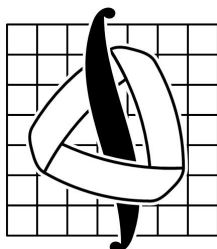




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

---



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

Авксентьев Евгений Александрович

**ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И ТЕОРЕМЫ О ЗАМЫКАНИИ  
ТИПА ПОНСЕЛЕ**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор В. Ю. Протасов

Москва – 2015

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Инвариантные меры для классических теорем о замыкании</b> . . . . .	28
1.1. Введение . . . . .	28
1.2. Когда $n + 2$ сферы в $\mathbb{R}^n$ имеют общую касательную сферу? . . . . .	35
1.3. Многомерные циклиды Дюпена . . . . .	43
1.4. Инвариантная мера для многомерной теоремы Эмха . . . . .	49
1.4.1. Инвариантная мера для классической теоремы Эмха . . . . .	54
1.4.2. Инвариантная мера для теоремы Понселе . . . . .	55
1.4.3. Инвариантная мера для теоремы Штейнера . . . . .	56
1.4.4. Инвариантная мера для теоремы о зигзаге . . . . .	56
1.5. Обобщение принципа Эмха на циклиды Дарбу . . . . .	58
1.5.1. Теорема Эмха для циклик . . . . .	60
1.6. Обобщения теоремы Эмха на пучки окружностей . . . . .	61
1.7. Доказательство многомерной теоремы Эмха с помощью инвариантной меры . . . . .	65
1.8. Связь теоремы Понселе для коник с теоремой Эмха . . . . .	69
<b>Глава 2. Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе</b> . . . . .	71
2.1. Введение . . . . .	71
2.2. Универсальная мера пучка коник . . . . .	76
2.3. Геометрические свойства $\mathcal{F}$ -универсальной меры . . . . .	82
2.4. Выравнивающее отображение и доказательство большой теоремы Понселе . . . . .	89
2.4.1. Случай вырожденной коники . . . . .	94
2.5. Классификация инвариантных мер на кониках . . . . .	97
2.6. Связь большой теоремы Понселе для пучков коник с большой теоремой Эмха . . . . .	99
2.7. Большие теоремы Понселе и Эмха в плоскости Лобачевского . . . . .	105
<b>Глава 3. Некоммутативные теоремы о замыкании</b> . . . . .	107
3.1. Проективные инволюции на конике . . . . .	108
3.2. Некоммутативный аналог большой теоремы Понселе . . . . .	112
3.2.1. Усиленная теорема Понселе на абсолюте плоскости Лобачевского . . . . .	113
3.3. Проективные преобразования, сохраняющие конику, и их связь с универсальной мерой . . . . .	114

3.4.	Шкатулки с замкнутыми ожерельями . . . . .	116
3.5.	Автоморфизмы Мёбиуса и отображение Понселе в модели Пуанкаре . . . . .	117
3.6.	Некоммутативный аналог большой теоремы Эмха . . . . .	120
3.7.	Элементарное доказательство большой теоремы Эмха . . . . .	121
3.8.	Теорема о замыкании с подвижной «орбитой» . . . . .	123
<b>Глава 4.</b>	<b>Аналитические условия замыкания траекторий . . . . .</b>	<b>130</b>
4.1.	Введение . . . . .	130
4.2.	Инвариантная мера и условия замыкания траекторий Понселе . . . . .	132
4.3.	Метрические свойства ломаных Понселе . . . . .	139
4.4.	Комбинаторное доказательство теоремы Понселе для коник . . . . .	148
<b>Заключение</b>	. . . . .	<b>150</b>
<b>Список литературы</b>	. . . . .	<b>151</b>
<b>Публикации автора по теме диссертации</b>	. . . . .	<b>157</b>

# Введение

*Одной из важнейших и в то же время  
красивейших теорем классической геометрии  
является теорема Понселе.*

Ф.Гриффитс, Дж.Харрис (1977).

Теорема, открытая Жаном-Виктором Понселе в 1814 г. и опубликованная им в 1822 г. [1], представляет собой альтернативу, согласно которой вписано-описанная ломаная двух коник<sup>1</sup> либо замыкается для любой, либо не замыкается ни для какой начальной точки, причем в случае замыкания число звеньев всегда одинаковое. Иными словами, если для двух коник  $\alpha$  и  $\delta$  существует  $n$ -угольник  $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ , вписанный в  $\delta$  и описанный около  $\alpha$  (т.е. прямые, содержащие его стороны, касаются  $\alpha$ ), то таких  $n$ -угольников существует бесконечно много, и его первая вершина  $\mathbf{x}_1$  может быть выбрана на  $\delta$  произвольно.

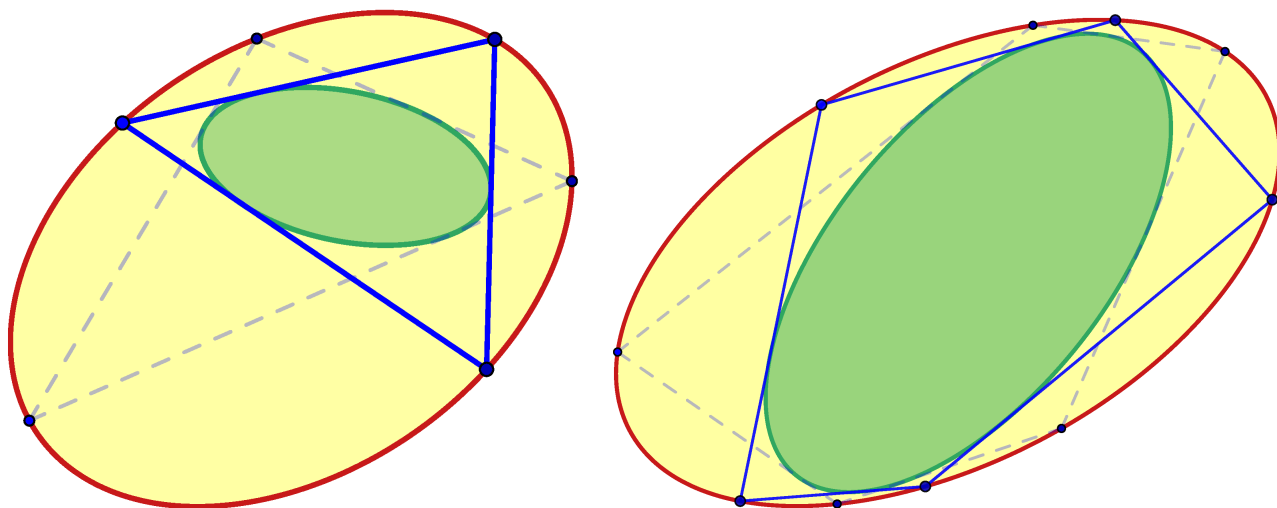


Рис. 1. Теорема Понселе для  $n = 3$  и  $n = 5$ .

За два века своего существования теорема Понселе во множестве работ нашла применение в самых разных областях математики. Были обнаруже-

---

<sup>1</sup> коника – это плоская квадратика, т.е. кривая второго порядка



ны ее связи с задачами теории алгебраических кривых [12–17], теории бильярдов [10, 31–47], дифференциальных уравнений [100–104], спектральной теории линейных операторов [79–85], квантовой механики [2, Гл.10]. Получены ее многомерные обобщения [8–11]. Различные варианты и обобщения теоремы Понселе в течение двух столетий привлекают внимание математиков, среди которых есть выдающиеся: как классические (К. Якоби [50], Ж. Бертран [51, 52], А. Кэли [25–30], Г. Дарбу [20], А. Лебег [14], И. Шёнберг [53], О. Боттема [55]), так и современные (Ф. Гриффитс [11–13], Дж. Харрис [11, 12], А. Хованский, В. Козлов [57], Н. Хитчин [100]). По теореме Понселе и ее приложениям к настоящему времени написаны две монографии [2, 3], посвященные им.

В дальнейшем появилось множество других теорем о замыкании, формулировки которых схожи с теоремой Понселе. Поэтому их называют теоремами о замыкании типа Понселе. К наиболее известным из них относятся теорема о зигзаге, поризм Штейнера, теорема Эмха. В недавней работе [8] В. Ю. Протасова от 2011 г. был сформулирован общий принцип замыкания для сфер в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и получено многомерное обобщение теоремы Эмха, из которого как частные случаи следуют четыре классические теоремы о замыкании.

Есть несколько методов доказательства теоремы Понселе. Все они нетривиальны и основаны на различных идеях [1–7]. Подход, использующий некоторый инвариант, восходит к работе Якоби 1828 года [50], в которой он дал изящное доказательство теоремы Понселе с помощью эллиптических интегралов. Рассуждение Якоби было усовершенствовано Бертраном в 1870 г. Заметим, что Бертран опубликовал свое доказательство дважды: в 1870 г. [51] а затем еще раз в заметке по эллиптическим функциям в 1876 г. [52]. Спустя более чем столетие, в 1983 году, один из основателей теории приближений и теории сплайнов Шёнберг изложил эти результаты в упрощенном виде [53].

В 1994 г. Кинг в работе [64] интерпретировал конструкцию Якоби-Бертрана в терминах инвариантной меры на конике, что позволило изложить доказательство Якоби-Бертрана на элементарном уровне. Это доказательство стало классическим и вошло во многие книги и задачки по геометрии (см., например, [68]).

Изложим кратко идею доказательства. Для простоты рассмотрим случай, когда окружность  $\alpha$  лежит внутри окружности  $\delta$ .

Предположим, что есть мера  $m(\cdot)$  на  $\delta$ , такая что все ориентированные дуги  $\overset{\curvearrowright}{xy} \subset \delta$ , хорды которых касаются окружности  $\alpha$ , имеют одно и то же значение  $m(\overset{\curvearrowright}{xy}) = \tilde{m}$  (рис. 2).

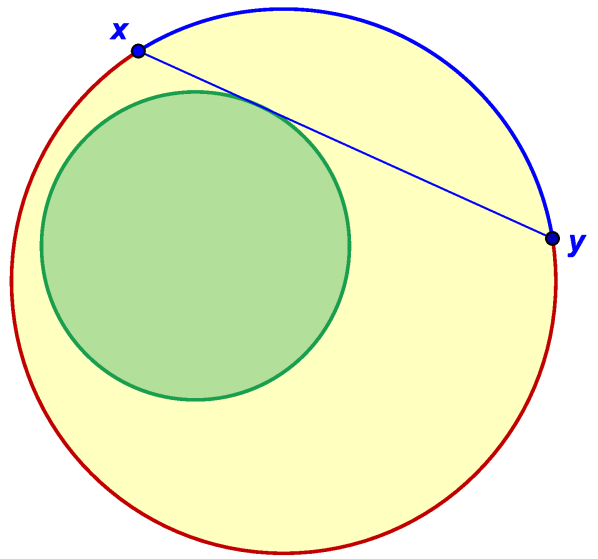


Рис. 2.  $m(\overset{\curvearrowright}{xy}) = \text{const.}$

Тогда  $n$ -угольник Понселе существует в том и только в том случае, если  $n\tilde{m}$  является целым кратным  $m(\delta)$ . Поскольку это свойство не зависит от положения первой вершины многоугольника, отсюда следует теорема

Понселе для окружностей. Мера на окружности  $\delta$  называется *инвариантной*, если ее плотность  $\rho = m'$  удовлетворяет равенству

$$\rho(x)|dx| = \rho(y)|dy|, \quad (1)$$

где  $dx, dy$  – это ориентированные длины малых дуг при шевелении хорды  $xy$ , касающейся  $\alpha$ . Если функция  $\rho : \delta \rightarrow \mathbb{R}_+$  обладает этим свойством, то мера

$$m(\overset{\curvearrowright}{xy}) = \int_x^y \rho(s) ds$$

является инвариантной (интегрирование по дуге  $\overset{\curvearrowright}{xy}$ ).

Для окружностей  $\alpha$  и  $\delta$  такая мера задается простой формулой

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|f_\alpha(\mathbf{x})|}},$$

где  $f_\alpha(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_\alpha|^2 - r_\alpha^2$  — это степень относительно окружности  $\alpha$  радиуса  $r_\alpha$  и центром в точке  $\mathbf{c}_\alpha \in \mathbb{R}^2$ . Эту меру будем называть *мерой Якоби-Бертрана*. Более того, как это было замечено Хованским (см. [107] для обзора), если мы рассмотрим произвольную квадратичную функцию  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , то та же формула также определяет инвариантную меру для окружности  $\delta$  и коники  $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$ , что доказывает теорему Понселе для них в случае, когда  $\alpha$  лежит внутри  $\delta$ . Однако, при попытке провести рассуждения с конструкцией Кинга в других случаях взаимного расположения коник, возникают трудности, связанные с нарушением порядка обхода вершин ломаных Понселе. В статье [65] с помощью другой конструкции, использующей гомеодную плотность, эти неприятности удастся устранить. Тем не менее, имеет смысл получить явную формулу инвариантной меры для двух произвольных коник. Это мы сделаем в Главе 2, в которой будут классифицированы все инвариантные меры на кониках. Кроме того, мы докажем свойство универсальности меры, согласно которому она инвариантна относительно отображений Понселе всего пучка, проходящего через две данные коники. Мы также распространим конструкцию Кинга на большую теорему Понселе, которая является обобщением теоремы Понселе на пучки коник:

**Теорема 1** (Большая теорема Понселе) *Пусть коники  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$  принадлежат одному пучку  $\mathcal{F}$ . В конику  $\alpha$  вписывается ломанная  $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$  так, что ее  $i$ -ая сторона  $v_i v_{i+1}$  касается коники  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда при обходе точкой  $v_1$  коники  $\alpha$  прямая  $v_1 v_{n+1}$  касается одной коники пучка  $\mathcal{F}$ .*

В 1974 году Блэк, Хоулэнд и Хоулэнд [54] построили инвариантную меру для другой хорошо известной теоремы о замыкании:

*Теорема о зигзаге.* Если для данных окружностей  $\alpha, \delta$  и числа  $l > 0$ , существует  $2n$ -угольник, все стороны которого равны  $l$ , а вершины по очереди лежат на окружностях  $\delta$  и  $\alpha$ , то таких  $2n$ -угольников существует бесконечно много, и его первой вершиной может быть произвольная точка окружности  $\delta$ , удаленная от окружности  $\alpha$  на расстояние меньше  $l$ .

Таким образом, если кузнечик прыгает с одной окружности на другую, замыкая свою «прогулку» после  $2n$  прыжков, то его прогулка из всякой точки, из которой он может сделать первый прыжок, замыкается через  $2n$  шагов. Эта теорема была установлена Эмхом в 1901 году в [5], затем дважды независимо переоткрыта: Боттемой в 1965 году [5] и Блэком-Хоулэндом в 1974 году [54]. Она также справедлива и для двух окружностей в пространстве, но мы рассмотрим только плоский случай.

Сформулируем также еще одну популярную теорему о замыкании – *теорему Штейнера*. Пусть даны две окружности  $\alpha_0, \alpha_1$ , одна внутри другой. Окружности  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  вписаны в кольцо между  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  последовательно касаются друг друга ( $\omega_k$  и  $\omega_{k+2}$  различны и обе касаются  $\omega_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). Если эта цепочка замыкается через  $n$  шагов, т.е.,  $\omega_{n+1} = \omega_1$ , то для любой другой начальной окружности  $\omega_1$  такая цепочка тоже замыкается через  $n$  шагов.

Мы упомянули три наиболее известные теоремы о замыкании: теорему Понселе, теорему о зигзаге и теорему Штейнера. Оказывается, что все они являются, по сути, частными случаями теоремы Эмха о цепочках окружностей [18]. Чтобы сформулировать ее, нам понадобятся некоторые понятия. Касание двух окружностей называется внутренним, если одна из окружностей лежит внутри другой. Пусть  $\alpha_0, \alpha_1$  – окружности на плоскости. Тогда для произвольной окружности  $\omega$ , касающейся обеих окружностей  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , *индекс касания* равен 0, если из двух касаний –  $\omega$  с  $\alpha_0$  и  $\omega$  с  $\alpha_1$  – число внутренних четно. Если же только одно касание внутреннее, то индекс равен 1. Для  $i = 0, 1$ , через  $\mathcal{M}_i$  обозначим семейство окружностей, касающихся  $\alpha_0, \alpha_1$

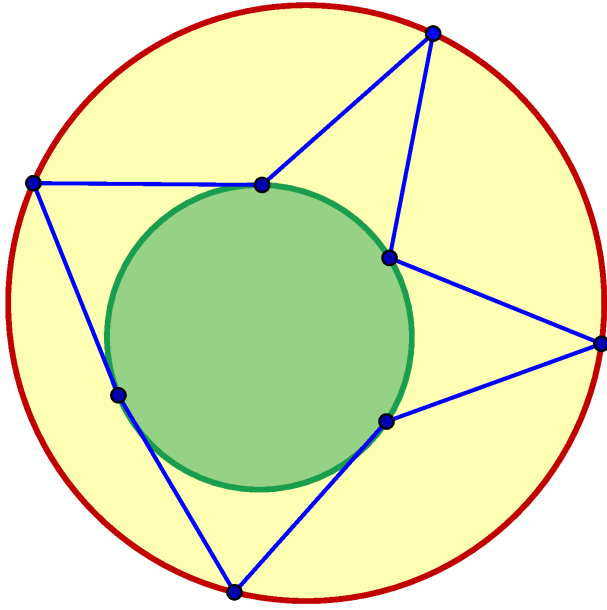


Рис. 3. Теорема о зигзаге  $n = 4$ .

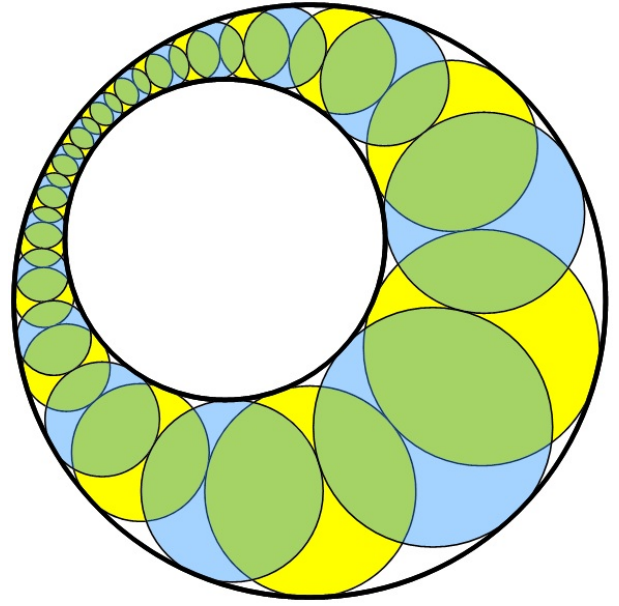


Рис. 4. Теорема Штейнера  $n = 16$ .

с индексом  $i$ .

Пусть  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\delta$  – три произвольные окружности на плоскости. Выберем некоторое  $i \in \{0, 1\}$  и рассмотрим семейство  $\mathcal{M}_i$  окружностей, касающихся  $\alpha_0, \alpha_1$  с индексом  $i$ . Мы предполагаем, что  $\delta \notin \mathcal{M}_i$ . Возьмем произвольную окружность  $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$ , которая пересекает  $\delta$  в двух точках  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ . Семейство  $\mathcal{M}_i$  содержит две окружности, проходящие через  $\mathbf{x}_2$ : одна из них – это  $\omega_1$ , а другую обозначим через  $\omega_2$ . Окружности  $\omega_2$  и  $\delta$  имеют две точки пересечения: одна из них –  $\mathbf{x}_2$ , а другую обозначим через  $\mathbf{x}_3$ , и т. д. Так получаем цепочку Эмха окружностей  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Каждая окружность  $\omega_k$  касается  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  с индексом  $i$  и пересекает окружность  $\delta$  в точках  $\mathbf{x}_k$  и  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Эта последовательность замыкается через  $n$  шагов, если  $\omega_{n+1} = \omega_1$ .

**Теорема Эмха [18].** Пусть  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\delta$  – произвольные окружности,  $i \in \{0, 1\}$ , и  $\delta \notin \mathcal{M}_i$ . Если для некоторой начальной окружности  $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$  цепочка Эмха замыкается через  $n$  шагов, то она будет замыкаться для произвольной  $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$  и тоже через  $n$  шагов.

Эта теорема сформулирована А. Эмхом в 1901 году [18], но приведенное им доказательство подходит только для случая непересекающихся окружностей  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Она была долгое время забыта. Лишь в 1996 году Барт и Бауэр упомянули ее в обзоре [6], не придав ей, впрочем существенного значения и не заметив тот факт, что она порождает остальные теоремы о замыкании. Барт и Бауэр

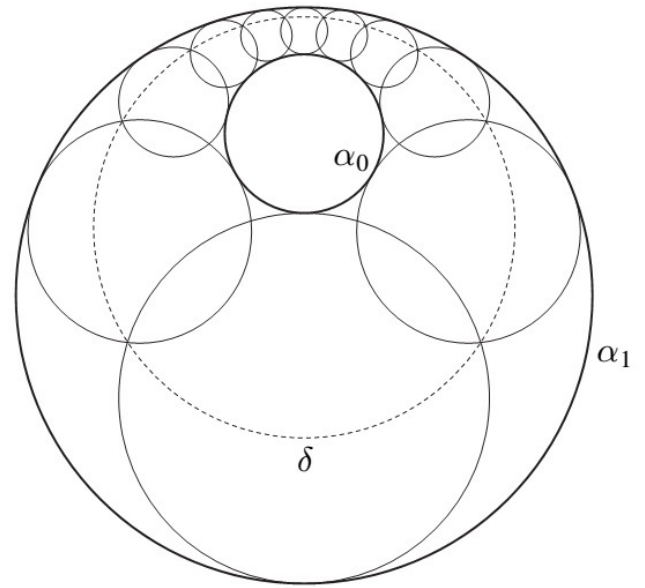


Рис. 5. Теорема Эмха

предложили другое ее доказательство, которое подходило уже для произвольного расположения окружностей  $\alpha_0, \alpha_1, \delta$ . В [48] теорема Эмха была выведена из теоремы Понселе для коник, а в [8] было найдено геометрическое доказательство.

Три классические теоремы о замыкании – Понселе, о зигзаге и Штейнера – следуют непосредственно из теоремы Эмха. Если окружность  $\alpha_1$  бесконечно большая, то мы получаем теорему Понселе для окружностей  $\alpha_0$  и  $\delta$ . Если  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  – концентрические окружности, то получается теорема о зигзаге. Наконец, если окружности  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  инверсны относительно  $\delta$ , то мы приходим к теореме Штейнера. Более подробно об этом написано в работе [8], в которой также получен многомерный аналог теоремы Эмха.

Многомерная теорема Эмха естественным образом обобщает классическую теорему Эмха: вместо цепочек окружностей, касающихся двух данных окружностей, рассматриваются цепочки сфер, касающихся  $d$  данных сфер в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Оказывается, что они также обладают свойством замыкания на любой окружности пространства.

Возникает естественный вопрос: можно ли доказать многомерную теоре-

му Эмха с помощью инвариантной меры? В Главе 1 мы покажем, что такая мера действительно существует, и получим явную формулу (1.15) для нее по квадратичным формам данных сфер. Для классической теоремы Эмха эта формула приобретает простой вид. А именно, для произвольной пары окружностей  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  функция

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0(\mathbf{x})\sigma_1(\mathbf{x})|}} \quad (2)$$

на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , где  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – это степень точки  $\mathbf{x}$  относительно окружности  $\alpha_i$ , определяет инвариантную меру на любой окружности  $\delta \subset \mathbb{R}^2$ . Мы покажем, что инвариантные меры Якоби-Бертрана и Блэка-Хоулэнда являются частными случаями меры (2).

Еще один вопрос, возникающий в связи с теоремой Понселе, заключается в нахождении аналитического условия, которое определяло бы для двух заданных конических сечений существование для них вписано-описанного  $n$ -угольника. В короткой статье [25] от 1853 года такое условие с помощью теории абелевых интегралов вывел А. Кэли. Теорему Понселе Кэли рассматривал также в ряде других работ [26–30]. Вдохновившись трудом [25], Лебег перевел доказательство Кэли на язык геометрии. Доказательство условия Кэли, полученное Лебегом с помощью методов проективной геометрии и алгебры, можно найти в его книге [14]. В современном подходе Гриффитс и Харрис вывели теорему Кэли, определив аналитическое условие для точек конечного порядка на эллиптической кривой [12].

Формулы Кэли позволяют для каждого  $n$  определить, замыкаются ли траектории Понселе через  $n$  шагов. Если же нужно узнать, замыкаются ли вообще траектории Понселе или нет, то во втором случае формулы Кэли не помогут. Поэтому, хотелось бы получить такие условия, которые давали бы ответ на вопрос о замыкании траекторий и позволяли бы вычислить период, если он есть. Якоби сделал это для двух вложенных окружностей, получив

формулы на условие замыкания ломаных Понселе через  $n$  шагов [50]. Похожие формулы получены также в работах [78] и [94]. Из них можно явно выразить период  $n$ , что дает критерий замыкания траекторий Понселе для двух вложенных окружностей. В Главе 4 мы получим такие формулы для двух произвольных коник.

**Основные результаты**, изложенные в работе, являются новыми. Работа содержит также дополнения к полученным ранее результатам и их усиления. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получена явная формула инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха. Как следствие из нее выводится инвариантная мера для классической теоремы Эмха, частными случаями которой являются инвариантные меры для классических теорем Понселе, о зигзаге и Штейнера.
2. Для двух произвольных коник получена в явном виде инвариантная относительно их отображения Понселе мера. Доказана ее универсальность для всего пучка, проходящего через эти коники.
3. Приведена полная классификация инвариантных относительно отображения Понселе и универсальных борелевских мер на кониках.
4. Получены явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух произвольных коник. Это дает критерий замыкания ломаных Понселе и формулу для периода.
5. С помощью конструкции инвариантной меры получено обобщение теоремы Эмха на каналовые циклиды Дарбу.
6. Получены некоммутативные аналоги больших теорем Понселе и Эмха, которые, по всей видимости, не могут быть выведены с помощью инвариантной меры.



## Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты дают полное решение задачи нахождения инвариантных мер для классических теорем о замыкании и их многомерных обобщений. Приведены примеры использования инвариантных мер, в которых получены: геометрические доказательства теорем о замыкании, новое многомерное обобщение и критерий замыкания траекторий. Кроме того, получены некоммутативные теоремы о замыкании. Результаты диссертации могут найти применения в задачах теории алгебраических чисел (пример подобного применения содержится в работе В. В. Козлова [57]), теории числовых образов линейных операторов (см. [79, 82]), теории дифференциальных уравнений (см. [104]) и геометрии.

## Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко (2012);
- семинар “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко, д.ф.-м.н. проф. А. В. Болсинова, д.ф.-м.н. проф. А. С. Мищенко, д.ф.-м.н. проф. А. А. Ошемкова, к.ф.-м.н. доц. Е. А. Кудрявцевой, к.ф.-м.н. доц. И. М. Никонова (2012);
- семинар “Узлы и теория представлений” под руководством д.ф.-м.н. проф. В. О. Мантурова, к.ф.-м.н. доц. Д. П. Ильютко, к.ф.-м.н. доц. И. М. Никонова (2013);
- семинар “Геометрическая теория приближений” под руководством д.ф.-м.н. доц. П. А. Бородина (2013)

- семинар “Геометрическая теория оптимального управления” под руководством чл.-корр. РАН проф. М.И. Зеликина и к.ф.-м.н. асс. Л.В. Локуциевского (2014);
- семинар “Бесконечномерный анализ и математическая физика” под руководством д.ф.-м.н. проф. О.Г. Смолянова, д.ф.-м.н. проф. Е.Т. Шавгулидзе (2015)

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- международная конференция “Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения”, посвященная 120-летию Бориса Николаевича Делоне (Москва, 16 - 20 августа, 2010 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [109];
- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва, 8 — 13 апреля 2013 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [110];
- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015» (Москва, 13 — 17 апреля 2015 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [111].

## **Публикации**

Результаты диссертации опубликованы в шести работах [106–111] автора (без соавторов) (из них две [106, 107] – в центральных журналах из перечня ВАК), список которых приведён в конце диссертации.

## **Структура и объём работы**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы,

списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет 157 страниц. Список литературы включает 111 наименований, в том числе 6 работ автора.

## Краткое содержание работы

Во **Введении** изложена история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

**Первая глава** посвящена нахождению инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха. Для этого сначала в Разделе 1.2 мы изложим некоторые вспомогательные утверждения о касании сфер в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , обобщающие теорему Кейзи [59], чтобы затем в Разделе 1.3 вывести уравнение многомерной циклиды Дюпена, описанной около  $n$  данных сфер. Это нам позволит доказать главный результат этой главы:

**Теорема 17** (об инвариантной мере для многомерной теоремы Эмха) *Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  даны  $n$  ориентированных сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , для которых множество  $\mathcal{W}$  сфер, касающихся их, не пусто. Через  $\sigma_i(\mathbf{x})$  обозначим степень точки  $\mathbf{x}$  относительно сферы  $\omega_i$ , а через  $\tau_{\omega_i\omega_j}$  – касательное расстояние между сферами  $\omega_i$  и  $\omega_j$ . Тогда функция*

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathcal{C}(\mathbf{x}))|}}, \quad (3)$$

$$\text{где } \mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \dots & \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \sigma_1(\mathbf{x}) \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \dots & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \sigma_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \dots & 0 & \sigma_n(\mathbf{x}) \\ \sigma_1(\mathbf{x}) & \sigma_2(\mathbf{x}) & \dots & \sigma_n(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

определяет на всякой окружности  $\delta \in \mathbb{R}^n$  инвариантную меру для обобщенного процесса Эмха сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  на окружности  $\delta$ .

Таким образом, если сфера  $\omega'$  пробегает семейство  $\mathcal{W}$ , то она высекает на любой окружности  $\delta$  дуги  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ , изменяющиеся по закону (1). Это означает, что мера  $\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \rho(\mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$  инвариантна относительно отображения Эмха  $\mathfrak{a}_\delta: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ , т.е.  $\mu(\mathfrak{a}_\delta(\mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A})$  для любого измеримого множества  $\mathcal{A}$  окружности  $\delta$ . В некоторых случаях взаимного расположения сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и окружности  $\delta$  отсюда сразу следует многомерная теорема Эмха (Теорема 2). Для доказательства общего случая мы найдем в Разделе 1.7 ориентирующий инвариант  $\tau(\mathbf{x})$ , который позволит в равенстве (1) избавиться от модулей. Мы докажем, что мера  $\mu'$  с плотностью  $\rho'(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})$  тоже  $\mathfrak{a}_\delta$ -инвариантна, а в добавок к этому, она еще постоянна на всех дугах  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ , высекаемых на окружности  $\delta$  сферами  $\omega' \in \mathcal{W}$ , т.е.  $\mu(\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = \text{const} := c_\delta$ . Это с помощью конструкции Кинга [64] доказывает многомерную теорему Эмха для общего случая расположения сфер.

В случае  $n = 2$  Теорема 17 дает следующую инвариантную меру на окружностях плоскости:

**Теорема 20** Пусть  $\sigma_0(\mathbf{x})$  и  $\sigma_1(\mathbf{x})$  – степени точки  $\mathbf{x}$  относительно окружностей  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Тогда на любой окружности  $\delta$  мера с плотностью

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0(\mathbf{x})\sigma_1(\mathbf{x})|}}$$

является инвариантной для процесса Эмха относительно  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ .

Теорема 20 дает геометрическое доказательство теоремы Эмха. Обе меры – Якоби-Бертрана и Блэка-Хоулэнда – являются частными случаями меры  $\rho(\mathbf{x})$ . Следовательно, эта мера может рассматриваться как универсальная мера для теорем типа Понселе. Простые алгебраические операции с формулой для  $\rho(\mathbf{x})$  дают обобщения теоремы Эмха на пучки окружностей (Раздел 1.6), на циклики вместо двух окружностей (Раздел 1.5.1) и доказывают эквивалентность теорем Эмха и Понселе для коник (Раздел 1.8). Кроме того,

в Разделе 1.5 мы получим следующее обобщение многомерной теоремы Эмха на каналовые циклиды Дарбу [20, 24]:

**Теорема 22** *Сферы, вписанные в каналовую циклиду Дарбу, обладают свойством замыкания на любой окружности пространства.*

**Во второй главе** мы получим классификацию инвариантных мер на кониках, выведем явную формулу инвариантной меры для двух произвольных коник<sup>2</sup>, докажем свойство ее универсальности для пучка, проходящего через две данные коники и распространим конструкцию Кинга [64] инвариантной меры на большую теорему Понселе.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две различные коники, возможно вырожденные. отображением Понселе на конике  $\alpha$  относительно коники  $\beta$  будем называть такое отображение  $j_\beta: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ , что прямая  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  касается коники  $\beta$ . Так как к конике  $\beta$  можно провести две касательные, то для нее есть два отображения Понселе  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$ . Они определены на подмножестве  $\alpha_\beta$  коники  $\alpha$ , из точек которого можно провести касательную к конике  $\beta$ . Через  $\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x})$  и  $\mathcal{P}_\beta(\mathbf{x})$  обозначим квадратичные формы коник  $\alpha$  и  $\beta$  в некоторой декартовой системе координат. В Теореме 33 мы докажем, что мера на конике  $\alpha$  с плотностью

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x})| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(\mathbf{x})}} \quad (4)$$

инвариантна относительно отображений Понселе коники  $\beta$ .

Рассмотрим теперь пучок коник  $\mathcal{F}$ , содержащий конику  $\alpha$ . Мера на  $\alpha$  называется  $\mathcal{F}$ -универсальной, если она инвариантна относительно отображений Понселе всех коник пучка  $\mathcal{F}$ . Мы докажем, что мера (4) является  $\mathcal{F}$ -универсальной. С использованием этого в Разделе 2.4 мы построим выравнивающее отображение  $\vartheta$ , которое переводит отображения Понселе  $j_\beta$  всех коник  $\beta$  пучка  $\mathcal{F}$  в повороты на окружности. А именно, будет доказана

---

<sup>2</sup> Вид такой меры автору сообщил А. Г. Хованский, профессор факультета математики университета Торонто.

**Теорема 40** *Каждой конике  $\beta$  пучка  $\mathcal{F}$  соответствует некоторое число  $c_\beta$  такое, что отображения Понселе  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  после применения выравнивающего отображения  $\vartheta$  перейдут в сдвиги на вектора  $\pm c_\beta$ . Точнее, для  $k \in \{1, 2\}$  диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{j_\beta^k} & \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\rho_{(-1)^k c_\beta}} & \mathbb{T} \end{array}$$

*коммутативна, т.е.*

$$\vartheta \circ j_\beta^k = \rho_{(-1)^k c_\beta} \circ \vartheta \quad (5)$$

Это распространяет конструкцию Кинга на большую теорему Понселе (Теорема 31), с помощью чего получается простое ее доказательство.

Следующая теорема дает классификацию инвариантных и универсальных мер на кониках:

**Теорема 43** *Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные невырожденные коники,  $\mathcal{F}$  – пучок коник, порожденный  $\alpha$  и  $\beta$ .*

1. *Если траектории Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$  не замыкаются, то существует единственная  $j_\beta$ -инвариантная борелевская мера. При этом, она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и  $\mathcal{F}$ -универсальна.*
2. *Если траектории Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются, то существует бесконечно много инвариантных борелевских мер. Каждая такая мера  $\mu$  однозначно определяется своим заданием на произвольной дуге  $(a, b)$ , где  $b$  – такая точка орбиты  $a$  под действием  $j_\beta$ , что на дуге  $(a, b)$  нет других точек этой орбиты.*
3.  *$\mathcal{F}$ -универсальная мера на  $\alpha$  существует, единственна и совпадает с мерой (2.7).*

**В третьей главе** мы сформулируем и докажем две теоремы о замыкании, в которых фигурируют новые семейства коник и окружностей, отличные

от пучков. Большие теоремы Понселе и Эмха имеют свойство коммутативности траекторий. Поясним его на примере большой теоремы Понселе. В ней рассматриваются коники  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ , принадлежащие одному пучку  $\mathcal{F}$ , и строится ломаная, вписанная в конику  $\alpha$  так, что ее стороны последовательно касаются коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$  ( $i$ -ая сторона касается  $\beta_i$ ). Тогда при “вращении” ломаной прямая, проходящая через ее первую и последнюю вершину, тоже касается некоторой коники  $\beta_{n+1}$  пучка  $\mathcal{F}$ . Свойство коммутативности заключается в том, что порядок касания сторон ломаной с кониками  $\beta_1, \dots, \beta_n$  может быть произвольным, а результирующая коника  $\beta_{n+1}$  при этом не меняется.

Для данной коники  $\alpha$  обозначим через  $\Omega(\alpha)$  семейство коник, каждая из которых дважды касается  $\alpha$ . При этом касание может быть и мнимым. Например, две концентрические окружности касаются в точках с координатами  $(1, \pm i, 0)$  бесконечно удаленной прямой комплексной проективной плоскости. Кроме того, будем считать, что  $\Omega(\alpha)$  содержит также и все точки плоскости (как вырожденные коники). Оказывается, что в большой теореме Понселе можно вместо наборов коник из одно пучка брать наборы коник семейства  $\Omega(\alpha)$ , а именно:

**Теорема 58** (Некоммутативный аналог большой теоремы Понселе)

*Пусть  $\alpha$  – невырожденная коника,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Omega(\alpha)$ . Для произвольной точки  $\mathbf{a}_1 \in \alpha$  построим ломаную Понселе  $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n+1}$ , у которой  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i+1}$  касается  $\beta_i$ . Тогда при движении точки  $\mathbf{a}_1$  по конике  $\alpha$  прямая  $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_{n+1}$  тоже касается фиксированной коники  $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$  (рис. 6).*

При этом, траектории Понселе коник семейства  $\Omega(\alpha)$  не имеют свойства коммутативности: если касание сторон ломаной с кониками  $\beta_1, \dots, \beta_n$  происходит в другом порядке, то результирующая коника  $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$  тоже другая.

Эта теорема имеет одно любопытное следствие:

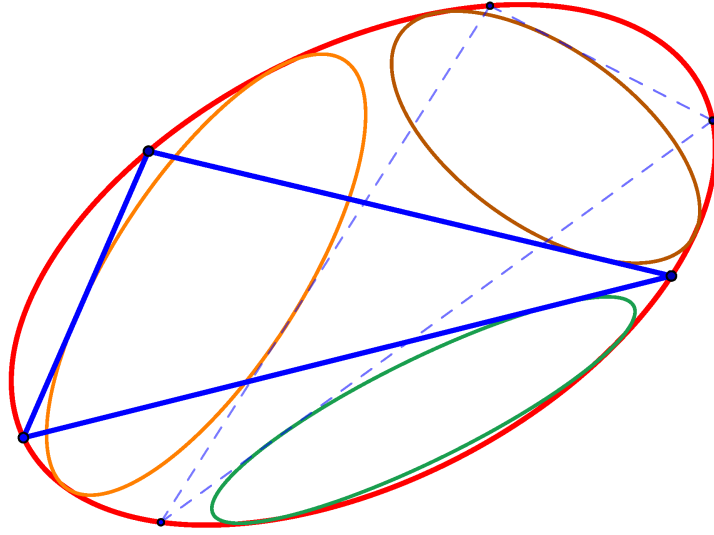


Рис. 6.

**Теорема 59** (Усиленная теорема Понселе на абсолюте) Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – произвольные циклы в плоскости Лобачевского. Выберем точку  $v_1$  на абсолюте и построим вписанную в него ломанную  $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ , у которой  $i$ -ая сторона  $v_i v_{i+1}$  касается цикла  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда при движении точки  $v_1$  по абсолюту прямая  $v_1 v_{n+1}$  касается некоторого фиксированного цикла.

Мы также найдем связь между проективными преобразованиями на конике  $\alpha$  с фиксированной прямой Штейнера и универсальной мерой на  $\alpha$  относительно пучка коник Шаля этих преобразований (Теорема 60).

Рассмотрим  $n$  пар окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ . Если окружности ориентировать, то для каждой пары  $\{\alpha_i, \beta_i\}$  однозначно определяется семейство  $\mathcal{M}_i$  касающихся ее окружностей.

**Определение 1.** Декартово произведение

$$\{\mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n\} = \{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} : \gamma_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{M}_n\}$$

назовем шкатулкой набора  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  и будем обозначать через  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ .

Рассмотрим шкатулку  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  и произвольную окружность  $\delta$ . Назовем  $\delta$ -ожерельями шкатулки  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  такие цепочки  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  из нее,



которые обладают следующим свойством:  $\gamma_i$  и  $\gamma_{i+1}$  пересекаются на окружности  $\delta$  для всех  $i = \overline{1, n-1}$ . Назовем  $\delta$ -ожерелье *замкнутым*, если его первая и последняя окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_n$  тоже пересекаются на  $\delta$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что шкатулка  $\Omega$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ , если из того, что какое-нибудь одно ее  $\delta$ -ожерелье замкнуто, следует, что в  $\Omega$  существует гомотопно эквивалентный класс замкнутых  $\delta$ -ожерелий. То есть, можно непрерывно изменять  $\delta$ -ожерелье так, чтобы оно оставалось в шкатулке и было замкнутым.

Существуют ли такой набор окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ , шкатулка  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  которого обладает свойством замыкания? Большая теорема Эмха (Теорема 24) утверждает, что если окружности  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  принадлежат одному пучку  $\mathcal{F}_1$  и окружности  $\beta_1, \dots, \beta_n$  принадлежат одному пучку  $\mathcal{F}_2$ , причем пучки  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  имеют общую окружность  $\delta$ , то шкатулка  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ .

Свойством коммутативности обладают также и  $\delta$ -ожерелья из большой теоремы Эмха. Суть его в том, что свойство замыкания шкатулки  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  не зависит от порядка множителей в декартовом произведении  $\mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n$ , т. е. неважно, в каком порядке идут пары  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ .

Мы предлагаем другую шкатулку, которая обладает свойством замыкания, но не является коммутативной.

**Теорема 63** (Некоммутативный аналог большой теоремы Эмха) Пусть  $n$  пучков, порожденных парами окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ , содержат общую окружность  $\delta$ , которая для всех  $i = \overline{1, n}$  лежит в кольце между  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Тогда существует еще одна пара соосных с  $\delta$  окружностей  $\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\}$  такая, что шкатулка  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^{n+1}$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ .

Коммутативность большой теоремы Понселе объясняется тем, что она может быть доказана с помощью инвариантной меры. Если бы такое доказательство существовало и для Теоремы 58, то замыкание не зависело бы от порядка касания с кониками. Поскольку для разных порядков результирующие коники все же различны, скорее всего ее невозможно доказать с помощью инвариантной меры. Их доказательство требует новой техники.

