مفهوم گرا ف تصادفی و مدل‌هایی از آن

حجت‌اله ذاکر زاده [۱]، حمید بیگدلی[۲]، محمدعلی ایرانمنش[۳]

چکیده

در این مقاله ابتدا به ارایه مفهومی از گراف تصادفی می‌پردازیم. گراف‌های تصادفی را با یک پدیده شهودی و ساده‌ی احتمال یعنی با پرتاب سکه آغاز می‌کنیم. با این فرض که n نقطه در فضا در اختیار داریم اگر احتمال رو شدن سکه را p در نظر بگیریم با همین احتمال دو نقطه دلخواه انتخابی را به هم متصل می‌کنیم. البته تمرکز ما بیشتر بر روی گراف‌های ساده می‌باشد زیرا با اشاره‌ای که به گراف‌های جهت‌دار داریم خواهیم دید که براحتی نمی‌توان فضای احتمالی برای این حالات ارایه نمود. در ادامه مدل‌هایی معروف از گراف‌های تصادفی از جمله مدل $G(n,p)$ که ابتدایی‌ترین مدل گراف تصادفی ارائه شده است. در ادامه مدل $G(N,M)$ که در این مدل تعداد رئوس و یال‌های گراف ثابت است و تصادفی بودن گراف به واسطه تغییر مکان یا تغییر شماره رئوس می‌باشد. با استفاده از همین مدل، مدل پیشنهادی $\mathcal{G}(n,p)$ را ارائه می‌دهیم. با تعریف میانگین و واریانس برای گراف‌های تصادفی در هر یک از حالات، میانگین و واریانس را بدست می‌آوریم. نهایتاً مدل گراف تصادفی هندسی و قانون‌توان و کاربردهایی عینی از آنها نام برده می‌شود.

واژه های کلیدی : گراف تصادفی، گراف هندسی، گراف قانون- توان.

۱– مفهوم گراف تصادفی

فرض کنید n نقطه در فضا و همچنین سکه‌ای اریب با احتمال رو آمدن p در اختیار داریم، با پرتاب سکه و با احتمال رو آمدن متناظر p، دو نقطه انتخابی دلخواه را بهم متصل می‌کنیم، یعنی یالی از این رأس می‌گذرانیم. قابل ذکر است که رئوس شماره‌دار هستند. برای روشن شدن مطلب حالات خاص n,p را بررسی می‌کنیم. در حالت $n=2$ و $p=0$ دو نقطه تنها (ایزوله) خواهیم داشت. در حالت $n=2$ و $p=۱$ دو رأس خواهیم داشت که با یک یال به هم متصل هستند. در حالت $n=2$ و $p=\frac{1}{2}$ دو حالت می‌تواند اتفاق بیافتد اول اینکه با احتمال $p=\frac{1}{2}$ دو نقطه تنها و دوم با $p=\frac{1}{2}$ این دو رأس بهم متصل باشند. در حالت $n=3$ با همان فرض $p=\frac{1}{2}$، وضع جالب‌تر و متفاوت‌تری خواهیم داشت. $\frac{1}{8}$ احتمال دارد سه نقطه ایزوله تشکیل شود، یعنی هیچ یالی بین سه رأس تشکیل نشود، زیرا هر یک از سه یال ممکن، یعنی همان اضلاع مثلث با احتمال $\frac{1}{2}$، ظاهر نمی‌شوند از این رو احتمال اینکه هیچ یک از اضلاع در گراف حضور نداشته باشند برابر با $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$ می‌باشند. با احتمال $۳\times\frac{1}{8}$ تنها یک یال ایجاد می‌گردد یعنی سه گراف ایزومورفی که در آن رأس یک یا ۲ یا ۳ تنها بوده و یال، بین دو رأس دیگر ایجاد می‌شود. به این معنی که در شماره رأس‌ها تفاوت دارند. همچنین با احتمال ۳×۱/۸ دو یال ایجاد می‌گردد و در این حالت نیز، سه گراف ایزومورف که دارای سه رأس بوده و تنها در شماره رئوس متفاوتند، ایجاد می‌گردد یعنی سه مسیر مختلف $v1v2v3$،$v1v3v2$ $v2v3v1$ خواهند بود که در هر یک از حالات یک ضلع از مثلث رسم نمی‌شود و با احتمال ۱/۸ یک گراف کامل از مرتبه ۳ خواهیم داشت، چون هر یک از

