78с.

4. Fu Wei, Wang Jian-Duo. Electrical analogy analysis and simulation testing of the empirical stoma model// Zhiwu shengli xuebao = Acta phytophysiol. sin.- 1996.- 22, №2.- P.145-151.
5. Васильев Б.Р. Строение листьев древесных растений различных климатических зон.- Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.- 206с.
6. Лакин Т.Ф. Биометрия.- М.: Высшая школа, 1990.- 309с.
7. Минченко Н.Ф., Коршук Т.П. Магнолии на Украине.- К.: Наук. думка, 1987.- 182с.

УДК 616.61-053.1-007.17-07:577.1

## **ОСОБЛИВОСТІ ПРОТІКАННЯ ВІЛЬНО-РАДИКАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ДИСПЛАСТИЧНИХ ФОРМАХ ВАД РОЗВИТКУ НИРОК У ДІТЕЙ ЗАПОРІЗЬКОГО ПРОМИСЛОВОГО РЕГІОНУ**

Дмітрянков В.О., Беленічев І.Ф., Гуйтур М.М., Бережний О.П.

Для диспластичних форм природжених вад нирок біохімічні критерії діагностики до даного часу не розроблені. У літературі зустрічаються окремі публікації, в яких інформується про стійкі зміни показників ліпідного обміну при деяких формах вад розвитку нирок у дітей. Але діагностична цінність цих змін не досліджувалась.

У пошуці діагностичних критеріїв лабораторних біохімічних досліджень ми відштовхувались від патогенезу диспластичних форм природжених вад нирок, де основну роль грала наявність, характер і розповсюдження ниркової дисплазії.

Особливу роль у патогенезі ниркових дисплазій відіграє активація ВРО.

### **МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Дослідження було проведено у 50 дітей з різними вадами розвитку нирок без дисплазій віком від 3 до 14 років, які склали контрольну групу. Такі ж дослідження були проведені в 50 дітей із диспластичними формами вад розвитку нирок того ж віку. Усі діти із промислових районів міста Запоріжжя.

Дослідження проводились у плазмі крові, еритроцитах та сечі дітей. Стан вільно-радикального окислення оцінювали по рівню дієнових кон'югатів, трієнкетонів, малонового діальдегіду. Стан антиоксидантної системи оцінювали за рівнем  $\alpha$ -токоферолу та активності каталази [2;6]

Функціональний стан симпато-адреналової системи оцінювався за рівнем адреналіну, норадреналіну та активності моноаміноксидази (МАО) [1].

### **РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЮВАННЯ**

У порівнянні вищевказаних показників ВРО та АОС у плазмі крові та сечі дітей контрольної групи із здоровими показано відсутність достовірної різниці між цими показниками.

Як видно із таблиці, рівень вмісту ДК у дітей з диспластичними формами ВПРО був на 50,9% у плазмі крові та на 67,2% у сечі вище ніж у дітей контрольної групи. Рівень ДК зберігав таку ж залежність, відповідно : 66,7% та 109,0%. Така ж картина спостерігалась з рівнем вмісту МДА, відповідно : на 13,9% та 84,6%. Рівень  $\alpha$ -токоферолу прогресивно знижувався в прямій залежності від ступеня розповсюдження диспластичного процесу в крові у середньому на 67,7% та на 27,5% у сечі. Відзначалось зниження активності каталази на 20,3% та на 81,3% відповідно в плазмі крові та сечі. Продукти ПОЛ, володіючи біотоксичною дією, зв'язувались з аміногрупами білків, фосфоліпідів, нуклеїнових кислот, підвищують проникливість біомембран, посилюючи проліферацію. Продукти ПОЛ, володіючи також вазоконстрикторною дією, підсилюють порушення місцевої гемодинаміки.

Враховуючи вищевказане, ми вважали показники ПОЛ як найбільш вагомими серед біохімічних констант, які відображають ступінь тяжкості захворювання.

Активация ПОЛ при ниркових дисплазіях може реалізовуватись кількома шляхами, по-перше, місцеве порушення гемодинаміки, зменшення посткапілярного відтоку приводить до накопичення продуктів (НАДН, НАДФ $\cdot$ H $_2$ , ФАДН), підвищення рівня лактату та розвитку метаболічного ацидозу, що приводить до індукції активних форм кисню. По-друге, виникнення лактоацидозу, наслідком присутності якого є

зниження рН, а також енергодефіцит призводить до гальмування активності антиоксидантних ферментів, особливо супероксиддисмутази та каталази. Крім того, виявлений нами дефіцит  $\alpha$ -токоферолу за рахунок його "розпаду" на пластифікацію біомембран при аутоімунних процесах та вітамін Е – дефіцит залежному ПОЛ.

Важливою ланкою в активності ПОЛ при ниркових дисплазіях є локальний викид КХА з різним підвищенням продуктів метаболізму b-ammодораміна та b-Hydroхудораміна, що призводять до утворення активних форм кисню (супероксидрадикала, гідроксилрадикала, аніонрадикала). Так нами було виявлено підвищення рівня адреналіну та норадреналіну в сечі та крові дітей з ПД, а також гіперферментація MAO у сечі в тих же дітей.

Порівняння цих показників рівня КХА та активності моноамінооксидази в плазмі та сечі дітей контрольної групи зі здоровими показало відсутність достовірної різниці між цими показниками. Як ми бачимо із таблиці, рівень вмісту адреналіну в дітей з диспластичними формами ВПРВ був 46,6% у сироватці крові та на 26,7% у сечі вище ніж у дітей контрольної групи. Рівень норадреналіну в дітей з диспластичними формами ВПРВ був також підвищеним на 17,9% у сироватці крові та на 69,4% у сечі ніж у дітей контрольної групи.

Активність моноамінооксидази також зростає в дітей з диспластичними формами ВПРВ, на 34,9% у сироватці крові на 48,0% у сечі. Так, дані дослідження свідчать не тільки про активацію симпато-адреналової системи та гіперфункцію надниркових залоз, але і дисфункцію проксимальних каналців, які призводять до високої екскреції з сечею КХА.

Рівень КХА дає інтегративну картину рівня симпато-адреналової та гіпофізарно-адреналової систем. Дозволяє оцінювати нервову та гуморальну регуляцію діяльності дисплазованої нирки, рівень її декомпенсованості, а при більш широкому залученні біохімічних констант (горионів гіпофізу, метаболітів КХА) – гіпотетичну ваду ПД, шлях та можливості компенсаторного впливу на МВС та організму в цілому.

Таблиця 1 - Показники вільно-радикального окислення та антиоксидантної системи в плазмі крові та сечі дітей з диспластичними формами природжених вад розвитку нирок

Група хворих	ДК мкм/мл	ТК мкм/мл	МДА мкм/мл	$\alpha$ -токоферол мкм/мл	Каталаза мкат/мл/мин
контрольна група n=50	0,53±0,072	0,15±0,02	0,36±0,024	3,54±0,21	14,2±0,71
	0,67±0,081	0,22±0,011	0,39±0,018	1,02±0,32	0,80±0,26
Група з ПД N=50	0,80±0,061	0,25±0,03	0,41±0,018	2,11±0,56	11,8±0,23
	1,12±0,074	0,46±0,021	0,72±0,022	0,80±0,16	2,32±0,34

Примітки: чисельник - показники, виявлені у плазмі крові, знаменник - у сечі P=0,05

Таблиця 2 - Вміст катехоламінів та активність моноамінооксидази в плазмі крові та сечі дітей з диспластичними формами природних вад розвитку нирок

Група хворих	Адреналін нмоль/л	Норадреналін нмоль/л	моноамінооксидаза нмоль/л
контрольна група n=50	1.91±0,02	29,0±0,3	19,5±0,14
	3,0±0,01	18,0±0,3	2,5±0,12
Група з ПД N=50	2,8±0,03	34,2±0,2	26,3±0,21
	3,8±0,02	30,5±0,01	14,5±0,31

Примітки: чисельник - показники, виявлені в плазмі крові; знаменник - у сечі P=0,05

## ЛІТЕРАТУРА

1. Авокян О. В. Симпато-адреналовая система.-М.: Медицина, 1986.-267с.
2. Беленичев И.Ф. Способ определения  $\alpha$ -токоферолу в биологическом материале // Тез.док. IV съезда специалистов по лабораторно-клинической диагностике республики Беларусь.- Гродно, 1992.- С.72-74.

3. Волкова О.В. Эмбриогенез и возрастная гистология внутренних органов.-М.: Медицина, 1986.- 368С.
4. Кейтс Р. Методы липидологии.- М.:Мир,1986.-521 с.
5. Коган В.С., Орлов В.С., Прилипко Л.Л. Проблема анализа эндогенных продуктов перекисного окисления липидов.- М.: Медицина, 1988. - 287с.
6. Королюк М.А. Способы определения активности каталазы // Лаб.дело. - 1988. - №1. - С.16-19.
7. Клембовский А.И. Развитие порока формирования почечной ткани с позиций клинической морфологии // Наследственные и врожденные нефропатии у детей. - Ленинград, 1971. - С.5-40.

УДК 574.5.(284)

## **ЗООПЛАНКТОН ЗАПЛАВНИХ ВОДОЙМ ВЕРХІВ'Я КАХОВСЬКОГО ВОДОСХОВИЩА**

Домбровський К.О.

### **ВСТУП**

Одним із основних компонентів, що визначає продуктивність заплавних водойм, є зоопланктон. Тому детальне дослідження гідроценозів цих водойм необхідне для визначення їх ресурсів у відтворенні й нагулі основних промислових видів риб. Суттєве значення має також встановлення структурних та функціональних показників зоопланктону як чутливого індикатора змін, що відбуваються в екосистемі [1].

У зв'язку з цим метою наших досліджень було вивчення якісного та кількісного складу зоопланктону деяких заплавних водойм у верхів'ї Каховського водосховища.

### **МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ**

Збір матеріалу здійснювався в 1997 році щомісячно з травня по жовтень та в 1998 році щодавно з квітня по жовтень. Обробка проб проводилась загальноприйнятими в гідробіології методами [2,3]. Усього в рейсових зйомках зібрано 162 кількісні та якісні проби зоопланктону.

Для виявлення змін у зоопланктонному угрупованні використовували показники, що засновані на оцінці таксономічної структури угруповань: співвідношення основних груп зоопланктону за чисельністю та біомасою, співвідношення біомаси Crustacea до біомаси Rotatoria (BCr/BRot), співвідношення чисельності Cladocera (NCl/NCop), співвідношення біомаси Cyclopoda до біомаси Calanoida (BCyl/BCal) [4].

### **РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ**

За період досліджень у зоопланктоні відзначено 147 видів безхребетних, у тому числі: коловерток - 57 видів, гіллястовусих ракоподібних - 47 видів, веслоногих - 43. Крім того, зустрічались тихоходи, олігохети, нематоди, остракоди та личинки хірономід. Співвідношення трьох головних груп зоопланктону за кількістю видів було однотипним. Домінуючою групою були коловертки - 35% у 1997 році і до 44% у 1998, за ними слідує гіллястовусі та веслоногі ракоподібні (табл. 1, 2).

Зоопланктон руслової ділянки на дослідних станціях був відносно бідним. Найбільшу середню чисельність і біомасу мали гіллястовусі ракоподібні на станції Лівий берег Дніпра, у районі б/в "Хвиля" 4110 екз/м<sup>3</sup> і 289,9 мг/м<sup>3</sup> відповідно, переважно за рахунок розвитку *Vosmina longirostris* (O.F. Muller, 1785), *Scapholeberis mucronata* (O.F. Muller, 1776), каспійських поліфемоїд *Podonevadne trigona ovum* (Zernov, 1901) та *P. samptonux* (Sars, 1897). Серед веслоногих ракоподібних за чисельністю та біомасою тут домінували *Cypridocyclops bicolor bicolor* (Sars, 1863), *Limnocalanus macrurus* (Sars, 1863), *Calanipeda aquadulcis* (Kritschagin, 1873). Середня чисельність і біомаса коловерток були незначними і не перевищували 363 екз/м<sup>3</sup> та 0,458 мг/м<sup>3</sup> відповідно.

Розподіл основних груп зоопланктону на першій затоці був іншим: за чисельністю перевагу мали коловертки та веслоногі ракоподібні - 67% та 32% відповідно, а за біомасою - веслоногі та гіллястовусі ракоподібні - 150,5 екз/м<sup>3</sup> та 15,9 мг/м<sup>3</sup> відповідно. Найчастіше тут зустрічалися: *Keratella irregularis* (Lauterborn, 1898), *K. cochlearis typica* (Gosse, 1851), *Polyarthra dolichoptera* (Idelson, 1952), *Mesocyclops bodanicola* (Kiefer, 1928), *Eurytemora grimmeri* (Sars, 1897).

Таблиця 1 - Середня чисельність (N екз/м<sup>3</sup>), біомаса (B, мг/м<sup>3</sup>) та розподілення (n - кількість видів) зоопланктону заплавної водойми та руслової ділянки верхів'їв Каховського водосховища в 1997 році.

Групи організмів	Показники	Станції								
		Вище Жданівського пляжу	Нижче Жданівського пляжу	Лівий берег Дніпра б/в "Хвиля"	Гребний канал	ЦОС № 1	Протока № 1	Озеро Закітня	Балабинська затока	Водойми болотного типу
Rotatoria	n	4	1	3	19	3	1	6	7	2
	N	294	59	180	1180	200	100	657	439	374
	B	0,093	0,0885	0,234	2,694	1,76	0,09	1,644	0,953	0,868
Copepoda	n	2	-	9	16	5	9	9	4	-
	N	146	10	380	1768	289	1128	4051	1399	-
	B	2,43	0,04	34,84	140,71	35,586	34,104	368,17	101,37	-
Cladocera	n	5	3	5	19	1	6	6	3	2
	N	403	224	220	982	217	638	217	342	374
	B	55,495	10,432	57,25	133,26	97,65	59,612	97,65	14,93	41,14
Разом	n	11	4	17	54	9	16	21	14	4
	N	843	293	780	3930	706	1866	4925	2180	748
	B	58,02	10,54	92,32	276,7	73,8	93,8	467,5	117,3	42,0

Таблиця 2 - Середня чисельність (N екз/м<sup>3</sup>), біомаса (B, мг/м<sup>3</sup>) та розподілення (n - кількість видів) зоопланктону заплавлених водойм та руслової ділянки верхів'їв Каховського водосховища в 1998 році.

