ХРОНИКА И ИНФОРМАЦИЯ

УДК 512.64

В. Г. Алябьева

Развитие теории линейных ассоциативных алгебр в США

В настоящей статье показаны особенности развития теории линейных ассоциативных алгебр в США в XIX – начале XX века. В течение 50 лет в Европе и Америке достигнут значительный прогресс в линейных алгебрах. Е. Г. Мур, Л. Ю. Диксон, О. Веблен внесли большой вклад в развитие математики в США и в развитие теории линейных алгебр.

Ключевые слова: история линейных алгебр, линейные ассоциативные алгебры, Э. Г. Мур, Л. Ю. Диксон, О. Веблен, Б. Пирс.

V. G. Aliabieva

Development of the Theory of Linear Associative Algebras in the USA

In the present article features of development of the theory of linear associative algebras in the USA in the XIX – the beginning of the XX century are shown. A considerable progress has been achieved for the last 50 years in linear algebras. E.G.Moor, L.Ju.Dikson, O.Veblen have made a great impact into Mathematics development in the USA and into development of the theory of linear algebras.

Keywords: history of linear algebras, linear associative algebras, E. G. Moor, L. J. Dikson, O. Veblen, B. Pierce.

Сопоставим особенности развития теории линейных алгебр на американском континенте и в Европе.

В последней четверти XIX века США превратились в могучую индустриальную державу. К 1894 году страна занимала первое место в мире по объему промышленной продукции. Однако накопление материальных богатств сопровождалось слабой «интеллектуальной активностью». Развитие наук в США отставало от европейского уровня и от потребностей американской жизни. Журнал “Nation” признавал, что *американцы постыдно мало способствовали развитию мировой мысли*. Правительство страны и администрация штатов стали проявлять обеспокоенность неудовлетворительным развитием науки в стране, стали поддерживать реформаторские проекты в сфере высшего образования. В стране стали открываться новые университеты. Если до Гражданской войны 1861–1865 года решающее влияние на развитие высшей школы США оказывали французские, особенно английские, институты, то после Гражданской войны усилилось влияние немецких университетов. Проявлением этого влияния было открытие в 1876 году университета Джона Гопкинса в Балтиморе – первого университета США, воспринявшего многие черты немецкого университета. Главной из этих черт было создание исследовательских центров при университете, где сообща вели научную работу преподаватели, аспиранты, студенты. Эти центры в США получили название *аспирантских школ искусств и науки* (Graduate schools of Arts and Science). Университет Джона Гопкинса утвердил понятие «*университетский профессор*», то есть профессор-исследователь. Первым президентом университета Джона Гопкинса был Д. К. Гилман (1831–1908), который много сделал для становления этого исследовательского центра в Балтиморе. Гилман поставил задачу собрать в университетский центр самых способных преподавателей и студентов. Так, к созданию кафедры математики он привлек известного английского математика Дж. Сильвестра. Одним из ученых, которому предлагалась кафедра математики в университете Джона Гопкинса, был Феликс Клейн, но он предпочел Геттинген. Через 10–20 лет после открытия университета Джона

© Алябьева В. Г., 2011

Гопкинса его выпускники заняли ведущие позиции в науке, политике, бизнесе. Среди фундаментальных исследований в конце XIX века выдвинулись исследования по физико-математическим наукам. К достижениям этого времени относится работа Бенджамина Пирса из университета Гарварда по линейным ассоциативным алгебрам.

В 1892 году был открыт университет в Чикаго, воспринявший черты университета нового типа, подобно университету Джона Гопкинса. Открытие этого учебного заведения сопровождалось значительными событиями, получившими мировую известность.

В 1893 году в Колумбии проводилась Всемирная выставка, призванная продемонстрировать всему миру индустриальную мощь Соединенных Штатов. В программу выставки были включены конгрессы и конференции, в том числе и математический конгресс. Однако на этом конгрессе, кроме американских ученых (их было около 40), присутствовали лишь несколько европейцев. Среди европейцев был Феликс Клейн, который привез доклады немецких ученых. Математический конгресс и по истечении времени продолжал именоваться международным, но не получил порядкового номера. Доклады конгресса (13 американских авторов, 16 – немецких, 3 – французских и итальянских) были опубликованы в 1896 году Американским математическим обществом. Блестящим организатором конгресса был Елиаким Гастингс Мур (*Eliakim Hastings Moore, 1862–1932)*. Е. Г. Мур был президентом конгресса, совместно с Генрихом Машке и Оскаром Больца входил в состав редакционного комитета по изданию трудов конгресса. Мур со временем стал видной фигурой в математике. Он и его ученики – Л. Диксон, О. Веблен, Г. Биркгоф – составили славу американской математической науки. В университет Чикаго Мур был приглашен в качестве профессора математики в 1892 году и оставался в этой должности до конца своих дней.