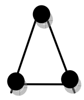
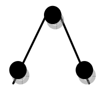
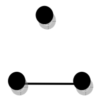
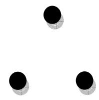
---

[۱] عضو هیات علمی دانشگاه یزد

[۲] کارشناسی ارشد آمار دانشگاه یزد

[۳] عضو هیات علمی دانشگاه یزد

یال‌ها به طور مستقل از هم انتخاب می‌شوند از این رو احتمال تشکیل مثلث یعنی احتمال رسم همزمان سه یال بین سه رأس گراف، برابر با حاصلضرب احتمالاتشان ($\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$) می‌باشد. خلاصه این توضیحات در جدول زیر آمده است [۱].

Graph				
probability	۱/۸	۳/۸	۳/۸	۳/۸
|Aut|	٦	۲	۲	٦

چون با تغییر $۱ \le p \le ۰$ گراف‌هایی از نوع تهی تا کامل تولید می‌گردد از این رو اصطلاح گراف‌های تصادفی به جای گراف تصادفی به کار می‌رود. فرض کنید روال بالا را برای n نقطه شماره‌دار داشته باشیم تعداد گراف‌های از این نوع برابر با $2^{\binom{n}{2}}$می‌باشد زیرا؛ به تعداد$\binom{n}{2}$ طریق دو نقطه مذکور انتخاب شده و هر انتخاب می‌تواند دو حالت داشته باشد یعنی می‌تواند بهم متصل شود یا نشود یعنی دو رأس می‌توانند مجاور باشند یا نباشند. نکته قابل توجه این است که در روند بالا گراف، ساده فرض شده است اگر گراف جهت‌دار باشد در این حالت تعداد گراف‌های از این دست برابر $4^{\binom{n}{2}}$می‌شود چون در این حالت، بعد از انتخاب دو نقطه که به تعداد همان $\binom{n}{2}$طریق انتخاب می‌شود سه حالت ممکن است بوجود آید.

۱- دو رأس مجاور نباشند .(یعنی یالی بین دو رأس انتخاب شده ایجاد نشود)
۲- دورأس مجاور بوده و جهت یک طرفه(یعنی فقط $u \longrightarrow v$ یا $v \longrightarrow u$ برقرار شود) باشد که این خود دو حالت را شامل می‌شود.
۳- دو رأس مجاور بوده و جهت، دو طرفه ($u \longleftrightarrow v$) باشد.

نکته‌ای که قابل ذکر است اگر جهت‌دار بودن یا نبودن نیز اختیاری باشد علاوه بر چهار حالت مذکور یک حالت نیز به حالات ممکن افزوده می‌شود در این حالت تعداد گراف‌هایی از این دست برابر با $5^{\binom{n}{2}}$ می‌باشد که حالات فوق را بررسی نخواهیم کرد.

۲- مدل هایی از گراف های تصادفی

در این بخش مدل هایی از گراف تصادفی، گراف هندسی، گراف هندسی تصادفی و گراف قانون-توان را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲-۱- گراف تصادفی ($G(n$و$M)$)

مدل $G(n$ و $M)$ که نشان دهنده گراف تصادفی با n رأس وM یال ثابت است که تصادفی بودن گراف به واسطه جایگشت یال‌ها می‌باشد که در بین رئوس شماره‌دار تغییر می‌کنند. اجتماع مجموعه تمام گراف‌های$G(n$ و $M)$ که $1 \le M \le \frac{n(n-1)}{2}$ تغییر می‌کند را با $\mathcal{G}(n$و$M)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\mathcal{G}(\mathrm{n},\mathrm{M}) = \bigcup_{M=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} G(n,M).$$

