А. И. Сгибнев

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАЧИНАЮЩИХ

А. И. Сгибнев

Исследовательские задачи для начинающих

Второе издание, исправленное и дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
С26

Сгибнев А. И.

С26 Исследовательские задачи для начинающих. 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2015. — 136 с.

ISBN 978-5-4439-0627-0

Исследовательские задачи в школах почти не используются. А между тем они очень полезны, и их можно решать с обычными школьниками, тем более что новые образовательные стандарты предполагают формирование культуры учебно-исследовательской и проектной деятельности. В книге будет показано, как это делать. Она адресована учителю и руководителю кружка, который хочет заниматься исследовательскими задачами с учениками.

ББК 74.262.21

При оформлении обложки использованы фрагменты фрески Рафаэля «Афинская школа».

ISBN 978-5-4439-0627-0

9 785443 906270 >

Содержание

Приложения

Введение

В последнее время выходит немало хороших материалов, посвященных научно-исследовательской работе школьников на высоком уровне[1]. Между тем аналогичных материалов для начинающих почти нет. Однако такие материалы не менее важны по следующим причинам.

- Количество потенциальных участников исследовательских работ начального уровня в десятки раз больше, чем «продвинутого» (как в школьной олимпиаде в сравнении с региональной).
- Когда сильный ученик решает сложную задачу (даже и не исследовательскую), ему волей-неволей приходится выдвигать гипотезы, ставить вспомогательные задачи и т. д. А вот обычный ученик, решающий задачи из учебника, может успешно пройти весь курс школьной математики («решать примеры») и нигде не столкнуться с математическим открытием. Его шанс — школьный кружок… и школьная исследовательская работа.
- У пирамиды должно быть надежное основание: ученик легче включается в решение сложных исследовательских задач, если имеет опыт решения простых.

Мы считаем, что содержательная исследовательская работа по математике на простом уровне *возможна и полезна*. Таким работам и посвящена эта книжка.

Что такое исследовательские задачи

Выделим два подхода к обучению. При одном — назовем его традиционным — ученик изучает новую теорию, решает задачу, получает оценку и ждет от учителя новой задачи. Предполагается, что у задачи есть единственный правильный ответ и учитель его

[1] См., например, [Конф1], [Конф2], [К3], [К8]. Здесь и далее «К» означает ссылку на номер в списке книг, «Конф» — конференций, «С» — семинаров, «Ст» — статей в конце брошюры.

знает. При другом подходе — назовем его *исследовательским* — ученик сам ставит вопросы и ищет на них ответы, выдвигает гипотезы, доказывает и опровергает их. Всякий полученный ответ может стать основанием для новых вопросов. Результат может быть не известен учителю заранее. Можно сказать, что *ученик попадает в новый математический мир и учится жить в нем*.

Четыре мнения об исследовательских задачах.

«Они доступны только старшеклассникам».

«Они нужны только сильным школьникам».

«Учеба отдельно, исследования отдельно».

«Подготовить реферат по математике гораздо легче, чем решить исследовательскую задачу».

Мы считаем, что все это не так. Чтобы начинать решать такие задачи, не надо ждать старших классов, уже материал начальной школы позволяет вводить элементы исследования (см. [K5]). Полезно начинать с самого простого, с вещей, доступных несильным ученикам. Далее, хорошее обучение должно дать понятие о методах, характерных для изучаемой науки. При работе с исследовательскими задачами ученикам неизбежно приходится иметь дело с методами математики как науки, поэтому исследовательские задачи могут стать органической частью обучения математике. Наконец, сделать хороший реферат по математике гораздо сложнее, чем хорошо решить исследовательскую задачу. Ведь деятельность по решению задач среднему школьнику привычна и понятна, его этому учат. Напротив, для написания качественного реферата нужны умения, которые есть даже не у всякого студента.

Психология. При смене традиционного подхода на исследовательский сильно меняется не только роль ученика, но и роль учителя. Если при традиционном подходе учитель дает образцы, тренирует, контролирует и оценивает, то при новом — консультирует ученика, делится своими соображениями и идеями (но не навязывает их), помогает ясно изложить результаты — в общем, из тренера превращается в старшего коллегу. Такую смену установки произвести довольно трудно, но это полезно и для учителя, и для ученика.

Профориентация. Школьный курс математики дает слабое представление о методах исследования математики как науки. У обычного ребенка складывается впечатление, что в математике все уже известно и новые открытия (во всяком случае, на школьном уровне) невозможны. Работая над исследовательской задачей, ученик получает некоторое представление о реальной работе математика. Результаты бывают неожиданные. Часто девочка-отличница, которая прекрасно работает на уроке, не справляется с такой задачей и осознает, что математика — это «не ее» и на мехмат идти не стоит. Небыстрый, но вдумчивый ученик удачно продвигается в исследовании и от этого становится успешнее на уроках. Сильный лентяй, считавший, что математика — это скучный набор рецептов, может понять, что это живая растущая область науки, и загореться интересом к ней.

Хорошие задачи для исследования. Итак, ученик попадает в новый незнакомый мир. Он привык, что раньше учитель знакомил его с основными законами этого мира, а здесь он должен открыть их сам. Но оставлять его совсем без ориентиров нельзя. Поэтому *хорошая задача для начинающих* — та, где есть *естественный параметр*, по которому можно двигаться в исследовании, т. е. легко выделяемая последовательность частных случаев, так что в каждый момент ученик сам понимает, что можно делать дальше. И совсем хороша та задача, где и к идее доказательства можно прийти, последовательно двигаясь по этому параметру.

Хорошая задача для опытных исследователей — та, в которой есть большой *простор для продвижений*, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются *разнообразные методы*. Здорово, если в этой задаче находятся нетрудные «подзадачи», — ребенку тяжело долго не получать никакого результата. Отлично, если задача развивает научный вкус и имеет в перспективе выходы на идеи и методы «большой» математики.

Отметим, что всякую содержательную олимпиадную задачу можно рассматривать как «кусочек», вырезанный из какой-то исследовательской темы (часто для ее решения достаточно восстановить контекст). И наоборот, многие из тем этой книжки «сделаны» из известных кружковых и олимпиадных задач. Новизна здесь не в задаче, а в подходе к работе школьника: не «решил-не решил», а «какую часть нового математического мира освоил». По сути, задача здесь рассматривается как «зацепка» для введения в тему исследования.

О новизне работ. Мы считаем, что никакой *объективной* новизны от работы школьника не требуется. Результат должен быть *субъективно* новым — школьник открывает то, чего не знал. Конечно, сильный школьник при хорошем руководителе и удачно поставленной задаче иногда может получить объективно новый результат, и это здорово. Но это нисколько не умаляет работу тех, кто не достиг таких успехов. Цель исследовательской работы мы видим не в том, чтобы получить чемпионский результат, а в том, чтобы *делать* *математические открытия на уровне, доступном ученику*. Более-менее содержательные субъективные открытия доступны почти всем.

Время. Школьники привыкли, что над упражнением надо думать одну-две минуты, над задачей — пять-десять минут. Над сложной олимпиадной задачей — от силы час. Однако в математике есть вопросы, требующие долгого размышления, «вживания». Нужно исследовать «окрестности» своей задачи. Сначала найти длинный окольный путь к цели. Потом постепенно спрямлять его. Если ученику сразу покажут короткий путь, он сможет пройти им, но толку будет мало — важно узнать окрестности, найти новые интересные места, научиться ходить по бездорожью. Все это требует значительного времени — вновь открытое должно отложиться в голове, встроиться в имеющийся опыт. Гаусс писал, что над сложными задачами теории чисел он думал по 15 минут каждый день — и достигал замечательных результатов.

Содержание книги

Книга написана в рамках работы автора на кафедре математики Московского института открытого образования. В книге систематизированы ви́дение и опыт решения исследовательских задач со школьниками:

- в московской школе-интернате «Интеллектуал» и Летней школе интенсивного обучения при ней под руководством Д. Э. Шноля, к. ф.-м. н. А. И. Сгибнева, к. ф.-м. н. А. С. Воронцова и Н. М. Нетрусовой,
- в Красноярской летней школе (так называемые проекты по математике, проводившиеся под руководством к. ф.-м. н. М. А. Ройтберга),
- в Клубе экспериментальной математики под руководством д. ф.-м. н. проф. Г. Б. Шабата.

Предлагаемые материалы также обсуждались (и отчасти создавались) на Семинаре учебно-исследовательских работ школьников при Московском центре непрерывного математического образования [С1], на курсах повышения квалификации для учителей математики при Московском институте открытого образования и др.

Книга состоит из следующих частей.

1. Технологии проведения исследовательских работ. Эта часть, в свою очередь, разбита на три раздела.

Первый рассказывает о том, как можно вводить элементы исследования на уроке.

Второй — о коллективной работе над задачами в аудитории.

Третий — об индивидуальной работе в свободное время с консультациями учителя.

2. Истории. Чтобы передать дух и атмосферу работы над исследовательскими задачами, мы решили привести несколько ярких историй, рассказанных учителями.

3. Работы школьников. Примеры работ школьников разных возрастов, написанных в разных жанрах (краткий отчет — подробное изложение, законченные работы — незаконченные, простая задача — сложная). Мы намеренно не стали сильно редактировать тексты, чтобы не нарушить живой детский стиль.

4. Подборка исследовательских задач. 54 задачи, разбитые на пять разделов. Почти все эти задачи успешно исследовались учениками. Для решения большинства задач не требуются знания, выходящие за рамки школьной программы. Для удобства учителя задачи снабжены комментариями и рубрикатором.

5. Приложения. Две статьи, подробно излагающие опыт решения исследовательских задач в школе-интернате «Интеллектуал» и в Красноярской летней школе, текст об организации конференций, примеры тем и памятка для докладчиков.

6. Источники. Аннотированный перечень журналов, книг, Интернет-ресурсов, статей, которые содержат исследовательские задачи.

Благодарности

Автор благодарен своим учителям и соавторам Г. Б. Шабату, М. А. Ройтбергу и Д. Э. Шнолю, а также А. Д. Блинкову, В. М. Бусеву, А. С. Воронцову, Е. А. Ермаковой, К. А. Кнопу, А. К. Ковальджи, И. С. Конрад, Н. А. Мороз, Н. М. Нетрусовой, Д. М. Новицкому, В. Л. Чернышёву и всем участникам семинара [С1]. Отдельная большая благодарность инициаторам написания книги А. В. Семенову и И. В. Ященко.

Буду признателен за отзывы, замечания, новые задачи. Электронный адрес: `sgibnev@mccme.ru`.

Технологии

1. Исследовательские задачи на уроках: начало

Здесь мы расскажем, как можно решать несложную исследовательскую задачу с группой 5–7 класса на уроке или кружке. В заметке изложен опыт школы-интерната «Интеллектуал».

Поначалу главная цель такой работы — дать понятие о процессе исследования (см., например, схему на с. 10). Поэтому вначале хорошо давать задачи, которые не содержат принципиально новых для школьников *математических* идей или объектов, но имеют естественное продолжение.

Вот пример — «задача о разрезании плоскости». Сначала решим задачу: *на сколько частей можно разрезать круг тремя прямолинейными разрезами*? Далее зададим вопрос: *а если разрезов четыре, пять, n*? *Составьте таблицу*: *в первой колонке — число разрезов, во второй — наименьшее число частей, в третьей — наибольшее.* Тут хорошо объединить детей в группы, скажем, по три человека: один рисует наименьшее число частей, другой наибольшее, третий (самый аккуратный) проверяет и заносит в таблицу. *Найдите закономерности во второй и в третьей строчках*. Про наименьшее количество частей дети догадываются довольно быстро, про наибольшее кто-то догадывается, кто-то нет. На дом можно задать додумать вопрос и оформить результаты: записать гипотезу, попробовать доказать. На следующем уроке посмотреть записанные решения и выслушать лучшее. Не обязательно требовать полного понимания технической стороны доказательства (математическая индукция и т. д.). Главное — чтобы школьники дошли до идеи: число частей при проведении новой прямой увеличивается на столько, на сколько частей делят эту прямую проведенные ранее прямые.

Через пару недель можно вернуться к этой теме, вспомнить полученные результаты и предложить новые направления работы, например следующие.

- Решите аналогичную задачу для (неограниченной) плоскости. Чем отличаются результаты?

- Все ли промежуточные значения числа частей реализуются для плоскости и для круга?
- А что будет, если разрезы — не прямые, а окружности или углы?

Совсем не обязательно все эти задачи решать, главное — чтобы дети поняли, что каждый результат порождает новые вопросы, увидели, как эти вопросы можно ставить.

Процесс исследования[1]

[1] © Education Development Center, Inc 2000.

Понятно, что тут годится не всякая задача, а такая, у которой много возможностей продолжения, обобщения, связей с другими задачами. Вот еще пример хорошей задачи.

На окружности отмечены 12 *точек на равном расстоянии друг от друга* (*циферблат*). *Одна из точек — стартовая. Ее соединяют отрезком с точкой, отстоящей от нее на* d *дуг по часовой стрелке* (*например, если* $d = 1$, *то берем соседнюю точку*). *Эту новую точку также соединяем отрезком с точкой, отстоящей от нее на* d *дуг, где* $d < 12$. *Так продолжают, пока последняя точка не совпадет со стартовой. Получается замкнутая ломаная.*

1. *При каких* d *может получиться квадрат, треугольник, отрезок*?
2. *При каких* d ***все*** 12 *точек окажутся вершинами ломаной*? (*Например, при* $d = 1$ *окажутся, а при* $d = 2$ *нет.*)
3. *Сколько оборотов делает ломаная до замыкания*? (*При* $d = 1$ *всего один оборот.*)
4. *Как изменятся ответы пунктов* 1–3, *если отметили*: 11 *точек,* 10 *точек,* 9 *точек*? *Сформулируйте утверждение, обобщающее эту задачу.*
5. *Нет ли совпадающих ломаных*? *В каких случаях они совпадают*? *Как изменятся результаты пунктов* 1–4 *с учетом этого наблюдения*?

В другой раз можно применить схему, предложенную в американском образовательном проекте Making Mathematics `http://www2.edc.org/makingmath/`. Дается описание ситуации, школьники осознают ее. Затем *школьники сами ставят вопросы*, которые было бы интересно исследовать в рамках этой ситуации. Учитель помогает сформулировать эти вопросы, классифицирует их, при необходимости добавляет свои. Таким образом, на доске появляется список направлений исследования. Затем ученики разбиваются на группы, каждая из которых работает над определенным направлением. Учитель помогает распределить роли в группе, организует общение групп между собой, если это полезно. В конце занятия представители групп делают короткие доклады о своих результатах. После этого можно обновить список вопросов, попросить подумать над ними дома или повторить цикл в классе.

Рассмотрим подробнее работу по этой схеме на примере «задачи о новобранцах».

Ситуация. *Шеренга из шести новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует*: *нале-ВО*! *Но по неопытности часть солдат поворачивается налево, а часть — направо. После этого каждую* *секунду происходит вот что: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом.*

Первое занятие. Опишите задачу классу. Полезно разыграть ситуацию, выстроив 6 ребят и сыграв роль старшины самому. Добейтесь выполнения правил. Затем разбейте весь класс на группы, назначьте каждой старшину, и пусть поупражняются. Когда все поймут правила, предложите школьникам задать вопросы к ситуации. Например: 1) всегда ли солдаты останавливаются? 2) какие расстановки останавливаются дольше всего? 3) сколько времени для этого надо? 4) что будет, если солдат поставить по кругу? и т. д. В этот момент полезно разбить класс на группы по два-три человека и предложить каждой свою задачу. Через некоторое время стоит обсудить, кто как записывает расстановки солдат, и выбрать наиболее удобную запись. На дом задайте одну-две из задач, предложенных ребятами.

Второе занятие. Обсудите домашнюю работу. Пусть каждая группа расскажет, какие у нее есть идеи и вопросы. Спросите, проходят ли их наблюдения для другого количества солдат. Если ни одна команда не нашла инвариант, расскажите, что это такое, и обсудите, как инвариант помогает решать задачи. После того как инвариант (количество солдат, глядящих в одну сторону) все-таки найдут, попробуйте с его помощью доказать обнаруженные командами закономерности.

Если позволяет время, спросите школьников, какие интересные обобщения задачи о новобранцах они видят.

Сообщение по проекту. Хорошо завершить работу сообщениями, в которые могут входить следующие пункты.

- Постановка задачи своими словами.
- Обозначения.
- Экспериментальные данные — например, все начальные расстановки четырех новобранцев и их переходы в конечное состояние.
- Выводы (гипотезы, обобщающие приведенные данные, или доказанные теоремы — кто как смог).
- Возможные задачи для дальнейшего решения.

После сообщений детей можно рассказать им простое и наглядное решение задачи[1], изложенное в [К2, с. 143–144]. После самостоятельного поиска дети смогут лучше оценить его красоту.

[1] Сопоставим шеренге солдат ломаную на клетчатой бумаге, линии которой идут под углом 45°: каждому солдату соответствует очередной отрезок ломаной, причем если солдат смотрит направо, то соответствующий отрезок ломаной идет вверх, а если налево — то вниз. Теперь высота самой высокой горки каждую секунду снижается.

В некоторых сильных классах мы выделяем один урок в неделю специально для решения исследовательских задач. Задачи попроще делаются на одном уроке и тут же (или дома) записываются. Задачи посложнее обсуждаются в классе один раз в неделю, а через полмесяца-месяц подытоживаются. Дети, которые думают медленно и от этого на уроках обычно страдают, тут оказываются в выигрышной ситуации. Важно требовать запись решения: ребенок еще раз все продумывает, выстраивает логически, обосновывает. Обычно мы не получаем полного решения от всех, каждый обобщает до своего уровня. Но здесь это не страшно (в отличие от работы с программным материалом).

После того как два-три цикла пройдено и ученики поняли логику исследования, можно дать им несколько более сложных задач (вроде тех, что приведены в этой книжке[1]). Каждый пусть выберет и решает свою (в одиночку или в добровольной группе из двух-трех человек). На решение такой задачи может уйти около месяца, т. е. четыре-шесть уроков работы в классе и несколько часов работы дома. Такую работу полезно заканчивать конференцией на урок-два с приглашением других учеников и учителей. По нашему опыту, *на этапе решения задачи* одному учителю удается работать с шестью-восемью заинтересованными школьниками разом. Когда же дело доходит до оформления результатов и подготовки доклада, стоит каждому ребенку или группе назначить своего консультанта, который посмотрит свежим взглядом на его решение, выловит ошибки, «дожмет» с подготовкой доклада к нужному сроку. Тут ресурса одного человека на всех не хватает, тем более что обычно дети больше любят решать, чем оформлять.

Другие примеры исследовательских задач, которые можно решать на уроке, и подходы к организации решения см. в [Ст1], [Ст2], [Ст3].

Дети, успешно прошедшие в свое время такие мероприятия, затем при желании легко включатся в решение более сложных исследовательских задач — уже в индивидуальном порядке, размышляя дома и консультируясь у учителя (см. с. 16).

2. Интенсивная работа над исследовательскими задачами в аудиторное время

Данный формат хорош для быстрого знакомства учеников с жанром исследовательских работ. Это можно делать, например, в рамках сезонной школы или специальной проектной недели

[1] У нас сильные шестиклассники решали в классе, например, задачи 4, 52, 53, 54.

в школе. Мы изложим опыт Летней школы интенсивного обучения «Интеллектуал». (В Летнюю школу приезжают дети после 7–8 класса, в основном из регионов, см. `sch-int.ru/summer`. Аналогичный опыт Красноярской летней школы подробно изложен на с. 104–120.)

На выполнение работы отводится пять пар (по одной паре через день) и две пары на подготовку в день конференции.

Надо заранее подготовить список тем и распределить их по руководителям.

Темы вывешиваются заранее, чтобы школьники смогли прийти на первое занятие с минимальной готовностью (пример списка тем см. на с. 125–127). В начале первого занятия руководители работ рассказывают постановки задач и вместе с аудиторией проделывают первые шаги исследования. Полезно отмечать более простые темы, являющиеся по сути цепочками учебных задач, и более сложные — исследовательские, в которых вопросы надо задавать самому ученику (соответственно, высокий и низкий уровень пошаговости в разделе «Задачи»). Это нужно, чтобы каждый ученик сразу выбрал тему по своему вкусу и способностям, ведь времени на смену темы почти нет. (Допускается смена темы после первого занятия, после второго это уже практически невозможно.)

Когда школьники распределятся по темам и руководителям, окажется, что некоторые выбрали одну и ту же тему. Таких полезно попытаться объединить в группу (оптимальный состав — два-три человека). Если это не получается, то хорошо их повести разными путями (например, дать разных руководителей), чтобы они не дублировали работу друг друга.

Поскольку к заданному близкому сроку надо получить хоть какой-то результат, учеников приходится более-менее жестко направлять, не давая полностью отработать бесплодные версии. Оптимальное распределение времени работы над темой выглядит примерно так (ср. схему на с. 10):

1-е занятие — понял постановку задачи, начал сбор данных (решил первые вспомогательные задачи);

2-е и 3-е занятия — накопил данные, сформулировал гипотезу;

4-е занятие — нашел контрпримеры, уточнил гипотезу, доказал ее;

5-е занятие — подытожил все сделанное, записал формулировки, сделал эскиз плаката.

Подготовка к конференции — оформил плакат, отрепетировал доклад.

При более быстром продвижении школьник может уже на третьем занятии доказать гипотезу, а на четвертом задать новые вопросы (обобщить задачу) и получить новые результаты.

При медленном продвижении обзор сделанного «съезжает» на подготовку к конференции, однако тут есть риск доделывать свой доклад уже во время конференции. А этого допускать нельзя!

На третье или четвертое занятие полезно пригласить внешнего консультанта, который послушает ученика и руководителя и даст новые идеи и советы. А ученик впервые попробует изложить все сделанное.

Руководитель должен найти оптимальную частоту консультирования школьника.

Притирка к темпу ученика обычно происходит на первой паре совместной работы. С одной стороны, над школьником не нужно «нависать», нужно дать ему время подумать самому и спокойно в своем темпе поэкспериментировать в выбранной теме. С другой стороны, у ученика не должно быть чувства, что его бросили на произвол судьбы, что он уже час бьется над малопонятной задачей, а продвижений нет. Самый простой способ для руководителя при работе с малознакомым школьником — спрашивать его каждые 10–15 минут: «Не нужна ли тебе помощь?». Так удается выстроить индивидуальный ритм работы пары руководитель-ученик.

Молодой преподаватель может нормально руководить одним-двумя проектами одновременно, опытный — тремя-четырьмя. Чтобы обеспечить такое соотношение, хорошо привлекать к руководству работами старшеклассников и выпускников, которые в свое время сами решали исследовательские задачи. Если помощников много, то роль опытного руководителя может свестись к консультированию молодых руководителей.

Конференция проводится в постерном формате. Рекомендации по оформлению постеров (плакатов) см. на с. 129.

Плакаты удобно развешивать в одном общем пространстве (зал или коридор и кабинеты одного этажа). Одновременно реально вывесить 10–15 плакатов. Слушания хорошо делать в две «ленты» по 60 минут с перерывом в 20–30 минут и сменой плакатов. Надо настроить детей максимально слушать друг друга. Обычно это нетрудно сделать словами: «Мы все вместе жили и учились две недели, работали над своими темами, а вот теперь имеем возможность поделиться друг с другом своими открытиями».

На конференцию хорошо пригласить внешних авторитетных людей (ученых или учителей) и представить их детям в начале конференции — это повышает торжественность и ответственность момента. Работы надо слушать благожелательно, в том числе и слабые. Важно не отбить охоту к исследованиям, даже если начало оказалось не очень удачным. Надо, чтобы ученик в ходе беседы не только понял ошибки, допущенные в работе, но увидел способы их исправления, возможности продолжения работы.

Оценивать работы в баллах обычно не удается. Можно ограничиться отзывом жюри и вручением призов лучшим работам по версии жюри и по версии зрителей.

Плакаты после конференции стоит сфотографировать и выложить в Интернет (например, `http://www.sch-int.ru/summer/index.php/foto2012`, папка «Постеры») и на диск, детям на память.

Написать связный текст работы за такое время обычно не удается (разве что тезисы на полстраницы, см., например, с. 31–32). Можно дать задание для желающих «на лето» — написать дома отчет о работе, а в награду тех, кто хорошо это сделает, пригласить в летний лагерь на следующий год без вступительных заданий.

3. Индивидуальная работа в свободное время с консультациями учителя

Сильные и просто интересующиеся математикой школьники могут работать над исследовательскими задачами в своей школе в течение учебного года. Длительность работы позволяет глубоко погрузиться в задачу, пройти несколько исследовательских циклов (см. схему на с. 10). Учитель не так связан временем и может менее жестко направлять ученика, позволяя ему выдвигать и долго проверять свои гипотезы.

В сентябре (желательно в начале) вывешивается список задач с комментариями, можно сделать и специальное представление задач для интересующихся (как в летней школе). Важно быстро вовлечь детей в процесс исследования, пока они «свежие» после лета. Желающие распределяются по темам и руководителям (обычно этот процесс длится месяц, его не стоит затягивать). Ученикам надо завести специальные тетради, в которые они будут записывать все, что получают по теме исследования. Со своими домашними результатами они приходят к руководителю. Разумная частота таких консультаций — раз в неделю или раз в две недели.

Опыт показывает, что чем регулярнее дети обсуждают свою работу, тем ответственнее ее делают и лучше понимают. Поэтому полезно организовать постоянно действующий семинар исследовательских работ, на который раз в две-три недели приходят все ученики соседних параллелей, работающие над задачами, и рассказывают друг другу и учителям текущие результаты (каждый рассказывает примерно раз в полтора месяца). Ученики 8–9 класса с соответствующим опытом уже способны хорошо понимать задачи и задавать дельные вопросы.

В ноябре и в апреле происходят предзащиты: собираются руководители и другие учителя кафедры и подробно слушают работы детей, вникают в доказательства, указывают на ошибки, дают советы по доработке и по построению доклада, а также ставят оценку тем, для кого исследовательская работа обязательна для выполнения (в «Интеллектуале» это 8 и 10 класс, остальные выполняют по желанию).

На предзащите же решается, какие доклады стоит выпускать на общую защиту. Не допускают халтурные и едва начатые работы. За добросовестные «серенькие» работы ставят «3» или «4—» и тоже обычно не выпускают. Таким образом, на предзащите лежит функция контроля. На защиту выпускают не для того, чтобы отчитаться, а чтобы дети и взрослые послушали хорошие работы.

Предзащиты как текущая работа проходят после уроков, а защиты как праздничное мероприятие — утром, вместо уроков.

Работа над докладом — серьезное большое действие, на которое надо выделить отдельное время. Сначала руководитель проговаривает с докладчиком, что и в каком порядке надо рассказывать, на чем делать акцент, что из работы следует опустить (например, длинные технические выкладки), где делать паузы, что записывать на доске — как правило, все это неочевидно для школьника. Дома школьник тренируется, затем происходит «генеральная репетиция». См. памятку для докладчиков на с. 128–129.

Обычно работа рассчитана на год, т. е. в конце первого полугодия докладываются промежуточные результаты, а в конце второго — «итоговые». Деление условное, поскольку невозможно поставить задачу, которую решат ровно за год. В процессе решения исходной задачи обычно возникают новые, и исследование можно продолжать непрерывно. Важно остановиться в тот момент, когда ученик устанет от темы.

Примеры работ, выполненных в таком формате, см. на с. 26–31, 37–38. Подробное описание организации исследовательских работ в школе «Интеллектуал» см. на с. 96–103.

Истории

Задача про «пифагоров кирпич»

Д. Э. Шноль

В томе «Математика» энциклопедии издательства «Аванта+» я прочел, что до сих пор неизвестно, существует ли «пифагоров кирпич»: прямоугольный параллелепипед с целыми ребрами, диагональю и диагоналями граней. Пример параллелепипеда, у которого нецелые только две диагонали боковых граней, легко найти (ребра 3; 4; 12): $13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$, при этом $3^2 + 4^2 = 5^2$. Мне показалось, что было бы интересно поработать с такими параллелепипедами, а также попытаться найти те параллелепипеды, у которых диагональ только одной грани нецелая (мы их назвали «слабыми по одной грани»). В таком виде и была вывешена тема для исследовательской работы в начале года. Сам я в ней не разбирался, так что мог работать наравне с учеником, который ее выберет. К моему удивлению, ее выбрал пятиклассник Алёша Рухович и сумел за год существенно продвинуться. Во-первых, используя формулы для пифагоровых троек, Алёша вывел общую формулу для «пифагорова кирпича, слабого по двум граням». О пифагоровых тройках он сам прочитал в одной из популярных книг, а потом применил их на деле. Сделать это не сложно, но очень важна самостоятельность. Во-вторых, он написал программу, которая нашла несколько примеров «пифагорова кирпича, слабого по одной грани». Мы вместе всматривались в эти примеры, но особых закономерностей не обнаружили. Тогда Алёша снова использовал формулы для пифагоровых троек и получил некоторое уравнение 4-й степени в целых числах, решения которого и дают ответ. Как решить такое уравнение, мы не знали, и, казалось, это был тупик. Тогда Алёша сам предложил попробовать поработать с делимостью. Известно, что во взаимно простых пифагоровых тройках одно число четное, а два других — нечетные. Алёша исследовал, какими могут быть взаимно простые целые числа, задающие ребра «пифагорова кирпича», с точки зрения делимости на степени двойки.

Результат оказался довольно интересным: одно число должно быть нечетным, второе — делиться на 4, но не делиться на 8, третье — делиться на 8. На этом закончился первый год исследований, при этом бывали длительные периоды (до месяца), когда исследование «буксовало». Во время работы над темой инициатива того или иного хода решения почти всегда исходила от ученика, я, как правило, выступал только как квалифицированный слушатель. Времени и сил, чтобы самому подробно разбираться в задаче, у меня не было, и это было только к лучшему: Алёша смог получить полное удовольствие от собственных открытий. Работа Алёши была принята к докладу на Колмогоровских чтениях, и он был отмечен как самый молодой участник.