Групи організмів	Показники	Станції										
		Вище Жданівського пляжу	Нижче Жданівського пляжу	Лівий берег Дніпра б/в "Хвиля"	Загока Дніпра № 1	Гребний канал	ЦОС № 1	Протока № 1	Озеровидна ділянка протоки № 1	Протока № 2	Озеро Закітня	Водойми болотяного типу
Rotatoria	n	-	-	6	7	15	2	16	5	3	17	11
	N	-	-	550	3955	2454	360	202,1	1080	60	4986	1320
	B	-	-	0,682	3,593	13,29	1,08	4,123	1,644	0,61	3,533	1,279
Copepoda	n	-	-	5	7	9	2	6	-	5	15	3
	N	600*	-	3090	1890	5250	195	3756	50*	640	22,89	1080
	B	2,4	-	259,53	150,52	189,4	36,975	137,47	0,2	144,82	146,74	44,55
Cladocera	n	-	2	7	2	9	3	14	5	5	14	5
	N	-	1200	8000	83	738	3750	4034	740	456	1720	630
	B	-	160,8	522,5	15,594	133,19	233,4	668,76	88,08	22,548	104,28	81,0
Разом	n	-	2	18	16	33	7	36	10	13	46	19
	N	600	1200	11640	5928	8442	4305	9811	1870	1156	8995	3030
	B	2,4	160,8	782,7	169,7	335,9	271,5	810,4	89,9	168,0	260,6	126,8

Примітка: \* - середня чисельність науплій копепод.

Таблиця 3 - Середні значення структурних показників угруповань зоопланктону заплавних водойм та руслової ділянки Дніпра верхів'я Каховського водосховища в 1997 році.

Показники	Станції								
	Вище Жданівського пляжу	Нижче Жданівського пляжу	Лівий берег Дніпра б/в "Хвиля"	Гребний канал	ЦОС № 1	Протока № 1	Озеро Закітня	Балабінська затока	Водойми болотяного типу
Bcr/BRot	623	118	394	102	76	1041	282	121	47
Ncl/Ncop	2,74	22,4	0,58	0,6	0,75	0,57	0,28	0,23	-
Bcyl/Bcal	6,5	-	2,5	0,7	14,2	2,1	0,16	4,3	-
R:Cl:Cop (по N)	2:3:1	6:22:1	1:1:2	1:1:2	1:1:1	1:6:11	1:1:5	1:164	1:1:0
R:Cl:Cop (по B)	1:596:26	2:261:1	1:245: 149	1:50:52	1:55:20	1:662: 379	1:58:224	1:15:106	1:47:0



Таблиця 4 - Середні значення структурних показників угруповань зоопланктону заплавних водойм та руслової ділянки Дніпра верхів'я Каховського водосховища в 1998 році.

Показники	Станції								
	Лівий берег Дніпра б/в "Хвиля"	Загока Дніпра № 1	Гребний канал	ЦОС № 1	Протока № 1	Озеровидна ділянка протоки № 1	Протока № 2	Озеро Закіття	Водойми болотяного типу
Bct/Br <sub>ot</sub>	1147	46	24	250	196	54	274	26	98
Ncl/Nc <sub>op</sub>	2,59	0,04	0,37	19,2	1,07	14,8	0,71	0,75	0,58
Bcyl/Bc <sub>ol</sub>	0,4	13,7	2,6	-	6,4	-	21,3	5,6	-
R:Cl:C <sub>op</sub> (по N)	1:15:6	48:1:23	1:1:3	1:19:21	1:2:1	22:15:1	1:8:11	3:1:1	2:1:2
R:Cl:C <sub>op</sub> (по B)	1:766: 381	1:4:42	1:10:14	1:216:34	1:162:33	8:1:440	1:37:237	1:11:15	1:352:63

Найбільше розмаїття видового складу зоопланктону заплавних водойм відмічено на Гребному каналі - до 45% та на озері Закітня - до 39%. Висока середня чисельність зоопланктону була на озері Закітня - 4925 екз/м<sup>3</sup> у 1997 році та 8595 екз/м<sup>3</sup> у 1998, переважно за рахунок розвитку веслоногих ракоподібних і коловерток. Середня біомаса зоопланктону була максимальною в 1997 році на озері Закітня - 467,5 мг/м<sup>3</sup>, а в 1998 - на гребному каналі (335,9 мг/м<sup>3</sup>), де за біомасою мали перевагу веслоногі. У зоопланктоні гребного каналу широко представлені такі форми: *Trichocerca capucina* (Wierzejski et Zacharias, 1893), *Polyarthra vulgaris* (Carlin, 1943), *Asplanchna priodonta* (Gosse, 1950), *Eurytemora velox* (Lillyeborg, 1853), *E. grimmii*, *Megacyclops latipes* (Lowndes, 1927), *Simocephalus lusaticus* (Nerr, 1917), *Rhynchotalona falkata* (Sars, 1862). Масовими видами зоопланктону озера Закітня є: *Keratella quadrata* (Muller, 1786), *K. irregularis*, *Diacyclops bicuspidatus* (Claus, 1857), *Eurytemora grimmii*, *Limnocalanus macrurus*, *Chydorus schaefericus* (O.F. Muller, 1985), *Disparalona rostrata* (Koch, 1841).

У протоках виявлено коловерток - 22 види, веслоногих - 14, гіллястовусих - 20. Пік розвитку коловерток припадає на квітень, коли їх чисельність перевищувала 4,5 тис. екз/м<sup>3</sup>. Потім чисельність коловерток знижується до 2,4 тис. екз/м<sup>3</sup> у червні і досягає мінімуму (1,3 тис. екз/м<sup>3</sup>) у кінці серпня.

Основними факторами, що визначають розвиток нехижих форм зоопланктону, є забезпеченість їжею та температура. У серпні середня температура води в протоках плавнів досягала максимуму - 19-20°C. Найбільша біомаса веслоногих (0,5 г/м<sup>3</sup>) відмічена в червні, коли їх харчові потреби повністю задовольнялися за рахунок розвитку тваринної та рослинної їжі. Далі біомаса та чисельність веслоногих знижується і їх мінімальні показники припадають на вересень - 0,05 г/м<sup>3</sup> та 1,3 тис. екз/м<sup>3</sup> відповідно.

За досліджений період домінуючий комплекс угруповань зоопланктону деяких заплавних водойм змінився. У 1998 році спостерігається збільшення чисельності та біомаси зоопланктону на станціях Лівий берег Дніпра та ЦОС-1, де зросла частка *Soropoda* і *Cladocera* (табл. 3, 4). Підвищений розвиток зоопланктону цих груп обумовлений відповідними змінами таксономічних показників, що базуються на співвідношенні значень чисельності та біомаси. У той же час, у Гребному каналі, Першій протоці та в озері Закітня спостерігається збільшення чисельності та біомаси *Rotatoria*, тоді як частка *Soropoda* і *Cladocera* знижується. У зоопланктоні заплавних водойм відмічено зменшення частки організмів-індикаторів β-мезо та β-α мезосапробних форм і збільшення частки оліго- та о-β мезосапробних, переважно за рахунок розвитку *Scapholeberis mucronata*, який зустрічається на 8 станціях відбору проб.

## ВИСНОВКИ

1. Зоопланктон заплавних водойм та руслової ділянки Каховського водосховища нараховує 147 видів безхребетних, у тому числі коловерток - 39%, гіллястовусих - 32%, веслоногих - 29%.
2. Середньорічна чисельність зоопланктону - 36,6 тис екз/м<sup>3</sup>, біомаси - близько 2,2 г/м<sup>3</sup>.
3. В угрупованні зоопланктону деяких заплавних водойм немає чітко вираженого домінуючого комплексу, оскільки спостерігається зміна одних видів домінантів іншими, які відносяться до різних груп зоопланктону.
4. У зоопланктоні спостерігається зменшення частки β-мезо і β-α-мезосапробних та зростання частки оліго- і о-β мезосапробних форм як показників якості води.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Крючкова Н.М. Структура сообщества зоопланктона в водоемах разного типа// Продукционногидробиологические исследования водных экосистем.- Л., 1987. - С. 184-198.
2. Методические рекомендации по сбору и обработке материалов при гидробиологических исследованиях на пресноводных водоемах. Зоопланктон и его продукция. - Л., 1982. - 33с.
3. Методика изучения биогеоценозов внутренних водоемов/ Под ред. Ф.Д. Мордухай-Болтовского. - М., 1975.- 240 с.
4. Деревенская О.Ю., Мингазова Н.М. Сообщества зоопланктона озер при их загрязнении и восстановлении// Гидробиологический журнал. - К., 1998. -Т. 34. - № 4. - С. 50-56.
5. Пашкова О.В. Представители каспийской фауны в составе природного зоопланктона мелководий Каховского водохранилища// Вопросы гидробиологии водоемов Украины. - К.: Наукова думка, 1988. - С. 37-42.
6. Каховське водоймище / За ред. Я.Я. Цееба. - К., 1964. - 303 с.

## К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДИКИХ КОПЫТНЫХ НА РАСТИТЕЛЬНЫЕ БИОЦЕНОЗЫ УКРАИНЫ

Домнич В.И., Евсеева Т.А.

Как компонент биогеоценозов животные вступают в сложные взаимоотношения как с растительными сообществами, так и с почвами, участвуя в круговороте различных органических и неорганических соединений. Известно, что фитофаги являются консументами первого порядка и соответственно важнейшим звеном в пищевой цепи.

Изучение влияния диких копытных на фитоценозы складывается из нескольких направлений и носит системный характер. С одной стороны для решения данной проблемы необходимо детальное изучение структуры самого растительного сообщества, его продуктивности, влияния различных абиогенных факторов, кругооборота макро- и микроэлементов. С другой стороны предусматривается как можно более полное изучение жизнедеятельности самих фитофагов и в частности их питание. И на основании этого выявляется взаимосвязь между растительными сообществами и обитающими на них растительными животными, с учетом их влияния на формирование почв.

Что касается первого направления, в настоящее время в биогеоценологии наметилась тенденция перехода от экстенсивных маршрутных исследований к более углубленному стационарному биогеоценологическому изучению природных ресурсов и их воспроизводства, без которого невозможно разработать научные основы улучшения кормовой базы для копытных, интенсификации заповедников и охотничьих хозяйств, а также биологических основ охраны природы. В частности для биоценозов степей основными направлениями исследования динамики являются: структура травостоев, в том числе вертикальное распределение листовой поверхности; первичная и вторичная продуктивность в надземной и подземной частях; изучение систем территориально смежных и односторонне или взаимно сопряженных биогеоценозов (комплексные профили, катены, полигон-трансекты и пр.); климатические факторы (количество осадков, температура, поступление солнечной энергии и пр.); зоокомпоненты; микроорганизмы почв; количественная оценка некоторых обменных процессов между атмосферой и растениями, отмершими растительными остатками, природными водами и почвами; кругооборот микро- и макроэлементов; воздействие на комплексы агротехнических мероприятий и многое другое [1].

Второе направление, как уже указывалось выше, представляет собой всестороннее изучение жизнедеятельности животных и, прежде всего, их питания.

Исследованиями в данном направлении занимались многие ученые, как в СНГ, так и за рубежом. Укажем, что здесь также имеют место различные подходы, а именно изучать питание фитофагов можно посредством наблюдений в дикой природе, исследованием содержимого их желудков с последующим определением переваримости или детального изучения всех нюансов питания на прирученных животных и т.д. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства и недостатки.

Например, М.-Р. Магомедов и Ю.А. Яровенко, изучая интенсивность питания и переваримость кормов у дагестанского тура в неволе, пришли к выводу, что абсолютная величина потребления кормов у этих животных достигает 900-1500 г сухого вещества в сутки и не зависит от качества корма. Абсолютное потребление корма у взрослых туров в летний период в среднем в 1,8 раза выше, а относительное (на 1 кг массы тела) в 1,5 раза ниже, чем у молодых. В зимний период уровень абсолютного потребления кормов молодых и взрослых животных не различается, тогда как относительный уровень потребления у молодых в 3 раза выше, чем у взрослых. По мнению авторов, это связано с тем, что у молодых животных зимой не происходит снижения уровня потребления корма, которое резко выражено у взрослых особей. Ограничение подвижности снижает потребление корма в 1,4 раза. Далее авторы указывают, что продолжительность пастбы зависит от продуктивности и видового состава растительных сообществ. Переваримость, согласно представленным исследованиям, изменялась от 41 до 81% и зависела от содержания в кормах сырой клетчатки [2].

Интересная методика изучения переваримости для количественной оценки потребления пищи свободнопасущимися сайгаками путем использования лигнина и кремния кормовой растительности в качестве индикаторов предложена Б.Д. Абатуровым (1997). Исследования показали, что лигнин и кремний практически не усваиваются в процессе пищеварения: возврат лигнина с фекалиями составляет 93-98%, кремния 97-100%, что подтверждает возможность их использования в качестве индикаторов переваримости [3].

