



# Gymnasie-Matematik

**Søren Toftegaard Olsen**

Søren Toftegaard Olsen  
Skovvænget 16-B  
7080 Børkop

**Gymnasie-Matematik**  
2. udgave, revision 0  
ISBN 978-87-991996-0-0

**VIGTIGT:**

Denne bog må ikke sælges eller ændres; men kan frit kopieres.  
Indholdet er beskyttet ifølge gældende lov om ophavsret.  
Alle rettigheder forbeholdes. 2008 © Søren Toftegaard Olsen

Få et **GRATIS** eksemplar på [www.studienoter.dk](http://www.studienoter.dk)

## Indhold

BRØKREGNING.....	3
REDUKTION.....	6
LIGNINGER .....	10
POTENS-REGNING .....	14
ROD-UDDRAGNING .....	16
NUMERISK VÆRDI.....	18
ENHEDSCIRKLEN .....	19
SINUS, COSINUS OG TANGENS .....	20
RETVINKLET TREKANT.....	22
VILKÅRLIG TREKANT .....	25
RUMFANGS-BEREGRNING .....	32
LINIE .....	35
TREKANT .....	36
CIRKEL.....	40
FUNKTION OG GRAF.....	42
LINEÆRE FUNKTIONER.....	44
2. GRADS-POLYNOMIER.....	47
TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER .....	51
HARMONISK SVINGNING.....	53
OMSKRIVNING AF SINUS OG COSINUS .....	54
EKSPOENTIAL-FUNKTIONER .....	56
LOGARITME-FUNKTIONER .....	59
POTENS-FUNKTIONER .....	62
SAMMENSAT FUNKTION .....	64
OMVENDT FUNKTION .....	65
2. GRADS-LIGNING .....	66
LINEÆRT LIGNINGSSYSTEM .....	70
TRIGONOMETRISKE GRUNDLIGNINGER .....	73
SPECIELLE LIGNINGER .....	75
ULIGHED.....	76
BRØK-ULIGHED .....	77
TRIGONOMETRISK ULIGHED.....	78
DOBBELT-ULIGHED.....	80
VEKTORBESKRIVELSE .....	81
VEKTOR-ALGEBRA.....	85
HJÆLPE-STØRRELSER .....	89
GRÆNSEVÆRDI .....	96
DIFFERENTIALKVOTIENT .....	99
FUNKTIONS-OVERSIGT ( $f'$ ) .....	102
REGNEREGLER ( $f'$ ) .....	103
EKSTREMUMSPUNKTER .....	105
ASYMPTOTER .....	107
FUNKTIONS-UNDERSØGELSE.....	109
INTEGRALREGNING .....	112
FUNKTIONSOVERSIGT ( $F$ ).....	113
REGNEREGLER ( $F$ ).....	115
Matematiske symboler.....	118
Stikord.....	120

# BRØKREGNING

DEFINITION **Brøk**

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Tæller}}{\text{Nævner}} \quad a \text{ og } b \text{ er tal}$$

EKSEMPEL:  $\frac{8}{9} \quad a = 8 \quad b = 9$

SÆTNING **Fortegnsregler**

Hvis man ganger eller dividerer to tal med forskelligt fortegn bliver resultatet negativt. Hvis fortagnene er ens bliver resultatet positivt.

EKSEMPLER:  $4 \cdot (-2) = -8 \quad \frac{-4}{-2} = 2$

SÆTNING **Forlænge eller forkorte en brøk**

Brøken ændrer ikke værdi, hvis man ganger eller dividerer med det samme tal i tæller og nævner.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

EKSEMPEL:  $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$

EKSEMPEL:  $\frac{2}{8} = \frac{2 : 2}{8 : 2} = \frac{1}{4}$

SÆTNING **Gange en brøk med et tal**

Man ganger en brøk med et tal, ved at gange tælleren med tallet og beholde nævneren.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

EKSEMPEL:  $\frac{5}{6} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6}$

SÆTNING **Gange en brøk med en brøk**

Man ganger en brøk med en brøk, ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EKSEMPEL:  $\frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{7}{24}$

SÆTNING **Addition og subtraktion af brøker**

Brøker med samme nævner kan lægges sammen, ved at addere brøkernes tæller og beholde nævneren.

En lignende regel gælder for subtraktion.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$$

EKSEMPLESER:  $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$        $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

EKSEMPEL:  $\frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} - 1 = \frac{2}{6} + \frac{9}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4+9-12}{12} = \frac{1}{12}$

**SÆTNING      Dividere en brøk med en brøk**

Man dividerer en brøk med en brøk, ved at "gange med den omvendte".

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

kan også skrives

$$\frac{\underline{a}}{\underline{b}} \cdot \frac{\underline{d}}{\underline{c}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**BEVIS**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{d}}{\underline{b} \cdot \underline{d}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{d}}{\underline{c} \cdot \underline{d}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{d} \cdot \underline{b}}{\underline{b} \cdot \underline{c} \cdot \underline{b}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{d}}{\underline{c} \cdot \underline{b}}$$

q.e.d. \*)

\*) q.e.d.: (Latin) "quod erat demonstrandum", hvilket betyder  
"Som skulle vises"

EKSEMPEL:  $\frac{22}{7} : \frac{1}{9} = \frac{22 \cdot 9}{7 \cdot 1}$



Kurt, hvorfor var du her ikke i sidste matematiktime?

- Hvis jeg havde vidst, at det var den sidste, så ville jeg have været her.

# REDUKTION

## DEFINITION **Reduktion**

Reduktion betyder i matematik at skrive noget simplere.

EKSEMPEL:  $\frac{68}{238} = \frac{2 \cdot 34}{7 \cdot 34} = \frac{2}{7}$

## SÆTNING: **Regneoperationernes hierarki**

Regneoperationerne udføres i flg. rækkefølge:

1. Multiplikation ( $\cdot$ ) og division ( $:$ )
2. Addition ( $+$ ) og subtraktion ( $-$ )

EKSEMPEL:  $2 \cdot 4 - \frac{6}{3} + 7 = 8 - 2 + 7 = 13$

## SÆTNING **Addition af tal**

Når man lægger tal sammen, er rækkefølgen ligegyldig.

$$a + b = b + a$$

EKSEMPEL:  $4 + 3 = 3 + 4$

## SÆTNING **Multiplikation af tal**

Når man ganger tal, er rækkefølgen ligegyldig.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

EKSEMPEL:  $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$

**SÆTNING Parenteser**

Indholdet i en parentes skal opfattes som ét element.

EKSEMPEL:  $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 5 = 25$

**DEFINITION Led**

Led er adskilt af plus (+) eller minus (-).

EKSEMPEL:  $2 \cdot 4 - \frac{6}{3} + 7$  indeholder 3 led

**SÆTNING Et tal gange en parentes**

Man ganger et tal med en parentes ved at gange tallet med hvert led i parentesen.

$$a \cdot (b + c - d) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$$

EKSEMPEL:  $6 \cdot (3 + 2) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2$

**BEMÆRK:**  $-(a + b) = -1 \cdot (a + b) = -a - b$

**SÆTNING En parentes gange en parentes**

Man ganger en parentes med en parentes ved at gange hvert led i den første parentes, med hvert led i den anden parentes.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

EKSEMPEL:  $(6 + 5) \cdot (3 + 2) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2$

DEFINITION

**Potens-skrivemåde**

Ganges flere ens tal sammen, kan det skrives nemt ved brug af potens.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

EKSEMPEL:  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

**SÆTNING: Kvadratet på en to-leddet sum**

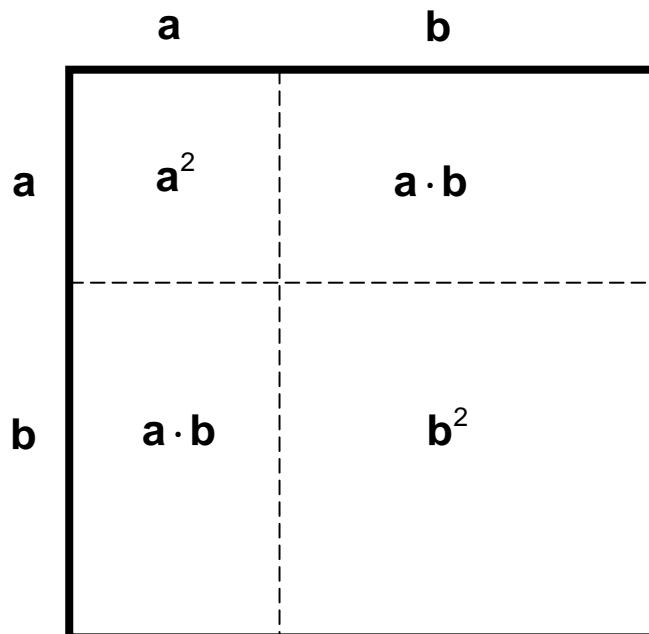
Kvadratet på en to-leddet sum giver: Kvadratet på første led, plus kvadratet på andet led, plus det dobbelte produkt.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

**BEVIS**

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

q.e.d.



EKSEMPEL:  $(6 + 5)^2 = 6^2 + 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5$

EKSEMPEL:  $x^2 + 2 \cdot x + 1 = (x + 1)^2$

SÆTNING

**Kvadratet på en to-leddet differens**

Kvadratet på en to-leddet differens giver: Kvadratet på første led, plus kvadratet på andet led, minus det dobbelte produkt.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

EKSEMPEL:  $(4 - 7)^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7$

EKSEMPEL:  $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 16 = (2 \cdot x - 4)^2$

SÆTNING

**To tals sum gange de to tals differens**

To tals sum gange de samme to tals differens giver:  
Kvadratet på første led, minus kvadratet på andet led.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

EKSEMPEL:  $(8 + 9) \cdot (8 - 9) = 8^2 - 9^2$

EKSEMPEL:  $9 \cdot x^2 - 16 = (3 \cdot x + 4) \cdot (3 \cdot x - 4)$

# LIGNINGER

DEFINITION: **Lighedstegn**

Et lighedstegn (=) bruges til at angive, at værdien af to matematiske udtryk er ens.

EKSEMPEL:  $2 + 2 = 4$

DEFINITION: **Ligning**

En ligning er to matematiske udtryk forbundet med et lighedstegn.

EKSEMPLER:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$        $2 \cdot a + 3 \cdot a = 5 \cdot a$

DEFINITION **Ubekendt størrelse**

Som symbol for en ubekendt størrelse bruges normalt bogstavet  $x$ , som opfattes som et vilkårligt tal.

DEFINITION: **En ligning med en ubekendt**

Ligning, hvor der indgår *netop én* ubekendt størrelse.

EKSEMPLER:  $\frac{1}{x} + 2 = x^2 + 3$      $4 \cdot x - 2 = 2$

EKSEMPLER: Ib og Bo er tilsammen 34 år, Ib er 2 år ældre end Bo. Hvor gammel er Bo ( $x$ )?

$$x + (x + 2) = 34$$

**DEFINITION Grundmængde**

Grundmængden (G) er de tal, den ubekendte størrelse ( $x$ ) skal findes iblandt.

**EKSEMPEL:** Hvis  $x$  angiver alderen, målt i år, på en person gælder:

- $x$  kan ikke være negativ
- $x$  er højst 122, da dette er alders-rekorden.

Altså gælder:  $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 122\}$

Dette læses: Grundmængden er mængden af  $x$  der tilhører de reelle tal (alle tal), hvorom det gælder at  $x$  er større end eller lig 0 og mindre end eller lig 122.

**DEFINITION Ligningens grad**

En lignings grad er den højeste forekommende potens af den ubekendte ( $x$ )

**EKSEMPLES:** 1. grads-ligning:  $2 \cdot x + 3 = x - 4$   
 2. grads-ligning:  $2 \cdot x + 3 = x^2 - 4$   
 3. grads-ligning:  $2 \cdot x + 3 = x^3 - 4$

I 1824 viste den 22-årige nordmanden N.H. Abel, at der ikke findes en generel formel til løsning af 5. grads ligninger. Andre havde arbejdet på det i 300 år.



**DEFINITION** 1. gradsligning med én ukendt

En ligning med netop én ubekendt og denne kun forekommer med graden (potensen) 1:

**BEMÆRK:** Ligningen vil altid kunne skrives på formen:

$$a \cdot x + b = 0$$

EKSEMPEL:  $-7 - 3 \cdot x = 8 \cdot x - 4$

## DEFINITION Løse en ligning

At løse en ligning med en ubekendt ( $x$ ) vil sige at finde de værdier af  $x$ , som gør ligningen sand.

Løsningsmængden kaldes  $L$ . Hvis der ingen løsning er, skriver man  $L = \emptyset$ , som læses: løsningsmængden er tom.

$$3 \cdot x - 6 = 0$$

EKSEMPEL:  $L = \{x \in R \mid x = 2\}$

**BEMÆRK:**  $3 \cdot x - 6 = 0$  Ligning  
 $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$

Grundmængde Løsning

**DEFINITION** Isolere x

Når man løser en ligning med én ubekendt ( $x$ ), forsøger man at få  $x$  til at stå alene på den ene side af ligheds-tegnet, og tallet der er løsning til at stå på den anden side. Det kaldes "at isolere  $x$ ".

SÆTNING      **Regler for løsning af ligninger**

Man må:

- 1: Lægge samme tal til på hver side af lighedstegnet.
- 2: Trække samme tal fra på hver side af lighedstegnet.
- 3: Gange med samme tal på hver side af lighedstegnet  
– **dog ikke nul.**
- 4: Dividere med samme tal på hver side af lighedstegnet  
– **dog ikke nul.**

EKSEMPEL:

$$2 + \frac{1}{5} \cdot x - 6 = 0 \quad \text{Ligningen}$$

$$2 + \frac{1}{5} \cdot x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad \text{Regel 1}$$

$$2 + \frac{1}{5} \cdot x - 2 = 6 - 2 \quad \text{Regel 2}$$

$$5 \cdot \frac{1}{5} \cdot x = 5 \cdot 4 \quad \text{Regel 3}$$

$$x = 20 \quad x \text{ er isoleret}$$

$$\underline{\underline{L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 20\}}} \quad \text{Løsnings - mængden}$$

# POTENS-REGNING

**DEFINITION Den p'te potens af a**

Den p'te potens af **a** skrives:  $a^p$

**a** kaldes *grundtallet*, **p** kaldes *eksponenten* (eller potensen).

**EKSEMPEL:** Den 4. potens af 2 skrives  $2^4$

**SÆTNING Potens-regneregler (positivt grundtal)**

Følgende regneregler gælder for potensberegninger

**Forudsætning:** **a** og **b** er positive tal:  $a, b \in \mathbb{R}_+$   
**n** og **p** kan være alle tal:  $n, p \in \mathbb{R}$

$$A) \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$B) \quad (a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

$$C) \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$D) \quad a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$E) \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$F) \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

**BEMÆRK:** Under visse forudsætninger kan det også tillades at **a** og **b** er negative tal eller nul.

**EKSEMPLER:**

$$A) \quad 0,25^{-0,3} \cdot 8^{-0,3} = 2^{-0,3}$$

$$B) \quad (7,5^{3,0})^{-14,1} = 7,5^{-42,3}$$

$$C) \quad \frac{33^{0,91}}{33^{1,11}} = 33^{-0,2}$$

$$D) \quad 56,2^{2,4} \cdot 56,2^{3,6} = 56,2^6$$

$$E) \quad \frac{77,77^{12,4}}{7,7^{12,4}} = 10,1^{12,4}$$

$$F) \quad \frac{1}{123,4^{5,67}} = 123,4^{-5,67}$$

SÆTNING

**Potens-regneregel (grundtal lig 1)**

Uanset eksponentens (**n**) værdi, gælder

$$1^n = 1 \quad n \in \mathbb{R}$$

EKSEMPEL:  $1^{-2,7} = 1$

SÆTNING

**Potens-regneregel (grundtal lig nul)**

Hvis eksponenten (**n**) er et positivt tal, gælder:

$$0^n = 0 \quad n \in \mathbb{R}_+$$

EKSEMPEL:  $0^{3,2} = 0$

SÆTNING

**Potens-regneregel (eksponent lig nul)**

Uanset grundtallets (**a**) værdi, gælder:

$$a^0 = 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

EKSEMPLEX:  $(-1,2)^0 = 1$        $0^0 = 1$

# ROD-UDDRAGNING

DEFINITION **Den n'te rod af a**

Tallet **b** kaldes den n'te rod af tallet **a**, hvis flg. er opfyldt:

- **b** har samme fortegn som **a**
- Den n'te potens af **b** er lig **a**

Dette kan også skrives:

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{Hvis } \frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+ \text{ og } b^n = a$$

**a:** Radikanden

**b:** Roden

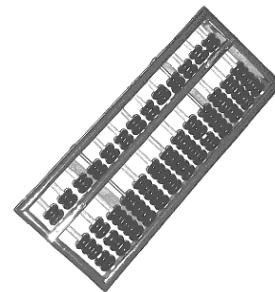
**n:** Rod-eksponenten

$\sqrt[n]{\phantom{x}}$ : Rodtegn.

**SPECIELT GÆLDER:**  $\sqrt[3]{-125} = -5$

EKSEMPEL: Den 3. rod af -125:  $\sqrt[3]{-125} = -5$

Kuglerammen blev opfundet i Asien for ca. 2500 år siden. I 1889 byggede den franske ingeniør León Bollée en mekanisk maskine, der kunne beregne kvadratroden af et 18 cifret tal på 30 sekunder.



SÆTNING **Rod-uddragning (lige rod-eksponent)**

Hvis rod-eksponenten (**n**) er et lige tal forskelligt fra nul, skal radikanden (**a**) være positiv.

- **n** er et lige tal forskelligt fra 0:  
 $n \in \{\dots -4, -2, 2, 4, \dots\}$
- **a** er et positivt tal:  $a \in \mathbb{R}_+$

EKSEMPEL: Den 4. rod af 16:  $\sqrt[4]{16} = 2$

EKSEMPEL:  $\sqrt[4]{-16} =$  Eksisterer ikke.

SÆTNING **Rod-uddragning (ulige rod-eksponent)**

Hvis rod-eksponenten (**n**) er et ulige tal kan radikanden (**a**) være et vilkårligt tal forskelligt fra nul.

- **n** er et ulige tal:  $n \in \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$
- **a** er et tal forskelligt fra nul:  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

EKSEMPLER:  $\sqrt[3]{125} = 5$        $\sqrt[3]{-125} = -5$

SÆTNING **Rod og potens sammenhæng**

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

EKSEMPEL:  $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

**BEMÆRK:** Hvis man laver et rod-udtryk om til et potens-udtryk, kan reglerne for potensregning bruges.

EKSEMPEL:  $2^4 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^4 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{4+\frac{3}{4}} = 2^{\frac{19}{4}} = \sqrt[4]{2^{19}}$

# NUMERISK VÆRDI

## DEFINITION **Ulighedstegn**

Et ulighedstegn bruges til at angive, hvordan værdien af to matematiske forholder sig til hinanden. Der findes fire forskellige ulighedstegn:

<	<b>Mindre end</b>
>	<b>Større end</b>
$\leq$	<b>Mindre end eller lig</b>
$\geq$	<b>Større end eller lig</b>

EKSEMPLER:  $2 < 3$        $5 \leq 2 + 3$        $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$

## DEFINITION **Numerisk værdi (absolut værdi)**

Den numeriske værdi af et positivt tal er lig tallet selv. Den numeriske værdi af et negativt tal er lig tallet uden negativt fortegn.

Symbolet for numerisk værdi er to lodrette streget omkring tallet.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

EKSEMPLER:  $|5| = 5$        $|-7| = 7$        $|-3 + 2 - 4| = |-5| = 5$

## SÆTNING **Trekantsuligheden**

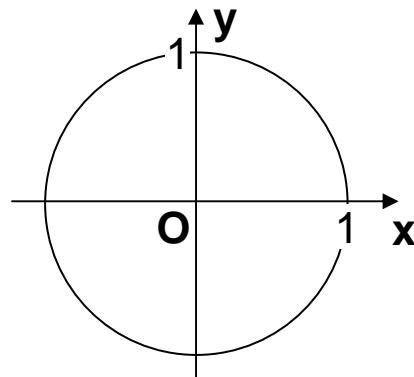
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

EKSEMPEL:  $|4 - 7| = 3 \leq |4| + |-7| = 11$

# ENHEDSCIRKLEN

## DEFINITION **Enhedscirklen**

Enhedscirklen har radius 1 og centrum i origo (O).

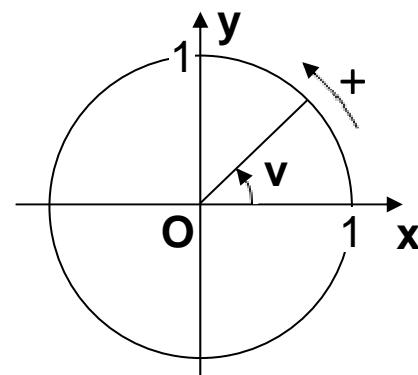


## DEFINITION **Vinkel**

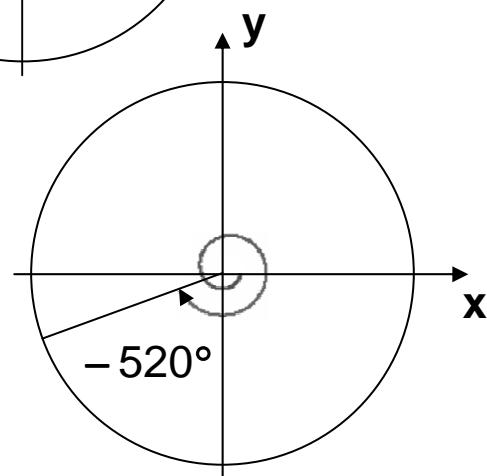
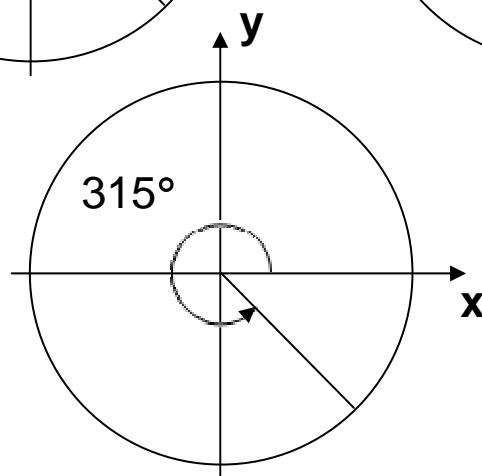
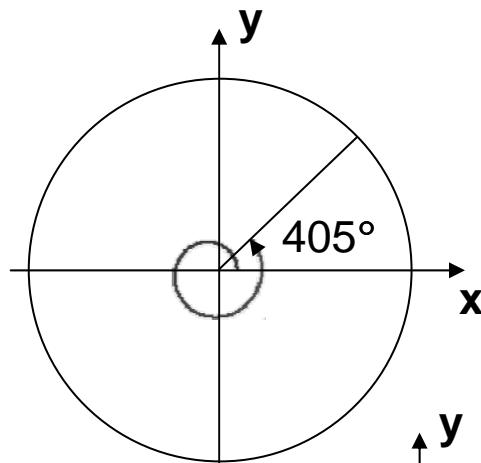
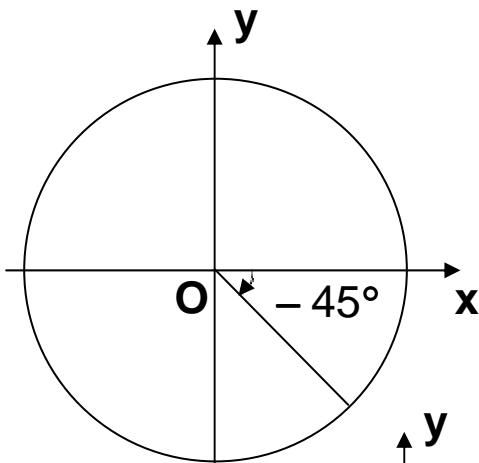
Vinkler regnes i enhedscirklen fra x-aksen og til liniestykket.