**Четвертая глава** посвящена условиям замыкания траекторий Понселе.

А. Кэли в 1854 году полностью решил задачу нахождения условий для двух данных коник, при которых их траектории Понселе замыкаются через  $n$  шагов. Он дал ответ на этот вопрос, получив явные формулы в терминах определителей специальных матриц [25].

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две произвольные коники, которые задаются в некоторой декартовой системе координат матрицами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Рассмотрим их дискриминант  $\mathcal{D}(\lambda) = \det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})$  и разложим в ряд по степеням  $\lambda$  корень из него:

$$\sqrt{\mathcal{D}(\lambda)} = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots$$

Тогда формулы Кэли имеют следующий вид: замыкание траекторий Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$  происходит через  $n$  шагов тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots & c_{p+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{2p-1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если } n=2p \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{p+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{2p} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{если } n=2p+1$$

Однако, эти формулы дают ответ на вопрос о замыкании траекторий только для каждого конкретного  $n$ , а замыкаются ли вообще траектории Понселе с помощью условий Кэли узнать нельзя.

С использованием инвариантной меры и проективных инвариантов пары коник мы получим явные формулы для периода замыкания траекторий Понселе двух произвольных коник.

Рассмотрим на конике  $\alpha$  диффеоморфизм  $f: \alpha \rightarrow \alpha$ . Обозначим через  $[f^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}]$  количество оборотов, которое точка  $\mathbf{x} \in \alpha$  делает за  $n$  итераций отображения  $f$  (обороты считаются против часовой стрелки). Тогда *числом вращения* отображения  $f$  называется предел

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}]}{n}. \quad (7)$$

Известно [74], что этот предел существует и не зависит от точки  $\mathbf{x}$ . Кроме того, если  $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ , то у отображения  $f$  есть периодическая траектория. Для отображения Понселе  $j_\beta$  это означало бы, что у него все траектории периодические, причем если период равен  $n$ , то

$$n\rho(j_\beta) \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, критерием того, что траектории Понселе замыкаются, является рациональность числа вращения  $\rho(j_\beta)$ , а его знаменатель в этом случае равен периоду  $n$ .

Рассмотрим еще раз дискриминант  $\mathcal{D}(\lambda) = \det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})$  коник  $\alpha$  и  $\beta$ . Он является кубическим многочленом

$$\det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta'.$$

Тогда величины

$$I_1 = \frac{\Theta^2}{\Delta\Theta'}, \quad I_2 = \frac{\Theta'^2}{\Delta'\Theta}$$

являются проективными инвариантами пары коник  $\alpha$  и  $\beta$  [93, Гл. xx, п. 24].

**Определение 3.** *Корень уравнения*

$$u^3 = I_1 I_2 (u^2 - I_1 u + I_1)$$

при условии

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 > 0, \quad u > 1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ вложенные;} \\ \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 > 0, \quad u < 1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ лежат одна вне другой;} \\ \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 < 0, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ имеют две общие точки,} \end{cases}$$

назовем особым инвариантом пары коник  $\alpha$  и  $\beta$ .

Следующая теорема дает явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух коник, который, как было замечено выше, позволяет находить период замыкания траекторий.

**Теорема 75** *Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две невырожденные коники,  $u$  – их особый инвариант. Положим*

$$\mathcal{J}(A, B, C) = \frac{\int_B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}{\int_{-1}^C \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}, \quad \text{где } c = \frac{3-u}{2\sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3}}$$

Тогда число вращения  $\rho(j_\beta)$  можно вычислить по следующим формулам в зависимости от взаимного расположения коник  $\alpha$  и  $\beta$ :

1) если  $\beta$  лежит внутри  $\alpha$ , то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(a, 1, 1), \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1} + \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3};$$

2) если  $\beta$  лежит вне  $\alpha$ , то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(a', c, c), \quad \text{где } a' = 2 \left( \frac{u^2}{I_1} - u + 1 \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3} \right)^{-2} - 1;$$

3) если  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются в двух точках, то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(b, 1, 1), \quad \text{где } b = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3} - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1};$$

В статье [57] В. В. Козлова применяется интересный метод проверки чисел на алгебраичность, в котором используется эллиптический интеграл, связанный с числом вращения отображения Понселе двух коник. Возможно, полученные нами явные формулы для числа вращения позволят найти новые применения этого метода в теории алгебраических чисел.

Отметим также, что применение формул Кэли даже в простейшем случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  – две окружности, приводит к довольно громоздким вычислениям. В то время, как для некоторых малых  $n$  существуют более простые формулы проверки на замыкание. Например для  $n = 3$  и  $n = 4$  есть формулы Эйлера и Фусса [97]:

$$\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2},$$

где  $R, r$  и  $d$  – радиусы окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  и расстояние между их центрами. Математиками были выведены такие формулы для разных  $n$ , были также найдены рекуррентные соотношения для их получения [90–92]. В Разделе 4.3 мы с помощью полученного нами обобщения одного несложного геометрического факта, установленного Радичем и Калиманом, предложим алгоритм для нахождения формул на условия замыкания ломанных Понселе для двух окружностей.

Построим ломаную Понселе  $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$  окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Из большой теоремы Понселе следует, что при “вращении” этой ломаной, для каждого  $i = \overline{2, n}$  ее диагональ  $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_i$  касается фиксированной окружности  $\gamma_i$  пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ . Как известно, отношение степеней любой точки окружности  $\alpha$  относительно окружностей  $\gamma_i$  и  $\beta$ , есть величина постоянная. Обозначим ее через  $k_i = k_i(\alpha, \beta)$ . Нетрудные вычисления показывают, что радиус  $\rho(\gamma_i)$  окружно-

сти  $\gamma_i$  и расстояние  $D(\gamma_i)$  от ее центра до центра окружности  $\alpha$  выражаются через  $R, r$  и  $d$  по формулам

$$\rho(\gamma_i) = \sqrt{R^2 + k_i^2 d^2 - k_i(R^2 - r^2 + d^2)}, \quad D(\gamma_i) = k_i d.$$

Правило  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \gamma_i)$  определяет для каждого  $i \in \mathbb{N}$  отображения

$$G_i: (R, r, d) \mapsto (R, \rho(\gamma_i), D(\gamma_i)) = \left( R, \sqrt{R^2 + k_i^2 d^2 - k_i(R^2 - r^2 + d^2)}, k_i d \right).$$

Пусть теперь уравнение  $F_n(R, r, d) = 0$  задает условие замыкания траекторий Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  через  $n$  шагов. Тогда следующая теорема дает алгоритм нахождения соотношений  $F_n(R, r, d) = 0$ .

**Теорема 78** *Если траектории Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются через  $n$  шагов, где  $n = n_1 \dots n_r$ , то*

$$[F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d) = 0,$$

где  $G_{n_i} = G_{n_i}(\alpha, \gamma_{t_i})$ ,  $F_{n_1} = F_{n_1}(\alpha, \gamma_{t_1})$ ,  $t_i = \prod_{j=i+1}^r n_j$ ,  $i = \overline{1, r-1}$ ,  $t_r = 1$ .

Иными словами,

$$F_n(R, r, d) = [F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d).$$

Применять этот алгоритм удобно по индукции, пользуясь соотношением

$$k_{2^i}(\alpha, \beta) = k_{2^{i-1}}(\alpha, \gamma_2) \cdot k_2(\alpha, \beta)$$

и таким следствием Теоремы 78:

**Теорема 80** *Пусть траектории Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются через  $n$  шагов, где  $n = 2^l \cdot t$ ,  $t$  нечетно,  $\delta$  – минимальное натуральное число, для которого  $q := 2^\delta \pm 1 \equiv 0 \pmod{t}$ . Тогда*

$$[F_q \circ G_{2^l}](R, r, d) = 0.$$

## Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Юрьевичу Протасову за постановку задач, постоянную поддержку в работе и долготерпение в ожидании результатов. Автор очень признателен профессору А. Г. Хованскому за предложенный им вид инвариантной меры и полезные обсуждения, а также к.ф.-м.н. В. А. Кириченко за интересные дискуссии и ценные советы. Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. доц. А. А. Васильевой, д.ф.-м.н. доц. П. А. Бородину, к.ф.-м.н. доц. Д. П. Ильютко, Ф. К. Нилову, участникам семинара “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко за ценные замечания, а также всему коллективу кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу. Хочется также выразить благодарность начальнику выпускного курса к.ф.-м.н. Василию Васильевичу Козлову за многолетнюю поддержку и помощь в организационных вопросах учебного процесса.

## Глава 1

# Инвариантные меры для классических теорем о замыкании

В этой главе мы построим инвариантную меру (1.15) для многомерной теоремы Эмха (Теорема 2), которая обобщает несколько хорошо известных инвариантных мер для других теорем о замыкании. Будет показано, что любой набор из  $n$  сфер в  $\mathbb{R}^n$  порождает функцию в пространстве, ограничение которой на произвольную окружность определяет инвариантную меру на ней. В двумерном случае – для обычной теоремы Эмха – эта мера принимает простой вид (Теорема 20). Некоторые ее частные случаи известны в литературе и использовались для доказательств теорем Понселе и о зигзаге [54, 64]. Замечательные свойства этой меры дают новые результаты, а также новые доказательства известных фактов. Например, с применением новой меры мы получаем обобщение трехмерной теоремы Эмха на циклиды Дарбу (Раздел 1.5). Инвариантная мера позволяет также дать простое и изящное доказательство некоторых результатов работ [8, 49], обобщающих теорему Эмха на пучки окружностей и на циклики.

### 1.1. Введение

Главным результатом Главы 1 является явная формула инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха (Теорема 17). Многомерная теорема Эмха естественным образом обобщает цепочки Эмха двух окружностей на цепочки сфер в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , которые состоят из сфер, касающихся  $n$  данных сфер. В теореме Эмха фигурируют два семейства окружностей, касающихся двух данных окружностей. Для  $n$  сфер в пространстве  $\mathbb{R}^n$  могут



существовать уже  $2^{n-1}$  подобных семейств. Для однозначности в рассуждениях будет удобно, поэтому, использовать ориентированные сферы и плоскости.

Перед тем, как сформулировать многомерную теорему Эмха, введем необходимые определения. Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  дана окружность  $\delta$  и семейство сфер  $\mathcal{W}$ . При этом гиперплоскость и точка также считаются сферами. Точку  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  назовем *особой* для семейства  $\mathcal{W}$ , если через нее проходят более двух сфер из  $\mathcal{W}$ . Предположим, что выполнены два условия:

- (a) окружность  $\delta$  не содержит особых точек для семейства  $\mathcal{W}$ ;
- (b) никакая сфера семейства  $\mathcal{W}$  не содержит  $\delta$ .

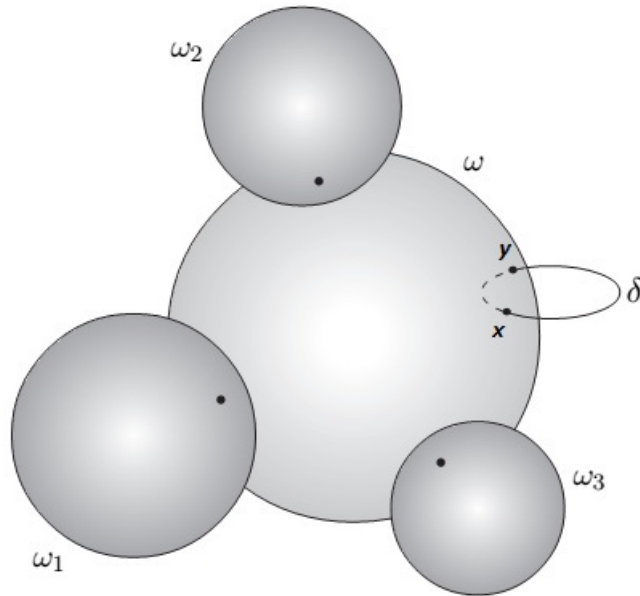
Рассмотрим следующий процесс. На окружности  $\delta$  берется точка  $\mathbf{x}_1$  и через нее проводится сфера  $\omega'_1 \in \mathcal{W}$  (предполагается, что таковая существует; если таких сфер две, то берем любую). Обозначаем через  $\mathbf{x}_2$  вторую точку пересечения  $\omega'_1$  и  $\delta$  (если имеет место касание, то  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ ). Через  $\mathbf{x}_2$  проводим сферу  $\omega'_2 \in \mathcal{W}$ , отличную от  $\omega'_1$  (если ее не существует, то полагаем  $\omega'_1 = \omega'_2$ ), обозначаем через  $\mathbf{x}_3$  вторую точку пересечения  $\omega'_2$  и  $\delta$ , и т.д. Получаем цепочку сфер  $\{\omega'_k\}_{k=1}^\infty$ . Процесс имеет период  $r$  если  $\omega'_{r+1} = \omega'_1$  (или, что то же,  $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_1$ ).

**Определение 4.** Семейство сфер  $\mathcal{W}$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ , если оно удовлетворяет условиям (a), (b) и следующему условию: если для некоторой начальной точки  $\mathbf{x}_1$  процесс имеет период  $r \geq 3$ , причем все точки  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  различны, то и для любой точки  $\mathbf{x}_1 \in \delta$ , через которую проходит сфера семейства  $\mathcal{W}$ , процесс имеет тот же период.

Следующая теорема, доказанная В. Ю Протасовым в 2011 г. [8], является многомерным обобщением теоремы Эмха.

**Теорема 2** (Многомерная теорема Эмха) Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – набор из  $n$  ориентированных сфер общего положения в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда семейство  $\mathcal{W}$  ориен-

тированных сфер  $\omega'$ , касающихся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , обладает свойством замыкания на любой окружности  $\delta$ , не лежащей ни на одной из данных сфер.



Если  $\mathcal{W}$  – это семейство сфер, касающихся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , то цепочку сфер  $\{\omega'_k\}_{k=1}^\infty$  будем называть *цепочкой Эмха*.

В Разделе 1.4 будет построена в явном виде инвариантная мера для многомерной теоремы Эмха (Теорема 17). С ее помощью мы в Разделе 1.7 дадим простое доказательство многомерной теоремы Эмха для общего случая взаимного расположения сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и окружности  $\delta$ . При выводе главной формулы (1.15) для инвариантной меры нам понадобятся некоторые свойства многомерных циклид Дюпена, которые являются многомерным обобщением замечательной поверхности, открытой Ш. Дюпеном [19]. Этим свойствам посвящен Раздел 1.3. Но сначала, в Разделе 1.2 мы получим ряд утверждений о касании сфер в  $\mathbb{R}^n$ , обобщающих известную теорему Кейзи (1.4). Эти вспомогательные результаты, представляющие и самостоятельный интерес, понадобятся нам при получении уравнения многомерной циклиды Дюпена, которое, в свою очередь, позволит вывести формулу инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха. Далее мы рассмотрим частные случаи новой меры для

четырёх классических теорем – Эмха, Понселе, Штейнера и о зигзаге. Затем, в Разделе 1.5 с помощью инвариантной меры мы получим обобщение принципа Эмха замыкания сфер на циклиды Дарбу и их возможные многомерные аналоги. В частности, на плоскости это даёт обобщение теоремы Эмха на *циклиды*, полученное в работе [49]. С помощью новой меры мы получим также для цепочек Эмха некоторые аналоги большой теоремы Понселе (Раздел 1.6). В заключение Главы 1 с применением инвариантной меры будет показано, что теорема Понселе для коник следует из теоремы Эмха.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться инверсией пространства. Поэтому, напомним некоторые свойства этого геометрического преобразования.

## Инверсия и ее свойства

*Инверсией* относительно окружности с центром в точке  $\mathbf{o}$  и радиуса  $R$  называется геометрическое преобразование плоскости, которое каждой точке  $\mathbf{a}$  ставит в соответствие такую точку  $\mathbf{a}'$  луча  $\mathbf{o}\mathbf{a}$ , что  $|\mathbf{o}\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{o}\mathbf{a}'| = R^2$ . Самой точке  $\mathbf{o}$  соответствует бесконечно удаленная точка плоскости, через которую проходят все прямые. Тогда преобразование становится взаимно-однозначным. При этом, прямые считаются окружностями бесконечно большого радиуса.

*Степенью точки  $\mathbf{a}$*  относительно окружности  $\alpha$  радиуса  $R$  с центром в точке  $\mathbf{o}$  называется величина  $\sigma_\alpha(\mathbf{a}) = |\mathbf{o}\mathbf{a}|^2 - R^2$ . Множество точек плоскости, имеющих равные степени относительно двух данных окружностей, является прямой. Она называется *радикальной осью* этих окружностей.

*Пучок окружностей* – это множество окружностей, ортогональных двум фиксированным окружностям. Все окружности одного пучка имеют общую радикальную ось, поэтому их еще называют *соосными*. Множество окруж-

ностей, ортогональных всем окружностям некоторого пучка, образует *ортогональный пучок*. Если окружности пучка не пересекаются, то окружности ортогонального пучка пересекаются в двух точках на линии центров первого пучка. Эти две точки являются его вырожденными окружностями и называются *предельными точками пучка*.

Преобразование инверсии обладает следующими свойствами.

- 1° Инверсия является инволюцией, а все ее неподвижные точки – это точки окружности инверсии.
- 2° Образ любой окружности, не проходящей через центр инверсии, – это окружность, не проходящая через центр инверсии; образ любой окружности, проходящей через центр инверсии – это прямая, не проходящая через центр инверсии.
- 3° Инверсные окружности гомотетичны относительно центра инверсии.
- 4° Инверсия сохраняет углы между кривыми. В частности, окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит в себя. Отсюда следует, что пучок окружностей при инверсии переходит в пучок окружностей. Любая окружность, ортогональная окружности инверсии и проходящая через точку  $\mathbf{a}$ , проходит также и через точку  $\mathbf{a}'$ .
- 5° Инверсия с центром в предельной точке пучка переводит окружности пучка в концентрические окружности.

Преобразование инверсии называют еще симметрией относительно окружности. Такое название объясняется следующим свойством инверсии.

- 6° Пусть точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  инверсны относительно окружности  $\alpha$ . Тогда это их свойство сохраняется при любой инверсии. Т.е. если при инверсии относительно окружности  $\beta$  точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  и окружность  $\alpha$  переходят в точки  $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$  и окружность  $\alpha'$ , то точки  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{y}'$  инверсны относительно  $\alpha'$ . Если же окружность  $\alpha$  перевести в прямую, то инверсия относительно  $\alpha$  перейдет в симметрию относительно этой прямой.

7° Для любых двух окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  существует *серединная окружность*  $\omega$  такая, что инверсия относительно  $\omega$  переводит  $\alpha$  и  $\beta$  друг в друга.

Если  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются, то у них существуют две “биссектрисы” – окружности, которые проходят через точки их пересечения и делят смежные углы между ними пополам. Из свойства 4° следует, что “биссектрисы”  $\alpha$  и  $\beta$  являются их серединными окружностями. А из свойства 3° следует, что центры серединных окружностей совпадают с центрами подобия  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для непересекающихся окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  серединных окружностей тоже две (одна из них мнимого радиуса). Центры их находятся в точках пересечения общих касательных к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$  – двух внешних и двух внутренних.

У окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  есть два семейства касающихся их окружностей. Одно из них содержит окружности, касающиеся  $\alpha$  и  $\beta$  с индексом 0, а другое – с индексом 1. Если же окружности  $\alpha$  и  $\beta$  ориентировать, то семейство касающихся их окружностей определяется однозначно. Обозначим его через  $\mathcal{W}$ .

Прямые, проходящие через точки касания окружностей семейства  $\mathcal{W}$  с окружностями  $\alpha$  и  $\beta$ , проходят через один из центров подобия  $\alpha$  и  $\beta$ . Обозначим его через  $\mathbf{o}_{\alpha\beta}$ . Через  $\mathbf{o}_{\alpha\beta}$  также проходят две общие касательные ориентированных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  (возможно мнимые).

В дальнейшем, когда речь будет идти об ориентированных окружностях или сферах, под *серединной окружностью*  $\alpha$  и  $\beta$  мы будем понимать ту из двух, центр которой находится в точке  $\mathbf{o}_{\alpha\beta}$ .

8° Любая окружность, касающаяся ориентированных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ , ортогональна их серединной окружности. Отсюда следует, что центр  $\mathbf{o}_{\alpha\beta}$  серединной окружности  $\alpha$  и  $\beta$  имеет равные степени относительно всех окружностей семейства  $\mathcal{W}$ .

9° Если при инверсии относительно сферы с центром в точке  $O$  и радиусом

$R$  точки  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  переходят в точки  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$ , то

$$|\mathbf{a}'\mathbf{b}'| = \frac{R^2}{|\mathbf{oa}| \cdot |\mathbf{ob}|} |\mathbf{ab}|. \quad (1.1)$$

Доказательства этих и других свойств инверсии и пучков окружностей можно найти в [58].

У двух ориентированных окружностей существует не более двух общих ориентированных касательных. У ориентированных одинаково – это две внешние касательные, у ориентированных по-разному – это две внутренние касательные.

**Определение.** Длина отрезка общей касательной ориентированных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  называется *касательным расстоянием* окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Мы будем обозначать его через  $\tau_{\alpha\beta}$ .

Пусть  $R$  и  $r$  – радиусы окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $d$  – расстояние между их центрами. Чтобы различать окружности, ориентированные по-разному, назовем одну из ориентаций положительной, а другую – отрицательной. Будем считать, что окружности с отрицательной ориентацией имеют отрицательный радиус. С такой оговоркой, верна формула для касательного расстояния

$$\tau_{\alpha\beta} = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}. \quad (1.2)$$

В случае, когда у окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  нет общих касательных, т.е. когда, например, одна из них лежит внутри другой, выражение  $d^2 - (R - r)^2$ , стоящее под корнем, принимает отрицательное значение, а корень из него – мнимое. Примем это мнимое значение  $\tau_{\alpha\beta}$  за касательное расстояние окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Кроме того, точки плоскости можно рассматривать как окружности нулевого радиуса. Если окружность  $\beta$  вырождается в точку  $\mathbf{x}$ , то касательное расстояние  $\tau_{\alpha\beta}$  становится равным  $\sqrt{d^2 - R^2}$ . Т.е.

$$\tau_{\mathbf{x}\alpha} = \sqrt{\sigma_{\alpha}(\mathbf{x})}. \quad (1.3)$$

Это корень из степени точки  $\mathbf{x}$  относительно окружности  $\alpha$ , который равен длине касательной к ней из точки  $\mathbf{x}$ .

Касательное расстояние, степень точки, и инверсия относительно сфер пространства  $\mathbb{R}^n$  определяется также, как и для окружностей.

10° *Перечисленные выше свойства инверсии 1°-9° верны и для  $n$ -мерных сфер.*

## 1.2. Когда $n + 2$ сферы в $\mathbb{R}^n$ имеют общую касательную сферу?

Для четырех окружностей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$  на плоскости существует критерий, известный как теорема Кейзи (Casey) [58, 76], позволяющий определять, существует ли окружность, касающаяся  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $\omega_4$ :

**Теорема Кейзи.** *Четыре ориентированные окружности  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  касаются одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда одно из чисел*

$$\tau_{\omega_1\omega_2}\tau_{\omega_3\omega_4}, \tau_{\omega_1\omega_3}\tau_{\omega_2\omega_4}, \tau_{\omega_1\omega_4}\tau_{\omega_2\omega_3}$$

*равно сумме двух других. При этом, если точки касания с окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  разделяют точки касания с окружностями  $\omega_3$  и  $\omega_4$ , то*

$$\tau_{\omega_1\omega_2}\tau_{\omega_3\omega_4} = \tau_{\omega_1\omega_3}\tau_{\omega_2\omega_4} + \tau_{\omega_1\omega_4}\tau_{\omega_2\omega_3} \quad (1.4)$$

В этом разделе мы выведем аналогичный критерий в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . А именно, мы ответим на вопрос: когда  $n + 2$  сферы в  $\mathbb{R}^n$  имеют общую касательную сферу?

Известная формула Герона позволяет вычислять площадь треугольника по длинам его сторон. Многомерный аналог формулы Герона дает определитель Кэли-Менгера, с помощью которого можно вычислять объем  $n$ -мерного симплекса по длинам его ребер:

**Теорема 3** ([5]) Пусть даны точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ . Тогда объем  $V$  симплекса  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  выражается через длины его ребер по формуле

$$V^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n (n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & |A_1 A_2|^2 & |A_1 A_3|^2 & \cdots & |A_1 A_{n+1}|^2 & 1 \\ |A_1 A_2|^2 & 0 & |A_2 A_3|^2 & \cdots & |A_2 A_{n+1}|^2 & 1 \\ |A_1 A_3|^2 & |A_2 A_3|^2 & 0 & \cdots & |A_3 A_{n+1}|^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ |A_1 A_{n+1}|^2 & |A_2 A_{n+1}|^2 & |A_3 A_{n+1}|^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

**Теорема 4** (Многомерная теорема Птолемея [5]) Точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2} \in \mathbb{R}^n$  лежат на одной сфере или гиперплоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & |A_1 A_2|^2 & |A_1 A_3|^2 & \cdots & |A_1 A_{n+2}|^2 \\ |A_1 A_2|^2 & 0 & |A_2 A_3|^2 & \cdots & |A_2 A_{n+2}|^2 \\ |A_1 A_3|^2 & |A_2 A_3|^2 & 0 & \cdots & |A_3 A_{n+2}|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_1 A_{n+2}|^2 & |A_2 A_{n+2}|^2 & |A_3 A_{n+2}|^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.6)$$

**Доказательство.** Пусть при инверсии с центром в точке  $A_{n+2}$  и радиусом 1 точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  переходят в точки  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+1}$ . Тогда точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$  лежат на одной сфере или гиперплоскости тогда и только тогда, когда точки  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+1}$  лежат на одной гиперплоскости, что равносильно тому, что объем симплекса  $A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1}$  равен нулю. Следовательно, определитель Кэли-Менгера этого симплекса тоже равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & |A'_1 A'_2|^2 & |A'_1 A'_3|^2 & \cdots & |A'_1 A'_{n+1}|^2 & 1 \\ |A'_1 A'_2|^2 & 0 & |A'_2 A'_3|^2 & \cdots & |A'_2 A'_{n+1}|^2 & 1 \\ |A'_1 A'_3|^2 & |A'_2 A'_3|^2 & 0 & \cdots & |A'_3 A'_{n+1}|^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ |A'_1 A'_{n+1}|^2 & |A'_2 A'_{n+1}|^2 & |A'_3 A'_{n+1}|^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$



По формуле (1.1) имеем

$$|A'_i A'_j| = \frac{|A_i A_j|}{|A_i A_{n+2}| \cdot |A_j A_{n+2}|}.$$

Подставляя эти значения в определитель и пользуясь его линейностью по строкам и столбцам, получаем (1.6). □

Пусть точки  $A, B, C, D$  трехмерного пространства связаны соотношением Птолемея  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ . Если бы они лежали в плоскости, то по теореме Птолемея существовала бы окружность, проходящая через них. Но в пространстве появляется еще одна степень свободы: даже если фиксировать пять из шести расстояний между точками  $A, B, C, D$ , то полученная конфигурация все равно не будет жесткой. Непрерывно изгибая ее, можно изменять шестое расстояние. Можно тогда предположить, что изгибая любой плоский четырехугольник по его диагонали, можно его привести в такое положение, в котором для него будет выполняться соотношение Птолемея. Однако это не так:

**Теорема 5.** Пусть точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$  пространства  $\mathbb{R}^k$ , где  $n \leq k$ , связаны  $n$ -мерным соотношением Птолемея (1.6). Тогда они лежат на одной  $(n - 1)$ -мерной сфере.

**Доказательство.** Для  $k = n$  получается Теорема 4. При  $k > n$  рассмотрим пространство размерности  $n + 1$ , проходящее через точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ . В нем существует гиперсфера, содержащая точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ . Выберем на этой гиперсфере точку  $O$ , отличную от точек  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ , и сделаем инверсию с центром в ней и коэффициентом 1. Тогда вся гиперсфера перейдет в гиперплоскость размерности  $n$ , и следовательно, точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$  перейдут в точки  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+2}$ , лежащие в  $n$ -мерном пространстве. Так как

по формуле (1.1)

$$|A'_i A'_j| = \frac{|A_i A_j|}{|OA_i| \cdot |OA_j|},$$

то из свойства линейности определителя по строкам и столбцам следует, что для точек  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+2}$  тоже выполняется  $n$ -мерное соотношение Птолемея (1.6). Поскольку они уже лежат в  $n$ -мерном пространстве, из многомерной теоремы Птолемея следует существование  $(n - 1)$ -мерной сферы, содержащей их. Значит и их прообразы – точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$  – лежат на одной  $(n - 1)$ -мерной сфере.  $\square$

**Предложение 6.** *Сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  касаются одной гиперплоскости тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_1\omega_{n+1}}^2 & 1 \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_2\omega_{n+1}}^2 & 1 \\ \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega_3\omega_{n+1}}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_{n+1}}^2 & \tau_{\omega_2\omega_{n+1}}^2 & \tau_{\omega_3\omega_{n+1}}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7)$$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ” Пусть существует гиперплоскость, касающаяся всех сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ . Обозначим точки касания через  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ . Так как все они лежат в одной гиперплоскости, то  $n$ -мерный объем симплекса  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  равен нулю. Подставляя в определитель Кэли-Менгера  $A_i A_j = \tau_{\omega_i\omega_j}$ , получаем (1.7).

“ $\Leftarrow$ ” Сделаем выход в пространство, на одну размерность большее: рассмотрим сферы  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , построенные на сферах  $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$  как на диаметрах. Заметим, что центры сфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  лежат в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , которое является гиперплоскостью  $\pi_n^0$  расширенного пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а касательные расстояния между сферами  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  такие же, как и у сфер

$\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ . Поскольку количество гиперсфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  равно его размерности, существует гиперплоскость  $\pi_n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  (возможно, мнимая), касающаяся всех сфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$ . Обозначим точки касания через  $A_1, \dots, A_{n+1}$ . Тогда поскольку  $A_i A_j = \tau_{\omega_i \omega_j}$  и выполняется (1.7), объем  $n$ -мерного симплекса  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ , вычисленный по формуле Кэли-Менгера (Теорема 1.5), равен нулю. Значит, точки  $A_1, \dots, A_{n+1}$  лежат в  $(n - 1)$ -мерной плоскости  $\pi_{n-1}$ . Через нее можно провести гиперплоскость  $\pi_n^\perp$ , ортогональную  $\pi_n$ . Поскольку  $\pi_n^\perp$  проходит через точки  $A_1, \dots, A_{n+1}$  касания сфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  с гиперплоскостью  $\pi_n$  и ортогональна ей,  $\pi_n^\perp$  содержит через центры сфер. Таким образом, центры сфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  лежат в плоскости размерности  $n - 1$ , в которой пересекаются гиперплоскости  $\pi_n^\perp$  и  $\pi_n^0$ . Но тогда у сфер  $\Omega_1, \dots, \Omega_{n+1}$  есть целый конус касательных гиперплоскостей. Он пересекает плоскость  $\pi_n^0$  по двум гиперплоскостям пространства  $\mathbb{R}^n$ , каждая из которых касается всех сфер  $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ .

□

**Лемма 7** ([58], гл. II, §4) Пусть при инверсии относительно сферы с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  сферы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  переходят в сферы  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ .

Тогда

$$\tau_{\omega'_1 \omega'_2}^2 = \left( \frac{R^2}{\sigma_{\omega_1}(O)} \right) \left( \frac{R^2}{\sigma_{\omega_2}(O)} \right) \tau_{\omega_1 \omega_2}^2. \quad (1.8)$$

Отметим, что если в качестве сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$  взять две точки (сферы нулевого радиуса), то получится формула (1.1).

**Теорема 8.** Сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+2}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  касаются одной сферы или гиперплоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_1\omega_{n+2}}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_2\omega_{n+2}}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega_3\omega_{n+2}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_{n+2}}^2 & \tau_{\omega_2\omega_{n+2}}^2 & \tau_{\omega_3\omega_{n+2}}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

**Доказательство.** Сделаем расширение пространства (см. [58, Гл. 2, §5]) на величину  $-r_{n+2}$ , где  $r_{n+2}$  – это радиус сферы  $\omega_{n+2}$ . При этом преобразовании пространства все сферы переходят в сферы с теми же центрами, а радиусами, уменьшенными на  $r_{n+2}$ . В частности, сфера  $\omega_{n+2}$  перейдет в точку, которую обозначим через  $O$ . Теперь сделаем инверсию пространства с центром в точке  $O$  и радиусом 1. Образы сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$  обозначим через  $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{n+1}$ . Заметим, что существование сферы или гиперплоскости, касающейся всех сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+2}$  равносильно существованию гиперплоскости, которая касается всех сфер  $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{n+1}$ . Согласно Предложению 6 это равносильно условию

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega'_1\omega'_2}^2 & \tau_{\omega'_1\omega'_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega'_1\omega'_{n+1}}^2 & 1 \\ \tau_{\omega'_1\omega'_2}^2 & 0 & \tau_{\omega'_2\omega'_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega'_2\omega'_{n+1}}^2 & 1 \\ \tau_{\omega'_1\omega'_3}^2 & \tau_{\omega'_2\omega'_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega'_3\omega'_{n+1}}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega'_1\omega'_{n+1}}^2 & \tau_{\omega'_2\omega'_{n+1}}^2 & \tau_{\omega'_3\omega'_{n+1}}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При расширении касательное расстояние сохраняется, а при инверсии изменяется по формуле (1.8), а именно

$$\tau_{\omega'_i\omega'_j}^2 = \left( \frac{1}{\sigma_{\omega_i}(O)} \right) \left( \frac{1}{\sigma_{\omega_j}(O)} \right) \tau_{\omega_i\omega_j}^2.$$

Но  $\sigma_{\omega_i}(O) = \tau_{\omega_i\omega_{n+2}}^2$ . Подставляя эти выражения в определитель и пользуясь линейностью определителя по строкам и столбцам, получаем (1.9).  $\square$

**Лемма 9.** Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – две ориентированные сферы в  $\mathbb{R}^n$ , а сфера  $\omega$  касается их в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Тогда любая плоскость, проходящая через точки  $A_1$  и  $A_2$  высекает на  $\omega_1$  и  $\omega_2$  две сферы  $s_1$  и  $s_2$ , такие что  $\tau_{s_1 s_2} = \tau_{\omega_1 \omega_2}$ .

*Доказательство.* Поскольку сфера  $\omega$  ортогональна срединной сфере  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. свойство 7° из § 1.1), точки  $A_1$  и  $A_2$  переходят друг в друга. Поэтому, прямая  $A_1 A_2$  проходит через центр  $O = \mathbf{o}_{\omega_1 \omega_2}$  конуса, описанного около сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Произвольная плоскость  $\pi$ , проходящая через точки  $A_1$  и  $A_2$  пересекает этот конус по конусу с вершиной тоже в точке  $O$ , размерность которого равна размерности плоскости  $\pi$ , и который описан около сфер  $s_1$  и  $s_2$ . Точки  $B_1$  и  $B_2$  касания сфер  $s_1$  и  $s_2$  с любой их общей касательной плоскостью являются также точками касания сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с их общей касательной гиперплоскостью, которая проходит через прямую  $B_1 B_2$  ортогонально плоскости  $\pi$ . Отсюда следует, что  $\tau_{s_1 s_2} = |B_1 B_2| = \tau_{\omega_1 \omega_2}$ .

□

**Лемма 10.** Пусть сфера  $\omega$  касается сфер  $\omega_1, \omega_2$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Радиусы этих трех сфер равны  $r_\omega, r_{\omega_1}, r_{\omega_2}$  соответственно,  $\tau_{\omega_1 \omega_2}$  – это касательное расстояние сфер  $\omega_1, \omega_2$ . Тогда

$$|A_1 A_2| = \frac{r_\omega \cdot \tau_{\omega_1 \omega_2}}{\sqrt{(r_\omega + r_{\omega_1})(r_\omega + r_{\omega_2})}}. \quad (1.10)$$

*Доказательство.* Пусть гиперплоскость  $\pi$  касается сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Из свойства 7° инверсии следует, что прямые  $A_1 B_1$  и  $A_2 B_2$  пересекаются в центре  $O = \mathbf{o}_{\omega \pi}$  срединной сферы гиперплоскости  $\pi$  и сферы  $\omega$ . А из свойства 2° инверсии следует, что точка  $O$  лежит на сфере  $\omega$ . Так как при инверсии, переводящей  $\pi$  в  $\omega$  точки  $B_1$  и  $B_2$  переходят в точки  $A_1$  и  $A_2$ , то по формуле (1.1) имеем

$$|A_1 A_2| = \frac{R^2 \cdot |B_1 B_2|}{|OB_1| |OB_2|} = \frac{R}{|OB_1|} \cdot \frac{R}{|OB_2|} \tau_{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{\frac{|OA_1|}{|OB_1|}} \cdot \sqrt{\frac{|OA_2|}{|OB_2|}} \tau_{\omega_1 \omega_2} =$$

$$= \sqrt{\frac{r_\omega}{r_\omega + r_{\omega_2}}} \cdot \sqrt{\frac{r_\omega}{r_\omega + r_{\omega_2}}} \tau_{\omega_1\omega_2}.$$

□

**Теорема 11.** Пусть сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , где  $k \leq n$ , а сфера  $\omega$  касается сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$  в точках  $A_1, \dots, A_{k+1}$ . Тогда точки  $A_1, \dots, A_{k+1}$  лежат в  $(k-1)$ -мерной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_1\omega_{k+1}}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_2\omega_{k+1}}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega_3\omega_{k+1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_{k+1}}^2 & \tau_{\omega_2\omega_{k+1}}^2 & \tau_{\omega_3\omega_{k+1}}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.11)$$

**Доказательство.** “ $\Rightarrow$ ” Пусть точки  $A_1, \dots, A_{k+1}$  лежат в  $(k-1)$ -мерной плоскости. Обозначим через  $s_1, \dots, s_{k+1}$  и  $s$  сечения этой плоскостью сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$  и  $\omega$  соответственно. Поскольку сфера  $s$  также касается сфер  $s_1, \dots, s_{k+1}$  и все они являются гиперсферами в пространстве размерности  $k-1$ , то по Теореме 8

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{s_1s_2}^2 & \tau_{s_1s_3}^2 & \cdots & \tau_{s_1s_{k+1}}^2 \\ \tau_{s_1s_2}^2 & 0 & \tau_{s_2s_3}^2 & \cdots & \tau_{s_2s_{k+1}}^2 \\ \tau_{s_1s_3}^2 & \tau_{s_2s_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{s_3s_{k+1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{s_1s_{k+1}}^2 & \tau_{s_2s_{k+1}}^2 & \tau_{s_3s_{k+1}}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

А так как по Лемме 9  $\tau_{s_i s_j} = \tau_{\omega_i \omega_j}$ , получаем 1.11.

“ $\Leftarrow$ ” Пусть выполняется 1.11. По Лемме 10

$$\tau_{\omega_i \omega_j}^2 = \frac{r_\omega^2 \cdot |A_i A_j|^2}{(r_\omega + r_{\omega_i})(r_\omega + r_{\omega_j})}.$$

Подставляя эти значения в 1.11 и пользуясь линейностью определителя по строкам и столбцам, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & |A_1A_2|^2 & |A_1A_3|^2 & \cdots & |A_1A_{k+1}|^2 \\ |A_1A_2|^2 & 0 & |A_2A_3|^2 & \cdots & |A_2A_{k+1}|^2 \\ |A_1A_3|^2 & |A_2A_3|^2 & 0 & \cdots & |A_3A_{k+1}|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_1A_{k+1}|^2 & |A_2A_{k+1}|^2 & |A_3A_{k+1}|^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

По обобщенной теореме Птолемея (Теорема 5) отсюда следует, что точки  $A_1, \dots, A_{k+1}$  принадлежат некоторой  $(k - 2)$ -мерной сфере, и в частности, лежат в  $(k - 1)$ -мерной плоскости.

□

### 1.3. Многомерные циклиды Дюпена

Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – ориентированные сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\mathcal{W}$  множество всех ориентированных сфер  $\omega'$ , касающихся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

**Определение 5.** *Циклидой Дюпена будем называть огибающую поверхность  $\mathcal{T}$  семейства сфер  $\mathcal{W}$ . Сферы семейства  $\mathcal{W}$  будем называть вписанными в циклиду  $\mathcal{T}$ .*

В трехмерном пространстве такие поверхности впервые рассмотрел французский математик К. Дюпен [19].

Циклида Дюпена обладает одним замечательным свойством: все ее линии кривизны<sup>1</sup> – это окружности. Многомерные поверхности с таким свойством изучались в литературе [60–63]. В работе [61] была получена полная их классификация, и ввиду аналогии между свойствами этих поверхностей

---

<sup>1</sup> *Линией кривизны* называется такая линия на поверхности, у которой в каждой ее точке касательная направлена по главному направлению.

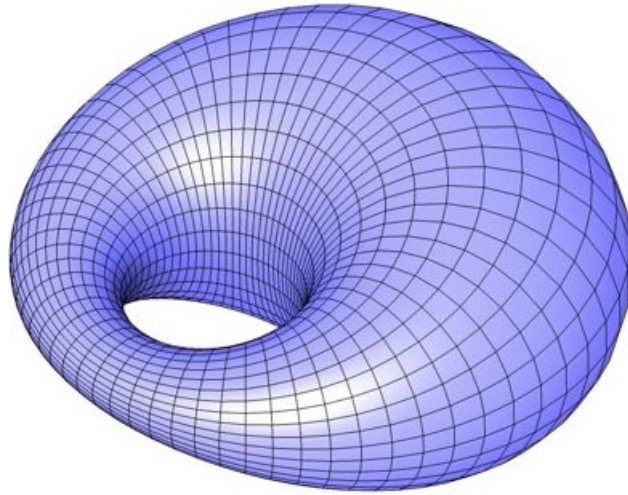


Рис. 1.1. Циклида Дюпена в  $\mathbb{R}^3$

и свойствами трехмерных циклид Дюпена они были названы многомерными циклидами Дюпена. Например, было показано, что многомерные циклиды Дюпена являются конформным образом одной из трех типов гиперповерхностей: тора, конической поверхности или цилиндрической поверхности.

Заметим, что в Теореме 2 также даны  $n$  сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и рассматриваются цепочки Эмха, состоящие из сфер, касающихся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Таким образом, цепочки Эмха состоят из сфер семейства  $\mathcal{W}$ . С учетом этого, Теореме 2 можно переформулировать, используя понятие циклиды Дюпена.

**Теорема 2'.** *Сферы, вписанные в циклиду Дюпена, обладают свойством замыкания на любой окружности пространства.*

Для доказательства этих теорем нам понадобятся некоторые свойства циклид Дюпена.

