

Arhimeedilised kehad

Rein Kolde, Tõnu Tõnso, Tallinna Pedagoogikaülikool

Kumerate hulktahukate hulgas on enam tuntud korrapärased hulktahukad ja poolkorrapärased hulktahukad.

Korrapärase hulktahukate kõik tahud on kongruentsed korrapärased hulknurgad, samuti lõikub iga tipu juures võrdne arv tahkusi. Neid hulktahukaid nimetatakse ka platoonilisteks kehadeks tuntud Antiik-Kreeka filosoofi Platoni (428-348 eKr) järgi. Loetleme siin üles kõik platoonilised kehad: tetraeeder, kuup, oktaeeder, dodekaeeder ja ikosaeeder. Nende pildid ja pinnalaotused on paljudes kooliõpikutes.

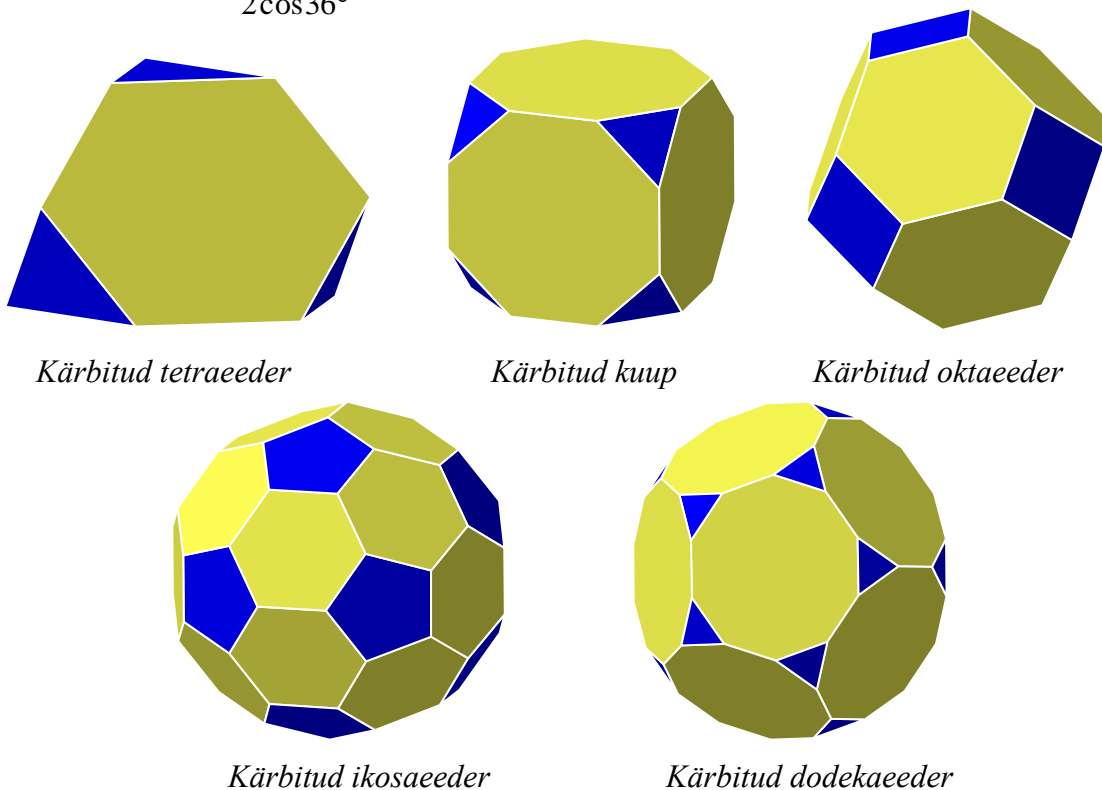
Poolkorrapärase hulktahukate tahkudeks on aga erinevad korrapärased hulknurgad. Seejuures säilib nõue, et iga tipu juures on hulktahuka ehitus samasugune, so iga tipu juures lõikub sama arv korrapäraseid hulknurkseid tahke, mis aga ei pea olema kõik ühesugused korrapärased hulknurgad. Ka need hulktahukad olid tuntud juba antiikajal ning neid nimetatakse Antiik-Kreeka matemaatiku Archimedese (287-212 eKr) järgi arhimeedilisteks kehadeks. Erinevaid arhimeedilisi kehi on 15 liiki, nende inglisekeelsed nimetused ja mitmesugused omadused on kirjas näiteks raamatus [2]. Probleem on aga nende kehade eestikeelsete nimetustega. Selle probleemiga puutus kokku Tõnu Tõnso püüdes eesti keelde tõlkida Kanada matemaatiku Jeff Tupperi programmi Poly [3] kasutajaliidest. Käesoleva kirjutiise eesmärk on fikseerida kirjasõnas arhimeediliste hulktahukate eestikeelsed nimetused ja tutvustada neid kehi matemaatika õpetajaile.