Вернемся к *теории линейных алгебр,* или *учению о гиперкомплексных числах.*

Рассмотрим исследования линейных алгебр в Европе и Англии и сравним их с результатами американских исследователей.

После появления в XVIII веке геометрической интерпретации комплексных чисел в виде точек плоскости ученые пытались построить обобщение комплексных чисел, допускающее интерпретацию чисел в виде точек трехмерного пространства. Одна из первых попыток такого рода принадлежит К. Весселю, который в 1799 году в «Опыте аналитического представления направления» сопоставил точке трехмерного пространства с прямоугольными координатами $\boldsymbol{x,y,z}$ выражение $\boldsymbol{x + y\varepsilon + z\eta}$, где $\boldsymbol{\varepsilon,\eta}$ – две различные мнимые единицы. Построенную «алгебру» Вессель применил к решению сферических задач. Дальнейшие попытки построения обобщений комплексных чисел принадлежат английским алгебраистам. После появления «Теории сопряженных функций или алгебраических пар» в 1835 году ирландского математика и механика В. Р. Гамильтона, где было дано строгое обоснование комплексных чисел на основе их представления в виде пар вещественных чисел, равносильного интерпретации комплексных чисел в виде векторов на плоскости, попытки построения обобщений комплексных чисел возобновились. Сам Гамильтон построил (1837–1838 гг.) алгебру троек вещественных чисел, однако все системы чисел такого рода содержали делители нуля. После неудач в деле построения троек чисел Гамильтон решил искать алгебры без делителей нуля среди «четверных алгебр» и нашел такую алгебру, а именно алгебру кватернионов. Кватернионы обладают всеми свойствами комплексных чисел, за исключением коммутативности умножения. Свою новую теорию Гамильтон изложил сначала в работе «*О кватернионах, или О новой системе мнимостей в алгебре»* [1, т. 3], а затем в *«Лекциях о кватернионах»* [2]. Восьмимерная алгебра *октав* была построена А. Кэли. Умножение в этой алгебре не только не коммутативно, но и не ассоциативно (хотя октавы так же, как и кватернионы, не содержат делителей нуля). Общая теория алгебр появилась в лекциях Вейерштрасса в 1861 году, однако опубликованы его исследования были только в 1884 году в работе «К теории комплексных величин, образованных из $\boldsymbol{n}$ главных единиц» [3, т. 2, с. 311–332]. Вейерштрасс ввел понятие *прямой суммы алгебр*: если даны алгебры с базисами *(1)* $\boldsymbol{e_1, e_2,\ldots, e_n}$ и *(2)* $\boldsymbol{e_{n+1}, e_{n+2},\ldots, e_m}$, то базисом прямой суммы алгебр является объединение базисов *(1)* и *(2)*, при этом произведение элементов разных базисов равны нулю. Вейерштрасс доказал, что *всякая коммутативная алгебра без нильпотентных элементов является прямой суммой полей вещественных или комплексных чисел.*

Глубокие аналогии между ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли привели к тому, что ассоциативными алгебрами занимался сам Софус

Ли и его ученик Георг Шefферс. Сначала независимо от школы Ли, затем в контакте с нею работал в этой области Теодор Молин (1861–1941), живший в Дерпте (ныне Тарту), затем в Томске. Шефферс называл алгебры *комплексными числовыми системами*, Молин – *системами высших комплексных чисел,* Фробениус – *системами гиперкомплексных величин*. Перечисленные авторы распространили на ассоциативные алгебры понятия *простой* и *полупростой алгебры*, понятие *радикала*, возникшие первоначально в теории алгебр Ли.

Полупростой называется алгебра *без нильпотентных элементов*. Если в алгебре есть нильпотентные элементы, то они образуют *идеал*, называемый *радикалом алгебры.* Молин [4] предложил критерий полупростоты алгебры, аналогичный критерию Картана полупростоты алгебры Ли, и доказал, что:

- *фактор-алгебра по ее радикалу полупроста;*
- *всякая полупростая алгебра изоморфна прямой сумме простых алгебр;*
- *всякая полупростая алгебра над полем комплексных чисел изоморфна алгебре матриц над полем комплексных чисел*.

Картан (1898) доказал [5, ч. 2, т. 1, с. 7–105] аналогичные теоремы для вещественных простых алгебр: *всякая вещественная простая некоммутативная алгебра изоморфна одной из алгебр: алгебре вещественных, или комплексных, или кватернионных матриц **n**-ого порядка.*

Молин и Картан исследовали гиперкомплексные числа в терминах билинейных и квадратичных форм.