Заметим, что  $n-1$  радикальная гиперплоскость пар сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ,  $\dots$ ,  $\omega_{n-1}$  и  $\omega_n$  пересекается по некоторой прямой  $\xi$ , каждая точка которой имеет равные степени относительно всех сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Отсюда следует, что  $n$ -ая радикальная гиперплоскость пары  $\omega_n$  и  $\omega_1$  тоже проходит через прямую  $\xi$ . Назовем прямую  $\xi$  *радикальной осью* сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .



Пусть  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  – две произвольные сферы семейства  $\mathcal{W}$ . Из свойства 8° инверсии следует, что центр  $\mathbf{o}_{\omega'_1\omega'_2}$  серединной сферы  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  имеет равные степени относительно всех сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Поэтому,  $\mathbf{o}_{\omega'_1\omega'_2} \in \xi$ .

Сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  имеют две общие касательные гиперплоскости (возможно мнимые), которые пересекаются по плоскости  $\pi$  размерности  $n - 2$ , содержащей центры  $\mathbf{o}_{\omega_i\omega_j}$  серединных сфер всех пар  $\omega_i, \omega_j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . При этом, точки  $\mathbf{o}_{\omega_i\omega_j}$  имеют равные степени относительно всех сфер семейства  $\mathcal{W}$ . Этим же свойством обладает любая точка пространства  $\tilde{\pi}$ , натянутого на точки  $\mathbf{o}_{\omega_i\omega_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Будем считать, что точки  $\mathbf{o}_{\omega_i\omega_j}$  находятся в общем положении (если это не так, то при подходящей инверсии для образов сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  это уже будет выполняться). Так как их количество равно  $C_n^2 \geq n - 1$  и все они лежат в плоскости  $\pi$  размерности  $n - 2$ , то  $\tilde{\pi} = \pi$ .

**Предложение 12.** Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – ориентированные сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда множество точек касания сфер семейства  $\mathcal{W}$  с каждой из сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  образует окружность. Плоскости этих  $n$  окружностей, проходят через радикальную ось  $\xi$  сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\pi$  – пространство, натянутое на точки  $\mathbf{o}_{\omega_i\omega_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Как было замечено выше,  $\dim \pi = n - 2$ .

Докажем утверждение, например, для сферы  $\omega_1$ : множество точек ее касания со сферами семейства  $\mathcal{W}$  образует окружность, плоскость которой проходит через прямую  $\xi$ . Пусть сфера  $\omega' \in \mathcal{W}$  касается  $\omega_1$  в точке  $\mathbf{x}(\omega')$ . Рассмотрим радикальную гиперплоскость  $p(\omega')$  сфер  $\omega'$  и  $\omega_1$ , которая касается их в точке  $\mathbf{x}(\omega')$ . Для плоскости  $\eta = p(\omega') \cap \pi$  имеем  $\dim \eta = n - 3$ . Каждая точка плоскости  $\eta$  имеет равные степени относительно сферы  $\omega_1$  и всех сфер  $\omega' \in \mathcal{W}$ . Следовательно, плоскость  $\eta$  принадлежит всем гиперплоскостям  $p(\omega')$ ,  $\omega' \in \mathcal{W}$ . По принципу полярной двойственности, точка  $\mathbf{x}(\omega')$  сопряжена относительно сферы  $\omega_1$  всем точкам плоскости  $\eta$ . Это означает,

что точка  $\mathbf{x}(\omega')$  лежит в пересечении полярных гиперплоскостей всех точек плоскости  $\eta$ . Заметим, что каждая такая гиперплоскость проходит через точки касания сферы  $\omega_1$  с любыми двумя сферами  $\omega'_1, \omega'_2 \in \mathcal{W}$ , и следовательно, содержит их центр подобия  $\mathbf{o}_{\omega'_1\omega'_2}$ . Поэтому, пересечение всех таких гиперплоскостей содержит прямую  $\xi$ . Так как  $\dim \eta + \dim \eta^* = n - 1$ , а  $\dim \eta = n - 3$ , то  $\dim \eta^* = 2$ . Следовательно,  $\eta^*$  – двумерная плоскость, проходящая через прямую  $\xi$ , а точка  $\mathbf{x}(\omega')$  при  $\omega' \in \mathcal{W}$  пробегает окружность  $\omega_1 \cap \eta^*$ .

□

Таким образом, описанная около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  циклида  $\mathcal{T}$  касается этих сфер вдоль некоторых окружностей  $s(\omega_1), s(\omega_2), \dots, s(\omega_n)$ . Назовем их *окружностями Дюпена*.

Каждая из сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  касается всех сфер семейства  $\mathcal{W}$ . Множество  $\mathcal{W}^*$  сфер с таким свойством назовем *сопряженным семейству  $\mathcal{W}$* . Получается, что любая сфера семейства  $\mathcal{W}$  касается любой сферы семейства  $\mathcal{W}^*$ .

**Предложение 13.** *В каждой точке циклиды  $\mathcal{T}$ , описанной около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , ее касается некоторая сфера семейства  $\mathcal{W}^*$ . Таким образом, циклида Дюпена – это множество точек касания всех пар сфер  $\omega' \in \mathcal{W}$  и  $\omega \in \mathcal{W}^*$ .*

**Доказательство.** Для каждой точки  $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$  существует сфера  $\omega'_x \in \mathcal{W}$ , проходящая через точку  $\mathbf{x}$ . Рассмотрим еще три произвольные сферы  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  семейства  $\mathcal{W}$ . По Лемме 1.10 при сечении сфер семейства  $\mathcal{W}$  любой плоскостью, проходящей через прямую  $\xi$ , попарные касательные расстояния сохраняются. В частности, они такие же, как и для плоскости, содержащей окружность Дюпена  $s(\omega_1)$  сферы  $\omega_1$ . Эта плоскость пересекает сферы  $\omega'_x, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  по окружностям  $s(\omega'_x), s(\omega'_1), s(\omega'_2), s(\omega'_3)$ , которые все касаются окружности Дюпена  $s(\omega_1)$ . Тогда по теореме Кейзи (1.4) и для любой другой плоскости, проходящей через прямую  $\xi$ , в ее сечении сфер  $\omega'_x, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  будут получаться

такие четыре окружности, для которых существует пятая окружность в этой плоскости, касающаяся их. Так и при сечении плоскостью  $\pi_{\mathbf{x}}$ , проходящей через точку  $\mathbf{x}$  и прямую  $\xi$ , получим окружности  $s_{\mathbf{x}}(\omega'_{\mathbf{x}}), s_{\mathbf{x}}(\omega'_1), s_{\mathbf{x}}(\omega'_2), s_{\mathbf{x}}(\omega'_3)$ , для которых существует касающаяся их окружность  $s_{\mathbf{x}}$ . Поскольку все парные центры подобия сфер семейства  $\mathcal{W}$  лежат на прямой  $\xi$ , плоскость  $\pi_{\mathbf{x}}$  пересекает все сферы семейства  $\mathcal{W}$  под равными углами. Поэтому, через окружность  $s_{\mathbf{x}}$  можно провести сферу  $\omega_{\mathbf{x}}$ , которая, так же как и окружность  $s_{\mathbf{x}}$ , касается сфер  $\omega'_{\mathbf{x}}, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ .

Так как сферы  $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$  были выбраны произвольно из семейства  $\mathcal{W}$ , мы теперь фиксируем  $\omega'_1, \omega'_2$ , а сфера  $\omega'_3$  пусть пробегает все семейство  $\mathcal{W}$ . При этом, в плоскости  $\pi_{\mathbf{x}}$  соответствующая ей окружность  $s_{\mathbf{x}}(\omega'_3)$  будет касаться окружности  $s_{\mathbf{x}}$ . Значит и сфера  $\omega'_3$  будет всегда касаться сферы  $\omega_{\mathbf{x}}$ . Иными словами, сфера  $\omega_{\mathbf{x}}$  касается всех сфер семейства  $\mathcal{W}$ , то есть  $\omega_{\mathbf{x}} \in \mathcal{W}^*$ .

□

**Предложение 14.** *Множество точек касания сфер семейства  $\mathcal{W}^*$  с каждой сферой  $\omega' \in \mathcal{W}$  является пересечением сферы  $\omega'$  с некоторой гиперплоскостью, то есть образует сферу размерности  $n - 2$ .*

**Доказательство.** Для каждой сферы  $\omega \in \mathcal{W}^*$  обозначим точку ее касания с  $\omega'$  через  $\mathbf{x}_{\omega}$ . Пусть касательная гиперплоскость в точке  $\mathbf{x}_{\omega}$  к сфере  $\omega'$  пересекает радикальную ось  $\xi$  сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в точке  $\mathbf{a}$ . Тогда  $\mathbf{a}$  – это радикальный центр сфер семейства  $\mathcal{W}^*$  и сферы  $\omega'$ . Следовательно, геометрическое место точек  $\mathbf{x}_{\omega}$  – это пересечение сферы  $\omega'$  с полярной гиперплоскостью точки  $\mathbf{a}$  относительно  $\omega'$ .

□

Таким образом, поверхность, которую огибают сферы семейства  $\mathcal{W}^*$  совпадает с циклидой Дюпена, которую огибают сферы семейства  $\mathcal{W}$ . Другими словами, циклида Дюпена имеет два семейства  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{W}^*$  касающихся ее сфер.

Эти свойства циклиды Дюпена позволяют вывести ее уравнение по уравнениям сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

Пусть  $\mathbf{x}$  – произвольная точка циклиды  $\mathcal{T}$ , описанной около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . По Предложению 13 есть сфера  $\omega' \in \mathcal{W}$ , которая касается  $\mathcal{T}$  в точке  $\mathbf{x}$ . Но сфера  $\omega'$  касается также сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , причем по Предложению 14 точки касания лежат на одной гиперплоскости с точкой  $\mathbf{x}$ . Тогда для сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и точки  $\mathbf{x}$  (сферы нулевого радиуса) по Теореме 11 должно выполняться соотношение

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\mathbf{x}\omega_1}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \tau_{\mathbf{x}\omega_2}^2 \\ \tau_{\omega_1\omega_3}^2 & \tau_{\omega_2\omega_3}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega_3\omega_n}^2 & \tau_{\mathbf{x}\omega_3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \tau_{\omega_3\omega_n}^2 & \cdots & 0 & \tau_{\mathbf{x}\omega_n}^2 \\ \tau_{\mathbf{x}\omega_1}^2 & \tau_{\mathbf{x}\omega_2}^2 & \tau_{\mathbf{x}\omega_3}^2 & \cdots & \tau_{\mathbf{x}\omega_n}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

Поскольку квадрат касательного расстояния  $\tau_{\mathbf{x}\omega_i}^2$  точки  $\mathbf{x}$  и сферы  $\omega_i$  равен степени точки  $\mathbf{x}$  относительно сферы  $\omega_i$ , получаем

**Теорема 15.** *Циклида Дюпена  $\mathcal{T}$ , описанная около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в  $\mathbb{R}^n$ , задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \cdots & \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \sigma_{\omega_1}(\mathbf{x}) \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \cdots & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \sigma_{\omega_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \cdots & 0 & \sigma_{\omega_n}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{\omega_1}(\mathbf{x}) & \sigma_{\omega_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \sigma_{\omega_n}(\mathbf{x}) & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.13)$$

где  $\sigma_{\omega_i}(\mathbf{x})$  – это степень точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  относительно сферы  $\omega_i$ .

**Следствие 16.** Циклида Дюпена, описанная около сфер  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  в  $\mathbb{R}^3$ , задается уравнением

$$t_{23}^4 \sigma_1^2(\mathbf{x}) + t_{13}^4 \sigma_2^2(\mathbf{x}) + t_{12}^4 \sigma_3^2(\mathbf{x}) - \\ - 2t_{12}^2 t_{13}^2 \sigma_2(\mathbf{x}) \sigma_3(\mathbf{x}) - 2t_{12}^2 t_{23}^2 \sigma_1(\mathbf{x}) \sigma_3(\mathbf{x}) - 2t_{13}^2 t_{23}^2 \sigma_1(\mathbf{x}) \sigma_2(\mathbf{x}) = 0,$$

где  $t_{ij} = \tau_{\omega_i \omega_j}$ ,  $\sigma_i(\mathbf{x}) = \sigma_{\omega_i}(\mathbf{x})$ .

## 1.4. Инвариантная мера для многомерной теоремы Эмха

Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – произвольные ориентированные гиперсферы, а  $\delta$  – произвольная окружность в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим сферу  $\omega'$ , касающуюся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и пересекающую  $\delta$  в некоторых точках  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . Пусть  $\omega'_\varepsilon$  – сфера, близкая к  $\omega'$  и тоже касающаяся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Через  $\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon$  обозначим соответствующие точки ее пересечения с окружностью  $\delta$  ( $\mathbf{x}_\varepsilon$  близка к  $\mathbf{x}$ ). Пусть  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$  – это ориентированные длины малых дуг  $\overset{\sim}{\mathbf{x}_\varepsilon \mathbf{x}}$  и  $\overset{\sim}{\mathbf{y}_\varepsilon \mathbf{y}}$  окружности  $\delta$  при  $\omega'_\varepsilon \rightarrow \omega'$ . Таким образом, если сферу  $\omega'$  слегка пошевелить, точки ее пересечения с окружностью  $\delta$  подвинутся на  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$ .

**Определение 6.** Даны окружность  $\delta$  и  $n$  ориентированных гиперсфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Измеримая по Лебегу функция  $\rho : \delta \rightarrow \mathbb{R}_+$  определяет инвариантную меру, если для почти всех сфер  $\omega' \in \mathcal{W}$  выполняется

$$\rho(\mathbf{x}) |d\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{y}) |d\mathbf{y}|, \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  – это точки пересечения сферы  $\omega'$  и окружности  $\delta$ .

Для произвольной дуги  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}} \subset \delta$  обозначим через

$$m(\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} \rho(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

ее меру, или *массу*.

Рассмотрим циклиду Дюпена  $\mathcal{T}$ , описанную около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Циклида Дюпена является дважды каналовой гиперповерхностью. Рассмотрим сначала случай, когда окружность  $\delta$  целиком вложена в один канал циклиды  $\mathcal{T}$  так, что ее нельзя гомотопно стянуть в точку, не выходя из него. Плоскость окружности  $\delta$  в таком случае пересекает циклиду  $\mathcal{T}$  по двум кривым, которые с окружностью  $\delta$  образуют вложенную систему кривых (окружность  $\delta$  лежит в кольце между ними). Назовем окружность  $\delta$  с таким расположением *вложенной*. В этом случае при всяком малом шевелении сферы  $\omega'$  точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  движутся в одном направлении. Значит,  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$  всегда имеют один знак, и равенство (1.14) становится таким  $\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ . Интегрируя, получаем  $m(\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \equiv \text{const}$ . Таким образом, все сферы  $\omega' \in \mathcal{W}$  вырезают дуги одинаковой массы  $\tilde{m}$  на окружности  $\delta$ . В частности, в многомерной теореме Эмха (Теорема 2) выполняется равенство  $m(\mathbf{x}_k \widetilde{\mathbf{x}_{k+1}}) = \tilde{m}$  для всех  $k$ . Следовательно, цепочки сфер замыкаются через  $n$  шагов тогда и только тогда, когда  $n\tilde{m}$  является целым кратным  $m(\delta)$ . Это доказывает многомерную теорему Эмха в случае вложенной окружности  $\delta$ . Таким образом, само существование инвариантной меры влечет Теорему 2 для случая вложенной окружности  $\delta$ . Сначала мы докажем, что такая инвариантная мера действительно существует, а затем, в разделе 1.7, мы рассмотрим общий случай взаимного расположения сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и окружности  $\delta$ .

Итак, мы представляем явную формулу инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха.

**Теорема 17.** Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  даны  $n$  ориентированных сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , для которых множество  $\mathcal{W}$  сфер, касающихся их, не пусто. Через  $\sigma_i(\mathbf{x})$  обозначим степень точки  $\mathbf{x}$  относительно сферы  $\omega_i$ , а через  $\tau_{\omega_i \omega_j}$  — касательное расстояние между сферами  $\omega_i$  и  $\omega_j$ . Тогда функция

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathcal{C}(\mathbf{x}))|}}, \quad (1.15)$$

$$\text{где } \mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \dots & \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \sigma_1(\mathbf{x}) \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \dots & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \sigma_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \dots & 0 & \sigma_n(\mathbf{x}) \\ \sigma_1(\mathbf{x}) & \sigma_2(\mathbf{x}) & \dots & \sigma_n(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

определяет на всякой окружности  $\delta \in \mathbb{R}^n$  инвариантную меру для обобщенного процесса Эмха сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  на окружности  $\delta$ .

Заметим, что функция  $\rho(\mathbf{x})$  определена на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$  и не зависит от окружности  $\delta$ . По Теореме 15 она равна  $+\infty$  на циклиде  $\mathcal{T}$ . Ограничение этой функции на любую окружность определяет инвариантную меру на ней.

Из теоремы 15 следует, что уравнение циклиды Дюпена имеет вид

$$\lambda \|\mathbf{x}\|^4 + l(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|^2 + Q(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\|\mathbf{x}\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ , многочлен  $l(\mathbf{x})$  – линейный,  $\deg Q(\mathbf{x}) \leq 2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (далее будем считать, что  $\lambda = 1$ ).

**Определение 7.** Пусть  $\omega$  – произвольная поверхность. Две алгебраические поверхности называются  $\omega$ -эквивалентными, если многочлены, задающие эти поверхности, совпадают на  $\omega$  с точностью до коэффициента.

**Лемма 18.** Пусть даны циклида  $\mathcal{T}$  и сфера  $\omega$ . Тогда множество квадрик,  $\omega$ -эквивалентных  $\mathcal{T}$ , образует пучок, содержащий сферу  $\omega$ .

**Доказательство.** Пусть циклида  $\mathcal{T}$  задана уравнением (1.16), а сфера  $\omega$  – квадратичной формой  $\sigma_\omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + l_\omega(\mathbf{x}) + c_\omega$ , где  $l_\omega(\mathbf{x})$  линейна,  $c_\omega \in \mathbb{R}$ .

Многочлен  $p(\mathbf{x})$  обладает свойством  $\deg(\mathcal{T}(\mathbf{x}) - \sigma_\omega(\mathbf{x})p(\mathbf{x})) \leq 2$  тогда и только тогда, когда

$$p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 + (l - l_\omega)(\mathbf{x}) + c_p, \quad (1.17)$$

где  $l(\mathbf{x})$  из уравнения (1.16) циклиды  $\mathcal{T}$ ,  $c_p \in \mathbb{R}$ . Обозначим через  $p_0(\mathbf{x})$  многочлен  $p(\mathbf{x})$  при  $c_p = 0$ . Тогда любая  $\omega$ -эквивалентная циклиде  $\mathcal{T}$  квадрака задается уравнением

$$(\mathcal{T}(\mathbf{x}) - \sigma_\omega(\mathbf{x})p_0(\mathbf{x})) - c_p \cdot \sigma_\omega(\mathbf{x}) = 0.$$

Для всех  $c_p \in \mathbb{R}$  множество таких квадрик образуют пучок.

□

Рассмотрим циклиду  $\mathcal{T}$ , описанную около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Согласно Предложению 14 каждая сфера  $\omega' \in \mathcal{W}$  касается циклиды  $\mathcal{T}$  в точках пересечения  $\omega'$  с некоторой гиперплоскостью  $\pi_{\omega'}$ , на которой, в частности, лежат  $n$  точек касания сферы  $\omega'$  со сферами  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .

**Предложение 19.** *Для любой сферы  $\omega'$  семейства  $\mathcal{W}$  циклиды  $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = 0$ , функция  $\mathcal{T}(\mathbf{x})|_{\omega'}$  пропорциональна квадрату расстояния от точки  $\mathbf{x}$  до гиперплоскости  $\pi_{\omega'}$ . Таким образом, для любых точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \omega'$*

$$\frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})} = \frac{\sqrt{|\mathcal{T}(\mathbf{x})|}}{\sqrt{|\mathcal{T}(\mathbf{y})|}}.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $\gamma_{\omega'}$  сферу (размерности  $n - 2$ ), по которой сфера  $\omega'$  касается циклиды  $\mathcal{T}$ . Все квадрики, которые  $\omega'$ -эквивалентны циклиде  $\mathcal{T}$ , касаются сферы  $\omega'$  вдоль сферы  $\gamma_{\omega'}$ , а по Лемме 18 они образуют пучок. Но и квадрики, касающиеся сферы  $\omega'$  вдоль сферы  $\gamma_{\omega'}$ , образуют пучок, содержащий двойную плоскость  $\pi_{\omega'}$  (см. [5, п. 16.4.10]), в которой лежит сфера  $\gamma_{\omega'}$ . Следовательно, эти два пучка совпадают. В частности, двойная плоскость  $\pi_{\omega'}$  тоже  $\omega'$ -эквивалентна циклиде  $\mathcal{T}$ . Таким образом, функция  $\mathcal{T}(\mathbf{x})|_{\omega'}$  пропорциональна квадрату расстояния до плоскости  $\pi_{\omega'}$ .

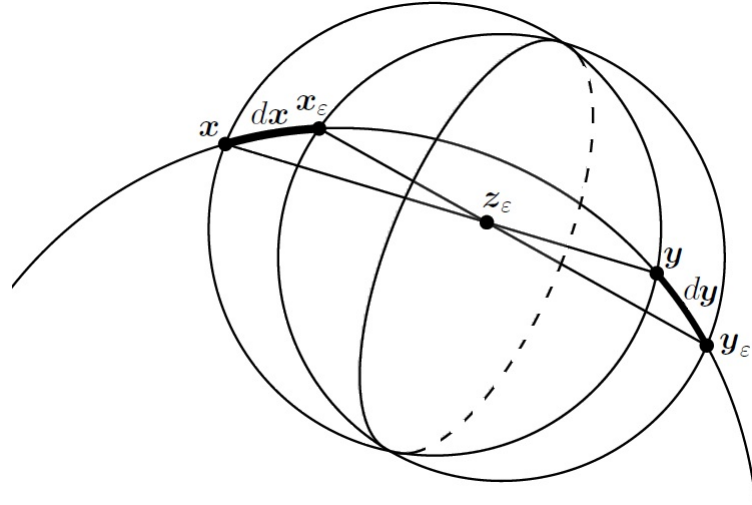
□

Итак, докажем теперь Теорему 17.

*Доказательство.* Пусть  $\omega'_\varepsilon$  – близкая к  $\omega'$  сфера семейства  $\mathcal{W}$ . Обозначим



точки пересечения окружности  $\delta$  со сферой  $\omega'$  через  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , а со сферой  $\omega'_\varepsilon$  — через  $\mathbf{x}_\varepsilon$  и  $\mathbf{y}_\varepsilon$  ( $\mathbf{x}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{y}$  при  $\omega'_\varepsilon \rightarrow \omega'$ ). Тогда точка  $\mathbf{z}_\varepsilon$  пересечения



прямых  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}_\varepsilon\mathbf{y}_\varepsilon$  имеет одинаковую степень относительно сфер  $\omega'_\varepsilon$  и  $\omega'$ , и следовательно, лежит на их радикальной гиперплоскости  $\pi_\varepsilon$ . Так как точки  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{y}, \mathbf{y}_\varepsilon$  лежат на окружности  $\delta$ , то  $\Delta\mathbf{x}\mathbf{x}_\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon \sim \Delta\mathbf{y}_\varepsilon\mathbf{y}\mathbf{z}_\varepsilon$ . Значит,

$$\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_\varepsilon}{\mathbf{y}\mathbf{y}_\varepsilon} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{z}_\varepsilon}{\mathbf{y}_\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon}.$$

В пределе  $\omega'_\varepsilon \rightarrow \omega'$  точка  $\mathbf{z}_\varepsilon$  стремится к точке  $\mathbf{z}$  пересечения прямой  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  с гиперплоскостью  $\pi_{\omega'}$ . Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{z}}{\mathbf{y}\mathbf{z}} = \frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})}. \quad (1.18)$$

Тогда из Предложения 19 получаем

$$\frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{|\mathcal{J}(\mathbf{x})|}} = \frac{d\mathbf{y}}{\sqrt{|\mathcal{J}(\mathbf{y})|}},$$

а Теорема 15 нам дает выражение для функции  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  циклиды  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = 0$ . Имеем  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \det(\mathcal{C}(\mathbf{x}))$ , где

$$\mathfrak{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & \dots & \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \sigma_1(\mathbf{x}) \\ \tau_{\omega_1\omega_2}^2 & 0 & \dots & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \sigma_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau_{\omega_1\omega_n}^2 & \tau_{\omega_2\omega_n}^2 & \dots & 0 & \sigma_n(\mathbf{x}) \\ \sigma_1(\mathbf{x}) & \sigma_2(\mathbf{x}) & \dots & \sigma_n(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи Теоремы 17. Поскольку из многомерной теоремы Эмха выводятся четыре классические теоремы о замыкании, мы легко получим инвариантные меры для них.

#### 1.4.1. Инвариантная мера для классической теоремы Эмха

Плоским аналогом циклиды Дюпена является пара окружностей. А в качестве функции  $\mathcal{T}(\mathbf{x})$  в этом случае будет произведение  $\sigma_0(\mathbf{x}) \cdot \sigma_1(\mathbf{x})$  квадратных форм этих окружностей. Получаем инвариантную меру для теоремы Эмха:

**Теорема 20.** Пусть  $\sigma_0(\mathbf{x})$  и  $\sigma_1(\mathbf{x})$  – степени точки  $\mathbf{x}$  относительно окружностей  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Тогда на любой окружности  $\delta$  мера с плотностью

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_0(\mathbf{x}) \cdot \sigma_1(\mathbf{x})|}} \quad (1.19)$$

является инвариантной для процесса Эмха относительно  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ .

Таким образом, если окружность  $\omega$  пробегает семейство  $\mathcal{W}$  окружностей, касающихся  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  определенным образом, то она высекает на окружности  $\delta$  дугу  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ , изменяющуюся по закону

$$\rho(\mathbf{x})|d\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{y})|d\mathbf{y}|,$$

где  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$  – ориентированные длины малых дуг, которые заметают точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Для вложенных окружностей (рис. 1.2) эти дуги всегда имеют одну

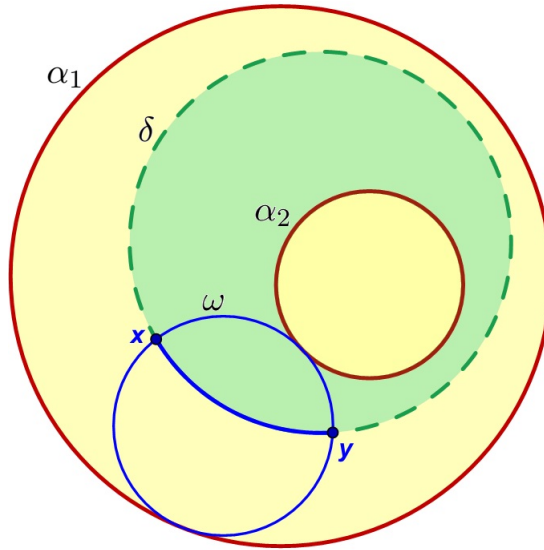


Рис. 1.2. Инвариантная мера для теоремы Эмха.

ориентацию и тогда  $\rho(\mathbf{x})|d\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{y})|d\mathbf{y}|$ . Интегрируя это равенство, получаем

$$\mu(\tilde{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = \int_{\tilde{\mathbf{x}\mathbf{y}}} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{|\sigma_0(\mathbf{x}) \cdot \sigma_1(\mathbf{x})|}} = \text{const} := c_\delta.$$

Следовательно, замыкание процесса Эмха происходит тогда и только, когда  $nc_\delta \in \mathbb{N}$ . Это инвариантное для всех цепочек Эмха условие влечет теорему Эмха для случая вложенных окружностей. Общий случай мы рассмотрим в Разделе 1.7.

#### 1.4.2. Инвариантная мера для теоремы Понселе

Нормируем меру

$$\mu(\mathcal{A}) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{A}} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{|\sigma_\alpha(\mathbf{x})\sigma_\beta(\mathbf{x})|}} \quad (1.20)$$

взяв в качестве  $c$  интеграл  $\int_{\delta} \frac{dl}{\sqrt{|\sigma_\alpha(\mathbf{x})\sigma_\beta(\mathbf{x})|}}$  по всей окружности  $\delta$ .

Если окружность  $\alpha$  концентрична с  $\delta$ , то степень  $\sigma_\alpha(\mathbf{x})$  одна и та же для всех  $\mathbf{x} \in \delta$  и ее можно вынести за знаки обоих интегралов и сократить.

Тогда получим

$$\mu(\mathcal{A}) = \left( \int_{\delta} \frac{dl}{\sqrt{|\sigma_{\beta}(\mathbf{x})|}} \right)^{-1} \int_{\mathcal{A}} \frac{dl}{\sqrt{|\sigma_{\beta}(\mathbf{x})|}}. \quad (1.21)$$

Устремим радиус окружности  $\alpha$  к бесконечности, тогда отображение Эмха на окружности  $\delta$  перейдет в отображение Понселе относительно окружности  $\beta$ , для которого мера (1.21) является инвариантной. Следовательно, теорема Эмха становится теоремой Понселе (для окружностей), а мера  $\mu$  становится мерой Якоби-Бертрана. Таким образом, свойство инвариантности меры Якоби-Бертрана следует из теоремы 20.

### 1.4.3. Инвариантная мера для теоремы Штейнера

Если окружность  $\delta$  принадлежит пучку  $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ , то функции  $\sigma_0(\mathbf{x})$  и  $\sigma_1(\mathbf{x})$  пропорциональны на  $\delta$ :  $\sigma_0(\mathbf{x}) = c\sigma_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \delta$ . Следовательно,

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{c_1}{\sigma_0(\mathbf{x})}.$$

Пусть теперь  $\delta$  – это срединная окружность  $\{\alpha_0$  и  $\alpha_1\}$ , т. е.  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  инверсны относительно  $\delta$ . Значит,  $\delta$  принадлежит пучку  $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ . Поскольку  $\delta$  содержит точки касания соседних окружностей цепочек Штейнера, мы получаем теорему Штейнера.

Таким образом, *инвариантная мера для теоремы Штейнера обратно пропорциональна степени относительно окружности  $\alpha_0$ .*

### 1.4.4. Инвариантная мера для теоремы о зигзаге

Если  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  концентричны, то теорема Эмха превращается в теорему о зигзаге для окружностей  $\delta$  и  $\alpha$  (окружность  $\alpha$  имеет радиус  $r = \frac{r_0 + r_1}{2}$  и концентрична  $\alpha_0, \alpha_1$ ), а длина прыжка равна  $l = \frac{|r_1 - r_0|}{2}$ .

Мера  $\rho(\cdot)$  на окружности  $\delta$  в этом случае становится мерой Блэка-Хоулэнда  $b(\cdot)$  для теоремы о зигзаге [54]. Она определяется как

$$b(\mathbf{x}) = \frac{1}{|(\mathbf{x} - \mathbf{c}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{z})|}, \quad (1.22)$$

где  $\mathbf{x} \in \delta$ , а точка  $\mathbf{z} \in \alpha$  такова, что  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| = l$ . Иными словами,  $1/b(\mathbf{x})$  – это удвоенная площадь треугольника со сторонами  $x = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_0|$ ,  $\frac{r_1 + r_0}{2}$  и  $\frac{|r_1 - r_0|}{2}$  (рис. 1.3). По формуле Герона

$$\begin{aligned} \frac{1}{b(\mathbf{x})} &= \frac{1}{2} \sqrt{(r_1 + x)(r_1 - x)(x + r_0)(x - r_0)} = \frac{1}{2} \sqrt{(r_1^2 - x^2)(x^2 - r_0^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\sigma_1(\mathbf{x}) \cdot \sigma_0(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Значит,  $b(\mathbf{x}) = 2\rho(\mathbf{x})$  для всех  $\mathbf{x} \in \delta$ . Таким образом, мера Блэка-Хоулэнда является частным случаем  $\rho(\cdot)$ , когда окружности  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  концентричны.

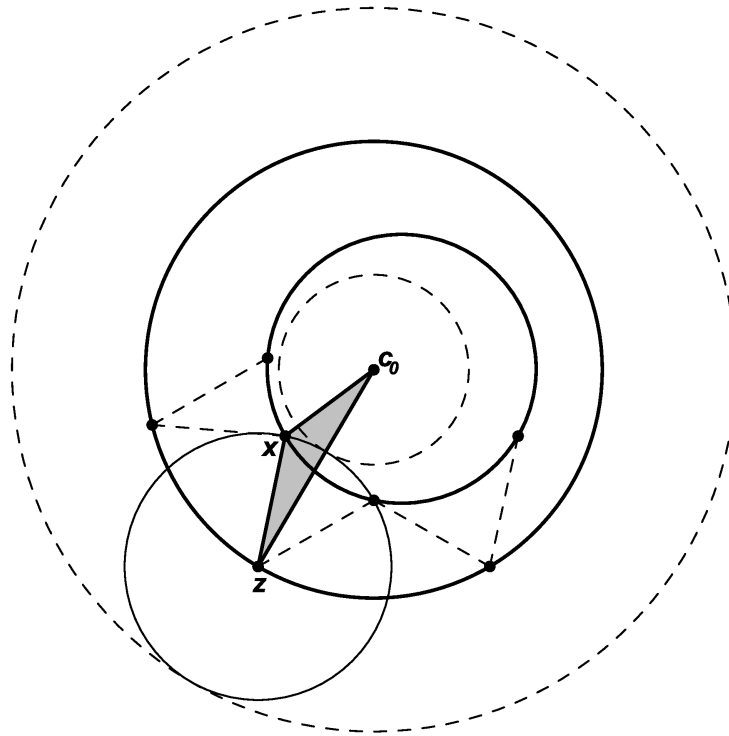


Рис. 1.3. Инвариантная мера для теоремы о зигзаге

Теорема 20 дает нам явный (в отличие от 1.22) вид инвариантной меры для зигзаг процесса:

**Теорема 21.** Пусть на окружности  $\delta$  задан зигзаг процесс  $\zeta: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  с расстоянием  $l$  и второй окружностью  $\alpha$  радиуса  $R$  и центром в точке  $O$ . Т.е. точке  $\mathbf{x} \in \delta$  отображение  $\zeta$  ставит в соответствие такую точку  $\mathbf{x}' \in \delta$ , что на окружности  $\alpha$  есть точка  $\mathbf{z}$ , равноудаленная на расстояние  $l$  от точек  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ . Тогда мера

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|O\mathbf{x}^2 - (R-l)^2| \cdot |O\mathbf{x}^2 - (R+l)^2|}}.$$

инвариантна относительно  $\zeta$ .

## 1.5. Обобщение принципа Эмха на циклиды Дарбу

При доказательстве Теоремы 17, мы пользовались тем, что уравнение циклиды Дюпена имеет вид

$$\lambda \|\mathbf{x}\|^4 + l(\mathbf{x}) \cdot \|\mathbf{x}\|^2 + Q(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.23)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\|\mathbf{x}\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , функция  $l(\mathbf{x})$  линейна, а степень многочлена  $\deg Q(\mathbf{x}) \leq 2$ .

На самом деле, уравнения вида 1.23 описывают более широкий класс поверхностей, которые называются *циклидами Дарбу*. Циклиды Дарбу обладают многими замечательными свойствами [20, 21]. Одно из них заключается в том, что на поверхности любой циклиды имеются семейства окружностей [22]. Таких семейств может быть целых шесть [23], хотя для разных циклид их количество может быть другим. Например, на стандартном торе их четыре: кроме двух очевидных есть еще два семейства окружностей Виларсо [5].

При этом, семейства окружностей на циклидах Дарбу бывают двух типов: *парные* и *одиночные* [22]. Парные семейства окружностей обладают тем свойством, что любая сфера, проходящая через любую окружность одного из них, пересекает циклиду по еще одной окружности, которая принадлежит

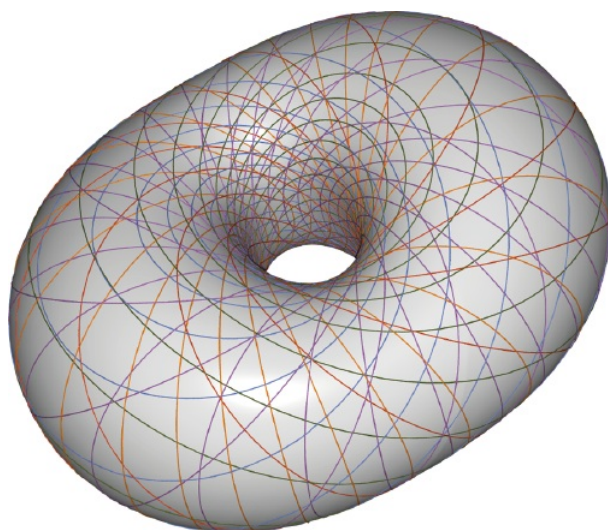


Рис. 1.4. Циклида Дарбу с 6 семействами окружностей.

второму семейству. Например, семейства окружностей Виларсо на торе образуют пару. А для одиночного семейства окружностей на циклиде Дарбу любая сфера, проходящая через любую его окружность пересекает циклиду по некоторой другой окружности этого же семейства. При этом, для каждой окружности одиночного семейства существует сфера, касающаяся циклиды вдоль этой окружности. Циклиды, у которых есть хотя бы одно одиночное семейство окружностей, называются *каналовыми*. Например, циклида Дюпена является каналовой: сферы семейства  $\mathcal{W}$  касаются ее вдоль окружностей, которые образуют одиночное семейство.<sup>2</sup>

Таким образом, так же как и у циклид Дюпена, у каналовых циклид Дарбу имеется семейство вписанных в них сфер. Для них оказывается верным аналогичное Теореме 2' утверждение:

**Теорема 22.** *Сферы, вписанные в каналовую циклиду Дарбу, обладают свойством замыкания на любой окружности пространства.*

Инвариантная мера для этой теоремы имеет такой же вид, как и для мно-

---

<sup>2</sup> Можно показать, что если циклида Дарбу дважды каналовая, т.е. имеет два одиночных семейства окружностей, то она является циклидой Дюпена.

гомерной теоремы Эмха:  $\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{J}(\mathbf{x})}$ , где  $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = 0$  – уравнение циклиды Дарбу. Доказательство остается таким же (см. Раздел 1.4). Более того, оно подходит для любой размерности пространства. Интересное следствие получается в двумерном случае. Плоским аналогом циклид Дарбу являются так называемые *циклики*.

### 1.5.1. Теорема Эмха для циклик

*Циклика* – это плоская алгебраическая кривая четвертого порядка, определяемая уравнением

$$F(x_1, x_2) = \lambda(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_2^2)\ell(x_1, x_2) + Q(x_1, x_2) = 0,$$

где  $\ell$  – это линейная форма и  $Q$  – многочлен не более чем второй степени. Пара окружностей на плоскости всегда является цикликой, но не наоборот. Произвольная коника тоже является цикликой. Некоторые свойства циклик можно найти в [21, Гл. 4, п. 2]. Нилов в [49] доказал, что теорема Эмха остается верной при замене пары окружностей  $\alpha_0, \alpha_1$  произвольной цикликой  $\Gamma$ . В этом случае, все окружности  $\omega_k$  имеют *двойное касание* (т.е. две точки касания) с  $\Gamma$ .

С учетом комплексных касаний, существует четыре семейства окружностей, дважды касающихся  $\Gamma$ , все  $\omega_k$  принадлежат одному из них [21]. Доказательство в [49] геометрическое и опирается на теорему Понселе для коник. Инвариантная мера дает нам возможность дать независимое доказательство.

**Теорема 20'.** *Функция  $\rho(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{|F(\mathbf{x})|}$  порожденная цикликой  $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F(\mathbf{x}) = 0\}$  определяет инвариантную меру на любой окружности плоскости.*



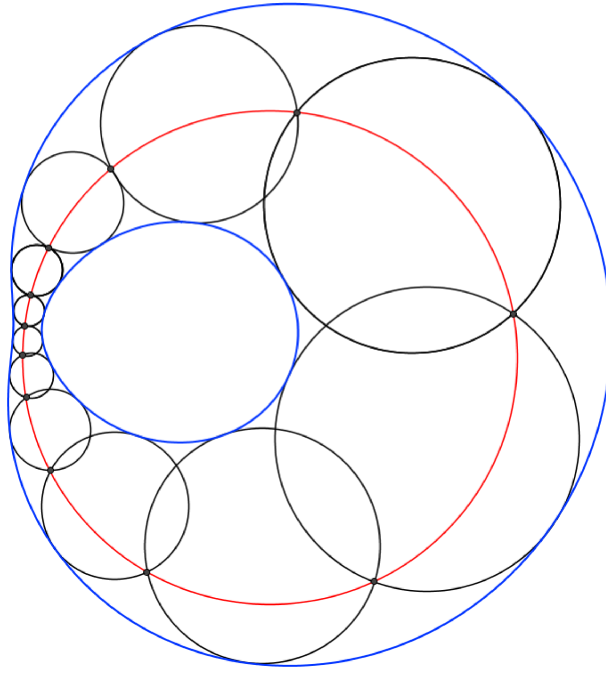


Рис. 1.5. Теорема Эмха для циклик

## 1.6. Обобщения теоремы Эмха на пучки окружностей

Для большей наглядности в этом разделе мы рассмотрим случай вложенных окружностей. Общий случай разбирается в Разделе 1.7. Кроме того, говоря о касании окружностей, будем подразумевать, что эти окружности ориентированные. Это поможет избежать уточнения каждый раз индексов касания. Через  $\mathbf{c}_i, r_i$ , и  $f_i(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{c}_i| - r_i^2$  обозначим соответственно центры окружностей  $\alpha_i$ , их радиусы, и степени относительно  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1$ . Для цепочки окружностей  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , обозначим через  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$  точки пересечения окружности  $\omega_k$  с  $\delta$  и через  $\mathbf{t}_0^k, \mathbf{t}_1^k$  — точки их касания с  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  соответственно.

Мера  $\rho$  позволяет получить обобщение теоремы Эмха с одной пары окружностей  $(\alpha_0, \alpha_1)$  на произвольную последовательность пар  $(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ , где все окружности  $\alpha_i^{(k)}$  берутся из одного пучка окружностей  $\mathcal{A}_i$ . Такое обобщение для теоремы Понселе известно, оно было доказано самим Понселе [1] (см. также [5, 14]). Похожее обобщение для теоремы Эмха получено в [8].

Пусть  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  – два произвольных пучка окружностей, которые оба содержат окружность  $\delta$ . Возьмем произвольную последовательность  $\{\alpha_0^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$  и  $\{\alpha_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_1$ .