Arhimeedilised kehad saadakse platoonilistest kehadest tippude juurest väikeste püramiidide äralõikamise teel. Seda tippude äralõikamist iseloomustab inglisekeelne sõna *truncate*, mida inglased kasutavad ka püramiidi ja koonuse juures vastavalt tüvipüramiidi ja tüvikoonuse nimetustes. Korrapärase hulktahukate juures sõna **tüvi** eesti keeles hästi ei sobi ning me kasutame siin sõna *truncate* otsetõlget **kärpima**, mida soovitab ka Tartu Ülikooli emeriitprofessor Ülo Kaasik. Olgu öeldud, korrapärase hulktahukate kärpimisel peame alati saama poolkorrapärased hulktahukad. Seega hulktahukate juures kasutame sõna kärpima alati teatud kindla suurusega lõigete juures.

I Alustame kõige väiksemast võimalikust kärpest. Sel teel saame viiest platoonilisest kehast järgmised kehad.

1. **Kärbitud tetraeeder** (*truncated tetrahedron*) tekib kui lõigata tetraeedri (servaga a) iga tipu juurest ära väike tetraeeder servaga $\frac{1}{3}a$ (vt joonis 1).

2. **Kärbitud kuup** (*truncated cube*) tekib kui lõigata kuubi (servaga a) tipu juurest ära kolmnurkne püramiid külgservaga $\frac{a}{\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{2})}$ (vt joonis 1).
3. **Kärbitud oktaeeder** (*truncated octahedron*) tekib kui lõigata oktaeedri (servaga a) iga tipu juurest ära väike nelinurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{3}a$ (vt joonis 1).
4. **Kärbitud ikosaeeder** (*truncated icosahedron*) tekib kui lõigata ikosaeedri (servaga a) iga tipu juurest ära väike viisnurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{3}a$. See keha oma viis- ja kuusnurksete lappidega on inspireerinud spordimehi jalgpalli valmistamisel. Vaata ka R. Kolde artiklit [1] (vt joonis 1).
5. **Kärbitud dodekaeeder** (*truncated dodecahedron*) tekib kui lõigata dodekaeedri (servaga a) iga tipu juurest ära väike kolmnurkne püramiid külgservaga $\frac{a}{2\cos 36^\circ}$ (vt joonis 1).



Joonis 1

II Korrapäraseid hulktahukaid saab kärpida ka nii, et ära lõigatud väikesed püramiidid omavad hulktahuka serval ühist tippu. Nimetame sellist kärpet sügavaks kärpeks. Platooniliste kehade duaalsuse tõttu saame juurde veel kaks arhimeedilist keha ja ühe platoonilise keha. Nimelt osutub **sügavalt**

kärbitud tetraeeder, mis saadakse kui lõigata tetraeedri iga tipu juurest ära väike tetraeeder küljepikkusega $1/2a$, **oktaedriks**.