Две исследовательские работы

А. И. Сгибнев

Я расскажу о двух работах (или одной, как считать), показательных во многих отношениях. Все началось с того, что шестиклассник Володя Иванов взял задачу об аликвотах — обыкновенных дробях с числителем 1. Древние египтяне использовали почему-то только такие дроби. Другие дроби представляли в виде сумм аликвот. Сохранился папирус Ахмеса, в котором дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ представлялась в виде суммы двух, трех или четырех аликвот. Володя задался вопросом: любую ли дробь такого вида («папирусную») можно представить в виде суммы двух аликвот? Оказалось, что любую, да еще несколькими способами. Всегда присутствует, во-первых, тривиальное разложение

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

(которое мы договорились даже не учитывать), во-вторых, еще такое:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

(можно проверить тождество непосредственно). Володя искал разложения численно на компьютере и открыл, что для многих n есть и другие разложения. Этим закончилось первое полугодие, но тут наш коллега Андрей Олегович Белинский подкинул идею посмотреть частоты распределения количеств разложений. Володя обсчитал все дроби с n от 1 до 500. Оказалось, что вполне можно говорить о статистической закономерности: 1, 4, 7, 13 вариантов встречались стабильно больше остальных. Примерно в этот момент я понял, что нашу задачу можно сформулировать так: дано натуральное число h; сколько есть пар натуральных чисел a и b, для которых h является средним гармоническим? Новая формулировка задачи привела, во-первых, к тому, что мы стали исследовать и четные знаменатели (для них закономерности оказались такие же). Во-вторых, была поставлена серия аналогичных задач: «Дано натуральное число r. Сколько существует пар натуральных чисел a, b, для которых r является 1) средним арифметическим? 2) средним геометрическим? 3) средним квадратичным?» За эти задачи взялся Миша Пядёркин (6 класс). Но вернемся к Володе. За следующие полгода (третьи!) мы поняли, что количество вариантов разложения папирусной дроби в сумму двух аликвот однозначно определяется видом разложения ее знаменателя на простые множители. Наконец, в четвертом полугодии я смог по Володиным таблицам и классификациям угадать общую формулу для количества вариантов. Мне хотелось, чтобы Володя на майской школьной конференции доложил этот результат, но сам он никак до формулы не догадывался, а лишать его открытия было нечестно... Он придумал формулу осенью, а чуть раньше, в августе, корейский учитель Ким Янг Вон, которому я рассказал нашу гипотезу как пример того, на что способна неполная индукция в школьной математике, дал строгий и простой вывод формулы.

Тем временем Миша легко решил задачу о среднем арифметическом. Решение задачи о среднем геометрическом я знал, поэтому подсказал нужную комбинаторную идею. После этого мы на вторые полгода завязли в задаче о среднем арифметическом *трех* чисел. Сложность была в том, что при подсчете троек чисел мы вводили «ограничения» (как называл их Миша), т. е. отождествляли все варианты, получаемые друг из друга перестановкой (например, $1+2+3$ и $3+2+1$ считали за один вариант). Поэтому надо было отдельно считать случаи, в которых все три числа различны, в которых два числа совпадают и в которых все три совпадают. Миша проделал всю работу сам с большим энтузиазмом (я только вылавливал ошибки и давал советы). Получились разные ответы для четных и нечетных чисел.

В задаче о среднем квадратичном даже для двух чисел просветов не было видно. Миша сделал для нее компьютерную таблицу разложений (как Володя когда-то), и на этом мы расстались на лето. В начале осени я посмотрел на таблицу и стал догадываться, что к чему. К сожалению, дальнейшее происходило при весьма слабом участии Миши. Постепенно я опять угадал общую формулу — она оказалась очень похожа по структуре на Володину, но сложнее (так что без подготовки открыть ее было бы очень трудно). Потом я научился доказывать, что количество вариантов *не меньше*, чем утверждает формула. Для этого хватало чисто алгебраической техники: равенство

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$$

порождает два числовых разложения. Однако эта техника принципиально не могла доказать отсутствия других вариантов разложений! Требовался выход задачи в какую-то другую область математики... Задача пролежала три года, но вспомнилась, когда профессор Г. Б. Шабат, консультировавший другого моего ученика, рассказал ему о гауссовых числах — это комплексные числа с целыми действительной и мнимой частями. Эти числа однозначно раскладываются на простые гауссовы числа, исследовав которые не так уж трудно оказалось доказать угаданные мною формулы. Заодно задача свелась к классической задаче Ферма — Эйлера о сумме квадратов.

Удивительно, что дети могут плодотворно заниматься одной темой по два года и больше! Очевидно, это возможно не с любой задачей, а с задачей, допускающей постепенные продвижения, «вживание» (которого почти никогда не бывает на уроках). А в результате этого «вживания» со временем решаются задачи, к которым вначале совсем не видно подхода. Правда, иногда уже другими детьми...

Стоит отметить и большую роль обсуждения задач с коллегами по ходу решения.

Из опыта учебно-исследовательской деятельности учащихся в лицее 1511 при МИФИ

А. В. Иванищук

Исследовательской деятельностью в нашем лицее занимаются уже давно. Толчком к ней послужила проходящая на базе МИФИ конференция школьников «Юниор-Интел», которая проходит в январе–феврале и на которой представлены кроме математики и другие естественно-научные секции. В сентябре школьникам предлагается к исследованию некоторый набор тем. Деятельность не носит обязательного массового характера. Некоторые исследования не доходят до конца, некоторые не выходят на уровень городских и российских конференций и остаются для лицейской конференции, которая проходит в апреле, иногда исследования продолжаются и на следующий год.

У каждой темы есть свой руководитель из числа учителей лицея, преподавателей МИФИ и других вузов, выпускников-студентов и аспирантов. Задачи в основном ставят руководители, так как школьники еще не обладают достаточными знаниями. Это наиболее трудная часть — выбрать тему, не только достаточно интересную, но и доступную для продвижения школьников. Сами задачи могут быть не новыми, но и не самыми известными.

Одна из задач пришла мне в голову, когда мы изучали композицию функций. А не могут ли «вырождаться» в тождественный нуль (или другую константу) композиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ не тождественно нулевых функций, заданных на $\mathbb{R}$? Вопрос был задан на уроке для домашнего обдумывания и принес некоторые плоды в виде примеров. Например, $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$ (целая и дробная части). Или

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 1]; \\ 4\pi, & x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty). \end{cases}$$

Стало понятно, что образовалась неплохая задача для исследования. Не для каждой функции $f(x)$ можно подобрать функцию $g(x)$ с требуемым условием (например, этого нельзя сделать для $f(x) = x^2$). Возникает вопрос об условиях для $f(x)$. Были получены необходимые и достаточные условия. Они такие: 1) $f(0) = 0$; 2) $Ef \neq \mathbb{R}$; 3) $\exists\, x_0 \neq 0 \colon f(x_0) = 0$. Дальнейшие вопросы поставили сами школьники: существуют ли функции $f(x)$, для которых «вырождается» в тождественный нуль n-кратная композиция этой функции с собой, в то время как $(n-1)$-кратная композиция не тождественно нулевая; существуют ли функции, для которых предельная композиция с собой дает тождественный нуль.

Задача для другого исследования пришла совершенно неожиданно. В то время моя дочь Галина изучала в школе отрицательные числа. Я решил для проверки ее знаний дать простую (как мне тогда казалось) задачу. «Представь число 1 в виде произведения нескольких множителей, сумма которых была бы равна нулю». Дочь быстро назвала мне множители: 1, 1, −1, −1. «Хорошо! — похвалил я. — А число 2?» Ответ последовал быстро: «2, −1, −1». «А число 3?» Дочь задумалась надолго. Потом сказала: «Я знаю ответ для числа 4 — это 2, −2, 1, −1 и для числа 6 — это 3, −2 и −1. И вообще, мне пора делать уроки!» Тут уже надолго задумался я сам. Разложение числа 3 пришло через часок и содержало 8 множителей! Я понимал, что это уж слишком много, и действительно, более короткое представление содержало 5 множителей: $3 = (-0{,}5) \cdot (-1{,}5) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$. Меньше множителей получить не удавалось. Конечно, речь идет о рациональных множителях. Если не требовать рациональности, то для любого натурального числа n существуют три числа, произведение которых равно n, а сумма равна нулю. Итак, задача была окончательно сформулирована: «Представить натуральное число n в виде произведения наименьшего количества рациональных множителей, сумма которых равна нулю».

Некоторое время эта задача не давала мне покоя. Я находил разложения для отдельных натуральных чисел, но никакой общей закономерности не проступало. Другие дела постепенно оттеснили задачу. Но однажды я рассказал об этой задаче на кружке, и один из учеников, Неваленный Александр (ныне студент МИФИ), загорелся ею. Мы вместе продолжили исследование. Прежде всего хотелось бы выяснить, какие числа представимы в виде произведения трех множителей и если есть одно представление, то сколько существует еще. Число 1 представимо в виде четырех множителей, но нет ли представления в виде трех? Доказательство непредставимости в виде трех множителей было получено, и оно опиралось на большую теорему Ферма для третьей степени! Это означало и непредставимость всех кубов натуральных чисел в виде трех множителей. Большую помощь нам оказала популярная книга В. Острика и М. Цфасмана «Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые» (М.: МЦНМО, 2001). Для случая трех множителей получалась кривая третьего порядка на плоскости — неособая кубика, про которую было много известно. Мы доказали, что разложение для числа $2 = 1 \cdot (-2) \cdot 1$ единственно, а для всех других чисел, допускающих разложение на три множителя, существует бесконечное количество разложений (помогла теорема Морделла). Нами было получено условие на вид чисел, допускающих разложение на три множителя.

И все-таки вопрос о минимальном количестве множителей, достаточном для разложения произвольного натурального числа, оставался открытым. Мы написали письмо одному из авторов упомянутой книги Михаилу Анатольевичу Цфасману о задаче и наших результатах. Задача ему показалась интересной, ранее о ней он не слышал. Завязалась оживленная переписка. Для всех чисел первой сотни была сделана классификация: либо было дано представление в виде трех множителей, либо была доказана невозможность такого представления. Александру Неваленному удалось найти «каноническое» представление любого натурального числа n в виде произведения пяти множителей $n = (-n) \cdot (2/n) \cdot (-2/n) \cdot (n/2) \cdot (n/2)$. Оставался вопрос: а существуют ли числа, для которых четырех множителей недостаточно. Долгое время мы пытались доказать это для числа 3, пока Михаил Анатольевич не нашел разложения. Привожу его электронное послание полностью:

«$3 = (363/70) \cdot (20/77) \cdot (-49/110) \cdot (-5)$ Уф… Ваш М. А.»

Разложение действительно потрясает! Родилась гипотеза, что для любого натурального числа n достаточно четырех множителей. К данному моменту эта гипотеза не доказана и не опровергнута и ждет своих исследователей. На семинаре учителей математики в Коблево в 2008 году, услышав это сообщение, В. М. Гуровиц применил возможности «железного друга» и получил разложения в виде четырех множителей для чисел первой сотни. Привожу их для первых 50 в надежде, что это может натолкнуть на какое-либо доказательство:

$$1 = (1/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-1/1);$$
$$2 = (1/6) \cdot (9/2) \cdot (-4/1) \cdot (-2/3);$$
$$3 = (13/45) \cdot (45/11) \cdot (-11/16) \cdot (-48/13);$$
$$4 = (2/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-2/1);$$
$$5 = (1/3) \cdot (9/2) \cdot (-4/1) \cdot (-5/6);$$
$$6 = (8/1) \cdot (1/12) \cdot (-4/3) \cdot (-27/4);$$
$$7 = (1/2) \cdot (4/1) \cdot (-1/1) \cdot (-7/2);$$
$$8 = (2/15) \cdot (20/3) \cdot (-9/5) \cdot (-5/1);$$
$$9 = (3/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-3/1);$$
$$10 = (4/1) \cdot (1/2) \cdot (-2/1) \cdot (-5/2);$$
$$11 = (9/2) \cdot (1/2) \cdot (-4/3) \cdot (-11/3);$$
$$12 = (2/1) \cdot (2/1) \cdot (-1/1) \cdot (-3/1);$$
$$13 = (1/5) \cdot (25/4) \cdot (-16/5) \cdot (-13/4);$$
$$14 = (1/12) \cdot (32/3) \cdot (-9/1) \cdot (-7/4);$$
$$15 = (3/2) \cdot (4/1) \cdot (-1/2) \cdot (-5/1);$$
$$16 = (4/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-4/1);$$
$$17 = (1/12) \cdot (32/3) \cdot (-9/4) \cdot (-17/2);$$
$$18 = (46/55) \cdot (55/4) \cdot (-4/37) \cdot (-333/23);$$
$$19 = (1/10) \cdot (10/1) \cdot (-5/2) \cdot (-38/5);$$
$$20 = (6/1) \cdot (1/3) \cdot (-3/1) \cdot (-10/3);$$
$$21 = (4/1) \cdot (1/1) \cdot (-3/2) \cdot (-7/2);$$
$$22 = (4/1) \cdot (2/1) \cdot (-1/2) \cdot (-11/2);$$
$$23 = (15/2) \cdot (3/10) \cdot (-5/3) \cdot (-92/15);$$

$24 = (3/1) \cdot (2/1) \cdot (-1/1) \cdot (-4/1);$
$25 = (1/3) \cdot (9/1) \cdot (-1/1) \cdot (-25/3);$
$26 = (1/6) \cdot (9/1) \cdot (-8/3) \cdot (-13/2);$
$27 = (6/1) \cdot (1/2) \cdot (-2/1) \cdot (-9/2);$
$28 = (5/1) \cdot (7/10) \cdot (-5/2) \cdot (-16/5);$
$29 = (9/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/3) \cdot (-29/3);$
$30 = (1/2) \cdot (8/1) \cdot (-1/1) \cdot (-15/2);$
$31 = (1/6) \cdot (9/1) \cdot (-4/1) \cdot (-31/6);$
$32 = (1/6) \cdot (12/1) \cdot (-3/2) \cdot (-32/3);$
$33 = (5/1) \cdot (4/5) \cdot (-5/2) \cdot (-33/10);$
$34 = (8/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/2) \cdot (-17/2);$
$35 = (1/6) \cdot (18/1) \cdot (-2/3) \cdot (-35/2);$
$36 = (6/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-6/1);$
$37 = (1/14) \cdot (14/1) \cdot (-7/2) \cdot (-74/7);$
$38 = (45/2) \cdot (1/30) \cdot (-20/1) \cdot (-38/15);$
$39 = (4/1) \cdot (3/1) \cdot (-1/2) \cdot (-13/2);$
$40 = (4/1) \cdot (2/1) \cdot (-1/1) \cdot (-5/1);$
$41 = (6/1) \cdot (3/2) \cdot (-2/3) \cdot (-41/6);$
$42 = (4/1) \cdot (3/2) \cdot (-2/1) \cdot (-7/2);$
$43 = (1/10) \cdot (25/2) \cdot (-4/1) \cdot (-43/5);$
$44 = (1/3) \cdot (9/1) \cdot (-2/1) \cdot (-22/3);$
$45 = (3/1) \cdot (3/1) \cdot (-1/1) \cdot (-5/1);$
$46 = (1/10) \cdot (25/2) \cdot (-8/1) \cdot (-23/5);$
$47 = (9/1) \cdot (1/4) \cdot (-16/3) \cdot (-47/12);$
$48 = (45/2) \cdot (1/30) \cdot (-10/3) \cdot (-96/5);$
$49 = (7/1) \cdot (1/1) \cdot (-1/1) \cdot (-7/1);$
$50 = (15/2) \cdot (2/3) \cdot (-3/2) \cdot (-20/3).$

Мне кажется, что учебно-исследовательская деятельность должна быть продолжением учебной работы, не выходящим далеко за рамки школьной программы. Элементарная геометрия, несложная теория чисел дают возможность это сделать. Заинтересовать школьника можно, только передав ему часть своей заинтересованности. В какой-то степени я являюсь «любителем», а не «профессионалом» в этом деле.

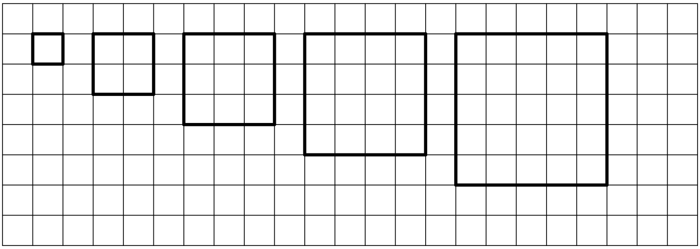
Работы

Квадраты на клетчатой бумаге

Выполнила:
Иглина Александра
(5 класс, Школа-интернат
«Интеллектуал»)

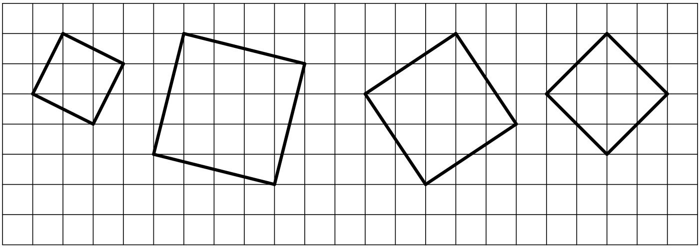
Построим несколько квадратов с вершинами в узлах сетки и найдем их площади. Пусть сторона одного квадратика сетки равна 1.

1. «Прямые» квадраты:



Их площадь найти легко: это квадраты длин их сторон, а стороны равны целому числу клеток. Площади прямых квадратов — это квадраты целых чисел: 1, 4, 9, 16, 25 и т. д.

2. «Косые» квадраты:



Как найти площадь «косого» квадрата?

Впишем наш «косой» квадрат в «прямой» (рис. 1).

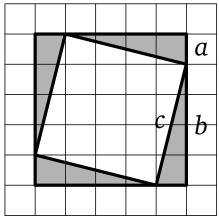


Рис. 1

Чтобы найти площадь S «косого» квадрата, надо из площади прямого квадрата вычесть четыре площади закрашенных прямоугольных треугольников, т. е. $2ab$. Эти треугольники одинаковые.

А теперь передвинем прямоугольные треугольники внутри большого квадрата так, чтобы получилось два «прямых» квадрата, как показано на рис. 2.

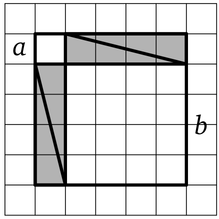


Рис. 2

Площадь одного квадрата равна a^2, а второго — b^2. Сумма их площадей как раз равна площади «косого» квадрата, потому что это площадь большого «прямого» квадрата без тех же четырех прямоугольных треугольников.

Значит, $S = a^2 + b^2$.

Если сторону «косого» квадрата обозначить через c, то его площадь $S = c^2$. Поэтому $c^2 = a^2 + b^2$. Так мы пришли к теореме Пифагора для закрашенных прямоугольных треугольников.

Какими же числами может выражаться площадь «косого» квадрата с вершинами в узлах сетки? Это такие числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. Например,

$$26 = 1 + 25; \quad 13 = 4 + 9; \quad 50 = 25 + 25.$$

А, например, квадрата с вершинами в узлах сетки и площадью, равной 31, не существует, потому что

$$31 = 1 + 30 = 4 + 27 = 16 + 15 = 25 + 6,$$

т. е. 31 не разбивается на сумму двух квадратов целых чисел.

Комментарий учителя. Работа выполнена в 2007 году.

Задача выросла из упражнения из замечательной книжки И. Ф. Шарыгина, Л. Н. Ерганжиевой «Наглядная геометрия. 5–6 классы» (М.: Дрофа, 2008): построить на клетчатой бумаге квадраты с вершинами в узлах сетки площадью 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, ... клеток. Пятиклассники с удовольствием решали ее на уроке. Потом я сказал им, что интересно исследовать, квадраты какой площади можно так построить, а какой — нельзя. Через несколько месяцев Саша принесла готовое решение (делала дома, помогали родственники, разбирающиеся в математике). Получилась симпатичная работа.

Работа имеет естественное продолжение.

1. Какие именно целые числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел (назовем их двуквадратными)? Оказывается, нечетные простые двуквадратные числа при делении на 4 имеют остаток 1, и наоборот, все простые числа вида $4n+1$ являются двуквадратными. Этот результат легко пронаблюдать экспериментально. Первую его часть нетрудно доказать. (См. следующую работу.)

2. Произведение двуквадратных чисел также является двуквадратным числом. Это следует из формулы

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

3. Сколькими способами выражается данное число в виде суммы двух квадратов? Ср. историю на с. 19–21.

Интересно исследовать аналогичные вопросы на треугольной и на шестиугольной решетках. Например, будем рассматривать правильные треугольники с вершинами в узлах правильной треугольной сетки. Каким целым числам могут быть равны их площади (выражаемые через площадь единичного треугольника на сетке)? Является ли произведение «двутреугольных» чисел также «двутреугольным»? Можно проследить красивую аналогию с двуквадратными числами.

Простые числа и представимость в виде суммы двух квадратов

Выполнил:
Сорокин Антон
(5 класс, Школа-интернат «Интеллектуал»)

Научный руководитель:
А. И. Сгибнев

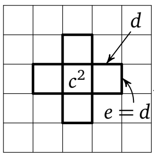
Определения:

1) простое число — число, у которого ровно два натуральных делителя: само число и 1;
2) a, b, c, d, e, n — натуральные числа;
3) $\Rightarrow$ — следовательно.

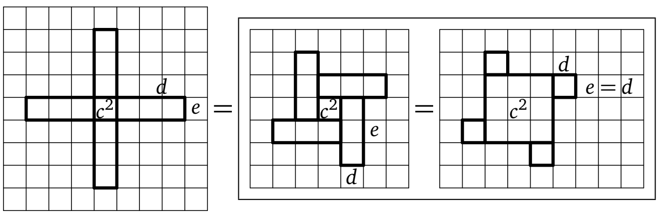
Теорема[1]**.** *Все простые числа, кроме 2, представимые в виде a^2+b^2, представимы в виде $4n+1$. И наоборот: все простые числа, представимые в виде $4n+1$, представимы в виде a^2+b^2.*

Лемма. *Пусть $c^2+4de=$* ***простое число, но не 2****. Тогда можно подобрать такие a и b, что $c^2+4de=a^2+b^2$.*

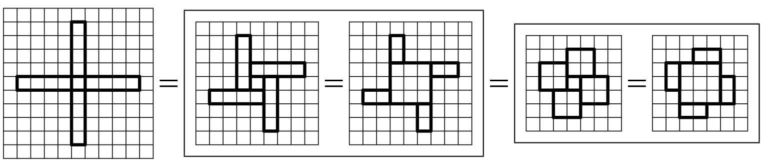
Доказательство леммы. Если число можно представить в виде c^2+4de, то его представление в этом виде можно изобразить геометрически. Начнем так делать:

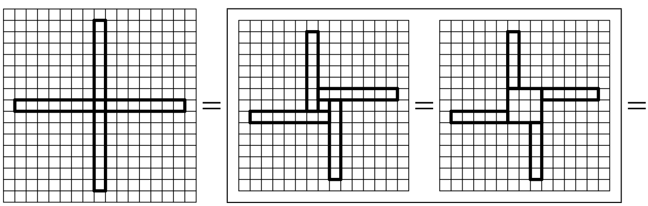
$5=$ 

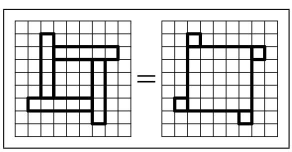
;

$13=$ 

;

$17=$ 
;

$29=$ 

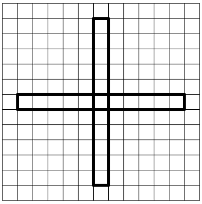
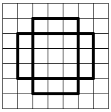
$=$ 
.

---

[1] Как будет видно из комментария в конце работы, доказательство имеет существенный пробел, так что эта (верная) теорема здесь не доказана, а лишь обоснована с помощью эвристической конструкции.

Вариантов разложения простых чисел на $c^2 + 4de$, если они есть, нечетное количество, так как среди них есть одна фигура, которая не совпадает ни с одной другой по контуру, а все остальные образуют пары с одинаковым внешним контуром (обведены в рамку).

Замечание. Для составных чисел возможно более одного варианта фигур, которые не совпадают ни с одной по контуру. Например:

$21 =$  $=$ .

У нас нечетное количество вариантов представления простого числа в виде $c^2 + 4de \Rightarrow$ всегда найдется вариант, в котором $d = e$, так как в остальных случаях можно менять d и e местами, и варианты разобьются по парам.

Так как у нас будет вариант, когда $d = e$, число $4de$ можно представить в виде a^2, а c в виде b. □

Доказательство теоремы. *В первую сторону она будет работать*, так как:

Остаток от деления на 4	x или y	0	1	2	3
	x^2 или y^2	0	$1^2 = 1$	$2^2 = 4 \Rightarrow 0$	$3^2 = 9 \Rightarrow 1$

поэтому сумма $x^2 + y^2$ может давать остаток от деления на 4 только 0, 1 или 2, а так как мы выписывали только нечетные числа, то только 1.

Так как остаток от деления на 4 равен 1, число можно представить в виде $4n + 1$.

В обратном случае: если простое число можно представить в виде $4n + 1$, то его можно представить в виде $c^2 + 4de$ (например, $n = de$, $1 = c^2$). Тогда его можно представить в виде $a^2 + b^2$ (лемма).

Вывод. Теорема верна. Выпишем простые числа (за исключением 2) в два ряда. В первый ряд те, которые можно представить в виде суммы двух квадратов, а во второй — те, которые нельзя так представить. Если мы возьмем два любых числа из одного ряда, то их разность будет делиться на 4. Действительно, в первый ряд попадут числа, которые можно представить в виде $4n + 1$, и все они будут иметь остаток 1 от деления на 4, а во втором ряду окажутся все остальные простые числа, имеющие остаток 3 от деления на 4.

Дальнейшее направление работы. Доказать, почему лемма не работает для составных чисел. □

Комментарий. Работа выполнена в 2011/12 учебном году. Значительная часть работы допускает накопление эмпирического материала и его обобщение. Основным нетривиальным местом является расширение задачи — вместо выражения a^2+b^2 удобнее оказывается рассматривать выражение c^2+4de. Трудно догадаться также до графического представления решения в виде «крылатых квадратов».

В работе не продуман вопрос о том, почему любой «правильный» контур крылатого квадрата разбивается на квадрат и четыре прямоугольника ровно двумя способами.

Задача о размене монет

Выполнили:
Жорникова Полина,
Черёмухина Алёна
(9 *класс*, *Летняя школа*
«Интеллектуал»)
Руководители:
Н. М. Нетрусова,
В. М. Коровин

Цель нашей работы — установить, какие суммы можно получить из неограниченного количества монет достоинства x руб. и y руб.

Этапы работы. 1. Сначала мы рассмотрели случай, когда достоинства наших монет **взаимно просты**. Мы сформулировали и доказали лемму.

Если можно получить интервал от $(x-1)(y-1)$ *до* $(x-1)(y-1)+\min(x;y)-1$, *то можно получить все числа, большие* $(x-1)(y-1)$.

Мы выдвинули гипотезу 1.

Если числа x *и* y *взаимно просты, то можно получить все числа начиная с* $(x-1)(y-1)$.

Эту гипотезу мы попытались доказать по этапам:

а) можно получить все числа от $(x-1)(y-1)$ до $(x-1)(y-1)+\min(x;y)-1$;
б) ни при каких значениях x и y не получается числа $(x-1)(y-1)-1$.

Подпункт а) мы доказали, а подпункт б) не смогли.

2. Потом мы рассмотрели случай, когда достоинства наших монет **не взаимно просты**, и выдвинули гипотезу 2.

Пусть x и y — числа вида $x = dn$ и $y = dm$, где m и n — взаимно простые числа, тогда мы сможем получать только числа, делящиеся на d, начиная с $d(n-1)(m-1)$.

Мы доказали эту гипотезу (свели ее к гипотезе 1).

В дальнейшем мы надеемся доказать те части гипотезы 1, которые еще не доказали.

Комментарий. Работа выполнена в Летней школе «Интеллектуал» в 2009 году. Дети работали 5 полуторачасовых занятий аудиторного времени. Видимо, этого все же маловато для подобных задач — многие не успели закончить работу или написать подробный отчет.

«Не больше половины»

Выполнили:
Дедов Дмитрий,
Прохоров Владимир,
Орлова Мария,
Хорец Александра
(*Красноярская летняя школа*)

Руководитель:
Антон Борисюк

Постановка задачи. Дана кучка камней. Играющие (их двое) по очереди берут камни, причем игрок не может пропускать ход (не брать камни) и может взять не больше половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Требуется понять, какие числа выигрышные, а какие — проигрышные.

Комментарий. Позиция называется *выигрышной*, если игрок, попавший на эту позицию, при правильной игре победит (как бы ни играл соперник). Позиция называется *проигрышной*, если игрок, попавший на эту позицию, проиграет при правильной игре соперника (как бы он сам ни играл).

Теорема. 1. *Единица — первое проигрышное число.*

2. *Пусть X — проигрышное число, тогда*

А) *числа, большие X и меньшие $2X+1$, выигрышные*;

Б) $2X+1$ — *проигрышное число.*

Доказательство. 1. Единица — первое проигрышное число, так как в этом случае нельзя сделать ход.

2. А. Пусть X — проигрышное число, N — текущее число камней, причем $X < N < 2X + 1$.

Очевидно, $N - X \leqslant N/2$.

Поэтому можно отнять $N - X$ камней и получить проигрышное число X.

Б. Докажем, что $2X + 1$ — проигрышное число.

Докажем от противного. Пусть $2X + 1$ — выигрышное число. Тогда ходящий игрок (назовем его Первым) может за один ход оставить в кучке проигрышное число камней. По условию задачи он не может брать больше половины, т. е. больше X камней. Значит, после хода Первого игрока останется Y камней, где

$$X + 1 \leqslant Y \leqslant 2X.$$

По доказанному все такие числа выигрышные. Противоречие.