Positiv omløbsretning er *mod uret*.

En hel omgang svarer til  $360^\circ$



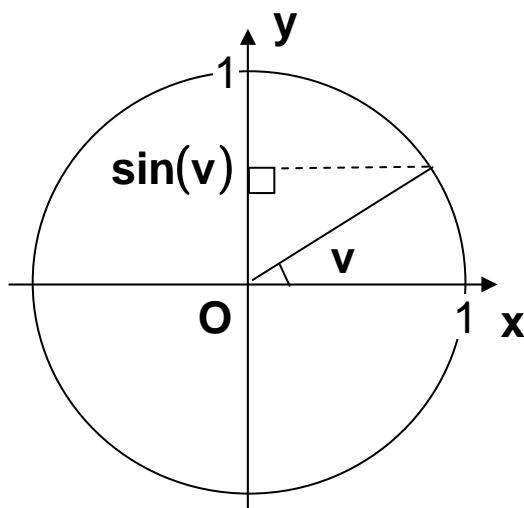
## EKSEMPLER:



# SINUS, COSINUS OG TANGENS

**DEFINITION Sinus**

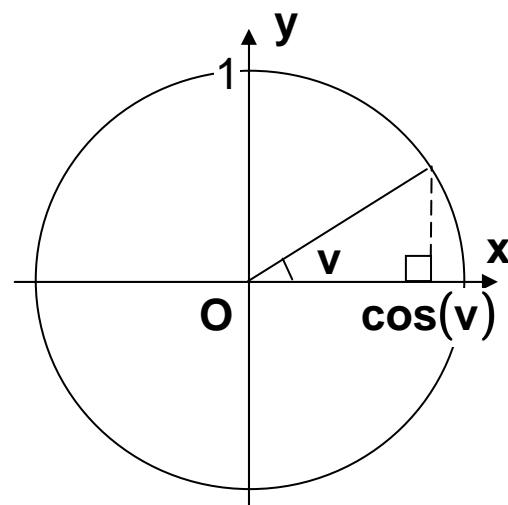
Indtegnet i en *enhedscirkel* er  $\sin(v)$  lig y-værdien.  
 $\sin(v)$  læses: Sinus til v



**BEMÆRK:**  $-1 \leq \sin(v) \leq 1$

**DEFINITION Cosinus**

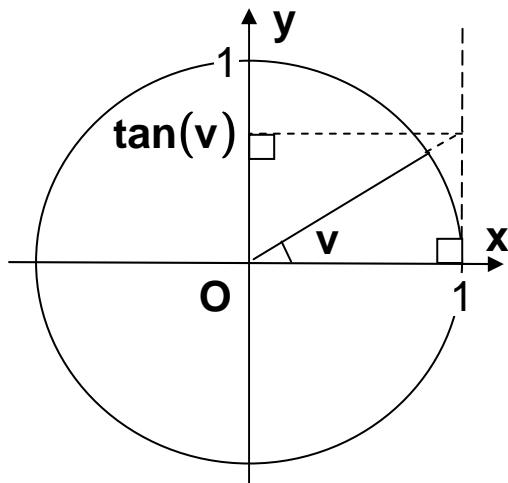
Indtegnet i en *enhedscirkel* er  $\cos(v)$  lig x-værdien.  
 $\cos(v)$  læses: Cosinus til v



**BEMÆRK:**  $-1 \leq \cos(v) \leq 1$

**DEFINITION Tangens**

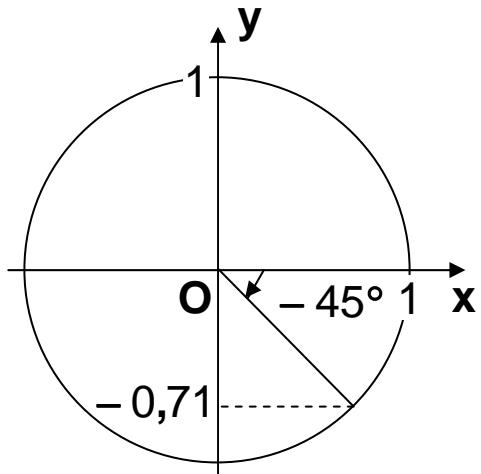
Indtegnet i en *enhedscirkel* er  $\tan(v)$  lig y-værdien når x-værdien er 1.  
 $\tan(v)$  læses: Tangens til v



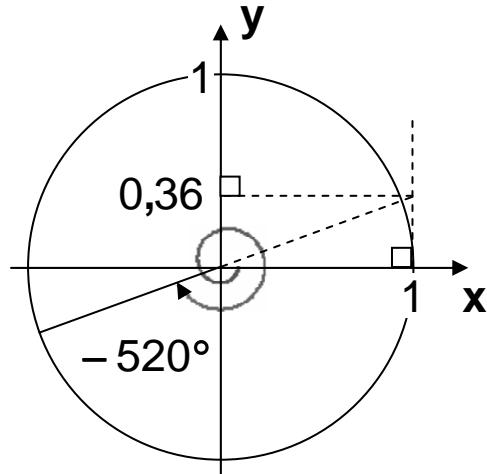
**BEMÆRK:**  $-\infty \leq \tan(v) \leq \infty$

EKSEMPLER: Se næste side.

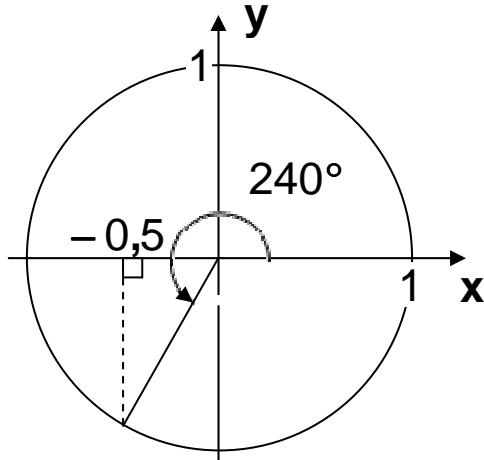
## Figurer



$$\sin(-45^\circ) = 0,71$$



$$\tan(-520^\circ) = 0,36$$



$$\cos(240^\circ) = -0,5$$

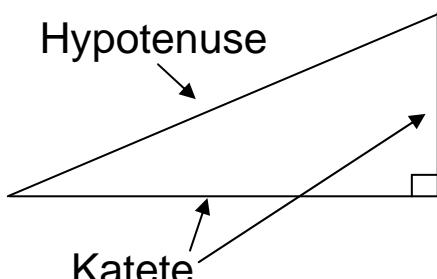
Den tyrkiske astronom Hipparchus (190 -127 f.v.t.) var den første der lavede en tabel over sinus. Dermed kunne han bl.a. forudsige solformørkelser.



# RETVINKLET TREKANT

## DEFINITION **Retvinklet trekant**

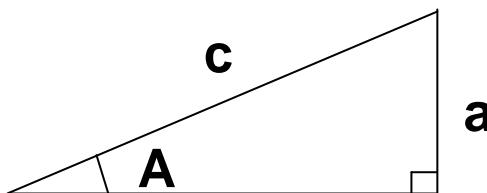
I en retvinklet trekant er en af vinklerne  $90^\circ$ .



**BEMÆRK:** Summen af de 3 vinkler i en trekant er *altid*  $180^\circ$ .

## SÆTNING **Sinus**

$$\sin(A) = \frac{a}{c} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

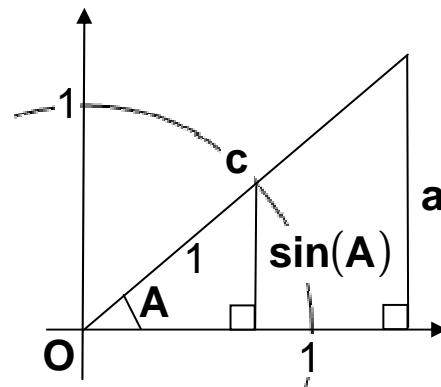


## BEVIS

Definitionen på sinus og forholdet mellem de to trekanters sidelængder giver:

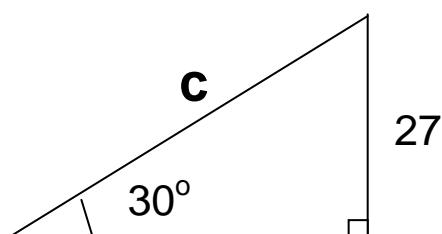
$$\frac{\sin(A)}{1} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \sin(A) = \frac{a}{c}$$

q.e.d



## EKSEMPEL:

$$\begin{aligned} \sin(A) &= \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \\ c &= \frac{a}{\sin(A)} = \frac{27}{\sin(30^\circ)} = 54 \end{aligned}$$



## DEFINITION **Arcussinus**

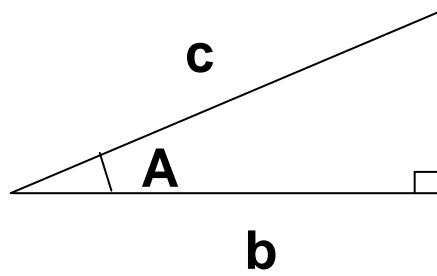
$$A = \text{Arcsin}\left(\frac{a}{c}\right)$$

**BEMÆRK:** Ofte betegnes Arcussinus :  $\sin^{-1}$  eller asin.

SÆTNING

### Cosinus

$$\cos(A) = \frac{b}{c} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$



DEFINITION

### Arcuscosinus

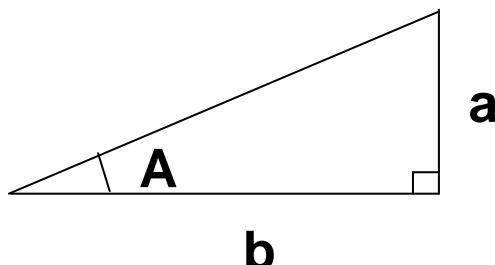
$$A = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$$

**BEMÆRK:** Ofte betegnes Arcuscosinus:  $\cos^{-1}$  eller acos.

SÆTNING

### Tangens

$$\tan(A) = \frac{a}{b} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$



DEFINITION

### Arcustangens

$$A = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

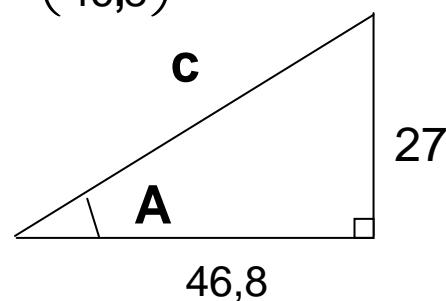
**BEMÆRK:** Ofte betegnes Arcustangens:  $\tan^{-1}$  eller atan.

EKSEMPEL:

$$\tan(A) = \frac{a}{b} \Rightarrow A = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{27}{46,8}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A = 30^\circ}}$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c} \Rightarrow$$

$$c = \frac{b}{\cos(A)} = \frac{46,8}{\cos(30^\circ)} \approx 54$$

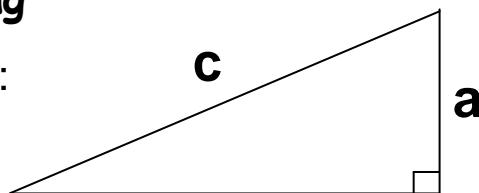


SÆTNING

## Pythagoras' sætning

For en retvinklet trekant gælder:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



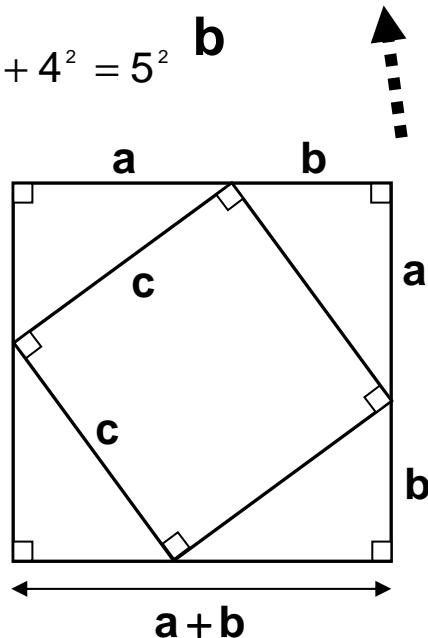
BEMÆRK: Specielt gælder der  $3^2 + 4^2 = 5^2$

### BEVIS

Ved arealberegning fås:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b\right) \Rightarrow \\ a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b &= c^2 + 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

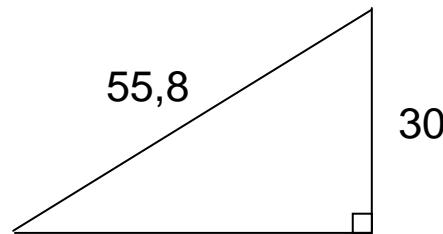
q.e.d



### EKSEMPEL:

$$a = 30 \quad b = 47 \quad c^2 = 30^2 + 47^2 \Rightarrow$$

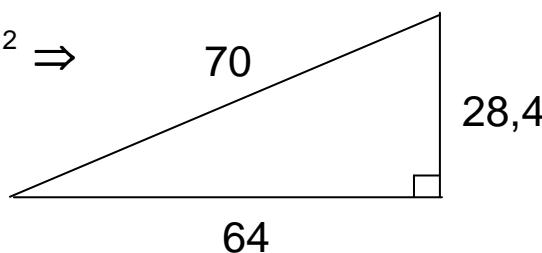
$$c = \sqrt{30^2 + 47^2} = 55,8$$



### EKSEMPEL:

$$b = 64 \quad c = 70 \quad a^2 = 70^2 - 64^2 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{70^2 - 64^2} = 28,4$$

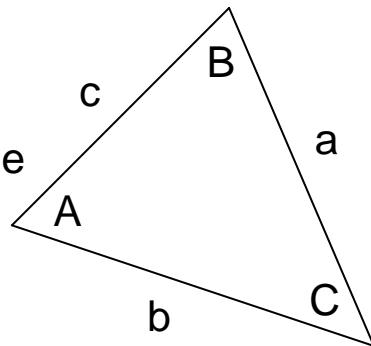


Pythagoras (ca. 570-500 f.v.t.) var naturvidenskabsmand, filosof og prædikant. Han blev født på Samos (græsk ø nær Tyrkiet). Efter en del rejser stiftede han et religiøst/videnskabeligt broderskab i Kroton (Syd-Italien). Han er bl.a. også kendt som grundlæggeren af akustikken.

# VILKÅRLIG TREKANT

## DEFINITION Vilkårlig trekant

En trekant er givet ved sidelængderne  $a$ ,  $b$  og  $c$  samt vinklerne  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

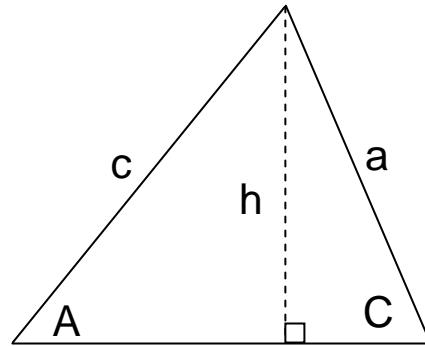


## SÆTNING Sinusrelationen

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

## BEVIS

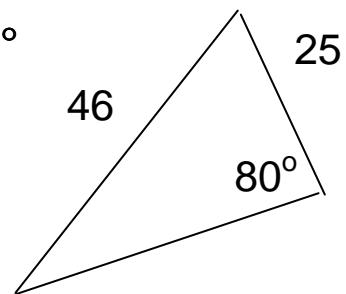
$$\begin{aligned} \sin(A) &= \frac{h}{c} \quad \text{og} \quad \sin(C) = \frac{h}{a} \Leftrightarrow \\ h &= c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \Leftrightarrow \\ \frac{a}{\sin(A)} &= \frac{c}{\sin(C)} \end{aligned}$$



På tilsvarende måde kan sidste del vises q.e.d

EKSEMPEL:  $c = 46$      $a = 25$      $C = 80^\circ$

$$\frac{25}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(80^\circ)} = \frac{46}{\sin(80^\circ)}$$



$$\sin(A) = \frac{25}{46} \cdot \sin(80^\circ) = 0,5352 \Rightarrow A = \text{Arcsin}(0,5352) = \underline{\underline{32,4^\circ}}$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - 80^\circ - 32,4^\circ = \underline{\underline{67,6^\circ}}$$

$$b = \frac{46}{\sin(80^\circ)} \cdot \sin(67,6^\circ) = \underline{\underline{43,2}}$$

SÆTNING

**Cosinusrelationen**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

**BEVIS**

Pythagoras' sætning giver:

$$x^2 + h^2 = c^2 \quad \text{og} \quad (b - x)^2 + h^2 = a^2$$

$h^2$  isoleres i den 1. ligning og udtrykket indsættes i den anden ligning:

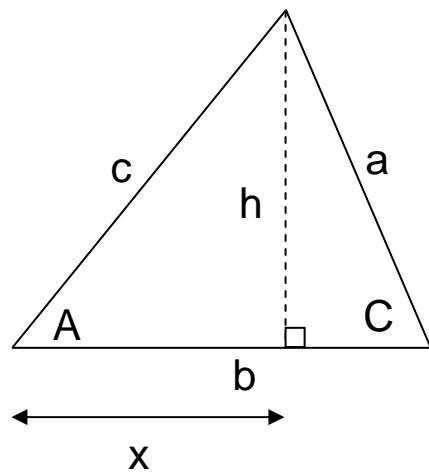
$$h^2 = c^2 - x^2$$

$$(b - x)^2 + c^2 - x^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot x$$

Venstre trekant giver:

$$\cos(A) = \frac{x}{c} \Leftrightarrow x = c \cdot \cos(A)$$



Herved fås:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

q.e.d

SÆTNING

**Alternative cosinusrelationer**

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

EKSEMPEL:  $a = 25$      $b = 43,2$      $c = 46$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \Rightarrow$$

$$\cos(A) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \frac{25^2 - 43,2^2 - 46^2}{-2 \cdot 43,2 \cdot 46} = 0,8447 \Rightarrow$$

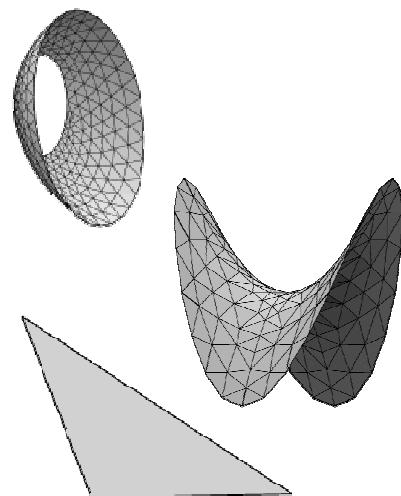
$$A = \text{Arccos}(0,8447) \Rightarrow \underline{\underline{A = 32,4^\circ}}$$

# AREAL-BEREGNING

DEFINITION

**Flade**

En flade er et sammenhængende 2-dimensionalt område (d.v.s. det har ingen tykkelse)



DEFINITION

**Areal**

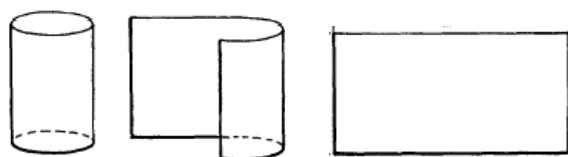
Arealet angiver den 2-dimensionale "udstrækning" af en flade.

EKSEMPEL: Arealet af en cylinderflade er omkreds gange højde.

METODE

**Udfoldning**

Hvis fladen kun krummer i en retning, kan man finde arealet ved udfoldning af fladen.



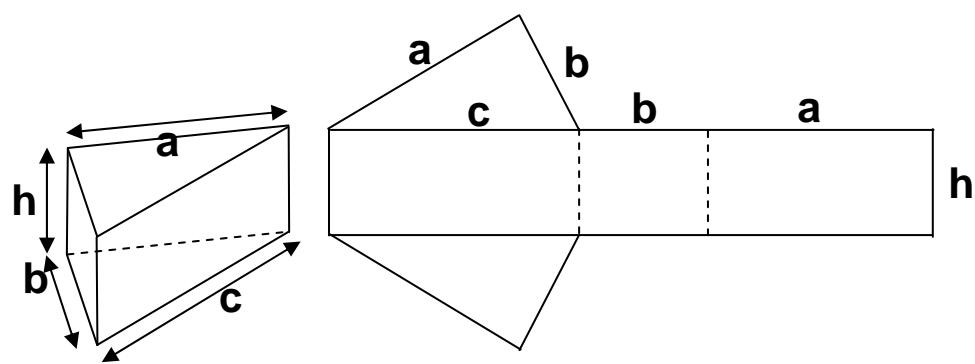
Udfoldning af en cylinder

Et landkort er et forsøg på at vise Jordkloden udfoldet. Men da Jorden (en kugle) krummer i to retninger, kan den ikke udfoldes korrekt.