При изучении кормовой обеспеченности диких копытных в сухой сезон на луговых пастбищах Эфиопии тот же Б.Д. Абатуров [4] для расчета суточного потребления корма использовал методики, основанные на измерении количества выделяемых фекалий и переваримости. При этом химический анализ кормовых

растений и фекалий определяли стандартными методами. Баланс энергии и протеина рассчитывался по формулам Калошников и Клейменова (1985) [5] по аналогии с таковым для сельскохозяйственных животных. Потребности в энергии определяли по сумме потребностей на поддержание (равной энергии покоя), на лактацию и на разные виды активности с учетом их доли в суточном бюджете времени. Энергию на поддержание вычисляли по формуле:  $440 \text{ кДж М}^{0,75}$  за 1 день, где М- масса тела (кг), для трат энергии на лактацию использовали коэффициент 2,3, на пастбищу - 1,5, ходьбу - 2,5, отдых - 1,5 [6,7,8]. Для оценки потребностей в протеине для зебр использовали кормовые нормы для лошадей (вес тела 270 кг), для газели - кормовые нормы для овец (самцы - 80 кг, самки - 50 кг) с учетом потребностей на лактацию [5,6,7,9].

Кроме того, Б.Д. Абатуров, М.В. Холодова, А.Е. Субботин (1982), исследуя интенсивность потребления и переваримость кормов у сайгаков, выявили, что избыточное содержание влаги в корме (более 60-70%) снижает потребление сухого вещества корма более, чем в 2 раза. Зимой потребление уменьшается в 1,5-2,2 раза по сравнению с летом. Ограничение подвижности снижает потребление в 1,5 раза [10].

Из методов определения суточного потребления пищи млекопитающими наибольшее распространение в зоологических исследованиях получил метод прямого определения количества съеденной пищи по разнице между весом заданного корма и весом его несъеденного остатка в условиях клеточного содержания животных [11,12,13,14]. При всей кажущейся простоте этого метода его применения осложняется значительной изменчивостью содержания влаги в корме, вызывающей непостоянство его веса. Возникает необходимость делать поправку на усушку корма за время проведения опыта по кормлению и точно фиксировать влажность задаваемого корма, если вес съеденной пищи был определен при ее естественной влажности ("сырой" вес), или же оценивать потребление в показателях "сухого" веса корма. Последний способ более приемлем, т.к. обеспечивает независимость показателей веса потребленного корма от содержания влаги.

Получение таких показателей требует определенных приемов, которые при изучении питания млекопитающих до сих пор окончательно не отработаны, часто применяются неправильно либо неоправданно усложняются.

В этой связи Б.Д.Абатуровым [15] предлагается ряд приемов, позволяющих разрешить возникающие трудности. Суть их сводится к следующему. Перед дачей корма животным, содержащимся в клетках, берут его образец для определения влажности и сухого вещества. Образец высушивают в термостате до абсолютно сухого состояния, т.е. до постоянного веса, после чего рассчитывают процентное содержание сухого вещества. Полученная величина позволяет пересчитать количество заданного корма на "сухой" вес. По разнице между "сухим" весом заданного корма и его несъеденного остатка определяют количество потребленной пищи, выражаемое в показателях сухого веса. Количество задаваемого корма должно быть избыточным.

Параллельно с указанными определениями проводят определение коэффициента переваримости корма, для чего в каждом случае учитывают количество экскрементов в сухом весе и рассчитывают переваримую часть потребленной пищи:  $V=100-\Phi*100/C$ , где V- коэффициент переваримости (%),  $\Phi$ - абсолютно сухой вес экскрементов (г), C- количество съеденной пищи в сухом весе (г) [16].

Все указанные определения проводят при избытке корма. Тем самым уже исходно предполагается, что получаемый результат соответствует максимальному потреблению пищи животными, обеспечиваемому их физиологическими возможностями. Например, из практики животноводства известно, что при кормлении даже нелактирующих животных вволю уровень кормления может увеличиться в три раза по сравнению с поддерживающим, т.е. необходимым для обеспечения всех физиологических функций [7].

Автор предполагает, что в природных условиях при напряженном пищевом режиме (пищевая конкуренция, ограниченные запасы и т.д.) потребление пищи часто не достигает максимальных величин, а получаемые указанным выше путем результаты не соответствуют реальным показателям питания в природе. Исходя из этого, Абатуров и Кузнецов [17] на примере грызунов использовали определения, основанные на данных веса содержимого желудка животных, пойманных в природе, скорости прохождения пищи через желудок и длительности периода наполнения желудка. Аналогичные исследования можно проводить и на копытных. Авторы считают, что данный метод нуждается в дальнейшем совершенствовании. Прежде всего это касается необходимости установить соотношение между скоростью прохождения пищи через желудок и показателем наполнения желудка (вес содержимого желудка). Скорость прохождения пищи зависит от количества потребленного корма, как это указывалось выше [17]. Очевидно о ней можно косвенно судить по наполнению желудка, которое отражает количество потребляемого корма и может быть непосредственно измерено в природе.

Для биологических и экологических исследований весьма важно знать величину общего потребления растительности всей популяцией за определенный отрезок времени. Эту величину обычно рассчитывают на основании данных о суточной норме потребления корма каждой особью и численности (плотности) популяции животных. Необходимо однако учитывать, что получаемая таким образом величина еще не

отражает общего изъятия фитомассы популяцией, т.к. не включает в себя кормовых остатков, т.е. отчужденных, но не съеденных частей растений. По имеющимся данным, количество кормовых остатков, образуемых леммингами и полевкой -экономкой в тундре, составляет 80-88% от общей величины отчужденности [18]. У копытных кормовые остатки образуются прежде всего под влиянием отторжения частей растения копытами. У овец они составляют 50%, у коров - 25-56% общей величины отчужденности.

Для определения реального количества растительности, потребленного всей популяцией, весьма перспективен учет экскрементов с последующим пересчетом их массы на искомую величину потребления. Впервые этот метод при изучении диких животных был применен Тихвинским (1934) для определения фитомассы, потребленной популяцией сурков. Впоследствии учет суточного поступления экскрементов был с успехом использован Семеновым- Тян-Шанским (1948) для оценки интенсивности питания лося.

Суть метода заключается в следующем. Собирают и взвешивают экскременты, отложенные животными изучаемой популяции за определенный промежуток времени (за год) на определенной площади. Для этого исследования проводят или на постоянных учетных площадках, которые предварительно очищают от старых экскрементов [19], или, при условии сезонного пастбищного использования территории, свойственного многим диким копытным, собирают лишь экскременты, отложенные за прошедший сезон и обычно хорошо отличающиеся от старых. Устанавливают сухой вес собранных экскрементов, после чего из данных по переваримости кормов рассчитывают количество съеденной за определенное время растительности:  $C = \Phi * 100 / 100 - B$ , где  $C$  - потребленная фитомасса (сухой вес) на единице площади,  $B$  - коэффициент переваримости фитомассы у данного вида животных (%).

Можно полагать, что для видов, у которых экскременты достаточно длительное время сохраняются в неизменном состоянии, и при статистически правильных методах учета данный способ определения потребленной фитомассы дает наиболее объективные результаты. Дело в том, что он не требует знания численности животных, точное определение которой для многих видов в настоящее время еще очень затруднительно, не требует определения суточного рациона животных, который в естественных условиях непостоянен. Тем самым исключаются параметры, которые могут повлечь за собой ошибку в данных определениях.

Вместе с тем, определенное искажение результатов может быть вызвано деятельностью микроорганизмов и животных, потребителей экскрементов (копрофагов) или обусловлено их разрушением под влиянием физических факторов среды (атмосферные осадки, солнечная радиация и т.д.), поэтому в каждом конкретном случае желательно исследование длительности сохранения неизменного веса экскрементов, особенно в условиях достаточного увлажнения. В засушливых условиях, по мнению Абатурова, экскременты таких млекопитающих как овцы, сайгаки, суслики почти не подвергаются воздействию копрофагов и очень медленно разрушаются под действием физического выветривания.

М.В.Холодова и В.И.Приходько занимались изучением потребления и переваривания кормов у кабарги [20]. При этом величину суточного рациона устанавливали принятыми методами [15]. Учетный период каждой серии опытов продолжался 5-9 дней. Ему предшествовал подготовительный, во время которого животное привыкает к новым условиям содержания и новому виду корма (3-5 дней). Перед началом и по окончании опыта животных взвешивали. Корм и воду давали вволю, так что в кормушках находился постоянно свежий корм.

Сбор кормовых остатков и экскрементов проводили 1 раз в сутки в одно и то же время. Поскольку при кормежке в природе кабарга очень избирательно подходит к выбору кормов [21,22], то и в опытах животным предлагали наиболее привлекательные корма, предпочтительность которых выясняли во время предварительных наблюдений. Эти корма давали в чистом виде или в сочетании друг с другом. Все данные выражались в сухом весе. Коэффициент переваримости определяли как процентное соотношение количества усвоенного корма (вес съеденного минус вес экскрементов) к весу съеденного корма. Оценку поедаемости проводили по 5- балльной шкале.

Следует отметить, что млекопитающие могут испытывать недостаток растительного корма при его кажущемся обилии. Запас корма, при котором животные не успевают собирать суточную норму пищи, является критическим, а его использование предельным. Меняющийся уровень потребления пищи служит тем сигналом, который позволяет животным следить за состоянием кормовых запасов и вовремя реагировать на их уменьшение. Уровень использования кормовых запасов растительности в открытых ландшафтах обычно значительно выше, чем в лесных, но не превышает 70 %. Растительный покров обладает многочисленными приспособлениями, позволяющими выносить без ущерба для своей продуктивности изъятие во многих случаях не менее 70 % растительной массы. Животные более чувствительны к изъятию растительной массы, служащей им кормом, чем сама растительность, и поэтому не в состоянии снизить ее продуктивность. По- видимому, такой механизм регуляции

характерен для всех непосредственно связанных между собой элементов пищевой цепи от автотрофов до хищников. Продуктивность каждого последующего элемента определяется предыдущим, обратные же зависимости менее распространены.

Что касается взаимосвязи животных и растительных сообществ, то здесь интересно вспомнить работу Петрусевича [23]. Автор считает, что даже в нормальных, не тронутых массовым размножением вредителей экосистемах растительноядные животные имеют большое значение в жизни биогеоценозов. Они могут быть причиной различных экологических процессов, таких как увеличение или уменьшение процессов продукции, стабильности и т.п. Одной из экологических характеристик фитофагов является запас, т.е. среднее количество биомассы в год, и величина ее оборачиваемости. Фитофаги могут оказывать существенное влияние на растительность, если их средняя биомасса значительна и кругооборот биомассы велик. Слишком большое изъятие растительной биомассы может привести к большому или меньшему нарушению функционирования экосистемы и даже к ее разрушению. Умеренный выпас может увеличить первичную продукцию и процессы продуктивности.

По мнению Абатурова Б.Д. [24], реакция растительных сообществ на изъятие фитомассы животными может проявляться в нескольких формах: в качественном изменении структуры сообщества, в том числе его видового состава, в изменении запаса растительности (фитомассы), в изменении продукции фитоценоза. Общие закономерности изменений структуры и фитомассы сообществ под влиянием пастбы животных в настоящее время ясны, что нашло отражение в разработке теории пастбищной дигрессии. Вместе с тем изучение закономерностей изменения продуктивности стало возможным лишь в недавнее время в результате развития общей теории биологической продуктивности. Было показано, в частности, что для правильной оценки состояния и продуктивности пастбищной растительности необходимо учитывать не только фитомассу, имеющуюся на корню, но и удаленную животными.

Еще недавно господствовало мнение, что любое выедание растительности животными сопровождается в той или иной степени угнетением растений и снижением их продуктивности. Оказалось, что влияние фитофагов не столь однозначно. По практическим наблюдениям выедание сусликами до 20-30 % урожая растительности оставляет ее продуктивность практически без изменения. Характерно, что длительное прекращение выпаса скота не увеличивает продуктивность растительности по сравнению с растительностью постоянного пастбища. Из этого следует, что положительная реакция пастбищной растительности на снятие пресса фитофагов, которая якобы всегда проявляется с некоторым запаздыванием, не обязательна [18].

Для пастбищного фитоценоза частичное удаление фитомассы не только не наносит ущерба, но даже необходимо для поддержания высокой продуктивности. В целом реакция растительности на удаление зеленой массы в различных природных условиях неодинакова. Анализ с использованием математического моделирования показал, что в том случае, когда интенсивность фотосинтеза и продуктивность ограничиваются потоком световой энергии, удаление листьев до определенного уровня должно увеличивать продуктивность [25]. Этот эффект связан с увеличением отношения интенсивности фотосинтеза к дыханию растений при уменьшении фитомассы в результате воздействия фитофагов. Если продуктивность ограничена запасами доступной влаги в почве, то удаление части фитомассы не меняет продуктивности при условии полного использования растительностью запасов влаги. И, наконец, если продуктивность ограничена запасом тепла (при коротком вегетационном периоде), то любое удаление фитомассы должно снижать продуктивность.

Огромное значение имеет также влияние экскрементов растительноядных животных на почвообразовательные процессы и на кругооборот веществ.

Таким образом, действие растительноядных животных может вызвать целый ряд экологических процессов, таких, например, как увеличение при небольшом потреблении или уменьшение при сильном выпасе первичной продукции, изменение биомассы растений и видового разнообразия, появление более сложной организации экосистем и т.д.

На Украине данное направление недостаточно разработано. Наряду с биоценологическими исследованиями и отдельными исследованиями питания копытных (в частности можно указать на работу Корнеева и Кричевской (1975) [26] по питанию ланей в лесостепной зоне Украины), именно взаимоотношением фитофагов и растительных сообществ в экологическом аспекте на Украине практически не занимались (в данном случае имеются в виду крупные дикие копытные).

Нами на протяжении пяти лет ведутся исследования в этом направлении, включающие как питания копытных, так и структуры растительных сообществ, биохимического анализа растений, пищевой и энергетической ценности кормов, а также взаимного влияния фитоценозов и копытных.