**Предложение 23.** *Все пары  $(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , порождают инвариантные меры на окружности  $\delta$ , которые пропорциональны мере  $\rho$ .*

*Доказательство.* Пусть функция  $f_i^{(k)}$  обозначает степень точки относительно окружности  $\alpha_i^{(k)}$ ,  $i = 0, 1$ . Из того, что эта окружность принадлежит пучку  $\{\delta, \alpha_i^{(1)}\}$ , следует, что  $f_i^{(k)} = (1 - t_{i,k})f_\delta + t_{i,k}f_i^{(1)}$ , для некоторого  $t_{i,k} \in \bar{\mathbb{R}}$ . Для всех  $\mathbf{x} \in \delta$ , имеем  $f_\delta(\mathbf{x}) = 0$ , и значит,  $f_0^{(k)}(\mathbf{x})f_1^{(k)}(\mathbf{x}) = t_{0,k}t_{1,k}f_0^{(1)}(\mathbf{x})f_1^{(1)}(\mathbf{x})$ , т.е. меры, порожденные  $k$ -ой парой и первой парой окружностей, пропорциональны на  $\delta$ . □

Таким образом, для данных пучков  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ , содержащих окружность  $\delta$ , каждая пара  $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1$  порождает инвариантную меру, и все эти меры пропорциональны на  $\delta$ . Это влечет следующее обобщение теоремы Эмха. Пусть  $(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  – произвольная последовательность пар окружностей. Рассмотрим *обобщенную цепочку Эмха* окружностей  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $\omega_k$  касается  $k$ -ой пары. Если для некоторой начальной окружности  $\omega_1$  мы имеем  $\omega_{n+1} = \omega_1$ , то это выполняется для произвольной окружности  $\omega_1$ , касающейся первой пары (рис. 1.6).

**Теорема 24** (В. Ю. Протасов [8]) *Пусть есть две последовательности соосных окружностей  $\{\alpha_0^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_0$  и  $\{\alpha_1^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_1$ , причем пучки  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{A}_1$  имеют общую окружность  $\delta$ . Тогда последовательности окружностей  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $\omega_k$  касается  $k$ -ой пары, обладают свойством замыкания на окружности  $\delta$ .*

Более того, после произвольного изменения порядка пар  $(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}), \dots,$

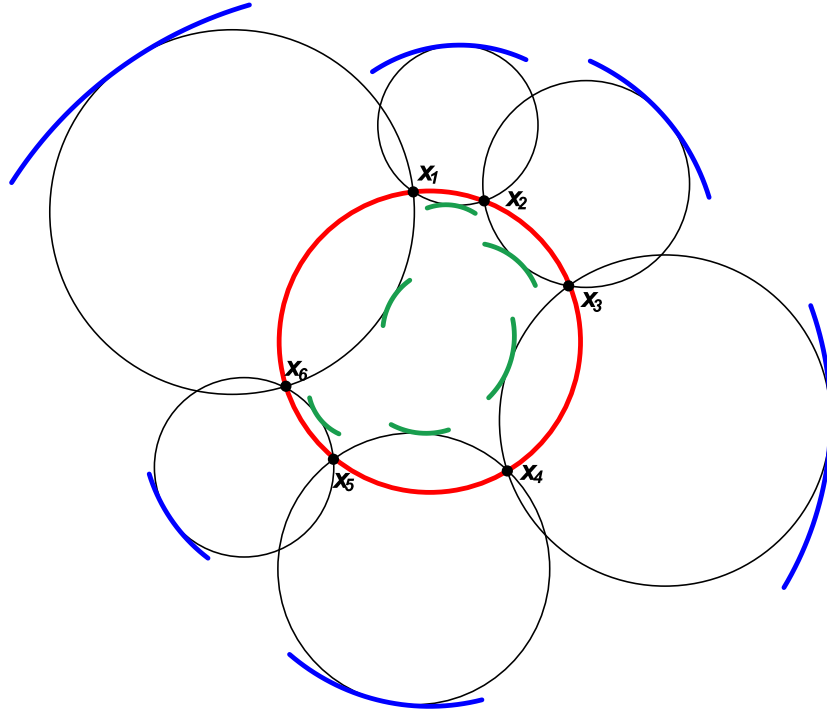


Рис. 1.6. Теорема Эмха для пучков окружностей

$(\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)})$ , эти последовательности по прежнему будут замыкаться через  $n$  шагов. Доказательство этого буквально такое же, как и для теоремы Эмха. Замыкание после  $n$  шагов имеет место быть тогда и только тогда, когда сумма масс  $n$  дуг  $\overset{\sim}{x_1x_2}, \dots, \overset{\sim}{x_nx_{n+1}}$  окружности  $\delta$ , которые вырезают окружности  $\omega_k$ , равна целому кратному общей массы окружности  $\delta$ . Это равенство не зависит ни от начальной окружности  $\omega_1$  (в силу инвариантности меры), ни от порядка окружностей (в силу коммутативности сложения).

Несколько следствий можно сделать из Предложения 23 даже если цепочка окружностей не замыкается. Они основаны на следующем простом наблюдении.

**Предложение 25.** В обозначениях теоремы Эмха, для каждого  $\tilde{m} > 0$ , верно следующее утверждение: все окружности  $\omega$ , которые вырезают на  $\delta$  дуги одной и той же массы  $\tilde{m}$  (порожденной мерой  $\rho(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{|f_0(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x})|}$ ) и касающиеся  $\alpha_0$  с данным индексом, касаются фиксированной окружности

из пучка  $\mathcal{A}_1 = \{\delta, \alpha_1\}$ .

**Доказательство.** Для произвольной окружности  $\omega$ , пучок  $\mathcal{A}_1$  содержит единственную окружность  $\alpha'_1$ , касающуюся  $\omega$  с данным индексом. Согласно Предложению 23, мера  $\rho$  инвариантна для пары  $(\alpha_0, \alpha'_1)$ . Следовательно, все окружности  $\omega'$ , касающиеся этой пары с данным индексом, вырезают одну и ту же массу  $t$  на  $\delta$ .

□

**Следствие 26.** Пусть есть две цепочки окружностей  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  и  $\{\omega'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , касающиеся окружностей  $\alpha_0, \alpha_1$  с данным индексом и имеющих одно и то же направление. Пусть  $\omega_k$  и  $\omega'_k$  пересекают окружность  $\delta$  в точках  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$  and  $\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}'_{k+1}$  соответственно. Обозначим через  $\gamma_k$  окружность, проходящую через точки  $\mathbf{x}_k$  и  $\mathbf{x}'_k$  и касающуюся  $\alpha_0$  с фиксированным индексом. Тогда все  $\gamma_k$  касаются одной окружности из пучка  $\mathcal{A}_1 = \{\delta, \alpha_1\}$ .

**Доказательство.** Все дуги  $\overset{\smile}{\mathbf{x}_k \mathbf{x}'_k}$  окружности  $\delta$  имеют одинаковую массу. Применение Предложения 25 завершает доказательство.

□

**Следствие 27.** Пусть  $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  – цепочка окружностей, касающаяся  $\alpha_0, \alpha_1$  и пусть  $\omega_k$  пересекает окружность  $\delta$  в точках  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ . Фиксируем  $r \in \mathbb{N}$  и для каждого  $k$  рассмотрим окружность, проходящую через  $\mathbf{x}_k$  и  $\mathbf{x}_{k+r}$  и касающуюся  $\alpha_0$  с заданным индексом. Тогда все эти окружности касаются одной окружности  $\alpha_r \in \mathcal{A}_1$ .

**Доказательство.** Мы применяем Следствие 26 для  $\omega'_k = \omega_{k+r}$ .

□

Таким образом, это следствие аналогично свойству диагоналей многоугольника Понселе [5]: Если криволинейная ломаная вписана в окружность  $\delta$

и ее стороны касаются пары окружностей  $\alpha_0, \alpha_1$ , то все ее диагонали порядка  $r$ , касающиеся  $\alpha_0$ , касаются также некоторой фиксированной окружности из пучка  $\mathcal{A}_1 = \{\delta, \alpha_1\}$ .

## 1.7. Доказательство многомерной теоремы Эмха с помощью инвариантной меры

В этом разделе мы распространим доказательство многомерной теоремы Эмха на общий случай взаимного расположения сфер.

Как мы отмечали в Разделе 1.4, само существование инвариантной меры влечет многомерную теорему Эмха (Теорема 2) для тех окружностей  $\delta$ , которые вложены в циклиду  $\mathcal{T}$ , описанную около сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . В этом случае дифференциалы  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$  в (1.14) всегда имеют один знак и для малого шевеления цепочки сфер  $\{\omega'_k\}$  имеем

$$\rho(\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_k = \rho(\mathbf{x}_{k+1})d\mathbf{x}_{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя это равенство, мы получаем, что для двух цепочек Эмха  $\{\omega'_k\}$  и  $\{\omega''_k\}$  выполняется

$$m(\overset{\frown}{\mathbf{x}_k \mathbf{x}'_k}) \equiv \text{const}, k \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$m(\overset{\frown}{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}'_1}) = m(\overset{\frown}{\mathbf{x}_{n+1} \mathbf{x}'_{n+1}}). \quad (1.24)$$

Следовательно, если  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_1$ , то  $\mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{x}'_1$ , что завершает доказательство. Однако, в общем случае при изменении сферы  $\omega'_1$  точки  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  могут двигаться в разных направлениях и равенство (1.24) для  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_1$  может выполняться и тогда, когда точки  $\mathbf{x}'_1$  и  $\mathbf{x}'_{n+1}$  равноудалены от  $\mathbf{x}_1$  (в смысле меры  $m(\cdot)$ ) в разных направлениях. Поэтому, чтобы доказать Теорему 2 в

общем случае, мы должны изменить инвариант  $\rho(\mathbf{x})|d\mathbf{x}|$  так, чтобы учесть знак дифференциала.

Для произвольного симплекса  $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_{n+1}$  в  $\mathbb{R}^n$  обозначим через  $\tau(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_{n+1})$  его ориентацию. Чтобы избежать рассмотрения двух случаев, мы сделаем следующее допущение:

**Соглашение 1.** Сфера  $\omega'_1$  лежит внутри  $\omega_1$ .

Это допущение не ограничивает общности, оно всегда может быть достигнуто путем подходящей инверсии. Заметим также, что если  $\omega'_1$  лежит внутри  $\omega_1$ , то и  $\omega'_2$  лежит внутри (так как она пересекает  $\omega'_1$ ), и  $\omega'_3$ , и т.д. Таким образом, соглашение 1 означает, что вся последовательность  $\{\omega'_k\}$  расположена внутри  $\omega_1$ . Следовательно, сфера  $\omega_1$  касается любых двух сфер  $\omega'_i$  и  $\omega'_j$  с индексом 0. Но поскольку все сферы ориентированы, то тогда и остальные сферы  $\omega_2, \dots, \omega_n$  касаются  $\omega'_i$  и  $\omega'_j$  с индексом 0.

**Теорема 28.** Пусть даны сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в  $\mathbb{R}^n$  и окружность  $\delta$ , не лежащая ни на одной из них. Для произвольной цепочки сфер  $\{\omega'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , касающихся  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , мы имеем

$$\tau(\mathbf{x}_k \mathbf{t}_1^k \mathbf{t}_2^k \dots \mathbf{t}_n^k) \rho(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \equiv \text{const}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства Теоремы 28 нам понадобятся два вспомогательных факта. Первый является обобщением соотношения 1.18. В общем случае взаимного расположения сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и окружности  $\delta$  это соотношение принимает немного другой вид:

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}} \right| = \frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})}.$$

Избавиться от модуля позволяет следующее

**Предложение 29.** Пусть сфера  $\omega' \in \mathcal{W}$  пересекает окружность  $\delta$  в точках  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  и касается сфер  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  в точках  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = -\frac{\tau(\mathbf{y}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n)}{\tau(\mathbf{x}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n)} \cdot \frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})}.$$

*Доказательство.* Пусть гиперплоскость  $\pi_{\omega'}$ , проходящая через точки  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ , пересекает прямую  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  в точке  $\mathbf{z}$ . Рассмотрим сферу  $\omega'_\varepsilon \in \mathcal{W}$ , близкую к  $\omega'$ . Пусть  $\pi_\varepsilon$  – их радикальная гиперплоскость,  $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{x}\mathbf{y} \cap \pi_\varepsilon$ . Тогда при  $\omega'_\varepsilon \rightarrow \omega'$  имеем также  $\pi_\varepsilon \rightarrow \pi_{\omega'}$ ,  $\mathbf{z}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{z}$ .

Если точка  $\mathbf{z}$  принадлежит отрезку  $\mathbf{x}\mathbf{y}$ , то и точка  $\mathbf{z}_\varepsilon$  принадлежит отрезку  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  для  $\omega'_\varepsilon$ , близких к  $\omega'$ . Значит, хорды  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}_\varepsilon\mathbf{y}_\varepsilon$  окружности  $\delta$  пересекаются внутри нее и дуги  $\overset{\frown}{\mathbf{x}\mathbf{x}_\varepsilon}$  и  $\overset{\frown}{\mathbf{y}\mathbf{y}_\varepsilon}$  имеют одинаковую ориентацию. С другой стороны, точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , в этом случае, лежат по разные стороны от гиперплоскости  $\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$  и, следовательно, симплексы  $\mathbf{x}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$  и  $\mathbf{y}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$  противоположно ориентированы. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})} = -\frac{\tau(\mathbf{y}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n)}{\tau(\mathbf{x}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n)} \cdot \frac{\pi_{\omega'}(\mathbf{y})}{\pi_{\omega'}(\mathbf{x})}.$$

Случай, когда точка  $\mathbf{z}$  лежит на продолжении отрезка  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  разбирается аналогично.

□

**Лемма 30.** Пусть через точку  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$  проходят две сферы  $\eta$  и  $\nu$ , а сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  касаются их с индексом 0 в точках  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$  и  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$  соответственно. Тогда

$$\tau(\mathbf{m}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n) = -\tau(\mathbf{m}\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n).$$

*Доказательство.* Рассмотрим инверсию относительно серединной сферы  $\eta$  и  $\nu$ . Ее центр  $\mathbf{o}_{\eta\nu}$  находится в точке пересечения прямых  $\mathbf{s}_i\mathbf{t}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Поскольку сферы  $\eta$  и  $\nu$  пересекаются, а сферы  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  касаются их с индексом 0,

то центр  $\mathbf{o}_{\eta\nu}$  этой инверсии лежит вне сфер  $\eta$  и  $\nu$ . Следовательно ориентации сфер  $\eta$  и  $\nu$  при этой инверсии изменятся на противоположные. Заметим, что эта инверсия переводит точки  $\mathbf{m}, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$  в точки  $\mathbf{m}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ . А из того, что ориентация сферы индуцирует ориентацию вписанного в нее симплекса, следует, что симплексы  $\mathbf{m}\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$  и  $\mathbf{m}\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n$  имеют разные ориентации.  $\square$

Доказательство Теоремы 28. Рассуждая как в доказательстве Теоремы 17 и используя Предложение 29 для  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k, \mathbf{y} = \mathbf{x}_{k+1}$ , получаем, что

$$\tau(\mathbf{x}_k \mathbf{t}_1^k \mathbf{t}_2^k \dots \mathbf{t}_n^k) \rho(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k = -\tau(\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{t}_1^k \mathbf{t}_2^k \dots \mathbf{t}_n^k) \rho(\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1}.$$

Ранее мы заметили, что из соглашения 1 следует, что сферы  $\omega_1, \dots, \omega_n$  касаются любых двух сфер  $\omega'_i$  и  $\omega'_j$  цепочки  $\{\omega'_k\}$  с индексом 0. Тогда применяя Лемму 30 к сферам  $\eta = \omega_k, \nu = \omega_{k+1}$  и точке  $\mathbf{m} = \mathbf{x}_{k+1}$  получаем

$$\tau(\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{t}_1^k \mathbf{t}_2^k \dots \mathbf{t}_n^k) = -\tau(\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{t}_1^{k+1} \mathbf{t}_2^{k+1} \dots \mathbf{t}_n^{k+1}).$$

$\square$

Теперь мы готовы доказать многомерную теорему Эмха в общем случае.

Доказательство многомерной теоремы Эмха. Пусть нашлась цепочка сфер  $\{\omega'_k\}$ , которая замыкается через  $r$  шагов. Рассмотрим малое шевеление цепочки окружностей  $\{\omega'_k\}$ , которое перемещает ее в цепочку  $\{\omega''_k\}$ . Ориентации всех симплексов  $\mathbf{x}_k \mathbf{t}_1^k \mathbf{t}_2^k \dots \mathbf{t}_n^k, k = 1, \dots, r+1$ , не меняются, если шевеление достаточно малое. Так как  $\omega'_{r+1} = \omega'_1$ , то точки  $\mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{t}_1^{r+1}, \dots, \mathbf{t}_n^{r+1}$  совпадают с  $\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1^1, \dots, \mathbf{t}_n^1$  соответственно. Следовательно,

$$\tau(\mathbf{x}_{r+1} \mathbf{t}_1^{r+1} \dots \mathbf{t}_n^{r+1}) = \tau(\mathbf{x}_1 \mathbf{t}_1^1 \dots \mathbf{t}_n^1),$$

и тогда по Теореме 28

$$\rho(\mathbf{x}_{r+1}) d\mathbf{x}_{r+1} = \rho(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1.$$



Интегрируя, получаем

$$m(\mathbf{x}_{r+1}\mathbf{x}'_{r+1}) = m(\mathbf{x}_1\mathbf{x}'_1),$$

откуда следует, что  $\mathbf{x}'_{r+1} = \mathbf{x}'_1$ .

Мы видим, что равенство  $\mathbf{x}'_{r+1} = \mathbf{x}'_1$  локально устойчиво (при малых шевелениях). Из непрерывности следует его тождественность.

□

## 1.8. Связь теоремы Понселе для коник с теоремой Эмха

По Лемме 18, циклика на любой окружности эквивалентна некоторой конике. Более того, если циклика  $\Gamma$  и окружность  $\delta$  фиксированы, все такие коники образуют пучок  $\mathcal{Q}$ . Из этого следует, что инвариантная мера  $\rho = 1/\sqrt{|F|}$ , порожденная цикликой  $\Gamma$  на окружности  $\delta$ , совпадает с мерой Якоби-Бертрана  $1/\sqrt{|q|}$ , порожденной некоторой коникой из пучка  $\mathcal{Q}$ . Следовательно,  $\mathcal{Q}$  содержит конику  $\gamma$ , касающуюся всех прямых  $\mathbf{x}_k\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , соответствующих цепочке окружностей  $\{\omega_k\}$ . Таким образом, теорема Эмха следует из теоремы Понселе для коник  $\delta$  и  $\gamma$ .

Храшко [56] было впервые замечено, что теорема о зигзаге может быть выведена из теоремы Понселе для коник. Затем, в [48] этот результат был распространен на теорему Эмха и в [49] – на циклики. Доказательства в этих работах различны и нетривиальны. Теперь мы видим, что это на самом деле следствия того, что циклика эквивалентна на окружности некоторой конике. Более того, можно найти такую конику  $\gamma$  явно. Имеем  $F(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x})$ , где многочлен  $f_i(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ell_i(x_1, x_2) + c_i = 0$  – это степень относительно окружности  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1$ . Применяя (1.17) мы видим, что многочлен  $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ell_p(x_1, x_2) + c_p$  удовлетворяет равенству  $\ell_p + \ell_\delta = \ell_0 + \ell_1$ . Коника  $\gamma$ , таким образом, задается уравнением  $q(\mathbf{x}) = (f_0f_1 - pf_\delta)(\mathbf{x}) = 0$ . Упрощая,

мы получаем

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{x}) = & (\ell_0(\mathbf{x}) + c_0) (\ell_1(\mathbf{x}) + c_1) - (\ell_\delta(\mathbf{x}) + c_\delta) (\ell_p(\mathbf{x}) + c_p) + \\
 & + (x_1^2 + x_2^2) (c_0 + c_1 - c_\delta - c_p), \tag{1.25}
 \end{aligned}$$

где  $\ell_p = \ell_0 + \ell_1 - \ell_\delta$ , и параметр  $c_p$  находится из условий касания.

Обратный вывод также может быть легко реализован. Если мы имеем окружность  $\delta$  и конику  $\gamma$ , то можно найти функционалы  $\ell_0, \ell_1, \ell_p$  и константы  $c_0, c_1, c_p$  такие что выполнены соотношения  $\ell_0 + \ell_1 = \ell_p + \ell_\delta$  и (1.25). Таким путем мы находим окружности  $\alpha_0, \alpha_1$  такие что все хорды  $\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , в теореме Эмха касаются  $\gamma$ . Следовательно, теорема Эмха влечет теорему Понселе для окружности и коники, что эквивалентно случаю двух коник (с помощью подходящей проекции).

Таким образом, *теорема Понселе для коник следует из теоремы Эмха.*

# Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе

В этой главе исследуются инвариантные относительно отображения Понселе борелевские меры на кониках. Доказывается, что для пучка коник существует универсальная мера, которая инвариантна относительно каждой коники этого пучка. С использованием этой меры получено новое доказательство большой теоремы Понселе. Также приведено полное описание инвариантных борелевских мер.

### 2.1. Введение

В предыдущей главе была построена инвариантная мера для многомерной теоремы Эмха, из которой как частные случаи получаются инвариантные меры для четырех классических теоремы о замыкании. С помощью новой меры получается простое доказательство теорем о замыкании. Для теоремы Понселе это было показано на примере ее частного случая – двух вложенных окружностей. Однако, хотелось бы получить явную формулу инвариантной меры в теореме Понселе не только для окружностей, но и для двух коник. Это будет сделано в Разделе 2.2. Мы также распространим конструкцию инвариантной меры на пучок коник, с помощью чего получим новое доказательство большой теоремы Понселе.

Напомним определение инвариантной меры. Пусть окружность  $\beta$  лежит внутри окружности  $\alpha$  и пусть существует такая мера  $m(\cdot)$  на  $\alpha$ , что все ориентированные дуги  $\overset{\curvearrowright}{xy} \subset \alpha$ , хорды которых касаются окружности  $\beta$ , имеют одно и то же значение  $m(\overset{\curvearrowright}{xy}) = \tilde{m}$  (см. рис. 2). Тогда  $n$ -угольник Понселе

существует в том и только в том случае, если число  $n\tilde{m}$  является целым кратным  $m(\alpha)$ . Поскольку это свойство не зависит от положения первой вершины многоугольника, отсюда следует теорема Понселе.

Плотность  $\rho = m'$  инвариантной меры характеризуется соотношением  $\rho(\mathbf{x})|d\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{y})|d\mathbf{y}|$ , где  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{y}$  – это ориентированные длины маленьких дуг после шевеления произвольной хорды  $\mathbf{xy}$ , касающейся  $\beta$ . Если функция  $\rho: \alpha \rightarrow \mathbb{R}_+$  обладает этим свойством, то  $m(\overset{\curvearrowright}{\mathbf{xy}}) = \int_x^y \rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}$  является инвариантной мерой на окружности  $\alpha$  (интегрирование по дуге  $\overset{\curvearrowright}{\mathbf{xy}}$ ). Само существование такой меры влечет теорему Понселе. Для произвольных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ , она действительно существует и задается функцией  $\rho(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{\sigma_\beta(\mathbf{x})}$ , где  $\sigma_\beta(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2 - r^2$  – это степень точки  $\mathbf{x}$  относительно окружности  $\beta$  радиуса  $r$  с центром в точке  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ . Это мера Якоби-Бертрана. Кинг [64] доказывает существование инвариантной меры и для случая двух непересекающихся эллипсов, один из которых лежит внутри другого. Однако, хотелось бы еще найти явную формулу этой меры по уравнениям двух коник. Кроме того, при попытке провести рассуждения Кинга в других случаях взаимного расположения коник, возникают трудности, связанные с нарушением порядка обхода вершин ломаных Понселе. В статье [65] с помощью другой конструкции, использующей гомеодную плотность, эти неприятности удается устранить.

В этой главе мы распространим конструкцию Кинга [64] инвариантной меры на пучок коник. Оказывается, что для пучка коник существует универсальная мера, которая инвариантна относительно отображения Понселе каждой коники этого пучка. Мы получим явный вид этой меры и с ее использованием дадим новое доказательство большой теоремы Понселе, а также приведем полное описание всех борелевских мер на кониках, инвариантных относительно отображения Понселе.

Напомним сначала некоторые определения. Мы будем рассматривать

проективную плоскость, получающуюся из евклидовой плоскости добавлением бесконечно удаленной прямой, на которой пересекаются параллельные в евклидовой плоскости прямые. Точки евклидовой плоскости называются *собственными* точками проективной плоскости, а точки бесконечно удаленной прямой – *несобственными*. Под *коникой* мы будем понимать коническое сечение, то есть пересечение плоскости и кругового конуса. Коника может быть эллипсом, параболой или гиперболой (невырожденные коники) в зависимости от своего расположения относительно бесконечно удаленной прямой: эллипс с ней не пересекается, парабола касается ее, а гипербола пересекается с ней в двух точках. Все невырожденные коники проективно эквивалентны. Кроме них есть еще вырожденные коники: пара пересекающихся прямых (возможно, на бесконечности), пара совпадающих прямых и точка.

Как известно, в декартовых прямоугольных координатах собственные точки коники удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (2.1)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  отличен от нуля. Мы рассматриваем пары  $(\alpha, \mathcal{P}_\alpha)$ , где  $\alpha$  – коника,  $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(x, y)$  – многочлен второго порядка, задающий конику  $\alpha$ , т.е.  $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x}) = 0\}$ . Вообще, для произвольной коники  $\alpha$  существует бесконечно много таких многочленов  $\mathcal{P}_\alpha$ , но для невырожденных коник или вырожденных в пару прямых все их многочлены пропорциональны. Через  $\det \alpha$  обозначим определитель коники 2.1:

$$\det \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

*Пучком коник*  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ , порожденным двумя невырожденными кониками  $\alpha$  и  $\beta$ , называется однопараметрическое множество коник, заданных уравне-

ниями  $\lambda\mathcal{P}_\alpha(x) + \mathcal{P}_\beta(x) = 0$ , где  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Сами коники  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют значениям параметра  $\lambda = \infty$  и  $\lambda = 0$  и, поэтому, тоже принадлежат  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

*Траекториями Понселе* коник  $\alpha$  и  $\beta$  мы будем называть последовательности вершин их вписано-описанных ломаных. Теорема Понселе утверждает, что либо все траектории Понселе замыкаются, причем через одно и то же число звеньев, либо ни одна траектория Понселе не замыкается.

В большой теореме Понселе вместо двух коник  $\alpha$  и  $\beta$  рассматривается несколько коник  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ , принадлежащих одному пучку (коника  $\alpha$  может быть вырожденной в пару прямых). Строится ломаная  $v_1 \dots v_{n+1}$ , вписанная в конику  $\alpha$ , так, что ее стороны последовательно касаются коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Касание стороны  $v_i v_{i+1}$  с коникой  $\beta_i$  назовем *внешним*, если точка касания лежит на продолжении отрезка  $v_i v_{i+1}$ . Может так случиться, что построенная  $n$ -звенная ломаная  $v_1 \dots v_{n+1}$  замкнута, т.е.  $v_1 = v_{n+1}$ . Большая теорема Понселе утверждает, что если при этом число внешних касаний четно, то тогда все такие ломаные  $v_1 \dots v_{n+1}$  замкнуты, т.е.  $v_1 = v_{n+1}$  для любой начальной точки  $v_1$ , из которой можно провести касательную к конике  $\beta_1$ .

Таким образом, ломаная всегда замыкается и образует  $n$ -угольник  $v_1 \dots v_n$ , вписанный в конику  $\alpha$  так, что его стороны последовательно касаются коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . При этом, число внешних касаний четно. Такой многоугольник назовем *описанным* около коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Например, если коники  $\beta_1, \dots, \beta_n$  лежат внутри коники  $\alpha$ , то всякий вписанный в конику  $\alpha$   $n$ -угольник, стороны которого последовательно касаются коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , является описанным. Анри Лебег в своем труде «Les coniques» [14] в формулировке большой теоремы Понселе дает другое определение описанного многоугольника, но с помощью теоремы Чевы несложно понять, что оно равносильно нашему.

**Теорема 31** (формулировка Лебега большой теоремы Понселе)

Пусть коники  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$  принадлежат одному пучку. Тогда если существует  $n$ -угольник, вписанный в конику  $\alpha$  и описанный около коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , то таких  $n$ -угольников существует бесконечно много. Для определения одного такого  $n$ -угольника можно произвольным образом задать:

- (i) порядок касания его сторон с кониками  $\beta_1, \dots, \beta_n$ ; например, такой:  $\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)}$ , где  $\sigma$  – подстановка множества  $\{1, \dots, n\}$ ;
- (ii) касательную к конике  $\beta_{\sigma(1)}$ , содержащую одну из сторон этого  $n$ -угольника;
- (iii) точку пересечения этой касательной с коникой  $\alpha$ , которая будет принадлежать стороне, касающейся коники  $\beta_{\sigma(2)}$ .

В Разделе 2.4 мы получим доказательство этой теоремы с помощью инвариантной меры. Сначала мы определим отображение Понселе на конике и построим инвариантную относительно этого отображения меру. Затем мы докажем универсальность этой меры, т. е. ее инвариантность относительно отображений Понселе всех коник пучка. Далее мы построим выравнивающее отображение, которое сводит отображение Понселе к повороту на окружности, а из результатов Раздела 2.3 будет следовать геометрическое описание величины угла поворота для каждой коники пучка. В Разделе 2.4.1 отдельно рассмотрим случай, когда коника  $\alpha$  вырождена в пару прямых. И наконец, в Разделе 2.5 будет приведена классификация всех инвариантных и универсальных мер на кониках. Так, будет показано, что универсальная мера всегда единственна, а вопрос единственности инвариантной меры зависит от того, замыкаются ли траектории Понселе или нет. В дополнение к этой главе, в Разделе 2.6 мы исследуем геометрическую связь большой теоремы Понселе для пучков коник с большой теоремой Эмха для пучков окружностей.

## 2.2. Универсальная мера пучка коник

В этом разделе мы определим отображение Понселе на конике, построим инвариантную относительно этого отображения меру и введем понятие универсальной меры пучка.

Две различные коники  $\alpha$  и  $\beta$  могут иметь от нуля до четырех общих точек, которые являются общими для всех коник пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ . Общая точка может быть точкой пересечения или касания коник. Будем считать, что точка касания – это две или три (в зависимости от кратности касания) совпадающие точки пересечения. При такой оговорке общих точек может быть 0, 2 или 4, некоторые из которых могут «уйти» на бесконечность при наличии общих асимптотических направлений.

Рассмотрим подмножество  $\alpha_\beta$  коники  $\alpha$ , из каждой точки которого можно провести касательную к конике  $\beta$ . Для любой невырожденной коники  $\gamma$  пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$  множество  $\alpha_\gamma$  совпадает либо с множеством  $\alpha_\beta$ , либо с его дополнением  $\alpha \setminus \alpha_\beta$ . Если существует многоугольник, вписанный в конику  $\alpha$  и описанный около  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , то множество  $\alpha_{\beta_i}$  одно и то же для всех  $i = \overline{1, n}$ . Поэтому когда речь идет о системе  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$  коник из большой теоремы Понселе, будем это множество обозначать через  $\alpha_{\mathcal{F}}$ .

Когда точка  $x$  обходит  $\alpha_\beta$ , каждая из двух касательных к конике  $\beta$  из точки  $x$ , изменяясь непрерывно, определяет некоторое семейство прямых. Таким образом, через любую точку  $x \in \alpha_\beta$  проходит единственная касательная  $l_1(x)$  из одного семейства и единственная касательная  $l_2(x)$  из другого семейства. Для  $k = 1, 2$  определим отображение  $j_\beta^k: \alpha_\beta \rightarrow \alpha_\beta$ , которое каждой точке  $x \in \alpha_\beta$  ставит в соответствие вторую точку пересечения коники  $\alpha$  с прямой  $l_k(x)$ .

Сразу заметим, что отображения  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  непрерывны, а если коники  $\alpha$  и  $\beta$  не пересекаются, то  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  еще и биективны. Чтобы сделать их биек-



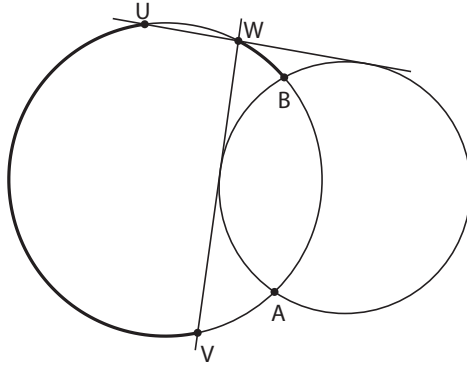


Рис. 2.1.

тивными и в случае пересекающихся коник, поступим следующим образом. Возьмем две копии  $\alpha_\beta^1$  и  $\alpha_\beta^2$  множества  $\alpha_\beta$ , обозначив их объединение через  $\tilde{\alpha}_\beta$ . Отображения  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  продолжим на  $\tilde{\alpha}_\beta$  следующим образом. Если касание прямой  $l_k(x)$  с коникой  $\beta$  внутреннее для коники  $\alpha$ , то пусть точка  $j_\beta^k(x)$  принадлежит той же копии  $\alpha_\beta$ , что и точка  $x$ . А если внешнее, – то другой. Например, при одном из отображений  $j_\beta^1, j_\beta^2$  образ дуги  $UV$  на рисунке 2.1 – это дуга  $WBW$  (т.е. дуга  $WB$ , взятая дважды). Таким образом, переход с одной копии  $\alpha_\beta$  на другую будет осуществляться только для внешнего касания. Теперь отображения  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  биективны, и, более того, взаимно обратны.

**Определение 8.** *Отображения  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  назовем отображениями Понселе коники  $\beta$ .*

Дуги на  $\alpha_\beta^1$  и дуги на  $\alpha_\beta^2$  порождают борелевскую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta)$  на  $\tilde{\alpha}_\beta$ .

**Определение 9.** *Меру  $\mu$  на  $\mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta)$  назовем  $j_\beta$ -инвариантной, если*

$$\mu(j_\beta^1(X)) = \mu(X) = \mu(j_\beta^2(X)), \text{ для всех } X \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta).$$

Итак, мера называется инвариантной, если она инвариантна относительно отображения Понселе. Для построения инвариантной меры нам понадобится следующая

**Лемма 32.** Пусть на плоскости дана коника  $\alpha$ . Из точки  $\mathbf{x}$  к ней проведена касательная  $\mathbf{xc}$ . Тогда выполняется соотношение

$$\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x}) = -4 \frac{\det \alpha}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{c})|^2} |\mathbf{xc}|^2, \quad (2.2)$$

где

$$|\nabla \mathcal{P}_\alpha(x, y)| = \left| \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial y} \right\} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial y} \right)^2}.$$

**Доказательство.** Поскольку длина градиента не меняется при ортогональной замене координат, утверждение леммы достаточно проверить в любой декартовой системе координат. Удобно взять систему координат с началом в точке  $\mathbf{c}$ , ось  $ox$  которой направлена по касательной  $\mathbf{cx}$  к конике  $\alpha$ . Пусть в этой системе координат квадратичная форма коники  $\alpha$  имеет вид

$$\mathcal{P}_\alpha(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{12}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Тогда поскольку  $\alpha(0, 0) = 0$ , имеем  $a_{33} = 0$ . А так как  $ox \perp \nabla \alpha(0, 0) = \{2a_{13}, 2a_{23}\}$ , то  $a_{13} = 0$ . Значит,

$$\det \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23}^2, \quad |\nabla \alpha(\mathbf{c})| = 2a_{23}.$$

Тогда

$$\mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x}) = a_{11}|\mathbf{cx}|^2 = -4 \frac{-a_{11}a_{23}^2}{4a_{23}^2} |\mathbf{cx}|^2 = -4 \frac{\det \alpha}{|\nabla \alpha(\mathbf{c})|^2} |\mathbf{xc}|^2.$$

□

Итак, пусть  $\alpha$  и  $\beta$  две произвольные коники. Построим для них  $j_\beta$ -инвариантную меру. Рассмотрим две близкие точки  $A, A'$  на  $\alpha$ . Пусть  $B = j_\beta(A)$ ,  $B' = j_\beta(A')$ ,  $C$  – точка касания прямой  $AB$  с коникой  $\beta$ ,  $D = AB \cap A'B'$ ,  $P' = AA' \cap BB'$  (см. рис. 2.2).

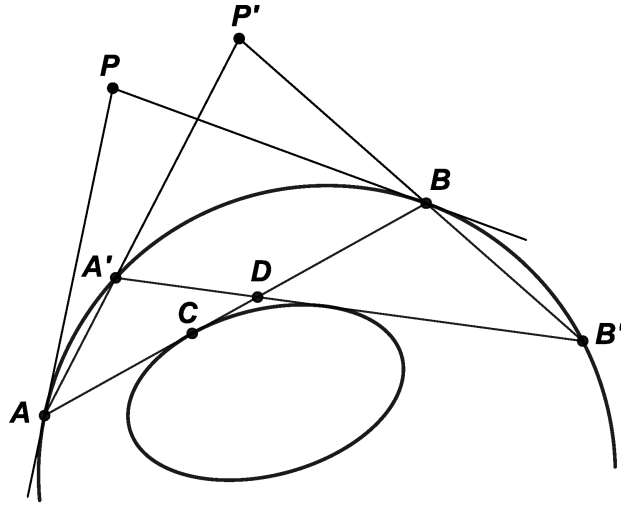


Рис. 2.2.

Прямая  $A'B'$  пересекает стороны треугольника  $AP'B$  в точках  $A', B', D$ .

По теореме Менелая

$$\frac{|AA'|}{|A'P'|} \cdot \frac{|P'B'|}{|B'B|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} = 1,$$

откуда

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|P'A'|}{|P'B'|} \cdot \frac{|DA|}{|DB|}. \quad (2.3)$$

Пусть  $P$  – точка пересечения касательных к конике  $\alpha$  в точках  $A$  и  $B$ . Устремим точку  $A'$  к точке  $A$ . Тогда  $B' \rightarrow B$ ,  $P' \rightarrow P$ ,  $D \rightarrow C$  и равенство 2.3 в пределе  $A' \rightarrow A$  дает

$$\frac{|dA|}{|dB|} = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|CA|}{|CB|}. \quad (2.4)$$

Воспользуемся теперь Леммой 32.

1) К конике  $\alpha$  из точки  $P$  проведены касательные  $PA$  и  $PB$ . Для них равенство 2.2 дает

$$\mathcal{P}_\alpha(P) = -4 \frac{\det \alpha}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)|^2} |PA|^2,$$

$$\mathcal{P}_\alpha(P) = -4 \frac{\det \alpha}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)|^2} |PB|^2.$$

Рассматривая их отношение, получаем

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)|}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)|}. \quad (2.5)$$

2) На касательной в точке  $C$  к конике  $\beta$  лежат две точки  $A$  и  $B$ . Для них равенство 2.2 дает

$$\mathcal{P}_\alpha(A) = -4 \frac{\det \beta}{|\nabla \mathcal{P}_\beta(C)|^2} |AC|^2,$$

$$\mathcal{P}_\alpha(B) = -4 \frac{\det \beta}{|\nabla \mathcal{P}_\beta(C)|^2} |BC|^2.$$

Из отношения этих равенств получаем

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{\sqrt{\mathcal{P}_\alpha(A)}}{\sqrt{\mathcal{P}_\alpha(B)}}. \quad (2.6)$$

Подставляя выражения 2.5 и 2.6 в равенство 2.4, получаем

$$\frac{dA}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(A)}} = \frac{dB}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(B)}}.$$

Из этого равенства следует

**Теорема 33.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две различные коники, возможно вырожденные. Тогда функция

$$\mu_\beta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{d\mathbf{x}}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x})| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(\mathbf{x})}}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta), \quad (2.7)$$

задает  $j_\beta$  - инвариантную меру на  $\alpha$ .

Отметим, что функция  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(\mathbf{x})| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(\mathbf{x})}}$  стремится к бесконечности, если точка  $\mathbf{x}$  приближается к конике  $\beta$ . Но для невырожденной коники  $\alpha$  функция  $f(\mathbf{x})$  ограничена вне любой окрестности коники  $\beta$ , и поэтому интегрируема вдоль любой гладкой кривой (даже не ограниченной, поскольку функция  $f(\mathbf{x})$  на бесконечности имеет интегрируемую особенность). Если же некоторая гладкая кривая  $L$  имеет с коникой  $\beta$  общие точки, то интеграл от функции  $f(\mathbf{x})$  по кривой  $L$  можно рассматривать как несобственный интеграл. Сходиться он будет в том и только в том случае, когда кривая  $L$  не

имеет точек касания с коникой  $\beta$ . Действительно, функция  $f(\mathbf{x})$  на кривой  $L$  в окрестности ее общей с коникой  $\beta$  точки  $\mathbf{x}_0$  имеет особенность. Если коника и кривая в точке  $\mathbf{x}_0$  пересекаются, то это интегрируемая особенность вида  $\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ ,  $t \rightarrow 0$ , а если касаются – неинтегрируемая особенность вида  $\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{t}\right)$ .

Поэтому, мера  $\mu_\beta$  определена корректно и в случае пересекающихся коник, а в случае касания коник  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать ее определенной вне сколь угодно малой окрестности точки касания. Таким образом, для невырожденных коник меру  $\mu_\beta$  можно нормировать.

Если коника  $\alpha$  вырождена в пару прямых, то функция  $f(\mathbf{x})$  имеет неинтегрируемую особенность в вершине  $P$  коники  $\alpha$ . В этом случае мера  $\mu$  бесконечна, но она конечна на всех множествах, замыкание которых не содержит точку  $P$ .

Итак, инвариантные относительно отображений Понселе меры существуют. Для каждой коники  $\gamma$  пучка  $\mathcal{F}$  рассмотрим меру  $\mu_\gamma$ .

**Определение 10.** Борелевскую меру на  $\alpha$  назовем  $\mathcal{F}$ -универсальной, если она инвариантна относительно отображений Понселе всех коник пучка  $\mathcal{F}$ .

Оказывается, что

**Теорема 34.** Мера  $\mu_\beta$  (2.7) является  $\mathcal{F}$ -универсальной.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную конику  $\gamma$  пучка  $\mathcal{F}$ . Для нее найдется такое число  $\lambda$ , что  $\mathcal{P}_\gamma = \lambda\mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\beta$ . А так как  $\mathcal{P}_\alpha(X) = 0$  для любой точки  $X$  коники  $\alpha$ , то  $\mathcal{P}_\gamma(X) = \mathcal{P}_\beta(X)$ . Отсюда следует, что  $\mu_\gamma(\mathcal{A}) = \mu_\beta(\mathcal{A})$  для любого множества  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\mathcal{F})$ , то есть для любых коник  $\beta$  и  $\gamma$  из пучка  $\mathcal{F}$  соответствующие им меры  $\mu_\beta$  и  $\mu_\gamma$  равны.