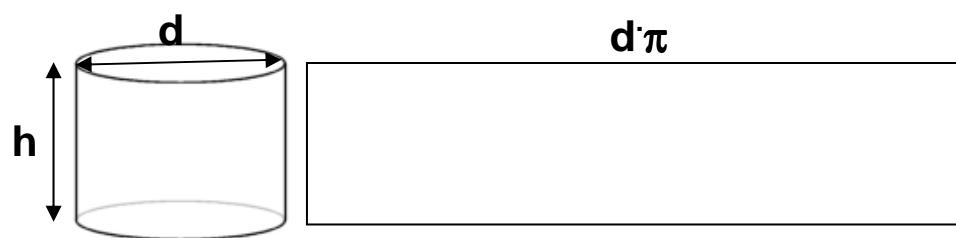


## UDFOLDNING:

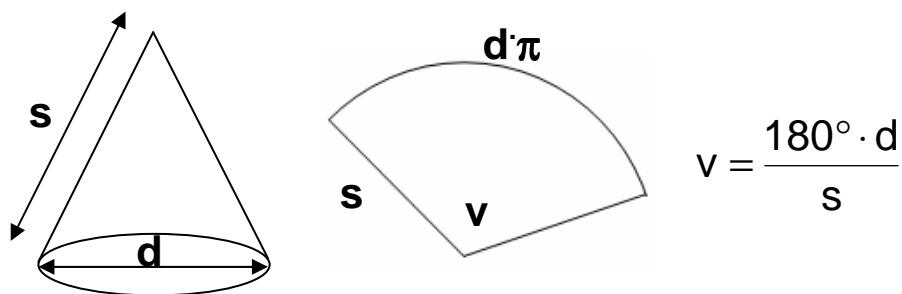
PRISME



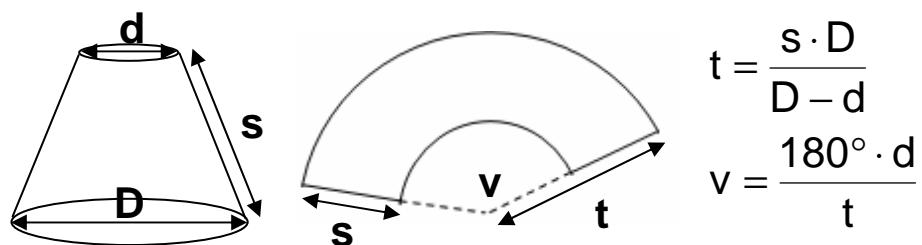
CYLINDER



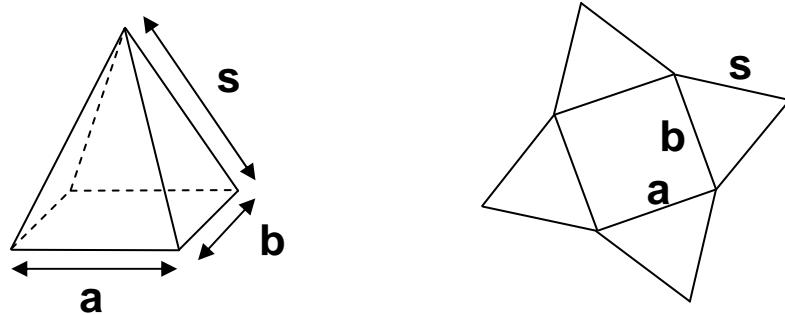
KEGLE



KEGlestub



PYRAMIDE



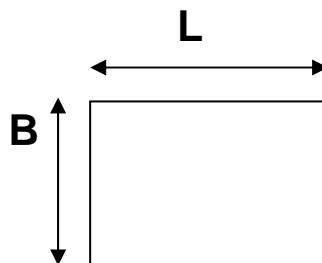
## AREALET AF PLANE FLADER:

SÆTNING

### Arealet af et rektangel

Arealet ( $A_{\text{rekta}}\text{ngel}$ ) af et rektangel med længden ( $L$ ) og bredden ( $B$ ) er:

$$A_{\text{rekta}}\text{ngel} = L \cdot B$$

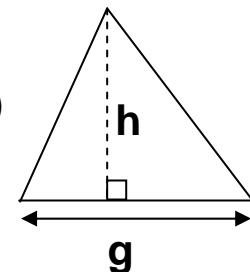


SÆTNING

### Arealet af en trekant

Arealet ( $A_{\text{trekant}}$ ) af en trekant med højden ( $h$ ) og grundlinien ( $g$ ) er:

$$A_{\text{trekant}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

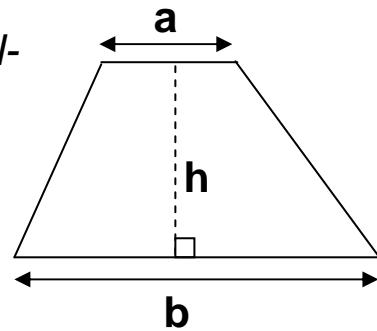


SÆTNING

### Arealet af en trapez

Arealet ( $A_{\text{trapez}}$ ) af en trapez med to parallelle sider ( $a, b$ ) samt højden ( $h$ ) er:

$$A_{\text{trapez}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$



### BEVIS

$$A_{\text{trapez}} = a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (b - a) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

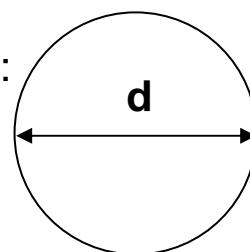
q.e.d

SÆTNING

### Arealet af en cirkel

Arealet ( $A_{\text{cirkel}}$ ) af en cirkel med diameter ( $d$ ) er:

$$A_{\text{cirkel}} = \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \pi$$



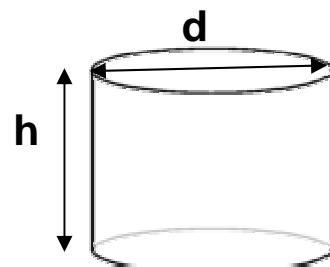
## AREALET AF RUMLIGE FLADER:

SÆTNING

### Overflade-arealet af en cylinder

Overfladearealet ( $A_{cylinder}$ ) af en cylinder med diameter ( $d$ ) og højde ( $h$ ) er:

$$A_{cylinder} = \pi \cdot d \cdot h$$



SÆTNING

### Overflade-arealet af en kegle

Overfladearealet ( $A_{kegle}$ ) af en kegle med grundflade-diameter ( $d$ ) og sidelængde ( $s$ ) er:

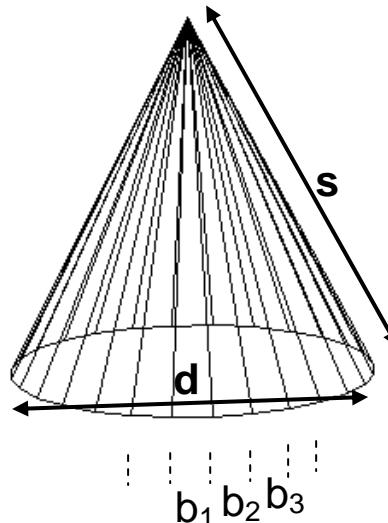
$$A_{kegle} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot d \cdot \pi$$

### BEVIS

Ved at "klistre" en masse trekantter sammen, får man en mere eller mindre kantet kegle. Trekanternes højde kaldes  $s$  og deres grundlinier kaldes  $b_1, b_2, \dots$

Overflade-arealet af denne "kegle" er:

$$\begin{aligned} A_{kegle} &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot s \cdot b_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot s \cdot b_n \\ &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \end{aligned}$$



Summen af trekanternes grundlinier er *cirka* lige så stor som cirkelens omkreds:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \approx d \cdot \pi$$

Hvis vi bruger *uendelig* mange trekantter, vil vi derfor få:

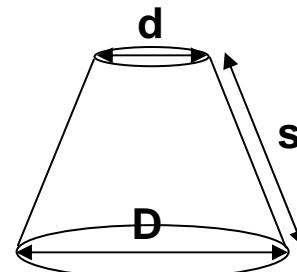
$$A_{kegle} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot d \cdot \pi \quad \text{q.e.d}$$

SÆTNING

### Overflade-arealet af en keglestub

Overfladearealet ( $A_{\text{keglestub}}$ ) af en keglestub med top-diameter ( $d$ ), bund-diameter ( $D$ ) og sidelængde ( $s$ ) er:

$$A_{\text{keglestub}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot s \cdot (D + d)$$

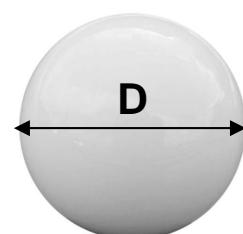


SÆTNING

### Overflade-arealet af en kugle

Overfladearealet ( $A_{\text{kugle}}$ ) af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

$$A_{\text{kugle}} = \pi \cdot D^2$$

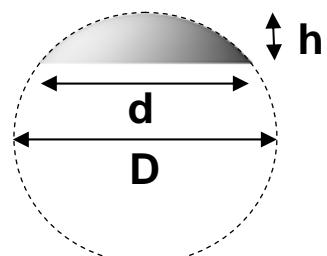


SÆTNING

### Overflade-arealet af en kuglekalot

Overfladearealet ( $A_{\text{kuglekalot}}$ ) af en kuglekalot med højden ( $h$ ) og grundflade-diameter ( $d$ ) skåret af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

$$A_{\text{kuglekalot}} = \pi \cdot D \cdot h = \pi \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot d^2 + h^2 \right)$$

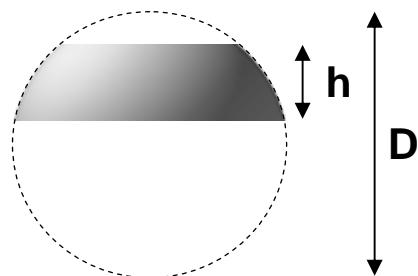


SÆTNING

### Overflade-arealet af et kuglebælte

Overfladearealet ( $A_{\text{kuglebælte}}$ ) af et kuglebælte med højden ( $h$ ) skåret af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

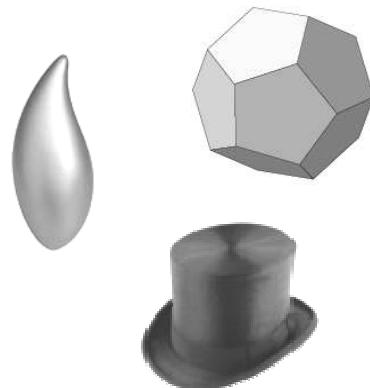
$$A_{\text{kuglebælte}} = \pi \cdot D \cdot h$$



# RUMFANGS-BEREGNING

## DEFINITION **Et legeme**

Et legeme er en *lukket* flade i det 3-dimensionale rum og dennes indre.



## DEFINITION **Rumfang (volumen)**

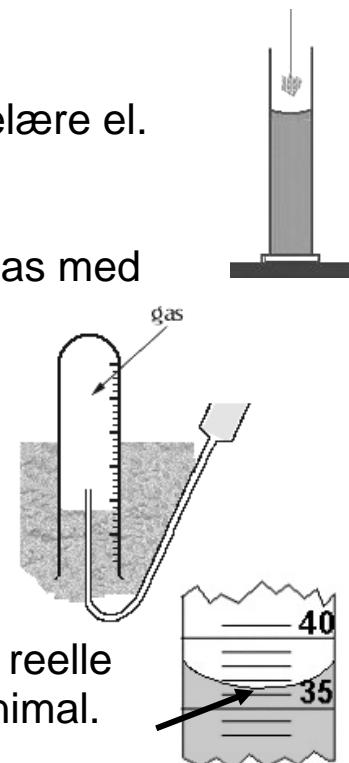
Rumfanget angiver hvor meget et legeme fylder i det 3-dimensionale rum.

## METODER **Bestemmelse af rumfang**

Metode 1: Mål legemet op med en skydelære el. lign. og beregn rumfanget.

Metode 2: Sænk legemet ned i et måleglas med vand og aflæs rumfangsændringen\*.

Metode 3: Gas kan opsamles i et måleglas nedsænket i væske.



\*) Aflæs ved væskeoverfladens bund, den reelle væskemængde over dette niveau er minimal.

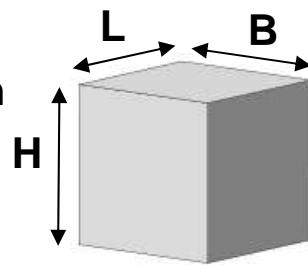
## RUMFANGET AF UDVALGTE LEGEMER:

SÆTNING

### Rumfanget af en kasse

Rumfanget ( $V_{kasse}$ ) af en kasse med højden ( $H$ ), længden ( $L$ ) og bredden ( $B$ ):

$$V_{kasse} = L \cdot B \cdot H$$

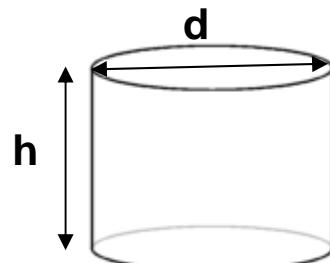


SÆTNING

### Rumfanget af en cylinder

Rumfanget ( $V_{cylinder}$ ) af en cylinder med diameter ( $d$ ) og højde ( $h$ ):

$$V_{cylinder} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot h$$

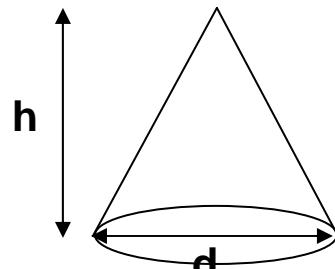


SÆTNING

### Rumfanget af en kegle

Rumfanget ( $V_{kegle}$ ) af en kegle med grundflade-diameter ( $d$ ) og højde ( $h$ ):

$$V_{kegle} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot h$$

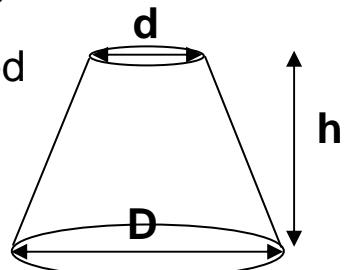


SÆTNING

### Rumfanget af en keglestub

Rumfanget ( $V_{keglestub}$ ) af en keglestub med top-diameter ( $d$ ), bund-diameter ( $D$ ) og højde ( $h$ ):

$$V_{keglestub} = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot h \cdot (D^2 + d^2 + D \cdot d)$$

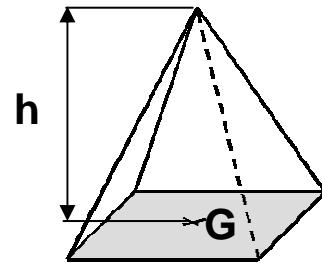


SÆTNING

## Rumfanget af en pyramide

Rumfanget ( $V_{\text{pyramide}}$ ) af en pyramide med grundflade-arealet ( $G$ ) og højde ( $h$ ) er:

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

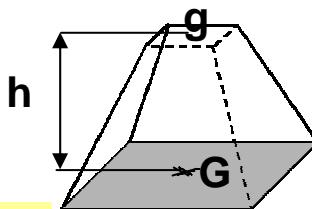


SÆTNING

## Rumfanget af en pyramidestub

Rumfanget ( $V_{\text{pyramidestub}}$ ) af en pyramidestub med bundflade-arealet ( $G$ ), topflade-arealet ( $g$ ) og højde ( $h$ ) er:

$$V_{\text{pyramidestub}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

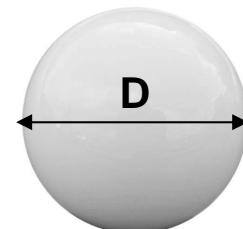


SÆTNING

## Rumfanget af en kugle

Rumfanget ( $V_{\text{kugle}}$ ) af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

$$V_{\text{kugle}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3$$

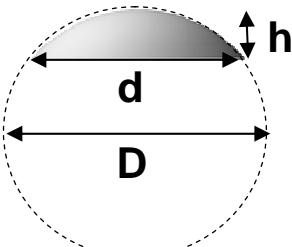


SÆTNING

## Rumfanget af et kugleafsnit

Rumfanget ( $V_{\text{kugleafsnit}}$ ) af et kugleafsnit med højden ( $h$ ) og grundflade-diameter ( $d$ ) skåret af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

$$V_{\text{kugleafsnit}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot d^2 - h^2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot D - 2 \cdot h)$$

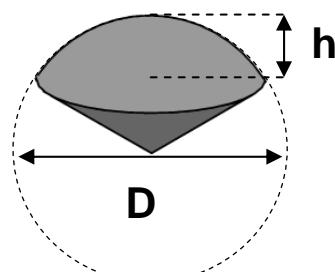


SÆTNING

## Rumfanget af et kugleudsnit

Rumfanget ( $V_{\text{kugleudsnit}}$ ) af et kugleudsnit med højden ( $h$ ) skåret af en kugle med diameter ( $D$ ) er:

$$V_{\text{kugleudsnit}} = \frac{1}{6} \pi \cdot D^2 \cdot h$$



# LINIE

## SÆTNING Liniens ligning

Ligningen for en ret linie kan skrives på formen:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + c = 0$$

$\alpha$ ,  $\beta$  og  $c$  er konstanter.

## SÆTNING Afstand mellem et punkt og en ret linie

Afstanden ( $d$ ) mellem en linie  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + c = 0$  og et punkt  $P = (x_P, y_P)$  er givet ved:

$$d = \frac{|\alpha \cdot x_P + \beta \cdot y_P + c|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

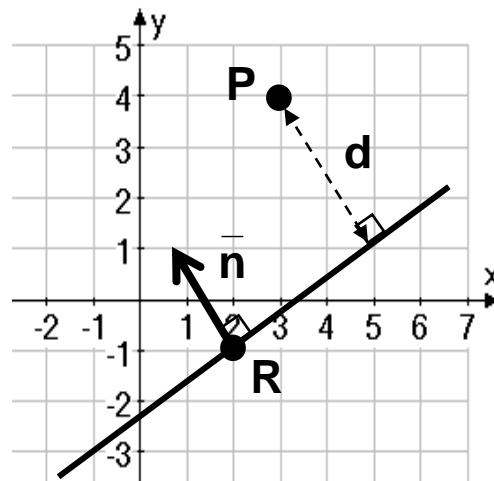
## BEVIS

Et punkt på linien:  $R = (x_R; y_R)$

En normalvektor til linien:  $n = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$

$d$  er længden af vektoren  $\overline{RP}$ 's projktion på  $\overline{n}$ :

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|\overline{RP} \bullet n|}{|n|^2} \cdot |n| = \frac{|\overline{RP} \bullet n|}{|n|} \\
 &= \frac{\left| \begin{Bmatrix} x_P - x_R \\ y_P - y_R \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \right|}{|n|} \\
 &= \frac{|\alpha \cdot x_P + \beta \cdot y_P + c|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}
 \end{aligned}
 \quad \text{q.e.d.}$$

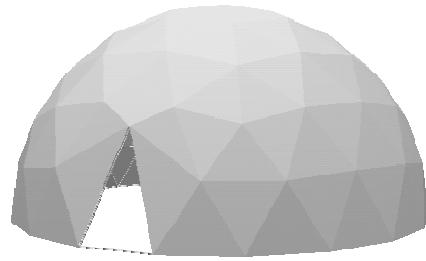


EKSEMPEL:  $-2 \cdot x + 3 \cdot y + 7 = 0$ ,  $P = (3,4)$

$$d = \frac{|-2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} \approx \underline{\underline{3,61}}$$

# TREKANT

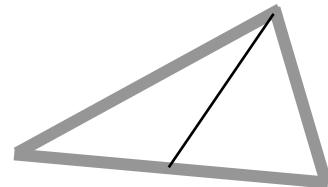
Trekanten er en simpel; men meget stabil konstruktion. "Iglooen" er bygget af trekanter.



## DEFINITION

### Trekantens medianer

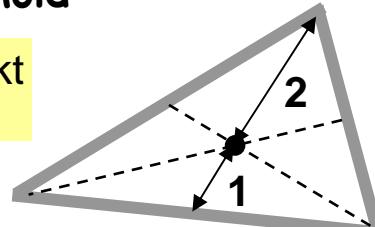
Liniestykket, som går fra midten af en side til modstående vinkelspids, kaldes en median.



## SÆTNING

### Medianernes delingsforhold

De tre medianers fælles skæringspunkt deler medianerne i forholdet 1:2



## BEVIS

Vektorerne  $\bar{c}$  og  $\bar{d}$  repræsenterer to medianer.

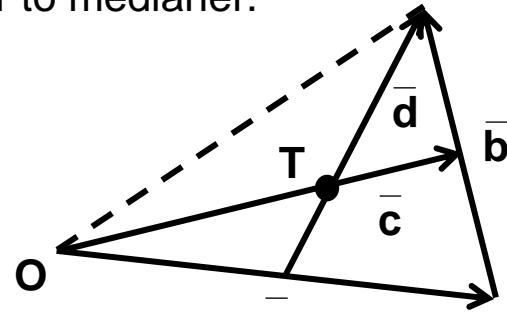
$$\bar{c} = \bar{a} + \frac{1}{2} \cdot \bar{b} \quad \text{og} \quad \bar{d} = \frac{1}{2} \cdot \bar{a} + \bar{b}$$

Af figuren ses ( $p$  og  $q$  er to tal):

$$\overline{OT} = p \cdot \bar{c} = \frac{1}{2} \cdot \bar{a} + q \cdot \bar{d} \Leftrightarrow$$

$$p \cdot \left( \bar{a} + \frac{1}{2} \cdot \bar{b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \bar{a} + q \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \bar{a} + \bar{b} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left( p - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot q \right) \cdot \bar{a} + \left( \frac{1}{2} \cdot p - q \right) \cdot \bar{b} = \bar{0}$$



Da  $\bar{a}$  og  $\bar{b}$  ikke er nul-vektorer betyder det, at:

$$p - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot q = 0 \wedge \frac{1}{2} \cdot p - q = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3} \quad \text{q.e.d}$$

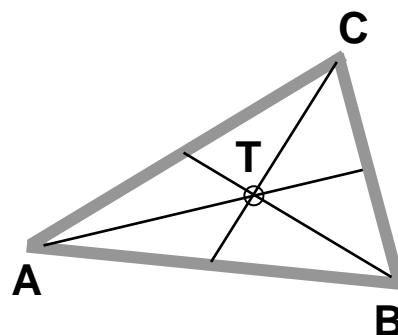
Hermed er vist, at  $|\overline{OT}|$  udgør  $\frac{2}{3}$  af medianens længde ( $|\bar{c}|$ ).

SÆTNING

## Trekantens (areal)tyngdepunkt

Medianerne skærer hinanden i trekantens tyngdepunkt (**T**), som har koordinaterne:

$$\mathbf{T} = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$



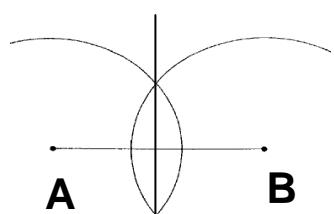
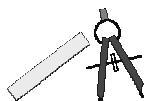
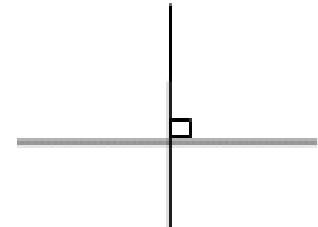
EKSEMPEL: Vinkelspids-koordinater: **A**(-2,0), **B**(6,-1), **C**(5,4)

$$\mathbf{T} = \left( \frac{-2 + 6 + 5}{3}, \frac{0 + (-1) + 4}{3} \right) = (3,1)$$

DEFINITION

## Midt-normal

Liniestykket som står vinkelret på en linie og går gennem liniens midtpunkt.



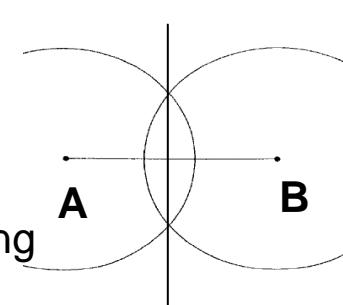
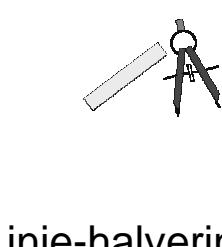
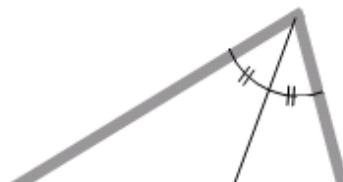
Konstruktion af *midtnormal*

Den danske matematiker Georg Mohr (1640-97) er kendt for, at han kunne tegne (næsten) alle geometriske figurer v.h.a. passer og lineal.