Актуальность такой работы несомненна, поскольку открывает широкие перспективы для внедрения результатов этих исследований в практику заповедных, охотничьих и других хозяйств на Украине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дылис Н.В., Моторина Л.В., Носова Л.М., Пьявченко Н.И., Работнов Т.А. О биогеоценологических исследованиях в СССР в 1972 году// Известия Академии наук. Сер. Биологическая, 1974.- С. 111-124.
2. Магомедов М.-Р. , Яровенко Ю.А. Интенсивность питания и переваримость кормов у дагестанского тура (*Saiga cylindricornis*) в неволе // Зоол. журн. – 1997. Т. 76 вып. 2.- С. 243-250.
3. Абатуров Б.Д. , Колесников М.П., Лихнова О.П., ПетрищевБ.И., Никонова О.А. Использование лигнина и кремния кормовой растительности в качестве индикаторов переваримости для количественной оценки потребления пищи свободнопасущимися сайгаками.// Зоол. журн. – 1997. Т.76, №1.- С.104-113.
4. Абатуров Б.Д., Кузнецов Г.И.,М-Р.Д. Магомедов, Петелин Д.А., Фенаду Кассайе. Оценка кормовой обеспеченности диких копытных в сухой сезон на луговых пастбищах Эфиопии// Зоологический журнал. -1996.- Т. 75, вып. 3.- С. 439-449.
5. Калошников А.П. , Клейменов Н.И. Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных.- М.: Агропромиздат,1985.- 456 с.
6. Потребность жвачных животных в питательных веществах и энергии.-М.: Колос,1968.-496 с.
7. Мак-Дональд П., Эдвардс Р.,Гринхалд Дж. Питание животных.-М.: Колос ,1970.-450 с.
8. Owen-Smith N., Coper S.M. Nutritional ecology of a browsing ruminant , the Kudu ( *Tragelaphus strepsiaros*), though the seasonal cycle.// J. Zool. London. V.219 .- P.29-43.-P.12-19.
9. Лемин В.Ф.,Шпаков А.П. Назаров В.Н. Кормовые нормы и таблицы.- Минск:Ураджай ,1966.-510 с.
10. Абатуров Б.Д. ,Холодова М.В., Субботин А.Е. Интенсивность потребления и переваримость кормов у сайгаков (*Saiga tatarica*)// Зоол. журн. – 1982.- Т. 61, вып. 12.- С.1870-1879.
11. Башенина Н.В. Руководство по содержанию и разведению новых в лабораторной практике видов мелких грызунов. Изд. Моск. ун-та.-1975.- С. 1-165.
12. Воронов А.Г. О методах полевого изучения кормового рациона мелких грызунов .1955, Бюлл. Моск. общества испытателей природы, отд. Биол. 54,5.- С 21-30.
13. Голлей Ф.Б. Методы измерения вторичной продуктивности в популяции сухопутных животных. 1968, Сб. “Информационные материалы по Международной Биологической Программе”, 2 , Новосибирск.-С. 1-40.
14. Кулюкина Н.М. Поедаемость различных кормов некоторыми видами мышей и полевок –М: Изв. Тимирязевской с.-х. Академии,2.-1974.- С.154-165.
15. Абатуров Б.Д. Об определении интенсивности потребления пищи и освоение кормовых ресурсов растительнойными млекопитающими// Зоологический журнал.- 1980.- Т. 59 , Вып.11.- С.1726-1731.
16. Томмэ М.Ф., Ксанфопуло О.И., Сементовская Н.М. Переваримость кормов.-М.: Сельхозиздат,1953.- С.1-395.
17. Абатуров Б.Д., Кузнецов Г.В. Изучение интенсивности потребления пищи грызунами// Зоол. журн.- 1976.- Т. 55, вып. 1.-С. 122-127.
18. Абатуров Б.Д., Ракова М.В., Середнева Т.А. Воздействие малых сусликов на продуктивность растительности в полупустыне. // Фитофаги в растительных сообществах – М.:Наука , 1980-С. 122-127.
19. Кузнецов Г.В. Роль лосей в переносе энергии в лесных экосистемах //Почвы и продуктивность растительности.- М.: Изд-во Моск. гос. ун-та.- С. 41-47.
20. Холодова М.В., Приходько В.И. Потребление и переваримость кормов у кабарги (*Moschus moschiferus*) // Зоол. журн.- 1984.- Т. 63, вып. 6.- С. 923-925.
21. Егоров С.В. Кабарга.-1965.- В кн. Дикие копытные Якутии.- М.: Наука.- С. 434-457.
22. Устинов С.К. Биология кабарги в связи с ее промысловым использованием // Зоол. журн.-1969. – Т.48, вып. 10.- С.1558-1563.
23. Петрусевич К., Гродзинский В. Значение растительнойных животных в экосистемах // Экология.- 1973.- №6.- С. 5-11.
24. Абатуров Б.Д. Растительнойные млекопитающие в экосистемах полупустыни: Автореф. дис.: д-ра биол. наук:Москва, 1982.

25. Лопатин В.Н. , Абатуров Б.Д. математический анализ влияния дефолиации на продуктивность растительности.- Доклады академии наук, 1981.-Т. 237, № 3.- С. 757-759.
26. Корнеев А.П., Кричевская Ц.Ю. Особенности питания ланей в лесостепи Украины.- В кн. Копытные фауны СССР.-М.: Наука,1975.-С.119-141.

УДК 636.594

## **ВИКОРИСТАННЯ АНТИОКСИДАНТІВ ДЛЯ ВИРОЩУВАННЯ МОЛОДІ МИСЛИВСЬКОГО ФАЗАНА**

Корж О.П.

### **ВСТУП**

Розведення дичини в штучних умовах спочатку виникло як засіб збільшення мисливських ресурсів і насичення угідь дичиною до сезону полювання. Але у ХХ столітті воно поширилось на розведення рідкісних та зникаючих тварин, що дозволило підтримувати малочисельні, відтворювати вже втрачені та створювати нові популяції цих видів у природному середовищі [1]. Розведенням фазанів почали займатись ще за часів Стародавньої Греції, а мисливський фазан (*Phasianus colchicus*) досі залишається найбільш поширеним об'єктом штучного дичорозведення у всьому світі. Тому найбільш доцільно загальні методи вирощування розробляти на масових об'єктах, після чого використовувати їх і для рідкісних видів.

На відміну від сільськогосподарських, дикі тварини є більш вибагливими до якості кормів. Використання у фазанівництві кормів з великим вмістом протеїну, вітамінів та жирів викликає необхідність захисту їх від процесів переокиснення. У птахівництві для цих цілей використовують біологічно активні домішки антиоксидантного типу, які здатні гальмувати вільнорадикальне окиснення речовин та нормалізувати обмін речовин організму взагалі. Тому зараз відбувається досить активний пошук нових комплексних антиоксидантів: малотоксичних, стійких та зі значною антиокислювальною активністю[2].

Достатньо перспективним новим препаратом є дистинол, випробування якого показало значно меншу його токсичність порівняно з іонолом та ефективну ростостимулюючу дію на курчатах-бройлерах[3, 4].

Метою наших досліджень було випробування дистинолу як синтетичного антиоксиданту для стабілізації кормів молоді мисливського фазана.

### **МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ**

Досліди проводились з 1989 по 1993 рік на базі Відраднівського мисливського господарства Запорізької області та фазанарія "Холодна гора" республіки Крим.

Антиоксидантна домішка дистинол є комплексним препаратом, який утворюється шляхом взаємодії іонолу та диметилсульфоксиду [5]. Експериментальні групи утворювалися відповідно до методу аналогів при створенні однакових умов утримання контрольних і дослідних груп. Контроль за станом тварин проводили за морфометричними показниками: вага тіла, довжина тіла, крила, хвоста, цівки, дзьоба, розмах крил. Здійснювали його методом контролю росту абстрактної середньої особини, коли розмір або вага визначаються як середнє арифметичне окремих особин у вибірці [6]. Об'єм вибірки становив 30 особин, що дозволяє отримати достовірні дані. Математична обробка результатів проводилась за Г.Ф. Лакіним [7].

### **РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ**

У 1989 році було сформовано одну дослідну групу (500 особин) і контрольну (1400 особин). Для годівлі фазанят використовували індюшачий комбікорм ПК-11 з вмістом протеїну 25,5%. Дистинол додавали до основного раціону дослідної групи з 10 по 30 добу вирощування у кількості 34 мг на 1 кг живої ваги (Табл. 1). На кінець експерименту (65 доба) вага тіла дослідних тварин перевищувала контрольних на 29,1%, що можна вважати наслідком позитивного впливу домішки. Лінійні морфометричні показники були вище на 7,9-20,6%. Завдяки прискоренню ростових процесів під впливом домішки вдалося отримати тварин, здатних до інтродукції в природне середовище, у значно коротший термін. Використання дистинолу також підвищило збереженість пташенят на 5,5%.



У 1991 році було сформовано одну дослідну групу (500 особин) та контрольну (530 особин). Для годівлі тварин використовували корми з меншим вмістом протеїну - 22,5%, що разом з більш пізнім початком введення дистинолу (з 20 по 40 добу вирощування) зумовило меншу ефективність дії домішки. На 56 добу вирощування вага тіла пташенят дослідної групи була більшою лише на 17,4%, ніж у контролі, а інші показники відрізнялися на 3,2-9,3% (Табл. 1). У перші дні використання домішки практично не впливало на хід розвитку пташенят, а її найбільш ефективна дія спостерігалась наприкінці експерименту.

Було встановлено позитивний вплив дистинолу на пір'яний покрив птахів- у дослідних пташенят пір'я було більш інтенсивно та яскраво забарвленим, покращилось опірність взагалі. Менший вплив на швидкість ростових процесів може пояснюватися тим, що інтенсивний абсолютний приріст ваги тіла відбувається саме після 20 доби, що і обумовило меншу ростостимулюючу дію. Оскільки загальна збереженість пташенят була досить висока (81,4% у контролі), вплив домішки на цей показник виявився не дуже великим - збереженість дослідних пташенят становила 83,8%.

У 1993 році для вирощування пташенят використовували корми з низьким вмістом протеїну - близько 17%, що обумовило специфічну дію дистинолу. Цього року було сформовано чотири експериментальні групи по 800 особин і контрольну (800 особин). Перша отримувала дистинол з 1 по 35 добу вирощування в кількості 24 мг/кг живої ваги, а друга - з 10 по 35 добу в кількості 34 мг/кг живої ваги. Третя і четверта групи були сформовані з пташенят, батьки яких отримували дистинол. Третя група не отримувала домішки, а четверта отримувала її з 10 по 35 добу в кількості 34 мг/кг живої ваги. Контроль отримував лише основний раціон протягом усього експерименту.

Застосування дистинолу в першій дослідній групі з першої доби вирощування за умов використання низькопротеїнових кормів виявилось дещо несподіваним. Так, до 14 доби спостерігалось передчасне збільшення ваги тіла, що призвело до збільшення кількості переломів кінцівок у цій групі. Наявність переломів пояснюється використанням низькопротеїнових раціонів, у зв'язку з чим формування скелету запізнювалося більше порівняно з затримкою розвитку тварин взагалі, а через тиждень це явище зникло.

Було встановлено, що безперервне використання дистинолу більш ніж протягом 20 діб викликає інгібування ростових процесів - на 35 день вирощування усі дослідні групи практично нічим не відрізнялися від контролю, у зв'язку з чим введення домішки у кормосуміш цих груп перервали. Після перерви спостерігалось підвищення інтенсивності розвитку фазанят, але у першій експериментальній групі пташенята навіть на 42 день практично нічим не відрізнялися від контрольних (табл. 2).

Використання дистинолу в другій групі можна вважати позитивним - розбіжність по основних показниках у пташенят цієї групи і контролю становив 3,6-9,7% ( $P < 0,05$ ).

Введення дистинолу лише в кормосуміш батьківського поголів'я (дослідна група № 3) справило позитивний вплив на фізіологічний стан тварин, але ростостимулююча дія домішки до 21 доби вирощування практично не спостерігалась - очевидної відмінності від контролю не було. Інтенсивне збільшення ваги тіла почалося після 40 доби - на 42 день вирощування вона була на 13,4 г або 8,4% ( $P < 0,05$ ) вищою, ніж у контролі (табл. 2).

Достатньо вдалим можна вважати поєднання використання дистинолу на батьківському поголів'ї та молодняку (дослідна група № 4). За весь час спостережень розвиток цієї групи йшов більш інтенсивно, ніж у контролі, а інгібуючої дії домішки практично не відмічено. На 42 день вага тіла тварин була вищою від контрольних у середньому на 14,5г, або 9,1%, лінійних показників - на 4,3-5,6% (таб. 2).

Використання дистинолу в 1993 році мало позитивний вплив на збереженість та життєздатність молодняка. Збереженість пташенят по 46 день вирощування у контролі склала 56,1%, у першій групі - 78,4%, у другій - 74,3%, у третій - 76,3% і в четвертій - 77,8%. Загальна велика втрата фазанят зумовлена низькоякісними кормами, що використовувались у господарстві. Найвища збереженість пташенят у першій дослідній групі може пояснюватися введенням дистинолу в кормосуміш з першої доби вирощування.

Під час дослідів було знайдено зв'язок між вмістом протеїну в кормі та дією дистинолу - множинний коефіцієнт кореляції між вмістом протеїну, збереженістю та інтенсивністю розвитку пташенят під впливом дистинолу склав 0,91 ( $P < 0,001$ ). Аналіз часткових коефіцієнтів кореляції показав, що при використанні високопротеїнових раціонів переважає ростостимулююча дія домішки, а при низькому вмісті протеїну дистинол значно підвищує збереженість пташенят.

Таким чином, використання дистинолу як кормової домішки для молодняка мисливського фазана можна вважати виправданим незалежно від годівного раціону, що використовується. На відміну від інших синтетичних антиоксидантів, які практично не впливають на розвиток пташенят при використанні високоякісних кормів [8], цей препарат справляє значний ростостимулюючий ефект. Оскільки на низькопротеїнових раціонах він підвищує збереженість тварин, його більш доцільно використовувати з першої доби вирощування.