□

Таким образом, индекс в обозначении меры  $\mu_\beta$  можно не указывать, обозначая эту меру просто через  $\mu$ .

## 2.3. Геометрические свойства $\mathcal{F}$ -универсальной меры

Результаты этого параграфа позволят нам в дальнейшем дать геометрическое описание модулей векторов сдвигов, в которые перейдут отображения Понселе после применения выравнивающего отображения.

Напомним некоторые определения проективной геометрии. Пусть  $\alpha$  – невырожденная коника. Через произвольную точку  $P$  проводятся прямые. В точках пересечения каждой такой прямой с коникой  $\alpha$  строятся касательные к конике  $\alpha$ . ГМТ точек пересечения таких касательных – это прямая  $p$ , которую называют *полярной* точки  $P$  относительно коники  $\alpha$ . Точку  $P$  называют *полюсом* прямой  $p$ . Полюс прямой – это точка пересечения поляр всех точек этой прямой.

Если каждая сторона некоторого треугольника является полярной противоположной вершины, то такой треугольник называется *автополярным* относительно коники  $\alpha$ .

Отображение  $i$  на конике является проективной инволюцией тогда и только тогда, когда для всех точек  $X$  коники прямые  $Xi(X)$  пересекаются в одной точке. Эта точка называется *точкой Фрежье* инволюции  $i$  (подробнее об этом см. в Разделе 3.1).

Существует не более трех критических значений параметра  $\lambda$ , при которых коника  $\gamma_\lambda = \lambda\alpha + \beta$  становится вырожденной. Это действительные корни кубического уравнения  $\det(A_\lambda) = 0$ , где  $A_\lambda$  – матрица коники  $\gamma_\lambda$ . Коника  $\gamma_\lambda$  вырождается либо в точку, либо в пару прямых. Назовем *вершиной* вырожденной коники точку, в которую вырождается коника, либо точку пересечения пары прямых, в которую вырождается коника, либо произвольную точку коники, если коника вырождается в пару совпадающих прямых. Касательная к вырожденной конике – это прямая, проходящая через ее вершину. Т.е. отображения Понселе  $j_\delta^1$  и  $j_\delta^2$  относительно вырожденной коники  $\delta$  совпа-

дают с инволюцией на конике  $\alpha$ , точка Фрежье которой – это вершина коники  $\delta$ . Мера  $\mu$  является также  $j_\delta$ -инвариантной.

**Предложение 35.** Пусть коники  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются в точках  $A, B, C, D$ , касательные в которых к конике  $\beta$  вторично пересекают  $\alpha$  в точках  $a, b, c, d$  соответственно (см. рис. 2.3). Тогда  $\mu(Ab) = \mu(Ba) = \mu(Cd) = \mu(Dc)$ .

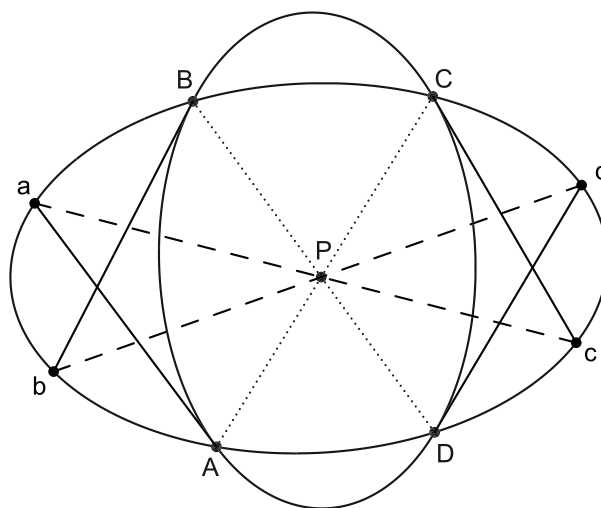


Рис. 2.3.

**Доказательство.** Заметим, что прямые  $AC, BD, ac, bd$  пересекаются в одной точке. Для этого рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник  $ABCD$  в параллелограмм. Точка  $P = AC \cap BD$  при этом преобразовании перейдет в центр образов коник  $\alpha$  и  $\beta$ , и утверждение становится очевидным из центральной симметрии относительно образа точки  $P$ .

Равенства  $\mu(Ab) = \mu(Ba)$  и  $\mu(Cd) = \mu(Dc)$  следуют из  $j_\beta$ -инвариантности меры  $\mu$ , а равенство  $\mu(Ab) = \mu(Cd)$  – из  $j_\delta$ -инвариантности, где  $\delta$  – это вырожденная коника  $AC \cup BD$  пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

□

**Предложение 36.** Пусть непересекающиеся коники  $\alpha$  и  $\beta$  имеют 4 общие касательные  $Aa, Bb, Cc, Dd$ , где точки  $A, B, C, D$  лежат на конике  $\alpha$ , а точки  $a, b, c, d$  – на конике  $\beta$  (см. рис. 2.4). Тогда

- а)  $P := AB \cap CD = ab \cap cd$ ,  $Q := AC \cap BD = ac \cap bd$ ,  $R := AD \cap BC = ad \cap bc$ , т.е. четырехвершинники  $ABCD$  и  $abcd$  имеют общий диагональный треугольник  $PQR$ ;
- б) треугольник  $PQR$  автополярен относительно любой коники пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ ;
- в) точки  $P, Q, R$  являются вершинами трех вырожденных коник пучка;
- г)  $\mu(BC) = \mu(AD)$ ,  $\mu(AB) = \mu(CD)$ ,  $\mu(CE) = \mu(DE)$ , где  $E$  – одна из точек пересечения прямой  $QR$  с коникой  $\alpha$ .

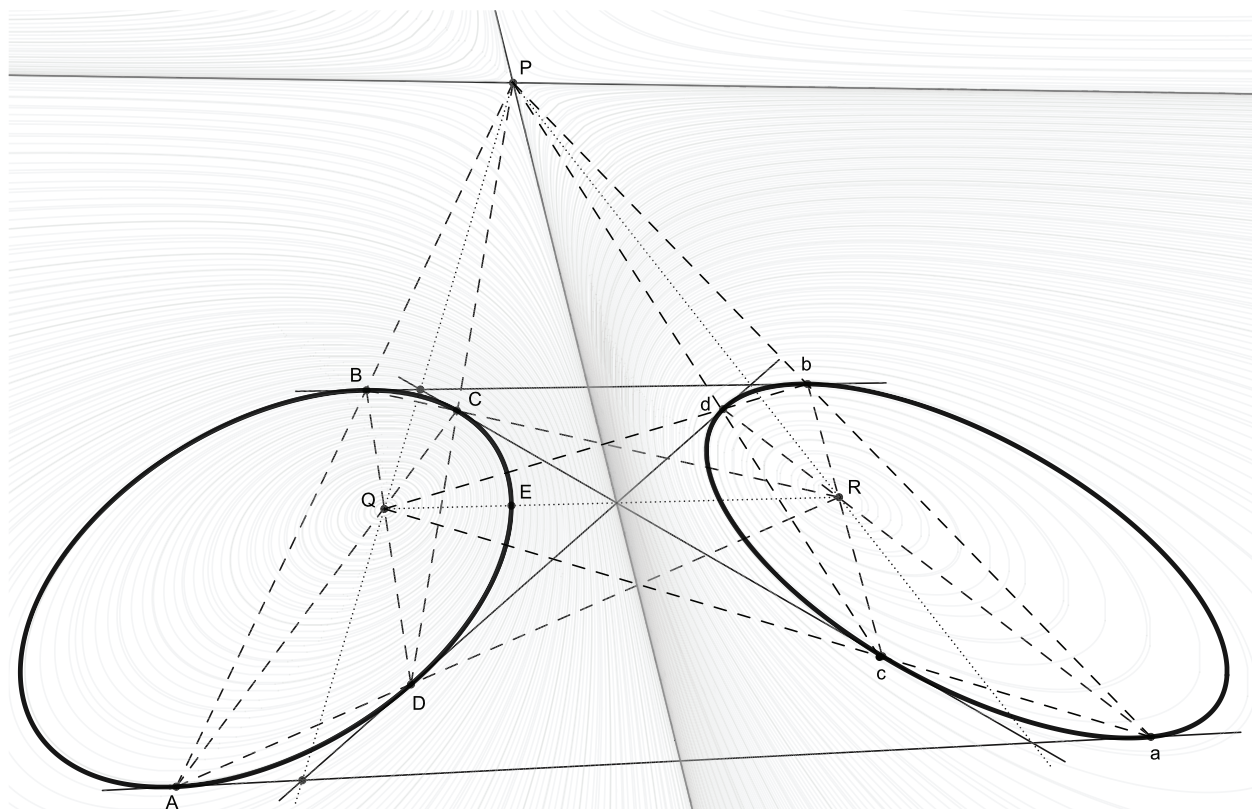


Рис. 2.4.

Доказательство. Поскольку прямая  $PQ$  – это полярная точка  $R$  относительно коники  $\alpha$ , она проходит через точки пересечения касательных  $Bb$  и  $Cc$ ,  $Aa$  и  $Dd$ . Тогда из принципа двойственности следует, что полюс прямой  $PQ$  относительно коники  $\beta$  – это точка пересечения прямых  $bc$  и  $ad$ . Аналогичное рассуждение для прямых  $PR$  и  $QR$  показывает, что треугольник  $PQR$  является диагональным и для четырехвершинника  $abcd$ . Следовательно, тре-



угольник  $PQR$  автополярен и относительно  $\alpha$  и относительно  $\beta$ , а значит, и относительно любой коники пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

Поскольку коники пучка не пересекаются, через любую точку плоскости проходит единственная коника пучка. Рассмотрим конику  $\delta_P$ , проходящую через точку  $P$ . Если бы она была невырожденной, то поляра точки  $P$  относительно  $\delta_P$  была бы с одной стороны прямой  $QR$ , а с другой стороны – касательной к конике  $\delta_P$  в точке  $P$ . Тогда точки  $P, Q, R$  должны были бы лежать на одной прямой, чего быть не может в силу того, что треугольник  $PQR$  автополярен. Значит, коника  $\delta_P$  – вырожденная. Аналогично, коники  $\delta_Q$  и  $\delta_R$ , проходящие через точки  $Q$  и  $R$ , тоже являются вырожденными.

Если треугольник автополярен относительно некоторой коники, то всегда одна из его вершин лежит внутри коники<sup>1</sup>, а две другие вершины – вне. Будем для определенности считать, что точка  $Q$  лежит внутри коники  $\alpha$ , а точка  $R$  – внутри коники  $\beta$ .

Если бы коника  $\delta_Q$  содержала прямую, то эта прямая пересекала бы конику  $\alpha$ , поскольку точка  $Q$  лежит внутри коники  $\alpha$ . Тогда все коники пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$  проходили бы через эту точку пересечения, но коники  $\alpha$  и  $\beta$  не пересекаются. Значит, коника  $\delta_Q$  – это точка  $Q$ . Аналогично, коника  $\delta_R$  – это вырожденная в точку  $R$  коника. Теперь из  $j_{\delta_Q}$ -инвариантности меры  $\mu$  следует, что  $\mu(BC) = \mu(AD)$ ,  $\mu(AB) = \mu(CD)$ . Так как мера  $\mu$  еще и  $j_{\delta_R}$ -инвариантна, а при композиции  $j_{\delta_Q} \circ j_{\delta_R}$  дуга  $CE$  переходит в дугу  $DE$ , то  $\mu(CE) = \mu(DE)$ .

□

**Лемма 37.** Пусть коники пучка  $\mathcal{F}$  не пересекаются, точки  $P, Q, R$  – вершины его вырожденных коник,  $\alpha$  и  $\beta$  – две невырожденные коники пучка  $\mathcal{F}$ . Через точку  $P$  проведены две прямые, одна из которых пересекает конику

---

<sup>1</sup> Для невырожденной коники под ее *внутренней областью* понимаем множество точек плоскости, каждая из которых обладает тем свойством, что любая прямая, через нее проходящая, имеет общую точку с коникой.

$\alpha$  в точках  $M$  и  $N$ , а другая – конику  $\beta$  в точках  $K$  и  $L$ . Тогда прямые  $MK$ ,  $NL$  и  $QR$  пересекаются в одной точке.

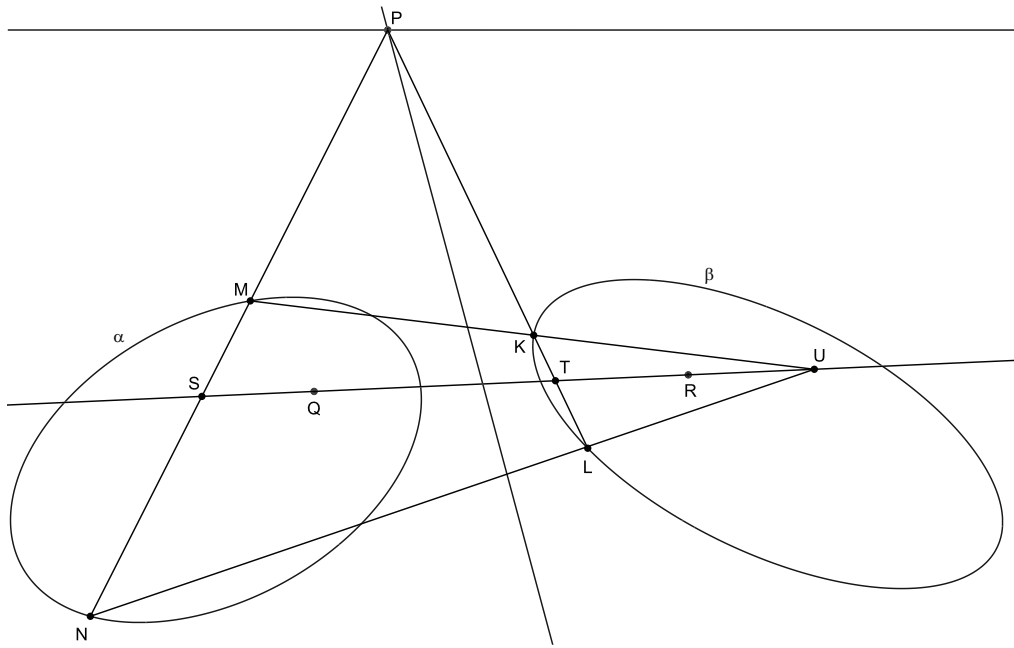


Рис. 2.5.

**Доказательство.** Обозначим точку пересечения прямых  $MN$  и  $QR$  через  $S$ , а точку пересечения прямых  $KL$  и  $QR$  – через  $T$ . Поскольку прямая  $QR$  – это полярная точка  $P$  и относительно коники  $\alpha$ , и относительно коники  $\beta$ , точка  $S$  гармонически сопряжена точке  $P$  относительно точек  $M$  и  $N$ , а точка  $T$  гармонически сопряжена точке  $P$  относительно точек  $K$  и  $L$ . Поэтому, прямая  $QR$  – это полярная точка  $P$  относительно коники, вырожденной в пару прямых  $MK$  и  $NL$ , и, следовательно, она проходит через их точку пересечения.

□

До сих пор под мерой  $\mu$  мы подразумевали меру на конике  $\alpha$ , определенную в Теореме 33. Заметим, что на каждой конике  $\gamma$  пучка  $\mathcal{F}$  можно аналогичным образом определить меру. Чтобы в дальнейшем избежать путаницы, обозначим эту меру через  $\mu^\gamma$ .

**Предложение 38.** Пусть коники пучка  $\mathcal{F}$  не пересекаются, точка  $P$  – вершина вырожденной в пару прямых коники  $\delta_P$  пучка  $\mathcal{F}$ , точки  $Q$  и  $R$  – вершины двух других вырожденных коник пучка  $\mathcal{F}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – две невырожденные коники пучка  $\mathcal{F}$ . Из произвольной точки  $X$  прямой  $QR$ , лежащей внутри коники  $\beta$ , проведены касательные лучи  $XY$  и  $XZ$  к конике  $\alpha$ , пересекающие конику  $\beta$  в точках  $S$  и  $U$  соответственно, а одну из прямых, составляющих вырожденную конику  $\delta_P$ , – в точках  $G$  и  $K$ , причем отрезок  $GK$  не содержит точку  $P$ .  $T$  и  $L$  – точки пересечения луча  $XQ$  с коникой  $\beta$  и с прямой  $GK$  соответственно. Тогда

$$a) \mu^\beta(ST) = \mu^\beta(TU)$$

$$б) \mu^{\delta_P}(GL) = \mu^{\delta_P}(LK)$$

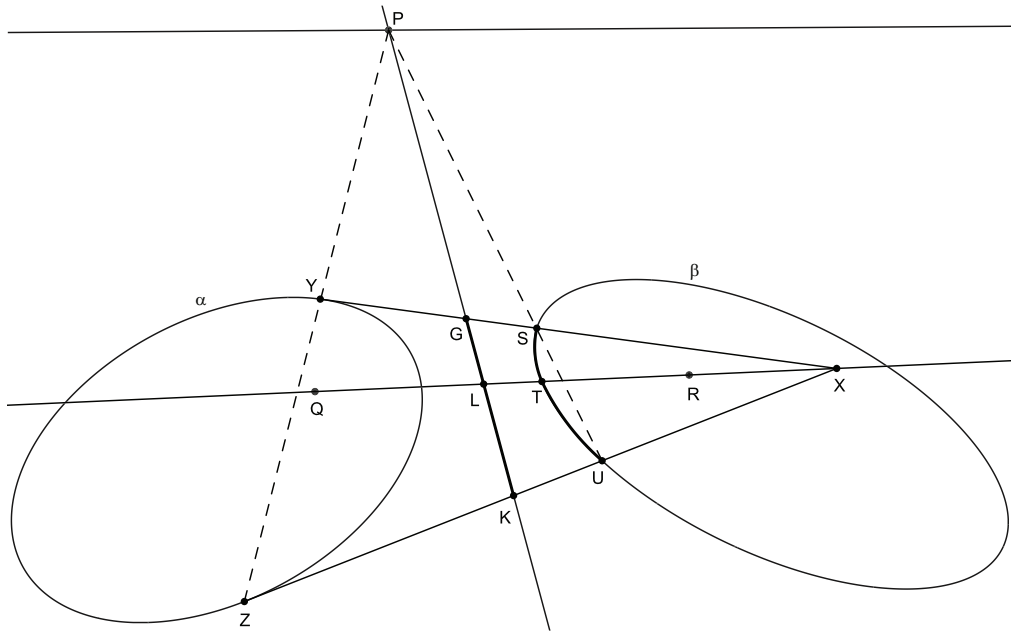


Рис. 2.6.

**Доказательство.** а) Поскольку точка  $X$  лежит на поляре  $QR$  точки  $P$  относительно коники  $\alpha$ , точка  $P$  лежит на поляре  $YZ$  точки  $X$ . Тогда по Лемме 37 прямая  $SU$  тоже проходит через точку  $P$ . Но и касательная к конике  $\beta$  в точке  $T$  проходит через точку  $P$ . Поэтому при отображении

Понселе  $j_{\delta_P}$  на конике  $\beta$  дуга  $ST$  переходит в дугу  $TU$  и равенство  $\mu^\beta(ST) = \mu^\beta(TU)$  следует из  $j_{\delta_P}$ -инвариантности меры  $\mu^\beta$ .

б) Будем теперь считать конику  $\beta$  переменной, т.е.  $\beta = \beta_\lambda = \lambda\alpha + \delta_P$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Обозначим  $f_\lambda := \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_{\beta_\lambda}| \sqrt{\mathcal{P}_\alpha}}$  – плотность меры  $\mu^{\beta_\lambda}$ .

В силу уже доказанного пункта а)

$$\int_{ST} f_\lambda dl = \int_{TU} f_\lambda dl \quad (2.8)$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Когда  $\lambda \rightarrow 0$ , коника  $\beta_\lambda$  приближается к конике  $\delta_P$ . Поскольку для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  функция  $f_\lambda$  непрерывна в достаточно малой окрестности  $V$  отрезка  $GK$ ,  $\exists \lambda_0 > 0 : \forall \lambda < \lambda_0$

$$\left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{ST} f_\lambda dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| \int_{LK} f_\lambda dl - \int_{TU} f_\lambda dl \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.9)$$

В каждой точке окрестности  $V$  для достаточно малых  $\lambda$  выполняется  $|f_\lambda - f_0| < \frac{\varepsilon}{4|GK|}$ , откуда

$$\left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{GL} f_0 dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| \int_{TU} f_\lambda dl - \int_{TU} f_0 dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_{GL} f_0 dl - \int_{LK} f_0 dl \right| < \left| \int_{GL} f_0 dl - \int_{GL} f_\lambda dl \right| + \left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{ST} f_\lambda dl \right| + \\ & + \left| \int_{ST} f_\lambda dl - \int_{TU} f_\lambda dl \right| + \left| \int_{TU} f_\lambda dl - \int_{TU} f_0 dl \right| + \left| \int_{TU} f_0 dl - \int_{LK} f_0 dl \right| \stackrel{(2.8, 2.9, 2.10)}{<} \\ & < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 0 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку это верно для любого  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{GL} f_0 dl = \int_{LK} f_0 dl,$$

т.е.  $\mu^{\delta_P}(GL) = \mu^{\delta_P}(LK)$ .

□

**Предложение 39.** Пусть  $\alpha$  – коника, вырожденная в пару прямых,  $\beta$  – произвольная невырожденная коника. Тогда в зависимости от взаимного расположения коник  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рис. 2.7) выполняются следующие соотношения для меры  $\mu = \mu^\alpha$ :

- а)  $\mu(LK) = \mu(LG) = \mu(EF) = \mu(EH)$ ;
- б)  $\mu(AK) = \mu(BG) = \mu(EF) = \mu(EH)$ ;
- в)  $\mu(AK) = \mu(BG) = \mu(CF) = \mu(DH)$ .

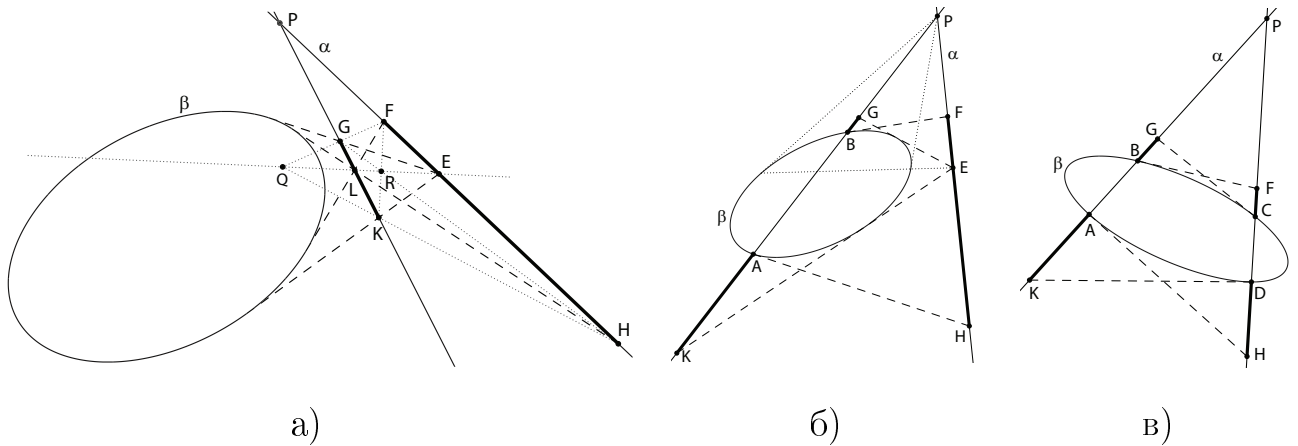


Рис. 2.7.

**Доказательство.** Пункт а) следует из Предложения 38 и  $j_{\delta_Q}, j_{\delta_R}$ -инвариантности меры  $\mu$ . Пункты б), в) доказываются аналогично.

□

## 2.4. Выравнивающее отображение и доказательство большой теоремы Понселе

Ключевой идеей доказательства большой теоремы Понселе является применение выравнивающего отображения, которое переводит отображения

Понселе всех коник пучка в сдвиги на окружности. Ниже мы определим это отображение, установим это его свойство «выравнивания», после чего докажем Большую теорему Понселе.

Перед построением такого отображения для общего случая, разберем один простой случай. Рассмотрим окружность  $\beta$ , лежащую внутри окружности  $\alpha$ . Пусть  $\mu$  – универсальная мера на  $\alpha$ , нормированная так, что  $\mu(\alpha)$  равна длине окружности  $\alpha$ . Возьмем произвольную точку  $E$  на  $\alpha$  и каждой точке  $X \in \alpha$  поставим в соответствие такую точку  $\vartheta(X) \in \alpha$ , что евклидова длина дуги  $E\overset{\curvearrowright}{\vartheta(X)}$  равна  $\mu(E\overset{\curvearrowright}{X})$ . В силу инвариантности меры  $\mu$  относительно отображения Понселе  $j_\beta$ , величина  $\mu(Xj_\beta(X))$  постоянна для всех точек  $X \in \alpha$ . Значит, отображение Понселе  $j_\beta$  перейдет в поворот на угол  $c_\beta = \mu(Ej_\beta(E))$ , после чего теорема Понселе для окружностей  $\alpha, \beta$  становится очевидной: замыкание через  $n$  шагов равносильно тому, что  $nc_\beta \in \mathbb{Z}$ , а это условие не зависит от начальной точки.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Рассуждения, приведенные ниже подходят и для случая коники  $\alpha$ , вырожденной в пару прямых, вершина которой лежит внутри коник пучка  $\mathcal{F}$ . Случай, когда коника  $\alpha$  вырождена в пару прямых, а ее вершина лежит вне коник пучка  $\mathcal{F}$ , разберем отдельно в Разделе 2.4.1 (в этом случае мера бесконечна и ее нельзя нормировать).

Далее в этом параграфе будем считать, что:

1) мера  $\mu$  нормирована следующим образом:

$$\mu(\alpha_\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \{\alpha \cap \beta\} \text{ состоит из двух точек нечетной кратности;} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2)  $\mu(\alpha \setminus \alpha_\beta) = 0$

3) Для любых точек  $X, Y \in \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$  через  $(X, Y)$  обозначим дугу  $XU$  коники  $\alpha$ , обход которой от  $X$  до  $Y$  совершается против часовой стрелки. Тогда для

любых трех точек  $X, Y, Z \in \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$  выполняется равенство

$$\mu(X, Y) + \mu(Y, Z) \equiv \mu(X, Z) \pmod{1}.$$

Рассмотрим окружность  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  с операцией  $\oplus$  сложения по модулю 1. Определим теперь *выравнивающее отображение*  $\vartheta: \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{T}$ . Пусть  $X$  – произвольная точка множества  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ , причем  $X$  принадлежит копии  $\alpha_{\mathcal{F}}^i$  множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ . Тогда положим

$$\vartheta: X \mapsto (-1)^i \mu(E, X), \quad (2.11)$$

где  $E$  – точка на конике  $\alpha$ , которая в случае, когда коники пучка  $\mathcal{F}$  не пересекаются, определена в Предложении 36, а в случае, когда коники пучка  $\mathcal{F}$  пересекаются, совпадает с какой-нибудь точкой пересечения.

Таким образом, точка  $X$  как точка множества  $\alpha_{\mathcal{F}}^1$  и точка  $X$  как точка множества  $\alpha_{\mathcal{F}}^2$  перейдут в симметричные относительно нуля точки на  $\mathbb{T}$ . При этом, в тех случаях взаимного расположения коник, когда  $\mu(\alpha_{\beta}) = \frac{1}{2}$ , отображение  $\vartheta$  инъективно на всем множестве  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ . А в тех случаях, когда мера  $\mu$  нормирована единицей, отображение  $\vartheta$  инъективно на каждом из множеств  $\alpha_{\mathcal{F}}^1$  и  $\alpha_{\mathcal{F}}^2$ .

Обозначим через  $\rho_c: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  сдвиг на вектор  $c$ , то есть  $\rho_c: x \mapsto x \oplus c$ .

**Теорема 40.** *Каждой конике  $\beta$  пучка  $\mathcal{F}$  соответствует некоторое число  $c_{\beta}$  такое, что отображения Понселе  $j_{\beta}^1$  и  $j_{\beta}^2$  после применения выравнивающего отображения  $\vartheta$  перейдут в сдвиги на вектора  $\pm c_{\beta}$ . Точнее, для  $k \in \{1, 2\}$  диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{j_{\beta}^k} & \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\rho_{(-1)^k c_{\beta}}} & \mathbb{T} \end{array}$$

*коммутативна, т.е.*

$$\vartheta \circ j_{\beta}^k = \rho_{(-1)^k c_{\beta}} \circ \vartheta \quad (2.12)$$

**Доказательство.** Если касание прямой  $Zj_\beta^k(Z)$  с коникой  $\beta$  внутреннее для  $\alpha$ , то точки  $Z$  и  $j_\beta^k(Z)$  двигаются в одном направлении по конике  $\alpha$  и принадлежат одной копии  $\alpha_{\mathcal{F}}^i$  множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ . Если касание прямой  $Zj_\beta^k(Z)$  с коникой  $\beta$  внешнее для  $\alpha$ , то точки  $Z$  и  $j_\beta^k(Z)$  двигаются в разных направлениях по конике  $\alpha$  и принадлежат разным копиям множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ .

Из этого наблюдения и определения (2.11) выравнивающего отображения следует, что при движении точки  $Z$  по  $\alpha$  точки  $\vartheta(Z)$  и  $\vartheta(j_\beta^k(Z))$  двигаются в одном направлении по  $\mathbb{T}$ . Тогда утверждение леммы следует из  $j_\beta$ -инвариантности меры  $\mu$  и условия нормировки.

□

Из Предложений 35 и 36 следует, что в случае пересекающихся коник  $c_\beta = \pm\mu(Aa)$  (точки  $A$  и  $a$  из Предложения 35), а в случае коник, лежащих одна вне другой,  $c_\beta = \pm\mu(AB)$  (точки  $A$  и  $B$  из Предложения 36)<sup>1</sup>.

Докажем теперь Большую теорему Понселе.

**Доказательство.** Так как по определению вписанно-описанного многоугольника, число внешних относительно коники  $\alpha$  касаний его сторон с кониками  $\beta_1, \dots, \beta_n$  четно, то применяя к вершине  $X$  многоугольника отображения Понселе  $j_{\beta_i}^{\varepsilon_i}$ , переводящие каждый раз в следующую вершину, на  $n$ -ом шаге придем в точку множества  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ , совпадающую с первой вершиной на одной копии множества  $\alpha_\beta$  (ведь переход с одной копии на другую осуществляется только для внешнего касания). Подействуем отображением  $\vartheta$  на обе части равенства  $j_{\beta_n}^{\varepsilon_n} \circ \dots \circ j_{\beta_1}^{\varepsilon_1}(X) = X$ , пользуясь при этом свойством выравнивания (2.12). Получим

$$\rho_{d_n} \circ \dots \circ \rho_{d_1}(x) = x, \text{ где } x = \mu(E, X), \text{ } d_i = (-1)^{\varepsilon_i} c_{\beta_i},$$

откуда

$$d_n \oplus \dots \oplus d_1 = 0, \tag{2.13}$$

---

<sup>1</sup> В разделе 4.2 будут получены явные формулы для величины сдвига  $c_\beta$



$$\rho_{d_n} \circ \dots \circ \rho_{d_1} \equiv id_{\mathbb{T}}. \quad (2.14)$$

Большая теорема Понселе равносильна тому, что  $\xi := j_{\beta_n}^{\varepsilon_n} \circ \dots \circ j_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \equiv id_{\alpha_{\mathcal{F}}}$ .

В случае, когда коники пучка  $\mathcal{F}$  пересекаются в двух точках нечетного порядка, отображение  $\vartheta$  биективно и тождество  $\xi \equiv id_{\alpha_{\mathcal{F}}}$  сразу следует из (2.14). В общем случае из (2.14) следует, что для любой точки  $Y \in \alpha_{\mathcal{F}}$  верно одно из двух: либо 1)  $\xi(Y) = Y$  и точки  $Y$  и  $\xi(Y)$  принадлежат одной копии множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ , либо 2)  $\mu(Y, E) = \mu(E, \xi(Y))$  и точки  $Y$  и  $\xi(Y)$  принадлежат разным копиям множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ . Покажем, что в обоих оставшихся случаях взаимного расположения коник возможно только первое.

Если коники пучка  $\mathcal{F}$  пересекаются в четырех точках, то  $\alpha_{\mathcal{F}}$  состоит из двух дуг, а переход с одной на другую при отображении Понселе  $j_{\beta_i}$  возможен только в случае, когда  $\beta_i$  – гипербола (возможно, вырожденная в пару пересекающихся прямых). Так как есть один вписанно-описанный многоугольник, то число гипербол среди коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$  четно, и точки  $Y$  и  $\xi(Y)$  лежат на одной дуге множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$  и равенство  $\mu(Y, E) = \mu(E, \xi(Y))$  невозможно.

Если коники пучка  $\mathcal{F}$  не пересекаются, то каждая коника  $\beta_i$  лежит либо внутри  $\alpha$ , либо вне. Тогда соответствующее касание либо всегда внутреннее, либо всегда внешнее. Так как есть один вписанно-описанный многоугольник, то число внешних касаний всегда четно, а точки  $Y$  и  $\xi(Y)$  принадлежат одной из двух копий  $\alpha_{\mathcal{F}}^1, \alpha_{\mathcal{F}}^2$  множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ , что возможно только в первом случае.

Итак, из существования одного вписано-описанного многоугольника следует существование вписано-описанного многоугольника с вершиной в любой точке коники  $\alpha$ , из которой можно провести касательную к  $\beta_1$ . Более того, поскольку в равенстве (2.13) можно сделать перестановку слагаемых или умножить его на  $-1$ , то и стороны многоугольника могут касаться коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$  в произвольном порядке, соответствующем любой подстановке  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, n\}$ , а первой вершиной многоугольника может быть любая из двух

точек пересечения коники  $\alpha$  с произвольной касательной к конике  $\beta_{\sigma_1}$ .

□

### 2.4.1. Случай вырожденной коники

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда коника  $\alpha$  вырождена в пару прямых, а ее вершина лежит вне коник пучка  $\mathcal{F}$ . Тогда функция  $f(X) = \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(X)|\sqrt{\mathcal{P}_\beta(X)}}$  в вершине  $P$  коники  $\alpha$  имеет неинтегрируемую особенность и  $\mu(\alpha) = \infty$ , отчего мы не можем нормировать меру и построить выравнивающее отображение так, как это было сделано в предыдущем параграфе.

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  – прямые, из которых состоит коника  $\alpha$ . Как и раньше, рассматриваем две копии  $\alpha_{\mathcal{F}}^1$  и  $\alpha_{\mathcal{F}}^2$  множества  $\alpha_{\mathcal{F}}$ , объединение которых обозначаем через  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ . Рассмотрим точки  $E_1 \in l_1 \cap \alpha_{\mathcal{F}}$ ,  $E_2 \in l_2 \cap \alpha_{\mathcal{F}}$ , чтобы ни одна из них не совпадала с точкой  $P$ . Каждая точка  $Z$  коники  $\alpha$ , не совпадающая с точкой  $P$ , лежит на одной из прямых  $l_1$  или  $l_2$ , для определенности, на  $l_1$ . Точки  $Z$  и  $E_1$  делят прямую  $l_1$  на два «проективных отрезка», один из которых – это обычный отрезок, а второй – его дополнение. Тот, который не содержит точку  $P$ , обладает тем свойством, что мера  $\mu$  на нем конечна. Обозначим его через  $[E_1, Z]$ . Ориентируем прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда отрезок  $[E_1, Z]$  ориентирован положительно, если его обход от точки  $E_1$  до точки  $Z$  совершается в направлении, ориентирующем прямую  $l_1$ , и отрицательно, если в другом. Положим  $\tau(Z) = \pm 1$  в зависимости от ориентации отрезка  $[E_1, Z]$  (+1 для положительной и  $-1$  для отрицательной).

Рассмотрим пару параллельных прямых  $o_1$  и  $o_2$  и зададим на них ориентацию, причем одинаковую, т.е. так, чтобы у них был общий направляющий вектор  $\vec{e}$ . Точки  $E_1$  и  $E_2$  переведем в произвольные точки  $X_1 \in o_1$  и  $X_2 \in o_2$ , для которых  $X_1 X_2 \perp \vec{e}$ . Построим теперь отображение  $\vartheta$ , переводящее мно-

жество  $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$  в пару параллельных прямых  $o_1$  и  $o_2$ .

Пусть точка  $Z$  прямой  $l_k$  принадлежит копии  $\alpha_{\mathcal{F}}^i$ , где  $i, k = 1, 2$ . Тогда определим  $\vartheta(Z)$  как точку прямой  $o_k$ , для которой

$$\overrightarrow{X_k \vartheta(Z)} = (-1)^i \tau(Z) \mu[E_k, Z] \vec{e}, \quad (2.15)$$

считая что  $\mu(\alpha \setminus \alpha_\beta) = 0$ .

Таким образом, точка  $Z$  как точка множества  $\alpha_{\mathcal{F}}^1$  и точка  $Z$ , как точка множества  $\alpha_{\mathcal{F}}^2$  перейдут в симметричные относительно  $X_1$  (или  $X_2$ ) точки на  $o_1$  (или  $o_2$ ).

Ориентация прямой задает направление ее нормали. Точкам той из двух полуплоскостей (на которые плоскость делится прямой), в которой лежит вектор нормали, если его отложить от прямой, сопоставим знак «+», а точкам другой полуплоскости сопоставим знак «-». Две ориентированные прямые образуют два вертикальных угла. Тот вертикальный угол, в котором знаки разные, назовем *отрицательным*.

**Замечание 1.** Ранее (см. Введение) мы определили внешность коники, вырожденной в пару прямых, как внутренность любого из ее вертикальных углов. Будем считать, что ориентация прямых  $l_1$  и  $l_2$  такова, что внешность коники  $\alpha$  совпадает с ее отрицательным углом.

Возьмем теперь в качестве точек  $E_1$  и  $E_2$  следующие точки. Если коники пучка не пересекают прямую  $l_i$ , то  $E_i := l_i \cap p$ , где  $p$  – поляра точки  $P$  относительно любой коники пучка  $\mathcal{F}$  (а поляры точки  $P$  относительно всех коник пучка совпадают). Если коники пучка пересекают прямую  $l_i$ , то в качестве  $E_i$  возьмем любую из точек пересечения. Тогда

**Предложение 41.** Любой конике  $\beta$  пучка  $\mathcal{F}$  соответствует число  $c_\beta := \frac{1}{2} \mu[G, K]$  (см. рис. 2.7) такое, что каждое из отображений Понселе  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$

после применения выравнивающего отображения перейдет в композицию сдвига на вектор  $\pm c_\beta$  и симметрии  $S$ , переводящей прямые  $o_1$  и  $o_2$  друг в друга. Точнее, для  $k \in \{1, 2\}$  диаграммы

$$\begin{array}{ccc} l_1 & \xrightarrow{j_\beta^k} & l_2 \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ o_1 & \xrightarrow{S \circ \rho_{(-1)^k c_\beta}} & o_2 \end{array} \quad u \quad \begin{array}{ccc} l_2 & \xrightarrow{j_\beta^k} & l_1 \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ o_2 & \xrightarrow{S \circ \rho_{(-1)^{k+1} c_\beta}} & o_1 \end{array}$$

коммутативны.

**Доказательство.** Проверим, что при движении точки  $Z$  по  $\alpha$ , точки  $\vartheta(Z)$  и  $\vartheta(j_\beta^k(Z))$  двигаются в одном направлении по прямым  $o_1$  и  $o_2$ . Тогда поскольку мера  $\mu$  инвариантна относительно отображений Понселе, из определения (2.15) выравнивающего отображения следует, что отображения Понселе при выравнивании перейдут в сдвиги. А то, что это сдвиги на вектора  $\pm c_\beta = \frac{1}{2}\mu[G, K]$ , следует из Предложения 39.

Из замечания 1 следует, что если касание прямой  $Zj_\beta^k(Z)$  с коникой  $\beta$  внутреннее, то при движении точки  $Z$  по конике  $\alpha$  в направлении ее ориентации точка  $j_\beta^k(Z)$  движется по  $\alpha$  тоже в направлении ее ориентации. А т.к. точки  $Z$  и  $j_\beta^k(Z)$  принадлежат одной копии коники  $\alpha$ , то точки  $\vartheta(Z)$  и  $\vartheta(j_\beta^k(Z))$  двигаются в одном направлении по прямым  $o_1$  и  $o_2$ . Если же касание прямой  $Zj_\beta^k(Z)$  с коникой  $\beta$  внешнее, то при движении точки  $Z$  по конике  $\alpha$  в направлении ее ориентации точка  $j_\beta^k(Z)$  движется по  $\alpha$  против ее ориентации. Но т.к. точки  $Z$  и  $j_\beta^k(Z)$  принадлежат разным копиям коники  $\alpha$ , то точки  $\vartheta(Z)$  и  $\vartheta(j_\beta^k(Z))$  двигаются в одном направлении по прямым  $o_1$  и  $o_2$ .

□

Теперь Большая теорема Понселе для случая вырожденной коники  $\alpha$  сразу следует из Предложения 41.

**Следствие 42.** Если траектории Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\alpha$  вырождена в пару прямых, замыкаются, то вершина коники  $\alpha$  лежит внутри кони-

ки  $\beta$ . Иначе (например, если  $\alpha$  и  $\beta$  не пересекаются), траектории Понселе сходятся к вершине коники  $\alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $Z_1 Z_2 \dots Z_n \dots$  – некоторая траектория Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть для определенности точка  $Z_2$  получается из точки  $Z_1$  применением отображения  $j_\beta^1$ , тогда  $Z_3 = j_\beta^2(Z_2)$ ,  $Z_4 = j_\beta^1(Z_3)$ , ... Т.е. отображения Понселе  $j_\beta^1$  и  $j_\beta^2$  в этой последовательности чередуются.

Рассмотрим образ  $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_n \dots$  траектории Понселе  $Z_1 Z_2 \dots Z_n \dots$  после выравнивания отображением  $\vartheta$ . Точки  $Z'_i$  с четными номерами лежат на одной из прямых  $o_1$  и  $o_2$ , а с нечетными – на другой. По предложению 4.1 точка  $Z'_{i+1}$  получается из точки  $Z'_i$  сдвигом на один и тот же для всех  $i$  вектор и симметрией  $S$ . Т.е. последовательность  $Z'_i$  сходится к бесконечно удаленной точке прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Это равносильно тому, что последовательность  $Z_i$  сходится к точке  $P$ .