В США Бенджамин Пирс в Гарварде включал в свои лекции теорию кватернионов еще в 1848 году. В 1870 году он прочел мемуар «*Линейные ассоциативные алгебры*» перед Национальной Академией в Вашингтоне. После чего было опубликовано только несколько оригинальных копий литографией. Полностью текст был опубликован лишь в 1881 году в *American Journal of Mathematics* с замечаниями и дополнениями сына автора – Чарльза Пирса – через год после смерти Бенджамина Пирса [6]. В предисловии к работе отмечалось: «*Этой публикацией предполагается дать математической публике работу, которую можно возвести в ранг оснований философского учения о правилах алгебраических операций*». Язык алгебры, как утверждает Пирс, имеет свой алфавит, словарь и грамматику.

Алфавит состоит из символов ***i, j, k,*** которые являются основными понятиями алгебры (в настоящее время мы называем эти элементы алгебры базисными). *Словарь* состоит из знаков: **+, -, x**. *Грамматика* формулирует правила композиции.

Пирс явно описал коммутативный и ассоциативный законы умножения элементов алгебры, дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Пирс вводит термин *линейная алгебра*. Он определяет линейную алгебру как алгебру, в которой каждое выражение представимо в виде суммы *термов,* каждый из которых состоит из одного символа с количественным коэффициентом. Пирс изучал линейные ассоциативные алгебры с комплексными коэффициентами и, говоря современным языком, отождествлял линейную алгебру с ***n****-мерным линейным пространством, в котором задано ассоциативное умножение векторов, дистрибутивное относительно сложения векторов и перестановочное с умножением вектора на число.*

Пирс изучил структурные свойства такой алгебры: он ввел понятие *нильпотентных* элементов, то есть таких элементов e алгебры, для которых существует натуральное n такое, что $e^n = 0$; и понятие *идемпотентных* элементов, то есть таких элементов e алгебры, что $e^2 = e$. Эти понятия применялись Пирсом для классификации алгебр небольших размерностей, которые он задавал таблицами умножения элементов. В замечаниях к работе отца Чарльз Пирс отмечал, что *любая ассоциативная алгебра может быть представлена как алгебра матриц*. Чарльз Пирс независимо от Фробениуса и тремя годами позднее Фробениуса доказал, что *над полем действительных чисел можно построить лишь три ассоциативные алгебры с делением: поле действительных чисел, поле комплексных чисел и алгебру кватернионов*.

Работа Пирса получила широкий и благоприятный отклик в Америке и в Англии, однако континентальные математики отнеслись к ней с недоверием. Их не удовлетворяла чрезмерная философичность учения. Они указывали на логические пробелы в некоторых доказательствах. Когда позднее американцы сравнили результаты Пирса с европейскими, то обнаружили их совпадение, хотя признали наличие логических пробелов в доказательствах некоторых теорем.

В период с 1877 года по 1883 год в университете Джона Гопкинса работал Сильвестр. Он в 1882–84 годах исследовал связь между гиперкомплексными числовыми системами и системами матриц, теория которых ранее была развита А. Кэли. С конца XIX века до 1907 года многие обстоятельства привели к активизации в Соединенных Штатах работ по линейным ассоциативным алгебрам, среди важнейших из них – интерес к постулационным системам.

В 1903 году Л. Диксон сформулировал определение линейной алгебры независимыми постулатами [7], в котором обобщил поле скаляров на произвольное абстрактное поле. Статьи Диксона явились отражением глубокого интереса американцев к основаниям геометрии и алгебры. В это же время Диксон дал определение поля независимыми постулатами [8]. Мур (1902) определил [9] абстрактную группу. В 1904–05 годах в Чикаго на стажировку приехал Джозеф Генри Уэддербёрн (*Joseph Henry Maclagan Wedderburn*, 1882–1948). Он учился в Шотландии, побывал в Европе, приехал в Чикаго (с 1909 года работал в Принстоне). Уэддербёрн сам, а также совместно с Диксоном и другими американскими исследователями получил весьма значительные результаты в теории ассоциативных алгебр с делением. Наиболее известна теорема: *любая конечная ассоциативная алгебра с делением есть поле.*

Уэддербёрн и Диксон предложили три доказательства этой теоремы. Заметим, что в современных учебниках эта теорема формулируется так: *любое конечное тело является полем.* Доказательство теоремы, приводимое в современных учебниках, принадлежит Витту. К этой теореме, известной как теорема о конечных алгебрах, столь часто обращались исследователи в XX веке, что истории ее доказательств, исправлению доказательств посвятила свою диссертацию Карен Паршелл (*Karen Parshall*) «По следам теорем Диксона, Веблена, Уэддерберна» (1982). Диксон в 1905 году публикует в Германии в *Nachrichten* большую статью «*О конечных алгебрах»* [11], где строит конечные алгебры, в которых не выполняются некоторые аксиомы поля, в частности, коммутативный закон умножения и правый дистрибутивный закон, или ассоциативный закон умножения. Из его результатов следует, что *в конечном случае коммутативность умножения следует из остальных аксиом поля.*

1907 год – год подведения итогов и перемен в направлении исследований американских математиков.