DEFINITION

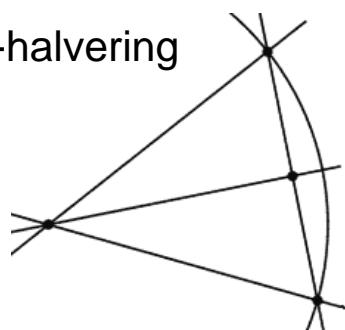
## Vinkel-halveringslinie

Liniestykket der halverer en vinkel.



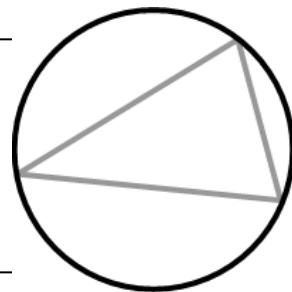
Linie-halvering

## Vinkel-halvering



**DEFINITION Omskrevnen cirkel**

En cirkel der går gennem alle tre vinkelspidser i en trekant, kaldes den omskrevne cirkel.

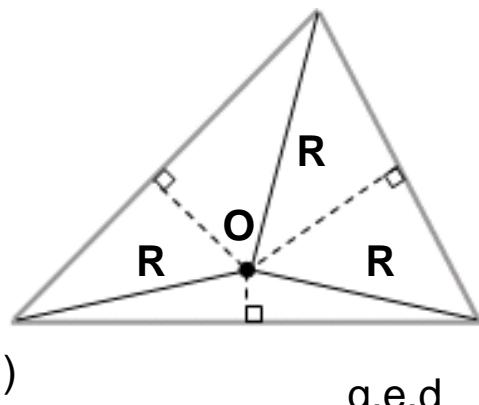


**SÆTNING Omskrevnen cirkel**

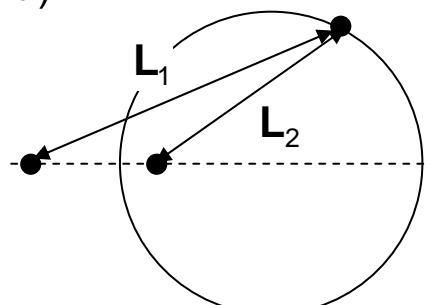
Trekantens midtnormaler skærer hinanden i den omskrevne cirkels centrum.

**BEVIS**

- Afstanden fra et punkt på en midt-normal til liniens endepunkter er ens.
- Fra skæringspunktet (**O**) mellem to midtnormaler er der lige langt (**R**) til alle tre vinkelspidser.
- Der kan tegnes en cirkel med radius (**R**) og centrum (**O**).



Appollonius fra Perga (ca. 262-190 f.v.t.) havde følgende (utraditionelle) definition af en cirkel: En cirkel består af punkter, der har et konstant længdeforhold til to faste punkter:

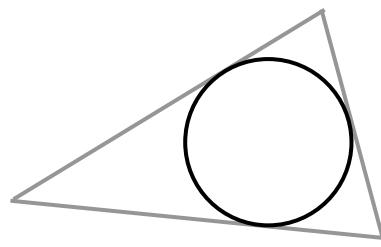


$$\frac{L_1}{L_2} = \text{Konstant}$$

DEFINITION

**Indskreven cirkel**

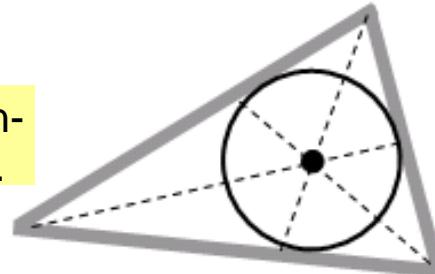
En cirkel, der tangerer alle tre sider i en trekant, kaldes den indskrevne cirkel.



SÆTNING

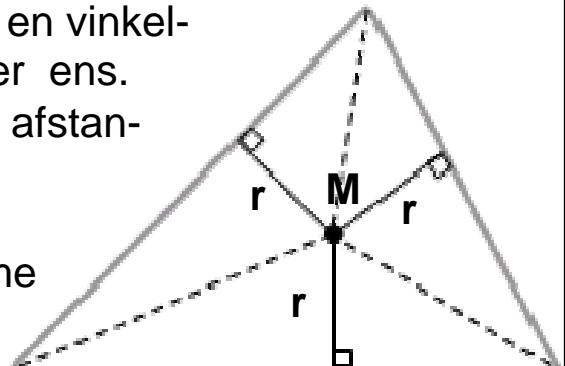
**Indskreven cirkel**

Vinkelhalveringslinierne skærer hinanden i den indskrevne cirkels centrum.



**BEVIS**

- Afstanden ( $r$ ) fra et punkt på en vinkelhalveringslinie til de to sider er ens.
- Der findes et punkt ( $M$ ), hvor afstanden til den tredje side har samme værdi ( $r$ ).
- Da dette punkt ( $M$ ) har samme afstand til alle tre sider går alle tre vinkelhalveringslinier gennem det
- Da tangenten til en cirkel står vinkelret på en radius er sætningen bevist.



q.e.d

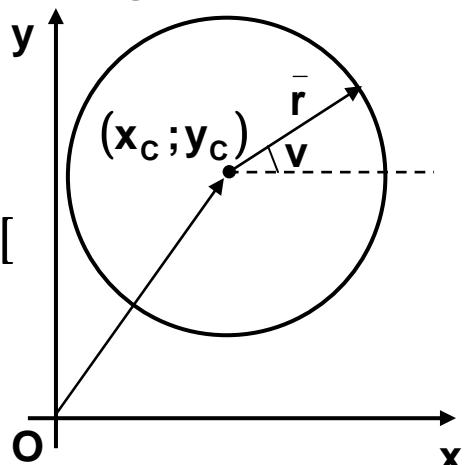
# CIRKEL

SÆTNING

## Cirklens parameterfremstilling

En cirkel med centrum i  $(x_c, y_c)$  og radius  $(r)$  kan beskrives ved:

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = r \cdot \begin{cases} \cos(v) \\ \sin(v) \end{cases} + \begin{cases} x_c \\ y_c \end{cases} \quad v \in [0; 360^\circ[$$



SÆTNING

## Cirklens ligning

En cirkel med centrum i  $(x_c, y_c)$  og radius  $(r)$  kan beskrives ved:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad r > 0$$

## BEVIS

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = r \cdot \begin{cases} \cos(v) \\ \sin(v) \end{cases} + \begin{cases} x_c \\ y_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_c \\ y - y_c \end{cases} = r \cdot \begin{cases} \cos(v) \\ \sin(v) \end{cases}$$

Vektoren på højre og venstre side af lighedsteget, har samme længde.

$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

## EKSEMPEL:

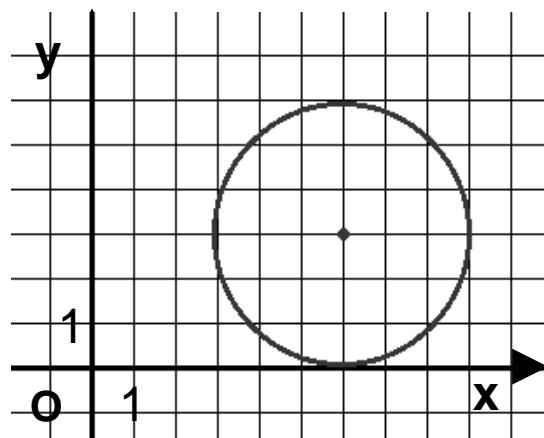
$$(x_c, y_c) = (6, 3) \quad r = 3$$

Cirklens parameterfremstilling:

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = 3 \cdot \begin{cases} \cos(v) \\ \sin(v) \end{cases} + \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases} \quad v \in [0; 360^\circ[$$

Cirklens ligning:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$$



SÆTNING

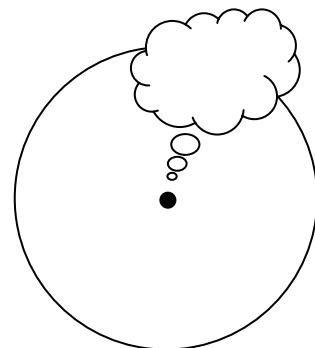
## Cirklens ligning

Ligningen:

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Fremstiller afhængigt af konstanten (**C**):

- En cirkel
- Et punkt
- Intet



SÆTNING

## Omformning af cirklens ligning

Ligningen:

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

kan også skrives på formen:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

EKSEMPEL: Cirkel

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 8 \cdot y + 11 &= 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 2^2 + 4^2 - 11 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 &= 9 \end{aligned}$$

EKSEMPEL: Punkt

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + 1 - 1^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 &= 0 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0) \end{aligned}$$

EKSEMPEL: Intet

$$x^2 + y^2 + 10 \cdot x - 16 \cdot y + 100 = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 + (y - 8)^2 = -11$$

Venstresiden er altid positiv og højresiden negativ, altså kan lighedstegnet ikke gælde – ligningen er noget sludder.

# FUNKTION OG GRAF

## DEFINITION Tal-mængde

En talmængde er en mængde af tal. Følgende talmængder bliver brugt så ofte, at de har fået et symbol:

- R:** Relle tal (alle tal)  
**R<sub>+</sub>:** Positive relle tal (alle positive tal)  
**N:** Naturlige tal (alle *positive* hele tal)  
**Z:** Hele tal  
**Q:** Rationale tal (alle brøker)

EKSEMPEL: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}  
Hvilket er de første 10 primtal

## DEFINITION Funktion

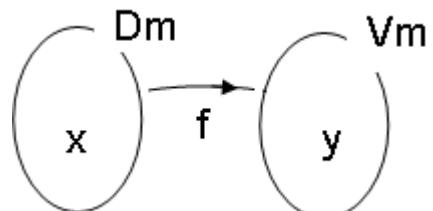
En funktion ( $f$ ) angiver et entydigt sammenhæng mellem tallene ( $x$  og  $y$ ) i to talmængder. D.v.s. til hver  $x$ -værdi findes der kun en  $y$ -værdi. Ofte bruges skrivemåden  $y = f(x)$ .

Mængden med x-værdier kaldes for funktionens definitionsmængde **D<sub>m</sub>(f)** og mængden med y-værdier kaldes værdimængden **V<sub>m</sub>(f)**.

## DEFINITION Regne-forskrift (funktionsforskrift)

En regnegrift **f(x)** er et matematisk udtryk der angiver, hvordan man finder y-værdien (også kaldet funktionsværdien), når man kender x-værdien.

EKSEMPEL:  $f(x) = 2 \cdot x + 3$  Hvis  $x$  vælges til 4, fås  $y = 11$   
da  $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

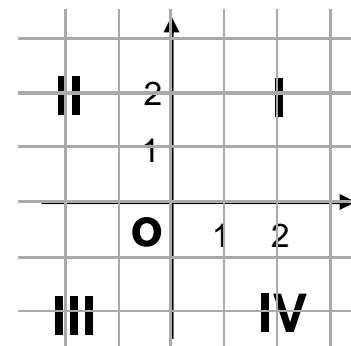


## DEFINITION Koordinatsystem

Et (cartesisk) koordinatsystem har en vandret tallinie kaldet *abscisse-aksen* og en lodret tallinie kaldet *ordinataksen*.

Et punkt i koordinatsystemet kaldes et koordinat. Skæringen mellem akserne kaldes *origo*, og har koordinatet (0;0)

Akserne deler planen i fire *kvadranter* (I-IV).



René Descartes (1596-1650) var en fransk filosof og matematiker. Han rejste meget og boede bl.a 20 år i Holland. I 1637 udgav han bogen "La géométrie", hvor han blandt andet indførte koordinatsystemet.

## DEFINITION Graf

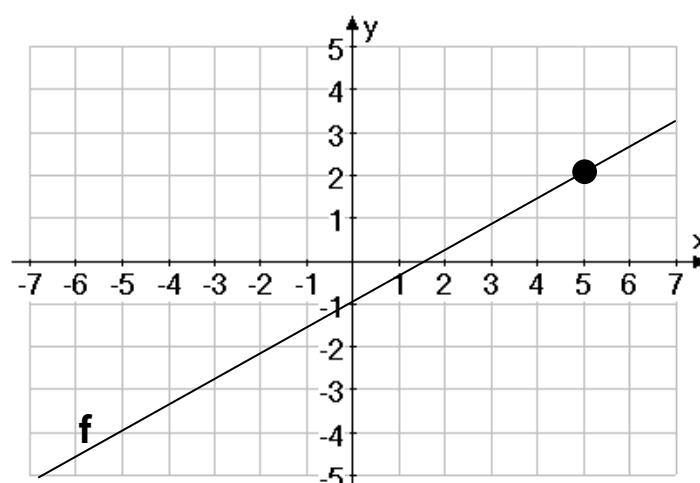
En graf viser en funktion grafisk i et koordinatsystem. Hvis abscisse-aksen kaldes x-aksen og ordinat-aksen kaldes y-aksen kan sammenhørende x- og y-værdier plottes som koordinater (x;y).

EKSEMPEL:

$$f(x) = \frac{3}{5} \cdot x - 1$$

Punktets koordinat:

$$(x;y) = (5;2)$$



# LINEÆRE FUNKTIONER

## DEFINITION (Ligefrem) **Proportional**

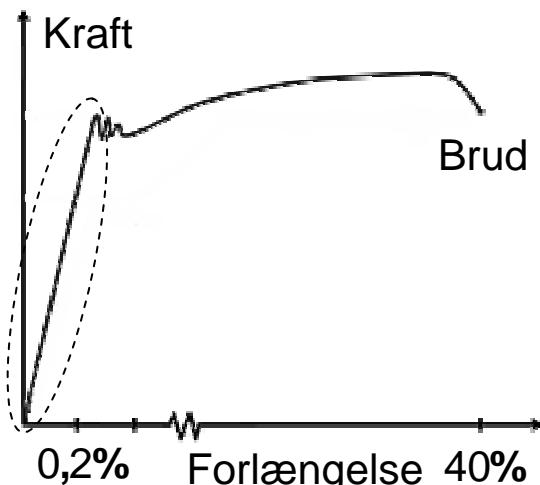
En tal-mængde **y** er proportional med tal-mængden **x**, hvis der gælder at:

$$y = a \cdot x$$

Hvor **a** er en konstant forskellig fra 0.

EKSEMPEL: Cirklens omkreds (**O<sub>cirkel</sub>**) er proportional med diameteren (**D**):  $O_{cirkel} = \pi \cdot D$

Den engelske videnskabsmand Robert Hooke (1635-1703) undersøgte, hvordan materialer deformeres. Hooks lov fra 1676 lyder: "ut tensio sic vis" som betyder: Forlængelsen er proportional med kraften. Som det ses på grafen (for stål), er det kun korrekt for små deformationer.



## DEFINITION **Lineær funktion** (Liniens ligning)

Regneforskriften for en ret linie i et cartesisk koordinat-system kan skrives på formen:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Hvor **a** og **b** er konstante tal. **a** kaldes stigningstallet eller hældningskoefficienten og **b** kaldes konstant-leddet.

EKSEMPEL:  $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 1$

**DEFINITION Stigningstal** (hældningskoefficient)

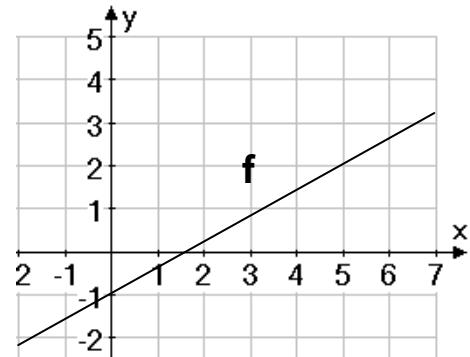
Stigningstallet (**a**) angiver hvor meget y-værdien vokser når x-værdien vokser med 1.

EKSEMPEL:

På grafen ses at  $a = \frac{2}{3}$ .

Altså når  $x$  stiger med 1 stiger  $y$  med  $\frac{2}{3}$ .

Det svarer også til, at når  $x$  stiger med 3, stiger  $y$  med 2.



**SÆTNING Stigningstal** (hældningskoefficient)

Kendes koordinaterne til to punkter  $(x_1; y_1)$  og  $(x_2; y_2)$  på grafen for en *lineær funktion* eller vinklen  $v$  mellem grafen (linien) og x-aksen, er stigningstallet (**a**) givet ved:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(v)$$

**BEVISER**

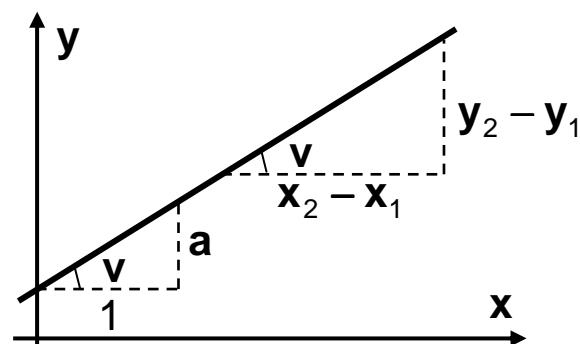
De to trekanter på figuren er retvinklede og ensvinklede.

Fra trigonometri haves:

$$\tan(v) = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \tan(v)$$

Sideforholdene i ensvinklede trekanter er ens:

$$\frac{a}{1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{q.e.d}$$



EKSEMPEL:  $(x_1; y_1) = (0; -1)$      $(x_2; y_2) = (5; 2)$      $v = 31,0^\circ$

$$a = \frac{2 - (-1)}{5 - 0} = \frac{3}{5} \quad \text{eller alternativt} \quad a = \tan(31,0^\circ) = 0,6$$

SÆTNING **Konstant-leddet (b)**

Grafen for den lineære funktion  $f(x) = a \cdot x + b$  skærer y-aksen i punktet  $(0; b)$ .

SÆTNING **Konstant-leddet (b)**

Hvis man kender stigningstallet ( $a$ ) samt koordinatet  $(x_1; y_1)$  til et punkt på grafen for en lineær funktion, kan konstant-leddet ( $b$ ) findes ved:

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

SÆTNING **Parallelle linier**

Hvis stigningstallene ( $a_1$  og  $a_2$ ) er ens, er linierne parallelle.

$$a_1 = a_2$$

SÆTNING **Linie står vinkelret på linie**

Når to linier står vinkelret på hinanden, er produktet af deres stigningstal lig  $-1$ .

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

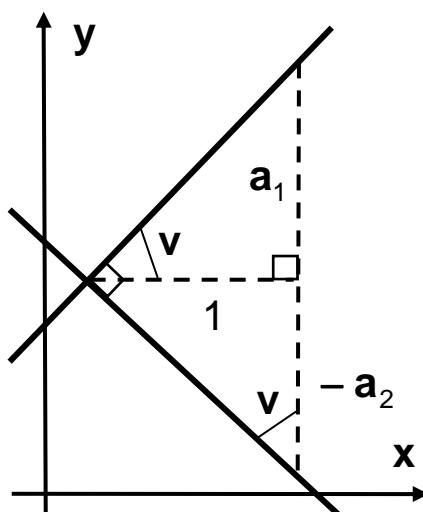
**BEVIS**

Stigningstallet  $a_2$  er et negativt tal. Da længder er positive tal, er sidelængden  $-a_2$ . Der gælder:

$$\tan(v) = \frac{a_1}{1} \wedge \tan(v) = \frac{1}{-a_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{1}{-a_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

q.e.d.



## 2. GRADS-POLYNOMIER

### DEFINITION 2. grads-polynomium

Et 2. grads-polynomium kan skrives på formen:

$$f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

**A, B og C** er konstanter. **A** ≠ 0

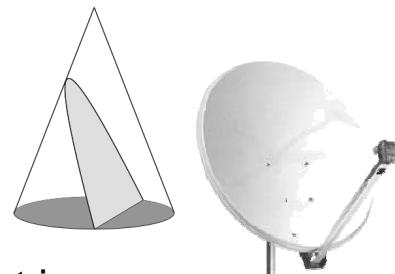
EKSEMPLER:  $f_1(x) = 2x^2 + 1$       **A** = 2, **B** = 0, **C** = 1  
 $f_2(x) = (3x - 1)^2$       **A** = 9, **B** = -2, **C** = 1  
 $f_3(x) = -x + 4 + x^2$       **A** = 1, **B** = -1, **C** = 4

### DEFINITION Parabel

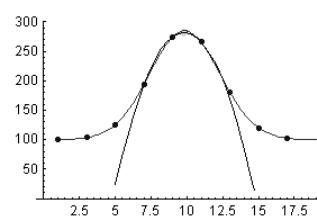
2. grads-polynomiets graf kaldes for en *parabel*.

Vi er 'omgivet' af parabler:

- Kastes en sten, følger den (næsten) en parabel-formet banekurve.
- Et snit i en kegle *kan* give en parabel.
- Tværsnittet af en TV-parabol eller spejlet i en lygte er en parabel.



Desuden bruges parabler ofte til at *fitte* måledata og kurver eller dele af disse.

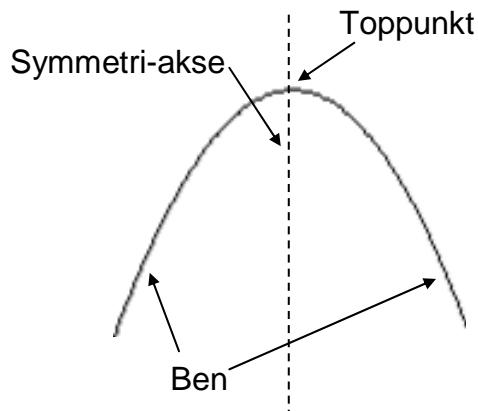


### DEFINITION Diskriminanten

Diskriminanten er en nyttig hjælpe-størrelse, som er givet ved:

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

## DEFINITION

**Parablens "anatomি"**

## REGLER

**Parablens placering**

1. Positiv **A**: Benene peger opad ☺  
Negativ **A**: Benene peger nedad ☹
2. Hvis  $|A|$  er stor er parablen smal.  
Hvis  $|A|$  er lille er parablen bred.
3. **A** og **B** ens fortegn: Toppunkt til venstre for y-aksen.  
**A** og **B** forskelligt fortegn: Toppunkt til højre for y-aksen.  
**B** = 0: Toppunkt ligger på y-aksen.
4. Parablen skærer y-aksen i punktet  $(0; \mathbf{C})$
5. Positiv **D**: Parablen skærer x-aksen 2 gange  
**D** = 0: Parablen rører x-aksen i 1 punkt  
Negativ **D**: Parablen rører ikke x-aksen

EKSEMPEL:  $f(x) = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$     **A** = 4, **B** = -2, **C** = 1

- 1: **A** > 0: Benene vender opad.
- 3: **A** og **B** forskelligt fortegn: Toppunkt til højre for y-aksen.
- 4: Parablen skærer y-aksen i punktet  $(0; 1)$
- 5:  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12$ : Parablen rører ikke x-aksen

SÆTNING

## Symmetri-aksen

Parablens symmetriakse er bestemt ved:

$$x_{\text{sym-akse}} = -\frac{B}{2 \cdot A}$$

EKSEMPEL:  $f(x) = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$   $A = 4, B = -2, C = 1$

Symmetri-aksen er altså givet ved:  $x_{\text{sym-akse}} = -\frac{-3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

SÆTNING

## Toppunktet

Parablens toppunkt har koordinaterne:

$$(x_{\text{tp}}; y_{\text{tp}}) = \left( -\frac{B}{2 \cdot A}; -\frac{D}{4 \cdot A} \right)$$

## BEVIS

Toppunktet ligger på symmetriaksen så:  $x_{\text{tp}} = x_{\text{sym-akse}}$   
y-koordinaten er:

$$\begin{aligned} y_{\text{tp}} &= f(x_{\text{tp}}) = f\left(-\frac{B}{2 \cdot A}\right) \\ &= A \cdot \left(-\frac{B}{2 \cdot A}\right)^2 + B \cdot \left(-\frac{B}{2 \cdot A}\right) + C \\ &= \frac{A \cdot B^2}{4 \cdot A^2} - \frac{B^2}{2 \cdot A} + C = \frac{B^2 - 2 \cdot B^2 + 4 \cdot A \cdot C}{4 \cdot A} = -\frac{D}{4 \cdot A} \end{aligned}$$

q.e.d.