Таблиця 1 - Вплив дистинолу на розвиток пташенят мисливського фазана в дослідях 1989 та 1991 років (морфометричні показники на кінець експерименту)

Показники	1989 рік (65 доба)		1991 рік (55 доба)	
	Дослідна група	Контроль	Дослідна група	Контроль
Вага тіла, г	610,5 ± 12,93***	473,0 ± 11,20	388,0 ± 9,23***	330,5 ± 7,74
Довжина тіла, мм	320,9 ± 3,06***	287,0 ± 3,06	258,3 ± 2,73**	239,6 ± 2,25
Довжина дзьоба, мм	26,5 ± 0,33***	23,7 ± 0,26	22,9 ± 0,27	21,9 ± 0,26
Довжина крила, мм	195,2 ± 1,62***	180,5 ± 1,80	182,4 ± 1,64***	164,7 ± 1,84
Розмах крил, мм	662,1 ± 9,17***	613,8 ± 5,66	610,4 ± 5,28***	555,4 ± 6,00
Довжина хвоста, мм	95,3 ± 6,35	79,0 ± 5,23	93,7 ± 2,34	91,1 ± 2,63
Довжина цівки, мм	68,3 ± 0,69***	61,3 ± 0,72	62,2 ± 0,74***	57,2 ± 0,62

Таблиця 2 - Вплив дистинолу на розвиток пташенят мисливського фазана в дослідях 1993 року (морфометричні показники на 42 добу вирощування).

Показники	Дослід № 1	Дослід № 2	Дослід № 3	Дослід № 4	Контроль
Вага тіла, г	164,4 ± 4,58	175,7 ± 4,85*	173,5 ± 4,57*	174,6 ± 4,40*	160,1 ± 4,07
Довжина тіла, мм	196,4 ± 1,51*	198,9 ± 1,94**	200,8 ± 1,81***	201,2 ± 1,29***	190,5 ± 1,66
Довжина дзьоба, мм	17,5 ± 0,24	17,6 ± 0,21*	17,2 ± 0,23	17,2 ± 0,23	16,9 ± 0,19
Довжина крила, мм	135,0 ± 1,24*	137,5 ± 1,74**	135,0 ± 1,24*	136,5 ± 1,58**	130,8 ± 1,38
Розмах крил, мм	456,1 ± 3,48	463,9 ± 4,57*	465,0 ± 4,17*	462,6 ± 3,79*	450,4 ± 3,88
Довжина хвоста, мм	71,5 ± 1,80	75,8 ± 1,98	72,2 ± 1,85	71,7 ± 1,60	73,7 ± 1,71
Довжина цівки, мм	43,2 ± 0,35	45,2 ± 0,58*	44,7 ± 0,52	45,3 ± 0,60*	43,6 ± 0,45

\* - різниця достовірна при P < 0,05,

\*\* - різниця достовірна при P < 0,01

\*\*\* - різниця достовірна при P < 0,001

Досить ефективним є використання домішки на батьківському поголів'ї та на молоді. Можливо, що використання дистинолу для вирощування молодняка інших цінних та рідкісних видів тварин може значно підвищити результативність робіт по розведенню тварин у штучних умовах.

## ВИСНОВКИ

1. При використанні дистинолу на високопротеїнових кормах відбувається прискорення загального розвитку фазанят, що дозволяє в більш молодому віці здійснювати їх інтродукцію до природного середовища.
2. На низькоякісних кормах дистинол підвищує збереженість пташенят, у зв'язку з чим його використання доцільне з першої доби вирощування.
3. Необхідне випробування цієї домішки на молодняку інших видів диких тварин, яких утримують у штучних умовах.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Флинт В.Е. и др. Разведение редких видов птиц.- М.: Агропромиздат, 1986. - 206 с.
2. Двинская Л.М., Шубин А.А. Использование антиоксидантов в животноводстве. - Л.: Агропромиздат, 1986. - 160 с.
3. Калитка В.В., Лысенко В.И. Влияние комплекса ионола и диметилсульфоксида на витаминную обеспеченность и продуктивность цыплят-бройлеров// Тез. Всесоюзной конференции. - Боровск, 1991.
4. А.С. 1722391. МКИ-5 А 23 К 1/16. Способ кормления цыплят-бройлеров/ В.В. Калитка, В.И. Лысенко, Е.А. Шкопинский. - Опубл. 30.03.92.- Бюл. № 12
5. Калитка В.В., Андрійчук П.Е. Антиоксиданти в годівлі птиці. Методичні рекомендації. - Львів, 1993. - 37 с.
6. Курочкин С.Л. Особенности постэмбрионального развития обыкновенного фазана в Северо-западном Причерноморье// Дичеразведение в охотничьем хозяйстве. - М., 1985. - С. 85-101.
7. Лакин Г.Ф. Биометрия. - М.: Высшая школа, 1990.- 352 с.
8. Ясунас В. Влияние некоторых антиоксидантов в комбикормах на рост и жизнеспособность мясных цыплят// Сб. науч. тр. Прибалт. зон. опытной станции по птицеводству.- 1987. - № 11. - С. 58-64.

УДК 669.5:61

## ПРО РОЛЬ ЦИНКУ В НЕЙРОМЕДІАТОРНІЙ ФУНКЦІЇ ГІПОКАМПУ

Кучковський О. М.

Різними методами цинк продемонстрований у нейронах гіпокампу [1 - 4]. Було висунуте припущення, що цинк акумулюється в синаптичних пухирцях у вигляді комплексу із збуджуючим нейромедіатором глютаміновою кислотою, подібно до цинк-інсуліновому комплексу в секреторних гранулах панкреатичних клітин [1 - 5]. Для вирішення цього питання були проведені дослідження з використанням в якості конвульсанта 8-(бензолсульфоніламіно)-хіноліну (8-БСХ), а для отримання цитохімічної реакції на цинк в гіпокампі - 8-(п-толуолсульфоніламіно)-хіноліну (8-ТСХ). Обидва реагенти дають високоселективну реакцію з цинком.

Дослідження проводились на 136 мишах. Серед них були інтактні тварини та миші, що отримали внутрішньочеревинно ін'єкції 8-БСХ, діетилдітіокарбамату натрію (ДЕДТКН), а також сіркокислого магнію та хлористого кальцію.

8-БСХ вводили у вигляді 0,5% розчину на 0,1 н розчині їдкового натру в дозах 200 і 400 мг/кг, ДЕДТКН призначали у вигляді 10% розчину в кількості 1000 мг/кг. Сірководоксидний магній та хлористий кальцій - в дозі 200 мг/кг у вигляді 10% розчинів, солі магнію та кальцію вводились за 2 години до ін'єкції хіноліну.

У тварин при житті відмічалися інтенсивність і тривалість судорог після введення 8-БСХ. Їх забивали через 30 хв і 2 год після ін'єкції хіноліну та ДЕДТКН.

Заморожені зрізи головного мозку товщиною 30 - 60 мкм використовували для дослідження інтравітальної реакції хінолінів з цинком і проведення гістохімічної реакції 8-ТСХ з цим металом. У випадку дослідження інтравітальної реакції використовуються нативні зрізи, тобто не оброблені 8-ТСХ. Для цього зрізи зразу з заморожуючого мікротому переносяться на предметні стекла, змочуються дистильованою водою, замикаються в гліцерин та мікроскопуються у світлі люмінесценції. Для збудження останньої використовується світлофільтр ФС-1, а як захисного (окулярного) використовується світлофільтр з скла ЖС-18. На препаратах інтравітальна реакція виявляється по жовто-зеленому світінню.

Для отримання гістохімічної реакції з цинком зрізи оброблюються протягом 1 хв 0,01% ацетоновим розчином 8-ТСХ. При цьому відбувається одночасна фіксація і забарвлення зрізу. Промиті в дистильованій воді (протягом 5 хвилин) зрізи закладаються в гліцерин та досліджуються у світлі люмінесценції, як і інтравітальна реакція. Присутність цинку в гіпокампі встановлюється за жовто-зеленою люмінесценцією нейронів гіпокампу.

Інтенсивність реакції оцінювалась за бальною системою: за один бал приймається слабка, за два - помірна, три - виражена за інтенсивністю реакція.

Уведення мишам 8-БСХ викликало розвиток у них тоніко-клонічних судорог, інтенсивність і тривалість яких залежала від дози хеланту (табл. 1). Якщо при дозі 200 мг/кг судороги були помірними, а їх тривалість складала  $3,5 \pm 0,46$  хв, то при введенні 400 мг/кг 8-БСХ (контроль) виникали інтенсивні судороги тривалістю  $16,2 \pm 2,37$  хв.

На нативних зрізах головного мозку мишей, що були забиті через 30 хв після введення 8-БСХ, виявлялась інтравітальна реакція у вигляді жовто-зеленої люмінесценції в області зубчатої фасції, полів СА2-СА4 амонова рога. Як видно з таблиці 1 при дозі 8-БСХ 200 мг/кг реакція була слабкою, а його введення в кількості 400 мг/кг - помірна за інтенсивністю. Попереднє введення солей магнію та кальцію суттєво не впливало на інтенсивність інтравітальної реакції 8-БСХ в гіпокампі, а також на інтенсивність і тривалість судорог, що викликані 8-БСХ.

Таким чином існує залежність між інтравітальною реакцією 8-БСХ у гіпокампі та його судорожною дією.

На зрізах головного мозку, що флуорохромовані 8-БСХ, спостерігалась жовто-зелена люмінесценція в області зубчатої фасції та полів СА2 - СА4 гіпокампу. При порівнянні цитохімічної реакції 8-БСХ з картиною при забарвленні гематоксилин-флоксином, азуром чітко видно концентрування цинку в ділянках розташування гранулярних та пірамідних клітин.

Таблиця 1- Інтенсивність інтравітальної реакції 8-БСХ в гіпокампі, а також інтенсивність і тривалість судорог у мишей, які отримали 8-БСХ

Агент	Доза, мг/кг	Інтенсивність судорог	Тривалість судорог, хв	Інтенсивність інтравітальної реакції
8-БСХ (контроль)	400	+++	$16,2 \pm 2,37$	++
8-БСХ	200	++	$3,5 \pm 0,46$	+
Сіль магнію +	200		( $p < 0,001$ )	
8-БСХ	400	+++	$13,1 \pm 1,67$	++
Сіль кальцію +	200		( $p > 0,05$ )	
8-БСХ	400	+++	$12,8 \pm 2,43$	++
			( $p > 0,05$ )	

Специфічність гістохімічної реакції 8-ТСХ з цинком в гіпокампі доказувалась наступним чином. Попередня обробка нативних зрізів головного мозку 10% водним розчином ДЕДТКН або 0,1 М розчином етілендіамінтетраацетату (ЕДТА) попереджувало отримання на зрізах позитивної люмінесцентної реакції 8-ТСХ. Після екстракції з зрізів продукту цієї реакції за допомогою хлороформу або чотирьоххлористого вуглецю вдруге цитохімічна реакція 8-ТСХ на цих зрізах не відбувалась. 8-ТСХ використовується в аналітичній хімії як високоселективний люмінесцентний реагент на цинк [1].

У таблиці 2 наведені дані вмісту цинку в гіпокампі після введення тваринам хелантів (8-БСХ і ДЕДТКН).

Таблиця 2 - Інтенсивність гістохімічної реакції 8-ТСХ в гіпокампі у мишей після введення хелантів (контроль - інтактні тварини)

Хелант	Доза, мг/кг	Інтенсивність реакції	
		X±m	p
Контроль		2,0±0,11	
8-БСХ	200	1,5±0,17	<0,05
8-БСХ	400	1,1±0,17	<0,05
ДЕДТКН	1000	0	<0,001

З таблиці чітко видно, що хеланти викликають зниження вмісту в гіпокампі цинку, що визначається гістохімічно, причому найбільший вплив спостерігається з боку ДЕДТКН. Після введення останнього навіть відмічалась негативна реакція на цинк. У даному випадку мова йде не про втрату нейронами цинку, а про його блокування (маскування) ДЕДТКН. Підкріпленням цього служить виявлення цинку на озолених зрізах головного мозку. Для цього предметні стекла з зрізами витримувались у муфельній пічці протягом 6 - 12 годин при температурі 450°C. У результаті цього відбувалось озолення тканин на зрізі, але зберігався її рисунок. На отримані таким чином сподограми наносився 0,01% ацетонової розчин 8-ТСХ, потім їх промивали дистильованою водою і мікроскопували у світлі люмінесценції. При цьому не було відмічено значної різниці між зрізами інтактних тварин і тих, що отримали ДЕДТКН. Попереднє введення солей магнію та кальцію не впливало на зміну вмісту цинку в нейронах гіпокампу при наступному введенні хелантів.

Таким чином, не всі агенти, що зв'язують цинк (хеланти) здібні викликати розвиток судорог у тварин. Це можна пояснити тим, що зв'язування цинку ще не означає позбавлення його головних функцій. Якщо цинк у синаптичних пухирцях, подібно до цинку в панкреатичних бета-гранулах, сприяє утворенню «депо-форми» секреторного матеріалу, то звільнення секрету нейромедіатора можливе лише у випадку відщеплення цього металу, на що не здібні всі хеланти. Певно ДЕДТКН не відщепляє цинк і утворює змішаний комплекс з цинком і нейромедіатором у синаптичних пухирцях.

Результати досліджень підтверджують висунуте раніше припущення [2] про те, що в гіпокампі цинк акумулюється в синаптичних пухирцях у вигляді комплексу з збуджуючим нейромедіатором глютаміновою кислотою. Можна гадати, що вихід цього медіатора з синаптичних пухирців здійснюється в результаті відщеплення від нього іонів цинку сильними біолігандами металотіонеїнами, що знайдені в різних клітинах, у тому числі і в нейронах гіпокампу [6, 7].