مثال ۱.۲.۱ .(۳و۱)G مجموعه گراف‌هایی با ۳ رأس و یک یال است که سه حالت مختلف می‌تواند داشته باشد، یک رأس تنها مانده و دو رأس از درجه یک داشته باشد که رأس تنها به ترتیب میتواند هر یک از رئوس یک ، ۲ یا ۳ باشد، یعنی اگر G_iرا گرافی که رأس iام آن تنهاست تعریف کنیم؛ خواهیم داشت: G(3,1)={G1,G2,G3}به همین ترتیب G(3,2) مجموعه گراف‌هایی با ۳ رأس و ۲یال است که شامل سه گراف بوده که در هر یک، یک رأس مشترک بین دو یال می‌باشد، از این رو مجموعه

$\mathcal{G}$(3,M)={ G(۳و۳) G,(۳و۰),G(۳و۱),
G(۳و۲)G,(۳و۳)}

می‌باشد. با توجه به مثال فوق و این استدلال که هر یک از G$(n$و$M)$ ها، زیر مجموعه‌های M عضوی از مجموعه N عضوی بوده و جمع آنها برابر با N ۲ می‌باشد، داریم:

$$\mathcal{G}(\mathrm{n},\mathrm{M}) = \bigcup_{M=1}^{N} G(n,M).$$

$$\mathcal{G}(\mathrm{n},\mathrm{M}) = \sum_{M=0}^{\mathrm{N}} |\mathrm{G}(\mathrm{n},\mathrm{M})| = 2\mathrm{N} \qquad (*)$$

که در آن|$G(n,M)$| تعداد اعضای مجموعه $G(n,M)$ و $N=\binom{n}{2}$که همان تعداد یال‌های ممکن انتخابی از گراف n رأسی می‌باشد. در هر یک از گراف‌های تصادفی$G(n,M)$ که دارای$\binom{N}{M}$ عضو می‌باشد (❊❊) هر یک از اعضاء با احتمال یکسان$\frac{1}{\binom{N}{M}}$در مدل حضور دارند، یعنی در این حالت فضای احتمال G(n,M) است، ولی در فضای بزرگتر $\mathcal{G}(n,M)$ پیشامد ها هم شانس نیستند. فرض کنید$H \in G(n,M)$یعنی یکی از گراف‌های موجود در این مجموعه یعنی گرافی صفر –یالی یا یک –یالی، ...یا $\frac{n(n-1)}{2}$ یالی باشد، در این صورت لم زیر را داریم :

لم ۲.۲.۱ . فرض کنید $H \in \mathrm{G(n,M)}$آنگاه:

$$P(H\in \mathrm{G(n,M)}) = \frac{\binom{N}{M}}{2^{N}},$$
$$\mathrm{E(H)}=\frac{N}{2}.$$

اثبات:

در قسمت اول بنا بر رابطه (❊) تعداد کل حالات برابر با 2N است و تعداد حالات ممکن بنا بر رابطه (❊❊) برابر با $\binom{N}{M}$ است و لذا اثبات قسمت اول تمام است.

در قسمت دوم با استفاده از قسمت اول داریم:

$$\mathrm{E(H)} = \sum_{M=0}^{N} \mathrm{M}P(\mathrm{H}\in \mathrm{G(n,M)})$$
$$= \sum_{M=0}^{N} \mathrm{M}\frac{\binom{N}{M}}{2^{N}} = \frac{N}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

یعنی به طور شهودی اگر گرافی از مجموعه گراف های $\mathcal{G}$(n,M) انتخاب شود، به طور متوسط دارای تعداد $\frac{N}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$ یال خواهد بود.