Теорема доказана. □

Теорема. А. *Все числа вида* $X_n = 2^n - 1$, *где* n — *любое натуральное число, проигрышные.*

Б. *Числа вида* $X_n = 2^n - 1$ — *единственные проигрышные числа.*

Доказательство. А. Доказательство проводится методом математической индукции.

Число $X_1 = 2 - 1 = 1$ проигрышное. Пусть X_n — проигрышное число.

По теореме 1 если X — проигрышное число, то и $2X + 1$ — проигрышное число.

Следовательно,

$$X_{n+1} = 2X_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

— проигрышное число.

Б. Пусть Y не число вида $2^n - 1$. Тогда для некоторого числа n выполнено неравенство

$$2^n - 1 < Y < 2^{n+1} - 1$$

Очевидно, $Y - 2^n \leqslant Y/2$, значит, из Y можно получить проигрышное число камней $2^n - 1$, т. е. Y — выигрышное число.

Теорема доказана. □

Первые проигрышные числа:

№ проигр. числа	Число	Формула
1	1	$2^1-1=1$
2	3	$2^2-1=3$
3	7	$2^3-1=7$

Комментарий. Работа выполнена в Красноярской летней школе в 2000 году. Данные о возрасте участников не сохранились.

Задача о мудрецах у людоедов

Выполнил:
Абасов Артём
(*Летняя школа «Интеллектуал»*)

Руководитель:
А. И. Сгибнев

Постановка задачи. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки — кому белый, кому черный — наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник начиная с последнего, который видит всех, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, отпускают. Остальных съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?

Занумеруем мудрецов так: $0, 1, 2, \ldots, n$ (всего $n+1$). Нулевой видит всех, n-й не видит никого. Зашифруем белые колпаки 0, а черные колпаки 1. Тогда последовательность мудрецов шифруется последовательностью 0 и 1.

Рассмотрим частные случаи.

1. Легко гарантированно спасти каждого второго мудреца. Разобьем мудрецов на пары, и в каждой паре первый мудрец говорит цвет колпака второго.

2. Рассмотрим случай, когда мы хотим спасти двух мудрецов из трех. Пусть 0-й мудрец скажет «0», если видит перед собой

комбинации 00 или 11. В противном случае пусть скажет «1». Тогда по его ответу 1-й мудрец поймет, совпадает ли его цвет с цветом 2-го.

Заметим, что мы разбили 4 возможные последовательности — 00, 01, 10 и 11 — на 2 списка по 2 последовательности:

00 11	01 10

При этом списки обладают такими свойствами.

Свойство А. *Любые две последовательности из одного списка отличаются друг от друга не менее чем в двух разрядах.*

Свойство Б. *Любые две последовательности из разных списков отличаются друг от друга не менее чем в одном разряде* (*т. е. все числа разные*).

Теперь рассмотрим общий случай.

Утверждение. *Гарантированно можно спасти n из $n+1$ мудрецов.*

Ясно, что нулевого мудреца гарантированно спасти нельзя — ведь цвет его колпака никто не видит. Докажем, что если мы можем разбить все 2^n последовательностей для n мудрецов (кроме нулевого) на 2 списка по 2^{n-1} последовательностей со свойствами **А** и **Б**, то таким образом можно спасти n мудрецов.

Доказательство. Выдадим каждому мудрецу эти два списка. Тогда нулевой мудрец своим ответом определит один из двух списков. Каждый мудрец видит все цвета колпаков впереди стоящих мудрецов и слышит цвета колпаков тех, кто позади, тем самым он знает все цифры в последовательности, кроме своей. Предположим, что есть такие две последовательности в одном списке, что они идентичны для какого-то мудреца. Но по свойству **А** эти две последовательности отличаются друг от друга еще как минимум в одном разряде. Значит, любые две последовательности в одном списке отличаются друг от друга даже без знания об одной из цифр, и, следовательно, каждый мудрец может правильно определить по списку цвет своего колпака.

Докажем теперь, что такое разбиение на списки возможно для любого n.

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции.

База. См. выше.

Переход. Предположение индукции:

можно разбить все 2^k последовательностей длины k на 2 списка по 2^{k-1} последовательностей со свойствами **А** и **Б.**

Тогда аналогичное разбиение возможно для 2^{k+1} последовательностей длины $k+1$.

I список	II список
000	001
011	010
101	100
110	111

I список	II список
$\underline{0}000$	$\underline{1}000$
$\underline{0}011$	$\underline{1}011$
$\underline{0}101$	$\underline{1}101$
$\underline{0}110$	$\underline{1}110$
—	—
$\underline{1}001$	$\underline{0}001$
$\underline{1}010$	$\underline{0}010$
$\underline{1}100$	$\underline{0}100$
$\underline{1}111$	$\underline{0}111$

В самом деле, возьмем первый список длины n и припишем спереди к каждому числу 0. Затем возьмем второй список и припишем спереди к каждому числу 1. Все получившиеся числа объявим первым списком длины $k+1$. Затем, приписывая, наоборот, к первому списку 1, а ко второму 0, построим второй список длины $k+1$. Докажем, что полученные списки обладают свойствами **А** и **Б**. Во-первых, все полученные последовательности различны, так как у них либо разные «хвосты», либо, если «хвосты» одинаковы, разные первые цифры (по построению). Во-вторых, две последовательности из одной половины списка отличаются в двух цифрах «хвоста», а две последовательности из разных половин одного списка отличаются первой цифрой (по построению) и хотя бы одной цифрой «хвоста» (по свойству **Б**).

Случай с тремя цветами колпаков. Зашифруем три цвета как 0, 1 и 2. В этом случае у мудрецов будет 3 списка, в каждом по 3^{n-1} последовательностей (0-й мудрец своим ответом будет задавать один из трех списков). В каждом из этих списков должны выполняться свойства **А** и **Б**. Способ построения таких списков аналогичен случаю двух цветов.

Вот примеры списков для $n=2$ и 3:

00	10	20
21	01	11
12	22	02

000	100	200
021	121	221
012	112	212
210	010	110
201	001	101
222	022	122
120	220	020
111	211	011
102	202	002

Комментарий руководителя. Работа выполнена в 2011 году.

Нетрудно заметить, что (в случае двух цветов) сумма всех единиц в последовательностях каждого списка имеет одну и ту же четность. Отсюда следует переформулировка решения: каждый мудрец подсчитывает четность числа видимых ему черных колпаков. Это решение более наглядно, легко понимается и доказывается. У него только один недостаток — до него непросто догадаться самому, если нет соответствующего опыта. Подобный опыт как раз и приобретается в ходе изобретения «длинного» решения со списками, приведенного выше.

Последовательности, задаваемые рекуррентной формулой, выражающей каждый член как линейную комбинацию двух предыдущих

Выполнил:
Власенко Дмитрий
(9 *класс, Школа-интернат «Интеллектуал»*)

Руководитель:
Д. Э. Шноль

Цели этой проектной работы:

- изучить последовательности, задаваемые рекуррентной формулой $a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n$, где $k \neq 0$, $l \neq 0$;
- отдельно изучить периодические последовательности этого вида.

Чтобы задать последовательность этого вида, кроме рекуррентной формулы надо задать два ее начальных члена a_0 и a_1 (обычно последовательности определяются для натуральных номеров, но в этом случае удобно начинать последовательность с нулевого члена).

Пока я в основном изучил последовательности, у которых *начальные члены* $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Для них сделано следующее.

- Получена формула n-го члена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{k^2+4l}} \cdot \left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4l}}{2} \right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4l}}{2} \right)^n \right).$$

- Доказано (двумя способами: по индукции и подстановкой в формулу n-го члена) следующее утверждение.

Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана формулой

$$a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n.$$

Тогда все члены последовательности $\{\bar{a}_n\}$, заданной формулой

$$\bar{a}_{n+2} = -k\bar{a}_{n+1} + l\bar{a}_n,$$

равны $\bar{a}_n = (-1)^{n+1}a_n$ (т. е. $\bar{a}_{2n-1} = a_{2n-1}$, а $\bar{a}_{2n} = -a_{2n}$).

Последовательность $\{\bar{a}_n\}$ можно называть последовательностью, сопряженной с $\{a_n\}$ (по аналогии с комплексными числами).

- Доказано, что последовательность является периодической тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) $l = -1$; 2) $-2 < k < 2$; 3) $\dfrac{2\pi}{\arccos(k/2)} \in \mathbb{Q}$.
- Доказано (это проще всего доказать при помощи комплексной плоскости), что все члены любой периодической последовательности лежат на синусоиде. Определено, как амплитуда и период этой синусоиды зависят от k и l.

Для последовательностей с произвольными начальными членами я тоже получил некоторые результаты, но не буду приводить их в тезисах.

Результаты этой работы можно применить в электротехнике: исходя из того, что все члены определенных последовательностей этого вида лежат на синусоиде или убывающей синусоиде, можно составить электрическую схему цифрового генератора синусоидального или убывающего синусоидального сигнала.

Комментарий. Работа выполнена в 2005 году. Приведенная формула n-го члена обобщает формулу Бине для чисел Фибоначчи (они получаются при $k = l = 1$).

Задачи

В этой части собраны 54 исследовательские задачи для школьников. Уровень сложности задач очень разный. Условно говоря, первые по порядку задачи в каждом разделе учебные — для урока или кружка. Средние задачи можно докладывать на школьной конференции. А с последними задачами можно выступить и на межшкольной конференции[1].

Рубрикация задач

Рубрикатор включает в себя следующие параметры.

Класс

Ограничения по классу бывают двух видов:

- по знаниям, необходимым для понимания условий и/или решения задачи;
- по общему уровню математической культуры.

В первом случае мы указываем в скобках математические факты и темы, послужившие причиной ограничения. Во втором случае ограничение более условно.

Но в обоих случаях задача может иметь смысл для более старших классов, поэтому везде стоит знак «$\geqslant$», т. е. *не младше*. Иногда ставится и знак «$\leqslant$», т. е. *не старше*. Это означает, что в ходе задачи открываются понятия из программы более старших классов; если они уже известны ученику, то задача для него перестает быть исследовательской[2].

Заметим, что если не иметь в виду строгие доказательства полученных результатов, то для многих задач показатель «Класс» можно снизить. Школьник может вести осмысленные наблюдения

---

[1] Например, [Конф3], [Конф4] или даже [Конф2].

[2] Но при этом вполне может иметь смысл как обычная задача на метод. Например, задача «Квадраты на клетчатой бумаге» (см. с. 26–28) после 8 класса — вполне осмысленная учебная задача на теорему Пифагора.

и понимать математические структуры, к обоснованию которых еще не имеет средств [Ст2].

Раздел

Каждая задача отнесена к одному или нескольким из следующих разделов:

- арифметика;
- алгебра;
- геометрия;
- комбинаторика;
- алгоритмы.

Задачи собраны по разделам в порядке возрастания минимального класса.

Пошаговость

Мы не смогли определить параметр «Пошаговость» одинаково для всех задач. В большинстве задач использовался один из двух признаков.

А. Если задача естественным (для ученика) образом разбивается на последовательность подзадач, то пошаговость *средняя*. Если при этом из решения подзадач естественно вытекает решение задачи, то пошаговость *высокая*. Если нет ни того, ни другого, то *низкая*.

Б. Если из *математических экспериментов* можно усмотреть *утверждение*, то пошаговость *средняя*. Если можно усмотреть и *утверждение*, и идею *доказательства*, то пошаговость *высокая*. Если только отдельные детали, то *низкая*.

Также в этом параметре указываются слова «Живая геометрия» — в том случае, если эта программа может существенно помочь при решении задачи. (Годятся и другие программы динамической геометрии, например «Математический конструктор» или свободно распространяемая «Geogebra».)

Методическое сопровождение

Эта характеристика указывает на наличие следующих текстов (они напечатаны в конце раздела):

- *комментарий*;
- *ссылка* на решение задачи в книге или статье;
- *обобщение*;
- *план* решения;
- текст *работы* ученика.

О формулировках задач и подсказках

Когда ученик не может справиться с задачей, ему помогают. Традиционно помощь состоит в четком формулировании конечного или промежуточного результата («докажи, что…», «найди то-то…»). Но помощь может быть гораздо разнообразнее [Ст1], например, можно:

- задать вопрос («какой длины может быть строчка?»),
- обратить внимание школьника на какую-то закономерность («смотри, разности соседних чисел всегда нечетные»),
- указать *процесс* или *конструкцию*, которые помогут ему прийти к результату или идее решения («проведи две медианы и отметь их середины»; «подсчитай количество солдат, которые смотрят налево, для каждой секунды»).

Для исследовательских задач такая открытая помощь предпочтительнее: она помогает ученику «вжиться» в новый мир, но не навязывает результатов, к которым «надо» прийти. *Поэтому в наших задачах нет готовых формулировок* [К10], [Ст1].

О комментариях

К большинству задач приведены комментарии разной степени подробности — от кратких указаний до полного описания решения. Они *адресованы руководителю* (а не школьнику!) и помогают ему быстро сориентироваться в теме, литературе, связях с «большой» математикой. Однако важно помнить, что *комментарий никоим образом не заменяет самостоятельного продумывания задачи*, а только помогает экономить учительское время. Детям видеть комментарии неполезно — по крайней мере, до того как они сами потратят значительное время на размышление над задачей.

Комментарии бывают нескольких видов — математический, исторический, педагогический. Комментарии не претендуют на полноту, а лишь показывают возможные подходы, отмечают интересные факты и т. д. Автор будет признателен за любые дополнения.

К некоторым темам приводятся **обобщения** — возможное направление развития темы и ссылка на литературу, по которой можно продолжить знакомство с темой.

Если задача достаточно сложна и закономерности не поддаются непосредственному экспериментальному угадыванию, то учитель может превратить ее в последовательность более простых задач и вопросов, т. е. составить **план** исследования. План кратко передает некоторое объективное содержание задачи. Такой план — хороший способ передачи другому учителю опыта работы с задачей. Если ученик работает самостоятельно, то такой план часто — единственная возможность ощутить вкус исследования. Много таких планов содержится в книгах [К3], [К6], [К7] и в материалах конференций [Конф1], [Конф2]. Но, разумеется, никакой план не заменит ученику живого общения с руководителем. Опытный учитель, познакомившись с таким планом (а еще лучше — наметив свой), реализует его в форме *регулярных обсуждений текущих результатов* ученика.

Авторство

За исключением задач, авторы которых указаны, остальные рекомендуемые тексты появлялись, как правило, следующим образом: группа учителей брала задачу (обычно классическую), переформулировала, дополняла и комментировала в исследовательском жанре.

Арифметика

Арифметика — царица математики, и подходящие задачи здесь найдет для себя каждый — от первоклассника до академика.

1. Замечательные числа. Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 — это первое замечательное число. Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

Класс: $\geqslant 1$, $\leqslant 6$.
Раздел: арифметика.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: комментарий.

2. Прямоугольники с заданной площадью. На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Для каких — два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

Класс: $\geqslant 3$ (площадь, периметр), $\leqslant 5$ (простые и составные числа).

Раздел: арифметика, геометрия.

Пошаговость: высокая.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщения.

3. Разложение числа. Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

Класс: $\geqslant 5$ (делители).

Раздел: арифметика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: ссылка.

4. Суперкомпьютер. Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию — операцию смешивания двух чисел: из чисел m, n компьютер получает число $(m+n)/2$. Если $m+n$ нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых нуль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на суперкомпьютере можно получить единицу?

Класс: $\geqslant 6$ (НОД).

Раздел: арифметика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

5. Диагонали прямоугольников. На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199×991 клеток. Через сколько узлов (т. е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника — $M \times N$ клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Класс: $\geqslant 6$ (НОД).
Раздел: арифметика.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: комментарий.

6. Задача о размене. Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей при условии, что нужно использовать оба типа монет? Обобщение: какие числа выражаются в виде $ax+by$, где a и b — данные натуральные числа, x и y — произвольные натуральные числа.
Класс: $\geqslant 7$.
Раздел: арифметика.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий, работа (с. 31–32).

7. Скла́дные числа. Скла́дные числа — это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$$5^2 = 2\underline{5};\quad 6^2 = 3\underline{6};\quad 25^2 = 6\underline{25}.$$

«Пятью **пять** — двадцать **пять**», «шестью **шесть** — тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.
Класс: $\geqslant 7$.
Раздел: арифметика, алгебра.
Пошаговость: низкая.
Методическое сопровождение: комментарий, ссылки, обобщения.

8. Поиск чисел с заданным количеством делителей. Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, — это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа N опишите все натуральные числа, имеющие ровно N делителей.
Класс: $\geqslant 7$ (основная теорема арифметики).
Раздел: арифметика.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий.

9. Разложения дробей.

$$\frac{1}{7} = 0{,}(142857), \quad \frac{2}{7} = 0{,}(285714), \quad \frac{3}{7} = 0{,}(428571), \quad \ldots$$

Для числа $1/7$ разложение в десятичную дробь периодично и состоит из шести цифр, а для $2/7, 3/7, \ldots, 6/7$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для чисел $1/13$ и $2/13$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$ для $p = 17, 19, 41, 47$ и других простых чисел и разберитесь, какие бывают циклы.

Класс: $\geqslant 8$.

Раздел: арифметика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, ссылка.

10. Периодические последовательности. Найдите периоды последовательностей:

1) $a_n \equiv n^m \pmod{k}$,

2) $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$, где φ_n — числа Фибоначчи.

Класс: $\geqslant 9$ (арифметика остатков, бином Ньютона).

Раздел: арифметика.

Пошаговость: низкая.

Методическое сопровождение: план, ссылка, обобщение.

Темы по арифметике см. также в [Ст6].

Алгебра

Алгебра — наиболее алгоритмизированный раздел школьной математики. В качестве задач для исследования здесь выбраны сюжеты, близкие к школьной программе, поэтому их можно использовать и с чисто учебными целями.

11. Классификация графиков дробно-квадратичных функций. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f},$$

где в числителе и в знаменателе — многочлены степени не выше второй. Какие типы графиков могут получиться? Исследуйте количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т. д.

Класс: $\geqslant 8$ (дробно-квадратичные функции).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

12. Симметрические многочлены. Симметрические многочлены — это многочлены от двух переменных x и y, которые от замены $x \longleftrightarrow y$ не изменяются, например $x^2 + y^2$, $x + y - xy$. Многочлены $u = x + y$ и $v = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами.

Верно ли, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных многочленов u и v? Как это сделать быстро?

Обобщение. Поставьте и решите аналогичную задачу для симметрического многочлена от трех переменных, от k переменных.

Замечание. Свойства симметрических многочленов используются во многих задачах. Простой пример: пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, тогда с помощью теоремы Виета можно выразить $x_1^n + x_2^n$ как многочлен от p и q при любом натуральном n.

Класс: $\geqslant 8$ (математическая индукция, бином Ньютона).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

13. Многочлен с заданным корнем. Постройте многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Постройте многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством.

Обобщение. Та же задача для суммы k квадратных корней из различных простых чисел.

Класс: $\geqslant 8$ (квадратные уравнения, иррациональности, математическая индукция).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

14. Иррациональные корни. При каких целых a, b, c корни уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ записываются только через квадратичные иррациональности? (Допускается несколько знаков квадратного корня — один в другом.)

Класс: $\geqslant 8$ (квадратные уравнения, замена переменных).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

15. Как увидеть симметрию многочлена? Уравнение

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=24$$

легко решается с помощью замены неизвестной. Для этого достаточно перемножить крайние скобки, перемножить средние скобки: $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$ и сделать замену $t=x^2+3x$. Однако если сразу раскрыть все скобки, то непонятно, как решать полученное уравнение (как увидеть нужную замену):

$$x^4+6x^3+11x^2+6x-24=0.$$

Требуется исследовать, какая особенность левой части уравнения позволяет сделать нужную замену, какой класс уравнений можно решать подобным способом, как определять для многочлена стандартного вида, можно ли найти его корни соответствующей квадратичной заменой.

Класс: $\geqslant 8$ (квадратные уравнения, замена переменной).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: низкая.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

16. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k; b)$. Рассмотрим координатную плоскость $(k; b)$. Каждая прямая вида $y=kx+b$ изображается на этой плоскости в виде *точки*. На координатной плоскости $(k; b)$ проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x; y)$. Как эти семейства прямых связаны между собой? Аналогичный вопрос для трех параллельных прямых.

Класс: $\geqslant 7$ (линейная функция).

Раздел: алгебра.

Пошаговость: высокая.

Методическое сопровождение: план, комментарий.

17. Плоскость параметров трехчлена. 1. Рассмотрим приведенный квадратный трехчлен x^2+px+q. Каждому такому трехчлену соответствует точка на плоскости коэффициентов $(p; q)$. И каждому трехчлену x^2+px+q, у которого есть корни x_1 и x_2, соответствует точка $(x_1; x_2)$ на плоскости корней.

Тем самым получаем отображение плоскости $(x_1; x_2)$ на плоскость $(p; q)$. Изучим это отображение. Нарисуйте на обеих плоскостях множество точек, соответствующих трехчленам с корнями:

а) равными,
б) положительными,
в) сумма которых постоянна,
г) произведение которых постоянно,
д) сумма квадратов которых постоянна,
е) один из которых фиксирован.

Пустите точку по кривой, получившейся на плоскости $(x_1; x_2)$ в каждом из пунктов в)–е). Как будет двигаться соответствующая ей точка на плоскости $(p; q)$?

Класс: $\geqslant 8$ (теорема Виета).
Раздел: алгебра.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

18. Количество решений. 1. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ в зависимости от параметров p и q. Нарисуйте на плоскости параметров $(p; q)$ области, соответствующие случаю 4, 3, 2 и т. д. корней.

2. Аналогичная задача для кубического многочлена $x^3 + px + q = 0$.

3. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ в зависимости от параметров a, b и c. Изобразите соответствующие области в пространстве параметров $(a; b; c)$.

Класс: $\geqslant 8$ (квадратные уравнения, теорема Безу).
Раздел: алгебра.
Пошаговость: низкая.
Методическое сопровождение: комментарий.

19. Диофантово уравнение А. А. Маркова. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Класс: $\geqslant 8$ (квадратные уравнения, теорема Виета).
Раздел: алгебра, арифметика.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: план, ссылка, обобщения.

20. Периодическая последовательность. Последовательность $a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$ $(a_0 = 0, a_1 = 1)$ является периодической (проверьте). При каких числах k и l последовательность $a_{n+2} = ka_n + la_{n+1}$ получается периодической? Какой длины может быть период?

Класс: $\geqslant 9$.
Раздел: алгебра.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: работа (с. 37–38).

21. Гармонические функции. Будем рассматривать дискретные функции, т. е. функции, заданные в целочисленных точках (узлах) плоскости. Дискретная функция называется гармонической, если ее значение в любом узле равно среднему арифметическому значений в четырех соседних узлах. Требуется изучить свойства гармонических дискретных функций. Например, существует ли гармоническая дискретная функция на неограниченной плоскости, отличная от постоянной? Сколько существует таких гармонических дискретных функций в ограниченной области, что значения на границе заданы?

Класс: $\geqslant 10$.
Раздел: алгебра.
Пошаговость: низкая.
Методическое сопровождение: план, ссылки.

Темы по алгебре см. также в [Ст9].

Геометрия

Геометрия, в противоположность алгебре, наименее алгоритмизированный раздел школьной математики, и исследовательских задач тут очень много. Стоит сделать два шага в сторону от школьной программы — и возникает новая тема (нередко она оказывается новой не только для школьника, но и для профессионала-математика). Но тут есть другое ограничение: чтобы решать содержательные задачи по геометрии, школьник должен быть хорошо выучен основам (7–8 класс), сам этого не придумаешь. Поэтому здесь большинство задач хороши не для знакомства с темой, а для повторения и углубления.

22. Оси куба. Возьмем кубик, проткнем его спицей через центры противоположных граней и начнем поворачивать. За один оборот кубик будет 4 раза совпадать со своим первоначальным положением. Поэтому такую ось называют осью вращения 4-го порядка. Какие еще оси есть у куба и каких порядков? Что изменится, если срезать у куба один уголок? Два противоположных уголка? Два уголка с одной грани? С одного ребра? Те же вопросы, если срезать три уголка.

Класс: $\geqslant 1$.
Раздел: геометрия.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий.

23. Квадраты на клетчатой бумаге. Квадраты какой площади можно нарисовать на клетчатой бумаге? (Вершины должны лежать в вершинах клеток.) Для начала попробуйте нарисовать квадраты площадью 1, 2, 4, 5, 8, 13, 26 клеток.

Класс: $\geqslant 1$, $\leqslant 8$ (теорема Пифагора).

Раздел: арифметика, геометрия.

Пошаговость: высокая.

Методическое сопровождение: работа (с. 26–27).

24. Формула Пика. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с вершинами в узлах клеток. Как найти его площадь, подсчитывая лишь количества узлов?

Класс: $\geqslant 5$.

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: план, комментарий, ссылки, обобщение.

25. Разбиение многоугольника на равновеликие треугольники. 1. Рассмотрим в n-угольнике точку M, обладающую следующим свойством: если соединить ее отрезками с вершинами, то получатся n равновеликих треугольников. Для каких многоугольников такая точка найдется? Сколько таких точек может быть? Какими свойствами они обладают?

2. Внутри выпуклого многоугольника взята точка O. При каком положении точки произведение расстояний от нее до прямых, содержащих стороны многоугольника, будет наибольшим?

Класс: $\geqslant 8$ (площадь треугольника).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

26. Постоянные суммы расстояний. Как описать все многоугольники, для которых сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, содержащих стороны, всегда постоянна? Как обобщить эту сумму расстояний, чтобы она сохранялась для любой точки плоскости?

Класс: $\geqslant 8$.

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

27. Восстановление многоугольника. На доске нарисован многоугольник. Отметили середины его сторон, а сам многоугольник стерли. Как восстановить многоугольник по серединам сторон? Сколько решений имеет задача?

Класс: $\geqslant 8$ (средняя линия).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщения, «Живая геометрия».

28. Равноугольные шестиугольники и равносторонние шестиугольники. 1. Назовем многоугольник *равноугольным*, если у него все углы равны. Например, равноугольный четырехугольник — это прямоугольник. У него равны противоположные стороны, диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам и т. д. А какие свойства есть у равноугольного *шестиугольника*?

2. Назовем многоугольник *равносторонним*, если у него равны все стороны. Например, равносторонний четырехугольник — это ромб. У него равны противоположные углы, диагонали взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам и т. д. А какие свойства есть у равностороннего *шестиугольника*?

3. Изучите свойства равноугольных и равносторонних многоугольников, которые являются вписанными или описанными около окружности.

Класс: $\geqslant 8$ (свойства четырехугольников).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, «Живая геометрия».

29. «Двуправильные» шестиугольники. Будем называть шестиугольник «двуправильным»[1], если у него стороны равны через одну и углы равны через один. Найдите и докажите свойства двуправильных шестиугольников. (Двуправильный четырехугольник — это параллелограмм, у него много интересных свойств.)

Класс: $\geqslant 8$ (свойства четырехугольников).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, «Живая геометрия».

[1] Это нетрадиционный термин.

30. Замечательные точки. 1. Даны две фиксированные точки окружности A и B и «переменная» точка окружности C. По какой траектории движутся точки пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника ABC, когда точка C «пробегает» окружность?

2. Пусть в плоскости даны точка A — вершина треугольника и точка O — его центр описанной окружности. Где может находиться точка пересечения медиан G?

3. Пусть в плоскости даны две точки O и H и Δ обозначает любой треугольник, для которого точка O является центром его описанной окружности, а точка H — его ортоцентром. Где могут находиться вершины треугольника Δ?

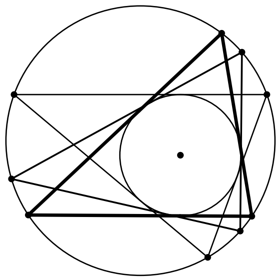
Класс: $\geqslant 9$ (вписанные углы, гомотетия, п. 3 — прямая Эйлера).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщения, ссылки, «Живая геометрия».

31. Многоугольники Понселе. Рассмотрим два круга разных радиусов, причем один из них находится целиком внутри другого. Выпустим из любой точки внешней окружности (границы большого круга) касательную к меньшей окружности и продолжим ее до пересечения с большей окружностью. Повторим эту операцию несколько раз. Справедлива теорема Понселе: если для какой-то точки эти операции зацикливаются (т. е. на каком-то шаге ломаная замыкается), то такая ломаная будет замыкаться для любой другой начальной точки (доказательство см., например, в [Ст7]), т. е. такая замкнутая ломаная по теореме Понселе может свободно вращаться внутри кольца между данными окружностями.



Задача состоит в исследовании траекторий некоторых замечательных точек, присущих этой ломаной, при таком вращении ломаной внутри рассматриваемого кольца.

1. Исследуйте задачу для трехзвенной ломаной (треугольника) и опишите траектории инцентра, ортоцентра, центроида, центра описанной окружности.

2. Исследуйте задачу для четырехзвенной ломаной. Разумно определите аналоги замечательных точек треугольника для четырехугольника и опишите их траектории.

3. Обобщите задачу на многозвенные ломаные.

Класс: $\geqslant 9$.

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: ссылка, «Живая геометрия».

32. Сложение фигур. Пусть заданы две фигуры F и G. Назовем *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой — G. Что является полусуммой двух отрезков? Какие фигуры могут быть полусуммами многоугольников?

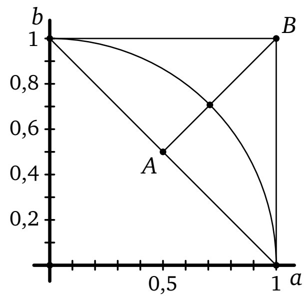
Класс: $\geqslant 9$ (векторы).

Раздел: геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, ссылки, обобщение, «Живая геометрия».

33. Параметрическая плоскость треугольников. Рассмотрим треугольник со сторонами x, y, z. Пусть z — бо́льшая из сторон. Поделим все три стороны на z и получим величины, пропорциональные сторонам: a, b, 1, причем $a, b \leqslant 1$.



Для простоты договоримся называть эти новые величины сторонами.