В 1907 году вышла работа Уэддербёрна *«О гиперкомплексных числах»* [12] в «Трудах Лондонского математического общества», посвященная структурным свойствам алгебр с делением. Основные теоремы, доказанные Уэддербёрном, звучат так:

- *Любая алгебра может быть представлена как сумма нильпотентной алгебры и полупростой.*

- *Любая полупростая алгебра, отличная от простой, может быть представлена как сумма простых алгебр.*

- *Любая простая алгебра может быть представлена как прямое произведение алгебры с делением и простой матричной алгебры.*

Диксон в 1912 году доказал, что *любая действительная коммутативная неассоциативная алгебра с делением с единицей должна иметь размерность не меньше 6.*

В 1914 году опубликована книга Диксона «*Линейные алгебры»* [13], которая была переведена на русский язык. Продолжая исследования по арифметике кватернионов, начатые Липшицем, Гурвицем и его учеником Паскье, Диксон публикует книгу «*Алгебры и их арифметики»* [14]. Главная цель книги – развитие общей теории арифметик алгебр, которая явилась прямым обобщением теории *алгебраических чисел.* Важнейшая часть книги посвящена развитию теории *представления алгебр*. Диксон первый определил понятие *целого элемента* для ассоциативных алгебр с единицей над полем рациональных чисел. В 1927 году в Германии вышла книга Диксона «*Алгебры и их числовые системы»* (со статьей Шпайзера по теории идеалов) [15]. Эту книгу цитировала Эмми Нётер в своем курсе «*Теория групп и гиперкомплексные числа»*.

Оценивая развитие учения о линейных ассоциативных алгебрах в США в период с 1870 года по 1927 год, *Jeanne La Duke* на симпозиуме в Брюн Мор, посвященном 100-летию со дня рождения Эмми Нётер, утверждала [16], что американцы:

- охарактеризовали и перечислили линейные алгебры малых размерностей;

- определили некоторые алгебры над произвольными полями;

- развили учение алгебр без обращения к теории групп, к теории матриц, теории билинейных форм и последовательно изучали их «изнутри».

Именно с таким своеобразием в развитии теории алгебр в Америке столкнулась Эмми Нётер, когда в 1933 году приехала в США для работы и на постоянное место жительство. С приездом Эмми Нётер исследования американских алгебраистов испытывали глубокое влияние ее идей.

Библиографический список

1. Hamilton W.R. The mathematical papers, v.1-3. – Cambridge, 1931–1967.

2. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. – Dublin, 1853.

3. Weierstrass K. Mathematische Werke. Bd.1-7. – Berlin, 1894–1927.

4. Molien T. Ueber Systeme höherer complexer Zahlen // Mathematische Annalen. 1893. Bd.41, S. 83-156.

5. Cartan E. Oeuvres complètes, t.1-3. – Paris, 1952–1955.

6. Peirce B. Linear associative algebras. With notes and addenda by C.S.Peirce, son of the author// American journal of the mathematics. 1881. V.4. P.97–229.

7. Dickson L.E. Definitions of a linear associative algebra by independent postulates// Transactions of the American mathematical society. 1903. V.4. P. 21–26.

8. Dickson L.E. Definitions of a field by independent postulates // Transactions of the American mathematical society.1903. V.4. P.13–20.

9. Moore E. H. A definition of abstract groups // Transactions of the American mathematical society. 1902. V.3. P.485–492.

10. Veblen O. A system of axioms for geometry // Transactions of the American mathematical society. 1904. V.5. P.343–384.

11. Dickson L.E. On finite algebras // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1905. S.358–393.

12. Wedderburn J.H.M. On hypercomplex numbers // Proceedings of the London mathematical society. 1907. (2). V.6. P.77–118.

13. Dickson L.E. Linear Algebras. – Cambridge. 1914.

14. Dickson L.E. Algebras and their Arithmetics. – Chicago: University of Chicago Press. 1923. Reprint 1960. New York: Dover Publications.

15. Dickson L.E. Algebren und ihre Zahlentheorie. – Zürich: Orell Füssli. 1927.

16. LaDuke J. The Study of Linear Associative Algebras in the United States, 1870-1927 / Emmy Noether Bryn Mawr. Proc.Symp. Assoc. Women Math. Honor Emmy Noether's 100th Birthday. – New York. 1983. 147–159.