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ещенко В. А. Гистохимическое исследование цинка. //Цитология. - 1978. - № 8. - С. 927-933.
2. Кузнецов В. И. Глутамат и цинк в передаче нервных импульсов в гигантских синапсах мшистых волокон гиппокамповой формации. //Нейрохимия и физиология синаптических процессов. - Пушино-на-Оке, 1976. - С. 26-27.
3. De Biasi S., Brendotti C. A. Simplified procedure for the physical development of the sulphide silver method to reveal synaptic zinc in combination with immunocytochemistry at light electron microscopy. // J. Neurosci Methods. - 1998. - V. 79. - P. 87-96.
4. Chausmer A. B. Zinc, insulin and diabetes. //J. Am. Coll. Nutr. - 1998. - V. 17. - P. 109-115.
5. Chen Q. X., Perkins K. L., Wong R. K. S. Zn<sup>2+</sup> block the NMDA- and Ca<sup>2+</sup> triggered postexposure current ipe in hippocampal pyramidal cells. //J. Neurophysiol. - 1998. - V. 79. - P. 1124-1126.
6. Deng D. X., Ono S., Koropatnick J., Cherian M. G. Metallothionein and apoptosis in the toxic milk mutant mouse.// Lab. Invest. - 1998. - V. 78. - P. 175-183.
7. Saito S., Kojima Y. Differential role of metallothionein on Zn, Cd and Cu accumulation in hepatic cytosol of rats. //Cell Mol. Life Sci. - 1997. - V. 53. - P. 267-270.

## ПОШУК БІОЛОГІЧНО АКТИВНИХ РЕЧОВИН НА ОСНОВІ S-(ХІНАЛЬДИНІЛ-4)-L (-)-ЦИСТЕЇНУ

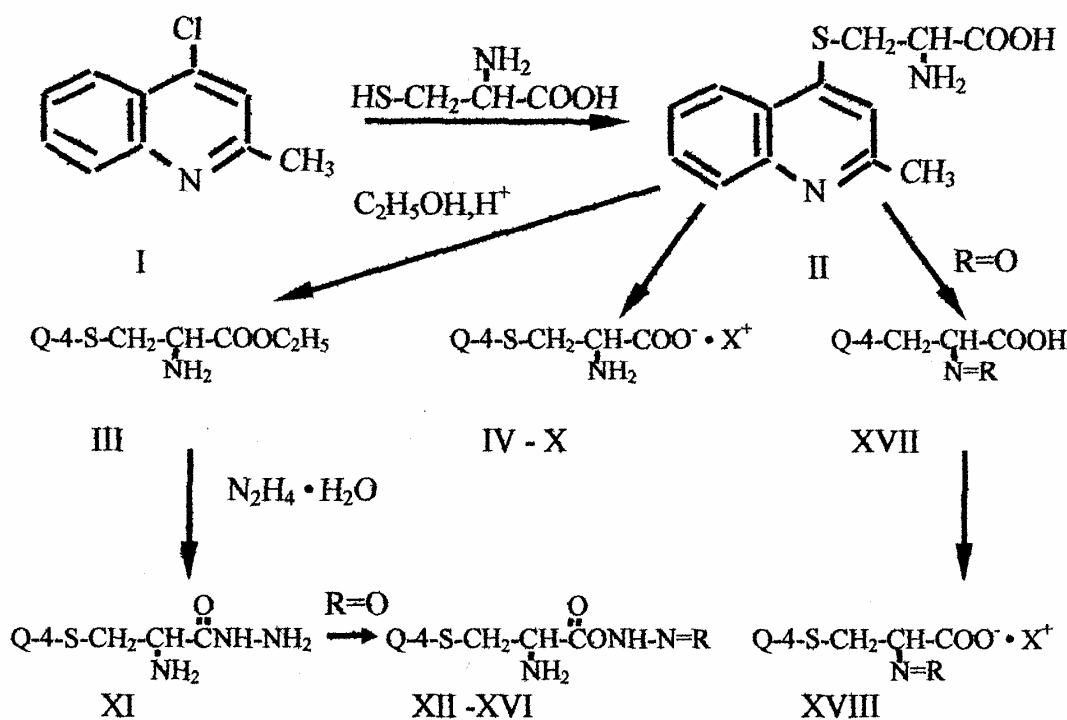
Омельянчик Л.О., Бражко О.А., Рильський О.Ф., Новосад Н.В., Завгородній М.П.

У наш час пильну увагу дослідників привертають похідні хіноліну. Сьогодні в арсеналі сучасної медицини налічується багато лікарських засобів з групи похідних хіноліну (хінозол, нітроксолін, ентеросептол, хіноцид та ін.) [4,7,9]. Відомі в науковій літературі дані свідчать про різні теоретичні та прикладні аспекти вивчення похідних хіноліну, про досить інтенсивні дослідження та перспективність роботи в цьому напрямку [1,3,8].

Відомо, що похідні хіноліну в першу чергу привертають до себе увагу як протимікробні та протозойні лікарські засоби [1,4]. Здебільшого це аміно- або гідроксипохідні, а що стосується сірчаних похідних хіноліну, то вони являють собою маловивчений ряд сполук.

Метою даного дослідження є пошук нових речовин з потенційною антимікробною дією серед похідних S-(хінальдиніл-4)-L (-)-цистеїну (S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїн), який поєднує у своїй структурі хіноліновий цикл та L (-) цистеїн-амінокислоту, яка бере участь у важливих біохімічних процесах [4,6].

Схема



Q - 2-метилхінолід, R, X - див. таблицю

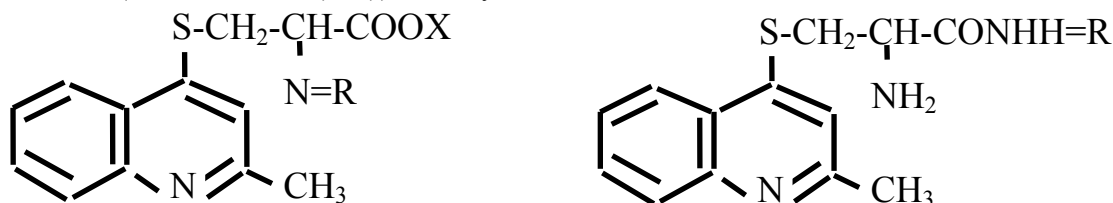
Реакцією 2-метил-4-хлорхіноліну (I) з L (-)-цистеїном у середовищі спирту в присутності еквівалентної кількості луку синтезовано S-(2-метилхіноліл-4)-L (-)-цистеїн (II). Етерифікацією S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (II) з етанолом у присутності каталітичної кількості сірчаної кислоти синтезовано етиловий ефір S-(2-метилхіноліл-4)-L (-)-цистеїну (III). Останній при взаємодії з надлишком гідрозингідрату утворює гідразид (XI). Конденсацією гідразиду (XI) з ароматичними та гетероциклічними альдегідами в середовищі спирту одержано іліденгідразиди (XII - XVI). З метою вивчення впливу катіонного фрагменту на біологічну активність взаємодією S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (II) з неорганічними та органічними основами в середовищі спирту синтезовано відповідні солі (IV - X). Конденсацією сполуки (II) з п-диметиламінобензальдегідом у середовищі спирту одержано основу Шіфа (XVII) та її натрієву сіль (XVIII).

S-(2-Метилхіноліл-4)-L (-)-цистеїн (II) - сполука жовтого кольору, розчинна у нижчих спиртах та спиртоводних сумішах. Ефір (III) - безкольорова сполука, розчинна у воді, нижчих спиртах, діоксані та диметилформаміді. Гідразид (XI) - сполука оранжевого кольору, добре розчинна у воді, нижчих спиртах,

ДМФА, діоксані. Гліденгідразиди (XII - XVII) - сполуки жовтого або коричневого кольору, розчинні в органічних розчинниках, нерозчинні у воді, ефірі. Основи Шіфа (XVII, XVIII) - речовини жовтогарячого кольору, розчинні у ДМФА, діоксані, спиртах, а XVIII - важкорозчинна у воді сполука.

Будову одержаних сполук підтверджено даними елементного аналізу (табл.) та ІЧ-спектроскопії.

Таблиця 1 - Похідні S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну



Сполука	II - X, XVII, XVIII		XI - XVI		
	X	R	Вихід, %	T топл., °C	Емпірична формула
II	H <sup>+</sup>	H <sub>2</sub>	85	178 - 80	C <sub>13</sub> H <sub>14</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> S
III	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	H <sub>2</sub>	91,2	148 - 50	C <sub>15</sub> H <sub>18</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> S
IV	K <sup>+</sup>	H <sub>2</sub>	74,2	207 - 10	C <sub>13</sub> H <sub>13</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> SK
V	Na <sup>+</sup>	H <sub>2</sub>	69,4	215 - 20	C <sub>13</sub> H <sub>13</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> SNa
VI	морфоліній	H <sub>2</sub>	87,4	185 - 87	C <sub>18</sub> H <sub>25</sub> N <sub>3</sub> O <sub>2</sub> S
VII	піперидиній	H <sub>2</sub>	85,8	174 - 76	C <sub>17</sub> H <sub>23</sub> N <sub>3</sub> O <sub>2</sub> S
VIII	$\begin{array}{c} \text{CH}_2 - \text{NH}_3 \\   \\ \text{CH}_2 \\   \\ \text{OH} \end{array}$	H <sub>2</sub>	81,3	156 - 58	C <sub>15</sub> H <sub>21</sub> N <sub>3</sub> O <sub>3</sub> S
IX	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	H <sub>2</sub>	82,4	182 - 85	C <sub>13</sub> H <sub>17</sub> N <sub>3</sub> O <sub>2</sub> S
X	H • 2HCl	H <sub>2</sub>	78,9	197 - 200	C <sub>13</sub> H <sub>16</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> SCl <sub>2</sub>
XI	-	H <sub>2</sub>	84,6	212 - 15	C <sub>13</sub> H <sub>16</sub> N <sub>4</sub> OS
XII	-	м-нітробензиліден	65,8	> 250	C <sub>20</sub> H <sub>19</sub> N <sub>5</sub> O <sub>3</sub> S
XIII	-	о-нітробензиліден	84,6	200 - 02	C <sub>20</sub> H <sub>19</sub> N <sub>5</sub> O <sub>3</sub> S
XIV	-	2-гідрокси-5-бромбензиліден	84,7	> 250	C <sub>20</sub> H <sub>19</sub> N <sub>4</sub> O <sub>2</sub> SBr
XV	-	5-нітрофурил-2-акриліден	89,2	195 - 98	C <sub>20</sub> H <sub>19</sub> N <sub>5</sub> O <sub>4</sub> S
XVI	-	4-диметил-амінобензиліден	87,6	205 - 10	C <sub>22</sub> H <sub>25</sub> N <sub>5</sub> OS
XVII	H <sup>+</sup>	4-диметил-амінобензиліден	92,5	112 - 15	C <sub>22</sub> H <sub>23</sub> N <sub>3</sub> O <sub>2</sub> S
XVIII	Na <sup>+</sup>	4-диметил-амінобензиліден	91,7	138 - 40	C <sub>22</sub> H <sub>22</sub> N <sub>3</sub> O <sub>2</sub> SNa

Примітка. Дані елементного аналізу відповідають розрахунковим. Сполуки II - XVIII кристалізовано з етанолу або з суміші етанол-вода (2:1).

Для ІЧ-спектрів похідних S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну характерна наявність інтенсивної смуги вбирання в ділянці 1740-1680 см<sup>-1</sup>, яка пов'язана з валентними коливаннями С=О карбоксилу, а також смуги валентних коливань -CH<sub>2</sub>-S у ділянці 690-660 см<sup>-1</sup>. В ІЧ-спектрах синтезованих сполук з заблокованою α-аміногрупою реєструються смуги NH<sub>2</sub> у ділянці 1600-1570 см<sup>-1</sup>, NH у ділянці 3300-3200

см<sup>-1</sup>. Крім того одержані сполуки виявляють в ІЧ-спектрах смуги вбирання валентних коливань  $\nu_{C=C}$  та  $\nu_{C=N}$  у ділянці 1640-1600 см<sup>-1</sup>.

Протимікробну активність синтезованих сполук визначено методом серійних розведень [2,5] на чотирьох штаммах: *Ech. coli*, *Bacillus subtilis*, *Pseudomonas aeruginosa*, *Staphylococcus aureus*. Встановлено, що одержані речовини проявляють помірну антибактеріальну дію за рідким винятком до *St. aureus* та *B. subtilis* у концентрації 100-200 мкг/мл.

Найбільшу антибактеріальну дію мають гідрозид S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну, який утискує ріст всіх чотирьох штамів мікроорганізмів, та сполука (XIII), яка містить у своїй структурі залишок 5-нітрофурану.

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

ІЧ спектри знято на приладі "Specord" у таблетках калію броміду. Тонкошарову хроматографію проводили на пластині "Silufol" UV-254 словацького виробництва. 2-Метил-4-хлорхінолін (1) одержано за відомим методом [ 7 ].

### S-(2-Метилхіноліл-4)-L (-) цистеїн (II)

До розчину 1,90 г (0,01 мол) L(-)-цистеїну в 50 мл етанолу додають 0,57 г (0,01 мол) гідроксиду калію і 1,95 г (0,01 мол) 2-метил-4-хлорхіноліну (1). Суміш кип'ятять 2 години, охолоджують, відфільтровують від осаду калію хлориду, розчинник відганяють. Осад, що утворився, відфільтровують, промивають водою, сушать.

### Етиловий ефір S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (III)

До розчину S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (II) в 15 мл етилового спирту додають каталітичну кількість сірчаної кислоти. Розчин кип'ятять 3 години, охолоджують, розчинник відганяють. Осад, що утворився, збирають, промивають водою, сушать.