6. **Sügavalt kärbitud kuup** ehk **oktakuup** (*cuboctahedron*) tekib kui lõigata kuubi (servaga a_1) iga tipu juurest ära väike kolmnurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{2}a_1$ ehk oktaeedri (servaga a_2) tipust nelinurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{2}a_2$ (vt joonis 2).

7. **Sügavalt kärbitud dodekaeeder** ehk **ikosadodekaeeder** (*icosadodecahedron*) tekib kui lõigata dodekaeedri (servaga a_1) iga tipu juurest ära väike kolmnurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{2}a_1$ ehk lõigata ikosaeedri (servaga a_2) iga tipu juurest viisnurkne püramiid külgservaga $\frac{1}{2}a_2$ (vt joonis 2).

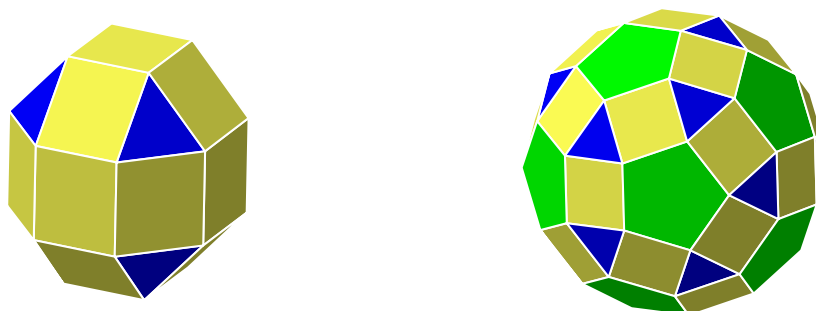


Joonis 2

III Kärpides veelkord oktakuubi ja ikosadodekaeedri tippusid sügavalt ning seejärel surudes neid veidi kokku, et äralõigatud püramiidide põhjad osutuksid ruutudeks, saame uued arhimeedilised kehad, mida nimetame vastavalt topeltkärbitud kuubiks ja topeltkärbitud dodekaeedriks.

8. **Topeltkärbitud kuup** (*rhombicuboctahedron*) (vt joonis 3).

9. **Topeltkärbitud dodekaeeder** (*rhombicosidodecahedron*) (vt joonis 3).

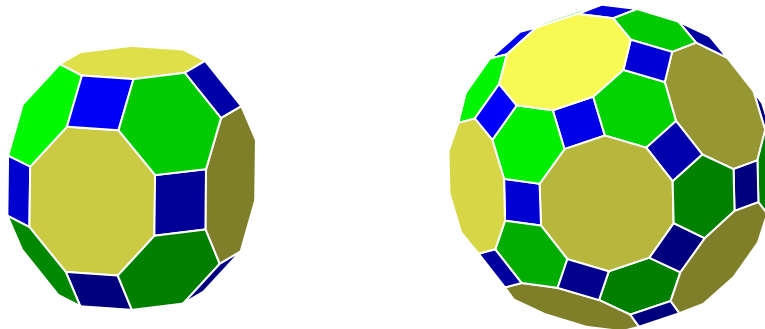


Joonis 3

IV Järgmised kaks arhimeedilist keha saame ehitades kärbitud kuubi ja kärbitud dodekaedri tahkudele tüvipüramiidi taolised platvormid, mille põhjad on vastavalt kaheksa- või kümnenurgad ning mille külgtahud moodustavad koos naaber tahkude platvormidega korrapärased hulknurgad. Neid kehi hakkame nimetama vastavalt ümaraks kuubiks ja ümaraks dodekaedriks.

10. **Ümar kuup** (*great rhombicuboctahedron*) (vt joonis 4).

11. **Ümar dodekaeeder** (*great rhombicosidodecahedron*) (vt joonis 4).



Ümar kuup

Ümar dodekaeeder

Joonis 4

Eespool nimetatud platvormidest saab paremini aru tagasi vaadates ümarate kehade joonistele. Piisab kui lõikame ümarat kuupi või vastavalt ümarat dodekaedrit kuubi (dodekaedri) tahkudega paralleelsete tasanditega, siis saame tagasi kärbitud kuubi (dodekaedri).