□

## 2.5. Классификация инвариантных мер на кониках

Для доказательства большой теоремы Понселе нами была рассмотрена конкретная мера, определенная в Теореме 33, инвариантная относительно отображения Понселе, которая оказалась также  $\mathcal{F}$ -универсальной мерой. Возникает естественный вопрос: существуют ли другие инвариантные и другие универсальные меры?

Следующая теорема дает полную классификацию инвариантных относительно отображений Понселе и универсальных борелевских мер на кониках.

**Теорема 43.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные невырожденные коники,  $\mathcal{F}$  – пучок коник, порожденный  $\alpha$  и  $\beta$ .

1. Если траектории Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$  не замыкаются, то существует

единственная  $j_\beta$ -инвариантная борелевская мера. При этом, она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и  $\mathcal{F}$ -универсальна.

2. Если траектории Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются, то существует бесконечно много инвариантных борелевских мер. Каждая такая мера  $\mu$  однозначно определяется своим заданием на произвольной дуге  $(a, b)$ , где  $b$  – такая точка орбиты  $\alpha$  под действием  $j_\beta$ , что на дуге  $(a, b)$  нет других точек этой орбиты.

3.  $\mathcal{F}$ -универсальная мера на  $\alpha$  существует, единственна и совпадает с мерой (2.7).

**Доказательство.** В самом деле, всякая  $j_\beta$ -инвариантная борелевская мера  $\nu$  порождает борелевскую меру  $\lambda = \nu \circ \vartheta^{-1}$  на  $\mathbb{T}$ , инвариантную относительно сдвига  $\rho_{c_\beta}$ .

Если траектории Понселе не замыкаются, то  $j_\beta^n \neq id_\alpha$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Действуя на это неравенство отображением  $\vartheta$  по правилу (4.4), получаем  $\rho_{c_\beta}^n \neq id_{\mathbb{T}}$ , что эквивалентно тому, что  $nc_\beta \neq 0_{\mathbb{T}}$  или  $nc_\beta \notin \mathbb{Z}$ , т.е. число  $c_\beta$  иррационально.

Любая борелевская мера  $\lambda$  на  $\mathbb{T}$  является обобщенной функцией  $(\lambda, \varphi) = \int \varphi d\lambda$ ,  $\varphi \in D$ , где  $D$  – пространство основных функций. Всякая обобщенная функция  $\lambda \in D'$  единственным образом представляется рядом Фурье  $\lambda(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$ , сходящимся в  $D'$ . Если мера  $\lambda$  инвариантна относительно сдвига на вектор  $c$ , то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k (x+c)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k e^{2\pi i k c}) e^{2\pi i k x}.$$

Из единственности представления функции рядом Фурье следует, что для любого  $k$  либо  $a_k = 0$ , либо  $e^{2\pi i k c} = 1$ . Последнее в случае иррационального  $c$  выполняется только при  $k = 0$ . Таким образом,  $\lambda(x) = a_0$ , т.е. с учетом нормировки мера единственна.

В случае замыкания траекторий число  $c_\beta$  рационально и равно некоторой несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $n$  равно числу звеньев траектории, т.е. числу точек орбиты  $a \in \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$  под действием  $j_\beta$ . Тогда имеет место разбиение

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} j_\beta^k([a, b]),$$

где  $j_\beta^k$  —  $k$ -ая степень  $j_\beta$  относительно композиции. И произвольная мера  $\mu$  на  $[a, b)$  однозначно продолжается на всю  $\alpha$  по инвариантности.

Существование  $\mathcal{F}$ -универсальной меры уже установлено, а ее единственность следует из п.1 этой теоремы. В самом деле, пусть точки  $X, Y$  коники  $\alpha$  таковы, что  $\mu(X, Y)$  иррационально. В пучке  $\mathcal{F}$  есть коника  $\gamma$ , касающаяся прямой  $XU$ . Тогда траектории Понселе коники  $\gamma$  не замыкаются. Каждая  $\mathcal{F}$ -универсальная мера является  $j_\gamma$ -инвариантной. А из п.1 следует, что  $j_\gamma$ -инвариантная мера единственна.

□

## 2.6. Связь большой теоремы Понселе для пучков коник с большой теоремой Эмха

В работе [48] доказано, что общие хорды окружности  $\delta$  (в обозначениях Теоремы Эмха, см. с. 9) со всевозможными окружностями семейства  $\mathcal{M}_i$  касаются некоторой коники. Таким образом, теорема Эмха следует из теоремы Понселе для коник. В этом разделе мы докажем обратное, что теорема Понселе для коник следует из теоремы Эмха. Более того, для любых окружности  $\alpha$  и коники  $\beta$  мы построим пару окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , траектории Эмха относительно которых на окружности  $\alpha$  совпадают с траекториями Понселе относительно коники  $\beta$ . Эта конструкция обобщается и на большую теорему Понселе для пучков коник.

Напомним, что *пучком коник*, порожденным двумя кониками  $\alpha$  и  $\beta$ , называется однопараметрическое семейство  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$  коник  $\gamma$ , квадратичные формы которых связаны линейной зависимостью

$$\gamma(x) = \alpha(x) + \lambda\beta(x), \quad (2.16)$$

где  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Сами коники  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют значениям параметра  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  и, поэтому, тоже принадлежат  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

Для любых трех коник  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$  обозначим через  $\lambda_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right)$  значение параметра  $\lambda$ , связывающего их соотношением (2.16). Так как  $\alpha(X) = 0$  для любой точки  $X$  коники  $\alpha$ , то

$$\frac{\gamma(X)}{\beta(X)} = \lambda_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right), \quad \forall X \in \alpha. \quad (2.17)$$

**Замечание 2.** Пусть  $\gamma \in \mathcal{F}$  – вырожденная в пару прямых коника пучка  $\mathcal{F}$ . Пусть  $p$  и  $q$  – эти прямые. Тогда

$$\gamma(x) \equiv sp(x)q(x) \quad (2.18)$$

для некоторой константы  $s$ . Но  $p(x)$  пропорционально расстоянию от точки  $x$  до прямой  $p$ . Поэтому можно считать, что функции  $p(x)$  и  $q(x)$  – это расстояния от точки  $x$  до прямых  $p$  и  $q$ . Таким образом, значение в точке  $x$  квадратичной формы вырожденной в пару прямых коники  $\gamma$  пропорционально произведению расстояний от точки  $x$  до этих прямых.

Ясно, что если квадратичные формы всех коник пучка умножить на любое число, не равное нулю, то параметр  $\lambda_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right)$  не изменится. Пучок коник будем называть *нормированным*, если

$$\gamma(x) = p(x)q(x),$$

где  $\gamma$  – вырожденная в пару прямых коника пучка,  $p(x)$  и  $q(x)$  – ориентированные расстояния от точки  $x$  до прямых  $p$  и  $q$ , из которых состоит коника  $\gamma$ .



**Лемма 44.** Пусть  $\mathcal{F}$  – пучок коник, хорда  $AB$  коники  $\alpha \in \mathcal{F}$  касается коники  $\beta \in \mathcal{F}$  в точке  $C$ . Тогда для любой коники  $\gamma \in \mathcal{F}$ , отличной от  $\alpha$ ,

$$\frac{\gamma(A)}{\gamma(B)} = \left( \frac{|AC|}{|BC|} \right)^2. \quad (2.19)$$

**Доказательство.** В самом деле, поскольку функция  $\beta(X)$  на прямой  $l$ , содержащей хорду  $AB$ , является знакопостоянной квадратичной функцией с единственным нулем в точке  $C$ , то

$$\beta(X)|_l = k|CX|^2. \quad (2.20)$$

Таким образом,

$$\frac{\gamma(A)}{\gamma(B)} \stackrel{(2.17)}{=} \frac{\beta(A)}{\beta(B)} \stackrel{(2.20)}{=} \frac{k|AC|^2}{k|BC|^2} = \left( \frac{|AC|}{|BC|} \right)^2.$$

□

**Теорема 45** (О длине хорды Понселе) Пусть  $\mathcal{F}$  – нормированный пучок коник, содержащий окружность  $\alpha$  и вырожденную конику  $\gamma$ , состоящую из двух прямых  $p$  и  $q$ . Тогда если хорда  $AB$  окружности  $\alpha$  касается коники  $\beta$ , то

$$|AB| = \sqrt{\lambda_\beta \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)} (\sqrt{p(A)q(B)} + \sqrt{p(B)q(A)}). \quad (2.21)$$

**Доказательство.** Из Леммы 44 и Замечания 2 следует, что

$$\frac{|AC|}{|BC|} \stackrel{(2.19)}{=} \sqrt{\frac{\gamma(A)}{\gamma(B)}} \stackrel{(2.18)}{=} \sqrt{\frac{p(A)q(A)}{p(B)q(B)}}. \quad (2.22)$$

Поскольку коника  $\alpha$  – это окружность, то

$$|AC| \cdot |BC| = \alpha(C) \stackrel{(2.18)}{=} c p(C)q(C), \text{ где } c = \lambda_\beta \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right). \quad (2.23)$$

Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в уже известном нам отношении (2.22), зная которое мы можем выразить расстояния  $p(C)$  и  $q(C)$  до прямых  $p$  и  $q$  через

расстояния до этих прямых от точек  $A$  и  $B$ . А именно,

$$p(C) = \frac{p(A)\sqrt{p(B)q(B)} + p(B)\sqrt{p(A)q(A)}}{\sqrt{p(A)q(A)} + \sqrt{p(B)q(B)}},$$

$$q(C) = \frac{q(A)\sqrt{p(B)q(B)} + q(B)\sqrt{p(A)q(A)}}{\sqrt{p(A)q(A)} + \sqrt{p(B)q(B)}}.$$

Обозначим

$$\Pi = \sqrt{p(A)q(A)p(B)q(B)}.$$

Тогда

$$|AC| \cdot |BC| \stackrel{(2.23)}{=} cp(C)q(C) = c \cdot \frac{2\Pi^2 + (p(A)q(B) + p(B)q(A))\Pi}{(\sqrt{p(A)q(A)} + \sqrt{p(B)q(B)})^2}. \quad (2.24)$$

Из (2.22) и (2.24) находим

$$\begin{aligned} |AB| &= |AC| + |BC| = \sqrt{(2.24) \cdot (2.22)} + \sqrt{(2.24)/(2.22)} = \\ &= \sqrt{(2.24)} \left( \sqrt{(2.22)} + \sqrt{\frac{1}{(2.22)}} \right) = \\ &= \sqrt{c} \cdot \frac{\sqrt{2\Pi^2 + (p(A)q(B) + p(B)q(A))\Pi}}{\sqrt{p(A)q(A)} + \sqrt{p(B)q(B)}} \cdot \frac{\sqrt{p(A)q(A)} + \sqrt{p(B)q(B)}}{\sqrt{\Pi}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{c \left( 2\Pi + p(A)q(B) + p(B)q(A) \right)} = \\ &= \sqrt{c \left( \sqrt{p(A)q(B)} + \sqrt{p(B)q(A)} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda_\beta \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right) (\sqrt{p(A)q(B)} + \sqrt{p(B)q(A)})}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 46.** Пусть  $\mathcal{F}$  – пучок окружностей с радикальной осью  $p$ . Тогда для любой окружности  $\omega \in \mathcal{F}$  линии уровня функции  $\frac{\sigma_\omega(x)}{p(x)}$  являются окружностями пучка  $\mathcal{F}$ .

Иными словами, если  $\alpha$  и  $\omega$  – две произвольные окружности плоскости, а прямая  $p$  – их радикальная ось, то для всех точек  $X$  окружности  $\alpha$

$$\frac{\sigma_\omega(X)}{p(X)} \equiv \text{const.} \quad (2.25)$$

Обозначим эту константу через  $c_\alpha(\omega)$ .

**Теорема 47** (О связи теоремы Понселе с теоремой Эмха) *На плоскости даны окружность  $\alpha$  и коника  $\beta$ . Тогда существует бесконечно много пар окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , цепочки Эмха которых на окружности  $\alpha$  вырезают ломаные Понселе относительно коники  $\beta$ . Более того, пусть  $\gamma$  – вырожденная коника пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ , состоящая из двух прямых  $p$  и  $q$ . Обозначим через  $\mathcal{F}_p$  пучок окружностей, содержащий окружность  $\alpha$  и прямую  $p$  (прямая  $p$  будет общей радикальной осью всех окружностей пучка  $\mathcal{F}_p$ ). Также,  $\mathcal{F}_q$  – пучок окружностей, содержащий окружность  $\alpha$  и прямую  $q$ . Тогда для каждой окружности  $\omega_1 \in \mathcal{F}_p$  существует такая окружность  $\omega_2 \in \mathcal{F}_q$ , что отображение Понселе относительно коники  $\beta$  совпадает с отображением Эмха относительно окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\delta$  – окружность, проходящая через точки  $A$  и  $B$  и касающаяся окружности  $\omega_1 \in \mathcal{F}_p$ . В пучке  $\mathcal{F}_q$  есть две окружности –  $\omega_2$  и  $\omega'_2$ , касающиеся окружности  $\delta$ . Поскольку окружность  $\alpha$  тоже принадлежит пучку  $\mathcal{F}_q$  и содержит точки  $A$  и  $B$ , то точки касания окружностей  $\omega_2$  и  $\omega'_2$  с окружностью  $\delta$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ . Пусть  $\omega_2$  – та из них, точка касания которой с окружностью  $\delta$  лежит по другую сторону от прямой  $AB$  с точкой касания окружностей  $\omega_1$  и  $\delta$ . Заметим теперь, что

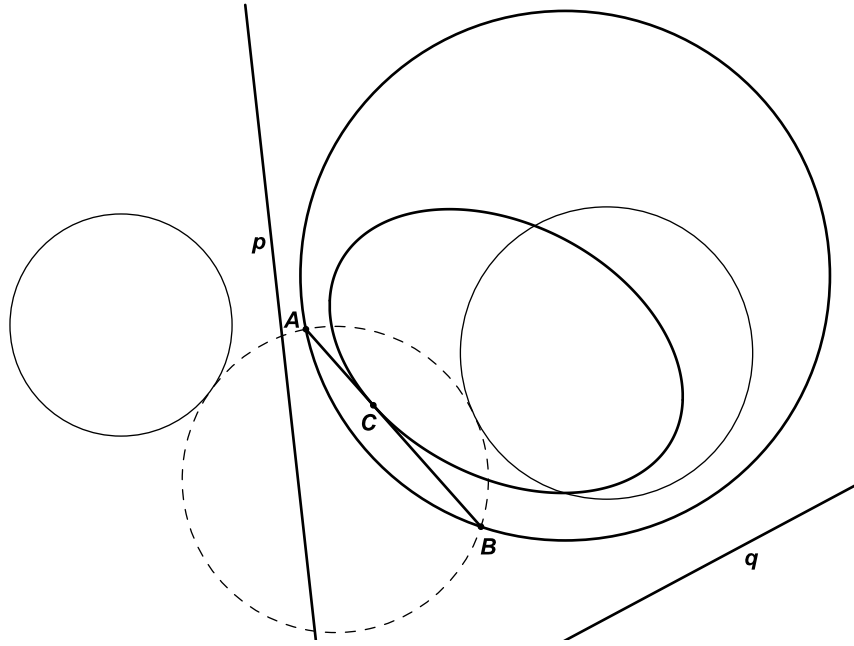


Рис. 2.8. Связь теоремы Понселе с теоремой Эмха.

четыре окружности –  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = A$  и  $\omega_4 = B$  (окружности нулевого радиуса) касаются одной окружности, причем точки касания с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  разделяют точки касания с  $\omega_3$  и  $\omega_4$ . Значит для них верна формула Кейзи (1.4):

$$\tau_{12}\tau_{34} = \tau_{13}\tau_{24} + \tau_{14}\tau_{23}.$$

С учетом (1.3) это дает

$$\tau_{\omega_1\omega_2} \cdot |AB| = \sqrt{\sigma_{\omega_1}(A)}\sqrt{\sigma_{\omega_2}(B)} + \sqrt{\sigma_{\omega_1}(B)}\sqrt{\sigma_{\omega_2}(A)}. \quad (2.26)$$

Так как прямые  $p$  и  $q$  – это радикальные оси окружностей  $\alpha, \omega_1$  и  $\alpha, \omega_2$ , то по Лемме 46 для них справедливо соотношение (2.25), из которого получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega_1}(A) &= c_\alpha(\omega_1)p(A), \sigma_{\omega_1}(B) = c_\alpha(\omega_1)p(B), \\ \sigma_{\omega_2}(A) &= c_\alpha(\omega_2)q(A), \sigma_{\omega_2}(B) = c_\alpha(\omega_2)q(B). \end{aligned}$$

Подставляя их в (2.26), находим

$$\tau_{\omega_1\omega_2} = \sqrt{c_\alpha(\omega_1)c_\alpha(\omega_2)} \frac{\sqrt{p(A)q(B)} + \sqrt{p(B)q(A)}}{|AB|}. \quad (2.27)$$

По Теореме 45 (о длине хорды Понселе) дробь в правой части (2.27) постоянна для всех хорд  $AB$  окружности  $\alpha$ , касающихся коники  $\beta$ , и для нормированного пучка  $\mathcal{F}$  равна  $\sqrt{\lambda_\beta \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ . Отсюда получаем

$$\tau_{\omega_1\omega_2} = \sqrt{\lambda_\beta \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \cdot c_\alpha(\omega_1) \cdot c_\alpha(\omega_2)}.$$

Это соотношение не зависит от выбора хорды Понселе  $AB$ . Осталось заметить, что все проведенные рассуждения обратимы.

□

Попутно было доказано

**Следствие 48.** Пусть пучок коник  $\mathcal{F}$  нормирован. Тогда в обозначениях Теоремы 47 выполняется соотношение

$$\tau_{\omega_1\omega_2} = \sqrt{\lambda_\beta \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) c_\alpha(\omega_1)c_\alpha(\omega_2)}.$$

Кроме того, из Теоремы 47 сразу следует

**Теорема 49** (о связи большой теоремы Понселе с большой теоремой Эмха)  
Пусть окружность  $\alpha$  и коники  $\beta_1, \dots, \beta_n$  принадлежат одному пучку. Тогда существует  $n$  пар окружностей  $\{\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}\}_{k=1}^n$  таких, что окружности  $\{\omega_1^{(k)}\}_{k=1}^n$  соосны с  $\alpha$  и окружности  $\{\omega_2^{(k)}\}_{k=1}^n$  соосны с  $\alpha$ , а обобщенные цепочки Эмха относительно набора  $\{\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}\}_{k=1}^n$  вырезают на окружности  $\alpha$  ломаные Понселе относительно коник  $\beta_1, \dots, \beta_n$ .

## 2.7. Большие теоремы Понселе и Эмха в плоскости

### Лобачевского

В работе [66] было показано, что теорема Понселе для двух окружностей верна в геометрии Лобачевского. Этот результат можно обобщить, используя большую теорему Эмха.

Напомним сначала некоторые определения. Окружности, эквидистанты, предельные линии (орициклы) и прямые плоскости Лобачевского все вместе называются *циклами*. Совокупность всех циклов геометрии Лобачевского, перпендикулярных к двум данным циклам, называется *пучком циклов*.

Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Прямыми в этой модели являются обычные евклидовы окружности, перпендикулярные окружности абсолюта, а окружностями – обычные окружности, непересекающие абсолюта, эквидистантами – окружности, пересекающие абсолюта, предельными линиями – окружности, касающиеся абсолюта. Поэтому, пучок циклов неевклидовой геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре не отличается от пучка окружностей обычной (евклидовой) геометрии. Только в соответствии с определением точек неевклидовой геометрии, здесь следует рассматривать не полные окружности пучка, а лишь их дуги, заключенные внутри абсолюта. Подробнее об этом написано в [58]. Таким образом, большая теорема Эмха для пучков циклов в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского – это большая теорема Эмха в евклидовой плоскости.

Рассмотрим частный случай этой теоремы, когда циклы  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  симметричны относительно абсолюта. Тогда все циклы «цепочки Эмха» будут ортогональны абсолюту, т.е. они являются прямыми в модели Пуанкаре. Получаем большую теорему Понселе в геометрии Лобачевского.

**Теорема 50.** *В геометрии Лобачевского верны большая теорема Эмха и большая теорема Понселе.*

### Некоммутативные теоремы о замыкании

Предыдущая глава была посвящена большой теореме Понселе, которая обобщает теорему Понселе на наборы коник, принадлежащие одному пучку. Это обобщение имеет довольно неожиданное приложение: большая теорема Понселе равносильна закону сложения на эллиптических кривых [2]. Сложение, как известно, коммутативно. А для траекторий Понселе эта коммутативность заключается в том, что строя ломанные Понселе  $n$  коник, порядок касания с кониками можно брать произвольным (Теорема 31, п.(i)). Аналогичным свойством обладают и цепочки окружностей в большой теореме Эмха (Теорема 24).

Соответственно, возникает вопрос: существуют ли другие семейства коник, отличные от пучков, траектории Понселе которых обладают свойством замыкания? А в большой теореме Эмха фигурируют два семейства соосных окружностей. Тогда существуют ли другие семейства окружностей, цепочки Эмха которых тоже обладают свойством замыкания? В этой главе мы докажем некоммутативные аналоги больших теорем Понселе и Эмха, которые по всей видимости, не могут быть выведены с помощью инвариантной меры. Мы формулируем их и доказываем с помощью дробно-линейных функций комплексной переменной и проективных преобразований плоскости. Мы также установим, что большие теоремы Понселе и Эмха верны и в плоскости Лобачевского и получим усиленный вариант теоремы Понселе на абсолюте. Кроме того, в Разделе 3.8 мы получим еще одну новую теорему о замыкании, которая необычна тем, что замыкание в ней происходит на подвижной «орбите».

### 3.1. Проективные инволюции на конике

Пусть  $\alpha$  – произвольная коника на проективной плоскости. Напомним некоторые понятия и проективные свойства конических сечений.

*Проективным преобразованием на конике  $\alpha$*  называется ограничение на нее всякого проективного преобразования плоскости, которое переводит конику  $\alpha$  в себя.

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую  $l$ . Выберем на конике  $\alpha$  точку  $\mathbf{a}$  и сделаем из нее центральную проекцию  $\pi: \alpha \rightarrow l$  коники  $\alpha$  на прямую  $l$ , которая переводит точку  $\mathbf{x}$  коники  $\alpha$  в точку пересечения прямых  $\mathbf{ax}$  и  $l$  (самой точке  $\mathbf{a}$  соответствует точка пересечения касательной в ней к конике  $\alpha$  с прямой  $l$ ). Эта проекция взаимно-однозначна. Если  $\Phi$  – произвольное отображение коники  $\alpha$  на себя, то для произвольной точки  $\mathbf{x}$  коники  $\alpha$  условие  $\pi(\mathbf{x}) \mapsto \pi(\Phi(\mathbf{x}))$  определяет отображение прямой  $l$  на себя. Это отображение называется *проекцией отображения  $\Phi$  на прямую  $l$  с центром проекции в точке  $\mathbf{a}$* .

Между проективными преобразованиями коники и проективными преобразованиями прямой имеется тесная связь, определяемая следующим предложением:

**Предложение 51.** *Проекция на прямую  $l$  преобразования  $\Phi$  коники  $\alpha$ , переводящего ее в себя, тогда и только тогда является проективным преобразованием прямой  $l$ , когда  $\Phi$  есть проективное преобразование коники  $\alpha$ .*

Это позволяет дать другое определение проективного преобразования на конике – как центральной проекции проективного преобразования прямой.

**Предложение 52.** *Если  $\Phi$  – проективное преобразование  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  на конике  $\alpha$  и  $\mathbf{b}$  – произвольная точка коники  $\alpha$ , не являющаяся неподвижной*



точкой преобразования  $\Phi$ , то точки пересечения прямых  $\mathbf{bx}'$  и  $\mathbf{b}'x$  лежат на одной прямой  $l_\Phi$ , не зависящей от выбора точки  $\mathbf{b}$ .

Эта прямая  $l_\Phi$  называется *осью Штейнера проективного преобразования  $\Phi$* .

Напомним также, что *инволюцией* называется такое нетождественное преобразование, квадрат которого является тождеством, то есть  $f$  – инволюция, если  $f \circ f \equiv id$ . Известно, что любое проективное преобразование на прямой либо само является инволюцией, либо представимо в виде композиции двух проективных инволюций. Отсюда с помощью Предложения 51 следует

**Предложение 53.** *Всякое проективное преобразование коники, не являющееся инволюцией, раскладывается в композицию двух проективных инволюций.*

Следующее предложение дает критерий, определяющий когда проективное преобразование на конике является инволюцией.

**Предложение 54.** *Преобразование  $i: \alpha \rightarrow \alpha$  на конике  $\alpha$  тогда и только тогда является проективной инволюцией, когда для всех точек  $\mathbf{x} \in \alpha$  прямые  $\mathbf{x}i(\mathbf{x})$  сходятся в одной точке.*

Доказательства Предложений 51 - 54 и другие свойства проективных преобразований на кониках можно найти в книге [72].

Итак, каждой проективной инволюции  $i: \alpha \rightarrow \alpha$  на конике соответствует точка  $\mathbf{o}$ , через которую проходят прямые  $\mathbf{x}i(\mathbf{x})$  для всех точек  $\mathbf{x} \in \alpha$ . Эту точку назовем *центром инволюции  $i$* . В литературе ее еще называют *точкой Фрежье инволюции  $i$*  [5].

Из свойств полярного соответствия следует, что *композиция двух инволюций на конике является инволюцией тогда и только тогда, когда их центры полярно сопряжены*.

Подобный критерий для трех инволюций равносильен теореме Паскаля о том, что три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда вершины шестиугольника лежат на одной конике.

**Предложение 55** (Теорема Паскаля) *Композиция трех инволюций на конике является инволюцией тогда и только тогда, когда их центры лежат на одной прямой.*

Согласно Предложению 53 каждому проективному преобразованию  $p$  на конике  $\alpha$  можно поставить в соответствие пару точек  $\mathbf{o}_1$  и  $\mathbf{o}_2$ , являющихся центрами инволюций  $i_1$  и  $i_2$ , в композицию которых раскладывается преобразование  $p$ . Разложение это не единственно, но все такие разложения можно описать, используя метрику Клейна с абсолютном  $\alpha$ .

Пусть  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  – произвольные точки плоскости и пусть прямая  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  пересекает конику  $\alpha$  в точках  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  (возможно, в мнимых). Тогда расстояние в метрике Клейна с абсолютном  $\alpha$  определяется следующим образом

$$d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c \ln[\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{p}, \mathbf{q}],$$

где  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{\overline{x\mathbf{p}}}{\overline{x\mathbf{q}}} : \frac{\overline{y\mathbf{p}}}{\overline{y\mathbf{q}}}$  – двойное отношение ориентированных отрезков,  $c$  – некоторая константа.

Можно получить и явную формулу для  $d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , не использующую точки  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Пусть  $\mathbf{x} = (x_1 : x_2 : x_3)$  и  $\mathbf{y} = (y_1 : y_2 : y_3)$  в некоторой проективной системе координат, а  $\mathcal{P}_{xy} = \sum_{i,k} a_{ik}x_iy_k$  – билинейная форма коники  $\alpha$ . Тогда

$$d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c \ln \frac{\mathcal{P}_{xy} + \sqrt{\mathcal{P}_{xy}^2 - \mathcal{P}_{xx}\mathcal{P}_{yy}}}{\mathcal{P}_{xy} - \sqrt{\mathcal{P}_{xy}^2 - \mathcal{P}_{xx}\mathcal{P}_{yy}}}.$$

Более подробно об этом написано в [71].

Метрика Клейна является проективной, т.е. она инвариантна при проективных преобразованиях. Это означает, что если коника  $\alpha$  и точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  проектируются в конику  $\alpha'$  и точки  $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$  соответственно, то  $d_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\alpha'}(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ .

**Теорема 56.** Пусть на конике  $\alpha$  задано проективное преобразование  $p$ . Тогда все разложения преобразования  $p$  в композицию двух проективных инволюций  $i_1$  и  $i_2$  обладают следующим свойством:

- 1) их точки Фрежье  $\mathbf{o}_1$  и  $\mathbf{o}_2$  лежат на оси Штейнера  $l_p$  преобразования  $p$ ;
- 2) расстояние  $d_\alpha(\mathbf{o}_1; \mathbf{o}_2)$  между точками  $\mathbf{o}_1$  и  $\mathbf{o}_2$  в метрике Клейна с абсолютом  $\alpha$  принимает одно и то же значение.

*Доказательство.* 1) Пусть  $p = i_1 \circ i_2 = i_3 \circ i_4$ . Тогда

$$(i_3 \circ i_1 \circ i_2)^2 \equiv \text{id}, \quad (i_1 \circ i_2 \circ i_4)^2 \equiv \text{id},$$

и по Предложению 55 центры  $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3, \mathbf{o}_4$  лежат на одной прямой  $l$ .

Рассмотрим на конике  $\alpha$  две произвольные точки  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{x}$ . Обозначим через  $\tilde{\mathbf{b}}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$  их образы при инволюции  $i_1$ , а через  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{x}'$  – образы точек  $\tilde{\mathbf{b}}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$  при инволюции  $i_2$ . Из теоремы Паскаля для шестиугольника  $\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b}'\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}'$  следует, что точка пересечения прямых  $\mathbf{b}\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{b}'\mathbf{x}$  лежит на прямой  $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2$ . Тогда по Предложению 52 прямая  $l$  совпадает с осью Штейнера  $l_p$  преобразования  $p$ .

- 2) Пусть  $p : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ . Так как  $i_1 \circ i_2 \circ i_4 \circ i_3 \equiv \text{id}$ , то

$$\mathbf{x} \xrightarrow{i_1} \mathbf{a} \xrightarrow{i_2} \mathbf{y} \xrightarrow{i_4} \mathbf{a}' \xrightarrow{i_3} \mathbf{x}.$$

Обозначим через  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  точки пересечения прямой Штейнера  $l_p$  с коникой  $\alpha$  (см. рис. 3.1). Рассмотрим композицию проекций прямой  $l_p$  на конику  $\alpha$  из точки  $\mathbf{a}$  и проекции коники  $\alpha$  обратно на прямую  $l_p$  из точки  $\mathbf{a}'$ . Заметим, что это преобразование является проективным на прямой  $l_p$ . А поскольку точки  $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  переходят в точки  $\mathbf{o}_3, \mathbf{o}_4, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  соответственно, то двойные отношения этих четверок одинаковы. Следовательно,  $d_\alpha(\mathbf{o}_1; \mathbf{o}_2) = d_\alpha(\mathbf{o}_3; \mathbf{o}_4)$ .

□

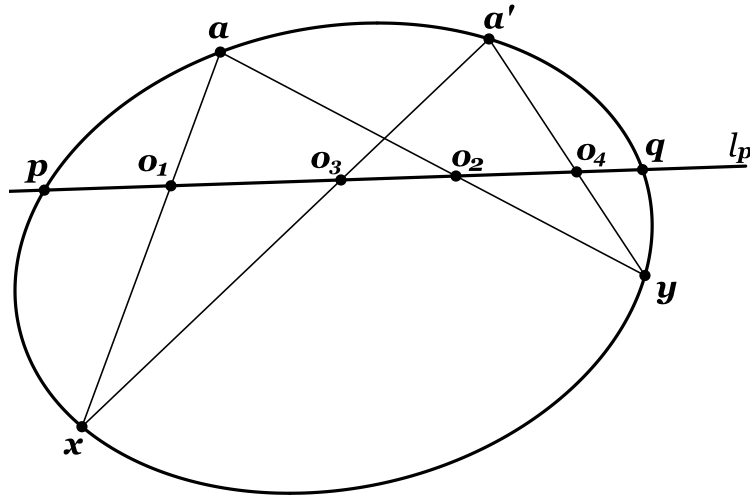


Рис. 3.1.

## 3.2. Некоммутативный аналог большой теоремы

### Понселе

Рассмотрим множество  $\Omega(\alpha)$  коник плоскости, которые дважды касаются данной коники  $\alpha$ . При этом, касание может быть мнимым. Например, любые две concentric окружности являются дважды касающимися кониками: они касаются друг друга в циклических точках  $(1, \pm i, 0)$  комплексной проективной плоскости. Кроме того, будем считать, что  $\Omega(\alpha)$  содержит и все точки плоскости (как вырожденные коники).

Коника, дважды касающиеся  $\alpha$ , тесно связаны с проективными преобразованиями на  $\alpha$ .

**Теорема 57** (M. Chasles [70, ch. XIX, § III, prop. 473]) *Если  $p$  – проективное преобразование на конике  $\alpha$ , то для всех точек  $x \in \alpha$  прямые  $xp(x)$  касаются некоторой коники  $\beta \in \Omega(\alpha)$ . Обратно, для любой коники  $\beta \in \Omega(\alpha)$  ее преобразование Понселе на конике  $\alpha$  проективно.*

Таким образом, для любой коники  $\beta \in \Omega(\alpha)$  ее отображение Понселе  $j_\beta$  на конике  $\alpha$  является проективным, и наоборот, любое проективное преобразование на конике  $\alpha$  совпадает с отображением Понселе относительно

некоторой коники  $\beta \in \Omega(\alpha)$ . Из теоремы Шаля вытекает следующий аналог большой теоремы Понселе:

**Теорема 58** (Некоммутативный аналог большой теоремы Понселе)

*Пусть  $\alpha$  – невырожденная коника,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Omega(\alpha)$ . Для произвольной точки  $\mathbf{a}_1 \in \alpha$  построим ломаную Понселе  $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n+1}$ , у которой  $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1}$  касается  $\beta_i$ . Тогда при движении точки  $\mathbf{a}_1$  по конике  $\alpha$  прямая  $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{n+1}$  тоже касается фиксированной коники  $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$  (рис. 3.2).*

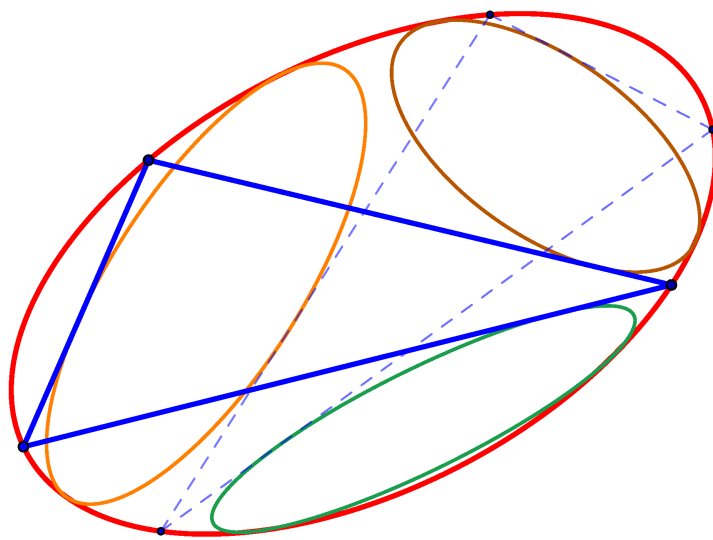


Рис. 3.2.

**Доказательство.** Действительно, по теореме Шаля отображение Понселе каждой коники  $\beta_i$  является проективным преобразованием на конике  $\alpha$ . Тогда их композиция – тоже проективное преобразование. Следовательно, оно является преобразованием Понселе некоторой коники  $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$ .

□

### 3.2.1. Усиленная теорема Понселе на абсолюте плоскости Лобачевского

Как было отмечено в Разделе 2.7, в модели Пуанкаре все циклы (окружности, эквидистанты и орициклы) являются обычными евклидовыми окруж-

ностями или их дугами. А в модели Клейна циклы являются кониками, дважды касающимися абсолюта.<sup>1</sup> Поэтому Теорема 58 имеет следующее любопытное следствие для плоскости Лобачевского:

**Теорема 59** (Усиленная теорема Понселе на абсолюте) *Пусть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  – произвольные циклы в плоскости Лобачевского. Выберем точку  $v_1$  на абсолюте и построим вписанную в него ломанную  $v_1v_2 \dots v_{n+1}$ , у которой  $i$ -ая сторона  $v_iv_{i+1}$  касается цикла  $\omega_i, i = \overline{1, n}$ . Тогда при движении точки  $v_1$  по абсолюту прямая  $v_1v_{n+1}$  касается некоторого фиксированного цикла.*

### 3.3. Проективные преобразования, сохраняющие конику, и их связь с универсальной мерой

Пусть на плоскости даны коника  $\alpha$  и прямая  $l$ . Рассмотрим семейство

$$\mathcal{G}_l = \{p : \alpha \rightarrow \alpha, l_p = l\}$$

проективных преобразований  $p$  на конике  $\alpha$ , прямая Штейнера  $l_p$  которых совпадает с  $l$ . Если  $p = i_1 \circ i_2$  – разложение  $p$  в композицию двух инволюций, то, согласно Теореме 56, центры  $\mathbf{o}_1(p)$  и  $\mathbf{o}_2(p)$  этих инволюций лежат на прямой  $l$ . При этом, расстояние  $d_\alpha(\mathbf{o}_1(p); \mathbf{o}_2(p))$  между точками  $\mathbf{o}_1(p)$  и  $\mathbf{o}_2(p)$  в метрике Клейна с абсолютом  $\alpha$  постоянно.

По теореме Шаля существует коника  $\beta_p \in \Omega(\alpha)$  такая, что  $p \equiv j_{\beta_p}$ . Назовем ее *коникой Шаля* отображения  $p$ . Так как точки пересечения  $\alpha$  с прямой  $l$  (они могут быть мнимыми) являются неподвижными для  $p$ , а у отображения Понселе  $j_{\beta_p}$  неподвижными являются только точки касания  $\alpha$  с  $\beta_p$ , то

---

<sup>1</sup> Это легко заметить с помощью следующего преобразования, переводящего модель Пуанкаре в модель Клейна. Построим на абсолюте сферу как на диаметре и сделаем стереографическую проекцию модели Пуанкаре на эту сферу. Все циклы перейдут в окружности на сфере, причем прямые Пуанкаре перейдут в окружности, ортогональные плоскости абсолюта. Затем сделаем ортогональную проекцию сферы на плоскость абсолюта. Тогда окружности на сфере перейдут в коники, дважды касающиеся абсолюта.

отсюда заключаем, что коника  $\beta_p$  касается коники  $\alpha$  в точках ее пересечения с прямой  $l$ . Таким образом, семейство коник  $\mathcal{F}_l = \{\beta_p : p \in \mathcal{G}_l\}$  образует пучок дважды касающихся коник с двойной прямой  $l$ , т.е.  $\mathcal{F}_l = \mathcal{F}(\alpha, l^2)$ . Заметим также, что из большой теоремы Понселе и теоремы Шаля следует, что проективные преобразования из  $\mathcal{G}_l$  образуют группу.

Пусть  $\mu$  – универсальная мера пучка  $\mathcal{F}_l$  (см. Раздел 2.2). Тогда для любой коники  $\beta_p \in \mathcal{F}_l$  значение  $\mu(\mathbf{x}j_{\beta_p}(\mathbf{x}))$  постоянно для всех  $\mathbf{x} \in \alpha$ .

**Теорема 60.** Пусть  $\mathcal{G}_l$  – группа проективных преобразований  $p$ , сохраняющих конику  $\alpha$ , у которых прямые Штейнера  $l_p$  совпадают с прямой  $l$ . Тогда

$$\mu(\mathbf{x}j_{\beta_p}(\mathbf{x})) = c d_\alpha(\mathbf{o}_1(p); \mathbf{o}_2(p)), \quad \forall p \in \mathcal{G}_l, \forall \mathbf{x} \in \alpha, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{o}_1(p), \mathbf{o}_2(p)$  – центры инволюций преобразования  $p$ ,  $\beta_p$  – его коника Шаля,  $c$  – некоторая константа.

**Доказательство.** Пусть прямая  $l$  пересекает  $\alpha$  в точках  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Определим меру  $\nu$  на конике  $\alpha$  следующим образом. Фиксируем на  $\alpha$  точку  $\mathbf{z} \neq \mathbf{p}, \mathbf{q}$  и для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \alpha$  положим

$$\nu(\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = d_\alpha(\mathbf{x}', \mathbf{y}'),$$

где  $\mathbf{x}' = \mathbf{z}\mathbf{x} \cap l$ ,  $\mathbf{y}' = \mathbf{z}\mathbf{y} \cap l$ . Так как для любой точки  $\mathbf{z} \in \alpha$  двойное отношение  $[\mathbf{x}', \mathbf{y}'; \mathbf{p}, \mathbf{q}]$  одно и то же, определение меры  $\nu$  корректно. Заметим теперь, что по теореме Шаля и Теореме 56 мера  $\nu(\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}})$  постоянна на всех дугах  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ , у которых хорды  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  касаются одной коники из  $\mathcal{F}_l$ . Но мера  $\mu(\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}})$  тоже постоянна на таких дугах  $\overset{\sim}{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ . В силу единственности универсальной меры (Теорема 43) имеем  $\mu = c\nu$  и равенство (3.1) следует из теоремы Шаля.

□

### 3.4. Шкатулки с замкнутыми ожерельями

Для произвольных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  существует два семейства касающихся их окружностей:  $\mathcal{M}_0(\alpha, \beta)$  – окружности с индексом касания 0 и  $\mathcal{M}_1(\alpha, \beta)$  – с индексом касания 1. Если окружности  $\alpha$  и  $\beta$  ориентировать, то семейство  $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$  касающихся их окружностей определяется однозначно. Будем называть его *бусами* окружностей  $\{\alpha, \beta\}$ .

Пусть на плоскости имеется  $n$  пар окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ . Пусть также  $\mathcal{M}_i$  – бусы пары  $\{\alpha_i, \beta_i\}$ . Их декартово произведение

$$\{\mathcal{M}_1 \times \dots \times \mathcal{M}_n\} = \{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} : \gamma_1 \in \mathcal{M}_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{M}_n\}$$

назовем *шкатулкой* набора  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  и будем обозначать  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  или просто  $\Omega$ , если понятно о какой шкатулке идет речь. Произвольный набор окружностей  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \in \Omega$  назовем *цепочкой* из шкатулки  $\Omega$ .

Рассмотрим шкатулку  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  и произвольную окружность  $\delta$ . Назовем  $\delta$ -*ожерельями* шкатулки  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  такие цепочки  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  из нее, которые обладают следующим свойством:  $\gamma_i$  и  $\gamma_{i+1}$  пересекаются на окружности  $\delta$  для всех  $i = 1, \dots, n - 1$ . Назовем  $\delta$ -ожерелье *замкнутым*, если его первая и последняя окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_n$  тоже пересекаются на  $\delta$ . *Ожерельем Штейнера* назовем такую цепочку, соседние звенья которой касаются.