EKSEMPEL:  $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$   $A = 1, B = -2, C = -3$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

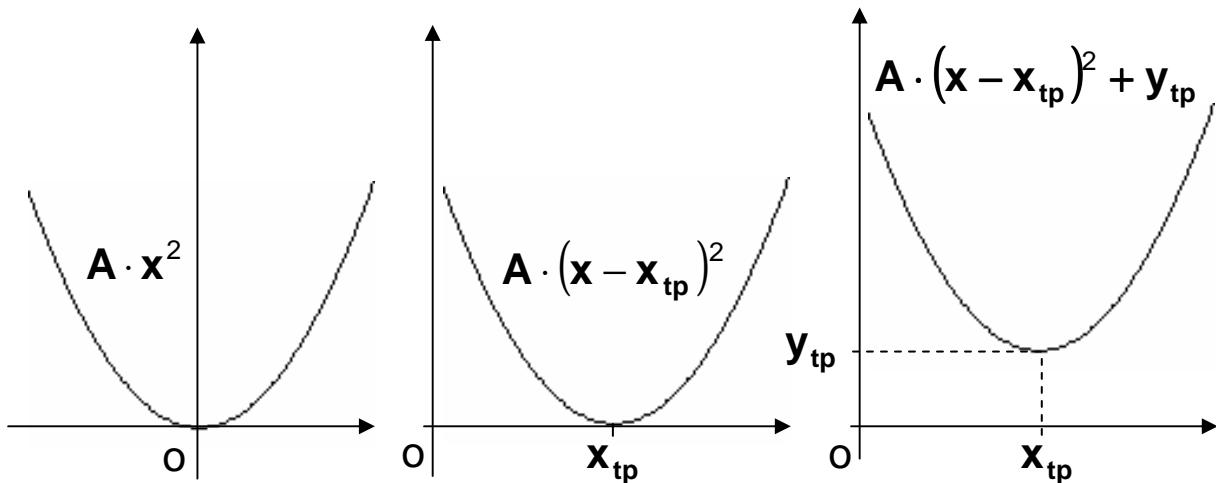
$$(x_{\text{tp}}; y_{\text{tp}}) = \left( -\frac{-2}{2 \cdot 1}; -\frac{16}{4 \cdot 1} \right) = (1; -4)$$

## SÆTNING

**Omskrivning af regne-forskriften**

Regneforskriften  $f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$  er identisk med:

$$f(x) = A \cdot (x - x_{tp})^2 + y_{tp}$$

METODE **"Omskrivnings-fidus"**

Formlen  $x^2 - 2 \cdot x_{tp} \cdot x + x_{tp}^2 = (x - x_{tp})^2$  d.v.s. kvadratet på en to-leddet differens, gør omskrivningen nem.

**FORKLARENDE EKSEMPEL:**

$$\underline{x^2 - 8 \cdot x + 9} = (x - 4)^2 + 9 - 4^2 = \underline{(x - 4)^2 - 7}$$

**TRIN 1:** Foran  $x$  står  $-2 \cdot x_{tp}$  altså  $-8 = -2 \cdot x_{tp}$  så  $x_{tp} = 4$

**TRIN 2:**  $(x - x_{tp})^2$  giver ledtet  $x_{tp}^2$  for meget, som derfor må trækkes fra.

**EKSEMPLER:**

$$\underline{x^2 + 6 \cdot x - 4} = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x - 4 = (x + 3)^2 - 4 - 3^2 = \underline{(x + 3)^2 - 13}$$

$$\underline{x^2 - 2 \cdot x} = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x = (x - 1)^2 - 1^2 = \underline{(x - 1)^2 - 1}$$

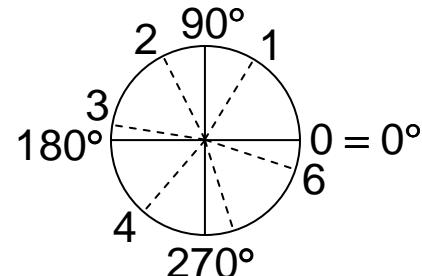
# TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

## DEFINITION Grader og radianer

En vinkel måles ofte i grader ( $v_{\text{grad}}$ ); men i matematik er det lige så almindeligt at måle vinkler i enheden radian ( $v_{\text{rad}}$ ):

- En cirkel er opdelt i  $360^\circ$ .
- En cirkel er opdelt i  $2\pi \approx 6,28$  radian  
- hvilket er enhedscirklets omkreds.

$$v_{\text{rad}} = v_{\text{grad}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$



**BEMÆRK:** Hvis en vinkel er angivet uden enhed er det underforstået, at enheden er radian.

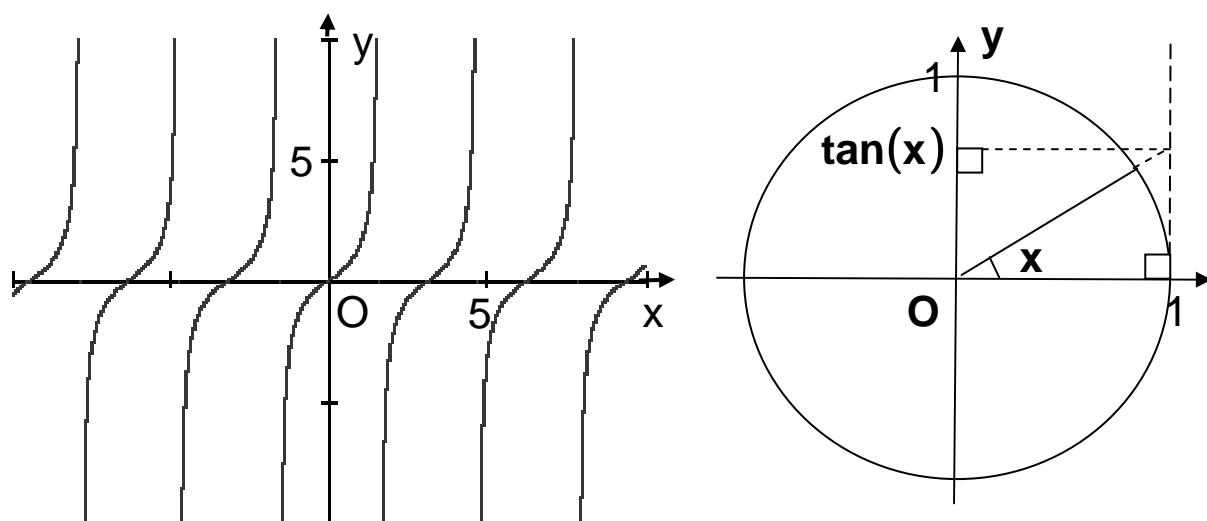
## EKSEMPEL:

$$v_{\text{rad}} = 1 \text{ rad} = 1 \Rightarrow v_{\text{grad}} = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

$$v_{\text{grad}} = 1^\circ \Rightarrow v_{\text{rad}} = 1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,0175$$

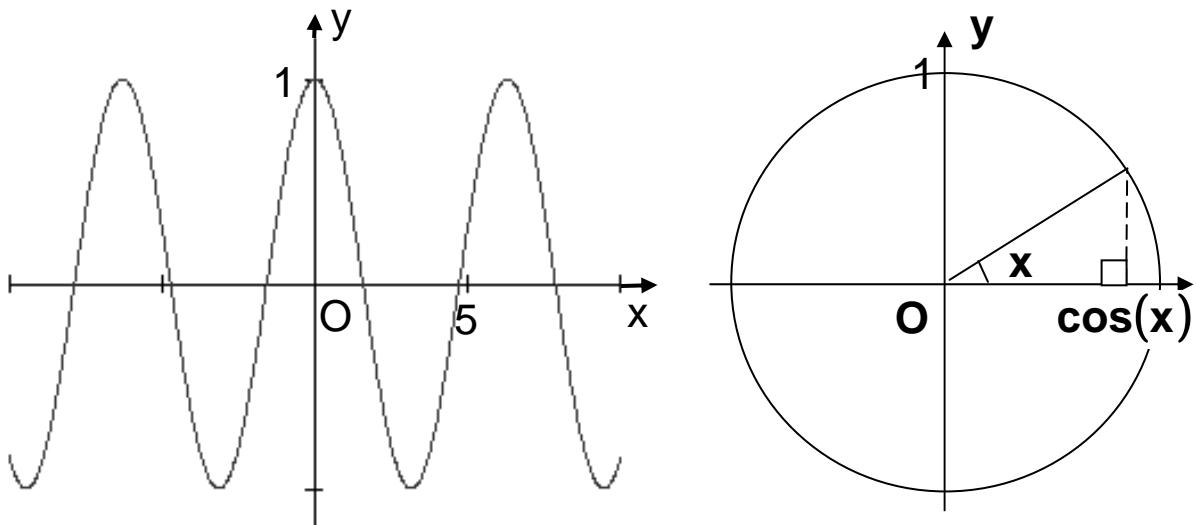
## DEFINITION Tangens-funktionen

Funktionen tangens  $\tan(x)$  er defineret i forhold til en enhedscirkel. Tegnes  $\tan(x)$  i et koordinatsystem svarer x-værdien til vinklen.

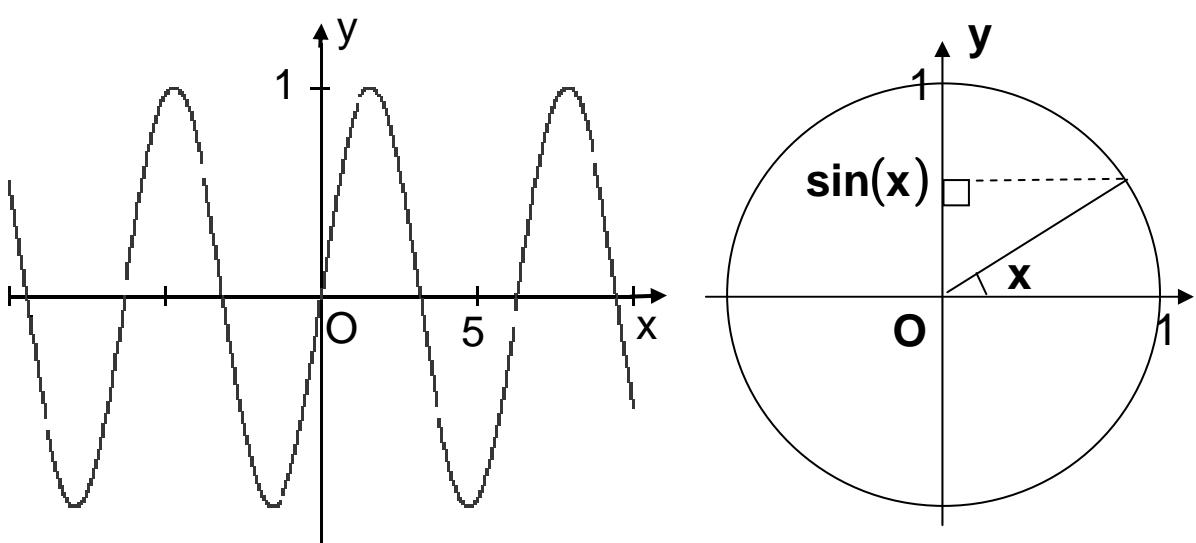


**DEFINITION Cosinus-funktionen**

Funktionen cosinus  **$\cos(x)$**  er defineret i forhold til en enheds cirkel. Tegnes  **$\cos(x)$**  i et koordinatsystem svarer x-værdien til vinklen.


**DEFINITION Sinus-funktionen**

Funktionen Sinus  **$\sin(x)$**  er defineret i forhold til en enheds cirkel. Tegnes  **$\sin(x)$**  i et koordinatsystem svarer x-værdien til vinklen.



# HARMONISK SVINGNING

## DEFINITION Harmonisk svingning

En harmonisk svingning kan beskrives ved regnegriften:

$$h(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right) + k$$

Hvor:

**t**: Den uafhængige variabel (tiden)

**a**: Amplituden (den halve bølgehøjde)

**T**: Perioden eller svingningstiden (tiden for en hel svingning)

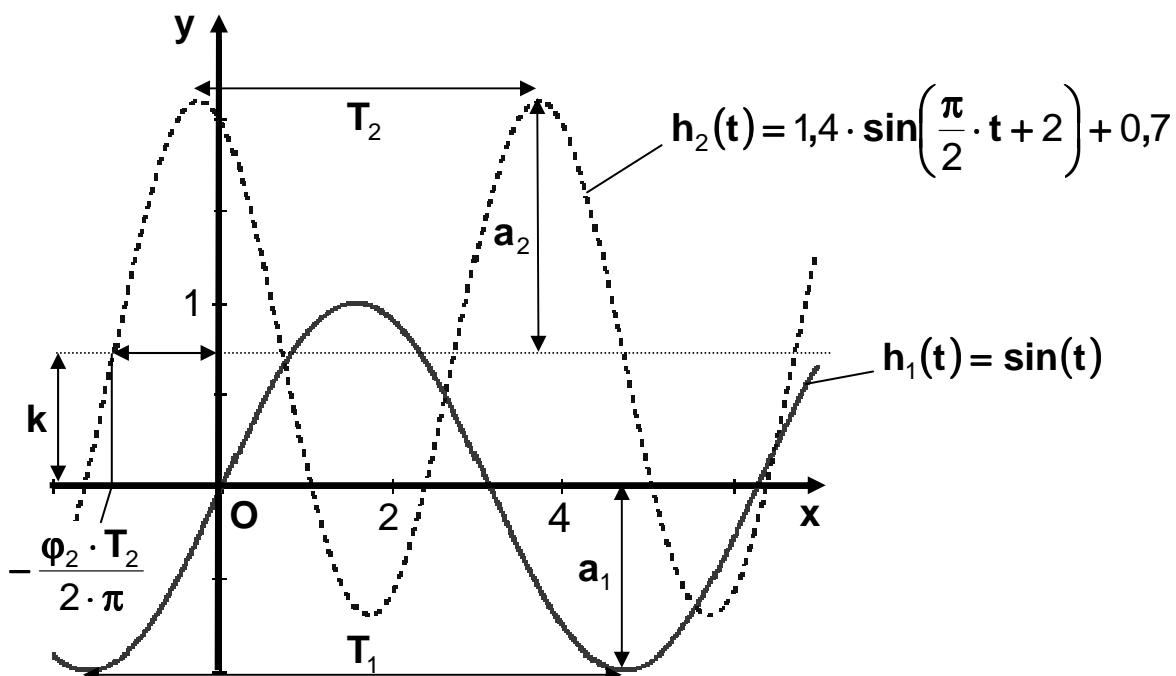
**k**: Konstant-leddet (forskydning i 2. aksens retning)

**$\varphi$** : Fasevinklen.

$-\frac{\varphi \cdot T}{2 \cdot \pi}$ : Faseforskydningen (forskydning i 1. aksens retning)

**BEMÆRK:**  $f = \frac{1}{T}$  kaldes *frekvens* og  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$  *alinktfrekvens*

## EKSEMPLER:



Ved aflæsning på figuren ses at:

$$h_1: \quad a_1 = 1 \quad T_1 = 2 \cdot \pi \quad \varphi_1 = 0 \quad k_1 = 0$$

$$h_2: \quad a_2 = 1,4 \quad T_2 = 4 \quad \varphi_2 = 2 \quad k_2 = 0,7 \quad \text{og} \quad -\frac{\varphi_2 \cdot T_2}{2 \cdot \pi} = -1,27$$

# OMSKRIVNING AF SINUS OG COSINUS

SÆTNING

**Omskrivnings-formler**

a)  $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$

b)  $\sin(v) = \sin(\pi - v) = \sin(180^\circ - v) = -\sin(-v)$

c)  $\cos(v) = -\cos(\pi - v) = -\cos(180^\circ - v) = \cos(-v)$

d)  $\sin(v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos(90^\circ - v)$

e)  $\cos(v) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin(90^\circ - v)$

f)  $\sin(v \pm u) = \sin(v) \cdot \cos(u) \pm \cos(v) \cdot \sin(u)$

g)  $\cos(v \pm u) = \cos(v) \cdot \cos(u) \mp \sin(v) \cdot \sin(u)$

h)  $\sin^2(v) \equiv [\sin(v)]^2$

i)  $\sin(2 \cdot v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$

j)  $\cos(2 \cdot v) = \cos^2(v) - \sin^2(v)$

k)  $\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1$  Populært kaldet *Idiot-formlen*

l)  $A \cdot \sin(v) + B \cdot \cos(v) = C \cdot \sin(v + u)$  ,  $\begin{cases} A = C \cdot \cos(u) \\ B = C \cdot \sin(u) \end{cases}$

EKSEMPLER:

b)  $\sin(30^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(150^\circ)$

f)  $\sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin(60^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \cos(60^\circ) \cdot \sin(45^\circ)$

l)  $3 \cdot \sin(1) - \cos(1) = 3,162 \cdot \sin(0,6782)$

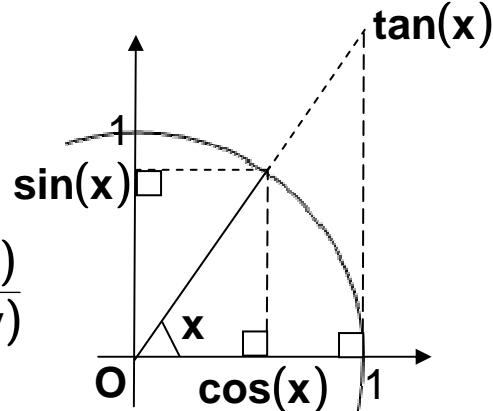
Da ligningssystemet giver:  $\begin{cases} 3 = C \cdot \cos(u) \\ -1 = C \cdot \sin(u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 3,162 \\ u = -0,3218 \end{cases}$

**BEVIS for regel a**

Sideforholdene i ensvinklede trekanter er ens:

$$\frac{\tan(v)}{1} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \Leftrightarrow \tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$$

q.e.d.

**BEVIS for regel g (minus)**

Enhedsvektorerne  $\bar{a}$  og  $\bar{b}$  er givet ved:

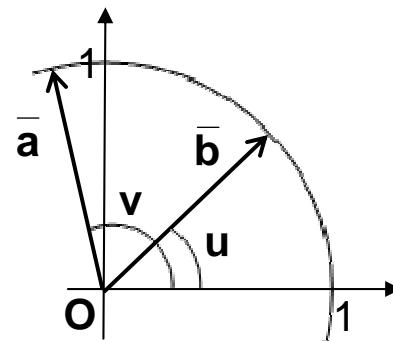
$$\begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{Bmatrix} \text{ og } \begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{Bmatrix}$$

Skalarproduktet er givet ved:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(v - u) \quad \text{og} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Sættes de to udtryk for skalarproduktet lig hinanden fås:

$$\cos(v - u) = \cos(v) \cdot \cos(u) + \sin(v) \cdot \sin(u) \quad \text{q.e.d.}$$

**BEVIS for regel g (plus)**

Resultatet fra minus-tilfældet ovenover samt regel b) og c) giver:

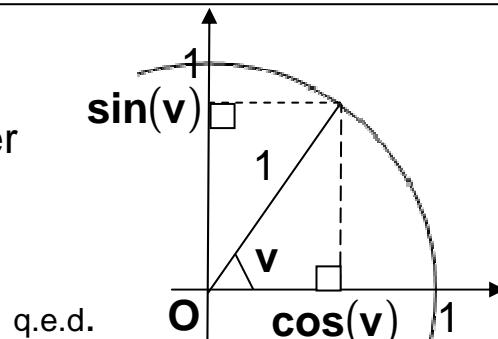
$$\begin{aligned} \cos(v + u) &= \cos(v - (-u)) \\ &= \cos(v) \cdot \cos(-u) + \sin(v) \cdot \sin(-u) \\ &= \cos(v) \cdot \cos(u) - \sin(v) \cdot \sin(u) \end{aligned}$$

q.e.d.

**BEVIS for regel k**

Da enhedscirklens radius er 1, giver Pythagoras sætning:

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$$



# EKSPONENTIAL-FUNKTIONER

## DEFINITION Eksponentiale funktioner

Eksponentiale funktionens regleforskrift, hvor  $a$  kaldes grundtallet:

$$f(x) = a^x \quad \text{hvor } a > 0$$

**BEMÆRK:**  $Dm(f) = \mathbb{R}$  og  $Vm(f) = \mathbb{R}_+$

## DEFINITION Eksponentiel udvikling

Regleforskriften for en eksponentiel udvikling er givet ved:

$$f(x) = b \cdot a^x \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \text{ og } b \in \mathbb{R}_+$$

## SÆTNING Monotoniforhold

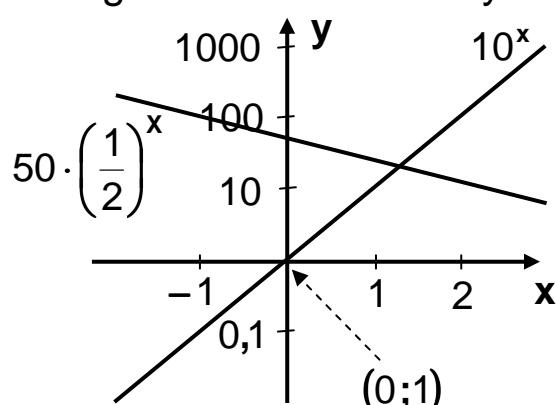
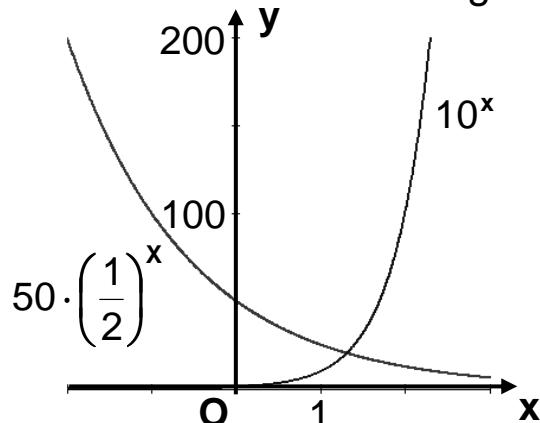
For en eksponentiel udvikling  $f(x) = b \cdot a^x$  gælder følgende:

- $\begin{cases} 0 < a < 1 & : f(x) \text{ er aftagende} \\ a = 1 & : f(x) = b \text{ (konstant, ikke en eksp. udvikl.)} \\ a > 1 & : f(x) \text{ er voksende} \end{cases}$
- $f(0) = b$

## SÆTNING Enkelt-logaritmisk koordinatsystem

1.-aksen i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem er inddelt i lige store enheder. 2.-aksen er derimod inddelt, så grafen for en eksponentiel udvikling bliver en ret linie.