Введем координатную плоскость $(a; b)$. Теперь каждому треугольнику соответствует точка на этой плоскости. Какую область покроют на плоскости $(a; b)$ все треугольники? Какое множество треугольников изображено на рисунке в виде отрезка AB? В виде дуги окружности? Какую область покроют остроугольные треугольники?

1. Изобразите область, которую займут треугольники на плоскости параметров $(a; h_1)$ (сторона и высота, проведенная к единичной стороне). Постройте кривые, соответствующие равнобедренным и прямоугольным треугольникам.

2. То же задание для плоскости параметров $(m_1; m_2)$ (две меньшие медианы треугольника).

3. Рассмотрим множество треугольников, для которых радиус описанной окружности $R = 1$. Пусть r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника. Изобразите все множество и различные семейства треугольников на плоскости $(r; p)$.

Класс: $\geqslant 9$.

Раздел: геометрия.
Пошаговость: низкая.
Методическое сопровождение: ссылка.

Темы по геометрии см. также в [Ст7], [Ст11], [К11], [К12], [К13].

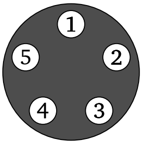
Комбинаторика

В этом разделе очень трудно указывать классы, на которые рассчитаны задачи. Почти все задачи по формулировкам и начальным ходам доступны младшеклассникам, а вот полное решение обычно требует некоторой математической культуры. Поэтому можно сказать, что это задачи на вырост — ученику полезно встречаться с ними несколько раз на разном уровне строгости и обобщения.

34. Разрезы. На сколько частей можно разбить плоскость n прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?
Класс: $\geqslant 3$.
Раздел: комбинаторика, геометрия.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий, обобщения.

35. Раскраски. Сколькими способами можно раскрасить шесть граней одинаковых кубиков шестью красками по одной на грани так, чтобы никакие два из получившихся раскрашенных кубиков не были одинаковыми (не переходили один в другой при каком-то вращении)?
Класс: $\geqslant 5$.
Раздел: комбинаторика.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий, обобщения, ссылка.

36. Сколько всего прямоугольников? На клетчатой бумаге обведен прямоугольник размером 3×4 клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размером $n\times m$.
Класс: $\geqslant 5$.
Раздел: комбинаторика, алгебра.
Пошаговость: средняя.
Методическое сопровождение: комментарий.



37. Замо́к. На рисунке изображен кодовый замок. Компания-производитель утверждает, что он очень надежен, поскольку существует «несколько тысяч комбинаций». Правда ли это?

Комбинацией является последовательность нажатий. При этом одновременно можно нажать любое количество кнопок от 0 до 5, кнопки можно нажимать не более одного раза (можно ни разу). Примеры:

$\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}$ — сначала нажали вместе 1, 2, 3, потом вместе 4 и 5;

$\{4, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$ — это другая комбинация, потому что порядок поменялся;

$\{1\}$, $\{3\}$, $\{4, 5\}$;

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (все кнопки сразу);

$\{1\}$, $\{3\}$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{4\}$ (все кнопки по одной);

$\{\ \}$ (ничего не нажали; дверь не заперта).

Класс: $\geqslant 7$ (формулы перестановок).

Раздел: комбинаторика, алгебра.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: ссылка.

38. Число турниров. В турнире «на кубок» участвуют n команд, и проигравший выбывает, а после $n - 1$ игры остается победитель. Расписание турнира можно записать в виде символа вроде $((a, (b, c)), d)$ — здесь b играет с c, победитель с a, победитель с d.

Сколько имеется разных расписаний, если команд 10?

Класс: $\geqslant 7$ (формулы перестановок).

Раздел: комбинаторика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

39. Число циклов. Рассмотрим перестановку шести чисел:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{matrix}$$

(эта запись означает, что каждое число из верхней строчки переходит в стоящее под ним число нижней: 1 переходит в 2, 2 — в 1, 3 — в 3 и т. д.). Будем производить перестановку многократно и проследим за судьбой каждого числа:

$1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to \ldots$; получился *цикл* длины 2;

$3 \to 3 \to 3 \to \ldots$; получился *неподвижный элемент*, или цикл длины 1;

$4 \to 6 \to 5 \to 4 \to 6 \to 5 \to \ldots$; получился цикл длины 3.

Задача: изучите все перестановки данных шести чисел и подсчитайте общее количество циклов длины $1, 2, 3, \ldots, 6$ в этих перестановках. Обобщите на перестановку n чисел.

Класс: $\geqslant 7$.

Раздел: комбинаторика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий.

40. Перестановки диагоналей. У куба четыре большие диагонали. Сколько разных перестановок этих четырех отрезков осуществляют все вращения куба?

Класс: $\geqslant 7$.

Раздел: комбинаторика, геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, ссылка.

41. Подсчет деревьев. Соедините n точек с номерами $1, 2, 3, \ldots, n$ отрезками так, чтобы получилось дерево (т. е. граф, в котором есть путь из любой вершины в любую, но нет циклов — замкнутых путей; отрезков должно быть $n-1$). Сколько разных деревьев можно получить?

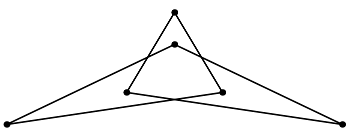
Класс: $\geqslant 7$ (формула перестановок).

Раздел: комбинаторика, геометрия.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

42. Конструктор из ломаных. 1. Будем рассматривать замкнутые ломаные, пересекающие каждое свое звено ровно один раз. Например, для 6 звеньев существует ровно одна такая ломаная:



Существуют ли такие ломаные с нечетным числом звеньев? Приведите примеры таких ломаных из 8, 10, $2n$ звеньев. Опишите все такие ломаные из $2n$ звеньев, где $n \geqslant 3$ — натуральное число.

2. Назовем ломаной типа (n, k) замкнутую ломаную из n звеньев, каждое звено которой имеет k пересечений с другими (не считая концов). Примером ломаной типа $(5, 2)$ служит пятиконечная звезда. Ломаная типа $(6, 1)$ нарисована выше.

а) Существует ли ломаная типа (n, k) при нечетных n и k? при $n < k + 3$?

б) Как из двух ломаных типа $(5, 2)$ получить ломаную типа $(10, 2)$? Какие еще ломаные можно получить таким образом?

в) Постройте ломаные типа $(7, 4)$, $(9, 6)$, $(2k + 3, 2k)$.

г) Существует ли ломаная типа $(6, 2)$? $(7, 2)$? $(6, 3)$?

д) Постройте ломаные типа $(8, 2)$, $(10, 3)$.

е) При каких соотношениях между n и k соответствующие ломаные заведомо существуют? заведомо не существуют?

Класс: $\geqslant 8$.

Раздел: комбинаторика, геометрия.

Пошаговость: низкая.

Методическое сопровождение: комментарий, ссылка.

Темы по комбинаторике см. также в [Ст8], [Ст11], [Ст12], [Ст13].

Алгоритмы

Такого раздела нет в школьной программе. Эти задачи требуют не столько школьных знаний, сколько логики, умения рассуждать и не бояться нестандартных вопросов (иногда весьма сложных). И поэтому такие задачи — шанс начать «новую жизнь» для школьника, не очень успешного в математике.

43. Монетки. Имеется несколько настоящих монет — все одного веса, и одна фальшивая — она легче. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах понадобится, чтобы определить фальшивую монету? Как надо взвешивать? Сначала решите задачу для 3, 9, 27 монет. Та же задача, если фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но неизвестно, в какую сторону.

Класс: $\geqslant 1$.

Раздел: алгоритмы.

Пошаговость: высокая.

Методическое сопровождение: комментарий.

44. Игра в полоску. Играют двое, они ходят по очереди. Игровое поле — полоска, разделенная на клетки. За один ход игрок может закрасить одну клетку или две соседние клетки в любом месте поля. Красить клетки повторно нельзя. Выигрывает тот, кто закрасил последнюю клетку, т. е. сделал последний ход. Длина полоски может быть любой. Задача ученика — научиться выигрывать при любой длине полоски.

Класс: $\geqslant 1$.

Раздел: алгоритмы.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: ссылка.

45. Золотая цепочка. 1. На постоялом дворе остановился Ходжа Насреддин, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. При этом хозяин поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: за первый день проживания Ходжа Насреддин заплатит одно кольцо, если проживет два дня, то два кольца, если проживет три дня, то три кольца, и т. д. У Ходжи Насреддина есть незамкнутая цепочка из семи колец. Сможет ли он, распилив одно кольцо, получить набор кусочков, чтобы иметь возможность заплатить за любое количество дней от одного до семи?

2. Та же задача, если дней и колец 17. Сколько достаточно сделать распилов?

3. Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

Класс: $\geqslant 5$.
Раздел: алгоритмы.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: комментарий.

46. Не больше половины. Дана кучка камней. Играющие (их двое) по очереди берут камни, причем игрок не может пропускать ход (не брать камни) и может взять не больше половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Класс: $\geqslant 5$.
Раздел: алгоритмы.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: комментарий, работа (с. 32–34).

47. Ладья — ферзь. А. Ладья. Двое играют в следующую игру: на поле, ограниченном снизу и слева, они двигают ладью по очереди вниз или влево. Выигрывает тот, кто ставит ладью в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

Б. Ферзь. Двое играют в следующую игру: на поле, ограниченном снизу и слева, они двигают ферзя вниз, влево или по диагонали вниз и влево. Выигрывает тот, кто ставит ферзя в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

Класс: $\geqslant 5$.
Раздел: алгоритмы.
Пошаговость: высокая.
Методическое сопровождение: ссылка.

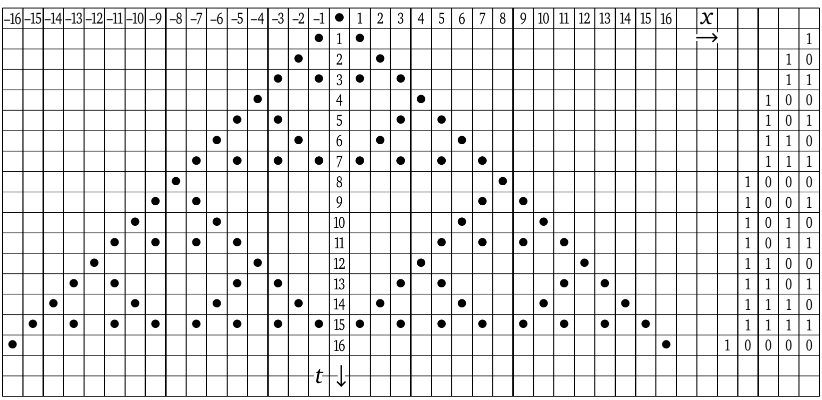
48. Угадайка. Один из игроков загадал число, меньшее 100. Другой задает ему вопросы, на которые первый может отвечать только «да» или «нет». Как правильно задавать вопросы, чтобы как можно быстрее отгадать число?

Угадайка с враньем. Тот же вопрос, если отвечающий может соврать один раз.

Угадайка с платой. За каждый ответ «да» спрашивающий платит 1 рубль, за каждый ответ «нет» — 2 рубля. Как правильно задавать вопросы, чтобы отгадать число, заплатив как можно меньшую сумму?

Класс: $\geqslant 1$, $\geqslant 5$, $\geqslant 7$.
Раздел: алгоритмы.
Пошаговость: низкая.
Методическое сопровождение: комментарий.

49. Эволюция клеток. Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги шириной в одну клетку состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей — черной. Изучите эволюцию узоров. Та же задача для конечной полосы; для полосы, замкнутой в кольцо. Например, первые 16 секунд эволюции одной черной клетки на бесконечной полосе выглядят так:



Класс: ⩾ 5.

Раздел: алгоритмы.

Пошаговость: высокая.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщения, ссылка.

50. Мудрецы у людоедов. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки — кому белый, кому черный — наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник начиная с последнего, который видит всех, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, отпускают. Остальных съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?

Класс: ⩾ 5.

Раздел: алгоритмы, арифметика.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: работа (с. 34–36), обобщения.

51. Сумма кубов цифр. С десятичной записью натурального числа проделывают следующую операцию: находят сумму кубов его цифр, для полученного числа снова находят сумму кубов его цифр и т. д.

Какие последовательности чисел могут получаться?

Класс: ⩾ 5.

Раздел: алгоритмы.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

52. Задача Иосифа Флавия. Несколько школьников стоят по кругу и играют в считалочку. Выходят через одного начиная со второго (выходят второй, четвертый, шестой и т. д.). Требуется найти, каким по счету нужно встать, чтобы остаться последним в кругу.

Класс: ⩾ 6.

Раздел: алгоритмы.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщения, ссылка.

Пошаговость: средняя.

53. Обезьяна и кокосы. Есть башня в 10 этажей и два кокоса. Обезьяна может сбрасывать кокосы с каждого этажа, и они могут разбиться или не разбиться. Нужно определить максимальный этаж, с которого кокос может упасть не разбившись, за наименьшее число попыток (обезьяна ленивая).

Например, если бы у обезьяны был только один кокос, то бросать его приходилось бы со всех этажей начиная с первого этажа.

Класс: $\geqslant 7$.

Раздел: алгоритмы.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение.

54. Игра Ним. В игру Ним играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в Ним.

Класс: $\geqslant 7$ (двоичная система).

Раздел: алгоритмы.

Пошаговость: средняя.

Методическое сопровождение: комментарий, обобщение, ссылки.

Комментарии

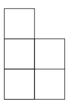
Арифметика

1. Замечательные числа. Можно последовательно выписывать числа 1, 2, 3 и т. д. и объединять их в семейства с одинаковой суммой. Выяснится, что *все* числа разбиваются на семейства, в каждом из которых сумма цифр одна и та же и равна номеру семейства.

2. Прямоугольники с заданной площадью. Задача подводит ученика к понятию простых и составных чисел (ср. задачу 8, «Поиск чисел с заданным количеством делителей»). Организовать исследование можно таким образом: ребенок пытается нарисовать все искомые прямоугольники и что-то пропускает. Ему указывают ошибку и обсуждают, как действовать, чтобы ничего не пропустить (*упорядоченный перебор*). Затем предлагают изучить более простые случаи: прямоугольники с площадью 1, 2, 3 и так далее. Рассмотренные случаи объединяют в группы: площади, дающие один прямоугольник, два прямоугольника, три и так далее. Затем надо связать группы со свойствами чисел.

Это важный момент, так как математикам часто приходится договариваться о том, *какие объекты отождествлять, а какие считать различными*.

Обобщение 1. Если брать не прямоугольники, а клеточные многоугольники, то получатся *диаграммы Юнга*, используя которые можно доказывать различные неочевидные свойства разбиений натуральных чисел на слагаемые. См. [К4, глава 6]. При очень простой формулировке исходной задачи получаем сложный комбинаторный объект.



Например, такая диаграмма соответствует разбиению $5=2+2+1$.

Обобщение 2. Можно фиксировать не площадь, а периметр, например, рассматривать параллеломино — пары путей на клетчатой бумаге с началом в точке $(0; 0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца. См. [К3, с. 141].

3. Разложение числа.

Ссылка. [К6, № 49–51. С. 360]. *Там приведен план исследования и полное решение.*

4. Суперкомпьютер. Нетрудно сообразить, что если у m и n есть нечетный общий делитель больше 1, то он будет и у всех средних и получить единицу нам не удастся. Далее можно на примерах убедиться, что в других случаях единица получается, и попробовать это доказать. Есть два подхода: сделать набор чисел минимальным или сделать его максимальным.

При первом подходе будем выкидывать из памяти все числа, кроме нуля и двух наименьших. Легко показать, что наибольшее число такого набора всегда можно уменьшить усреднением нечетных чисел и (если надо) сведением числа к нечетному. Тем самым мы можем «спуститься» к единице всегда, кроме случая, когда два числа совпадут. Остается изучить условия совпадения.

При втором подходе, наоборот, рассмотрим сразу *все* числа, которые можно получить усреднением (их конечное количество). Взяв три последовательных числа $x < y < z$ из этого множества, нетрудно доказать, что они равноотстоят друг от друга. Тем самым все числа равноотстоят друг от друга, среди них нуль, n и m. Можно найти интервал между числами — это наибольший нечетный делитель чисел n и m.

5. Диагонали прямоугольников. От данного большого числа стоит перейти к маленьким: начать с прямоугольников 3 на 5, 3 на 6, 6 на 8 клеток. Если стороны взаимно простые, то диагональ проходит только через две угловые вершины. Если же $\text{НОД}(M, N) = k > 1$, то прямоугольник разбивается на k одинаковых прямоугольников со взаимно простыми сторонами. Остается аккуратно учесть концевые точки. Подсчет пересекаемых клеточек сводится к подсчету пересекаемых линий и узлов.

6. Задача о размене. Составим таблицу из сумм чисел вида $5x$ и $3y$ (см. с. 64). Нетрудно видеть, что все суммы начиная с 16 можно уплатить. Действительно, можно уплатить 16, 17 и 18 рублей, а все бóльшие суммы получаются прибавлением к какой-то из них одной или нескольких монет по 3 рубля.

	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$3 \cdot 4$
$5 \cdot 1$	8	11	14	**17**
$5 \cdot 2$	13	**16**	…	…
$5 \cdot 3$	**18**	…	…	…

Назовем натуральные числа вида $ax + by$, где x и y натуральные, «выразимыми», а все остальные — «невыразимыми». Если a и b *не* взаимно простые, то выразимы только те числа, которые делятся на их наибольший общий делитель (возможно, не все). Рассмотрим взаимно простые a и b. Наблюдением можно установить, что выразимы все числа, бóльшие некоторого граничного числа n_0. Как мы уже выяснили, для $a = 5$, $b = 3$ это число $n_0 = 15$. Проверив несколько других значений a и b, можно угадать формулу для граничного числа (ясно, что a и b должны входить в нее симметрично):

$$n_0 = ab.$$

Заметим, что верны равенства

$$ax + by = a(x - b) + b(y + a) = a(x - 2b) + b(y + 2a) = \ldots$$

Это значит, что если число выразимо через a и b с произвольными (неограниченными) натуральными коэффициентами x и y, то оно выразимо и с коэффициентами $x \in [1; b]$, $y \geqslant 1$, и наоборот. (Иначе говоря, заменяя несколько раз b монет по a рублей на a монет по b рублей, можно ограничиться не более чем b монетами по a рублей и произвольным числом монет по b рублей.)

Рассмотрим числа $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, …, $a \cdot b$. В силу взаимной простоты a и b все эти числа имеют разные остатки при делении на b. Здесь всего b чисел, значит, встречаются все b остатков, включая 0. Теперь понятно, как выразить число n, имеющее остаток r при делении на b: из чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, …, $a \cdot b$ выбираем число ax с тем же остатком r и добавляем к нему разницу $n - ax = by > 0$. Это заведомо возможно для всех $n > ab$, а вот для $n = ab$ невозможно. Итак, наличие граничного числа и формула для него доказаны.

Для дальнейшего изучения распределения выразимых чисел можно на числовой оси n пометить выразимые числа красными кружочками, а невыразимые — синими. Картинка окажется симметричной! См.: *Спивак А. В.* Арифметика. М.: Бюро Квантум, 2007. С. 30–32.

Замечание. Задачу можно переформулировать так: при каких n разрешимо в целых неотрицательных числах диофантово уравнение $ax+by=n$? Или графически: при каких n прямая $ax+by=n$ проходит хотя бы через одну целую точку в первой четверти плоскости $(x; y)$?

7. Складные числа. Однозначных складных чисел четыре: 0, 1, 5, 6. Дву- и многозначные складные числа обязаны кончаться на эти же цифры. Двузначных складных чисел всего два: 25 и 76. Оказывается, каждое из этих чисел можно неограниченно продолжать влево (единственным образом) так, что на каждом шаге будет получаться складное число. Можно найти алгоритм получения следующих цифр. Интересно проверить, являются ли эти последовательности периодическими.

А. А. Кириллов предлагал эту задачу в качестве введения в тему «p-адические числа».

Ссылки. 1. *Гельфанд И. М., Шень А.* Алгебра. М.: МЦНМО, 2009. П. 74. *Дано краткое понятие о p-адических числах.*

2. *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

Обобщение 1. Можно исследовать ситуацию в системах счисления с основанием m. Вопрос связан с появлением делителей нуля по модулю m в получающихся уравнениях.

Если m простое, то складных чисел нет. При составных m от 4 до 28 находится всего два складных числа. При $m = 30$ возникает сразу пять складных чисел.

Обобщение 2. Тот же вопрос про кубы чисел в десятичной системе приводит к ветвлению алгоритма определения следующей цифры.

8. Поиск чисел с заданным количеством делителей. Эффективно решить сначала *обратную задачу*: сколько делителей имеет число вида p, p^2, p^n, p^nq^m, $p^nq^mr^s$ и т. д. (p, q, r — простые числа)? Для случая двух различных простых делителей удобно выписать таблицу делителей. Скажем, для p^3q^2:

1	p	p^2	p^3
q	qp	qp^2	qp^3
q^2	q^2p	q^2p^2	q^2p^3

Всего $(3+1)(2+1)$ делителей.

Для трех простых делителей нужна уже трехмерная таблица. Тем самым угадывается общая закономерность: надо перемножить увеличенные на 1 степени простых множителей. Теперь понятно, что каждое представление числа N в виде произведения натуральных множителей, бо́льших 1, порождает вид числа, имеющего ровно N делителей.

У детей обычно вызывает затруднение переход от двух различных простых делителей к трем (т. е. от двумерной таблицы к трехмерной).

Заметим, что по такой таблице можно найти формулу для суммы всех делителей (это делали древние греки для поиска совершенных чисел) или даже сумму s-х степеней всех делителей (при $s=0$ имеем количество делителей, при $s=1$ — их сумму). См. книгу: *Радемахер Г., Тёплиц О.* Числа и фигуры. М.: ГИФМЛ, 1962. С. 152–160.

9. Разложение дробей. Эту задачу решал Гаусс, учась в гимназии. Ища закономерность, он вручную разложил дроби вида $1/p$ для всех простых $p<1000$. Современная вычислительная техника позволяет делать это легко и быстро.

Сначала стоит составить большую таблицу разложений и попытаться найти закономерности, расклассифицировать дроби по видам. Приведем вопросы, которые могут в этом помочь.

1. Длина периода. Какова наибольшая возможная длина цикла для дроби вида $1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$? Как связаны с ней меньшие возможные длины? Зависит ли ответ от числителя дроби?

2. Как связаны цифры разложений и длины для дробей вида $1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$?

Для обоснования полученных результатов полезно вспомнить, почему любая обыкновенная дробь разлагается в периодическую десятичную. Очередная цифра частного определяется только текущим остатком. Удобнее следить не за цифрами частного, а за остатками.

Задача подводит к малой теореме Ферма и к пониманию структуры циклической группы. В самом деле, число l является наименьшим периодом десятичного разложения дроби $1/p$ тогда и только тогда, когда l является наименьшим натуральным числом, для которого 10^l-1 делится на p нацело.

Ссылка. *Спивак А. В.* Арифметика. М.: Бюро Квантум, 2007. С. 50.

10. Периодические последовательности.

Ссылка. *Цаленко М. Ш.* Периодические последовательности // Математическое просвещение. № 10. М.: МЦНМО, 2006. *Статья содержит полное решение задач в общем виде.*

Обобщение. Можно брать разные известные последовательности по модулю k и пытаться найти период. Некоторые задачи будут легкими, а некоторые — очень трудными. Так, для последовательности остатков геометрических прогрессий $c_n \equiv q^n \pmod{k}$ полное решение до сих пор не получено (в силу малой теоремы Ферма для простых значений k период равен *какому-то* делителю числа $k-1$; для произвольных значений k Эйлер показал, что период равен *какому-то* делителю количества чисел, меньших k и взаимно простых с k).

Приведем примерные планы решений (можно следовать и совсем другим).

План решения для п. 1.

1. Выпишите остатки от деления **квадратов** ($m=2$) на числа $k=2,3,4,\ldots,9$. Найдите для каждого случая периоды.
2. Докажите, что длина периода (какого-то, не обязательно наименьшего) равна k.
3. Как могут быть связаны длина периода и длина наименьшего периода (для произвольной периодической последовательности)?
4. В каких случаях в нашей таблице наименьший период равен k, а в каких меньше? Сформулируйте и докажите закономерность.
5. Выпишите остатки от деления **кубов** ($m=3$) на числа $k=2,3,4,\ldots,9$. Найдите для каждого случая периоды. В каких случаях наименьший период равен k, а в каких меньше? Сформулируйте и докажите закономерность.
6. Проверьте аналогичную гипотезу для m-х степеней, где m — простое число.
7. Исследуйте ситуацию в случае, когда k — простое число.
8. Исследуйте ситуацию в случае, когда m и k — взаимно простые числа.
9. Исследуйте ситуацию в случае, когда m или k — произведение различных простых чисел.

План решения для п. 2.

1. Выпишите остатки от деления последовательности Фибоначчи на $k=2,3,4,\ldots$ (вручную или с помощью компьютера). Что вы замечаете?
2. Может ли последовательность остатков быть непериодичной? Оцените длину периода из теоретических соображений.
3. Докажите, что любые два соседних члена последовательности Фибоначчи (a_n) полностью определяют всю последовательность (т. е. можно вычислять члены не только вправо, но и влево от этих двух членов).
4. Может ли последовательность остатков начинать свой первый период не с членов a_0 и a_1, а позже?

5. Сколько чисел Фибоначчи делятся на 2? На 3? На k?
6. Найдите наибольший общий делитель чисел a_{99} и a_{100}. Обобщите.
7. Какими двумя числами начинается первый период? Каким числом он заканчивается?
8. Какое первое число Фибоначчи делится на данное k? Обозначим через m номер второго числа, делящегося на k. Найдите номер третьего такого числа.
9. Пусть r — остаток от деления a_{m-1} на k. Тогда остатки от деления чисел Фибоначчи на k выглядят как
$$0, 1, 1, 2, 3, \ldots, r \pmod{k},$$
$$0, r, r, 2r, 3r, \ldots, r^2 \pmod{k}.$$
Проверьте и продолжите последовательность. После какой строчки начнется повторение?
10. Докажите, что найдется такое p, что $a_{m-1}^p \equiv 1 \pmod{k}$.
11. Сформулируйте теорему, которую вы доказали: «Период последовательности остатков, получающихся при делении чисел Фибоначчи на $k > 1$, равен...»
12. Исследуйте экспериментально, сколько строк может быть в одном периоде (в таблице из п. 9). Попытайтесь доказать.
13. Для дальнейших продвижений можно использовать аналог формулы Бине (если в поле F_k извлекается корень из k, то решение упрощается).

Алгебра

11. Классификация графиков дробно-квадратичных функций. Элементы такой работы с сильным классом можно проделать на уроках. Нули знаменателя дают вертикальные асимптоты, нули числителя — пересечение с осью абсцисс, общие нули одного порядка — выколотые точки. Если степень числителя 2, а знаменателя 1, то график имеет наклонную асимптоту. Надо рассмотреть все различные взаимные расположения нулей и исследовать наличие горизонтальных или наклонных асимптот. Имеет смысл выделить несколько «канонических» видов для таких функций и показать, какими способами все остальные сводятся к такому каноническому виду (с помощью сдвигов, растяжений и т. д.). Например, все функции вида
$$\frac{1}{dx^2+ex+f},$$

где $d \neq 0$, можно свести к одному из трех видов $1/x^2$, $1/(x^2-1)$, $1/(x^2+1)$. Можно начать изучение с таких примеров (взяты из книги И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой, Э. Э. Шноля «Функции и графики»):

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}; \quad y = \frac{x}{x^2+1}; \quad y = \frac{x^2+1}{x}; \quad y = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$$
$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+4}; \quad y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+x-2}; \quad y = \frac{2+x-x^2}{x^2-1},$$

а потом на основе рассмотренных примеров провести классификацию.

12. Симметрические многочлены. Начать можно с исследования вопроса, любой ли многочлен вида $x^n + y^n$ можно представить в виде многочлена от u и v. Докажите, что если многочлен $x^n + y^n$ представим в таком виде, то и $x^{n+1} + y^{n+1}$ тоже. Получите формулу для таких представлений. Как эта задача помогает решить общую задачу?

13. Многочлен с заданным корнем. Заметим, что многочлен минимальной степени, имеющий корень $x = \sqrt{2}$, — квадратный многочлен $x^2 - 2$. Искомый многочлен имеет степень заведомо выше 2.

Пусть $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Тогда

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \to (x^2-5)^2 = 24 \iff x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

В принципе, таким же путем можно действовать с суммой трех корней и т. д., однако громоздкость вычислений быстро нарастает. Разложив наш многочлен на множители:

$$x^4-10x^2+1=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}),$$

можно угадать общую *структуру* таких многочленов. Например, многочленом с целыми коэффициентами, имеющим корень $\sqrt{2} + {}$ $+ \sqrt{3} + \sqrt{5}$, будет произведение восьми скобок вида $(x \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5})$. (Докажите, что его коэффициенты действительно целые!)

Следующий непростой вопрос — доказать *минимальность* многочленов с такой структурой. Возможен такой подход: доказать, что если

$$a = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \ldots + \sqrt{r}$$

(где $p, q, \ldots, r$ — различные простые числа) — корень многочлена с целыми коэффициентами, то и

$$b = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \ldots - \sqrt{r}$$

тоже обязательно корень (здесь надо использовать несоизмеримость иррациональностей). Тогда получится, что все использованные нами скобки обязаны присутствовать в искомом многочлене.

Замечание. Полезно перед или в процессе решения этой задачи доказать со школьниками непростую лемму об иррациональности суммы квадратных корней из натуральных чисел, не являющихся квадратами. Она доказывается индукцией по количеству простых чисел p_i под знаком корня. Предположим, что эта сумма равна рациональному числу r. На каждом шаге мы оставляем в одной части равенства все корни, содержащие простое число p_i, а остальные переносим в другую часть. Возводим равенство в квадрат, тогда p_i из-под корня исчезает. В конце остается один корень из натурального числа, не являющегося квадратом. Он должен быть равен рациональному числу. Противоречие.