Будем говорить, что шкатулка  $\Omega$  имеет *свойство замыкания* на окружности  $\delta$ , если из того, что какое-нибудь одно ее  $\delta$ -ожерелье замкнуто, следует, что в  $\Omega$  существует гомотопно эквивалентный класс замкнутых  $\delta$ -ожерелий. То есть, можно непрерывно изменять  $\delta$ -ожерелье так, чтобы оно оставалось в шкатулке и было замкнутым. Аналогично определяется свойство замыкания ожерелий Штейнера шкатулки.

В этих терминах большая теорема Эмха для пучков окружностей будет звучать так:



**Теорема 24'** Пусть есть два семейства соосных окружностей:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  из пучка  $\mathcal{F}_1$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  из пучка  $\mathcal{F}_2$ , причем пучки  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  имеют общую окружность  $\delta$ , которая лежит между  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Тогда шкатулка  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ .

### 3.5. Автоморфизмы Мёбиуса и отображение Понселе в модели Пуанкаре

В этом разделе под автоморфизмами Мёбиуса мы будем подразумевать аналитические автоморфизмы  $\text{Aut}(D)$  единичного круга  $D = \{|z| < 1\}$  комплексной плоскости. Как известно, все они являются дробно-линейными отображениями и имеют вид

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad a \in D.$$

Два отображения  $f_1, f_2 \in \text{Aut}(D)$  будем называть *сопряженными* и обозначать  $f_1 \sim f_2$ , если существует такое  $g \in \text{Aut}(D)$ , что  $f_1 = g^{-1} \circ f_2 \circ g$ .

В [105] показано, что всякое дробно-линейное отображение  $f$  раскладывается в композицию четырех инверсий. При этом, если  $f$  имеет инвариантную окружность (т.е. не является локсодромическим), то  $f$  раскладывается в композицию двух инверсий относительно окружностей, ортогональных инвариантной окружности.

**Предложение 61.** Пусть  $f(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ , где  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $a \in D = \{|z| < 1\}$ . Тогда в плоскости Лобачевского с абсолютом  $\partial D$  прямые  $zf(z)$  для всех  $z \in \partial D$  касаются одного цикла. Если  $f$  является эллиптическим, т. е. имеет две неподвижные точки  $z_0 \in D$  и  $\frac{1}{\bar{z}_0}$ , то  $f(z) \sim e^{i\psi} z$ , где

$$\psi = \phi - 2 \arg(1 - \bar{a}z_0), \quad (3.2)$$

и в модели Пуанкаре цикл  $\alpha_f$ , которого касаются прямые  $zf(z)$ , является окружностью с центром в точке  $z_0$  и гиперболическим радиусом

$$\rho_f = 4 \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\psi}{4} \right). \quad (3.3)$$

Доказательство. Разложим  $f$  в композицию двух инверсий. Окружности этих инверсий ортогональны  $\partial D$ , и поэтому, каждая из них действует на  $\partial D$  как проективная инволюция. Следовательно, их композиция  $f$  является проективным преобразованием на окружности  $\partial D$ . Тогда по теореме Шаля (Теорема 57) прямые  $zf(z)$ ,  $z \in \partial D$  касаются некоторой коники из  $\Omega(\partial D)$  (т.е. дважды касающейся  $\partial D$ ), которая является циклом в модели Клейна с абсолютном  $\partial D$ .

Пусть теперь  $f$  является эллиптическим с неподвижными точками  $z_0 \in D$  и  $\frac{1}{\bar{z}_0}$ . Так как дробно-линейная функция сохраняет двойное отношение точек, для любых  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  имеем

$$\frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} : \frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_4) - f(z_2)} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_4) - f(z_2)} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Это означает, что

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = \operatorname{const}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

При  $z_1 = z_0, z_2 = \frac{1}{\bar{z}_0}$  получаем

$$\left[ f(z), z; z_0, \frac{1}{\bar{z}_0} \right] = \operatorname{const}. \quad (3.4)$$

Пусть  $g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ . Тогда  $g(z_0) = 0, g(\frac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$  и

$$\left[ g(f(z)), g(z); g(z_0), g\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) \right] = [g(z), g(f(z)); 0, \infty] = \frac{g(f(z))}{g(z)} = \operatorname{const}.$$

Т.к. функции  $f$  и  $g$  переводят единичную окружность в себя, то существует такое  $\psi \in \mathbb{R}$ , что  $\forall z \in \partial D$

$$g(f(z)) = e^{i\psi} g(z). \quad (3.5)$$

Угол  $\psi$  найдем из условия (3.4). При  $z = a$  оно дает

$$\frac{-z_0}{a - z_0} : \frac{-\frac{1}{\bar{z}_0}}{a - \frac{1}{\bar{z}_0}} = e^{i\psi}.$$

Тогда в силу того, что точка  $z_0$  неподвижна для функции  $f(z)$ , имеем

$$e^{i\psi} = \frac{a - \frac{1}{\bar{z}_0}}{a - z_0} \cdot z_0 \bar{z}_0 = e^{i\phi} \frac{1 - \bar{a}z_0}{1 - \bar{a}z_0} z_0 \left( e^{i\phi} \frac{z_0 - a}{1 - \bar{a}z_0} \right)^{-1} = e^{i\phi} \frac{1 - \bar{a}z_0}{1 - \bar{a}z_0}, \quad (3.6)$$

откуда получаем (3.2).

Из равенства (3.5) следует, что прямые  $g(z)g(f(z))$  в модели Пуанкаре касаются одной окружности с центром в точке  $z = 0$ , причем угол параллельности<sup>2</sup> точки  $z = 0$  относительно прямой  $g(z)g(f(z))$  равен  $\frac{\psi}{2}$ . Так как дробно-линейные отображения являются движениями в модели Пуанкаре, то прямые  $zf(z)$  тоже касаются одной окружности, центр которой находится в точке  $g^{-1}(0) = z_0$  с таким же углом параллельности относительно прямой  $zf(z)$ . Таким образом, имеем  $\psi = 2\Pi(\rho_f)$ , откуда получаем (3.3).

□

Таким образом, действие всякого автоморфизма Мёбиуса  $f(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  на единичной окружности  $\partial D = \{|z| = 1\}$  совпадает с отображением Понселе относительно некоторого цикла  $\alpha_f$  в модели Пуанкаре с абсолютном  $\partial D$ .

Попутно заметим, что из соотношения (3.6) получаем такое

---

<sup>2</sup> Напомним, что *углом параллельности*  $\alpha$  точки  $\mathbf{a}$  относительно прямой  $l$  на плоскости Лобачевского называется половина угла между двумя прямыми, проходящими через  $\mathbf{a}$  и параллельными  $l$ , т.е. пересекающимися с  $l$  на абсолютном. Если расстояние от точки  $\mathbf{a}$  до прямой  $l$  равно  $x$ , то верна формула  $\alpha = \Pi(x)$ , где  $\Pi(x) = 2\arctg(e^{-x/4})$  – функция Лобачевского

**Следствие 62.** Пусть отображение  $f(z) = e^{i\phi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ , где  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $a \in D$ , имеет неподвижную точку  $z_0 \in D$ . Тогда

$$f^n(z) \equiv z, \forall z \in \partial D \Leftrightarrow \left( e^{i\phi} \frac{\overline{1-\bar{a}z_0}}{1-\bar{a}z_0} \right)^n = 1.$$

### 3.6. Некоммутативный аналог большой теоремы Эмха

**Теорема 63** (Некоммутативный аналог большой теоремы Эмха) Пусть  $n$  пучков, порожденных парами окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ , содержат общую окружность  $\delta$ , которая для всех  $i = \overline{1, n}$  лежит в кольце между  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Тогда существует еще одна пара соосных с  $\delta$  окружностей  $\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\}$  такая, что шкатулка  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^{n+1}$  обладает свойством замыкания на окружности  $\delta$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $\delta = \partial D$ . Пусть первая окружность  $\delta$ -ожерелья, которая касается пары  $\{\alpha_1, \beta_1\}$ , пересекает  $\delta$  в точках  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда в модели Пуанкаре с абсолютном  $\delta$  прямые  $z_1z_2$  касаются фиксированной окружности, соосной  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . А из Предложения 61 следует, что отображение Эмха  $z_1 \mapsto z_2$  пары  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  совпадает с действием на  $\partial D$  некоторого автоморфизма Мёбиуса. Поэтому композиция  $n$  отображений Эмха пар окружностей  $\{\alpha_i, \beta_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – это тоже автоморфизм Мёбиуса и по Предложению 61 прямые Пуанкаре  $z_1z_{n+1}$  касаются некоторого цикла  $\alpha_{n+1}$ , а следовательно, и симметричного ему относительно  $\partial D$  цикла  $\beta_{n+1}$ . Получаем, что у шкатулки  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^{n+1}$  все  $\delta$ -ожерелья тоже замкнуты.

□

**Следствие 64** (Обобщенная теорема Штейнера) Пусть имеется  $n$  пар непересекающихся окружностей  $\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}$ , имеющих общую серединную окружность  $\delta$ . Тогда существует еще одна пара симмет-

ричных относительно  $\delta$  окружностей  $\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\}$  такая, что ожерелья Штейнера шкатулки  $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$  обладают свойством замыкания.

### 3.7. Элементарное доказательство большой теоремы

#### Эмха

В работе [8] было получено обобщение теоремы Эмха на пучки окружностей. У нас это обобщение сформулировано в Теореме 24. В Разделе 2.6 мы показали, что из нее следует большая теорема Понселе для пучка коник. В этом разделе мы покажем, что большая теорема Эмха следует из большой теоремы Понселе для пучков окружностей.

В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующее вспомогательное утверждение, возможно, имеющее и самостоятельный интерес.

**Предложение 65.** Пусть окружности  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  принадлежат одному пучку  $\mathcal{F}$ . Хорда  $AC$  окружности  $\alpha$  касается  $\beta$ . Окружность  $\omega$  проходит через точки  $A$  и  $C$ , касаясь  $\gamma$  некоторым фиксированным (внутренним или внешним) образом. Тогда все такие окружности  $\omega$  касаются некоторой фиксированной окружности, концентричной  $\alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $K$  – точка касания  $\omega$  и  $\gamma$ ,  $E$  – точка пересечения их общей касательной в точке  $K$  с прямой  $AC$ . Окружность  $\nu$  с центром в точке в  $E$ , проходящая через  $K$ , ортогональна  $\gamma$  и  $\omega$ . Значит,  $A$  и  $C$  инверсны относительно  $\nu$ , а, поэтому, окружности  $\alpha$  и  $\nu$  ортогональны. Таким образом, окружность  $\nu$  ортогональна всему пучку  $\mathcal{F}$  и, следовательно,  $\nu \perp \beta$ . Поэтому  $\nu$  проходит через точку  $X$  касания  $\beta$  с  $AC$ . Окружность  $\tau$ , вписанная в угол  $XEK$ , касающаяся его сторон в точках  $X$  и  $K$ , касается  $\omega$ . Значит, окружности  $\gamma$ ,  $\tau$  и  $\omega$  гомотетичны относительно точки  $K$ , и касательные в точках вторичного пересечения прямой  $KX$  с  $\gamma$  – в  $L$  и с  $\omega$  – в  $D$  к этим окружностям



Предложения 66 следует, что для каждого  $k$  прямая  $\mathbf{x}_k\mathbf{x}_{k+1}$  всегда касается некоторой окружности  $\beta'_k \in \mathcal{A}'_2$ . Теорема 24 теперь следует из большой теоремы Понселе для окружностей  $\delta, \beta'_1, \dots, \beta'_n \in \mathcal{A}'_2$ .

□

### 3.8. Теорема о замыкании с подвижной «орбитой»

В этом параграфе мы получим новую теорему о замыкании (Теорема 73), в которой само «замыкание» устроено несколько необычно по сравнению с другими теоремами о замыкании. В теоремах Понселе, Штейнера, о зигзаге, Эмха замыкание происходило на фиксированной окружности – менялась только цепочка ломаных или окружностей. Т.е. траектории двигались по фиксированной «орбите». В новой же теореме, которую мы получим в этом параграфе, замыкание будет происходить на окружности, которая сама изменяется, касаясь двух фиксированных окружностей.

Сначала мы установим один любопытный геометрический факт о касательных к окружностям одного пучка, следствие из которого станет основным при выводе комбинаторного доказательства теоремы Понселе в следующем параграфе.

**Теорема 67** (о касательных в пучке) *Пусть окружности  $\alpha, \beta, \gamma$  принадлежат одному пучку  $\mathcal{F}$ . Прямая  $l$  касается  $\beta$  и пересекает  $\alpha$  в точках  $A$  и  $C$ , касательные из которых к окружности  $\gamma$  пересекаются в точке  $B$  (при этом  $\gamma$  касается либо одновременно отрезков  $AB$  и  $BC$ , либо одновременно их продолжений). Тогда описанная около  $\Delta ABC$  окружность  $\delta_l$  касается некоторых фиксированных (не зависящих от  $l$ ) окружностей, одна из которых принадлежит пучку  $\mathcal{F}$ , а другая – концентрична окружности  $\alpha$ .*

На рис. 3.4 три соосные окружности  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  изображены более жирны-





**Предложение 69.** Пусть окружности  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  соосны. Хорда  $AC$  окружности  $\alpha$  касается окружности  $\beta$ . Из точек  $A$  и  $C$  проведены касательные  $AC'$  и  $CA'$  к окружности  $\gamma$ . Тогда для всех таких хорд  $AC$

$$t_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right) = \frac{|AC'| + |CA'|}{|AC|} \quad (3.7)$$

есть величина постоянная.

**Доказательство.** Пусть  $B$  – точка касания  $AC$  с  $\beta$ . Тогда по Лемме 68 существует константа  $k := t_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right)$  такая, что  $|AC'| = k|AB|$ ,  $|CA'| = k|BC|$ . Отсюда,  $|AC'| + |CA'| = k|AC|$ .

□

**Лемма 70.** Пусть окружность  $\gamma$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega$  проходит через  $A$  и  $C$ , касаясь  $\gamma$  в точке  $K$ . Точка  $I_b$  – центр вневписанной окружности, касающейся стороны  $AC$ . Тогда прямая  $KI_b$  вторично пересекает  $\gamma$  в точке, касательная в которой к  $\gamma$  параллельна  $AC$ .

**Доказательство.** В статье [67] доказан геометрический факт, из которого почти сразу следует Лемма 70. А именно, в наших обозначениях, прямая  $KI_b$  является биссектрисой угла  $AKC$  (см. рис. 3.5). Тогда, как нетрудно заметить, прямая  $KI_b$  образует равные углы с касательной к окружности  $\omega$  в точке  $K$  и прямой  $AC$ . Отсюда следует, что существует окружность  $\gamma'$ , касающаяся окружности  $\omega$  в точке  $K$  и отрезка  $AC$  в точке его пересечения с  $KI_b$  и утверждение леммы следует из того, что окружности  $\gamma$  и  $\gamma'$  гомотетичны с центром в точке  $K$ .

□

**Доказательство Теоремы 67 о касательных в пучке.** Из Предложения 65 следует, что окружность  $\omega$ , проходящая через точки  $A$  и  $C$ , и касающаяся  $\gamma$  в

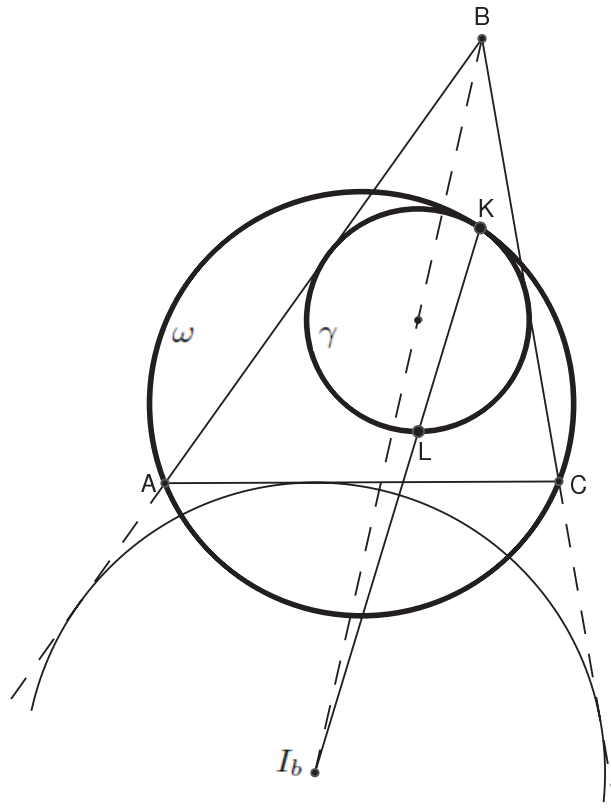


Рис. 3.5.

точке  $K$ , касается некоторой фиксированной окружности  $\zeta'$ , концентричной  $\alpha$ . Эту точку касания  $\omega$  и  $\zeta'$  обозначим через  $D$ . Пусть  $I_b$  – центр вневписанной окружности  $\Delta ABC$ , касающейся стороны  $AC$ ,  $J$  – центр окружности  $\gamma$ ,  $E$  – середина дуги  $\overset{\frown}{AC}$  окружности  $\delta_l$ , лежащая на биссектрисе угла  $\angle ABC$ . Тогда поскольку центры окружностей  $\delta_l$ ,  $\zeta'$  и  $\alpha$  лежат на серединном перпендикуляре  $ED$  к отрезку  $AC$ , то доказав, что длина отрезка  $ED$  постоянна, мы докажем, что и окружность  $\delta_l$  касается некоторой фиксированной окружности  $\zeta$ , концентричной  $\alpha$ . Из Предложения 66 тогда будет следовать вторая часть утверждения теоремы о существовании окружности  $\eta \in \mathcal{F}$ , которой будут касаться все окружности  $\delta_l$ .

Итак, докажем, что длина отрезка  $ED$  постоянна. По Лемме 70 прямая  $KI_b$  вторично пересекает  $\gamma$  в такой точке  $L$ , что  $JL \perp AC$ . Значит,  $JL \parallel ED$  и

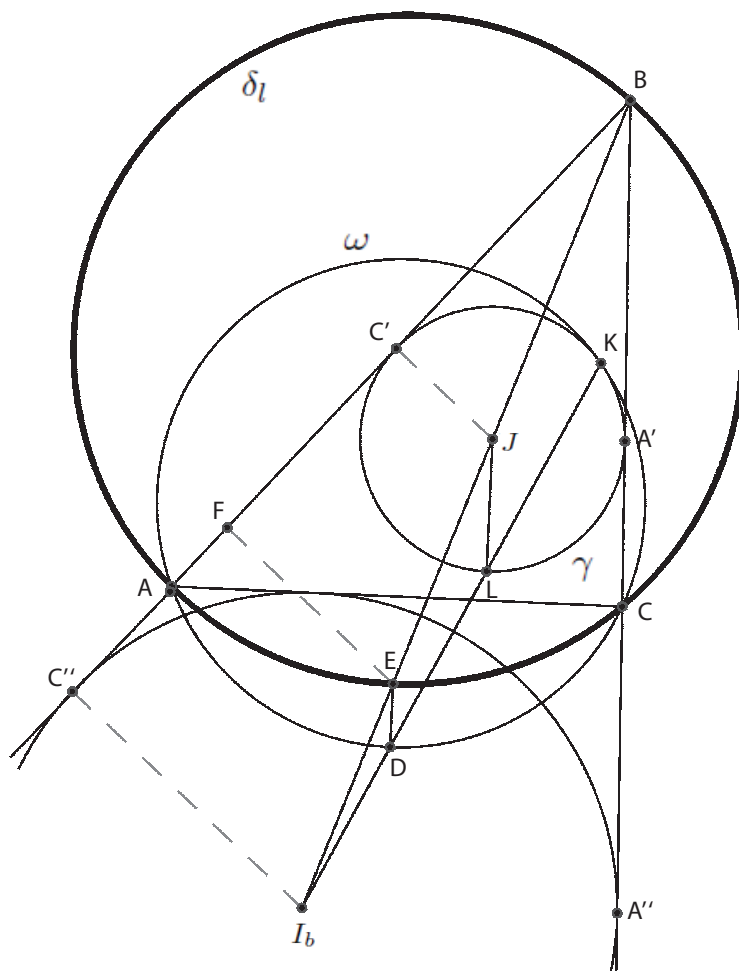


Рис. 3.6.

$\triangle I_b E D \sim \triangle I_b J L$ , откуда следует, что

$$|ED| = \frac{|I_b E| \cdot |JL|}{|I_b J|}.$$

Поскольку длина отрезка  $JL$ , равная радиусу окружности  $\gamma$ , постоянна, нам достаточно доказать постоянство величины  $\frac{|I_b J|}{|I_b E|}$ . Для этого воспользуемся следующим известным свойством треугольника:

**Лемма 71.** Пусть  $I_b$  – центр вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , касающейся стороны  $AC$ ,  $E$  – вторая точка пересечения прямой  $BI_b$  с описанной окружностью. Тогда проекции отрезка  $EI_b$  на стороны  $AB$  и  $BC$  равны половине стороны  $AC$ .

Поскольку отношение двух коллинеарных отрезков сохраняется при проекции на любую прямую, то для проекции на прямую  $AB$  получаем

$$\frac{|I_b J|}{|I_b E|} = \frac{|C'' C'|}{|C'' F|} \stackrel{\text{(лемма 71)}}{=} \frac{2 \cdot (|AC''| + |AC'|)}{|AC|}.$$

Аналогично, проектируя на прямую  $BC$ , получаем

$$\frac{|I_b J|}{|I_b E|} = \frac{2 \cdot (|CA'| + |CA''|)}{|AC|}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим

$$\frac{|I_b J|}{|I_b E|} = \frac{|AC'| + |CA'|}{|AC|} - \frac{|AC''| + |CA''|}{|AC|} \stackrel{(3.7)}{=} t_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right) - 1.$$

Итак, мы доказали, что величина  $\frac{|I_b J|}{|I_b E|}$  не зависит от выбора касательной  $l$  к окружности  $\beta$ , а значит, и длина отрезка  $ED$  тоже постоянна, откуда, как мы отмечали выше, следует, что окружность  $\delta_l$  касается некоторой фиксированной окружности  $\zeta$ , концентричной  $\alpha$ . Тогда из Предложения 66 следует, что окружность  $\delta_l$  касается еще и другой фиксированной окружности  $\eta$ , которая принадлежит пучку  $\mathcal{F}$ .

□

Заметим, что если в Теореме 67 точка  $B$  хотя бы один раз попадет на окружность  $\alpha$ , то так будет всегда. Это сразу следует как и из большой теоремы Понселе, так и из только что доказанной теоремы. Таким образом, получаем в качестве следствия такой известный геометрический факт:

**Следствие 72.** Пусть хорды  $XU$  и  $YZ$  окружности  $\alpha$  касаются окружности  $\beta$ . Тогда  $XZ$  касается фиксированной окружности  $\gamma \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

Но у Теоремы 67 есть еще одно, более интересное следствие. Обратная к ней теорема представляет из себя новую теорему о замыкании:

**Теорема 73** (Теорема о замыкании с подвижной орбитой) Пусть окружности  $\alpha, \gamma, \eta$  соосны и вложены друг в друга в некотором порядке, а окружность  $\zeta$  концентрична  $\alpha$ . Некоторая окружность  $\delta \in \mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$  пересекает  $\alpha$  в двух точках, касательные из которых к окружности  $\gamma$  пересекаются на окружности  $\delta$ . Тогда это верно для всех окружностей семейства  $\mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$ .

Утверждение этой теоремы представляет из себя тоже некоторого рода «замыкание»: любая окружность  $\delta \in \mathcal{M}_0(\zeta, \eta)$  пересекает окружность  $\alpha$  в таких точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 3.4), касательные из которых к окружности  $\gamma$  всегда встречаются на окружности  $\delta_l$ , «замыкаясь» во вписано-описанный треугольник  $ABC$ , стороны которого касаются фиксированных окружностей  $\beta$  и  $\gamma$ , а вершины лежат на окружности  $\delta_l$ . Необычность этого «замыкания» в том, что замыкание происходит на окружности, которая сама изменяется таким образом, что все время касается двух данных окружностей  $\zeta$  и  $\eta$ .

# Аналитические условия замыкания траекторий

В этой главе получены явные формулы для числа вращения отображения Понселе, что дает критерий замыкания траекторий и позволяет выразить период замыкания через параметры коник. Также рассмотрен вопрос нахождения условий замыкания ломаных Понселе через  $n$  шагов. В общем случае имеются формулы Кэли, но для двух окружностей можно находить более простые формулы. Мы получим алгоритм отыскания таких формул для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4.1. Введение

Если некоторым проективным преобразованием можно перевести две коники в концентрические окружности, то утверждение теоремы Понселе для них становится очевидным, однако такого преобразования в общем случае не существует. Например, две неконцентрические окружности нельзя перевести в концентрические, поскольку все окружности в комплексных однородных координатах проходят через циклические точки  $(1, \pm i, 0)$  бесконечно удаленной прямой (см. [73, 2гл. XXII, §2]), а концентрические окружности, и только они, касаются в этих точках друг друга.

Задачу нахождения аналитических условий на замыкание траекторий Понселе двух данных коник называют поризмом Понселе. Формулы Кэли (6) позволяют для каждого  $n \in \mathbb{N}$  проверить замыкаются ли траектории через  $n$  шагов. Но с их помощью нельзя узнать замыкаются ли вообще траектории Понселе. Мирман в [89] получил достаточные условия для того, чтобы ломанные Понселе двух коник не замыкались. Он показал, например, что не

замыкаются траектории Понселе окружностей радиусов  $1$  и  $\frac{1}{2}$  с расстоянием между центрами  $\frac{1}{3}$ . Поэтому, актуальна задача нахождения аналитических условий на критерий замыкания ломаных Понселе двух коник. Для случая двух вложенных окружностей формулы с такими условиями впервые были выведены Якоби [50]. В следующем Разделе мы получим подобные формулы для двух произвольных коник.

Стоит также заметить, что применение формул Кэли приводит к довольно громоздким вычислениям. Поэтому, для малых  $n$  математиками было получено множество более простых аналитических условий на замыкание траекторий. Например, для двух окружностей радиусов  $R$  и  $r$  с расстоянием между центрами  $d$  условия того, что их траектории Понселе замыкаются через  $n = 3, 4, 5, 6, 8$  шагов, задаются уравнениями

$n = 3$ :

$$\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}; \quad (\text{Л. Эйлер}) \quad (4.1)$$

$n = 4$ :

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}; \quad (\text{Н. Фусс}) \quad (4.2)$$

$n = 5$ :

$$\frac{2Rr}{R^2-d^2} - \frac{R^2-d^2}{2Rr} = \frac{4r^2}{2Rr+R^2-d^2}; \quad (4.3)$$

$n = 6$ :

$$\frac{1}{(R^2-d^2)^2-4Rr^2d} + \frac{1}{(R^2-d^2)^2+4Rr^2d} = \frac{1}{2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2}; \quad (4.4)$$

$n = 8$ :

$$\frac{1}{((R^2-d^2)^2-4Rr^2d)^2} + \frac{1}{((R^2-d^2)^2+4Rr^2d)^2} = \frac{1}{(2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2)^2}. \quad (4.5)$$

В Разделе 4.3 мы предложим алгоритм получения таких уравнений для любого  $n$ . Для этого мы установим один несложный геометрический факт,

обобщающий формулу Радича-Калимана [75] о метрических соотношениях в ломаных Понселе (Теорема 76). Попутно, в качестве примеров, выведем формулы (4.1) - (4.5). В заключение, мы дадим комбинаторное доказательство теоремы Понселе.

## 4.2. Инвариантная мера и условия замыкания траекторий Понселе

Инвариантная мера дает простое условие замыкания траекторий Понселе двух коник. Рассмотрим сначала случай двух вложенных окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть хорда  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  окружности  $\alpha$  касается окружности  $\beta$ . Рассмотрим меру Якоби-Бертрана  $\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{d\mathbf{x}}{\beta(\mathbf{x})}$ . Тогда можно показать, что число вращения  $\rho(j_\beta)$  отображения Понселе  $j_\beta$  (см. (7)) вычисляется по формуле

$$\rho(j_\beta) = \frac{\mu(\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}})}{\mu(\alpha)}.$$

Траектории Понселе на окружности  $\alpha$  относительно окружности  $\beta$  замыкаются через  $n$  шагов тогда и только тогда, когда

$$\rho(j_\beta) = \frac{m}{n} \tag{4.6}$$

для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, период замыкания траекторий Понселе равен знаменателю числа вращения  $\rho(j_\beta)$ .

Рассмотрим декартову систему координат с началом в центре окружности  $\alpha$  и осью  $Ox$ , направленной по линии центров окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $R, r$  и  $d$  – радиусы и расстояние между центрами окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Тогда

$$\alpha(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - R^2, \quad \beta(\mathbf{x}) = (x - d)^2 + y^2 - r^2.$$



На окружности  $\alpha$  должно выполняться равенство

$$y^2 = R^2 - x^2, \quad xdx + ydy = 0.$$

Поэтому, имеем

$$d\mathbf{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} dx^2} = \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Условие 4.6 выполняется для любой хорды Понселе  $\mathbf{x}\mathbf{y}$ . Выберем теперь хорду  $\mathbf{x}\mathbf{y}$ , которая перпендикулярна линии центров окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  (см.рис. 4.1).

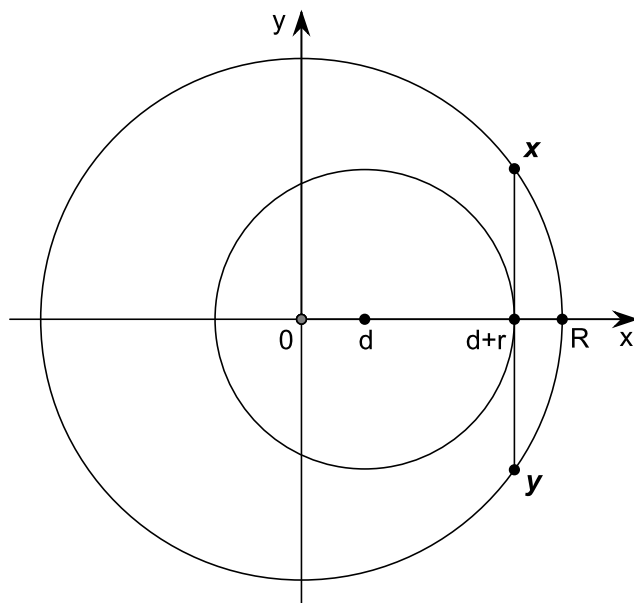


Рис. 4.1.

Тогда

$$\rho(j_\beta) = \frac{\int_{r+d}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(R^2+d^2-r^2-2dx)}}}{\int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(R^2+d^2-r^2-2dx)}}} \quad (4.7)$$

Если окружности  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются в точках  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (см. рис. 4.2), то  $\mu(\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = 2\mu(\widetilde{\mathbf{b}\mathbf{x}})$  (в Разделе 2.4 мы договорились считать, что  $\mu(\widetilde{\mathbf{a}\mathbf{b}}) = 0$  в случае пересекающихся коник.)

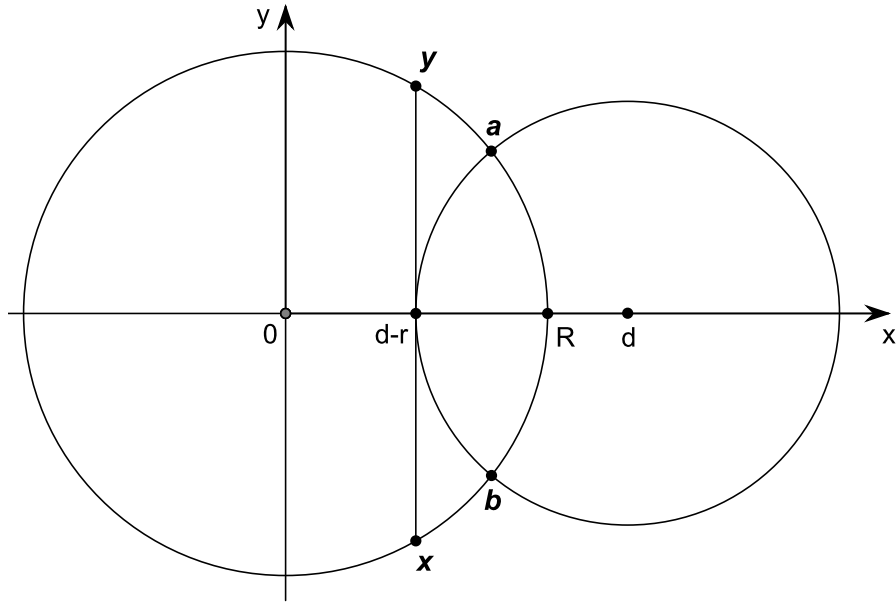


Рис. 4.2.

Тогда получаем, что в случае пересекающихся окружностей  $\alpha$  и  $\beta$

$$\rho(j_\beta) = \frac{\int_{d-r}^c \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(R^2+d^2-r^2-2dx)}}}{\int_{-R}^c \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(R^2+d^2-r^2-2dx)}}} \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

где

$$c = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d}.$$

В случае же, когда окружности  $\alpha$  и  $\beta$  лежат одна вне другой, для вывода формулы на условия замыкания заметим следующее. Рассмотрим двузвенную ломаную Понселе  $\mathbf{x}y\mathbf{z}$ . Из большой теоремы Понселе следует, что прямая  $\mathbf{xz}$  касается некоторой фиксированной окружности  $\gamma \in (\alpha, \beta)$  (см. рис. 4.3), которая лежит уже внутри окружности  $\alpha$ .

И при этом, условие замыкания через  $n$  шагов траекторий Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  равносильно условию замыкания через  $\frac{n}{2}$  шагов траекторий Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\gamma$ . В Разделе 4.3 мы выразим радиус  $\rho$  окружности  $\gamma$  и расстояние между центрами  $\alpha$  и  $\gamma$  через  $R, r$  и  $d$ . Будет доказано,

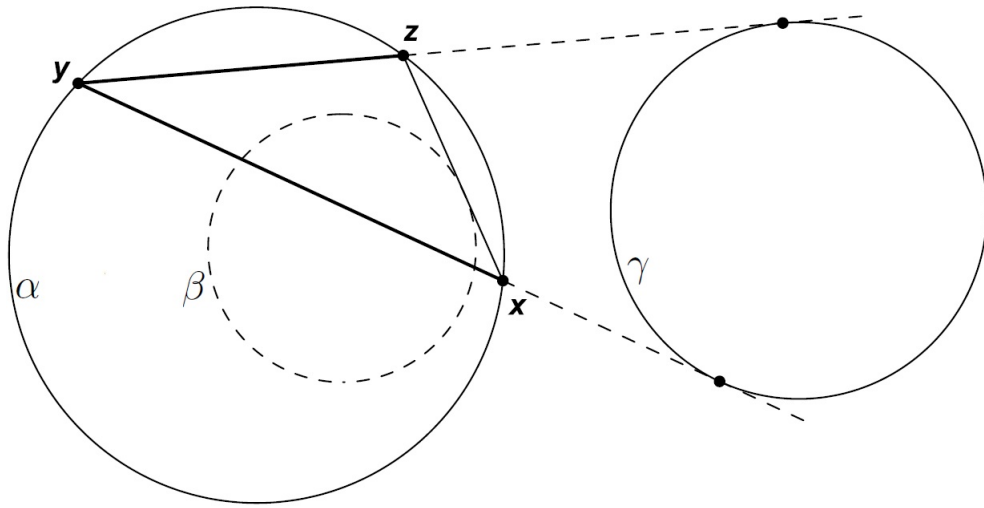


Рис. 4.3.

что

$$\rho = \frac{2Rr^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - R; \quad D = \frac{4R^2r^2d}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Тогда поскольку  $2\rho(j_\beta) = \rho(j_\gamma)$ , то из 4.7 для  $\alpha$  и  $\gamma$  находим

$$2\rho(j_\beta) = \frac{\int_a^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 + d^2 - r^2 - 2dx)}}}{\int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 + d^2 - r^2 - 2dx)}}}, \quad (4.9)$$

где

$$a = \frac{2Rr^2}{(R - d)^2} - R.$$

Таким образом, получаем

**Теорема 74.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две окружности радиусов  $R$  и  $r$ , расстояние между центрами которых равно  $d$ . Тогда траектории Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются, если и только если рационально их число вращения  $\rho(j_\beta)$ , которое вычисляется по следующим формулам:

1) если окружности  $\alpha$  и  $\beta$  вложенные, то

$$\rho(j_\beta) = \frac{\int_{r+d}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}}{\int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}},$$

где

$$c = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d};$$

2) если окружности  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются, то

$$\rho(j_\beta) = \frac{\int_{d-r}^c \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}}{\int_{-R}^c \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}};$$

3) если окружности  $\alpha$  и  $\beta$  лежат одна вне другой, то

$$2\rho(j_\beta) = \frac{\int_a^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}}{\int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{(R^2-x^2)(c-x)}}},$$

где

$$a = \frac{2Rr^2}{(R-d)^2} - R.$$

Период замыкания равен знаменателю  $n$  числа вращения  $\rho(j_\beta) = \frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Пусть теперь  $\alpha$  и  $\beta$  – две произвольные невырожденные коники, которые имеют не более двух точек пересечения. Тогда существует проективное преобразование, переводящее их в две окружности  $\alpha'$  и  $\beta'$  [70]. Пусть  $R, r$  и  $d$  – их радиусы и расстояние между центрами,  $A$  и  $B$  – матрицы коник  $\alpha$  и  $\beta$  в некоторой декартовой системе координат. Составим их характеристический многочлен

$$\det(\lambda A + B) = \Delta \lambda^3 + \Theta \lambda^2 + \Theta' \lambda + \Delta'.$$

Известно [93, Гл. xx, п. 24], что величины

$$I_1 = \frac{\Theta^2}{\Delta\Theta'}, \quad I_2 = \frac{\Theta'^2}{\Delta'\Theta}, \quad I_3 = \frac{\Theta^3}{\Delta^2\Delta'}, \quad I_4 = \frac{\Theta'^3}{\Delta\Delta'^2}$$

являются проективными инвариантами пары коник  $\alpha$  и  $\beta$ .

Матрицы  $A'$  и  $B'$  окружностей  $\alpha'$  и  $\beta'$  в координатах, изображенных на рисунке 4.1, записываются так:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & d^2 - r^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det(\lambda A' + B') &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -d \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -d & 0 & d^2 - r^2 - \lambda R^2 \end{vmatrix} = \\ &= -R^2\lambda^3 + (d^2 - r^2 - 2R^2)\lambda^2 + (d^2 - 2r^2 - R^2)\lambda - r^2. \end{aligned}$$

Наша задача – для двух данных коник  $\alpha$  и  $\beta$  найти  $R, r$  и  $d$ . Поскольку окружности  $\alpha'$  и  $\beta'$  с точностью до гомотетии определяются однозначно, можно далее считать, что  $R = 1$ . Тогда находим

$$I_1 = \frac{(2 + r^2 - d^2)^2}{1 + 2r^2 - d^2}, \quad I_2 = \frac{(1 + 2r^2 - d^2)^2}{r^2(2 + r^2 - d^2)}. \quad (4.10)$$

Из этой системы можно выразить  $r$  и  $d$  через  $I_1, I_2$ . Посторонние корни отбрасываются из условия на взаимное расположение окружностей  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Оно такое же, как и для коник  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\begin{cases} d < 1 - r, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ вложенные;} \\ 1 + r < d, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ лежат одна вне другой;} \\ |1 - r| < d < 1 + r, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ пересекаются.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Введем обозначения

$$u := r^2 - d^2 + 2,$$

$$v := 2r^2 - d^2 + 2.$$

Эти величины также являются проективными инвариантами коник  $\alpha$  и  $\beta$ . Первый из них ( $u$ ) назовем *особым инвариантом*.

Из системы (4.10) находим

$$v = \frac{u^2}{I_1} + 1,$$

$$u^3 = I_1 I_2 (u^2 - I_1 u + I_1). \quad (4.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} r^2 = v - u &= \frac{u^2}{I_1} - u + 1, \\ d^2 = v - 2u + 2 &= \frac{u^2}{I_1} - 2u + 3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

А условия (4.11) перепишутся в виде

$$\begin{cases} p(u) > 0, u > 1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ вложенные;} \\ p(u) > 0, u < 1, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ лежат одна вне другой;} \\ p(u) < 0, & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ пересекаются,} \end{cases} \quad (4.14)$$

где

$$p(u) := \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3.$$

Заметим, что всякое решение системы (4.10) определяет пару окружностей  $\alpha'$  и  $\beta'$ , в которые проективным преобразованием можно перевести коники  $\alpha$  и  $\beta$ . Такая пара с точностью до гомотетии единственна. Следовательно, и решение системы (4.10) с условием (4.11) единственно. Это также равносильно тому, что особый инвариант  $u$  пары коник  $\alpha$  и  $\beta$  определяется однозначно по уравнению (4.12) и условию (4.14).

Тогда получаем обобщение Теоремы 74 на произвольные коники:

**Теорема 75.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – две невырожденные коники,  $u$  – их особый инвариант. Положим

$$\mathcal{J}(A, B, C) = \frac{\int_A^B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}{\int_{-1}^C \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}, \quad \text{где } c = \frac{3-u}{2\sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3}}$$

Тогда число вращения  $\rho(j_\beta)$  можно вычислить по следующим формулам в зависимости от взаимного расположения коник  $\alpha$  и  $\beta$ :

1) если  $\beta$  лежит внутри  $\alpha$ , то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(a, 1, 1), \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1} + \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3};$$

2) если  $\beta$  лежит вне  $\alpha$ , то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(a', c, c), \quad \text{где } a' = 2 \left( \frac{u^2}{I_1} - u + 1 \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3} \right)^{-2} - 1;$$

3) если  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются в двух точках, то

$$\rho(j_\beta) = \mathcal{J}(b, 1, 1), \quad \text{где } b = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3} - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1};$$

### 4.3. Метрические свойства ломаных Понселе

В этом разделе  $\alpha$  и  $\beta$  – окружности радиусов  $R, r$ , расстояние между центрами которых равно  $d$ . Под *ломаной Понселе* этих окружностей будем понимать ломаную  $v_1 \dots v_n$ , у которой все вершины  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  лежат на окружности  $\alpha$ , а звенья  $v_1, v_2, \dots, v_n$  касаются  $\beta$ . Если ломаная замкнута, т.е.  $A_{n+1} = A_1$ , и не имеет самопересечений, то будем ее называть *многоугольником Понселе*. Через  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$  обозначим пучок окружностей, проходящий через  $\alpha$  и  $\beta$ .