### Солі S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (IV-IX)

До розчину 2,63 г (0,01 мол) S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну в 30 мл етилового спирту додають 0,01 мол відповідної основи. Реакційну суміш нагрівають протягом 10 хвилин, охолоджують, додають 50 мл ефіру. Осад, що утворився, відфільтровують, сушать.

### Дигідрохлорид S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (X)

До розчину S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (II) в 15 мл етилового спирту додають двократний надлишок соляної кислоти (0,02 мол). Реакційну суміш нагрівають протягом 10 хвилин, охолоджують, додають 50 мл ефіру. Осад, що утворився, відфільтровують, сушать.

### Гідрозид S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (XI)

До розчину 2,91 г (0,01 мол) етилового ефіру S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну в 20 мл діоксану додають 1,5 г (0,03 мол) гідрозингідрату. Реакційну суміш кип'ятять 1 годину, розчинник відганяють, осад збирають, промивають водою, сушать.

### N-(4-диметиламінобензиліден)-S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (XVII)

До розчину 2,63 г (0,01 мол)-S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну в 30 мл етанолу додають розчин 1,4 г (0,01 мол) п-диметиламінобензальдегіду в 10 мл етанолу та каталітичну кількість соляної кислоти. Кип'ятять реакційну суміш протягом 1 години, охолоджують. До реакційної суміші додають диетиловий ефір, осад відфільтровують, сушать.

### Натрієва сіль N-(4-диметиламінобензиліден)-S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну (XVIII).

До розчину 0,2 г гідроксиду натрію в 20 мл етанолу додають 1,91 г N-(4-диметиламінобензиліден)-S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну. Кип'ятять реакційну суміш протягом 10 хвилин, охолоджують, виливають в диетиловий ефір. Осад відфільтровують, сушать.

## ВИСНОВКИ

Здійснено синтез S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну та його похідних: солей, ефіру, гідрозиду та іліденгідрозидів. Взаємодією S-(2-метилхіноліл-4)-L (-) цистеїну з п-диметилбензальдегідом отримана основа Шіфа та її натрієва сіль.

Встановлено, що синтезовані сполуки проявляють помірну антибактеріальну дію.



## ЛІТЕРАТУРА

1. Альберт А. Избирательная токсичность. Физико-химические основы терапии.-М.: Медицина, 1989.- 300 с.
2. Справочник по микробиологическим и вирусологическим методам / Под ред. М.О.Бригера.- 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Медицина, 1982.- 462 с.
3. Кучма І.Ю. Протимікробна активність та біологічна дія хіноацетильованих цукрів // Автореф. дис. . канд. мед. наук. - Харків, 1995.- 27 с.
4. Машковский Н.Д. Лекарственные средства. Ч.2.- М.: Медицина, 1994.- 528 с.
5. Методы экспериментальной химиотерапии. Практ. руководство / Под ред. Г.И. Першина.- М.: Медицина, 1971.- 537 с.
6. Тюкавкина Н.А., Бауков Ю.И. Биоорганическая химия.-М.: Медицина, 1985.- 480 с.
7. Рубцов М.В., Байчиков А.Г. Синтетические химико-фармацевтические препараты.-М.: Медицина, 1971.- 328 с.
8. Черных В.П., Зименковский Б.С. Гетероциклические соединения с одним гетероатомом.- К., 1989.- 59 с.
9. Державний реєстр лікарських засобів України / Гол. ред. Шарикіна Н.І.; Заст. гол. ред.- Захаренко В.В.; Науково-техн. ред. - Бухтіарова Т.Д.; Ред. кол.: Барбашова Н.В., Гетьман Г.О., Ковальова В.П. та ін.-К.: PC Wozld UKRAINE, 1996.- 364 с.

УДК 665.374.93:581.5

## БІОЛОГІЧНО АКТИВНІ РЕЧОВИНИ ВОДНОГО КОМПЛЕКСУ КОРЕНІВ ЛОПУХА ВЕЛИКОГО (ARCTIUM LAPPA)

Омельянчик Л.О., Січава О.М.

У теперішній час великою популярністю користуються лікарські засоби рослинного походження. Перевірені лікарські рослинні препарати більш безпечні для хворих, практично не виявляють шкідливої побічної дії, менш токсичні. У науковій медицині знаходять своє використання 3% вищих рослин. Ці рослини занесені до Державних Фармакопей багатьох країн. Але існують і такі рослини, які повністю не вивчені, тому лікувальні властивості, які містяться у цих рослинах, залишаються не використаними. До таких рослин відноситься і лопух великий (*Arctium lappa*) з родини складноквіткових (*Compositae*).

До 1880 року лопух входив до російської фармакопеї, у наш час його розглядають у деяких зарубіжних навчальних посібниках з фармакогнозії [1].

Лікувальне використання лопуха відоме з глибокої давнини. У фармації та офіційній медицині корені лопуха відомі як сировина для одержання реп'яхової олії – засобу для зміцнення та покращення росту волосся.

Великою популярністю лопух користується в народній медицині. Його застосовують при порушеннях обміну речовин, як сечогінне, потогінне, жовчогінне, кровоочищувальне. Використовують при водянці, подагрі, ревматизмі, артрозах, остеохондрозах, цукровому діабеті, туберкульозі легенів, гастритах, гастроентеритах, ентеритах. Зовнішньо – ранозагоювальне, заспокійливе при болях у суглобах, при хворобах шкіри. Іноді використовують при ракових пухлинах стравоходу, шлунку та шкіри. Лопух допомагає при гострих лихоманках, інтоксикаціях (отруєннях солями важких металів і органічними сполуками), а також при укусах змій та комах [2-4].

Незважаючи на те, що лопух великий (*Arctium lappa*) давно і широко застосовують у народній медицині, повного фітохімічного вивчення його не проводили, тому ми поставили за мету провести більш глибоке вивчення біохімічного складу водного комплексу з коренів *Arctium lappa* та прогнозування можливостей його використання в науковій медицині та інших галузях народного господарства.

Як сировина використовувались висушені корені лопуха великого - *Arctium lappa*. Для біохімічного аналізу застосовувалось водне витягнення (відвар), виготовлене з подрібненої, просіяної сировини – коренів *Arctium lappa*, відповідно до рекомендацій ДФ XI [5,6].

Якісне визначення біологічно активних речовин проводили пробірочними засобами, заснованими на кольорових реакціях і реакціях осадження. У результаті у водному комплексі з коренів лопуха великого були виявлені: слиз (суміш чорної туші та води (1:9), метиленовий синій, розчин КОН, амоніак), інулін ( $\alpha$ -нафтол, тимол), сапоніни стероїдної групи (реакція на піноутворення, основний плюмбум ацетат, реакція Лафона, натрій нітрит), алкалоїди (реактив Вагнера, Бушарда, Драгендорфа, танін, фосфорновольфрамowa кислота, пікринова і пікролонова кислоти), дубильні речовини конденсованої групи (1% залізоамонійний галун). Якісні реакції на присутність крохмалю, антраценопохідних, фенологлікозидів дали негативний результат [7].

Хроматографічний аналіз водного комплексу з коренів *Agrostium lappa* на наявність фенолкарбонових кислот і дубильних речовин проводили на хроматографічному папері в системах п-бутанол-оцтова кислота – вода (4:1:5)(1) і 15% оцтова кислота (2) з наступною обробкою парами амоніаку, п-нітроаніліновим реактивом, 1% розчином залізоамонійного галуна [7,8].

У результаті хроматографічного аналізу у водному комплексі з коренів *Agrostium lappa* достоту встановлено наявність кавової кислоти  $R_f^{1,2}$  0,78; 0,39. Припустімо ідентифіковані п-оксибензойна кислота  $R_f^1$  0,14; галова кислота  $R_f^{1,2}$  0,65; 0,49 та хлорогенова кислота  $R_f^2$  0,61. Крім того, хроматографічно були підтверджені дані якісного визначення вмісту дубильних речовин конденсованої групи  $R_f^{1,2}$  0,37; 0,24 (табл.1,2).

Кількісне визначення дубильних речовин можливо було б проводити титриметричним методом Левенталя, який запропонований ДФ XI [6], але цей метод дозволяє визначити не стільки вміст дубильних речовин, скільки суму всіх окиснених поліфенольних сполук, які переходять у водний витяг. Тому визначення поліфенолів, дубильних речовин і фенолкарбонових кислот вели за методикою М.Н. Денисової і Т.Л. Кисельової [9].

Таблиця 1 – Аналіз хроматографії на папері водного комплексу коренів *Agrostium lappa* в системі п-бутанол-оцтова кислота-вода (4:1:5)

№	$R_f$	К о л і р   п л я м								Ідентифікація
		До обробки реактивами		Пари амоніаку		п-нітроаніліновий реактив (та 20% $Na_2CO_3$ )		1% залізоамонійний галун		
		В С	УФ	В С	УФ	В С	УФ	В С	УФ	
1	0,24	-	поглин. з фіол. відтінк	жовт.	сіро-блакитн.	темно-жовт.	сіро-блак.	чорно-зелен	поглин. з фіол. відтінк	конденсовані дубильні речовини
2	0,30	-	блакит.	жовт.	блакитн.	жовт.	блак.	-	блакит.	фенолкарбонова кислота
3	0,39	-	блакит.	яскр.-жовт.	яскраво-блакитн.	корич-жовт.	яск-раво-блак.	-	блакит.	кавова кислота
4	0,49	-	блідо-блакит.	жовт.	блакитн.	жовт.	блак.	-	блідо-блакит.	галова кислота
5	0,61	-	блакит.	яскр.-жовт.	синьо-зелен.	жовт.-корич	синьо-зел.	-	блакит.	хлорогенова кислота
6	0,39	-	блакит.	яскр.-жовт.	яскр.-блакитн.	корич-жовт.	яскр-зел.	-	блакит.	свідок: кавова кислота
7	0,42	-	світло-поглин.	темн.-жовт.	сіро-блакитн.			чорно-синій	світло-поглин.	свідок: танін

Таблиця 2 – Аналіз хроматографії на папері водного комплексу коренів *Arctium lappa* в 15% оцтовій кислоті

№	R <sub>f</sub>	Колір плям								Ідентифікація
		До обробки реактивами		Пари амоніаку		п-нітроаніліновий реактив (та 20% Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> )		1% залізоамонійний галун		
		В С	УФ	В С	УФ	В С	УФ	В С	УФ	
1	0,14	-	блакит.	жовт.	яскр.-блакитн.	блідо-жовт. рожев	блак.	-	блакит.	п-оксибензойна кислота
2	0,24	-	блакит.	жовт.	яскр.-блакитн.	темн.-жовт.	блак.	-	блакит.	фенолкарбонова кислота
3	0,37	-	поглин.з фіол. відтін.	яскр.-жовт.	сіро-блакитн.	темн.-жовт.	сіро-блак.	чорно-зелен	поглин.з фіол. відтінк	конденсовані дубильні речовини
4	0,65	-	блідо-блакит.	яскр.-жовт.	блакит.	жовт. св-коричн.	блак.	-	блакит.	галола кислота
5	0,78	-	блакит.	яскр.-жовт.	яскр.-блакитн.	корич-жовт. св-син.	яск-раво-блак.	-	яскр.-блакит.	кавова кислота
6	0,78	-	блакит.	яскр.-жовт.	яскр.-блакитн.	корич-жовт. св-син.	яск-раво-блак.	-	яскр.-блакит.	свідок: кавова кислота
7	0,69	-	світо-поглин.	темн.-жовт.	сіро-блакитн.			чорно-син.	світо-поглин.	свідок: танін

Спочатку у водному комплексі титриметрично визначили вміст поліфенолів (8,75±0,02%), потім проводили осадження дубильних речовин 0,5% розчином желатину. У надосадній рідині визначали вміст фенолкарбонових кислот (1,87±0,04%). Кількісний вміст дубильних речовин визначали як різницю між сумою поліфенолів і сумою фенолкарбонових кислот (6,86±0,05%) (табл.3).

Кількісне визначення водорозчинних полісахаридів (інуліна) проводили гравіметричним методом (ДФ XI) [6]. Полісахариди добувались гарячим способом з наступним осадженням 95% етанолом. Вміст полісахаридів розраховувався на абсолютно суху сировину, він склав 35,76±0,02% (табл.3).

Таблиця 3 – Кількісне визначення біологічно активних речовин у водному комплексі з коренів *Arctium lappa*

	n	f	p	t(p,f)	$\bar{X}$	S	S <sup>2</sup>	S <sub>x</sub>	$\Delta \bar{X}$	$\bar{E}_1\%$	Cv <sub>1</sub> %
Поліфеноли	3	2	95	4,30	8,75	0,0071	0,00005	0,0041	0,02	0,21	0,08
Дубильні речовини	3	2	95	4,30	6,86	0,0212	0,00045	0,0122	0,05	0,77	0,31
Фенолкарбонові кислоти	3	2	95	4,30	1,87	0,0141	0,0002	0,0081	0,04	2,14	0,75
Водорозчинні полісахариди(інулін)	3	2	95	4,30	35,76	0,0071	0,00005	0,0041	0,02	0,05	0,02

Отримані дані свідчать про можливість використання препаратів з коренів лопуха великого (*Arctium lappa*) в науковій медицині. Так, вміст у коренях *Arctium lappa* фенолкарбонових кислот дозволяє вживати препарати з нього як сечогінний, жовчогінний і протибактеріальний засіб.

Інулін покращує обмін речовин в організмі і використовується при легких формах цукрового діабету. Наявність дубильних речовин дозволяє застосовувати препарати з кореня лопуха великого як противиразкові, ранозагоювальні та антитоксичні засоби. На основі наявних у рослині алкалоїдів можна виготовляти препарати протипухлинної дії.

У дерматології можливе застосування препаратів з кореня *Arctium lappa*, які володіють протиалергенним ефектом. У перспективі передбачається розробка нових виробів у парфумерії і косметичці на основі реп'яхової олії і екстрактів з коренів *Arctium lappa*.