Обобщение. Можно рассмотреть задачу для суммы двух и более *кубических* корней из различных простых чисел.

14. Иррациональные корни. Очевидно, что, во-первых, подходит случай $b = 0$ (биквадратное уравнение). Далее нужно рассматривать случаи, когда левая часть уравнения раскладывается на два квадратичных множителя. Можно начать с примеров:

$$x^4 - 2x^2 + 4x - 2 = 0, \quad x^4 + 4x - 1 = 0$$

— это уравнение приводится к виду

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 + 4x - 2 = 0.$$

Описав все такие случаи, надо понять, исчерпывается ли ими вопрос задачи.

Задача имеет геометрическую подоплеку. Имея отрезок длины 1, можно с помощью циркуля и линейки построить все отрезки, длины которых выражаются рациональными числами и квадратичными иррациональностями (в указанном широком смысле: $\sqrt[4]{2}$ в таком понимании является квадратичной иррациональностью). А все иррациональности более высоких степеней нельзя построить циркулем и линейкой. Именно этим путем Гаусс решил задачу о построении правильного n-угольника. См. книгу: *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, НМУ. 2001. С. 314–330. Ср. также книгу: *Скопенков А.* Еще несколько доказательств из Книги: разрешимость и неразрешимость уравнений в радикалах (`http://www.mccme.ru//circles/oim/kroneck.pdf`).

15. Как увидеть симметрию многочлена? При каких условиях на числа a, b, c, d уравнение вида

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$$

можно решить указанным способом? Что означают эти условия геометрически? Как можно геометрическим преобразованием свести данное уравнение к легко проверяемому виду?

Вот хорошая обобщающая задача: при каких условиях на коэффициенты график многочлена четвертой степени имеет ось симметрии? См. книгу: *Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э.* Функции и графики. М.: МЦНМО, 2006, задача 7.11.

Подобные вопросы можно ставить и для других методов решения уравнений — например, какие классы уравнений можно решить заменой $x+k/x=t$?

16. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k;b)$.

План. Для начала стоит потренироваться, изобразив несколько данных прямых плоскости $(x;y)$ в виде точек плоскости $(k;b)$ и наоборот. Далее можно провести исследование, отвечая на следующие вопросы.

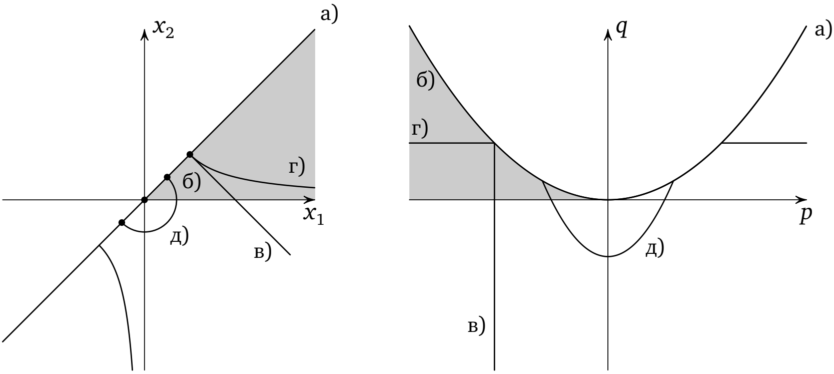
1. Рассмотрим на плоскости $(k;b)$ прямую $b=k$. Каждая точка этой прямой задает на плоскости $(x;y)$ прямую, а вся прямая $b=k$ задает на плоскости $(x;y)$ семейство прямых. Каким свойством обладает это семейство прямых?

2. Рассмотрим семейство всех прямых плоскости $(x;y)$, которые проходят через точку $(m;n)$. Как это семейство прямых изображается на плоскости $(k;b)$?

3. Рассмотрим на плоскости $(k;b)$ прямую $b=uk+v$. Какое семейство прямых на плоскости $(x;y)$ изображает эта прямая?

Замечание. Результаты задачи можно представить в единообразном виде, если считать, что параллельные прямые также имеют общую точку (бесконечно удаленную). В этом случае параллельные и пересекающиеся прямые на плоскости $(x;y)$ становятся равноправными, а вертикальная прямая на плоскости $(k;b)$ перестает быть исключительным случаем. Далее, пользуясь приведенными конструкциями, нетрудно придумать правило, которое любой прямой плоскости $(k;b)$ будет ставить в соответствие точку плоскости $(x;y)$. Полученная *двойственность* плоскостей $(x;y)$ и $(k;b)$ лежит в основе проективной геометрии, к понятиям которой и подводит эта задача. Подробнее о проективной геометрии, см., например, книгу: *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2004. Гл. IV.

17. Плоскость параметров трехчлена. Ответы к пунктам а)–д) приведены на рисунках, их нетрудно получить с помощью теоремы Виета. Договоримся, что $x_1 \geqslant x_2$, тогда фактически мы имеем дело с отображением полуплоскости, расположенной ниже прямой $x_1 = x_2$ на плоскости $(x_1; x_2)$, на часть плоскости, расположенную ниже дискриминантной кривой $q = p^2/4$ на плоскости $(p; q)$.



В пункте е) ответом будет касательная к дискриминантной кривой $q = p^2/4$.

Докажем это. Пусть $x_1 = c$ фиксирован. Подставляя этот корень в уравнение, получим $q = -cp - c^2$. Эта прямая при любом c имеет одну общую точку с параболой $q = p^2/4$, поскольку уравнение $p^2/4 + cp + c^2 = 0$ равносильно уравнению $p/2 + c = 0$ при любом c.

Объясним этот факт еще иначе. На прямой $q = -cp - c^2$ расположены точки, соответствующие уравнениям, один из корней которых равен c. Значит, эта прямая «почти всегда» находится в области двух различных корней (ниже дискриминантной параболы) и однажды имеет с ней общую точку — когда второй корень совпадет с c.

Пусть наша прямая коснется кривой в точке с абсциссой p_1, тогда $x_1 = c = -p_1/2$. Таким образом, решение квадратного уравнения с коэффициентами p и q равносильно проведению касательных из точки с координатами $(p; q)$ к дискриминантной кривой.

При известной сноровке можно изобразить синхронное движение точек в плоскостях $(x_1; x_2)$ и $(p; q)$ с помощью программы «Живая геометрия».

Обобщение. Можно решить ту же задачу для биквадратного трехчлена $x^4 + px^2 + q$, а также для многочлена вида $x^3 + px + q$. (Здесь может быть три корня, но по теореме Виета их сумма равна 0, поэтому можно рассматривать два.)

18. Количество решений. 1. Можно начать с квадратного уравнения (см. задачу 17 «Плоскость параметров трехчлена»). Для квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ на плоскости параметров $(p; q)$ есть две области, разделенные дискриминантной кривой $p^2 - 4q = 0$. Любая точка кривой соответствует уравнению с одним корнем, точка выше кривой — не имеющему корней, ниже — с двумя корнями. Далее, используя теорему Виета, можно найти области, соответствующие различным знакам корней уравнения. Области с двумя положительными корнями $(+, +)$ соответствуют 4 корня биквадратного уравнения с теми же коэффициентами. Области $(+, -)$ соответствуют 2 корня биквадратного уравнения, и т. д.

2. Для кубического уравнения особым случаем, аналогичным одному корню квадратного уравнения, является случай двух различных корней. Пусть это корни x_1 и x_2, тогда один из них обязательно кратный (нужно обосновать почему). Из равенства

$$x^3 + px + q = (x - x_1)^2 (x - x_2)$$

можно получить, при какой зависимости параметров p и q уравнение имеет 2 корня. Соответствующая этой зависимости кривая на плоскости параметров $(p; q)$ разделяет две области: 1 корень и 3 корня.

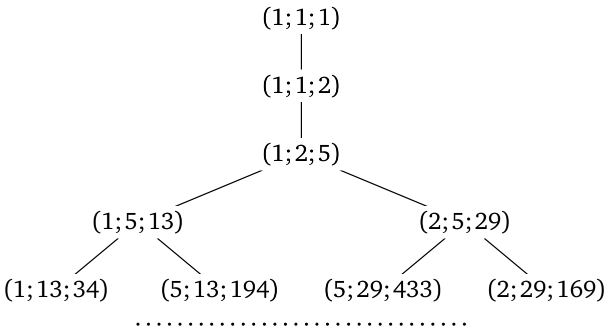
19. Диофантово уравнение А. А. Маркова. Это уравнение возникло в знаменитых работах А. А. Маркова по теории чисел, причем он смог решить его, пользуясь средствами только школьной математики.

План. 1. Пускаем детей в самостоятельный поиск решений.

2. Упорядочиваем найденные решения: если $(x; y; z)$ — решение, то $(-x; -y; z)$ тоже решение; значит, можно искать только натуральные решения. Также можно упорядочить x, y, z по возрастанию.

3. Заметим, что есть решения, в которых два числа из трех совпадают. Назовем их *соседними*. Рассмотрим два соседних решения $(x; y; z)$ и $(x; y; z_1)$. Подставив эти числа в уравнение, получим два тождества. Вычтем одно из другого, тогда $z + z_1 = 3xy$. Тем самым по любому решению $(x; y; z)$ можно найти соседнее решение $(x; y; z_1)$. Поскольку x, y и z можно менять местами, из одного решения можно получить три соседних.

4. Чтобы двигаться дальше, надо обсудить, как такие ветвящиеся решения записывать. Например, их можно записывать так:



Построим дерево решений, которые порождаются решением (1; 1; 1).

5. Наблюдение: левая ветвь $(1; x; y)$ содержит числа Фибоначчи с нечетными номерами: $(1; \varphi_{2n-1}; \varphi_{2n+1})$. Это нетрудно доказать. Вопрос: нет ли в других ветвях каких-либо обобщенных чисел Фибоначчи?

6. Вопрос: все ли решения порождаются тройкой (1; 1; 1)? Возможна экспериментальная проверка: найти перебором на компьютере все такие решения, что x, y, $z < 1000$, и посмотреть, все ли они есть в нашем дереве.

7. Вопрос: могут ли разные ветви решений пересекаться?

8. Заметим, что в нашем дереве все решения, кроме первых двух, порождают по два решения, а первые два — по одному. Назовем решения, которые порождают одно решение, особенными. Вопрос: есть ли другие особенные решения кроме (1; 1; 1) и (1; 1; 2)? Нетрудно доказать, что у особого решения две компоненты должны совпадать, а такими могут быть только указанные.

9. Заметим, что при переходе от решения к следующему *наибольшая компонента возрастает*. Докажем это.

10. Возьмем произвольное решение и будем от него двигаться «вверх» по дереву, уменьшая наибольшую компоненту. Куда мы можем прийти?

Обобщения. 1. При каких натуральных k диофантово уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ имеет ненулевое решение?

2. Решите уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = nx_1x_2 \ldots x_n$.

Ссылка. *Крейн М. Г.* Диофантово уравнение А. А. Маркова // Квант. 1985. № 4.

21. Гармонические функции.

План исследования.

Общие свойства.

1. *Принцип суперпозиции.* Сумма гармонических функций также является гармонической. Произведение гармонической функции на число также является гармонической функцией.

2. *Принцип максимума.* Если функция гармоническая в ограниченной области, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на границе области.

3. *Теорема единственности.* Существует не больше одной функции, гармонической в данной ограниченной области, с заданными значениями на границе.

4. *Контурные свойства.* Как выразить значение гармонической функции в точке через ее значения на контуре «ромба» с центром в этой точке?

Теоремы и задачи.

1. Если все значения гармонической функции натуральны, то она постоянна.

2. Если все значения гармонической функции положительны, то она постоянна.

3. Если гармоническая функция ограничена, то она постоянна.

4. Простейшие примеры многочленов — гармонических функций: xy, $x^2 - y^2$. Опишите все многочлены, являющиеся гармоническими функциями.

5. Сколько значений однозначно задают гармоническую функцию в ограниченной области?

Ссылки. 1. *Peter G. Doyle, J. Laurie Snell.* Random Walks and Electric Networks. `http://de.arxiv.org/abs/math/0001057v1`.

2. *Скопенков М., Смыкалов В., Устинов А.* Случайные блуждания и электрические цепи // Математическое просвещение. Сер. 3. 2012. Вып. 16. С. 25–47.

3. *Николаев Г., Левин И.* Дискретные гармонические функции // Работа на [Конф2]: `http://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2013/levinikolaev4.pdf`.

Геометрия

22. Оси куба. Младшекласснику лучше всего клеить модели из картона, вращать и смотреть. Ср. «более взрослый» вариант задачи — № 40, «Перестановки диагоналей».

24. Формула Пика.

Комментарий. Задачу можно представить эффектно: школьники рисуют сложный невыпуклый многоугольник, а вы за полминуты в уме находите площадь (как говорит В. В. Вавилов, «берем палец и считаем»). Несильные школьники справлялись с этой задачей, но процесс угадывания формулы заслонял им формальное доказательство.

Примерный план. Экспериментально ищем формулу для треугольника 1) без узлов внутри и на сторонах, 2) с узлами на сторонах, 3) с узлами внутри, 4) с узлами внутри и на сторонах. Придумываем общую формулу. Повторяем исследование для четырехугольников и для пятиугольников. Объединяя результаты, придумываем формулу для n-угольника. Доказываем ее аддитивность (сумма «площадей» двух многоугольников равна «площади» их объединения). Затем доказываем ее справедливость последовательно для прямоугольника, прямоугольного треугольника, произвольного треугольника, произвольного многоугольника.

Обобщение. Решите аналогичную задачу для многогранников в пространстве.

Ссылки. 1. *Вавилов В. В.*, *Устинов А. В.* Многоугольники на решетках. М.: МЦНМО, 2006. *Показана связь формулы Пика с теоремой Эйлера о многогранниках и другими интересными задачами.*

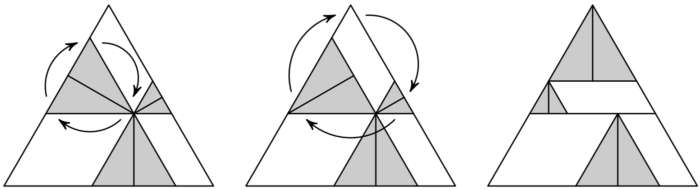
2. *Прасолов В. В.*, *Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989. *Доказаны обе формулы.*

25. Разбиение многоугольника на равновеликие треугольники. 1. Начнем с самого простого случая — $n = 3$. В треугольнике эта точка известна, существует и единственна для любого треугольника (точка пересечения медиан). Интересно исследовать, перенесутся ли какие-то из ее свойств на четырехугольник и т. д. Разбор случая $n = 4$ можно начать с квадрата и постепенно ослаблять условия (параллелограмм, трапеция, произвольный четырехугольник).

2. Получится та же самая точка, что в п. 1. См. книгу В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии», задача 11.18. Такая точка называется аналитическим центром. Понятие аналитического центра появилось относительно недавно (в конце 1980-х годов), оно активно используется в теории экстремальных задач.

26. Постоянные суммы расстояний. Начнем с треугольника. Нетрудно доказать, что для выполнения условия его высоты должны быть равны. Действительно, будем приближать нашу точку M поочередно к каждой из трех вершин A, B и C. Тогда сумма расстояний от M до сторон будет стремиться поочередно к каждой из трех высот. Но три высоты равны только в равностороннем треугольнике.

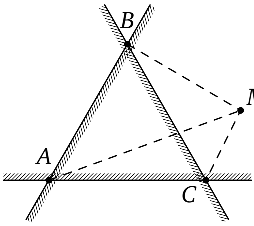
Обратно, в любом равностороннем треугольнике наша сумма равна высоте треугольника (теорема Вивиани) и, следовательно, постоянна. Доказательство ясно из рисунков (они взяты из книги *Alsina C.*, *Nelsen R.* Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics. Mathematical Association of America, Washington, 2006):



Другое доказательство: разобьем треугольник ABC на три треугольника MAB, MAC и MBC. Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3).$$

Отсюда $h_1 + h_2 + h_3 = h = \text{const}$.



Заметим, что если точка M лежит вне треугольника ABC, но внутри угла BAC, то верно равенство (см. рис.)

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} - S_{MBC} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 - \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 - h_3),$$

из которого следует, что в этой области $h_1 + h_2 - h_3 = \text{const}$. Рассмотрев таким образом поочередно все шесть внешних областей для треугольника ABC, можно предложить такое правило. Для каждой из прямых AB, BC и CA назовем ту полуплоскость, которой принадлежит треугольник ABC, *положительной*, а другую *отрицательной*. (На рисунке положительные полуплоскости отмечены штриховкой.) Составим алгебраическую сумму расстояний от точки M до прямых так, что если M лежит в положительной полуплоскости относительно прямой, то возьмем это расстояние со знаком «+», а если в отрицательной — то со знаком «−». Такая сумма постоянна и равна высоте треугольника.

Замечание. Предлагаемая алгебраическая сумма расстояний готовит понятие *барицентрических координат*.

Из всех четырехугольников требуемым свойством обладают параллелограммы, и только они.

Обобщение суммы расстояний годится для всех многоугольников.

Обобщение. Сформулируйте и решите аналогичную задачу в пространстве.

27. Восстановление многоугольника. Тема возникла из двух задач.

1. Восстановить треугольник по серединам сторон (простая).
2. Восстановить пятиугольник по серединам сторон (посложнее).

Исследование удобно проводить в программе «Живая геометрия». Отмечаем точки — середины сторон, отмечаем произвольную точку X — предполагаемую вершину, отображаем ее центрально симметрично относительно первой середины, получившийся образ отображаем относительно второй середины и т. д. Пусть последняя точка будет Y. Если полученную ломаную удается замкнуть выбором точки X, значит, есть решение. Если же не удается, значит, надо особым образом выбирать середины сторон.

Так, треугольник и пятиугольник можно восстановить однозначно (если из середин сторон никакие три не лежат на одной прямой). Четырехугольник либо не восстанавливается (если середины сторон не лежат в вершинах параллелограмма), либо восстанавливается многими способами (если лежат).

Доказательство можно получить, используя теорему о средней линии, теорему Вариньона и метод координат. А можно — изучая связь движений точек X и Y.

С точки зрения «взрослой» математики речь идет об изучении отображения множества n вершин V в множество n середин сторон C, а также обратного отображения. Оказывается, если n нечетно, то отображение невырожденно, т. е. можно получить любое C. Если же n четно, то отображение вырожденно, а именно переводит множества вершин *не* в любое множество середин сторон. (В самом деле, рассмотрим векторы: у первого начало в первой середине, а конец во второй, у второго начало в третьей середине, а конец в четвертой, и т. д. Сумма всех $n/2$ таких векторов равна 0. Это означает, что, зная все векторы, кроме одного, можно найти этот последний, т. е. $n-1$ середин однозначно задают положение n-й середины.)

Обобщение 1. Для случая четырехугольника можно зафиксировать порядок обхода середин сторон и изучить область, в которой может лежать начальная точка, чтобы мы могли получить а) выпуклый четырехугольник, б) невыпуклый четырехугольник, в) замкнутую самопересекающуюся ломаную. Здесь в качестве стартовой точки в «Живой геометрии» удобно использовать не вершину, а точку пересечения диагоналей.

Обобщение 2 (постановка В. Н. Дубровского).

А. На сторонах произвольного треугольника вовне построили равносторонние треугольники и отметили их центры; затем стерли все, кроме трех центров. Восстановите исходный треугольник; когда это возможно? (Оказывается, центры должны лежать в вершинах равностороннего треугольника — открываем *теорему Наполеона*. Что будет, если треугольники построить внутрь?)

Б. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника построили вовне квадраты. Каким свойством обладают их центры?

В. На сторонах n-угольника W вовне построили правильные n-угольники и отметили их центры. Опишите класс n-угольников W, для которых центры окажутся в вершинах правильного n-угольника.

28. Равноугольные шестиугольники и равносторонние шестиугольники. Исследование удобно проводить в программе «Живая геометрия» (построить в ней требуемую фигуру уже является интересной «подзадачей»). Окажется, что у *равностороннего* шестиугольника никаких интересных свойств нет, т. е. требование равенства всех сторон слишком слабое. Можно спросить, а что надо задать еще, чтобы какие-то свойства появились.

Найти свойства *равноугольного* шестиугольника помогает следующая конструкция: продлив стороны до пересечения через одну, получим два правильных треугольника.

Сильным классам можно рекомендовать исследовать эту задачу на уроках после темы «Четырехугольники». Вот, например, какие свойства равноугольных шестиугольников нашла (экспериментально) углубленная группа 8 класса школы «Интеллектуал» в 2007/08 учебном году.

А. Противоположные стороны параллельны.

Б. Биссектрисы углов параллельны сторонам.

В. Сумма двух смежных сторон равна сумме двух противоположных смежных сторон.

Г. Три средние линии пересекаются в одной точке. (А что у четырехугольников? А верно ли обратное утверждение? Не делятся ли средние линии пополам? В каких случаях делятся?)

Д. Середины больших диагоналей являются вершинами равностороннего треугольника, а его стороны параллельны сторонам шестиугольника.

Е. Точки пересечения малых диагоналей находятся на средних линиях.

Интересно также рассмотреть свойства шестиугольников, у которых противоположные стороны параллельны, вписанных и описанных шестиугольников.

29. «Двуправильные» шестиугольники. Можно искать свойства двуправильных шестиугольников, аналогичные свойствам параллелограмма. У параллелограмма диагонали делят друг друга пополам. У вписанного параллелограмма углы равны и диагонали равны. У описанного параллелограмма стороны равны и диагонали взаимно перпендикулярны. Какие из этих свойств есть у двуправильных шестиугольников? (Про диагонали надо еще понять, какие именно брать и пересекаются ли они в одной точке.)

30. Замечательные точки. 1. Ответы нетрудно угадать, поэкспериментировав в программе «Живая геометрия» (все параметры выражаются через положение фиксированных точек A, B и центра окружности). Доказательства можно провести на уроке.

Ссылка. *Сгибнев А. И.* Три задачи о замечательных точках // Потенциал. 2011. № 11. С. 53–57. *Подробное решение в виде диалога.*

2. Заметим, что положение точки G можно «выразить» не через две точки B и C, бегающие по окружности, а всего через одну — середину отрезка BC. Назовем ее точкой A_1. Точка A_1 может находиться в любом месте внутри круга. Отсюда с помощью гомотетии легко получить ответ.

Полезно обсудить со школьниками, что когда был один свободный параметр — точка C, то получалась кривая — однопараметрическое семейство; когда же стало два свободных параметра — точки B и C, получилась область — двупараметрическое семейство.

3. По двум данным замечательным точкам O и H с помощью теоремы Эйлера восстанавливается третья — точка пересечения медиан G. Если в произвольном месте выбрать вершину треугольника A, то нетрудно произвести построения, дающие вершины B и C (если вершины существуют). Теперь можно провести эксперимент в программе «Живая геометрия» — найти множество точек A, при

которых точки B и C существуют. В силу равноправия вершин то же множество точек будет ответом и для вершин B и C.

Обобщения к п. 3.

1. Изучите углы треугольника ABC в зависимости от положения вершины A.

2. Решите аналогичную задачу для данных центра вписанной окружности и точки пересечения медиан; для других пар замечательных точек.

3. Рассмотрите аналогичную задачу в пространстве (тетраэдры вместо треугольников).

4. Вообще, можно придумать много аналогичных задач, выбирая различные замечательные точки.

Ссылка. *Вавилов В.* О математических исследованиях учащихся школы им. А. Н. Колмогорова // Математика. 2007. № 12. С. 27. *Сформулированы результаты исследования* (*задача взята оттуда же*).

31. Многоугольники Понселе.

Ссылка. *Заславский А., Косов Д., Музафаров М.* Траектории замечательных точек треугольника Понселе // Квант. 2003. № 2. С. 22–25.

32. Сложение фигур. Полезно начать с простых фигур: две точки, точка и отрезок, два отрезка.

Обобщение. *Суммой Минковского* фигур F и G назовем множество точек K, определяемых векторным равенством $\overline{OK} = \overline{OM} + \overline{ON}$, где $M \in F$, $N \in G$, O — данная точка. Исследуйте свойства этой операции. Что можно сказать о площади суммы двух фигур?

Ссылки. 1. *Васильев Н.* Сложение фигур // Квант. 1976. № 4. С. 22–29. *Содержит ряд задач — фактически план исследования — и приложения полученных методов к сложным задачам.*

2. *Панина Г. Ю.* Алгебра многогранников // Математическое просвещение. 2006. № 10. С. 109–131. *Продолжение этого сюжета в современной науке.*

33. Параметрическая плоскость треугольников.

Ссылка. [Ст10]. *Проделаны первые шаги исследования, дан подробный план.*

Комбинаторика

34. Разрезы. Это одна из классических задач, на которых учат доказывать методом математической индукции. Но мы следуем принципу Пойа: «сначала угадай, потом докажи». Поскольку задача хорошо подходит для математического эксперимента, подумать над ней полезно и школьнику, не владеющему методом математической индукции. Наименьшее число частей угадывается легко, с наибольшим бывает непросто сформулировать условия разрезания (так называемые *прямые общего положения*) и доказать их оптимальность. Помочь может следующее замечание: вопросы «Сколько частей добавляет данная прямая?» и «На сколько частей данную прямую делят предыдущие?» равносильны. См. также с. 9–10.

Обобщения. 1. Все ли промежуточные значения встречаются? Нет: например, 3 прямые могут делить плоскость только на 4, 6 и 7 частей (а на 5 не могут). Какие именно значения встречаются при произвольном n, наука знает не полностью, см. статью: *Арнольд В. И.* На сколько частей делят плоскость n прямых? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. 2008. С. 95–104.

2. На сколько частей делят пространство n плоскостей общего положения [К7, с. 65–73, 76]?

3. На сколько частей делят плоскость n попарно пересекающихся окружностей общего положения?

35. Раскраски. Задача имеет длинное «счетное» решение и короткое идейное. Чтобы изобрести второе, надо придумать такой способ раскрашивания, при котором разные последовательности действий приводят к разным раскраскам, а затем посчитать количество *последовательностей*. Например, можно зафиксировать порядок граней, а менять порядок цветов: в первый цвет закрасить любую грань, во второй — противоположную ей (5 вариантов), в третий — любую из боковых, в четвертый — следующую за ней по часовой стрелке (3 варианта), в пятый — следующую (2 варианта), в шестой — последнюю (1 вариант). Итого $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$ вариантов. (Идея взята из работы семиклассницы.) Придумать такой способ можно, формулируя алгоритм, как понять, одинаковые или разные раскраски у двух данных кубиков.

С младшими детьми можно изготовить модели всех таких кубиков.

Ссылка. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972. С. 34 и далее. *Приведен набор всех таких кубиков, и дано обсуждение их свойств.*

Обобщения. 1. Та же задача для других правильных многогранников. Может быть, стоит начать с правильного тетраэдра.

2. Можно раскрашивать не грани, а ребра или вершины.

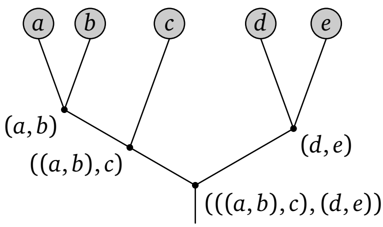
36. Сколько всего прямоугольников? Начальные шаги задачи вполне доступны младшеклассникам и послужат хорошей тренировкой для упорядоченного перебора. В общем виде ответы выражаются многочленами невысоких степеней от размеров фигур. Интересно, что прямоугольников в квадрате со стороной n оказывается столько же, сколько кубиков в кубе со стороной n. Возникает задача доказать это равенство непосредственно — не подсчитывая количество таких квадратиков и кубиков по отдельности, а установив взаимно однозначное соответствие между ними. Это пример *обратной задачи комбинаторики* (термин А. К. Звонкина).

37. Замок.

Ссылка. `http://www2.edc.org/makingmath/mathprojects/simplex/simplex.asp`. *Подробное обсуждение на английском языке с педагогическими и методическими комментариями.*

38. Число турниров. Простым перебором с десятью командами не справиться, поэтому надо обобщить задачу: сколько разных расписаний для n команд? Для двух, трех, четырех можно найти ответ перебором (соответственно 1, 3, 15). После этого нетрудно угадать закономерность: для n команд есть $T_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$ расписаний.

Дадим *набросок* доказательства по индукции. Для двух команд есть одно расписание. Изобразим расписание турниров в виде дерева (как оно строится, понятно из рисунка). Пусть у нас было k команд. Тогда в дереве есть $2k-1$ место, куда можно присоединить новую команду. Значит, если для k команд было T_k расписаний, то для $k+1$ команды будет $T_{k+1} = T_k(2k-1)$ расписаний.



Результат напоминает формулу количества разбиений на пары, к которому действительно можно свести эту задачу: для $2m$ объектов есть $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)$ способов разбить их на пары

39. Число циклов. Экспериментальное исследование можно проводить, не зная ничего, кроме техники «упорядоченного перебора». Тогда по ходу задачи можно открыть, например, количество перестановок данных n чисел, понять разницу между размещениями с повторами и без и т. д. Однако полное доказательство под силу скорее ученику, уже владеющему формулами перестановок, сочетаний и размещений.

Вот вопросы, которые помогут решить задачу.

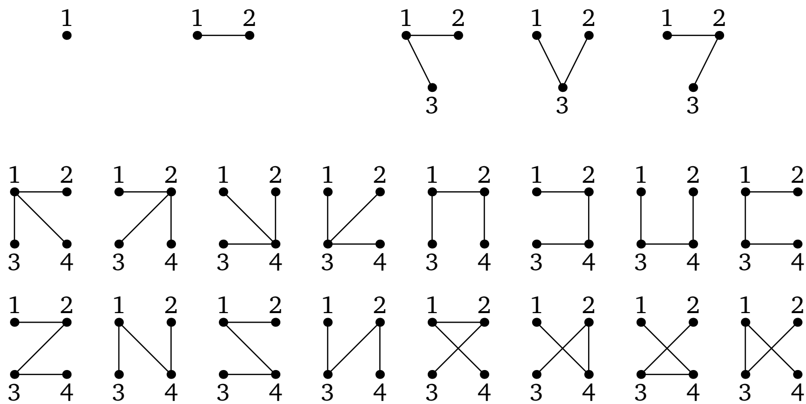
1. Сколько существует полных циклов (т. е. циклов длины k) из k элементов?