۲-۲- گراف تصادفی G(n, P)

در این مدل رئوس گراف ثابت بوده و تصادفی بودن گراف به واسطه وجود پارامتر P بوده که در بازه [۱و۰] تغییر می‌کند. در این مدل نیز یال‌ها به صورت تصادفی و مستقل از هم انتخاب می‌شوند. مثلاً اگر گرافG با مجموعه رئوس { n و...و۲و۱ }= V و دارای m یال باشد، آنگاه:

$$P(\{G_0\}) = P(G=G_0) = p^m q^{N-m}.$$

می‌باشد که در آن$q=1-p$,هستند و احتمال وقوع گرافی m یالی در مجموعه گراف‌های $G(n, P)$، دارای توزیع دو جمله ای $B(N,p)$ می‌باشد، یعنی: اگر G را گرافی از $G(n, P)$ و G_iرا گرافی i یالی از این مجموعه در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$P(G=G_m) = \binom{N}{m} p^m q^{N-m}.$$

بنا بر تابع توزیع وقوع گرافی m یالی، میانگین گراف‌های انتخابی از این مجموعه، دارای تعداد$Np=\frac{n(n-1)p}{2}$ یال است. در این گراف‌ها درجه رئوس دارای توزیع $B(n-1,p)$ است زیرا هر رأس با $n-1$ رأس دیگر به طور جداگانه و مستقل با احتمال p در ارتباط است، لذا میانگین درجه رأسی دلخواه از گرافی دلخواه از مدل $G(n, P)$، برابر با$(n-1)p$ است.

مثالی که در ابتدای فصل آورده شد از همین نوع گراف تصادفی است. البته خود این مدل نیز با توجه به نحوه تغییرات p، مدل های متفاوتی ارایه می‌دهد. ساده‌ترین و معمول‌ترین آن ثابت بودن p است. حالت خاصی از مدل $G(n, P)$، گراف (H,p) است که H یک گراف ثابت و$0<p<1$ میباشد.در این حالت ما یال‌هایی را که متعلق به H هستند بطور مستقل از هم انتخاب و با احتمال P آنها را به هم متصل می‌کنیم و یال‌هایی که رئوس آن متعلق به H نیست انتخاب نمی‌کنیم، آنگاه با تابع احتمال :

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{if } ij\in E(H),\\ 0, & \text{درغیراینصورت}. \end{cases}$$

فضای $G(H,p)$با $G\{n,(p_{ij})\}$معین می‌شود. البته قابل ذکر است که در این مدل نیز یال‌ها با احتمال ثابت در مدل حضور دارند. در حالتی که p_{ij} متغیر باشند، مدل بسیار پیچیده‌تر خواهد بود فضای $G(K(n,m);p)$ شامل گراف‌های دوبخشی نشان دار با مجموعه رئوس U و W، که $|U|=n$، $|W|=m$ بوده و هر یک از U – W یال ، با احتمال P انتخاب می‌شوند.

۲-۳- گراف های هندسی تصادفی

فرض کنید n نقطه به طور تصادفی از یک مربع واحد انتخاب شود. گراف هندسی تصادفی $G(n,r)$ دارای n رأس متناظر با n نقطه است به طوری که بین دو نقطه یالی وجود دارد اگر، در داخل گوی بسته به مرکز یکی از دو نقطه و شعاع مفروض r قرار بگیرند. البته قابل ذکر است که متر در اینجا معمولی نیست، بلکه متر در دو بعد عبارت است از یعنی برای دو نقطه $u=(x_1,y_1)$ و $v=(x_2,y_2)$:

$$d(u,v) = max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

و برای ابعاد بیشتر نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. کاربرد این مدل معمولاً در شبکه های حسگر می‌باشد.

۲-۴- گراف های قانون – توان

یک گراف تصادفی با توزیع وابسته به دو مقدار داده شدهα و β را در نظر بگیرید. این گراف دارای y رأس از درجه x که x و y در رابطه زیر صدق می‌کنند.