EKSEMPLER: Almindeligt og enkeltlogaritmisk koordinatsystem



## SÆTNING

**Bestemmelse af a og b**

Hvis man kender koordinaterne til to punkter  $(x_1; y_1)$  og  $(x_2; y_2)$  på grafen for en eksponentiel udvikling  $f(x) = b \cdot a^x$ , kan grundtallet  $(a)$  og tallet  $b$  findes ved:

$$a = \left( \frac{y_1}{y_2} \right)^{\frac{1}{x_1 - x_2}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

**BEVIS**

$$\begin{cases} y_1 = b \cdot a^{x_1} \\ y_2 = b \cdot a^{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{b \cdot a^{x_1}}{b \cdot a^{x_2}} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2} \Leftrightarrow$$

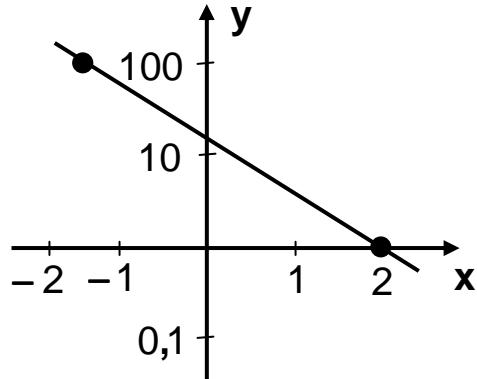
$$\left( \frac{y_1}{y_2} \right)^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = (a^{x_1 - x_2})^{\frac{1}{x_1 - x_2}} = a^{\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2}} = a^1 = a \quad \text{q.e.d.}$$

EKSEMPEL:  $(x_1; y_1) = (-1,5; 100)$ ,  $(x_2; y_{21}) = (2; 1)$

$$a = \left( \frac{100}{1} \right)^{\frac{1}{-1,5-2}} = 100^{-\frac{2}{7}} = 0,2683$$

$$b = \frac{100}{0,2683^{-1,5}} = 13,89$$

D.v.s.  $f(x) = 13,89 \cdot 0,2683^x$



## METODE

**Reference-værdi**

Hvis x-værdierne er store, skal man bruge en referenceværdi ( $x_{ref}$ ), så regneforskriften skrives på formen:

$$f(x) = b \cdot a^u \quad , \quad u = x - x_{ref}$$

Se forklarende eksempel på næste side...

**FORKLARENDE EKSEMPEL:** Antal malkekøer i Danmark:

Givet:  $(x_1; y_1) = (1962; 1,463 \text{ mill.})$   $(x_2; y_2) = (2004; 0,563 \text{ mill.})$

$x_{\text{ref}} = 1962$  så  $(u_1; y_1) = (0; 1,463 \text{ mill.})$   $(u_2; y_2) = (42; 0,563 \text{ mill.})$

$$a = \left( \frac{1,463 \cdot 10^6}{0,563 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{42}} = 0,9775 \quad , \quad b = \frac{1,463 \cdot 10^6}{0,9775} = 1,463 \cdot 10^6$$

D.v.s.:  $f(x) = 1,463 \cdot 10^6 \cdot 0,9775^{x-1962}$

Indføres  $x_{\text{ref}}$  ikke fås samme grundtal (**a**). Men **b** vil i teorien svarer til antallet af malkekøer ved Jesus fødsel (år 0) og derfor være et *enormt* stort tal. Værdien af **b** vil ikke kunne beregnes nøjagtig, fordi en lille fejl (for få decimaler) på **a** vil medføre en stor fejl på **b**.

### DEFINITION Halverings- og fordoblingskonstant

**Hvis  $0 < a < 1$ :** Når x øges med  $T_{1/2}$ , halveres funktionsværdien.

$$T_{1/2} = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad \text{Halverings-konstanten}$$

**Hvis  $a > 1$ :** Når x øges med  $T_2$ , fordobles funktionsværdien.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad \text{Fordoblings-konstanten}$$

### BEVIS

$$2 \cdot f(x) = f(x + T_2) \Leftrightarrow 2 \cdot b \cdot a^x = b \cdot a^{x+T_2} \Leftrightarrow 2 = \frac{b \cdot a^{x+T_2}}{b \cdot a^x} = a^{T_2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln(a^{T_2}) = T_2 \cdot \ln(a) \Leftrightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad \text{q.e.d.}$$

**EKSEMPEL:** Landbrug:  $(1960; 196 \cdot 10^3)$ ,  $(2004; 44 \cdot 10^3)$

$$a = \left( \frac{196}{44} \right)^{\frac{1}{2004-1960}} = 0,9666 \quad , \quad T_{1/2} = -\frac{\log(2)}{\log(0,9666)} \approx 20 \text{ år}$$

I 1980 var der altså  $\frac{196 \cdot 10^3}{2} = 98 \cdot 10^3$  landbrug i Danmark.

# LOGARITME-FUNKTIONER

BEMÆRKNING **Navngivning af Logaritmefunktioner**

En logaritmefunktion med grundtallet **a** kaldes:  $\log_a(x)$

*Logaritme og eksponential-funktioner er tæt knyttet sammen.*

**DEFINITION Logaritmefunktion**

For en logaritmefunktion med grundtallet **a**:

$$y = \log_a(x) \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

Gælder:  $a^y = x$

**BEMÆRK:**  $Dm(y) = \mathbb{R}_+$  og  $Vm(y) = \mathbb{R}$

EKSEMPLER:

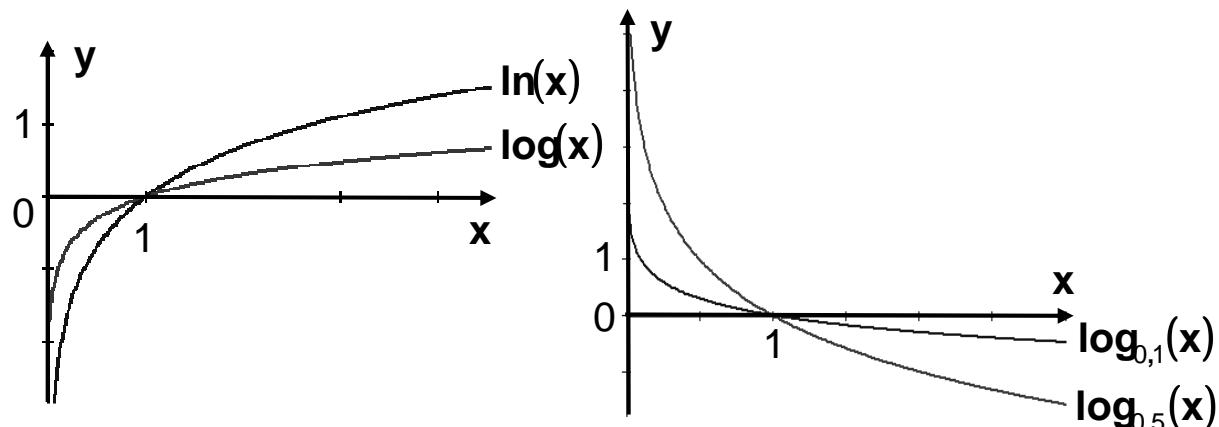
$$\log_{10}(0,01) = -2 \quad \text{da} \quad 10^{-2} = 0,01, \quad \log_2(8) = 3 \quad \text{da} \quad 2^3 = 8$$

SÆTNING **Monotoni-forhold**

For en logaritmefunktion  $f(x) = \log_a(x)$  gælder følgende:

- $\begin{cases} 0 < a < 1 & : f(x) \text{ er aftagende} \\ a = 1 & : \text{Ikke defineret} \\ a > 1 & : f(x) \text{ er voksende} \end{cases}$
- $f(1) = 0$  og  $f(a) = 1$

EKSEMPLER:



**DEFINITION Naturlig og sædvanlig logaritmefunktion**

To ofte benyttede logaritmefunktioner er:

Den naturlige: **In(x)** som har grundtallet **a = e ≈ 2,718**

Den sædvanlige: **log(x)** som har grundtallet **a = 10**

I 1614 udgav den skotske matematiker, fysiker og astronom John Napier bogen ”Mirifici Logarith-morum Canonis Descriptio”, hvori han beskrev logaritme-tabeller.

Det er lettere at addere end at multiplicere. Da funktionalligningen netop laver et gange-stykke om til et plus-stykke, var logaritme-regning meget populært før lommeregnerens opfindelse.

**SÆTNING Logaritme regneregler**

a)  $\log_a(1) = 0$

b)  $\log_a(a) = 1$

c)  $\log_a(a^x) = x$

d)  $a^{\log_a(x)} = x$

e)  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

f)  $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$  Funktionalligningen

g)  $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$

h)  $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

i)  $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(x)$

### BEVIS for regel f

Fra definitionen har vi:  $x = a^y$  hvor  $y = \log_a(x)$

$$\begin{aligned} \log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) && \text{Fra definitionen} && \text{Potens regneregel} \\ &= \log_a(a^{y_1+y_2}) && \text{Regel c} && \\ &= y_1 + y_2 = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) && && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### BEVIS for regel g

$$\begin{aligned} \log_a(x_1) &= \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) && \text{Brøk-regneregel} && \text{Regel f} \\ &\Leftrightarrow \\ \log_a(x_1) &= \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \log_a(x_2) && \text{Isolerer} && \\ &\Leftrightarrow \\ \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a(x_1) - \log_a(x_2) && && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### BEVIS for regel h

$$\begin{aligned} \log_a(x^n) &= \log_a([a^y]^n) && \text{Fra definitionen} && \text{Potensregneregel} \\ &= n \cdot y = n \cdot \log_a(x) && \text{Regel c} && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### BEVIS for regel e

Fra definitionen har vi:  $x = a^{y_1}$  hvor  $y_1 = \log_a(x)$   
 $x = e^{y_2}$  hvor  $y_2 = \ln(x)$

$$\begin{aligned} a^{y_1} = e^{y_2} &\Leftrightarrow \ln(a^{y_1}) = \ln(e^{y_2}) && \text{Regel h} \\ &\Leftrightarrow y_1 \cdot \ln(a) = y_2 \cdot \ln(e) \\ &\Leftrightarrow y_1 \cdot \ln(a) = y_2 && \text{Isolerer} \\ &\Leftrightarrow y_1 = \frac{y_2}{\ln(a)} && \\ &\Leftrightarrow \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

# POTENS-FUNKTIONER

## DEFINITION Potensfunktion

Potensfunktioners regneregler er givet ved:

$$f(x) = b \cdot x^a \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R} \text{ og } b \in \mathbb{R}_+$$

**BEMÆRK:**  $Dm(f) = \mathbb{R}_+$  og  $Vm(f) = \mathbb{R}_+$

I visse tilfælde kan tal-mængderne dog udvides.

## EKSEMPLER:

$f(x) = b \cdot x$	, $a = 1$	Ligefrem proportionalitet
$g(x) = b \cdot x^2$	, $a = 2$	Grafen kaldes en parabel
$h(x) = b \cdot x^{-1}$	, $a = -1$	Grafen kaldes en hyperbel

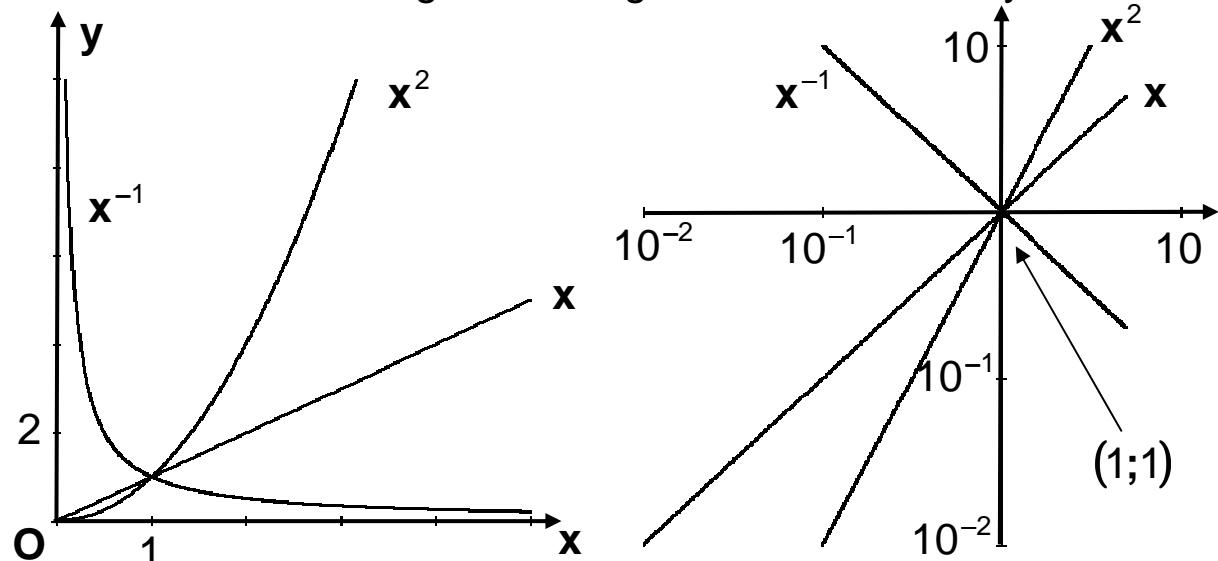
## DEFINITION Dobbelt-logaritmisk koordinatsystem

Hvis både 1.-aksen og 2.-aksen har logaritmisk inddeling kaldes koordinatsystemet for dobbelt-logaritmisk.

## SÆTNING Potensfunktionens graf

I et dobbelt-logaritmisk koordinatsystem bliver grafen for en potens-funktion en ret linie.

## EKSEMPLER: Alm. og dobbeltlogaritmisk koordinatsystem



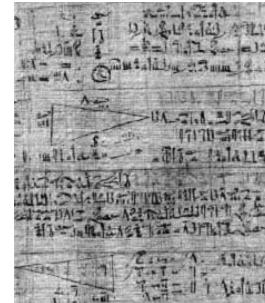
SÆTNING **Monotoni-forhold**

Hvis  $x > 0$  gælder for en potensfunktion  $f(x) = b \cdot x^a$  at:

- $\begin{cases} a < 0 & : f(x) \text{ er aftagende} \\ a = 0 & : f(x) = b \text{ (konstant)} \\ a > 0 & : f(x) \text{ er voksende} \end{cases}$
- $f(1) = b$

På det såkaldte *Rhind papyrus*  
kan man bl.a. læse, hvordan  
ægypterne for ca. 4000 år siden  
regnede med kvadratrødder

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$



SÆTNING **Bestemmelse af a og b**

Kendes koordinaterne til to punkter  $(x_1; y_1)$  og  $(x_2; y_2)$  på  
grafen for en potensfunktion, kan tallene **a** og **b** findes ved:

$$a = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{\ln(x_1) - \ln(x_2)} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

**BEVIS**

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_1 = b \cdot x_1^a \\ y_2 = b \cdot x_2^a \end{cases} &\Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{b \cdot x_1^a}{b \cdot x_2^a} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a && \text{In på begge sider log-regneregel h} \\ \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) &= a \cdot \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) && \text{Isolerer a log-regneregel g} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\ln(y_1) - \ln(y_2)}{\ln(x_1) - \ln(x_2)} && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

EKSEMPEL: Effekttab pga. luftmodstand på en personbil

$$(x_1; y_1) = (60 \text{ km/t}; 5 \text{ kW}) \quad (x_2; y_2) = (110 \text{ km/t}; 23 \text{ kW})$$

$$a = \frac{\ln(5) - \ln(23)}{\ln(60) - \ln(110)} = 2,23 \quad , \quad b = \frac{5}{60^{2,229}} = 5,45 \cdot 10^{-4}$$

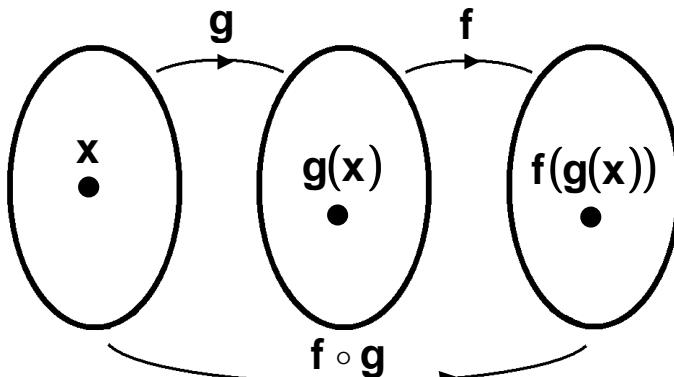
$$f(x) = 5,45 \cdot 10^{-4} \cdot x^{2,23}$$

# SAMMENSAT FUNKTION

DEFINITION **Sammensat funktion (funktion af funktion)**

Hvis man i funktionen  $f(x)$  erstatter  $x$  med en funktion  $g(x)$ , har man en såkaldt *sammensat funktion*, hvilket skrives:

$f(g(x))$  eller  $f \circ g(x)$



EKSEMPEL:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 2 \text{ giver:}$$

$$f \circ g(x) = 2 \cdot (x - 2)^2 + 1 = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 9$$

EKSEMPEL:

En maratonløbers gennemsnitsfart ( $f$ ) afhænger af konditallet ( $k$ ). Konditallet afhænger af træningsmængden ( $t$ ). Gennemsnitsfarten afhænger altså af træningsmængden:

$$f(k(t))$$

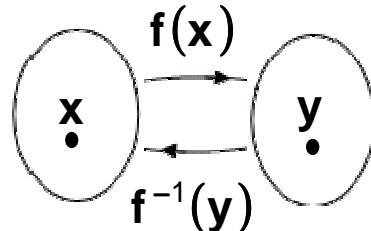


# OMVENDT FUNKTION

DEFINITION **Omvendt funktion (Invers-funktion)**

Er en funktion  $f(x)$  enten voksende eller aftagende i hele definitionsmængden (d.v.s. injektiv), har den en omvendt funktion  $f^{-1}(y)$ . Der gælder:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



**BEMÆRK:** -1 er et symbol for omvendt funk. ikke en potens.

SÆTNING **Regneregel**

For funktionen  $f$  og dens omvendte funktion  $f^{-1}$  gælder:

$$k = f \circ f^{-1}(k) = f^{-1} \circ f(k)$$

**BEVIS**

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \\ x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \end{cases} \quad \text{q.e.d.}$$

SÆTNING **Bestemmelse af den omvendte funktion**

Den omvendte funktion  $f^{-1}$  findes ved at isolere  $x$  i:  $y = f(x)$

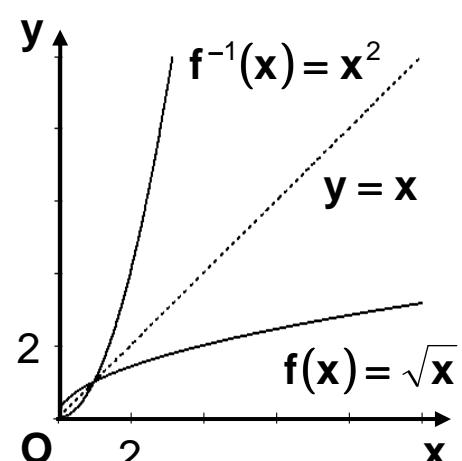
\$EKSEMPEL:

$$f(x) = 2 \cdot x \Leftrightarrow y = 2 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

SÆTNING **Grafen**

Grafen for  $f^{-1}(x)$  fås ved at spejle grafen for  $f(x)$  i linien  $y = x$

EKSEMPEL:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$



$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2$$

## 2. GRADS-LIGNING

DEFINITION **2. grads-ligning**

En 2. grads-ligning kan skrives på formen:

$$\mathbf{A} \cdot x^2 + \mathbf{B} \cdot x + \mathbf{C} = 0$$

**A, B og C** er konstanter. **A** ≠ 0

EKSEMPEL:  $x^2 = 9$  kan omskrives til  $x^2 - 9 = 0$

$$\mathbf{A} = 1, \mathbf{B} = 0 \text{ og } \mathbf{C} = -9$$

Du skal nu lære at løse andengrads-ligninger. Allerede for 3000 år siden havde babylonerne (i Irak) en måde til dette, der ligner den løsningsformel, du skal lære.



DEFINITION **Løse en ligning**

At løse en ligning med en ubekendt (x) vil sige at finde de værdier af x, som gør ligningen sand.