Доцільно вживати лопух великий у харчуванні. Блюда з нього, сок з рослини самостійно і в поєднанні з соком інших рослин – добрий засіб від раку, особливо в немолодому віці.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Харламов И.А., Хазанович Р.Л., Халматов Х.Х. Фармакогностическое изучение репейника войлочного (*Arctium tomentosum* Mill) и голоосемянного (*Arctium leospermum* Guz et serg.), произрастающих в Узбекистане // Фармация.-1968.-№3 - С.45-49.
2. Губергріц О.Я., Соломченко М.І. Лікарські рослини Донбасу / Під ред. А.Я. Кобзар.-6-е вид., випр. і доп.—Донецьк: Донбас, 1992.-272с.
3. Памуков Д.П., Ахтаджієв Х.З. Аптека живої природи.-К.: Урожай, 1991.-304с.
4. Кархут В.В. Жива аптека.- К.: Здоров'я, 1992.-312с.
5. Государственная Фармакопея СССР: Вып.1 Общие методы анализа / МЗ СССР – 11-е изд., доп.— М.: Медицина, 1987.-336с.
6. Государственная Фармакопея СССР: Вып.2 Общие методы анализа / МЗ СССР – 11-е изд., доп.— М.: Медицина, 1987.-400с.
7. Химический анализ лекарственных растений: Учеб.пособие для фармацевтических вузов / Е.Я. Ладынина, Л.Н. Сафронич, В.Э. Отрященкова и др. Под ред. Гринкевич Н.И., Сафронич Л.Н.—М.: Высшая школа, 1983.-176с.
8. Запрометов М.Н. Основы биохимии фенольных соединений.—Учеб.пособие для биологических специальностей университетов.—М.: Высшая школа, 1974.-214с.
9. Денисова М.Н., Киселева Т.Л., Самылина И.А. Определение содержания дубильных веществ в цветках и плодах некоторых представителей рода *Crataegus* L.// Ресурсоведческое и фитохимическое изучение лекарственной флоры СССР: Научные труды, том XXIX / Всесоюзный НИИ фармации, Под ред. И.С. Грицаенко.—М.,1991.-С.136-143.

УДК 591.181:591.481

## ЗМІНИ ВИКЛИКАНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ПІДКОРКОВИХ ЗОРОВИХ ЦЕНТРІВ І КОРИ ВЕЛИКИХ ПІВКУЛЬ ПІСЛЯ МЕЗЕНЦЕФАЛІЧНОГО ПЕРЕРІЗУ СТОВБУРА МОЗКУ

Паламарчук І. Г.

У попередніх дослідженнях нами виявлені та описані зміни структури викликаних потенціалів (ВП) зорової області кори мозку на світлове подразнення ока після мезенцефалічної секції [1, 2]. Однак залишалося нез'ясованим, де відбуваються ці зміни ВП: у зоровій корі, чи в підкоркових зорових структурах. Теперішнє дослідження присвячене рішення цього питання. З цією метою проведено порівняльне вивчення ВП, що виникають на світлове подразнення ока у підкоркових зорових центрах (латеральне колінчате тіло, подушка зорового бугра, верхній горбик чотиригорбикового тіла) і в корі великих півкуль, а також досліджені викликані потенціали в корі мозку і в підкоркових зорових центрах, що виникають у відповідь на електричне подразнення підкоркових зорових ядер, - до та після перерізу стовбура мозку на мезенцефалічному рівні.

### МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження проведені на 15 ненаркотизованих місцево обезболюваних кроликах породи шиншила в умовах гострого експерименту. Для відведення потенціалів від кори головного мозку використовувались

епідурально розміщені позолочені “точкові” електроди. Для подразнення підкоркових зорових ядер та відведення від них біопотенціалів використовувались занурювальні ніхромові біполярні електроди з міжелектродною віддаллю 1-1,5 мм. При цьому діаметр ніхромової ізольованої проволочки становив 100 мкм. Уведення підкоркових електродів здійснювалось стереотаксичним приладом типу СЕЖ-2. Розміщення підкоркових електродів контролювалось гістологічно. Електричне подразнення підкоркових зорових центрів здійснювалось за допомогою двоканального генератора прямокутних електричних імпульсів напругою 2-6 В. Тривалість імпульсу подразнення була 0,5 мс. Як світловий подразник було застосовано включення та виключення сфокусованого світла. Освітлюваність ока була 300-500 лк. Біопотенціали кори мозку і підкоркових зорових центрів реєструвалися у монополярному відведенні за допомогою чотириканальної шлейфної або катодно-променевої електрографічної установки.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Світлове подразнення ока кролика призводило до виникнення викликаних потенціалів у латеральному колінчатому тілі, подушці зорового бугра, верхньому горбику чотиригорбикового тіла і в зоровій області кори великих півкуль головного мозку як при включенні світла, так і при його виключенні.

Викликані потенціали на світлове подразнення ока, що виникають у підкоркових зорових ядрах, були представлені характерним + - чи - + комплексом, або повільним електропозитивним потенціалом (подушка зорового горба). При цьому услід за первинним ВП-комплексом міг іти ряд синхронізованих повільних електричних коливань з частотою 4-6 в 1 с.

Викликані потенціали на світлове подразнення ока, які виникають у зоровій області кори мозку, були представлені типовим + - + комплексом, за яким часто йшли так звані додаткові електричні коливання. У ряді досліджень спостерігались типові за формою + - + викликані потенціали на світлове подразнення ока також і в інших областях кори мозку кролика. Услід за ВП на світлове подразнення ока часто спостерігалась виражена реакція десинхронізації електрокортикограми.

Одиночне електричне подразнення латерального колінчатого тіла імпульсом порогової напруги призводило до виникнення ВП у зоровій області кори мозку та в інших сенсорних областях неокортексу, у подушці зорового бугра, а також у верхньому горбику чотиригорбикового тіла. При цьому викликані потенціали кори мозку на одиночне електричне подразнення латерального колінчатого тіла були представлені типовим + - + комплексом, що відрізняється від ВП кори мозку на світлове подразнення ока більш коротким латентним періодом. Услід за ВП, що виникав у корі мозку у відповідь на одиночне подразнення латерального колінчатого тіла, спостерігалась виражена реакція десинхронізації у корі мозку на протязі 2-6 і більше секунд. При цьому пригнічувалися хвилі повільного ритму електрокортикограми і дещо зростали в амплітуді хвилі частого ритму. На фоні збільшення амплітуди хвиль частого ритму електрокортикограми відмічалось зниження амплітуди складових компонентів ВП кори мозку на одиночне електричне подразнення латерального колінчатого тіла. При поступовому збільшенні частоти електричного подразнення латерального колінчатого тіла від 1 подразнення за 1,5 секунди до 4-х подразнень за 1 секунду початкове збільшення амплітуди так званого подальшого (третього) електропозитивного компоненту викликаного потенціалу змінювалось поступовим пригніченням ВП. У відповідь на одиночне електричне подразнення латерального колінчатого тіла виникали також викликані потенціали у верхньому горбику чотиригорбикового тіла і подушці зорового бугра. При цьому викликаний потенціал був представлений початковим електронегативним компонентом невеликої амплітуди, за котрим ішов повільний значної амплітуди (біля 100 мкВ) тривалий (200 мс) електропозитивний потенціал.

Подразнення одиночним електричним імпульсом подушки зорового бугра викликало ВП у корі великих півкуль у вигляді типового + - + комплексу з послідуною чітко вираженою реакцією десинхронізації в електричній активності кори мозку на протязі декількох секунд. У верхньому горбику чотиригорбикового тіла також спостерігався, у відповідь на подразнення подушки зорового горба, ВП у вигляді - + комплексу з подальшим пригніченням повільного ритму електричної активності.

У латеральному колінчатому тілі у відповідь на електричне подразнення (одиночне, особливо повторне) подушки зорового бугра виникав цілий ряд синхронізованих ритмічних коливань, що відбувалися з частотою 4-6 в 1 с при амплітуді коливань біля 100 мкВ.

Одиночне електричне подразнення верхнього горбика чотиригорбикового тіла призводило до виникнення в корі мозку ВП у вигляді типового + - комплексу з подальшим тривалим пригніченням повільного ритму і підсиленням частих потенціалів кори мозку. У подушці зорового бугра і латеральному колінчатому тілі при цьому реєструвалися ВП у вигляді - + комплексу з подальшою синхронізацією біопотенціалів повільного ритму.

Після перерізу стовбура мозку на мезенцефалічному рівні, при реєстрації біопотенціалів через годину на протязі 2-4-х діб, відмічалось збільшення амплітуди електронегативного компоненту ВП на світлове подразнення ока, що реєструвався від підкоркових зорових ядер, без інших суттєвих змін ВП. При цьому

в менш вираженому ступені зберігаються також елементи синхронізації електричної активності услід за ВП.

Найбільш виражені зміни викликаних потенціалів на світлове подразнення ока після мезенцефалічної секції спостерігались у корі великих півкуль, у всій сенсорній зоні. Як нами уже сповіщалося [1], ці зміни виражаються в збільшенні амплітуди і тривалості початкового електропозитивного компоненту ВП і в повному пригніченні або зміні полярності другого (електронегативного), а також подальшого електропозитивного компоненту ВП. У кроликів після мезенцефалічної секції світлове подразнення ока в ряді випадків викликало виражену синхронізацію ритму услід за викликаним потенціалом.

Після перерізу стовбура мозку на мезенцефалічному рівні одиночне електричне подразнення латерального колінчатого тіла викликає ВП у корі великих півкуль, який, на відміну від вихідного, характеризується збільшенням амплітуди початкового електропозитивного компоненту з подальшим розвитком тривалого (300-500 мс) електропозитивного потенціалу значної амплітуди (300-400 мкВ). Услід за викликаним потенціалом спостерігалась слабо виражена синхронізація ритму електрокортикограми.

В умовах мезенцефалічної секції відмічалась також зміна ВП, що спостерігався у верхньому горбику чотиригорбикового тіла і подушці зорового бугра у відповідь на електричне подразнення латерального колінчатого тіла. ВП у цьому випадку представлений у вигляді повільного електронегативного потенціалу невеликої амплітуди. Викликаний потенціал кори мозку на одиночне електричне подразнення подушки зорового бугра після мезенцефалічної секції був представлений значним за амплітудою та тривалим електропозитивним потенціалом. У латеральному колінчатому тілі та у верхньому горбику чотиригорбикового тіла ВП при цьому характеризувався + - комплексом зі слабо вираженою синхронізацією біопотенціалів у корі мозку, а також у верхньому горбику чотиригорбикового тіла услід за ВП.

Одиночне електричне подразнення верхнього горбика чотиригорбикового тіла після мезенцефалічної секції викликало слабо виражену синхронізацію ритму в корі мозку, а також у подушці зорового горба і латеральному колінчатому тілі.

## ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Таким чином, приведені фактичні дані показали, що після мезенцефалічної секції характерні зміни структури ВП на світлове подразнення ока спостерігаються тільки в корі головного мозку. У підкоркових зорових ядрах спостерігаються лише кількісні зміни ВП у вигляді збільшення амплітуди електронегативного компоненту ВП. Ці дані підтверджують висловлені нами раніше [2] уявлення, що зміни структури ВП кори мозку після мезенцефалічної секції обумовлені зміною функціонального стану нейронів різних шарів кори мозку в результаті припинення притоку імпульсів із ретикулярних структур стовбура мозку. Той факт, що такі ж типові зміни спостерігаються в структурі ВП кори мозку, що виникає у відповідь на одиночне електричне подразнення підкоркових зорових ядер після мезенцефалічної секції, також підтверджує наше уявлення. У той же час, виявлені нами зміни ВП, що виникають у підкоркових зорових ядрах у відповідь на електричне подразнення одного з них після мезенцефалічної секції стовбура мозку, свідчать про те, що припинення притоку активуючих імпульсів із ретикулярних утворень стовбура мозку може призводити до порушення функціональних взаємовідношень між підкорковими утвореннями.

Заслуговує уваги той факт, що світлове подразнення ока в умовах інтактного мозку, або електричне подразнення верхнього горбика чотиригорбикового тіла викликає синхронізацію електричної активності латерального колінчатого тіла і подушки зорового бугра з одночасною реакцією десинхронізації в електричній активності кори головного мозку. Одиночне електричне подразнення подушки зорового бугра або латерального колінчатого тіла також викликало реакцію синхронізації в інших підкоркових ядрах і, часто, реакцію десинхронізації у корі великих півкуль. Ці характерні взаємовідносини підкоркових зорових ядер і кори великих півкуль порушуються мезенцефалічною секцією. У цьому випадку подразнення викликає тільки синхронізуючий ефект. Ці дані підтверджують думку ряду дослідників про те, що реакція десинхронізації здійснюється за участю ретикулярних утворень стовбура головного мозку.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Паламарчук И. Г. Первичные ответы коры изолированного мозга. Электрофизиология нервной системы. //Материалы IV всесоюзной электрофизиологической конференции. – Ростов, 1963. – С.288-289.
2. Паламарчук И. Г. Изменения вызванных потенциалов коры больших полушарий после перерезки ствола головного мозга. //Физиологич. ж. СССР им. И. М. Сеченова. – 1964. – Т. 50. - № 3. – С.245-251.

# ДЛЯ ПОТАТОК

Збірник наукових статей.

***Вісник Запорізького державного університету***

***Фізико-математичні науки. Біологічні науки***

***№1,1999***

Технічний редактор - Толлок О.В.

Підписано до друку 29.12.98.

Формат 60 x 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура “Таймс”.

Умовн. друк. арк. 24,7. Обл.-вид. арк. 32,4.

Замовлення № 94. Наклад 150 прим.

Набір, верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані  
у лабораторії видавничих технологій та комп'ютерної графіки

Запорізького державного університету

330600, м. Запоріжжя, 63,  
вул. Жуковського, 66, к.21,  
тел. 64-55-54