به بیان دیگر

$$|\{v: degv = x\}| = y = \frac{e^{\alpha}}{X^{\beta}}.$$

به طور اساسی α لگاریتم اندازه گراف وβ لگ – لگ نرخ رشد گراف می‌باشد. که در آن β نمای قانون – توان می‌باشد. عدد یال همواره باید عددی صحیح باشد. به بیان دقیق تر y باید گرد شده پایین عدد$\left\lfloor \frac{e^{\alpha}}{X^{\beta}} \right\rfloor$ باشد. اگر به جای اعداد گرد شده صحیح اعداد حقیقی استفاده کنیم ممکن است این کار باعث ایجاد جمله خطا در مراحل محاسباتی بعدی شود، اما خواهیم دید جملات خطا به راحتی می تواند کراندار شود. برای راحتی بهتر است که با اعداد حقیقی کار کنیم، ولی همواره به یاد داریم که عدد واقعی قسمت صحیح عدد به دست آمده است. محدودیت دیگری که وجود دارد این است که مجموع درجات باید عددی زوج باشد. در صورتی که چنین نباشد می توان با افزودن رأسی با درجه یک این مشکل را حل نمود و برای راحتی فرض خواهیم کرد که رأس تنها نداریم. برای گراف‌های قانون – توان عبارت زیر را استنباط می کنیم :

۱- ماکزیمم درجه گراف برابر با$e^{\frac{\alpha}{\beta}}$. توجه کنید که$0 \le \log y = \alpha - \beta \log x$.

۲- عدد رئوس n را می توان با جمع بستن $y(x)$ برای x از ۱ تا ، به صورت زیر محاسبه کرد.

$$n = \sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\beta}}} \frac{e^{\alpha}}{x^{\beta}} = \begin{cases} \zeta(\beta)e^{\alpha}, & if \quad \beta > 1, \\ \alpha e^{\alpha}, & if \quad \beta = 1, \\ \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{1-\beta}, & if \ 0 < \beta < 1. \end{cases}$$

۳- تعداد یال ها از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\beta}}} x \frac{e^{\alpha}}{x^{\beta}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\zeta(\beta-1)e^{\alpha}, & if \ \beta > 2, \\ \frac{1}{4}\alpha e^{\alpha}, & if \ \beta = 2, \\ \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{2\alpha}{\beta}}}{2-\beta}, & if \ 0 < \beta < 2. \end{cases}$$

که در آن$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-t}$تابع زتای ریمان است. توزیع درجه توان – قانون در موارد زیر مشاهده می شود:

۱- اینترنت[1]، وب گسترده جهانی[2](www) گرافی قانون – توان با ۲.۱≡است.

۲- در شبکه های اجتماعی اعم از تعداد هنرپیشه های سینما و گراف احضاریه های بازپرسی گراف هایی قانون – توان به ترتیب با ۲.۳≡ و ۳≡می باشد.

۳- در شبکه های زیستی، دامنه های پروتئین ها و گراف های برهم کنش پروتئین – پروتئین نیز گراف هایی قانون – توان به ترتیب با ۱.٦≡و ۲.۵≡هستند.

٤- در بیشتر گراف‌های واقعی موجود در دنیا قرار دارد.

---

[1] اگر هر یک از کاربران شبکه گسترده جهانی را به مثابه یک نقطه یا رأس، و لینک های آن یعنی اتصالات بین شبکه ها را همانند یال در نظر بگیریم ، گراف گسترده اینترنت را خواهیم داشت

[2] World Wide Web

۲-۵- گراف های قانون - توان تصادفی

تعمیمی از گراف‌های تصادفی اردوش – رینی است که در آن دنباله درجات $d_1,....,d_n$ از تابع توانی گراف‌ها پیروی کرده که میانگین درجات مدل گراف تصادفی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p(i,j)=\frac{d_i d_j}{2m}$$

که در آن $p(i,j)$ احتمال بودن یالی بین رئوس i و j بوده و m، میانگین درجات گراف تصادفی را نشان می‌دهد[۳].

منابع

[1]. Cameron, P. J. (2002). The random graphs revisited. School of mathematicalSciences Queen Mary and Westfield College London.

[2]. Pandurangan, G. (2007). Random Graphs (erdos – renyi).CS590A.

[3]. Spencer, J. (2001). The Strange Logic of Random Graphs. Courant instituteNew York University 251 Mercer Street.