EKSEMPEL:  $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Det sidste kan også skrives  $x = \pm 3$

EKSEMPEL:  $x^2 + 2x = 0$

x sættes uden for parentes  $x(x + 2) = 0$

Man ser umiddelbar, at venstre siden er nul hvis:

$$x = 0 \vee x = -2$$

SÆTNING

**Antal løsninger**Antallet af løsninger afhænger af diskriminanten (**D**)

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

**D < 0:** Ingen løsninger**D = 0:** 1 løsning**D > 0:** 2 løsningerEKSEMPEL:  $2 \cdot x^2 - 1 = 0$        $A = 2$ ,  $B = 0$  og  $C = -1$ 

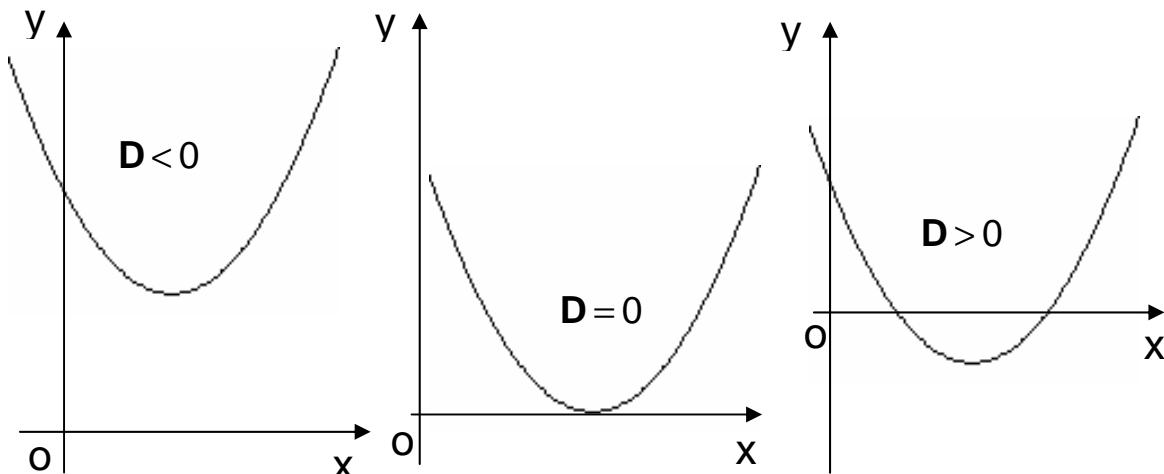
$$D = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8 \quad \text{d.v.s. 2 løsninger.}$$

EKSEMPEL:  $-3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 5 = 0$        $A = -3$ ,  $B = 4$  og  $C = -5$ 

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) = -44 \quad \text{d.v.s. 0 løsninger.}$$

EKSEMPEL:  $-x^2 = 0$        $A = -1$ ,  $B = 0$  og  $C = 0$ 

$$D = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 0 \quad \text{d.v.s. 1 løsning.}$$



SÆTNING

**Den generelle løsnings-formel**2. grads-ligningen  $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$ , har løsningerne:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2 \cdot A}$$

**BEVIS**

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0 \Leftrightarrow$$

træk C fra på begge sider

$$A \cdot x^2 + B \cdot x = -C \Leftrightarrow$$

Gang med 4A på begge sider

$$4 \cdot A^2 \cdot x^2 + 4 \cdot A \cdot B \cdot x = -4 \cdot A \cdot C \Leftrightarrow$$

Læg  $B^2$  til på begge sider – så er højresiden lig diskrimi-  
nanten (D)

$$4 \cdot A^2 \cdot x^2 + B^2 + 4 \cdot A \cdot B \cdot x = B^2 - 4 \cdot A \cdot C \Leftrightarrow$$

Omskriv venstresiden

$$(2 \cdot A \cdot x)^2 + B^2 + 2 \cdot (2 \cdot A \cdot x) \cdot B = D \Leftrightarrow$$

Brug formlen  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 

$$(2 \cdot A \cdot x + B)^2 = D \Leftrightarrow$$

Venstresiden er altid større end eller lig nul, det skal  
højresiden også være, ellers er der ingen løsning.**DET FORUDSÆTTES AT  $D \geq 0$** Tag kvadratroden på begge sider – Der er to løsninger ( $\pm$ )

$$2 \cdot A \cdot x + B = \pm \sqrt{D} \Leftrightarrow$$

Træk B fra på begge sider

$$2 \cdot A \cdot x = -B \pm \sqrt{D} \Leftrightarrow$$

Divider med 2A på begge sider

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2 \cdot A} \quad \text{q.e.d.}$$

EKSEMPEL:  $2x^2 - 1 = 0 \quad A = 2, B = 0 \text{ og } C = -1$ 

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7071$$

**DEFINITION Kamufleret 2.gradsligning**

En kamufleret 2. gradsligning kan skrives på formen:

$$A \cdot x^{2 \cdot n} + B \cdot x^n + C = 0 \quad \text{hvor } A \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

EKSEMPEL:  $2 \cdot x^6 + 3 \cdot x^3 + 8 = 0 \quad A = 2, B = 3, C = 8, n = 3$

**SÆTNING Løsning af en kamufleret 2. gradsligning**

Den kamuflerede 2. gradsligning

$$A \cdot x^{2 \cdot n} + B \cdot x^n + C = 0$$

Kan omskrives til

$$A \cdot u^2 + B \cdot u + C = 0 \quad \text{hvor } u = x^n$$

Denne ligning løses (på almindeligvis) m.h.t. den ukendte **u**. Derefter kan de endelige løsninger (x-værdierne) findes da:

$$u = x^n$$

EKSEMPEL:  $x^6 - 5 \cdot x^3 + 4 = 0 \quad A = 1, B = -5, C = 4$

omskrives til:  $u^2 - 5 \cdot u + 4 = 0 \quad \text{hvor } u = x^3$

Diskriminantens er:  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

Løsning m.h.t. **u**:

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2 \cdot A} = \frac{-(-5) \pm 3}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad u = 4 \vee u = 1$$

Løsning m.h.t. **x**:

$$x^3 = 4 \quad \vee \quad x^3 = 1$$

$$\underline{\underline{x = (4)^{\frac{1}{3}}} \approx 1,587 \quad \vee \quad x = 1}$$

# LINEÆRT LIGNINGSSYSTEM

DEFINITION **To lineære ligninger med to ubekendte**

Et ligningssystem med 2 lineære ligninger med 2 ubekendte ( $x$  og  $y$ ) kan skrives på formen:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}_2 \end{cases}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1$ , og  $\mathbf{c}_2$  er konstanter.

EKSEMPEL:  $\begin{cases} 3 \cdot \mathbf{x} + 6 \cdot \mathbf{y} = 9 \\ 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} = 6 \end{cases}$  hvor  $\mathbf{a}_1 = 3, \mathbf{b}_1 = 6, \mathbf{c}_1 = 9$   
 $\mathbf{a}_2 = 4, \mathbf{b}_2 = 5, \mathbf{c}_2 = 6$

DEFINITION **Løse et ligningssystem**

At løse et ligningssystem vil sige at finde værdien af de ubekendte så alle ligninger i systemet er opfyldt på samme tid.

METODE **Indsættelses-metoden (substitutionsmetoden)**

Trin 1: Isoler  $x$  i *ligning 1*

Trin 2: Indsæt udtrykket for  $x$  i *ligning 2* og find  $y$ .

Trin 3: Indsæt den fundne  $y$ -værdi i udtrykket for  $x$  og find  $x$ .

FORKLARENDE EKSEMPEL:

$$\begin{cases} 3 \cdot \mathbf{x} + 6 \cdot \mathbf{y} = 9 \\ 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} = 6 \end{cases} \stackrel{\text{TRIN 1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{x} = 3 - 2 \cdot \mathbf{y} \\ 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} = 6 \end{cases} \stackrel{\text{TRIN 2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{x} = 3 - 2 \cdot \mathbf{y} \\ 4 \cdot (3 - 2 \cdot \mathbf{y}) + 5 \cdot \mathbf{y} = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = 3 - 2 \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{y} = 2 \end{cases} \stackrel{\text{TRIN 3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathbf{x} = 3 - 2 \cdot 2 \\ \mathbf{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} = -1 \\ \mathbf{y} = 2 \end{cases}$$

**METODE Den grafiske metode**

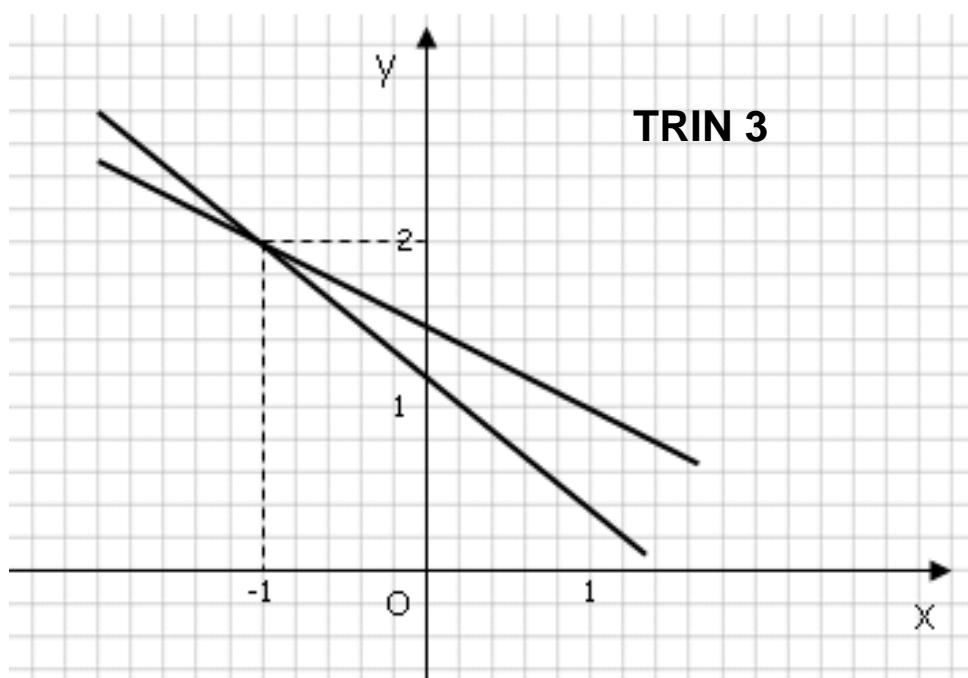
Trin 1: Isoler  $y$  i *ligning 1* og tegn grafen.

Trin 2: Isoler  $y$  i *ligning 2* og tegn grafen.

Trin 3: Skæringspunktet  $(x,y)$  mellem graferne er løsningen.

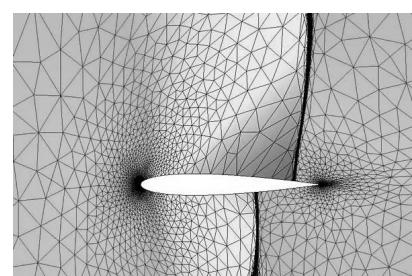
**FORKLARENDE EKSEMPEL:**

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 6 \cdot y = 9 \\ 4 \cdot x + 5 \cdot y = 6 \end{cases} \quad \text{TRIN } 1+2 \iff \begin{cases} y = -0,5 \cdot x + 1,5 \\ y = -0,8 \cdot x + 1,2 \end{cases}$$


**BEMÆRKNING:**

Når man arbejder med ligningssystemer med mere end 2-3 ubekendte, vil regnearbejdet hurtigt blive meget omfattende. Derfor kan man med fordel bruge et computerprogram eller en avanceret lommeregner til beregningerne.

Inden for fysikken, f.eks. aerodynamik, har man ofte ligningssystemer, hvor der er mange tusinde ligninger med lige så mange ubekendte.



**DEFINITION Tre lineære ligninger med tre ubekendte**

Et ligningssystem med 3 lineære ligninger med 3 ubekendte (x, y og z) kan skrives på formen:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot x + \mathbf{b}_1 \cdot y + \mathbf{c}_1 \cdot z = \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot x + \mathbf{b}_2 \cdot y + \mathbf{c}_2 \cdot z = \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{a}_3 \cdot x + \mathbf{b}_3 \cdot y + \mathbf{c}_3 \cdot z = \mathbf{d}_3 \end{cases}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  og  $\mathbf{d}_3$  er konstanter.

EKSEMPEL:

$$\begin{cases} 3 \cdot x - 6 \cdot y + 9 \cdot z = 12 & \mathbf{a}_1 = 3, \mathbf{b}_1 = -6, \mathbf{c}_1 = 9, \mathbf{d}_1 = 12 \\ 4 \cdot x - 12 \cdot y + 8 \cdot z = 4 & \mathbf{a}_2 = 4, \mathbf{b}_2 = -12, \mathbf{c}_2 = 8, \mathbf{d}_2 = 4 \\ 5 \cdot x + 10 \cdot y - 20 \cdot z = 25 & \mathbf{a}_3 = 5, \mathbf{b}_3 = 10, \mathbf{c}_3 = -20, \mathbf{d}_3 = 25 \end{cases}$$

**METODE Store ligningssystemer** (eks. 3 lign. med 3 ubek.)

Trin 1: Isoler x i lign. 1 og indsæt udtrykket for x i lign. 2 og 3

Trin 2: Isoler y i lign. 2 og indsæt udtrykket for y i lign. 3

Trin 3: Find først z, dernæst y og til sidst x

**BEMÆRK:** Metoden kan udbygges til større ligningssystemer

EKSEMPEL:

$$\begin{cases} 3 \cdot x - 6 \cdot y + 9 \cdot z = 12 \\ 4 \cdot x - 12 \cdot y + 8 \cdot z = 4 \\ 5 \cdot x + 10 \cdot y - 20 \cdot z = 25 \end{cases} \stackrel{\text{TRIN } 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \cdot y - 3 \cdot z + 4 \\ 4 \cdot (2 \cdot y - 3 \cdot z + 4) - 12 \cdot y + 8 \cdot z = 4 \\ 5 \cdot (2 \cdot y - 3 \cdot z + 4) + 10 \cdot y - 20 \cdot z = 25 \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{TRIN } 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \cdot y - 3 \cdot z + 4 \\ y = 3 - z \\ 20 \cdot (3 - z) - 35 \cdot z = 5 \end{cases} \stackrel{\text{TRIN } 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

# TRIGONOMETRISKE GRUNDLIGNINGER

## DEFINITION Trigonometriske grundligninger

De trigonometriske grundligninger kan skrives på formen:

$$\sin(x) = k_1 \quad , \quad -1 \leq k_1 \leq 1$$

$$\cos(x) = k_2 \quad , \quad -1 \leq k_2 \leq 1$$

$$\tan(x) = k_3 \quad , \quad -\infty \leq k_3 \leq \infty$$

EKSEMPEL:  $4 \cdot \cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = 0,5 \quad , \quad k = 0,5$

Her vises tre metoder til løsning af en trigonometrisk ligning.

## METODE Graf-metoden

Tegn grafen for den trigonometriske funktion, indtegn linien  $y = k$  og aflæs x-værdierne.

EKSEMPEL:

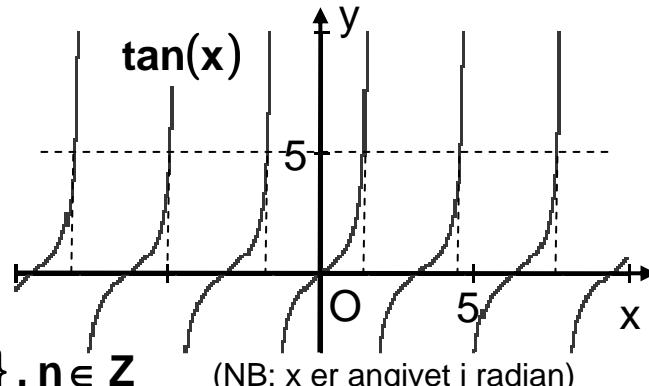
Ligning:  $\tan(x) = 5$

Tegn:  $f(x) = \tan(x)$

Aflæs:  $x$  når  $y = 5$

Det giver:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi \cdot n + 1,3734\}, n \in \mathbb{Z}$$



## METODE CAS-metoden (Computer Algebra System)

Vær opmærksom på, at mange computerprogrammer og lommeregner kun giver én løsning til en trigonometrisk ligning, selvom der i virkeligheden er uendelig mange løsninger.

EKSEMPEL:

Ved at bruge lommeregner-tasten **[TAN<sup>-1</sup>]** (altså arcustangens) kan man finde én løsning til ligningen  $\tan(x) = 0,63$ , nemlig  $x \approx 32^\circ$ .

De andre løsninger findes lettest ved Enhedscirkel-metoden....

**METODE Enhedscirkel-metoden**

Indtegn de to løsninger, til den trigonometriske grundligning, der ligger mellem  $0^\circ$  og  $360^\circ$ . Opskriv derefter alle løsninger.

EKSEMPEL:

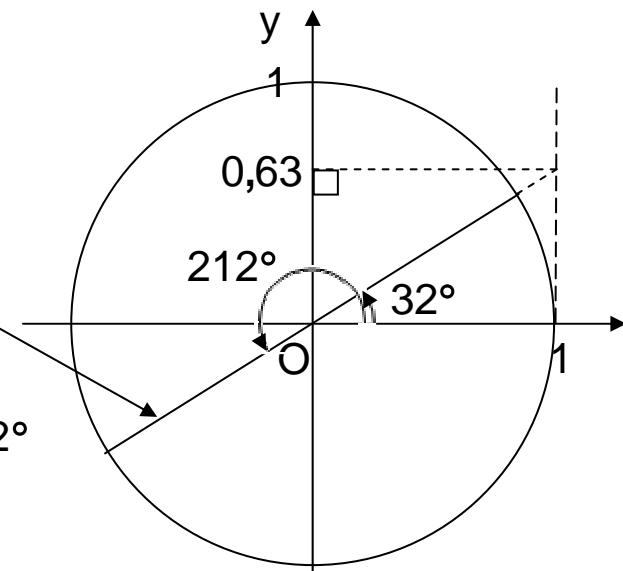
Ligning:  $\tan(x) = 0,63$

Tegn: Tangentlinien  $x = 1$ , linien  $y = 0,63$  og Løsningsliniestykket

Aflæs: De to løsninger:  
 $x_1 = 32^\circ$  og  $x_2 = 212^\circ$

Det giver:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 32^\circ + 360^\circ \cdot n \vee x = 212^\circ + 360^\circ \cdot n\}, n \in \mathbb{Z}$$



Hvorfor hedder 50 *halv-treds*? Du ved sikkert, at 1,5 hedder halv-anden. Faktisk hedder 2,5 halv-tredje, 3,5 halv-fjerde,... Men det bruges ikke rigtigt mere. Men deraf stammer vores udtale:

$$50: \text{Halv-treds} = \text{halv-tredje} \cdot 20 = 2,5 \cdot 20$$

$$60: \text{Treds} = \text{tre} \cdot 20 = 3 \cdot 20$$

$$70: \text{Halv-fjerds} = \text{halv-fjerde} \cdot 20 = 3,5 \cdot 20$$

$$80: \text{Firs} = \text{fire} \cdot 20 = 4 \cdot 20$$

$$90: \text{Halv-fems} = \text{halv-femte} \cdot 20 = 4,5 \cdot 20$$



# SPECIELLE LIGNINGER

SÆTNING      **Eksponentialligning**

Ligningen  $a^x = k$  har løsningen  $x = \frac{\ln(k)}{\ln(a)} = \log_a(k)$ ,  $a, k \in \mathbb{R}_+$

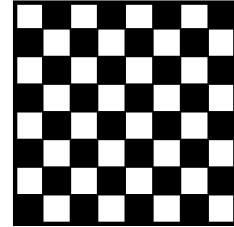
**BEVIS**

$$a^x = k \Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(k) \Leftrightarrow x \cdot \ln(a) = \ln(k) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(k)}{\ln(a)}$$

q.e.d.

EKSEMPEL:  $4,5^x = 6 \Rightarrow x = \frac{\ln(6)}{\ln(4,5)} = 1,1913$

En (klog) mand tilbød kejseren et smukt skakbræt.  
I bytte bad han om 1 riskorn for det første felt på  
brættet, 2 for det andet, 4 for det tredje osv.  
Kejseren syntes om tilbudet og ... På det sidste  
felt skulle ligge flere ris, end der var i hele verden.



SÆTNING      **Logaritmisk ligning**

Ligningen  $\log_a(x) = k$  har løsningen  $x = a^k$ ,  $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

EKSEMPEL:  $\log_2(x) = 64 \Rightarrow x = 2^{64} = 1,84 \cdot 10^{19}$

SÆTNING      **Potensligning**

Ligningen  $x^a = k$  har løsningen  $x = k^{\frac{1}{a}}$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $k, x \in \mathbb{R}_+$

EKSEMPEL:  $x^{-1,2} = 7,3 \Rightarrow x = 7,3^{\frac{1}{-1,2}} = 0,1908$

# ULIGHED

## DEFINITION **Ulighed**

En ulighed er to matematiske udtryk forbundet med et af de fire ulighedstegn ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  eller  $\geq$ ).

EKSEMPLER:  $3 \cdot 4^{5 \cdot x} > 6$  ,  $3 \cdot x - 1 \leq 6$  ,  $\sin(x) + 2 \leq x^2 - 1$

## SÆTNING **Regler for løsning af en ulighed**

Man må:

- 1: Lægge samme tal til på hver side af lighedstegnet.
- 2: Trække samme tal fra på hver side af lighedstegnet.
- 3: Gange med samme *positive tal* på hver side af ulighedsstegnet.
- 4: Gange med samme *negative tal* på hver side af ulighedsstegnet, HVIS man samtidig *vender ulighedstegnet*.
- 5: Dividere med samme *positive tal* på hver side af ulighedsstegnet.
- 6: Dividere med samme *negative tal* på hver side af ulighedsstegnet, HVIS man samtidig *vender ulighedstegnet*.

EKSEMPEL:

$$\begin{aligned} -3 \cdot x - 6 &> -x + 4 && \text{Uligheden} \\ -3 \cdot x - 6 + 6 &> -x + 4 + 6 && \text{Regel 1} \\ -3 \cdot x + x &> -x + 10 + x && \text{Regel 1} \\ \frac{-2 \cdot x}{-2} &< \frac{10}{-2} && \text{Regel 6 (bemærk } > \text{ vendes til } <) \\ \underline{\underline{x < -5}} & && \text{Løsningen} \end{aligned}$$

# BRØK-ULIGHED

## DEFINITION Brøk-ulighed

En brøk-ulighed kan skrives på formen

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad \text{eller} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

EKSEMPEL: Uligheden  $\frac{1+2 \cdot x}{2-x} \leq 3$  kan omskrives via

$$\frac{1+2 \cdot x}{2-x} - 3 \leq 0 \quad \text{og} \quad \frac{1+2 \cdot x - 3 \cdot (2-x)}{2-x} \leq 0 \quad \text{til} \quad \frac{5 \cdot x - 5}{2-x} \leq 0$$

## METODE Løsning af en brøk-ulighed

1. Løs ligningerne  $f(x) = 0$  og  $g(x) = 0$ .
2. Find  $f(x)$  og  $g(x)$ 's fortegn afhængig af  $x$ -værdien.
3. Brug fortegnsreglerne til at bestemme brøkens fortegn.  
Husk: Division med nul er ikke tilladt.
4. Sammenlign brøkens fortegn med brøk-ulighedens krav.

EKSEMPEL:

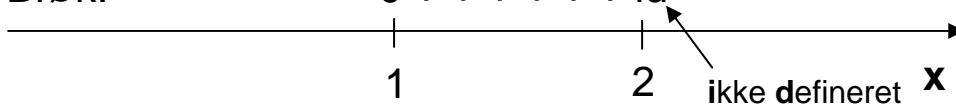
$$\frac{5 \cdot x - 5}{2 - x} \leq 0 \quad \text{Brøk-uligheden}$$

**Trin 1:**  $5 \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$  Tælleren lig nul

**Trin 1:**  $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$  Nævneren lig nul

**Trin 2:** Tæller: ----- 0 + + + + + + + + + + + + + + + +

**Trin 2:** Nævner: + + + + + + + + + + 0 -----

**Trin 3:** Brøk: ----- 0 + + + + + id -----  


**Trin 4:**  $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee x > 2\}$

# TRIGONOMETRISK ULIGHED

## DEFINITION Trigonometrisk ulighed

En trigonometrisk ulighed kan skrives på formen: En trigonometrisk funktion, et ulighedstegn ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  eller  $\geq$ ) og en konstant ( $k$ ).

EKSEMPLER:  $\tan(x) < 2,7$     $\cos(x) \geq 0,47$     $\sin(x) \leq 0,81$

Her vises to metoder til løsning af en trigonometrisk ulighed.

## METODE Graf-metoden

Tegn grafen for den trigonometriske funktion, indtegn linien  $y = k$  og aflæs de x-intervaller, hvor uligheden er sand.