2. Сколько существует способов выбрать k элементов из n (порядок неважен)?

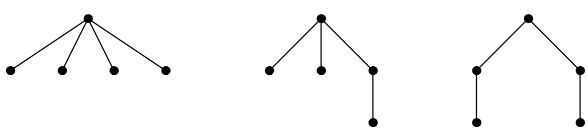
40. Перестановки диагоналей. Можно занумеровать все вершины куба и выписывать подстановки номеров, соответствующие поворотам. Чтобы доказать, что мы нашли все самосовмещения, можно сначала изучить самосовмещения, оставляющие одну вершину неподвижной, а затем понять, как через них получить все остальные. Далее интересно найти подгруппы полученной группы поворотов.

Ссылка. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. М.: Бюро Квантум, 2008. С. 71–74.

41. Подсчет деревьев. Нарисуем все деревья для $n = 1, 2, 3, 4$:



Пусть $n = 5$. Теперь прямой подсчет уже достаточно сложен. Видов деревьев три:



Подсчитав, сколькими способами можно занумеровать каждое, получим, что всего их 125.

Соберем данные в таблицу:

Количество вершин	1	2	3	4	5
Количество деревьев	1	1	3	16	125

Теперь нетрудно угадать формулу для количества помеченных деревьев с n вершинами: $K_n = n^{n-2}$. Эта формула подсказывает путь доказательства: построить биекцию между множеством помеченных деревьев с n вершинами и последовательностью из $n-2$ членов, каждый из которых принимает одно из n значений.

Биекция может быть такой (тут автор не знает другого способа, кроме «гениальной догадки»). Возьмем в дереве лист[1] с минимальным номером и возьмем в качестве первого числа последовательности номер вершины, с которой этот лист соединен. Затем удалим выбранный лист. Вторым числом последовательности будет номер вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и так до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность длины $n-2$.

Теперь осталось проверить, что каждому дереву сопоставляется единственная последовательность (это легко), и понять, что по любой последовательности можно единственным образом восстановить дерево (каким образом?). Перед формулировкой алгоритма «восстановления» в общем виде полезно потренироваться на примерах, нарисованных выше.

Эта формула называется формулой Кэли для числа деревьев, а биекция — кодом Прюфера. Другие доказательства см. в книге: *Айгнер М.*, *Циглер Г.* Доказательства из Книги. М.: Мир, 2006. П. 26.

Обобщение. Рассмотрим произвольный граф. Последовательно удалим все вершины степени 1 вместе с ребрами, в них приходящими. Далее удалим все вершины степени 2, соединив концы приходящих в них ребер. Назовем получившийся граф *клумбой*. Самая простая клумба представляет из себя две вершины, соединенные тремя ребрами.

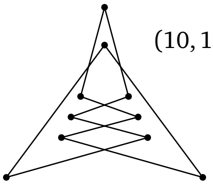
Будем выращивать на клумбе деревья (с вершинами в вершинах или на ребрах клумбы).

Задача. *Сколько существует различных помеченных деревьев с n вершинами на клумбе G* (т. е. n-вершинных графов, представляющих из себя деревья на клумбе G)?

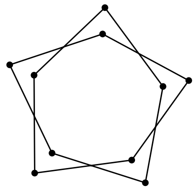
[1] Вершина графа называется *листом*, если она является концом ровно одного ребра.

Теорема Кэли дает ответ к задаче в случае «одноточечной клумбы».

42. Ломаные. 1. Ломаные с четным числом звеньев $2n$ существуют для любого $n \geqslant 3$. Один из способов строить их — однотипно надстраивать конструкцию для 6 звеньев (см. рисунок слева, ср. с ломаной для 6 звеньев). Для 10 звеньев есть еще один тип ломаных (рис. справа).



$(10, 1)$



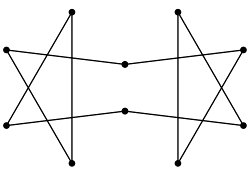
Дальнейшая классификация типов упирается в непростой вопрос: какие ломаные считать разными, а какие — одинаковыми? Наиболее разработанный подход к этому вопросу — комбинаторный: звенья ломаной нумеруются, и фиксируется, какое с каким пересекается, т. е. каждой ломаной ставится в соответствие нумерация. Далее можно исследовать, для каких нумераций существует соответствующая им ломаная. Часть ограничений формулируется довольно быстро (например: пересекаются звенья, номера которых имеют разную четность), другие возникают при попытках построить ломаную по данной нумерации.

Задача перекликается с теорией узлов, см., например, книгу: *Сосинский А. Б.* Узлы и косы. М.: МЦНМО, 2012.

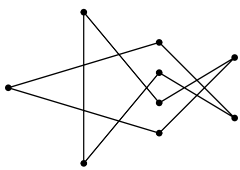
2. а) Общее число точек пересечения равно $nk/2$, поэтому при нечетных n и k ломаная не существует. В ломаной из n звеньев каждое звено не могут пересекать больше чем $n-3$ звена (заведомо звено не пересекают оно само и два соседних звена).

б) См. рисунок слева. Сращивая таким образом s звезд, можно получать ломаные типа $(5s, 2)$. К любой ломаной типа $(n, 2)$ можно добавить две пары пересекающихся звеньев и получить ломаную типа $(n+4, 2)$ — см. рисунок справа.

$(10, 2)$

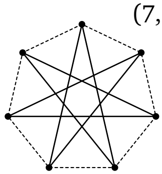


$(9, 2)$



в) Ломаные типа $(5,2)$, $(7,4)$, $(9,6)$, $\ldots$, $(2k+3, 2k)$ легко получить из диагоналей $(2k+3)$-угольника, обходя вершины в одном направлении через две, например, как показано на следующем рисунке.

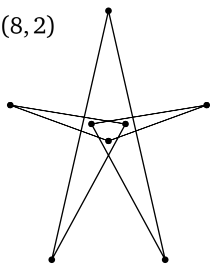
$(7,4)$



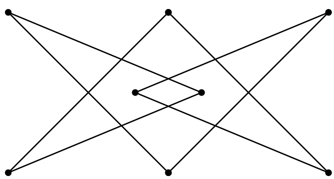
г) Ломаной типа $(6,2)$ не существует. Приведем набросок доказательства. Поставим такой ломаной в соответствие таблицу 6×6, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит «+», если звенья с такими номерами пересекаются, и «—», если не пересекаются. Таблица симметрична, в трех средних диагоналях стоят минусы (поскольку ни одно звено не пересекается с собой и с соседними). Надо расставить в каждой строке и каждом столбце таблицы ровно два плюса. Далее надо построить все такие таблицы и доказать, что ни одной из них не может соответствовать замкнутая ломаная.

д) Примеры ломаных приведены на рисунке (ломаная $(10,3)$ впервые построена А. К. Ковальджи).

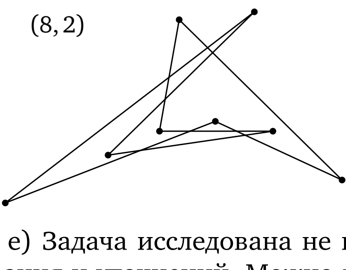
$(8,2)$



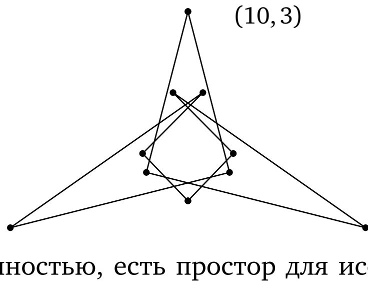
$(8,2)$



$(8,2)$



$(10,3)$



е) Задача исследована не полностью, есть простор для исследования и уточнений. Можно получать разные оценки, используя разные методы построения ломаных. Приведем несколько примеров. Ломаные типа $(2n, 1)$ существуют при всех целых $n \geqslant 3$ (см. п. 1). Ломаные типа $(2k+3, 2k)$ существуют при всех натуральных k (п. 2в).

В заключение приведем две не решенные задачи: существуют ли ломаные типа $(8, 3)$ и $(9, 4)$?

Ссылка. *Ковальджи А. К.* Решение задачи 3.7 // Математическое просвещение. Сер. 3. 2003. Вып. 7. С. 190–193. *Приведены достаточные условия существования широкого класса ломаных, дано полное доказательство несуществования ломаной* $(6, 2)$.

Алгоритмы

43. Монетки. Используется важная идея — сведение задачи к более простой решенной. Если мы умеем решать задачу про три монетки, то можно легко свести к ней задачу про девять монеток, и т. д. Сначала добейтесь, чтобы ученик мог объяснить порядок своих действий для конкретных случаев, а уж потом, если удастся, чтобы он формулировал его в общем виде. Доказательство минимальности доступно скорее средним и старшим классам. Задача об определении *двух* фальшивых монет из N за наименьшее число взвешиваний — уже открытая задача! «Промежуточные» задачи и методы решения см. в книге: *Кноп К. А.* Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. М.: МЦНМО, 2011.

44. Игра в полоску.

Ссылка. [Ст3]. *Содержит полное решение задачи с подробным рассказом о том, как можно до него дойти.* Вообще, задачи на игры весьма перспективны в качестве тем, так как есть «интерактив» и ошибочность придуманной учеником стратегии можно продемонстрировать в игре, вместо того чтобы объяснять словами.

45. Золотая цепочка. 1. Да, сможет: $7 = 2 + 1 + 4$.

2. Два распила: $17 = (2 + 1 + 4) + 1 + 9$.

3. Для трех распилов: $((2 + 1 + 4) + 1 + 9) + 1 + 19 = 37$. Вообще, если за k распилов можно оплатить d_k дней, то для $k + 1$ распила получается $d_{k+1} = d_k + 1 + (d_k + 2) = 2d_k + 3$ дней.

Замечание. Задача похожа на задачу о минимальном наборе гирек, которыми можно взвесить все целые веса от 1 до $2^n - 1$ грамма. Разница в том, что в этой задаче нельзя обойтись без дополнительных единиц (распиленных звеньев).

46. Не больше половины. Эта игра изоморфна такой: ладья на полоске бумаги может ходить только вперед, но не более чем на половину оставшихся клеток. Обе задачи решаются расписыванием выигрышных и проигрышных позиций с конца, но на доске это делать удобнее, чем с камнями (подробнее см. [К9, с. 63–71]). Можно разным школьникам дать разные задачи, чтобы потом они сами обнаружили, что получается одинаково с камнями и с досками, и дальше объединились. См. ссылку к следующей задаче.

47. Ладья-ферзь.

Ссылка. *Шень А.* Игры и стратегии в математике. М.: МЦНМО, 2007. П. 3. *Содержит полное решение для ладьи.*

48. Угадайка. «Детское» решение (делить интервал пополам) можно переформулировать так: запишем числа в двоичной системе счисления и каждым вопросом будем узнавать цифру в очередном разряде. Действуя аналогично в угадайке с платой, попробуем подобрать такую систему счисления, чтобы с ответом «да» мы узнавали одну цифру, а с ответом «нет» — две цифры. Такой системой счисления является фибоначчиева (в ней не могут идти подряд две единицы). Интересно проверить, можно ли обобщить это решение на другие «цены» за ответы.

Угадайка с враньем во «взрослой» формулировке звучит так: «При передаче слова возможны ошибки. Двукратные и более считаем маловероятными. Как исправить однократную ошибку, добавляя как можно меньше информации?» Это делают самоконтролирующиеся коды, например код Хемминга.

49. Эволюция клеток. Полезно вначале дать детям «повариться» в теме некоторое время, а затем разработать с ними план исследования. Например, на кольце можно методично изучать эволюции всех возможных узоров: начиная с длины 1 и до длины, скажем, 10. По ходу изучения будет выясняться, что многие разные на вид узоры на самом деле эквивалентны. Встанет вопрос: «Как быть уверенными, что ничего не пропустили?» Придется осуществить упорядоченный перебор и т. д. По ходу наблюдений начнут открываться и нетривиальные закономерности:

1) либо в кольце бывает цикл (повторение узора со временем), либо все кольцо становится белым (что тоже можно рассматривать как цикл);

2) если в конечной полосе длиной 3, 7, 15, … вначале всего одна черная клетка, то рано или поздно вся полоска станет белой;

3) эволюция суммы является суммой эволюций, т. е. если ввести операцию бинарного суммирования:

$$\text{черное} + \text{черное} = \text{белое},$$
$$\text{черное} + \text{белое} = \text{черное},$$
$$\text{белое} + \text{белое} = \text{белое},$$

разбить полоску на две (сумма которых дает исходную), проэволюционировать их по отдельности и просуммировать, то получится эволюция исходной полоски.

Таким образом, любую эволюцию бесконечной полосы можно получить как бинарную сумму нескольких картинок со с. 59. Кстати, эта картинка очень похожа на треугольник Паскаля, в котором числа заменили остатками при делении на 2.

После четкой формулировки гипотезы следует попытаться доказать ее или опровергнуть.

Обобщения. 1. Если зашифровать узор в виде двоичного числа, как оно будет эволюционировать?

2. Найдите узоры, которые периодически повторяются со временем. Какими свойствами они обладают? Что можно сказать о полосе произвольной ширины? О прямоугольнике? О всей клетчатой плоскости?

Ссылка. Квант. 1970. № 4. Задачник Кванта. Задача М19 (Васильев Н. Б.). Решение: Квант. 1970. № 12. С. 37–39.

50. Мудрецы у людоедов. См. работу школьника, с. 34–36.

Обобщения. 1. Пусть колпаки будут не двух цветов, а k цветов.

2. Пусть среди мудрецов есть «болван», который не соблюдает договоренностей, а говорит случайный цвет. Расположение болвана неизвестно, ответил ли он согласно договоренности — тоже.

3. Трем мудрецам на лбу написали числа. Каждый из них видит только числа у других мудрецов, но не знает своего. По сигналу они должны одновременно надеть на себя черный или белый колпак так, чтобы, когда их выстроят по возрастанию чисел, цвета колпаков чередовались. В процессе выполнения задания мудрецам запрещено общаться, но они могут вначале выработать общую стратегию. Как им справиться с задачей?

51. Сумма кубов цифр. Посчитаем последовательности для чисел от 1 до 9. Увидим, что последовательности либо останавливаются, либо зацикливаются. Докажем, что другого и не бывает. Если исходное число меньше 10 000, то и все последующие тоже. Последовательность однозначно определяется исходным числом и, значит, обязана быть периодической. Удобно говорить об *орбите* числа. Можно написать программу, которая строит орбиты чисел, скажем, от 1 до 10 000. Она найдет все неподвижные числа: 1, 153, 370, 371, 407. Многие числа попадают в орбиты других чисел. Интересно найти условия, при которых орбиты, содержащие два данных числа, заведомо не пересекаются[1]. Одним из инвариантов орбит является остаток от деления числа на 3.

Обобщение. Аналогичные вопросы можно ставить, задавая другие итераторы — правила вычисления последовательности (например, сумму квадратов цифр или количество букв в числе, записанном по-русски, — это задача Колмогорова).

52. Задача Иосифа Флавия. Хорошая задача на идею рекурсии. На представлении тем эту задачу можно подать очень увлекательно, разыграв считалочку со школьниками. На самом деле задача возникла во вполне военной обстановке: в «Иудейской войне» Иосифа Флавия есть история о том, что «он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых, до тех пор пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф наряду с одним из своих единомышленников счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища. И лишь поэтому мы знаем его историю» (*Грэхем Р. и др.* Конкретная математика. М.: Мир, 2006. С. 25).

Стоит составить таблицу номеров уцелевших в зависимости от начального числа игроков. Далее можно увидеть закономерность, которую, впрочем, не так легко доказать напрямик. Можно перенумеровывать игроков после прохождения каждого круга, найти рекуррентный закон изменения номера уцелевшего и, используя его как шаг индукции, доказать найденную закономерность. Другой подход — заметить, что если вначале было 2^n игроков, то «выживает» первый. Значит, если их $2^n + l$, то останется «в живых» тот, кто является первым после l исключений. (Этот подход быстрее приводит к цели, но вряд ли поддается обобщению.)

Обобщения. 1. Пусть выходит каждый k-й, начиная с k-го. (Уже в случае $k=3$ все заметно сложнее — поэтому-то мы пренебрегли исторической правдой и сформулировали задачу для каждого *второго*.)

[1] Мы использовали понятия из темы «Перестановки». Эта тема перспективна для начинающих исследователей, так как она использует наглядные понятия, допускающие экспериментирование, но в то же время идейна и с первых же шагов допускает содержательные задачи. См. Конкурс по решению задач по математике, `http://www.math.ru/ot5do15/final.html`, задачи 1, 3, 4.

2. Нужно узнать также номер *предпоследнего* оставшегося («спаси себя и друга»).

Ссылка. *Грэхем Р. и др.* Конкретная математика. М.: Мир, 2006. С. 25 и дальше. *Содержит решение задачи для каждого k-го и различные обобщения задачи.*

53. Обезьяна и кокосы. Заметим, что после того, как первый кокос разбит, задача сводится к задаче об одном кокосе. Полезно перевернуть задачу: какова этажность дома, который можно «протестировать» данным количеством бросков (имея два кокоса)? Этаж для броска данного кокоса надо выбирать так, чтобы количество проверок нижних этажей, если он разбился, равнялось количеству проверок более высоких, если он цел. Идея «равномерной траты попыток в пересчете на приобретаемую информацию» — общая в подобных задачах, ср. задачи 43, 48.

Обобщение. Пусть будет 2 кокоса и F этажей; пусть будет C кокосов и F этажей.

54. Игра Ним. Возможный подход к решению такой: рассмотрим сначала одну кучку (очевидно), две кучки (симметричная стратегия). Для трех кучек поставим такой вопрос: пусть в двух из них количества камней фиксированы — a и b; сколько камней c должно быть в третьей кучке, чтобы позиция была проигрышная? (Заметим, что c определяется по a и b однозначно, так как если бы для данных a и b было два разных значения c, то игрок мог бы из большего привести позицию к меньшему, т. е. привел бы противника к проигрышной позиции.) Рисуем квадрант с натуральными a и b, находим по ним c, заполняем таблицу, смотрим на получающиеся узоры и ищем закономерности. «Правильная» закономерность обобщается уже на любое количество кучек[1].

Ссылки. 1. *Шень А.* Игры и стратегии в математике. М.: МЦНМО, 2007. П. 4. *Содержит полное решение.*

2. *Шилов В. В.* Еще раз об игре Ним // Потенциал. 2009. № 6. *Содержит увлекательные истории про эту игру.*

Обобщение. Пусть имеются две кучи предметов (например, спичек) и два игрока поочередно берут либо произвольное число

---

[1] Это яркий пример темы, в которой помогать ученику можно очень по-разному. Можно дать формальное указание: «запиши количества камней в двоичной системе счисления, выравнивая их по правому краю; докажи, что если все количества единиц в каждом столбце четны, то позиция проигрышная», и т. д., которое для ученика будет взято «с потолка», даже если он все это докажет. А можно дать способ найти эти закономерности самому. В этом и есть отличие «исследования» от «школьной задачи».

предметов из одной кучи, либо поровну из каждой кучи. Получится более сложная игра, называемая Цзяньшицзы. Если в анализе игры Ним помогала двоичная система счисления, то в Цзяньшицзы помогает фибоначчиева система. См., например, статью: *Яглом И. М.* Две игры со спичками // Квант. 1971. № 2; а также книгу: *Яглом А. М.*, *Яглом И. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.: ГИТТЛ, 1954. Задача 129.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Исследовательские задачи при обучении математике в школе «Интеллектуал»[1]

А. Сгибнев, Д. Шноль

Математика — это *человеческая деятельность*; сравнительная ценность задач и правильный их выбор в математике гораздо более важны, чем способность совершать сложные действия в уме.

А. К. Звонкин. «Малыши и математика»

Что означает владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности.

Д. Пойа. «Математическое открытие»

Зачем нужны исследовательские задачи

При исследовании научной проблемы важен не только результат, «ответ» к данной задаче, но и изобретенный по ходу решения метод, которым иногда удается решить много других задач. Если повезет, накопленные результаты и методы складываются в единое целое — новую математическую теорию.

Получаем цепочку развития реального исследования: задача — решение — метод — теория.

При обучении же в школе (да и в университете) последовательность, как правило, обратная: ученику излагают в готовом виде теорию, из нее выводят методы решения, а потом предлагают решить ряд задач для овладения методом и усвоения теории.

[1] Это приложение основано на статье: *Сгибнев А.*, *Шноль Д.* Исследовательские задачи при обучении математике в школе «Интеллектуал» // Математика. 2007. № 12. С. 17–22.

Редко перед школьником или студентом сразу ставят новую задачу, метод решения которой ему неизвестен, еще реже просят ученика самостоятельно поставить новую задачу.

Итак, изучать материал можно в двух противоположных направлениях: «от задач» и «от теории». Сравним эти способы по нескольким параметрам.

Время. Способ «от теории» требует гораздо меньше времени на *формальное* овладение материалом, так как сразу отсекает ложные и тупиковые ходы.

Надежность. Способ «от задач» срабатывает далеко не всегда и не со всеми, так как требует от ученика постоянной активности. Способ «от теории» гораздо надежнее.

Системность. При изучении части законченной теории есть возможность сразу расставить верные акценты, выделить существенные связи. При самостоятельном построении теории «от задач» системные связи внутри теории не всегда сразу видны, пропорции важного/второстепенного могут быть нарушены.

Традиция также на стороне способа «от теории», достаточно посмотреть структуру любого учебника по математике.

Особняком стоит «метод листочков», при котором учитель не объясняет теоретический материал и ученик изучает тему, самостоятельно решая *заданную* ему последовательность задач. «Метод листочков» имеет существенные преимущества перед традиционным обучением, однако и он отражает далеко не все стороны реального научного исследования.

Когда ученый строит новую теорию, большую роль играет его умение *выбирать* значимые факты и перспективные направления (Пуанкаре считал, что это умение основано на эстетическом чувстве[1]). Когда теорию дают ученику в готовом виде, это умение не развивается, поскольку выбирать почти ничего не приходится. Обучая «от теории», мы воспитываем «пользователя» науки, который может успешно *применять* известные методы решения в известных ситуациях. Обучая «от задач» — воспитываем «творца» науки, способного *изобретать* новые методы решения, ставить новые задачи. Таким образом, для детей, одаренных в математике, появляется новая возможность: углубляться не за счет пассивного изучения более

[1] См. замечательную статью: *Пуанкаре А.* Математическое творчество // Ж. Адамар. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: МЦНМО, 2001.

сложной теории, а за счет активного самостоятельного движения в том же самом материале, т. е. углубление не за счет материала, а за счет способа его изучения.

По большому счету, если ученик не освоил ни одной темы способом «от задач», нельзя сказать, что он понимает, *как устроена* математика. Если видел лес только с шоссе, то, войдя в него, тут же заблудишься.

Конечно, обучение «от задач» гораздо более индивидуально, чем обучение «от теории». Поэтому на урочных занятиях могут быть введены только некоторые элементы такого обучения. Подробнее об обучении «от задач» собственно на уроках см. [Ст1], [Ст2], [К10].

Мы опишем особый жанр учебной работы, в котором реализуется способ обучения «от задач». Мы называем его так: жанр учебных исследовательских задач. Подчеркнем, что в нашем понимании работа над исследовательской задачей — не украшение, а существенная компонента математического образования одаренных школьников. Работая в классе, мы не знаем, какие процессы происходят в голове у сильного ребенка (например, один шестиклассник отказывался умножать дроби, потому что умножение должно увеличивать число!). А вот работая с ним один на один над исследовательской задачей, мы начинаем лучше чувствовать механизм его мышления и возможные сбои. Очень важна и сама возможность напряженной работы над интересной для школьника темой — ведь сильные ученики справляются с обычной программой без труда и к 11 классу могут так и не научиться серьезно работать.

Исследовательские работы ведутся в школе «Интеллектуал» в течение шести лет. В данной статье мы попытались суммировать и осмыслить свой опыт работы в этой области.

Как работает ученик

1. Ученик выбирает тему. Темы (исследовательские задачи) вывешиваются в начале года, каждый может выбрать что-то из предложенного или предложить собственную тему (у нас это редкий случай). Если задача кажется ученику недостаточно ясной по формулировке, он находит учителей и задает им уточняющие вопросы (иногда его отсылают к автору задачи). Последние годы для желающих делается представление тем: будущие руководители формулируют по 2–3 темы, делают вместе со слушателями первые шаги решения, поясняют трудности и связи с другими темами.

2. Ученик выбирает руководителя. По некоторым темам руководитель объявляется сразу, тогда тема и руководитель выбираются учеником одновременно. По другим темам можно выбрать руководителя по вкусу. У нас очень часто в качестве руководителя дети выбирают *не* своего учителя. Естественно, руководитель может не согласиться работать с пришедшим учеником по выбранной теме, хотя у нас таких случаев пока не было.

3. Ученик разбирается в задаче. Задача почти всегда сформулирована так, чтобы можно было самостоятельно начать ее решать в некоторых частных случаях, при малых значениях параметра и т. д. При первой договоренности о сотрудничестве руководитель говорит примерно следующее: «Когда сделаешь в задаче все, что сразу сможешь, придешь показать — обсудим».

4. Ученик читает литературу, связанную с задачей. Здесь все зависит от решаемой задачи и от осведомленности руководителя. Иногда руководитель может порекомендовать книгу или статью, иногда ученик ищет необходимую литературу сам. Главное, что у него *нет обязанности* что-то изучить по теме, он обращается к литературе тогда, когда все собственные резервы исчерпаны, а решение не найдено.

5. Ученик решает задачу (часть задачи). Самый индивидуальный пункт, это бывает очень по-разному. Об этом см. выше несколько историй (с. 18–25).

6. Ученик оформляет решение. Для многих это трудная часть. Прекрасно, когда текст пишется по ходу работы и сразу обсуждается с руководителем. Такие случаи у нас бывали. Но более частый вариант такой: текст пишется в последние несколько дней, тогда руководитель читает и критикует его в спешном порядке. Иногда текст правится совместно учеником и руководителем — это тоже форма обучения.

7. Ученик готовится к устному выступлению. Здесь роль руководителя очень велика. Как правило, создание плана выступления и его репетиция — это совместное творчество ученика и руководителя. Руководители рекомендуют ученикам еще прорепетировать свой доклад дома или в группе друзей, что часто и происходит. Время от времени мы привлекаем на этапе подготовки доклада рецензента.

8. Ученик выступает и отвечает на вопросы при отчете о своей работе. Довольно часто при обсуждении работы слушатели выдвигают новые гипотезы, предлагают другие пути решения задачи или обобщения. Автор работы, с одной стороны, получает эмоциональный заряд от заинтересованности коллег к его работе, с другой стороны, в свете критических замечаний начинает по-другому видеть свою работу или сделанный им доклад.

Как работает руководитель

Во-первых, нужно описать, что руководитель *не* делает.

1. Руководитель не подсказывает прямо хода решения, если этот ход ему известен.

2. Руководитель не мешает ученику двигаться в выбранном направлении решения, даже если ему кажется, что путь заведомо ложный (кстати, бывает, что руководитель в этом ошибается).

3. Руководитель не требует изучения определенного корпуса литературы, а только советует, что может ученику помочь.

4. Руководитель не ставит жестких промежуточных сроков и подстраивается под ритм работы, удобный ученику. Некоторые дети работают над темой регулярно, некоторые урывками, откладывая проблему на две-три недели; главное, чтобы ученик нашел свой ритм исследовательской работы.

Руководитель работает с учеником как с младшим коллегой, помогая ему, если есть просьба о такой помощи, и на равных обсуждая возникающие проблемы. Вести работу в таком стиле проще, если руководитель сам не знает полного решения задачи или хотя бы решения теми средствами, которыми владеет ученик.

Как происходит отчет по работе

Два раза в год (в конце полугодий) проходит конференция исследовательских работ. За две-три недели до конференции устраивается **предзащита**. На предзащите присутствуют только ученики, которые решали задачи, и учителя. Ученики подробно рассказывают о своей работе, учителя дают советы по доработке, по изложению. «Халтурные» работы до конференции не допускаются. Зато допускаются незаконченные, но содержательные работы, так как школьникам полезно обсудить текущие результаты исследований.

Конференция — это праздничное мероприятие, на которое приглашаются все школьники. Желание поделиться своими открытиями очень естественно. При этом хорошо, когда тебя выслушивает человек заинтересованный и хорошо понимающий. Контрольная функция доклада по возможности должна быть сведена к минимуму.

Доклад на секции — не экзамен, а награда. Не всякого допускают выступать на секции, но это не влечет за собой никаких отрицательных последствий. Тех, кто хорошо творчески поработал, нужно поощрить, остальных оставить в покое.

Если внутришкольная конференция привела к тому, что есть пять человек, которые с интересом слушают доклады друг друга и задают вопросы, то это уже хороший результат. Возникает «вертикальное» сообщество в школе — есть общение между классами; младшие помнят задачи, которые решали старшие, старшие приноравливают доклады к уровню младших, и т. д.

Время докладов на секции — это время сбора урожая. Поэтому чрезвычайно важно, чтобы это время всеми ощущалось как праздник. Это, конечно, в первую очередь зависит от настроя взрослых и их манеры ведения секции.

Как оценивать работы

Исследовательская работа — не тест и не контрольная, за которые можно выставлять оценки. Сомнительна даже идея присуждения мест, так как для этого надо сравнивать работы, а параметров для сравнения много. (На пленарные заседания школьных конференций, где слушают «лучшие» работы разных предметных секций, часто берут не самую содержательную работу, а самую наглядную.) Наиболее адекватной оценкой, на наш взгляд, является развернутая рецензия с описанием сильных и слабых сторон работы, пожеланиями и советами. Вот примерный перечень параметров, по которым полезно дать отзыв:

- оригинальность постановки задачи;
- оригинальность идей;
- правильность доказательств;
- глубина результатов;
- регулярность работы;
- качество текста;
- качество устного доклада.