Радич и Калиман нашли [8] следующее метрическое соотношение двухзвенных ломаных Понселе:

**Теорема А.** Пусть ломаная  $XZY$  вписана в  $\alpha$  так, что  $XZ$  и  $ZY$  касаются  $\beta$  в точках  $X'$  и  $Y'$  соответственно. Тогда величина  $\frac{XY}{XX' + YY'}$  постоянна и равна  $\frac{2Rr}{R^2 - d^2}$ .

Мы дадим геометрическое доказательство обобщения этой теоремы на ломаные с произвольным числом звеньев:

**Теорема 76.** Пусть  $n \geq 2$  и  $v_1 \dots v_n$  — ломаная Понселе  $\alpha$  и  $\beta$  с началом  $X$  и концом  $Y$  (см. рис. 4.4), а звенья  $v_1$  и  $v_n$  касаются  $\beta$  в точках  $X'$  и  $Y'$  соответственно. Тогда для всех таких ломаных  $\frac{XY}{XX' + YY'}$  — величина постоянная.

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  эту величину обозначим через  $k_n(\alpha, \beta)$ . Для доказательства нам понадобится такое следствие большой теоремы Понселе:

**Теорема В.** Пусть  $A_1 \dots A_{n+1}$  — ломаная Понселе  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда  $A_1 A_{n+1}$  касается фиксированной окружности  $\gamma_n \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

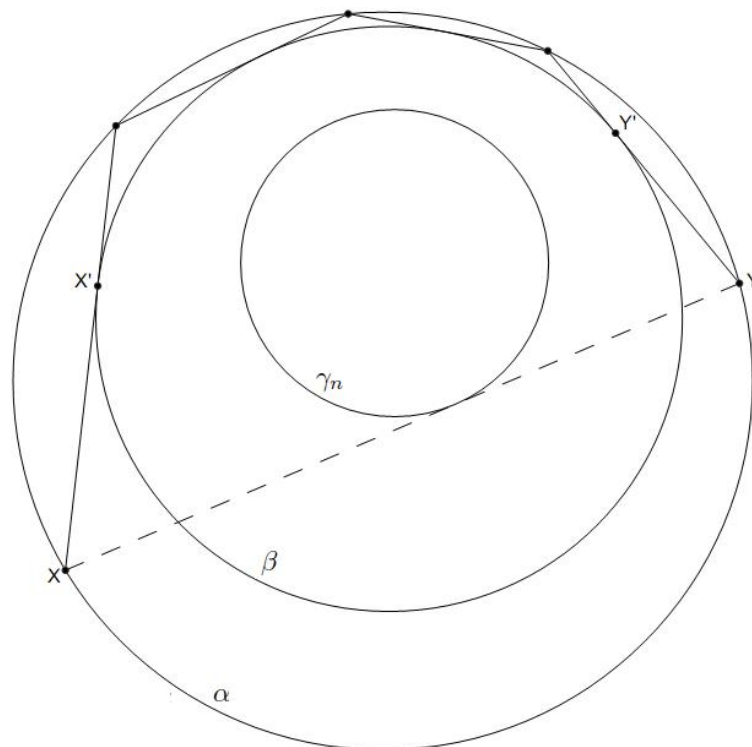


Рис. 4.4.



По Лемме 68 любая окружность  $\gamma \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$  – это геометрическое место точек плоскости, отношение степеней которых относительно  $\alpha$  и  $\beta$  постоянно. Обозначим эту константу окружности  $\gamma \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$  через  $u_\gamma \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)$ .

Доказательство Теоремы 76. Из теоремы B следует, что все прямые  $XU$  касаются некоторой окружности  $\gamma_n$  из пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ , проходящего через  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $W$  – точка касания прямой  $XU$  с  $\gamma_n$ . Тогда по Лемме 68 существует число  $k = \sqrt{u_\alpha \left( \frac{\gamma_n}{\beta} \right)}$ , такое, что  $|XW| = k(\sqrt{\sigma_\beta(X)})$ ,  $|YW| = k(\sqrt{\sigma_\beta(Y)})$ , т.е.  $|XY| = k(\sqrt{\sigma_\beta(X)} + \sqrt{\sigma_\beta(Y)}) = k(|XX'| + |YY'|)$ .

□

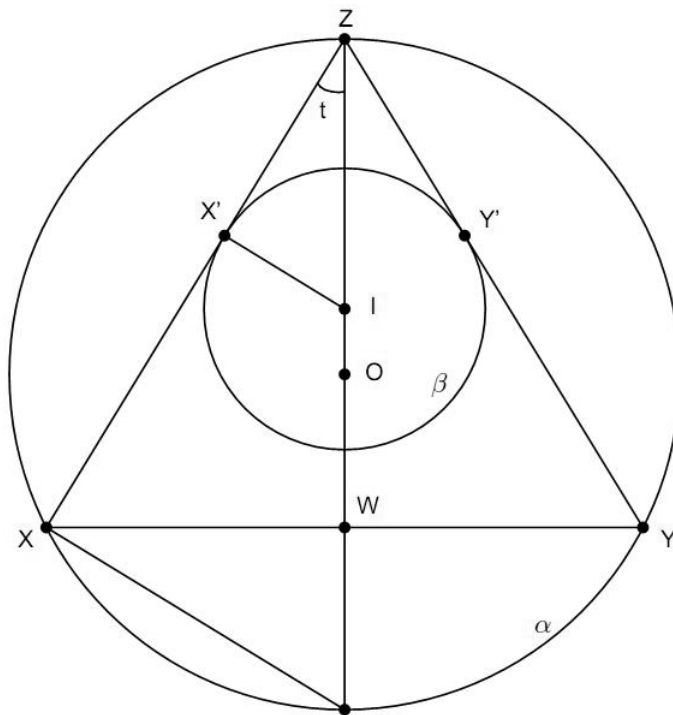


Рис. 4.5.

Теорема 76 дает возможность легко вычислить  $k_2(\alpha, \beta)$ , поскольку достаточно найти эту величину у какой-нибудь одной ломаной.

Рассмотрим двузвенную ломаную  $XZY$  (см. рис. 4.5), у которой средняя вершина  $Z$  лежит на линии центров  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть центр  $I$  окружности  $\beta$  лежит

на отрезке  $ZO$ , где  $O$  — центр  $\alpha$ ,  $W$  — середина  $XY$ ,  $t = \angle XZO$ . Тогда

$$\sin t = \frac{r}{R-d};$$

$$|XW| = |XZ| \sin t = 2R \sin t \cos t;$$

$$|XX'| = |XZ| - |X'Z| = 2R \cos t - (R-d) \cos t = (R+d) \cos t;$$

$$\frac{|XY|}{|XX'| + |YY'|} = \frac{|XW|}{|XX'|} = \frac{2R \sin t \cos t}{(R+d) \cos t} = \frac{2R \cdot \frac{r}{R-d}}{R+d} = \frac{2Rr}{R^2 - d^2}.$$

Таким образом, константа Радича-Калимана равна

$$k_2(\alpha, \beta) = \frac{2Rr}{R^2 - d^2}.$$

Если  $\gamma_2 = \beta$ , то  $k_2(\alpha, \beta) = 1$  и получаем формулу Эйлера (4.1) для треугольника.

Теперь, пользуясь Теоремой 76, мы получим общий принцип вывода формул, задающих условия замыкания.

**Лемма 77.** Пусть окружности  $\alpha, \beta, \gamma$  соосны;  $R, r, \rho$  — их радиусы,  $d$  и  $D$  — расстояния между центрами  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$ ;  $k := u_\alpha \left( \frac{\gamma}{\beta} \right)$ . Тогда

$$D = kd, \quad \rho = \sqrt{R^2 + D^2 - k(R^2 - r^2 + d^2)}. \quad (4.15)$$

**Доказательство.** Рассмотрим декартовы координаты  $Oxy$ , у которых начало координат  $O$  совпадает с центром окружности  $\alpha$ , ось  $Ox$  направлена по линии центров  $\alpha, \beta, \gamma$  так, что центры  $\beta$  и  $\gamma$  имеют положительные абсциссы  $d$  и  $D$ . Рассмотрим точку  $A(x; y) \in \alpha$ . Тогда имеем  $x^2 + y^2 = R^2$ , а условие  $\sigma_\gamma(A) = k\sigma_\beta(A)$  запишется так:

$$(x - D)^2 + y^2 - \rho^2 = k((x - d)^2 + y^2 - r^2),$$

откуда

$$2(kd - D)x + R^2(1 - k) + D^2 - \rho^2 + k(r^2 - d^2) = 0.$$

Так как это верно для любого  $x \in [-R; R]$ , то

$$kd - D = 0, \quad R^2(1 - k) + D^2 - \rho^2 + k(r^2 - d^2) = 0.$$

□

Поскольку  $u_\alpha \left( \frac{\gamma_n}{\beta} \right) = k_n^2(\alpha, \beta)$ , с помощью Леммы 77, зная  $k_n(\alpha, \beta)$ , можно находить радиус  $\rho$  окружности  $\gamma_n$  и расстояние  $d$  от ее центра до центра  $\alpha$ .

Если  $A_1 \dots A_{n+1}$  – многоугольник Понселе, то  $\gamma_n = \beta$ , а  $k_n(\alpha, \beta) = 1$ . Обратно, пусть  $k_n(\alpha, \beta) = 1$ . Тогда  $A_1 \neq A_{n+1}$ . Рассмотрим окружность  $b$ , касающуюся смежных с  $A_1 A_{n+1}$  сторон. Когда окружность  $b$  меняется так, что ее центр движется в некоторой окрестности центра окружности  $\beta$  в одном направлении по биссектрисе прямых, содержащих эти стороны, величина  $\nu(b)$ , равная сумме длин касательных к  $b$  из точек  $A_1$  и  $A_{n+1}$ , меняется монотонно и значение  $A_1 A_{n+1}$  может принимать не более чем для одной такой окружности. Но когда  $b$  касается  $A_1 A_{n+1}$ , имеем  $\nu(b) = A_1 A_{n+1}$ . Поэтому если  $k_n(\alpha, \beta) = 1$ , то  $\beta$  касается  $A_1 A_{n+1}$ .

Обозначим  $F_n(R, r, d) := k_{n-1}(\alpha, \beta) - 1$ . Таким образом, соотношение  $F_n(R, r, d) = 0$  задает необходимое и достаточное условие замыкания  $n$ -звенной (возможно, самопересекающейся) ломаной Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$ . Правило  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \gamma_i)$  определяет для каждого  $i \in \mathbb{N}$  отображения

$$G_i: (R, r, d) \mapsto (R, \rho(\gamma_i), D(\gamma_i)) = \left( R, \sqrt{R^2 + k_i^2 d^2 - k_i(R^2 - r^2 + d^2)}, k_i d \right),$$

где  $k_i = u_\alpha \left( \frac{\gamma_i}{\beta} \right)$ ,  $\gamma_i = \gamma_i(\alpha, \beta)$ .

Пусть  $B_1, \dots, B_N$  – многоугольник Понселе. Из теоремы В следует, что для каждого целого  $k$  прямые  $B_i B_{i+k} \forall i = 1, \dots, N$  (индексы берутся по модулю  $N$ ) касаются фиксированной окружности  $\gamma_k \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ . При этом  $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1 = \beta, \gamma_k = \gamma_{N-k}$ . Если  $N = nl$ , то  $A_1 \dots A_l$ , где  $A_i = B_{in}$ , тоже многоугольник Понселе, но уже для пары окружностей  $\alpha, \gamma_n$ . Таким образом, получаем следующую теорему

**Теорема 78.** Если траектории Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются через  $n$  шагов, где  $n = n_1 \dots n_r$ , то

$$[F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d) = 0,$$

где  $G_{n_i} = G_{n_i}(\alpha, \gamma_{t_i})$ ,  $F_{n_1} = F_{n_1}(\alpha, \gamma_{t_1})$ ,  $t_i = \prod_{j=i+1}^r n_j$ ,  $i = \overline{1, r-1}$ ,  $t_r = 1$ .

Иными словами,

$$F_n(R, r, d) = [F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d).$$

Кроме того,

**Замечание 3.** Поскольку множители  $n_i$  можно менять местами, для любой подстановки  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, r\}$  выполняется

$$[F_{n_{\sigma(1)}} \circ G_{n_{\sigma(2)}} \circ \dots \circ G_{n_{\sigma(r)}}](R, r, d) = 0,$$

где

$G_{n_{\sigma(i)}} = G_{n_{\sigma(i)}}(\alpha, \gamma_{t_i})$ ,  $F_{n_{\sigma(1)}} = F_{n_{\sigma(1)}}(\alpha, \gamma_{t_1})$ ,  $t_i = \prod_{j=i+1}^r n_{\sigma(j)}$ ,  $i = \overline{1, r-1}$ ,  $t_r = 1$ .

Если  $A_1 \dots A_{2n}$  –  $2n$ -угольник Понселе  $\alpha$  и  $\beta$ , то  $A_2 A_4 \dots A_{2n}$  –  $n$ -угольник Понселе  $\alpha$  и  $\gamma_2$ . Найдем радиус  $\rho$  окружности  $\gamma_2$  и расстояние  $D$  от ее центра до центра окружности  $\alpha$ . По Лемме 77 имеем

$$D = k_2 d, \quad \rho = \sqrt{R^2 + D^2 - k_2(R^2 - r^2 + d^2)},$$

где  $k_2 = k_2^2(\alpha, \beta)$ , а по теореме А имеем

$$k_2(\alpha, \beta) = \frac{2Rr}{R^2 - d^2}.$$

Отсюда

$$D = \frac{4R^2 r^2 d}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= R^2 + \left(\frac{4R^2r^2d}{(R^2-d^2)^2}\right)^2 - \frac{4R^2r^2}{(R^2-d^2)^2}(R^2-r^2+d^2) = \\
&= \frac{R^2}{(R^2-d^2)^4}((R^2-d^2)^4 - 4r^2(R^2-d^2)^2(R^2+d^2) + 4r^4(R^2+d^2)^2 - \\
&\quad - 4r^4(R^2+d^2)^2 + 16R^2r^4d^2 + 4r^2(R^2-d^2)^2) = \\
&= \frac{R^2}{(R^2-d^2)^4}(2r^2(R^2+d^2) - (R^2-d^2)^2)^2,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\rho = R \left| \frac{2r^2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2} - 1 \right|.$$

Заметим, что  $A_iA_{i+n}$  пересекаются в предельной точке пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ . В самом деле, по теореме В прямые  $A_iA_{i+n}$  касаются  $\gamma_n \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ . Пусть, например, ломаная  $A_iA_{i+1} \dots A_{i+n}$  и окружность  $\gamma_n$  лежат по разные стороны относительно прямой  $A_iA_{i+n}$ . Тогда это свойство будет сохраняться при вращении точки  $A_1$  по окружности  $\alpha$  в силу непрерывности траекторий. Поэтому у многоугольника Понселе  $A'_1 \dots A'_{2n}$ , где  $A'_i = A_{n+i}$ , ломаная  $A'_iA'_{i+1} \dots A'_{i+n} = A_{i+n} \dots A_{i+2n}$  лежит по другую сторону от прямой  $A'_iA'_{i+n} = A_iA_{i+n}$ , нежели окружность  $\gamma_n$ . Если  $\gamma_n$  не вырождается в точку, то получаем, что весь многоугольник  $A_1 \dots A_{2n}$  лежит с одной стороны от прямой  $A_iA_{i+n}$ , чего быть не может, так как он выпуклый. Значит,  $\gamma_n$  всегда точка, а следовательно, предельная точка пучка  $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ .

Для четырехугольника Понселе это означает, что  $\gamma_2$  – точка пересечения диагоналей, т.е. ее радиус  $\rho = 0$ . Из найденных нами формул для  $D$  и  $\rho$  получаем, что для четырехугольника Понселе верны формулы:

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{N. Fuss [97]}); \quad D = \frac{2R^2d}{R^2+d^2},$$

где  $D$  – расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения диагоналей.

Итак, для  $2n$ -угольника Понселе радиус  $\rho$  окружности  $\gamma_2$  выражается через параметры  $\{R, r, d\}$  его описанной и вписанной окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  так:

$$\rho = R \left| \frac{2r^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - 1 \right|.$$

У четырехугольника Понселе с той же описанной окружностью  $\alpha$  и тем же центром вписанной окружности радиус  $r'$  вписанной окружности будет не больше  $r$ . Тогда

$$\frac{2r^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - 1 \geq \frac{2(r')^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - 1 = 0$$

Из этого наблюдения следует

**Теорема 79.** *Для  $n \geq 3$  имеем*

$$F_{2n}(R; r; d) = F_n \left( R; \frac{2Rr^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - R; \frac{4R^2r^2d}{(R^2 - d^2)^2} \right). \quad (4.16)$$

Из формул Эйлера (4.1), Фусса (4.2) и этой теоремы легко следуют соотношения (4.4) и (4.5), дающие необходимые условия замыкания траекторий Понселе через 6 и 8 шагов.

Заметим, что

$$k_{2^i}(\alpha, \beta) = k_{2^{i-1}}(\alpha, \gamma_2) \cdot k_2(\alpha, \beta), \quad (4.17)$$

а радиус  $\rho$  окружности  $\gamma_2$  и расстояние  $D$  между центрами  $\alpha$  и  $\gamma_2$  вычисляются по формулам (4.16). Поэтому по индукции можно находить  $k_{2^i}(\alpha, \beta)$ . Пусть  $m$  нечетно, а  $\delta$  – минимальное натуральное число, для которого  $2^\delta \equiv 1 \pmod{m}$  или  $2^\delta \equiv -1 \pmod{m}$ . Если у окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  существует  $m$ -угольник Понселе, то  $\gamma_{2^\delta} = \beta$ . Поэтому

$$F_{2^\delta+1}(R, r, d) = k_{2^\delta}(R, r, d) - 1 = 0.$$

Отсюда и из Теоремы 78 следует

**Теорема 80.** Пусть траектории Понселе окружностей  $\alpha$  и  $\beta$  замыкаются через  $n$  шагов, где  $n = 2^l \cdot m$ ,  $m$  нечетно,  $\delta$  – минимальное натуральное число, для которого  $q := 2^\delta \pm 1 \equiv 0 \pmod{m}$ . Тогда

$$[F_q \circ G_{2^l}](R, r, d) = 0.$$

Таким образом,  $F_n(R, r, d) = [F_q \circ G_{2^l}](R, r, d)$ . При этом, для вычисления  $F_q(R, r, d)$  и  $G_{2^l}(R, r, d)$  нужно вычислить величины  $k_{2^\delta}(R, r, d)$  и  $k_{2^l}(R, r, d)$ , а это можно сделать по индукции, используя соотношение (4.17) и формулы (4.16). Это наблюдение дает алгоритм нахождения формул на условия замыкания траекторий Понселе. Пусть, например, период замыкания траекторий Понселе равен 5. Тогда  $k_4(\alpha, \beta) = 1$ . Поскольку

$$\begin{aligned} k_4(\alpha, \beta) &= k_2(\alpha, \gamma_2) \cdot k_2(\alpha, \beta) = \frac{2R\rho}{R^2 - D^2} \cdot \frac{2Rr}{R^2 - d^2} = \\ &= \frac{2R \cdot R \left( \frac{2r^2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} - 1 \right)}{R^2 - \left( \frac{4R^2r^2d}{(R^2 - d^2)^2} \right)^2} \cdot \frac{2Rr}{R^2 - d^2} = \frac{4Rr(2r^2(R^4 - d^4) - (R^2 - d^2)^3)}{(R^2 - d^2)^4 - 16R^2r^4d^2}, \end{aligned}$$

необходимое условие замыкания траекторий через 5 шагов имеет вид

$$4Rr(2r^2(R^4 - d^4) - (R^2 - d^2)^3) - (R^2 - d^2)^4 + 16R^2r^4d^2 = 0.$$

Многочлен в левой части имеет делитель  $R^2 - d^2 + 2Rr$  и на него можно сократить, поскольку он обращается в нуль только тогда, когда траектории Понселе замыкаются через 3 шага. В итоге приходим к формуле

$$\frac{2Rr}{R^2 - d^2} - \frac{R^2 - d^2}{2Rr} = \frac{4r^2}{2Rr + R^2 - d^2}$$

на условие замыкания траекторий Понселе через 5 шагов.

## 4.4. Комбинаторное доказательство теоремы Понселе для коник

В литературе неоднократно ставился вопрос о возможности чисто комбинаторного доказательства теорем о замыкании. Например, можно ли средствами комбинаторики и теории чисел распространить теорему о замыкании, доказанную для некоторых малых значений числа шагов  $n$ , на все натуральные  $n$ ? Скажем, можно ли вывести теорему Понселе из ее частного случая для треугольника ( $n = 3$ )? Недавно, Хальбейсен и Хангербюлер доказали [7], что теорема Понселе является комбинаторным следствием теорем Паскаля и Брианшона. Выбор теорем Паскаля и Брианшона объясняется тем, что теорема Понселе носит проективный характер. Поэтому вполне понятно стремление свести ее к классическим теоремам проективной геометрии.

В этом разделе мы дадим комбинаторное доказательство классической теоремы Понселе для коник. Т.е. с помощью простой геометрической конструкции и комбинаторных рассуждений, используя метод математической индукции и соображения теории чисел, мы выведем теорему Понселе. Оказывается, что для подобного доказательства достаточно следующего свойства ломаных Понселе:

**Лемма ABC.** Пусть двузвенная ломаная  $ABC$  вписана в конику  $\alpha$ , а ее звенья  $AB$  и  $BC$  касаются коники  $\beta$ . Тогда для всех таких ломаных прямая  $AC$  касается фиксированной коники  $\gamma_2(\alpha, \beta)$ .

Отметим, что для окружностей это утверждение у нас было получено выше как следствие из Теоремы 67, а подходящим проективным преобразованием комплексной проективной плоскости две коники можно перевести в две окружности.

По индукции из леммы  $ABC$  можно получить такое ее обобщение:



**Следствие 81.** Для  $\forall l \in \mathbb{N}$  и любой ломаной Понселе  $A_0A_1 \dots A_{2^l}$  коник  $\alpha, \beta$  хорда  $A_0A_{2^l}$  касается фиксированной коники  $\gamma_{2^l}(\alpha, \beta)$ .

*Доказательство.* В самом деле, для  $l = 1$  получаем утверждение леммы *ABC*. Предположим, что мы доказали утверждение для  $l = k$ . Рассмотрим ломанную Понселе  $A_0A_1 \dots A_{2^{k+1}}$  коник  $\alpha, \beta$ . По предположению индукции прямые  $A_0A_{2^k}$  и  $A_{2^k}A_{2^{k+1}}$  касаются фиксированной коники  $\gamma_{2^k}$ . Тогда по лемме *ABC* прямая  $A_0A_{2^{k+1}}$  тоже касается фиксированной коники.

□

Итак, покажем, что из Леммы *ABC* можно вывести теорему Понселе.

*Комбинаторное доказательство теоремы Понселе.* Пусть  $A_0A_2 \dots A_{n-1}$  —  $n$ -угольник Понселе коник  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $n = 2^l m$ ,  $m$  нечетно. Тогда  $A_iA_{i+2^l}$  касаются фиксированной коники  $\gamma_{2^l}(\alpha, \beta)$ . Поэтому  $B_0B_1 \dots B_{m-1}$ , где  $B_i = A_{i2^l}$ , —  $m$ -угольник Понселе коник  $\alpha$  и  $\gamma = \gamma_{2^l}(\alpha, \beta)$  и достаточно доказать условие  $m$ -замыкания процесса Понселе для них. Пусть  $d$  — такое число, что  $2^d \equiv 1 \pmod{m}$ , например  $d = \varphi(m)$  (где  $\varphi(m)$  — арифметическая функция Эйлера), и  $B'_0B'_1 \dots$  — другая ломаная Понселе коник  $\alpha, \gamma$ . Как было замечено выше,  $B'_0B'_{2^d}$  касается фиксированной коники  $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma)$ . Но  $B_iB_{2^d+i} = B_iB_{i+1}$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ . Значит, коника  $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma)$  касается всех сторон  $m$ -угольника  $B_0B_1 \dots B_{m-1}$ , откуда при  $m \geq 5$  следует, что  $\gamma_{2^d}(\alpha, \gamma) = \gamma$  (ведь существует единственная коника, касающаяся 5 данных прямых общего положения). Значит  $B'_{2^d-1} = B'_0$  и процесс Понселе имеет период  $2^d - 1$ , кратный  $n$ . Покажем, что основной период все-таки  $n$ .

Пусть сначала коника  $\beta$  лежит внутри коники  $\alpha$ . Если  $B'_0$  лежит на дуге  $B_0B_1$ , то поскольку в этом случае взаимного расположения коник отображение Понселе сохраняет порядок точек, точки  $B'_{in}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  тоже лежат на этой дуге. Если  $n$  — не период, то  $B'_n \neq B'_0$ . Без ограничения общности,  $B'_n$  лежит на дуге  $B_0B'_0$ . Тогда по индукции  $B'_{in}$  лежит на дуге  $B_0B'_{(i-1)n}$  и не может

совпасть с  $B'_0$  ни при каком  $i$ , что противоречит  $B'_{2d-1} = B'_0$ .

Если коники  $\alpha$  и  $\beta$  лежат одна вне другой, то коника  $\gamma_2$ , определенная в лемме  $ABC$ , лежит уже внутри коники  $\alpha$ . И этот случай сводится к предыдущему.

Если же коники  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются, то сделаем следующее. Рассмотрим дугу  $\alpha_\beta$  коники  $\alpha$ , из каждой точки которой можно провести касательную к конике  $\beta$ , концы которой являются точками пересечения коник  $\alpha$  и  $\beta$ . Возьмем две копии этой дуги и склеим их в концах, обозначив получившееся множество через  $\tilde{\alpha}_\beta$ . Будем считать, что если сторона многоугольника Понселе касается с коникой  $\beta$  вне коники  $\alpha$ , то две вершины этой стороны принадлежат разным копиям дуги  $\alpha_\beta$ , а если касание происходит внутри коники  $\alpha$ , то – одной. Тогда на множестве  $\tilde{\alpha}_\beta$  отображение Понселе сохраняет порядок точек и можно провести рассуждение из первого случая.

□

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- Получена явная формула инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха, частными случаями которой являются инвариантные меры для классических теорем Эмха, Понселе, о зигзаге и Штейнера.
- Для двух произвольных коник получена в явном виде инвариантная относительно их отображения Понселе мера. Доказана ее универсальность для всего пучка, проходящего через эти коники, приведена полная классификация инвариантных и универсальных борелевских мер на кониках. Получены явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух произвольных коник, что дает критерий замыкания траекторий и формулу для периода.
- С помощью конструкции инвариантной меры получено обобщение теоремы Эмха на каналовые циклиды Дарбу.
- Получены некоммутативные аналоги больших теорем Понселе и Эмха, которые, по всей видимости, не могут быть выведены с помощью инвариантной меры.

## Список литературы

1. J.V.Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1865, (first ed. in 1822).
2. V.Dragović and M.Radnović, *Poncelet porisms and beyond*, Frontiers in Math., Springer-Birkhauser, Basel, 2011.
3. L.Flatto, *Poncelet's theorem*, AMS, Providence, RI, 2009.
4. Bos H.J.M., Kers C., Oort F., Raven D.W., *Poncelet's Closure Theorem*, Expos. Math. 5 (1987), 289–364.
5. Берже М., *Геометрия*, М. Мир. 1984.
6. W.Barth and Th.Bauer, *Poncelet theorems*, Exp. Math., 14 (1996), 125-144
7. L.Halbeisen and N.Hungerbühler, *A simple proof of Poncelet's theorem (on the occasion of its bicentennial)*, Amer. Math. Monthly, 121 (2014) № 1, 1-14.
8. V.Yu.Protasov, *Generalized closing theorems*, Elem. Math., 66 (2011) №3, 98-117.
9. E. Previato, *Poncelet's Theorem in Space*, Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 2547-2556.
10. S.-J. Chang, B. Crespi and K.-J. Shi, *Elliptical billiard systems and the full Poncelet's theorem in  $n$  dimensions*, J. Math. Phys., 34 (1993), 2242–2256.
11. Griffiths Ph., Harris J., *A Poncelet theorem in space*, Comm Math. Helv., 52 (1977), 145-160.
12. Griffiths Ph., Harris J., *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math., 24 (1978), 31-40.
13. P. A. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, Inventiones math. 35 (1976), 321-390.
14. H. Lebesgue, *Les Coniques. Polygones de Poncelet.*, Gauthier-Villars, Paris (1942).
15. W. Barth and J. Michel, *Modular curves and Poncelet Polygons*, Mathem. Ann., 295 (1993), 25–49.
16. B. Jacob, *Moduli of poncelet polygons*, J. reine angew. Math., 436 (1993), 33–44.
17. В. А. Малышев, *Задача Понселе для рациональных коник*, Алгебра и анализ, Том 19 (2007), №4
18. A.Emch, *An application of elliptic functions to Peaucellier's link-work (inversor)*, Ann.Math., ser. 2, vol. 2 (1901), 60–63.
19. Charles Dupin, *Applications de geometrie et de mecanique*, Paris, 1822.
20. Г. Дарбу, *Принципы аналитической геометрии*, Л.-М.: ГОИТИ, 1938.

21. J.L.Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford: Clarendon Press, 1916.
22. H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov, *Darboux Cyclides and Webs from Circles*, Computer Aided Geom. Design, 29 (2012) №1, 77-97.
23. Blum, R., *Circles on surfaces in the Euclidean 3-space*, Lecture Notes in Math. 792 (1980), 213-221.
24. Takeuchi, N., *Cyclides*, Hokkaido Math. J. 29 (2000), 119-148.
25. A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical Magazine, 7 (1854) 339–345.
26. A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical magazine, 6 (1853), 99–102.
27. A. Cayley, *On the porism of the in-and-circumscribed triangle, and on an irrational transformation of two ternary quadratic forms each into itself*, Philosophical magazine, 9 (1855), 513–517.
28. A. Cayley, *On the porism of the in-and-circumscribed triangle*, Quarterly Mathematical Journal, 1 (1857), 344–354.
29. A. Cayley, *On the a posteriori demonstration of the porism of the in-and-circumscribed triangle*, Quarterly Mathematical Journal, 2 (1858), 31–38.
30. A. Cayley, *On the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 51 (1861), 225–239.
31. Tabachnikov S., *Poncelet's Theorem and Dual Billiards*, Enseign. Math., 39 (1993), 189–194.
32. Mark Levi and Serge Tabachnikov *The Poncelet Grid and Billiards in Ellipses*, Amer. Math. Monthly, Vol. 114, №10 (Dec., 2007), 895-908.
33. V. Dragović and M. Radnović, *Conditions of Cayley's type for ellipsoidal billiard*, J. Math. Phys., 39 (1998), 355–362.
34. V. Dragović and M. Radnović, *On periodical trajectories of the billiard systems within an ellipsoid in  $\mathbb{R}^d$  and generalized Cayley's condition*, J. Math. Phys., 39 (1998), 5866–5869.
35. V. Dragović and M. Radnović, *Cayley-type conditions for billiards within  $k$  quadrics in  $\mathbb{R}^d$* , J. Phys. A: Math. Gen., 37 (2004), 1269–1276.
36. V. Dragović and M. Radnović, *Geometry of integrable billiards and pencils of quadrics*, J. Math. Pures Appl., 85 (2006), 758–790.
37. V. Dragović and M. Radnović, *A survey of the analytical description of periodic elliptical billiard trajectories*, J. Math. Sciences, 135 (2006), 3244–3255.

38. V. Dragović and M. Radnović, *Hyperelliptic Jacobians as billiard algebra of pencils of quadrics: Beyond Poncelet porisms*, *Adv. Math.*, 219 (2008), 1577–1607.
39. V. Dragović and M. Radnović, *Ellipsoidal billiards in pseudo-Euclidean spaces and relativistic quadrics*, *Adv. Math.*, 231 (2012), 1173–1201.
40. S.-J. Chang and R. Friedberg, *Elliptical billiards and Poncelet's theorem*, *J. Math. Phys.*, 29 (1988), 1537–1550.
41. Chang, Shi, *Billiard systems on quadric surfaces and the Poncelet theorem*, *J. Math. Phys.*, 30 (1989) №4, 798–804.
42. B. Crespi, S.-J. Chang and K.-J. Shi, *Elliptical billiards and hyperelliptic functions*, *J. Math. Phys.*, 34 (1993), 2257–2289.
43. Rafael Ramirez-Ros, *On Cayley conditions for billiards inside ellipsoids*, *Nonlinearity*, 27 (2014) №5, 1003-1028.
44. P. S. Casas and R. Ramirez-Ros, *The frequency map for billiards inside ellipsoids*, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 10 (2011), 278–324.
45. P. S. Casas and R. Ramirez-Ros, *Classification of symmetric periodic trajectories in ellipsoidal billiards*, *CHAOS*, 22 (2012), 026110.
46. H. Knörrer, *Geodesics on the ellipsoid*, *Inv. Math.*, 59 (1980), 119–143.
47. Alexey Glutsyuk, *On quadrilateral orbits in complex algebraic planar billiards*, *Mosc. Math. J.*, 14 (2014) № 2, 239–289.
48. V.Yu.Protasov, *One generalization of Poncelet's theorem*, *Russian Math. Surveys*, 61 (2006) № 6, 187-188.
49. F.Nilov, *Families of conics and circles with double tangencies*, *Sb. Math.*, submitted.
50. Jacobi C.G.J., *Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*, *J. Reine Angew. Math*, 3 (1828), 376–389.
51. J. Bertrand, *Traite de Calcul Differentiel et de Calcul Integral*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1870.
52. J. Bertrand, *Note sur la Theorie des Fonctions Elliptiques*. An Appendix in J. M. C. Duhamel, *Elements de Calcul Infinitesimal*, vol. 2, pp. 526–536, Gauthier-Villars, Paris, 1876.
53. I.J. Schoenberg, *On Jacobi-Bertrand's Proof of a Theorem of Poncelet*, *Studies in Pure Mathematics*, Birkhauser, Boston, 1983, 623–627.

54. W.L.Black, H.C.Howland and B.Howland, *A theorem about zigzags between two circles*, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 754–757.
55. O.Bottema, *Ein Schliessungssatz für zwei Kreise*, Elem. Math., 20 (1965), 1–7.
56. A.Hraskó, *Poncelet-type problems, an elementary approach*, Elem.Math., 55 (2000), 45–62.
57. В. В. Козлов, *Условия рациональности отношения эллиптических интегралов и большая теорема Понселе*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2003, №4, 6–13.
58. Яглом, И. М., *Геометрические преобразования: Т.2. Линейные и круговые преобразования*, М. Гостехиздат. 1956.
59. Casey J. A., *Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle, and Conic Sections*, 2nd ed., Dublin: University Press, 1893.
60. Ведерников В. И., *Поверхности, огибающие семейство гиперсфер*, Изв. вузов. Матем., 1957, №1, 89–97.
61. Ведерников В. И., *Об одном многомерном обобщении циклид Дюпена*, Изв. вузов. Матем., 1958, №6, 58-72.
62. М. А. Чешкова, *Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$* , Матем. сб., 191 (2000) №6, 155–160.
63. М. А. Чешкова, *К геометрии дважды каналовой гиперповерхности в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$* , Матем. тр., 6 (2003) №1, 169–181.
64. King J.L., *Three Problems in Search of a Measure*, The American Mathematical Monthly, 101 (1994) №7, 609-628.
65. Панов А. А., Панов Д. А., *Гомотопная плотность и теорема Понселе*, Матем. просв., 3 (2001) №5, 145–157.
66. Бибииков П.В., *Теоремы Штейнера и Понселе в геометриях Евклида и Лобачевского*, Матем. Просв., 3 (2008) №12, 177-184.
67. Protasov V. Yu., *Theorem of Feurbach*, Quantum, 10 (1999) №2, 4-9.
68. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. *Геометрия*, МЦНМО, Москва, 2007.
69. Бакельман И.Я., *Высшая геометрия*, М. Просвещение, 1967.
70. Michel Chasles, *Traité des sections coniques, faisant suite au Traité de géométrie supérieure*, Paris, Gauthier-Villars, 1865.
71. Глаголев Н. А., *Проективная геометрия*, 2 изд. М., Высшая школа, 1963.
72. Буземан Г., Кэлли П., *Проективная геометрия и проективные метрики*, ИИЛ. Москва. 1957.

73. Александров П. С., *Лекции по аналитической геометрии*, М.: Наука, 1968.
74. А. Б. Каток, Б. Хасселблат. *Введение в современную теорию динамических систем*, М.: Факториал, 1999.
75. Radić M., Kaliman Z., *About one relation concerning two circles, where one is inside of the other*, Math. Maced. 2005. №3. 45-50.
76. Шарыгин И. Ф., *Геометрия. Планиметрия.*, М.: Дрофа, 2001.
77. А. А. Заславский, Г. Р. Челноков, *Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии*, Математическое образование, 19 (2001) №4, 49-64.
78. Kerawala, S. M., *Poncelet Porism in Two Circles*. Bull. Calcutta Math. Soc., 39 (1947), 85-105.
79. H.-L. Gau, P.Y. Wu, *Numerical range and Poncelet property*, Taiwanese Journal of Mathematics, 7 (2003) №2, 173-193.
80. H.-L. Gau, P.Y. Wu, *Numerical range of  $S(\phi)$* , Linear Multilinear A., 45 (1998), 49-73.
81. B. Mirman, *Numerical ranges and Poncelet curves* Linear Algebra Appl., 281 (1998), 59-85.
82. B. Mirman, Vl. Borovikov, L. Ladyzhensky, R. Vinograd, *Numerical ranges, Poncelet curves, invariant measures*, Linear Algebra Appl., 329 (2001), 61-75.
83. B. Mirman, *UB-matrices and conditions for Poncelet polygon to be closed*, Linear Algebra Appl., 360 (2003), 123-150.
84. P. Gorkin, *Poncelet's theorem, Sendov's conjecture, and Blaschke products*, J. Math. Anal. Appl., 365 (2010) №1, 93-102.
85. Ch. Benhida, P. Gorkin, D. Timotin, *Numerical ranges of  $C_0(N)$  contractions*, Integral Equations and Operator Theory, 70 (2011) №2, 265-279.
86. B. Mirman, *Short cycles of Poncelet's conics*, Linear Algebra Appl., 432 (2010) 10, 2543-2564.
87. B. Mirman, Pr. Shukla, *A characterization of complex plane Poncelet*, Linear Algebra Appl., 408 (2005), 86-119.
88. B. Mirman, *Explicit solutions to Poncelet's porism*, Linear Algebra Appl., 436 (2012) №9, 3531-3552.
89. B. Mirman, *Sufficient conditions for Poncelet polygons not to close*, Amer. Math. Monthly, 112 (2005) №4, 351-356.

90. Chaundy, T.W., *Poncelet's poristic polygons*. Proc. London Math. Soc., XXII (1924), 104–123.
91. Chaundy, T.W., *Poncelet's poristic polygons II*. Proc. London Math. Soc., XXV (1926), 17–44.
92. Dominique Hulin, *Factorisation des polynomes de Poncelet*, Geom Dedicata, 130 (2007), 109–136.
93. Sommerville D. M. Y., *Analytical conics*, London, G. BELL AND SONS, LTD., 1961.
94. W. Cieślak, H. Martini, W. Mozgawa, *Rotation indices related to Poncelet's closure theorem*, Annales UMCS, LXVIII (2014) №2 Sec A, 19–26.
95. W. Cieślak, H. Felińska, J. Szuster, W. Mozgawa, *Poncelet's porism in transformation group framework*, Advances in Science and Technology Research Journal Vol. 8, №24 (2014), pp. 28–31
96. Cieślak W., *The Poncelet annuli*, Beitr. Algebra Geom., 55, 2014, 301–309.
97. Fuss N., *De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet*, Nova Acta Petropol., 10 (1792), 103–125.
98. A. O. Lopes, M. Sebastiani, *Poncelet pairs and the Twist Map associated to the Poncelet Billiard*, Real Anal. Exchange, 35 (2009) №2, 355–374.
99. W. Yao-Xiong, F. Heng, Sh. Kang-Jie, W. Chun, ZH. Kai, Z. Yu, *Full Poncelet Theorem in Minkowski  $dS$  and  $AdS$  Spaces*, Chin. Phys. Lett., 26 (2009) №1, 010201.
100. N. J. Hitchin *Poncelet polygons and the Painleve equations*, Geometry and analysis (Bombay, 1992). Tata Inst. Fund. Res., 1995, 151–185.
101. В. П. Бурский, А. С. Жеданов, *Граничные задачи для уравнения колебания струны, задача Понселе и уравнение Пелля-Абеля: связи и соотношения*, СМФН, 16 (2006), 5–9.
102. V. P. Burskii, A. S. Zhedanov, *On Dirichlet problem for string equation, Poncelet problem, Pell-Abel equation, and some other related problems*, Ukr. math. journal, 58 (2006) №4, 487–504.
103. V. P. Burskii, A. S. Zhedanov, *Dirichlet and Neumann problems for string equation, Poncelet problem and Pell-Abel equation*, SIGMA, 2 (2006), 041, 5 pp.
104. V.P. Burskii, A.S. Zhedanov, *On Dirichlet, Poncelet and Abel problems*, СРАА, 12 (2013) №4, 1587 – 1633.
105. Форд Л.Р. *Автоморфные функции*, М.; Л.: ОНТИ, 1936.



## Публикации автора по теме диссертации

106. Авксентьев Е. А., *Метрические свойства ломаных Понселе*, Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2012. №3, 43-47.
107. Е. А. Авксентьев, *Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе*, Матем. сб., 205 (2014), № 5, 3-22.
108. Авксентьев Е. А., *Теорема о замыкании с подвижной орбитой и комбинаторное доказательство теоремы Понселе*, Деп. в ВИНТИ № 154-В2015, 2015. Расширенная версия статьи находится в печати в журнале Математический Сборник
109. E. Avksentyev, *Metric properties of Poncelet polygonal lines*, Abstracts of the International Conference “Geometry, topology, algebra and number theory, applications”, dedicated to the 120th anniversary of Boris Nikolaevich Delone (1890–1980) (August 16–20, 2010), Steklov Mathematical Institute, Moscow, 2010, 23-24.
110. Авксентьев Е. А., *Большая теорема Понселе и инвариантная мера на кониках*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013», Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. - М.: МАКС Пресс, 2013, электронное издание:  
[http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2013/2188/33962\\_42f1.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2188/33962_42f1.pdf)
111. Авксентьев Е. А., *Инвариантная мера для многомерных теорем типа Понселе*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015», Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. - М.: МАКС Пресс, 2015, электронное издание:  
[http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2015/data/6956/wid33962\\_report.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6956/wid33962_report.pdf)