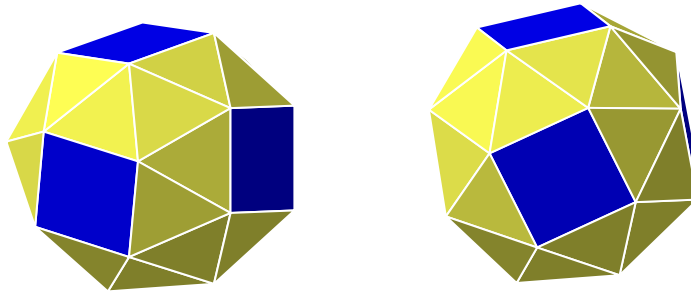
V Selgub, et poolkorrapäraseid hulktahukaid on veel neli tükki. Nende saamist on kärpimise stiilis võimatu kirjeldada. Nad esinevad kahe paarina, mis erinevad üksteisest nagu parema ja vasaku käe kruvid pöörlemissuuna poolest. Üks paar neist on ehitatud tinglikult võttes kuubi baasil ja teine paar dodekaedri baasil. Nende nimed saame inglise keele otsetõlkest.

12. ja 13. Tõmbid kuubid (*snub cube*) on ümarast kuubist veel tõmbimad.

Nende äärmised kihid, mis ümbritsevad külgruutusid on moodustatud võrdkülgsetest kolmnurkadest. Tõmpe kuupe on kahesuguse orientatsiooniga nii nagu vasaku ja parema käe kindad (vt joonis 5).

14. ja 15. Tõmbid dodekaeedrid (*snub dodecahedron*) on ümaratest dodekaeedritest veel tõmbimad, nende äärmised kihid, mis ümbritsevad

viisnurkseid tahke on moodustatud võrdkülgsetest kolmnurkadest. Tõmpe dodekaeedreid on kahesuguse orientatsiooniga nii nagu vasaku ja parema käe kindad (vt joonis 5).



Tõmbid kuubid



Tõmbid dodekaeedrid

Joonis 5

Programm Poly on väga kasutajasõbralik. Kõiki seal esinevaid kumeraid hulktahukaid saab vaadelda mitme külje pealt, samuti ka pöörlevaina. Programm esitab ka hulktahukate pinnalaotusi ja näitab, kuidas hulktahuka pinnalaotusest saab hulktahuka kokku voltida. Kõiki vaadeldavaid kehi ja nende pinnalaotusi saab sobivalt valitud asendis välja trükkida, aga ka töödelda pilditöötlusprogrammide abil. Olgu öeldud, et ka käesolevas artiklis olevad joonised on võetud programmist Poly, keeratud sobivasse asendisse ja CorelDraw abil vähendatud. Programm Poly sisaldab hulgaliselt ka muid kehi: prismsid ja antiprismasid, Catalani kehi ja hulgaliselt sfäärhulktahukaid. Matemaatikaõpetajale on oluline, et ta leiab sealt korrapärase hulktahukate, prismae jne pinnalaotused. Kui need pinnalaotused trükkida kartongile, võib kerge vaevaga teha neist koolitöökõks vajalikke mudeleid.

Kirjandus

1. Kolde, R. Jalgpall matemaatikatunnis. Haridus, 1991, 9, 25-31.
2. Cundy, H. M., Rolett, A. P. Mathematical Models. Tarquin publications, Great Britain: Shandbroke, Diss, Norfolk, 1981, 286.
3. URL = <http://www.peda.com/poly/>

Archimedean Solids

Rein Kolde, Tõnu Tõnso

Summary

An overview of the types of semi-regular, or Archimedean, polyhedrons is given. Assisted by illustrations, the derivation of certain solids from regular, or Platonic, polyhedrons is shown. Estonian terms are proposed for all solids under study and bits of advice are given for using these shapes in mathematics teaching.