Полезно похвалить сильные стороны работы и дать советы, как улучшить слабые. Рецензии может давать и руководитель работы, и другой учитель (идеи по доказательству), и старшеклассник (проверка логики и выкладок), и даже младшеклассник (понятность изложения).

Зачем нужны доклады

Работа над докладом — очень важная часть всей работы над исследовательской задачей. В докладе важно совместить две довольно разные вещи: увлекающий слушателей рассказ о собственных поисках, заблуждениях и удачах и строгое системное изложение полученных результатов и их доказательств. Нужно избегать обеих крайностей: как сухого изложения последовательности лемм и теорем, так и бессистемного рассказа «что я делал», в котором не подчеркнуты основные идеи и методы. Если до доклада ученик работает над *своей* задачей и в этой работе у него есть свои особые внутренние связи, привычные обозначения, удобный ему лаконизм, набор методов и ассоциации, то теперь ему нужно изложить задачу *другим*: выстроить работу логически, подобрать понятные обозначения и термины, сделать необходимые акценты и пояснения. Многие люди (и дети, и взрослые), решив задачу, достаточно быстро к ней остывают, поэтому для них написание текста и подготовка к докладу — важный этап обучения тому, что дело нужно довести до конца, даже если ты к нему уже охладел.

Откуда берутся темы

> Помните: «Тиха украинская ночь»?
> Вот и задачи должны быть такими же.
>
> А. Д. Александров

В некотором смысле темы исследовательских работ приходят сами. Бывает, что тема вырастает из кружковой или олимпиадной задачи, бывает, что она неожиданно возникает при подготовке к уроку или на самом уроке. Тема работы — это задача с перспективой, с продолжением, иными словами — это серия таких задач, которые естественно получаются из некоторой задачи обобщением, увеличением параметра и т. д. Обычно первые задачи из серии решаются сравнительно легко. Затем разные ученики доходят до разных степеней общности, каждый останавливается там, докуда смог добраться сам (а не там, куда его доставил на «вездеходе» учитель). В этом движении постоянно приходится выбирать направление следующего шага, т. е. развивать важнейшее для математика умение (эстетическое чувство, о котором говорил Пуанкаре).

При таком движении активно используется индукция и аналогия: рассматриваем несколько частных случаев, угадываем закономерность, ставим аналогичную задачу. Здесь оказывается плодотворным взгляд на математику как науку *экспериментальную*, который практически игнорируется школьной традицией (см. [Ст2]). Часто бывает, что школьник смог вывести из наблюдений некую закономерность, но не может ее доказать (не хватает знаний, техники). Как оценивать такой результат? В олимпиадах это в лучшем случае «$\mp$» (есть некоторые продвижения, но в целом задача не решена). В исследовательских задачах, если гипотеза разумна и выдерживает проверки, это уже неплохой результат. Часто ученики способны экспериментально открывать закономерности в тех областях математики, которые еще недоступны их теоретическому обоснованию. На наш взгляд, это полезно, поскольку помогает понять структуры и стимулирует к дальнейшему изучению этих областей. Но если на уроках увлекаться таким экспериментированием не стоит, то в исследовательских задачах оно вполне уместно.

Заметим, что наши постановки задач, как правило, понятны ученику без предварительной подготовки — мы стараемся отталкиваться от известного.

Приведем пару примеров того, как возникали темы. Серёжа Злобин, 6 класс, на кружке долго не мог решить задачу о разрезании на полоски 1×3 квадрата 8×8 без угловой клетки. Дома он взялся за дело всерьез и полностью исследовал разрезание квадрата $2^n \times 2^n$ без угловой клетки на такие полоски. Оказалось, что результат зависит от остатка при делении n на 3. Задача несложная, но при решении понадобились разнообразные методы — площадь, раскраска, перебор, и получились результаты, априори неочевидные. В итоге на докладах работа смотрелась очень неплохо. К тому же задачу ученик поставил сам.

Другая тема появилась в ходе обсуждения задачи о построении пятиугольника по серединам его сторон (непростой, но учебной). Аналогичная задача для треугольника была, что называется, «на слуху» — и так возникла тема исследования: восстановить многоугольник по серединам его сторон и исследовать количество решений (Краснер Паша, 9 класс, см. задачу 27). Интересно, что результаты существенно разные для четного и нечетного количества сторон.

О математических проектах в Красноярской летней школе[1]

М. Ройтберг

Введение

В течение пяти сезонов КЛШ (Красноярской летней школы, 1998–2001, 2003) я организовывал работу со школьниками по так называемым «проектам». В этой работе в качестве преподавателей участвовало около 20 сотрудников. Ряд школьников, работавших по проектам, стали сотрудниками школы. Практически все отчеты школьников сохранены. Этот текст — попытка суммировать накопленный опыт. В нем объясняется, что понимается под проектом, в чем особенности проектной работы, а также даются методические указания для будущих руководителей проектных курсов и отдельных проектных групп.

Часть 1. Работа над проектами

§ 1. Общие сведения

1.1. Что мы называем проектной работой. Основной цикл. Проектная работа — это модель научно-исследовательской работы ученого. Включение такой работы в учебный процесс преследует несколько целей:

- познакомить школьника с одним из наиболее мощных и традиционных способов познания окружающего мира;
- дать школьнику почувствовать радость от успешно решенной трудной (для него) задачи;
- дать школьнику опыт письменного изложения результатов своей работы, а также устного представления этих результатов сверстникам и взрослым.

---

[1] Это приложение основано на статье: *Ройтберг М.* О математических проектах в Красноярской летней школе // Математика. 2008. № 13. С. 25–38. В этой статье исследовательская задача называется проектом.

Так как работа над проектом (как и научно-исследовательская работа), как правило, ведется группой, школьник приобретает еще один ценный опыт — опыт работы в группе.

Не претендуя на полноту, перечислим существенные для нас черты научно-исследовательской работы и моделирующей ее проектной работы:

1) относительная длительность (в условиях КЛШ это 10–14 дней);
2) самостоятельное и свободное «блуждание» в пространстве, заданном условиями задачи;
3) относительная методичность блуждания («метод проб и ошибок»):

   — проведение экспериментов, количество и содержание которых, а также форма представления результатов определяются самим исполнителем (в наших проектах эксперименты были численными и проводились вручную либо с помощью несложных компьютерных программ);
   — формулирование гипотез на основе результатов проведенных экспериментов, проверка этих гипотез с помощью новых экспериментов и, если нужно, корректировка гипотезы; доказательство гипотезы, согласующейся с экспериментами;

4) уточнение и расширение исходной постановки задачи по ходу работы;
5) необходимость подготовки письменного отчета и устного сообщения.

Отметим, что «блуждание в материале» является неотъемлемой чертой *всякой* творческой (*исследовательской*) деятельности. *Научно*-исследовательская деятельность отличается выработанными веками специфическими методами исследования. Предлагаемые школьникам проектные задания (см. ниже) облегчают и делают естественным применение экспериментального подхода к исследуемой проблеме.

Таким образом, основу работы исполнителей над проектом составляет такой цикл (ниже называемый *основным*, ср. также схему на с. 10):

1) проведение численных экспериментов (без использования или с использованием компьютера);
2) анализ полученных экспериментальных данных; выдвижение гипотез, описывающих накопленные данные;

3) проверка предсказательной силы гипотез с помощью новых численных экспериментов, уточнение гипотез;
4) доказательство гипотезы, которая согласуется с экспериментом.

Выполнению описанного основного цикла предшествует понимание постановки задачи. После завершения цикла происходит переход к работе над отчетом, при условии, что доказанная гипотеза полностью отвечает на исходный вопрос. Если же доказана промежуточная гипотеза, то происходит уточнение и/или расширение исходной постановки задачи, после чего снова выполняется основной цикл. Таким образом, в ходе работы над проектом основной цикл может быть выполнен не один раз.

Конечно, эта схема не всегда в точности выдерживается. Например, исполнитель проекта (как и работающий ученый) может отложить работу над одной гипотезой и взяться за другую, а потом снова вернуться к исходной гипотезе. Если исполнителей несколько, они могут параллельно работать над несколькими гипотезами и начинать готовить отчет, не дожидаясь проработки всех деталей решения. Некоторые особенности схемы, например формальное доказательство гипотез, специфичны именно для «экспериментально-математических» проектов, с которыми мы работали и которые описаны в следующем параграфе. Однако в целом эта схема работает.

Замечание для искушенных читателей. Учащиеся КЛШ, как правило, не имели опыта решения математических задач и, кроме того, были загружены другой деятельностью — как учебной (курс физики, факультативы), так и неучебной. Поэтому по-настоящему трудных математических задач ни разу не предлагалось. Темы выбирались так, чтобы работа в режиме основного цикла возникала естественно. Обучение методичной исследовательской работе само по себе рассматривалось как, возможно, главный результат работы (школьники, конечно, вряд ли явно осознавали, что они научились какой-то «методике», для них главным было выполнение проекта и рассказ об этом). Этим проектная работа, проводившаяся в КЛШ, отличается от проектной работы, проводимой в аналогичных условиях с «сильными» школьниками, например, в рамках Турнира городов [Конф1]. В последнем случае учащиеся уже имеют методический опыт, и смысл работы — в решении достаточно трудных математических задач.

1.2. Экспериментальная математика. Все проекты, которые мы проводили в КЛШ, можно отнести к так называемым ***проектам***

по экспериментальной математике (термин Г. Б. Шабата). В этих проектах школьник исследует формально описанную абстрактную (математическую или логическую) ситуацию, говоря точнее, — семейство однотипных ситуаций, зависящих от некоторого целочисленного *ведущего* параметра. Ведущим параметром может быть, например, размер игрового поля; степень уравнения; порядковый номер корня уравнения, для которого нужно найти все решения, и т. п. В проектах по экспериментальной математике (ЭМ-проектах) есть две важные для нас особенности.

Во-первых (*математичность*), школьник имеет дело с *формально и строго* описанной ситуацией. Поэтому он *самостоятельно* может определить, — является ли то, что он придумал, решением поставленной задачи, или нет. Это учит школьника научной (и не только) честности и выгодно отличает ЭМ-проекты от так называемых «креативных» заданий («придумать модель города будущего»), которые, как правило, приводят к безответственному и некритичному прожектерству.

Во-вторых (*экспериментальность*), в простейших случаях (при малых значениях ведущего параметра) ситуация может быть исследована простым перебором вариантов — вручную или с помощью несложной компьютерной программы. Такая заложенная в проект возможность проведения численных экспериментов дает школьнику «методику блуждания в поле исследования». Именно возможность экспериментирования отличает работу по ЭМ-проектам от традиционных математических заданий (докажи теорему, реши уравнение) и даже для наиболее слабых, т. е. в наименьшей степени способных к математическим догадкам учеников делает ее осмысленной и доступной. Отметим, что эта методика (идти от простого к сложному, выделяя в простых случаях черты, существенные для ситуации в целом) — один из основных принципов научного метода исследования. Другая аналогия — важность исследования критических режимов для понимания сути процесса.

1.3. Групповая работа. Работу над проектом ведет ***группа учеников***. Каждая рабочая группа *формируется самими учениками*. У группы имеется консультант-куратор. Он *назначается* с учетом компетентности в данном проекте и знакомства с группой исполнителей. Пожелания школьников по выбору куратора (если таковые возникнут) естественно учитывать.

Оптимальный количественный состав группы — два-три человека. Группы, состоящие из одного человека или более трех человек, не запрещаются. Отметим, что группы из четырех и даже пяти человек образуются достаточно регулярно. При работе над проектом группа, в которой больше трех исполнителей, как правило, распадается на две — либо за счет выделения подпроектов в исходном проекте, либо из-за того, что часть группы перестает работать в полную силу. Поэтому такой «большой» группе нужно давать проект, легко допускающий распараллеливание работ, либо просто давать два проекта.

Равноактивная работа всех членов группы в течение всего времени работы над проектом — вещь достаточно редкая, и куратору не стоит ставить достижение такой равномерности в качестве своей цели. Существенно, чтобы каждый участник группы играл свою роль в работе и не испытывал дискомфорта от этой роли. Такой ролью может быть, например, фиксация полученных промежуточных результатов и дотошное требование все понятно объяснить. Тем не менее, *независимо от роли в ходе работы над проектом, в итоге каждый из исполнителей должен понимать полученные группой результаты и уметь их объяснить куратору или другим слушателям*.

1.4. Как протекает работа над проектом. Роль кураторов. Полный срок работы над проектами в КЛШ составлял 10–14 дней, что включало 7–10 занятий, как правило — по одному занятию в день (1 ч 20 мин, общих перерывов обычно не делалось). При этом оформление результатов работы (набивка текстов отчетов, рисование плакатов) часто проводилось вне рамок учебных занятий.

Это время использовалось примерно так.

- Запуск работы (формирование групп, распределение проектов между группами) — 1 занятие.
- Освоение проекта, первые эксперименты, первые гипотезы — 1–3 занятия.
- Проверка гипотез, их уточнение, новые эксперименты — 1–3 занятия.
- Доказательство окончательной гипотезы — 1–2 занятия (возможно, с технической помощью куратора).
- Оформление результатов — 2–3 дня (не только во время занятий).
- Итоговая сессия — 1–2 занятия.

Бóльшую часть времени школьники работают самостоятельно. Однако роль кураторов при выполнении проектов чрезвычайно важна. Основные ситуации, когда требуется участие куратора, перечислены в § 3. В каждом конкретном случае участие куратора может свестись к одной фразе (или даже взгляду), а может потребовать длительного разговора, выдачи промежуточных и дополнительных заданий и т. п. — в зависимости от уровня подготовки группы и успешности выполнения проекта. Мы, естественно, не можем дать рекомендации на все случаи жизни, но постараемся привести примеры возможных действий куратора в некоторых относительно стандартных ситуациях.

В идеале группа должна *максимально самостоятельно* выполнить *максимально большую часть задания*. Эти цели, очевидно, противоречат друг другу. Выбрать оптимальный для каждого конкретного случая компромисс — предмет искусства куратора и помогающего ему руководителя проектного курса.

§ 2. Запуск проектной работы

2.1. Подготовка проектов. Для работы необходимо подготовить описания проектов в двух видах — для школьников и для кураторов. В описание проекта для школьников входит только постановка задачи и, возможно, некоторые дополнительные сведения. Примеры таких сведений:

— тип проекта (например, «игра»);
— оценка сложности проекта;
— знания (сверх школьной программы), которые понадобятся исполнителям.

В тексте для куратора полезно описать, например:

— что необходимо разъяснить школьникам на этапе понимания ими постановки задачи;
— варианты ожидаемых от школьников решений;
— возможные трудности и развилки по ходу работы над проектом;
— знания, которыми должен владеть куратор.

2.2. Предварительная подготовка школьников. Подготовка к групповой работе в КЛШ проводилась нами в рамках занятий по основному курсу — на этих занятиях ученики тоже работали в группах, за которыми были закреплены кураторы. Начало работы по проектам происходило после двух-трех занятий основного курса. Такой способ подготовки хорош, когда в школе уже существует традиция проектной работы, а школьники и кураторы успели привыкнуть к групповой работе.

В первые годы ведения проектов, когда эта традиция еще не сложилась, мы проводили специальные «разгоночные» занятия. На разгоночном занятии с учениками, которые работают в группах под руководством кураторов, следует разобрать несколько (два — три — четыре) пробных проектов. Группы просто соответствуют тому, как сидят школьники, состав групп на этом этапе не очень важен. Цель — познакомить школьников с групповой работой, помочь им более осмысленно сформировать группы для основной проектной работы.

Пробный проект должен быть рассчитан на быстрое продвижение. В ходе этого продвижения проект может быть сделан лидерами практически полностью (см. задачи 8 и 44). Другой хороший вариант — полностью выполняется упрощенный вариант проекта, а проект в полном объеме затем выбирается заинтересовавшимися как основной проект (см. задачу 54).

В конце разгоночного занятия или занятия по основному курсу, предшествующего раздаче проектов, ученикам нужно сообщить, что со следующего занятия начнется работа над проектами. Вот что они должны усвоить из этого сообщения.

1. Примерно представлять себе, что такое проект.
2. Сколько времени будет отведено на работу над проектами. Как это время разумно распределить между исследовательской и оформительской частями работы.
3. Проект выполняется группой учеников, оптимальный состав группы — два-три человека.
4. У каждой группы будет консультант-куратор.
5. Школьники должны сами разбиться на группы.

2.3. Первое занятие. Распределение проектов. Первое занятие играет большую роль при проектной работе. Группа исполнителей должна выбрать и «присвоить» проект, начать «вживаться» в этот проект и работать над ним, происходит предварительное распределение ролей внутри группы. Поэтому способ формирования групп исполнителей, распределение по группам проектов и кураторов играют большую роль. При этом весьма уместен и плодотворен игровой элемент. За пять лет проведения проектной работы в КЛШ мы пробовали разные формы проведения первого занятия. Общая идея: *проект должен в максимальной степени восприниматься школьником как* ***его собственный*** *выбор*.

После того как группа выбрала проект и ей «выдан» куратор, группе вручается *дневник* — тонкая тетрадь (в 12 или 18 листов). В этой тетради записывается состав группы, название проекта и куратор. В дальнейшем группы должны будут записывать в дневник итог каждого занятия, а также все, что они пожелают. (*Замечание*. Дневник — это голубая мечта, так ни разу и не реализованная.)

В ходе первого занятия может происходить распад «больших» групп на части. Уже после того, как проект выбран, школьник может сообразить, что этот проект ему не подходит, и пожелать присоединиться к другому проекту. На первом занятии (и даже в начале второго) это нормально. Перекройка групп на более поздних стадиях нежелательна.

Аналогично на первых занятиях иногда может произойти перераспределение кураторов между группами. Например, несколько кураторов могут взять под опеку несколько групп и по ходу работы уточнить распределение усилий. Важно, чтобы в каждый момент было известно, кто из взрослых за эту группу отвечает. Руководитель курса страхует ситуацию в целом.

2.4. Первое занятие. Начало работы над проектами. Задача группы на первом занятии — понять постановку задачи и начать работу над проектом. При этом неявно происходит распределение обязанностей между исполнителями.

Задача куратора при этом — убедиться, что группа правильно поняла постановку задачи и владеет необходимыми знаниями. Если каких-то знаний группе не хватает (например, выбран проект 12 — «Симметрические многочлены», а группа не знает, что такое треугольник Паскаля), нужно дать необходимые пояснения. На этой стадии куратор работает в режиме обычного преподавателя — *самостоятельная* работа школьников над проектом начинается только *после* того, как понята постановка задачи.

После этого группу стоит на какое-то время оставить в покое. В хорошем случае группа начнет делать какие-то эксперименты (например, играть друг с другом в исследуемую игру). В худшем случае группа может «зависнуть», не понимая, чем конкретно им стоит заняться. В любом случае за 10–15 минут до конца занятия (если группа сама не обратится за помощью раньше) стоит подойти к группе и выяснить, что происходит.

Цель куратора — чтобы группа поняла следующее:

— что нужно экспериментировать;

— что экспериментировать нужно систематически, начиная с простейших случаев (наименьших значений ведущего параметра);
— что результаты экспериментов нужно представлять аккуратно и в удобной для просмотра форме.

В конце занятия нужно напомнить школьникам о необходимости зафиксировать итоги дня в дневнике и помочь сделать это.

§ 3. Решение задачи

3.1. Организация работы на занятиях. Роль куратора. После того как школьники поняли постановку задачи и получили необходимые дополнительные сведения, они переходят к следующему этапу выполнения проекта — собственно к решению поставленной задачи. За ним последует заключительный этап — подготовка отчета.

На этапе решения задачи школьники работают самостоятельно, соответственно организованы и занятия. В начале занятия школьники занимают свои рабочие места. Руководитель курса проверяет, на месте ли школьники и кураторы, если нужно, — делает объявления (например, о дисциплине использования компьютеров). Кураторам рекомендуется подойти к своим группам в начале занятия и в конце (минут за десять до «звонка») — чтобы быть в курсе происходящего и проследить за ведением дневника. Все остальное время куратор (теоретически) предается медитации. На практике все обстоит несколько иначе.

В прошедших сезонах встречались две модели поведения куратора. В первой модели куратор по возможности находится на расстоянии от школьников. Во второй — куратор почти все время находится рядом со школьниками и непосредственно наблюдает за их работой. Плюсы и минусы обеих моделей понятны и здесь обсуждаться не будут. Я предпочитаю первую модель. Вторая модель больше подходит кураторам, по возрасту не сильно отличающимся от школьников. При этом важно удерживаться от неоправданного вмешательства в работу школьников.

Когда же такое вмешательство бывает оправданным? Один случай — обсуждавшийся выше процесс понимания постановки задачи. Другие случаи связаны

(а) с трудностями, возникающими у школьников;
(б) с желанием предложить новые вопросы, расширяющие исходную постановку задачи;

(в) с тем, что у школьников возникли интересные «ходы», возможно, не имеющие отношения к решению исходно поставленной задачи.

Замечание 1. Если работа сделана, а время осталось, лучше сначала предложить школьникам самим сформулировать новые вопросы. Затем обсудить эти вопросы — и сообща сформулировать новую задачу. В принципе, можно предложить новый проект, никак не связанный с исходным, но на это обычно не хватает времени.

Замечание 2. Если есть красивый ход — можно отказаться от исходной темы и переключиться на углубленное исследование неожиданной находки. Кстати, в реальной жизни это тоже бывает. Отработка таких ситуаций всегда требует от куратора импровизации и мастерства и приносит большое удовольствие всем — и школьникам, и преподавателям.

Замечание 3. Часто разумной реакцией на «зависание» школьников является реакция «неспецифическая» — просто подбадривание и торможение. Ниже это всюду подразумевается, а описываются именно специфические реакции.

3.2. Некоторые типичные трудности.

Трудность 1: начало работы. От группы ожидается начало экспериментальной работы — проведение пробных экспериментов, выработка плана экспериментальной работы (часто явно не формулируемого), постепенная выработка формы записи результатов. Типичные трудности, возникающие у школьников на этом шаге:

— зависание, т. е. длительное обдумывание задачи без осознанных промежуточных целей; непонимание возможности (полезности) эксперимента;
— бессистемность; непонимание того, что нужно начинать с простейших случаев;
— неумение выделить ведущий параметр и, следовательно, понять, что такое «простейшие случаи».

Что может сделать куратор? Во-первых, диагностировать ситуацию. Ниже приводятся типичные признаки, помогающие при диагностике. Конечно, они не абсолютны, и возможны интересные исключения (например, вроде бы зависшие школьники могут находиться в состоянии плодотворного размышления, но не могут или не хотят объяснить это куратору). Дело кураторов эти исключения распознать.

Признаком зависания служит ответ «Думаем» на вопрос «Ну и что вы делаете?». При этом на вопрос «Над чем думаете?» ответа либо не дается, либо следует что-то вроде «Над задачей». В случае зависания стоит предложить: «А давайте начнем с простейших случаев» — и раскрыть эту фразу в соответствии со спецификой разбираемого проекта. Например, «Попробуйте подобрать какие-нибудь корни уравнения» (задача 19, «Диофантово уравнение»); «Кто победит, если в полоске только одна клетка?», «Две клетки?» (задача 44, «Игра в полоску»). Получаемые от школьников ответы нужно фиксировать в удобной и *естественной для школьников* форме — этим задается норма проведения экспериментов.

Школьники (особенно в игровых проектах) часто пытаются начать исследование с достаточно сложных («реальных») случаев. Иногда при этом они схватывают ключевую закономерность или какую-то часть ее, но достаточно часто это заводит в тупик. Определить, является ли работа над трудными случаями (минуя простые) действительно плодотворной, непросто. Если вы (наблюдая со стороны) решили, что пора вмешаться, можно поступить, например, так. Спросить у школьников: «Над чем работаете?» Выяснив, что разбираются довольно трудные случаи, спросить: «А что будет в ситуациях попроще?» Полезно попросить школьников самим описать *самый* простой случай. Это часто вызывает трудности — школьники неосознанно исключают очевидные (но вполне корректные) случаи из анализа. В то же время рассмотрение именно этих случаев бывает плодотворным. Постепенно повышая трудность случаев (в наших проектах это почти всегда означает последовательное увеличение ведущего параметра), нужно дойти со школьниками до уровня, который вызовет у них затруднения. К этому моменту школьники обычно понимают, что значит последовательно увеличивать сложность задачи, и подготовлены к дальнейшей самостоятельной работе. В частности, вместе с куратором они выработали адекватную форму записи результатов экспериментов.

Относительно редко бывает, что проблема школьников в том, что они не могут выделить ведущий параметр. Обычно ведущий параметр выделяется естественно и школьников нужно просто «ткнуть» в этот параметр. Такая ситуация, по существу, аналогична рассмотренной в предыдущем абзаце.

Замечание. Бывают проекты, когда ведущий параметр можно выделить несколькими способами (например задача 53, «Обезьяна и кокосы»). И именно выделение *правильного* ведущего параметра составляет существенную часть догадки — того, ради чего и происходит работа над проектом. Движение же по неправильному параметру значительно затрудняет (делает невозможным) обнаружение. Этот случай рассмотрен ниже.

Трудность 2: выдвижение первой гипотезы. Школьники плодотворно и относительно долго (около одного занятия) проводили эксперименты. Накоплен (относительно) большой экспериментальный материал, и одновременно у школьников накопилась усталость от однотипной работы и ощущение, что новые эксперименты ничего нового не дадут. Настало время перейти к следующему шагу основного цикла — осмыслению экспериментальных данных и выдвижению гипотез. Конечно, осмысление результатов (осознанное и неосознанное) идет все время в течение выполнения экспериментов. Однако наступает время, когда проведение дальнейших экспериментов без выдвижения какой-то обобщающей гипотезы становится неплодотворным. А гипотез — нет.

Признаком такой ситуации служит утрата интереса школьников к проведению экспериментов. Она происходит неравномерно — сначала выпадает слабое звено; более сильные при этом могут продолжать работать. Мы говорим о проблемах *группы как целого*.

Оговоримся сразу: помощь куратора на этом шаге означает, что полученный школьниками результат не может считаться полученным *совершенно* самостоятельно. Искусство куратора состоит в том, что и как подсказать. С одной стороны, подсказка должна быть минимальной по содержанию и максимально стимулирующей для школьников. С другой стороны, она не должна создавать у школьников иллюзию полностью самостоятельного решения. Можно руководствоваться таким правилом (ср. с «зоной ближайшего развития» Л. С. Выготского).

Подсказывать можно то, что школьники (*по крайней мере некоторые*) *уже и сами поняли, но не могут выразить словами.*

Конечно, догадаться, что школьники поняли, а что нет, — вопрос искусства. Обычно о правильности догадки можно судить по реакции школьников на подсказку.

Другая идея — предлагать на выбор несколько «естественных» вариантов действий, где наряду с оптимальным будут и неоптимальные, и даже тупиковые. Можно сознательно предложить «неправильный» вариант.

Помощь куратора в определенный момент работы (особенно если это помощь в основном методическая) не отменяет творческой работы школьников. Просто школьники должны уметь отделить то, что они придумали сами (и чем могут по праву гордиться), от того, что им было объяснено. И это умение — еще один побочный (но важный) результат проектной работы.

Часто выходу из тупика мешает плохое представление результатов экспериментов. Тогда куратор может сказать: «Посмотри, здесь уже все есть!» или «Давай нарисуем все это аккуратнее» (предложить формат таблицы или написать его под диктовку ученика). Можно также подчеркнуть что-то в готовой таблице.

Более тяжелый случай — когда получены не те данные, т. е. вам самому непонятно, как из накопленных данных можно извлечь нужную закономерность. Пример такой ситуации — неверный выбор ведущего параметра (например, в «Обезьяне» ведущий параметр — обратный к тому, который естественно следует из условия). В таких случаях приходится подсказывать — с соблюдением общих правил, приведенных выше.

И наконец, перейдем к случаю, когда данные представлены хорошо. Что может сделать куратор? Бывает полезно провести в вашем присутствии еще один эксперимент, отслеживая внимательно со школьниками, что происходит. Иногда просто повышенное внимание школьника служит катализатором долгожданной догадки. Иногда таким катализатором могут послужить ваши «как бы невзначай» сказанные слова, привлекшие внимание к нужной особенности данных. Бывает полезно указать школьнику на какую-нибудь совершенно очевидную закономерность (и в силу этой очевидности не осознаваемую школьником как закономерность). После этого — спросить, какие еще закономерности видит школьник.

Бывает полезно многое. Но что поможет — неизвестно.

Трудность 3: проверка и уточнение гипотез. После того как гипотеза сформулирована, школьники должны ее проверить. Типичная трудность на этом шаге — неясное понимание того, что мы проверяем *предсказательную силу* гипотезы, т. е. нужно, используя гипотезу, написать, что мы ожидаем получить в еще не проведенных экспериментах, а потом провести эти эксперименты и выяснить — правы мы или нет. При этом иногда мы можем предсказывать не полный результат, а лишь определенные его свойства. Если школьники этого не понимают — им следует все это объяснить «открытым текстом». В процессе формулирования предсказания школьники часто начинают лучше понимать высказанную гипотезу.

Одна из опасностей — неправильная гипотеза может случайно оказаться подтвержденной. В этом случае я бы просто попросил сделать еще один эксперимент (возможно, указав, какой именно).

Экспериментально подтвержденная гипотеза (сама по себе) — важный результат работы. Его стоит отметить (соблюдая при этом чувство меры и не сбивая учеников с темпа). Это служит для школьников хорошим стимулом: нередко, подтвердив одну гипотезу, они выдвигают новую, начинают ее проверять и т. д. Неподтвержденная гипотеза часто тут же уточняется и исправляется школьниками. Важно, что исправленная гипотеза должна быть проверена *новыми* экспериментами. Этот шаг — проверка и уточнение гипотез — видимо, самый интересный и плодотворный для учеников. Подчеркнем: четко (самостоятельно) сформулированная и проверенная гипотеза рассматривается нами как хороший результат работы. При этом школьники должны четко понимать разницу между проверенной на нескольких примерах гипотезой и доказанной гипотезой.

Трудность 4: доказательство гипотез. Трудность заключается в том, что школьники не владеют техникой доказательства (например, методом математической индукции). Действия куратора: объяснить.

Трудность 5: групповая работа. Группа очень редко бывает однородной по способностям участников, их работоспособности и т. п. В какой-то момент кто-то из участников может «выпасть». При этом остальные, «не заметив потери бойца», могут продолжать увлеченно работать. Такую ситуацию полезно отследить — посмотреть внимательнее, что происходит. Может быть, не отвлекая работающих, коротко поговорить с отставшим, спросить — все ли понятно. Часто бывает, что он просто отвлекся и внимания куратора («неспецифическое ободрение») достаточно, чтобы вернуть его к работе. Или он временно отключился от проведения экспериментов и пытается что-то осмыслить. Если действительно что-то непонятно, — можно объяснить, часто достаточно одного-двух слов. Если же действительно один из участников группы отстает, а группа на это не реагирует, то у куратора есть несколько возможных линий поведения. Первая — не предпринимать активных действий, чтобы не замедлять работу группы. При этом можно сказать: «Посмотри пока, что они делают, после занятия поговорим», можно сесть рядом и объяснять, что делают другие. Вторая линия — обратить внимание группы на ситуацию и попросить объяснить отставшему то, что ему непонятно.

Какую из этих линий лучше избрать — зависит от личных особенностей участников группы — их отношения к своим и чужим успехам и неудачам, умения и желания объяснять и т. п. Отметим, что если один из участников группы не может работать на общем уровне в качестве «генератора идей» и «активного экспериментатора», то ему можно предложить полезные для группы роли «критика» или «оформителя результатов».

Часто «выпадение» участника означает, что группе нужно «распараллелиться» и выпавшему участнику нужно какое-то время поработать самостоятельно и в своем темпе. Группа может сама догадаться об этом, если нет — куратор может дать совет. Вообще, разделение участников на самостоятельно работающие подгруппы — типичная и плодотворная ситуация. Обычно вмешательство куратора здесь не требуется — тот, кто что-то придумал, немедленно начинает обсуждать это с коллегами. Я бы советовал кураторам отслеживать для себя процесс распараллеливания. Во-первых, это интересно. Во-вторых, позволит избежать возможного (хотя и весьма маловероятного) распада группы.

3.3. Заключение. Проектные задания объективно труднее задач, обычно предлагаемых на школьных контрольных, и к тому же необычны по форме и содержанию. Тем не менее, «процент успеваемости» при проектной работе, в отличие от обычной школы, близок к 100. Успех в решении задач и является, видимо, одной из главных составляющих удовольствия, получаемого школьником при проектной работе.

Этот успех, по нашему мнению, имеет две причины. Первая — относительно длительная работа школьника над проектом. Вторая — экспериментальная методика работы, названная выше основным циклом. Овладение этой методикой, включая принцип продвижения от простого к сложному, представляется одним из главных результатов проектной работы для школьника (хотя сами школьники в подавляющем большинстве не осознают это как результат). Возможность использования основного цикла заложена в постановках задач, которые предлагались школьникам. Ключевой момент решения — это догадка, «озарение». Основной цикл, как и другие методики, должен облегчать путь к догадке. Но догадка может и не прийти ни к одному из исполнителей проекта. Задача кураторов — помочь появиться догадке, в минимальной степени стесняя самостоятельность школьников.

§ 4. Завершение работы над проектом

4.1. Подготовка отчетов. К завершению работы над проектом — подготовке отчета и выступления — нужно приступать примерно за три дня до итогового занятия. Куратор должен вовремя напомнить школьникам о том, что пора закругляться. Подготовка отчета — в принципе приятная работа (все получилось!). Однако эта работа непривычна для школьников и все же менее приятна, чем решение. Задача куратора — усадить школьников и помочь им составить план. Помощь в написании отчета должна быть минимальной и сводиться к редактированию. Отчет должен в максимальной степени нести черты индивидуальности исполнителей. При желании куратор может написать свой текст — нечто вроде «Хроники работы над проектом».

Работа над отчетом является одновременно подготовкой к выступлению, но не заменяет ее. Необходимо (а) нарисовать плакаты, (б) потренироваться рассказывать. Куратор должен предварительно прослушать рассказ с проверкой того, что *все* члены группы понимают результат и способны его рассказать. При подготовке плакатов школьники обычно дают простор фантазии, часто не имеющей никакого отношения к научному содержанию проектов. Мешать этому никоим образом не нужно!

4.2. Итоговое занятие. Его лучше организовать в виде постерной сессии. В КЛШ итоговое занятие было организовано так только однажды, в остальные годы итоговое занятие проходило в виде фронтальных докладов, которые группы делали поочередно. Опыт четырех лет докладов показал следующее. Каждый докладчик, как правило, оставался доволен своим докладом, и в этом смысле мероприятие было успешным и поучительным. Однако уровень внимания аудитории оставался достаточно низким, обычное неумение школьников слушать лекции усугублялось неопытностью докладчиков. От ведущего требовалось немало усилий, чтобы не дать залу «рассыпаться».

При работе в режиме постерной сессии сохраняются достоинства докладов (школьник делает свои доклады достоянием общественности, причем рассказывает в более комфортной обстановке — небольшой группе *заинтересованных* слушателей). Кроме того, рассказ приходится повторять несколько раз, что позволяет (а) всем участникам группы поработать докладчиками и (б) на ходу осознавать ошибки в изложении и исправлять их. Кураторы могут указывать «своим» на ошибки во время докладов и давать советы.

Если работы в основном групповые, то можно выставить все стенды сразу и пусть авторы сменяются: кто-то рассказывает у своего стенда, кто-то слушает других. Если много индивидуальных работ, можно выставлять стенды в два приема с перерывом.

Об организации конференций школьников[1]

А. Белов

Организация докладов

Вне зависимости от уровня доклада и его типа, к докладу следует предъявлять следующие требования.

1. Доклад должен быть *честным*. Конечно, допустимы как переизложение чужих результатов и компиляция, так и смешанные формы с изложением части своих результатов. Допустима помощь родителей, товарищей, учителей и т. д. Но при этом должно быть четко объявлено, *что сделал сам докладчик* и каков вклад третьих лиц. Докладчик должен также честно изложить историю вопроса и честно упомянуть персоналии. Если в каком-то месте доклада необходимый анализ исчерпывающе не проведен, это следует прямо отметить, гипотезу нельзя выдавать за доказанный факт, преимущества того или иного подхода надо не голословно объявлять, а убедительно мотивировать.

2. Докладчик обязан быть *квалифицированным*, т. е. понимать содержание доклада или хотя бы, как минимум, той части коллективной работы, которую он выполнил (в случае, когда доклад комплексный — включает как математическую, так и программистскую или естественно-научную часть). Он должен владеть материалом доклада настолько, чтобы отвечать на вопросы по существу изложенного. Вообще говоря, нужно знать даже больше, чем сказано в докладе, чтобы быть готовым к смежным вопросам. Дефекты в понимании содержания доклада служат весьма существенным его изъяном.

3. Докладчик должен понимать *мотивировку*, уметь отвечать на вопросы, почему то, чем он занимается, естественно, почему и как он выбрал данную тему.

---

[1] Из статьи: *Белов А. Я.* Научное творчество школьников: где миф и где реальность // Математическое просвещение. Сер. 3. 2014. Вып. 18. С. 231–247.

4. Докладчик должен иметь личную точку зрения. Содержание доклада должно быть ему не безразлично, действительно глубоко интересно. В противном случае доклад лучше не делать.

5. Не следует публично решать квадратные уравнения! Доклад не урок, где автор демонстрирует свои элементарные технические умения с подробным рассказом у доски. Заинтересованным слушателям можно предъявить более подробные материалы.

6. Докладчик прежде всего должен заботиться о качестве изложения, о понимании слушателями материала и только затем о произведенном на них впечатлении.

Типы докладов

Опыт показывает, что доклады учащихся можно условно разбить на несколько категорий. Каждый тип докладов предполагает свои критерии качества.

1. Реферативный доклад. Распространено предубеждение о второсортности такого рода докладов. Однако многие крупные научные результаты возникали просто из попыток привести в порядок уже известный материал. Н. П. Долбилин отмечал, что составление хорошего реферата развивает особые качества, тоже важные для математика. Критерии оценки и требования к такому докладу следующие:

— насколько самостоятельно организован излагаемый материал (а не буквально переписан из книжки); насколько оригинален путь изложения;
— насколько интересна тема.

Удачным примером может служить доклад школьника Саши Буфетова по проблеме Варинга, впоследствии опубликованный в журнале «Фундаментальная и прикладная математика». Сейчас А. И. Буфетов — д. ф.-м. н., профессор НИУ ВШЭ и мехмата МГУ.

2. Тематический набор задач с решениями. Пошаговое решение набора мелких задач часто путают с научным исследованием, и потому такого рода доклады могут выдаваться за научные. Школьники зачастую копируют учителей и авторов учебников. В этом случае критерии оценки должны быть иными.

Следует оценивать оригинальность не только решений, но прежде всего самой подборки задач, объединяющие их идеи. Если в качестве доклада заявлен задачник, то у жюри возникают вопросы: смотрел ли докладчик с позиций автора задачника на другие книги и учебные пособия, какие выбраны темы и почему. Полезно подчеркнуть, что ученик, преподаватель и автор книги по-разному смотрят на одну и ту же книгу: ученика привлекает доступность изложения материала, преподаватель видит методическую реализацию, а автор оценивает, как написана книга.

3. Экспериментальная работа. Обычно она связана с компьютерным моделированием, численным экспериментом и др. В таком докладе оценивается:

— качество постановки эксперимента;
— наличие результатов и их анализ, а также корректность использования статистики (заметим: лучше честно признать, что статистические исследования не проводились, чем продемонстрировать грубое непонимание их сути);
— математическое содержание работы;
— практическая сторона рассмотренной задачи;
— методическая часть (в частности, качество программного интерфейса).

Достоинство работ такого рода в относительной их доступности. Возможны комплексные работы, в которых может присутствовать и естественно-научная часть. Такие работы легче проводить усилиями целой команды.

4. Самостоятельное исследование в области чистой математики. Критерии оценки такой работы — вкус автора, качество постановки задачи, трудность ее решения, новизна полученных результатов. Этот тип работ оценивается наиболее высоко. Важно, чтобы докладчик умел четко объяснять мотивировку и отвечать на смежные вопросы.

Однако полезно иметь в виду следующую возможность манипулирования: учащегося натаскали в некоторой специальной области, указали последовательность утверждений, которые следуют друг из друга относительно несложным образом, и он все это просто воспроизводит. Поэтому следует выяснить, понимает ли докладчик мотивировку.

Оценка докладов

Конференция не олимпиада и не спорт. Ни в коем случае не следует измерять сантиметры и секунды. Тем не менее важно иметь в виду следующую качественную градуировку.

— Доклад, возможно, полезный докладчику и его руководителю. Выдается диплом участника.
— Доклад, полезный слушателям. Выдается диплом лауреата.
— Доклад, заслуживающий публикации в научном или научно-популярном журнале. Выдается условно первая (иногда вторая в зависимости от уровня) премия. Но это только гарнир к основной награде — публикации.
— Получен красивый яркий результат. Выдается первая премия (если таких работ несколько, то и первых премий несколько, между собой они не сравниваются). Наградой является помощь при публикации.

Темы исследовательских задач по математике, предлагавшиеся в Летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал-2012»[1]

Несложные задачи

Плоскости двух параметров для линейной функции

(*А. И. Сгибнев + Д. А. Калинов*)

Краткое описание. На координатной плоскости $(x; y)$ задана прямая $y = kx + b$. Рассмотрим плоскость $(k; b)$. На ней нашей прямой будет соответствовать одна точка. Интересно, во что будут переходить пучки прямых, параллельные прямые и т. д. Также можно рассмотреть обратную задачу, т. е. из какого множества прямых на $(x; y)$ могла образоваться заданная картинка на $(k; b)$.

Поиск чисел с заданным количеством делителей

(*А. И. Сгибнев*)

Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, — это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа N опишите все натуральные числа, имеющие ровно N делителей.

Задачи посложнее

Плоскость двух параметров для квадратного трехчлена

(*Д. Э. Шноль + Д. А. Калинов*)

Возьмем приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, на плоскости параметров $(p; q)$ ему соответствует точка. Интересно

---

[1] Постеры с результатами работы см. `http://www.sch-int.ru/summer/index.php/foto2012`.

найти множества таких точек на $(p; q)$, что квадратные трехчлены, которые им соответствуют, обладают одинаковыми свойствами (имеют корни, корни одного знака и т. д.).Также можно рассмотреть и другие плоскости, например $(x_1; x_2)$.

ГМТ про площади

(*А. И. Сгибнев + Г. В. Николаев*)

В треугольнике есть такая точка M, что площади треугольников ABM, BCM и ACM равны. Что это за точка? А есть ли еще на плоскости точки, обладающие таким свойством? В каких четырехугольниках и других фигурах существует аналогичная точка?

Шаблон треугольника

(*Д. Э. Шноль + Г. В. Николаев*)

Нарисован некий неравнобедренный треугольник. Из картона вырезан другой такой же треугольник. Что можно построить с помощью этого треугольника-шаблона путем наложений на исходный (биссектрисы, медианы и т. д.)?

Периоды

(*А. И. Сгибнев*)

Для числа $1/7$ разложение в десятичную дробь периодично и состоит из шести цифр, а для $2/7, 3/7, \ldots, 6/7$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для чисел $1/13$ и $2/13$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$ для $p = 17, 19, 41, 47$ и других простых чисел и разберитесь, какие бывают циклы.

Восстановление многоугольника по серединам сторон

(*Д. Э. Шноль*)

На доске нарисовали треугольник, отметили середины сторон, потом треугольник стерли. Как восстановить треугольник? Сколькими способами? Та же задача для четырехугольника и пятиугольника.

Разные определения чисел Каталана

(*А. И. Сгибнев + Г. В. Николаев*)

Существует замечательная последовательность чисел, называемых числами Каталана. Существует несколько сотен определений и способов получения этих чисел. Предлагается рассмотреть некоторые из них и доказать их эквивалентность.

Нелегкие задачи

Крылатые квадраты

(*Д. Э. Шноль + И. Д. Левин*)

Какие простые числа представимы в виде суммы двух квадратов? Эта короткая по формулировке задача Ферма — Эйлера легла в основу теории чисел.

Треугольники в разных системах координат

(*А. И. Сгибнев*)

Рассмотрим множество треугольников, для которых радиус описанной окружности $R = 1$. Пусть r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника.

Изобразите множество всех таких треугольников на плоскости $(r; p)$.

Изобразите на нем различные семейства треугольников (равнобедренные, прямоугольные и т. д.).

Диофантово уравнение А. А. Маркова

(*Д. Э. Шноль + Г. В. Николаев*)

Решите уравнение в целых числах $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Это уравнение возникло в знаменитых работах А. А. Маркова по теории чисел, причем он смог решить его, пользуясь средствами только школьной математики. Несколько его решений очевидны, например $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$ или $(1; 2; 5)$.

Предлагается изучить решения этого уравнения, найти алгоритм нахождения новых решений из уже имеющихся и проверить его на действенность и полноту. В дальнейшем можно попробовать решить это уравнение в более общем виде.

Знания программирования на базовом уровне приветствуются.

Памятка для докладчиков исследовательских работ[1]

Хорошо изложить свою работу — это отдельная большая задача. Мы собрали несколько советов о том, как избежать типичных ошибок.

Как готовить доклад

1. Старайтесь донести до слушателей идеи, а не подробности доказательств. Подробности обычно интересны и доступны лишь специалистам. Не пожалейте 3–5 минут на подробное изложение простого примера, а затем кратко скажите, как его удалось обобщить («я доказал, что то́ же будет и для всех простых n»).

2. Уберите из примеров все лишнее и случайное, сосредоточьтесь на главном. Чертежи делайте с минимумом отвлекающих деталей, таблицу — только с необходимыми данными.

3. Собравшись доказать какое-то идейное утверждение, потрудитесь сначала ясно и корректно его сформулировать («если (1) можно построить правильный n-угольник и правильный k-угольник, (2) n и k взаимно просты, то можно построить и правильный nk-угольник»). Следите за обозначениями! Если n у вас вначале обозначало число сторон, то к концу оно не должно превратиться в длину отрезка!

Как делать доклад

1. Вы рассказываете свою работу людям, поэтому обращаться надо к ним, а не к стене или экрану. Желательно следить за их реакцией и в случае непонимания остановиться и повторить подробнее. Стоять надо так, чтобы не загораживать от слушателей доску и экран. Помните, что кроме голоса у вас есть еще много средств общения с аудиторией. Например, стоит показывать указкой на ту формулу, деталь чертежа или строчку таблицы, о которой вы сейчас говорите.

[1] Памятки по подготовке доклада и постера сделаны в школе-интернате «Интеллектуал».

2. Не читайте вслух формулы — пишите их! Не пишите длинные фразы — произносите их!

3. Слушателям будет интересно, если интересно докладчику.

Как готовить постер

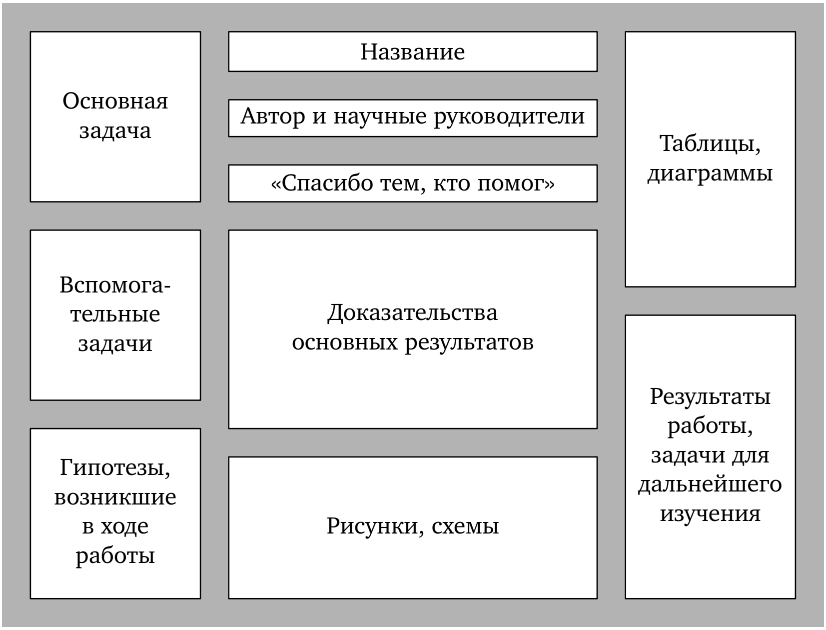
Что это? Одна из форм представления результатов своего проекта, исследования в кратком и ярком виде для ознакомления участников различных конференций, форумов и научных семинаров.

Как делать? Постер выполняется на ватмане, на котором должны быть отражены основные компоненты представленных ниже схем. Именно здесь вы можете проявить свою творческую активность в полной мере — сделать работу наиболее яркой и привлекательной.

Каким должен быть текст постера:

- крупным;
- доступным и кратким;
- красочным, используйте картинки, схемы, диаграммы

Пример расположения материалов на постере:



Источники

Семинары

1. Семинар учебно-исследовательских работ школьников по математике при Московском центре непрерывного математического образования.

   «*Происходит два вида заседаний*: а) ***семинары для учителей*** *с обзорами тем, обсуждением задач и литературы*; б) ***слушания работ школьников*** 5–11 *классов. Приглашаются учителя, которые хотели бы решать со школьниками исследовательские задачи, но еще не знают, как это делать*! *От работ школьников НЕ требуется новизна результатов. Требуется самостоятельное решение сложной* (*для школьника*) *исследовательской задачи*» (`http://www.mccme.ru/nir/uir/`).
2. Проблемный семинар — научно-исследовательский математический семинар для старшеклассников при Белорусском государственном университете.

   «Основная цель семинара — установление научного сотрудничества, поиск путей для взаимовыгодной учебной, исследовательской и научной деятельности между учеными, преподавателями, учителями школ с одной стороны и старшеклассниками — с другой» (`http://www.uni.bsu.by/arrangements/psem/index.html`).

Периодические издания

1. Журнал «Квант». Задачи исследовательского характера можно найти в статьях по математике и в Задачнике «Кванта». Большинство номеров «Кванта» доступно в Интернете (`http://kvant.mirror1.mccme.ru/`).
2. Журнал «Потенциал» (`http://potential.org.ru/`). В рубрике «Научная деятельность» регулярно публикуются статьи с введениями в тему, постановками задач, работами учеников.

3. «Сайт Making Mathematics» (на английском языке) (http://www2.edc.org/makingmath/).
Двенадцать тем для исследования для школьников с очень хорошим методическим сопровождением. *«In Making Mathematics* (1999–2002)*, middle and high school students of all skill levels explored open-ended mathematics projects, often with the help of their teachers and parents… To develop these mathematical skills, we connected students, teachers, and parents with a professional mathematician who provided advice, encouragement, and resources via electronic mail».*

Конференции

1. Летняя конференция Турнира Городов (http://olympiads.mccme.ru/lktg/).
«Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы».
2. Московская математическая конференция школьников (http://www.mccme.ru/mmks/).
«Цель конференции — выявление и поддержка школьников, имеющих способности и интерес к математике, приобщение их к научной работе… Математики представляют различные задачи — как новые („научно-исследовательские“), так и малоизвестные, не претендующие на научную новизну („учебно-исследовательские“)».
На сайтах обеих конференций выложены задачи для исследования, собранные за годы работы конференций.
3. Секция математики Всероссийских чтений им. В. И. Вернадского (http://vernadsky.info).
4. Конференция Intel-Династия-Авангард (http://conference-avangard.ru/).

Книги

1. *Арнольд В. И.* Задачи для детей от 5 до 15 лет. М.: МЦНМО, 2004. *«Я глубоко убежден, что эта культура „мышления“ более всего воспитывается ранним самостоятельным размышлением о простых, но не легких вопросах, вроде приведенных ниже».*

Несмотря на «детское» название, брошюра весьма содержательна и математически, и методически. В частности, задачи № 33, 35, 41, 45, 46, 47–49, 55 дают хорошие темы для исследования (некоторые из них использованы в этой книге).

2. *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1986. *«За разрозненными фактами мы старались увидеть контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики»*. В книге много интересных и содержательных задач и их обсуждения, обобщения, связи с другими задачами.
3. Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы / Сост. Б. Р. Френкин. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2009. *«…подробно рассмотрен ряд задач, предложенных на Летних конференциях международного Турнира городов, где одаренные школьники из разных стран приобщаются к исследовательской работе в области математики. Приведены решения задач, их обобщения, освещены смежные вопросы. Тематика издания связана с различными областями современной математики»*.
4. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. М: МЦНМО, 2004. *«Упор в изложении сделан не на общих теориях, а на ярких примерах»*. Книга содержит много красивых и доступных школьникам задач перечислительной комбинаторики (числа Каталана, числа Дика, диаграммы Юнга и т. д.).
5. *Звонкин А. К.* Малыши и математика. М.: МЦНМО-МИОО, 2006. Прекрасная книга об опыте математического кружка для дошкольников, *«учит не математике, а образу жизни»*.
6. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1976; М.: УРСС, 2009. *«Обучение математике должно предусматривать ознакомление учащихся (разумеется, в допустимых пределах) со всеми сторонами математической деятельности. Особенно важно, чтобы оно открывало дорогу к самостоятельной творческой работе…»* Формулируются общие подходы к решению задач, обсуждается, какие задачи хороши для исследования, приводится множество примеров.
7. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Изд-во Иностр. Лит, 1957; М.: УРСС, 2009. *«Будем учиться доказывать, но будем учиться также догадываться»*. На большом числе примеров демонстрируются основные приемы догадки — индукция

и аналогия. Обе книги Пойа для нашей темы — абсолютная классика.

8. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского и др. М.: МЦНМО, 2009. *«...основу математического образования сильного ученика должно составлять решение и обсуждение задач, в процессе работы над которыми он знакомится с важными математическими идеями и теориями»*. Многие задачи сборника можно превратить в хорошие темы для исследования.
9. *Генкин С. А. и др.* Ленинградские математические кружки. Киров: АСА. 1994. Замечательная книга, содержащая кроме прочего подборку исследовательских задач (с. 221–223), *«суть которых состоит в последовательном решении цепочки нетрудных лемм, складывающихся в доказательство довольно трудной теоремы»*. См. также с. 236–239, где описан математический аукцион — соревнование по задачам, допускающим постепенное достижение цели.
10. *Шноль Д. Э., Сгибнев А. И., Нетрусова Н. М.* Система открытых задач по геометрии. 7 класс. 8 класс. М.: Чистые пруды, 2009 (`http://sch-int.ru/intel/index.php/kafmatem`). Практически весь курс геометрии 7–8 класса изложен в виде открытых задач, допускающих в обучении элементы исследования.
11. *Иванов С. Г., Рыжик В. И.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: Просвещение, 2013. В книге собрана 41 геометрическая задача с жизненными формулировками. К каждой задаче даются геометрическая формулировка, наводящие соображения, компьютерный эксперимент, гипотеза, рациональное рассуждение и только потом решение. Благодаря этому можно показать школьнику сам процесс поиска решения, чего почти нет в математической литературе. К каждой задаче есть «расширения», так что можно продолжить работу над задачей самостоятельно. *«Мы считаем, что компьютер для математика играет примерно такую же роль, как прибор для физика»*.
12. *Хага К.* Оригамика. Геометрические опыты с бумагой. М.: МЦНМО, 2012. Эта книга, как и предыдущая, также развивает подход к геометрии как к экспериментальной науке, только здесь эксперименты ведутся не с помощью компьютера, а с помощью простого листа бумаги, который можно складывать и перегибать.

Автор приводит десять сюжетов, в которых сначала надо сложить определенную конструкцию и пронаблюдать ее свойства, а затем доказать их. Сюжеты хорошо подходят как для самостоятельного исследования, так и для совместного изучения на кружке. А работа руками с листом бумаги хорошо переключит внимание и позволит отдохнуть. *«Дать ученику готовое доказательство означает погасить весь интерес, как если сказать, кто является убийцей, до того как человек прочел детектив»*. Получился хороший детектив.

13. *Куланин Е. Д., Шихова Н. А.* Исследовательские задания по геометрии. 8–10 классы. М.: Илекса, 2013. Подборка фактов из геометрии треугольника подана в виде практических работ, которые позволяют пронаблюдать свойства треугольников и готовят к доказательствам. *«В этой книжке мы изучаем очень простую геометрическую фигуру — четыре точки... Оказывается, даже такая простая конструкция таит в себе множество интересных закономерностей. Открытие этих закономерностей — увлекательное приключение, похожее на работу ученого-экспериментатора»*.

Статьи

Избранные методические статьи

1. *Сгибнев А. И.* Как задавать вопросы? // Математика. 2007. № 12. С. 30–41 (`http://www.mccme.ru/nir/uir/vopr.pdf`). Приведен ряд способов открыто формулировать задачи.
2. *Сгибнев А. И.* Экспериментальная математика // Математика. 2007. № 3. С. 2–8 (`http://www.mccme.ru/nir/uir/exp.pdf`). Обсуждается роль эксперимента в математике и на уроке математики, приведено много задач индуктивного типа.
3. *Ройтберг М. А.* Игра в полоску [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 37–46 (`http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf`). На примере несложной задачи на изобретение алгоритма высказываются важные соображения о процессе решения исследовательских задач вообще.
4. *Скопенков А. Б.* Размышления об исследовательских задачах для школьников // Математическое просвещение. 2008. № 12. С. 23–32 (`http://www.mccme.ru/circles/oim/issl.pdf`). Изложены мысли о *научно-исследовательской* работе школьников:

подбор задачи, требования к работе, подготовка доклада, выбор конференции, примеры работ.

5. *Сгибнев А. И.* Что такое исследовательская работа школьника по математике? (http://www.mccme.ru/nir/uir/vern.pdf). Дается описание, примеры хороших исследовательских работ, предостережения против типичных ошибок.

Избранные статьи, содержащие темы и задачи для исследования

6. *Шабат Г. Б., Сгибнев А. И.* Простые делители оберквадратов [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 30–36 (http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1-view.pdf).
7. *Шабат Г. Б., Сгибнев А. И.* Формула Эйлера и теорема Понселе [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 2. С. 22–27 (http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-2-view.pdf).
8. *Сгибнев А. И.* Исчисление змей для начинающих [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 3. С. 63–67 (http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-3-view.pdf).
9. *Сгибнев А. И.* Как решать кубические уравнения, если ты не матшкольник? [Электронный ресурс] // Полином. 2010. № 1. С. 23–32 (http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2010-1-view.pdf).
10. *Сгибнев А. И.* Отображения параметрических плоскостей треугольников // Математика. 2011. № 11 (http://www.mccme.ru/mmks/dec10/sgibnev_parameters.pdf).
11. *Шабат Г., Сгибнев А.* Склейки многоугольников // Квант. 2011. № 3. С. 17–22 (http://www.mccme.ru/nir/uir/sklejki-last.pdf).
12. *Сгибнев А. И.* Задача о кубиках, или Кости Зихермана // Потенциал. 2012. № 11. С. 11–18.
13. *Арнольд В.* Меандры // Квант. 1991. № 3. С. 11–14 (http://kvant.mccme.ru/1991/03/meandry.htm).

Кроме того, во всех номерах журнала «Полином» (http://www.mathedu.ru/e-journal/) есть отчеты о семинаре учебно-исследовательских работ [С1] с постановками задач и примерами работ.

Алексей Иванович Сгибнев

Исследовательские задачи для начинающих

Подписано в печать 28.05.2015 г. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Объем 8,5 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №   .

Отпечатано в «Академиздатцентр „Наука“ РАН»,
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ» — «Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: (495) 554–21–86, (495) 554–25–97, (495) 974–69–76.