EKSEMPEL:

Ulighed:

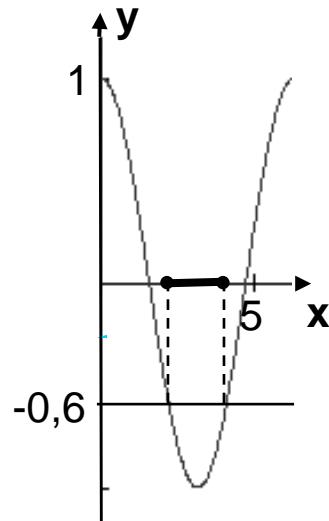
$$\cos(x) \leq -0,6, \quad G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \cdot \pi\}$$

Tegn:  $f(x) = \cos(x)$

Tegn:  $y = -0,6$

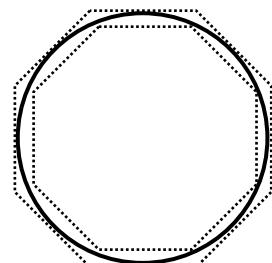
Ved aflæsning fås løsningen:

$$x \in [2,21; 4,07] \quad (\text{NB: } x \text{ er angivet i radian})$$



Den græske videnskabsmand og ingeniør Archimedes (287 – 212 f.v.t.) fandt at  $\pi \approx \frac{22}{7}$  ved at se på omkredsen (**O**) af et indskrevet og et omskrevet polygon og derudfra opstille (dobbelt) uligheden:

$$O_{\text{indsk.polygon}} < 2 \cdot \pi \cdot r < O_{\text{omsk.polygon}}$$



METODE **Enhedscirkel-metoden**

Find løsningerne til den trigonometriske *ligning*. Aflæs de vinkel-intervaller der gør *uligheden* sand.

**FORKLARENDE EKSEMPEL:**

BEMÆRK:  $x$  angiver her vinklen; altså *ikke* abscisse aksen.

Ulighed:  $\tan(x) > 0,63$

Grundmængde:

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0^\circ \leq x < 360^\circ\}$$

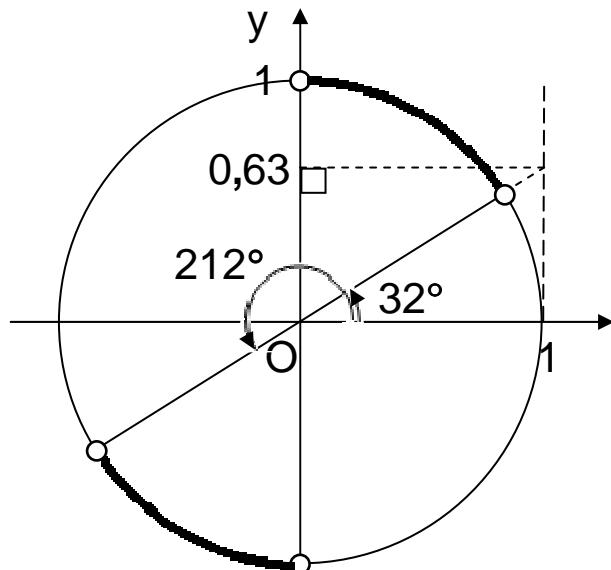
Ligning:  $\tan(x) = 0,63$

Løsninger til ligningen:

$$x = 32^\circ \quad \vee \quad x = 212^\circ$$

Det ses, at løsningen er:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 32^\circ < x < 90^\circ \vee 212^\circ < x < 270^\circ\}$$



**FORKLARENDE EKSEMPEL:**

BEMÆRK:  $x$  angiver her vinklen; altså *ikke* abscisse aksen.

Ulighed:  $\sin(x) \geq 0,53$

Grundmængde:

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0^\circ \leq x < 360^\circ\}$$

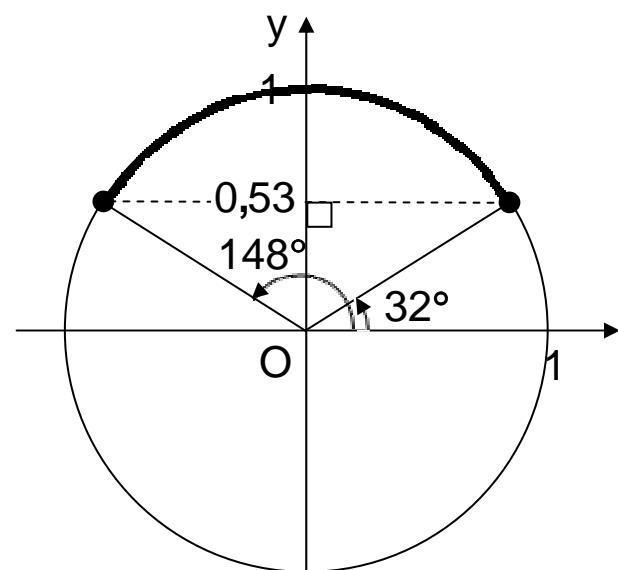
Ligning:  $\sin(x) = 0,53$

Løsninger til ligningen:

$$x = 32^\circ \quad \vee \quad x = 148^\circ$$

Det ses, at løsningen er:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 32^\circ \leq x \leq 148^\circ\}$$



# DOBBELT-ULIGHED

## DEFINITION **Dobbelt-ulighed**

Hvis man ved, at værdien af et matematisk udtryk ligger mellem værdien af to andre matematiske udtryk, kan dette skrives som en dobbelt-ulighed.

- To uligheder skrives altså "sammen".

## EKSEMPEL:

$$3 + x > -2 \cdot x - 1 \quad \text{og} \quad 3 + x \leq x^2 - 1$$

kan skrives:  $-2 \cdot x - 1 < 3 + x \leq x^2 - 1$

## METODE **Løsning af dobbelt-ulighed**

En dobbeltulighed løses ved at dele den op i to uligheder og løse disse hver for sig. Derefter findes blandt de to løsninger, de  $x$ -værdier der gør begge uligheder sande.

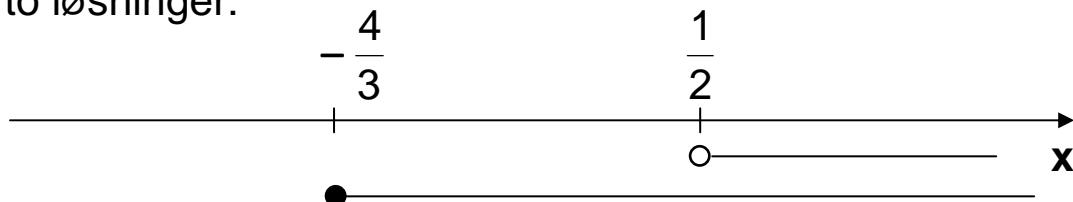
EKSEMPEL:  $-2 \cdot x - 1 \leq 3 + x < 7 \cdot x$

Opdeles i to uligheder:  $-2 \cdot x - 1 \leq 3 + x \quad \wedge \quad 3 + x < 7 \cdot x$

Første ulighed løses:  $-2 \cdot x - 1 \leq 3 + x \Leftrightarrow -3 \cdot x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

Anden ulighed løses:  $3 + x < 7 \cdot x \Leftrightarrow 3 < 6 \cdot x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Det er ofte en god idé at tegne en tal-linie for at få overblik over de to løsninger:



Løsning:  $\text{--- } \circ$

$$\underline{\underline{L = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\}}}$$

# VEKTORBESKRIVELSE

## DEFINITION **Vektor**

Med en vektor kan man angive en *talstørrelse* og en *retning* på samme tid.

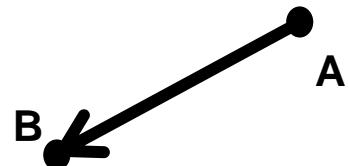
En vektor repræsenteres derfor ofte som en pil:  
Længden angiver talstørrelsen og  
retningen angives ved pilens retning.



EKSEMPLER: En vektor kan f.eks. bruges til at repræsentere en kraft, en hastighed, en forskydning eller meget andet.

## DEFINITION **Begyndelses- og endepunkt**

En vektor har et begyndelsespunkt (A) og et endepunkt (B), som er pilespidserne.



## DEFINITION **Navngivning**

En vektor navngives som hovedregel (i matematik) med *små bogstaver*. Desuden tegnes der en lille pil *eller* streg over bogstavet for at vise, at det er en vektor.

**ā**

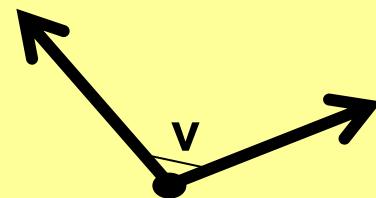


Alternativt kan vektoren få navn efter dens begyndelses- og endepunkt:

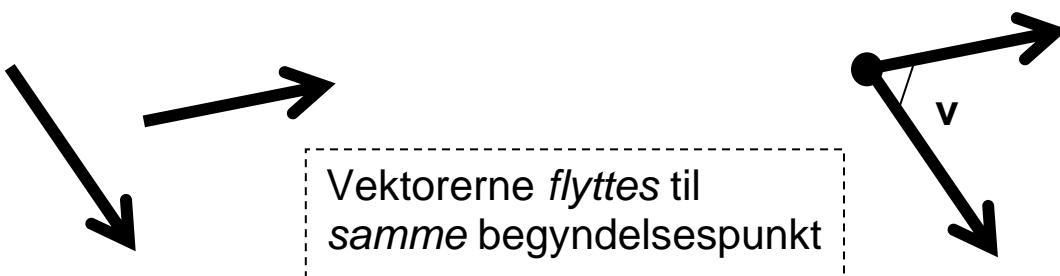
**AB**

### DEFINITION Vinklen mellem to vektorer

Når vinklen ( $v$ ) mellem to vektorer måles, skal de have *samme begyndelsespunkt*.



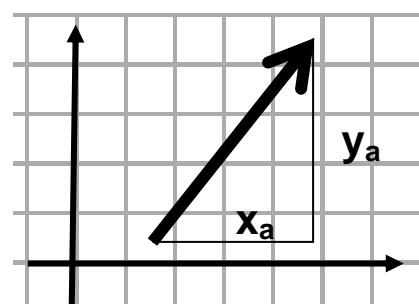
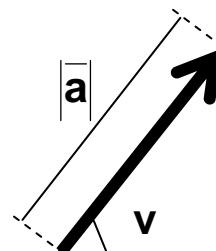
### EKSEMPEL:



### DEFINITION Vektor-beskrivelse

En vektor kan beskrives på to måder:

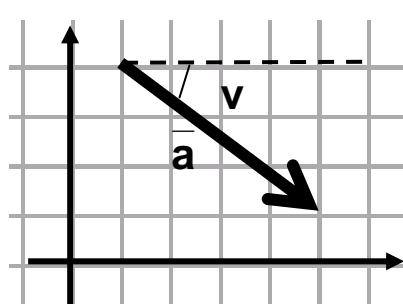
- Ved længden  $|a|$  og vinklen  $v$  til x-aksen
  - regnet positiv mod uret.
- Ved vektorkoordinaterne  $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$



### EKSEMPEL:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|\bar{a}| = 5, \quad v = -36,9^\circ$$



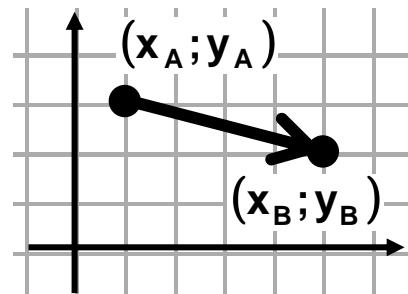
**SÆTNING Vektor mellem punkter**

Er der givet to punkter:

$$\mathbf{A} = (x_A; y_A) \text{ og } \mathbf{B} = (x_B; y_B)$$

Har vektoren  $\overline{AB}$  vektorkoordinaterne:

$$\overline{AB} = \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{cases}$$

**EKSEMPEL:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (1; 3) \\ \mathbf{B} &= (5; 2) \end{aligned} \Rightarrow \overline{AB} = \begin{cases} 5 - 1 \\ 2 - 3 \end{cases} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

**SÆTNING Længde**

En vektors ( $\bar{a}$ ) længde kan findes ved:

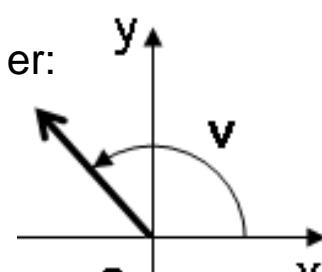
$$|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\text{EKSEMPEL: } \bar{a} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} \approx 4,12$$

**SÆTNING Vinkel**

Vinklen ( $v$ ) mellem en vektor ( $\bar{a}$ ) og x-aksen er:

$$v = \begin{cases} \text{Arc tan}\left(\frac{y_a}{x_a}\right) & \text{hvis } x_a \geq 0 \\ \text{Arc tan}\left(\frac{y_a}{x_a}\right) + 180^\circ & \text{hvis } x_a < 0 \end{cases}$$



$$\text{EKSEMPEL: } \bar{a} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow v = \text{Arc tan}\left(\frac{-1}{4}\right) \approx -14^\circ$$

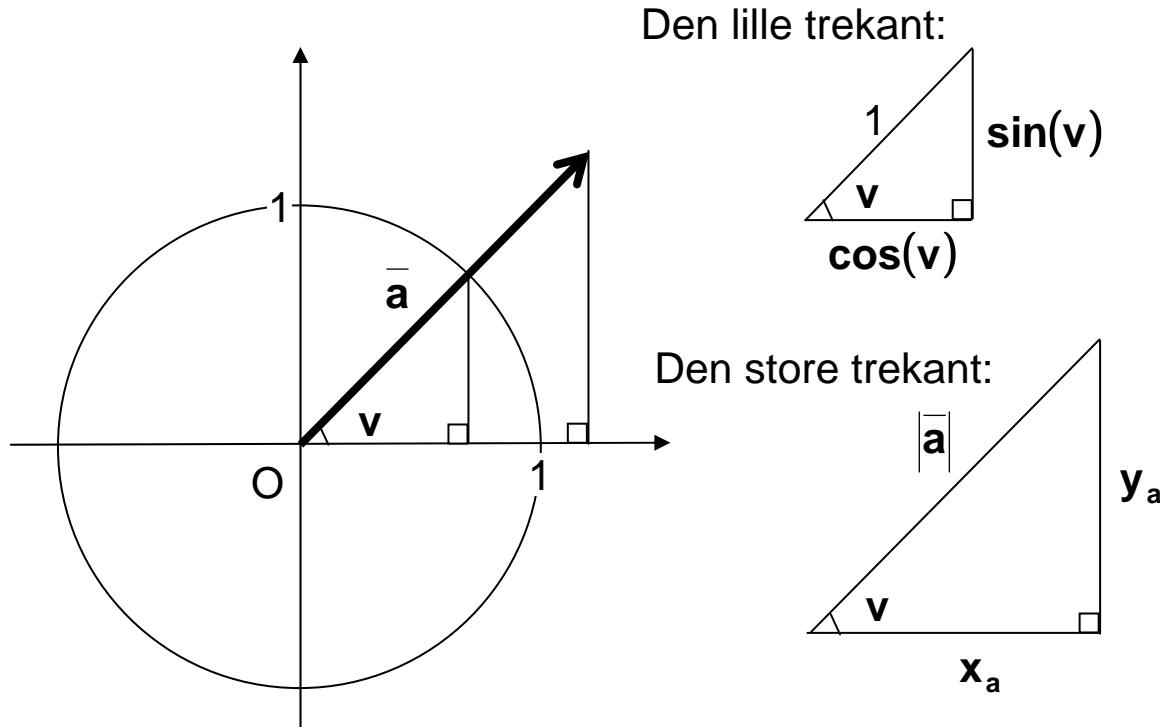
## SÆTNING Vektor-beskrivelse

Er en vektor ( $\bar{a}$ ) beskrevet ved længden ( $|\bar{a}|$ ) og vinklen ( $v$ ) til x-aksen kan vektor-koordinaterne findes ved:

$$\begin{cases} x_a \\ y_a \end{cases} = \begin{cases} |\bar{a}| \cdot \cos(v) \\ |\bar{a}| \cdot \sin(v) \end{cases}$$

### BEVIS

Figuren viser en vektor ( $\bar{a}$ ) i enhedscirklen



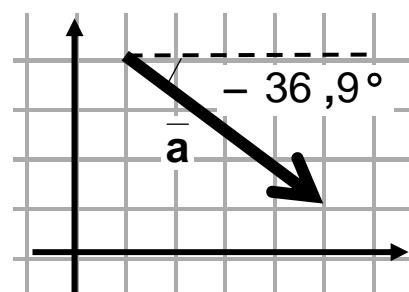
De to trekanter er *ensvinklede* derfor er sideforholdene ens:

$$\frac{x_a}{\cos(v)} = \frac{y_a}{\sin(v)} = \frac{|\bar{a}|}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a \\ y_a \end{cases} = \begin{cases} |\bar{a}| \cdot \cos(v) \\ |\bar{a}| \cdot \sin(v) \end{cases}$$

q.e.d.

### EKSEMPEL:

$$\begin{cases} x_a \\ y_a \end{cases} = \begin{cases} 5 \cdot \cos(-36,9^\circ) \\ 5 \cdot \sin(-36,9^\circ) \end{cases} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

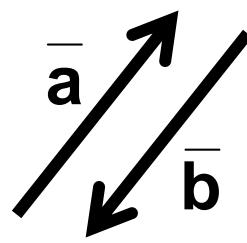


# VEKTOR-ALGEBRA

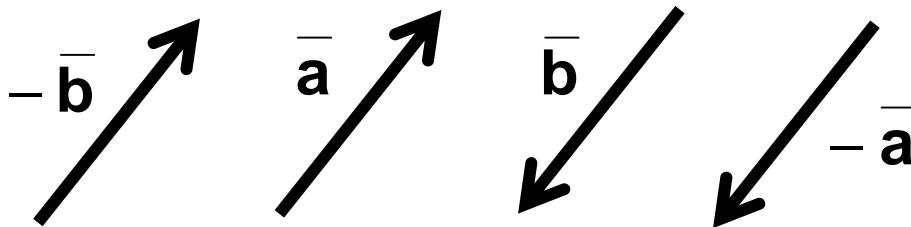
## DEFINITION **Modsatte vektorer**

To vektorer ( $\bar{a}$  og  $\bar{b}$ ) kaldes modsatte, hvis de er lige lange, parallelle og peger hver sin vej.

Den modsatte vektor af  $\bar{a}$  betegnes  $-\bar{a}$ .



## EKSEMPLER:



## SÆTNING **Længde-aændring**

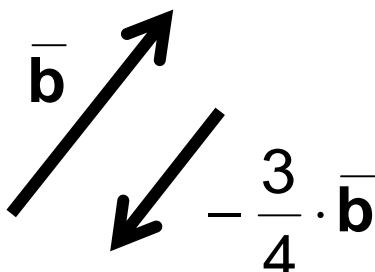
Man ændre en vektors ( $\bar{a}$ ) længde ved at gange vektoren med et tal ( $n$ ), hvilket svarer til at gange vektorkoordinaterne med tallet:

$$n \cdot \bar{a} = \begin{cases} n \cdot x_a \\ n \cdot y_a \end{cases}$$

## EKSEMPEL:

$$\bar{a} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad 2 \cdot \bar{a} = \begin{cases} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

$$\bar{b} = \begin{cases} 0,8 \\ 1,2 \end{cases} \quad -\frac{3}{4} \cdot \bar{b} = \begin{cases} -0,6 \\ -0,9 \end{cases}$$



**DEFINITION Enhedsvektor**

En enhedsvektor ( $\bar{e}$ ) er en vektor, der har længden 1:  $|\bar{e}| = 1$

**SÆTNING Enhedsvektor**

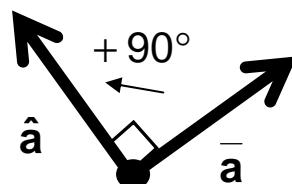
En enhedsvektor ( $\bar{e}_a$ ) med samme retning som en given vektor ( $\bar{a}$ ) har vektor-koordinaterne:

$$\bar{e}_a = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \end{Bmatrix}$$

EKSEMPEL:  $\bar{a} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$        $\bar{e}_a = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{Bmatrix}$

**DEFINITION Tvær-vektor (hat-vektor)**

En vektors ( $\bar{a}$ ) tværvektor ( $\hat{a}$ ) har sammen længde; men er drejet  $+90^\circ$  (mod uret).

**SÆTNING Tvær-vektor (hat-vektor)**

Tværvektoren ( $\hat{a}$ ) til en vektor ( $\bar{a}$ ) er givet ved:

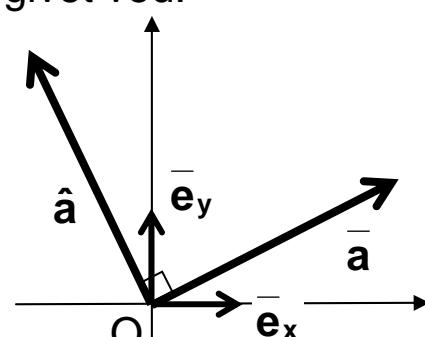
$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \end{Bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{Bmatrix} -y_a \\ x_a \end{Bmatrix}$$

**BEVIS**

$$\bar{a} = x_a \cdot \bar{e}_x + y_a \cdot \bar{e}_y$$

$$\hat{a} = x_a \cdot \hat{e}_x + y_a \cdot \hat{e}_y = x_a \cdot \bar{e}_y + y_a \cdot (-\bar{e}_x) = -y_a \cdot \bar{e}_x + x_a \cdot \bar{e}_y$$

q.e.d.

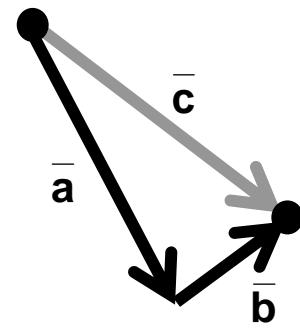


EKSEMPEL:  $\bar{a} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \hat{a} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 5 \end{Bmatrix}$

## SÆTNING Vektor-addition

Summen af to vektorer ( $\bar{a}$  og  $\bar{b}$ ) giver en ny vektor ( $\bar{c}$ ) kaldet *sumvektoren* eller *resultanten*:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$



$\bar{c}$  fremkommer ved at tegne  $\bar{b}$  i forlængelse af  $\bar{a}$  og derefter forbinde  $\bar{a}$ 's begyndelsespunkt med  $\bar{b}$ 's endepunkt.

Sumvektoren ( $\bar{c}$ ) for vektorer ( $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ) kan findes ved at lægge x-koordinaterne sammen og lægge y-koordinaterne sammen:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \begin{cases} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{cases}$$

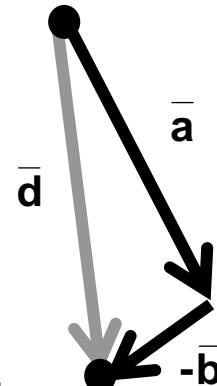
EKSEMPEL:  $\bar{a} = \begin{cases} -3 \\ 8 \end{cases}$ ,  $\bar{b} = \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$   $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \begin{cases} -3 + 9 \\ 8 + 5 \end{cases} = \begin{cases} 6 \\ 13 \end{cases}$

## SÆTNING Vektor-subtraktion

Trækker man en vektor ( $\bar{b}$ ) fra en anden vektor ( $\bar{a}$ ), får man en ny vektor ( $\bar{d}$ ) kaldet *differensvektoren*:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{d}$$

$\bar{d}$  fremkommer ved at tegne  $\bar{b}$ 's *modsatte* vektor i forlængelse af  $\bar{a}$  og derefter forbinde  $\bar{a}$ 's begyndelsespunkt med endepunktet af  $\bar{b}$ 's modsatte vektor.



Differensvektoren ( $\bar{d}$ ) for to vektorer ( $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ) kan findes ved at trække x-koordinaterne fra hinanden og y-koordinaterne fra hinanden:

$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \begin{cases} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{cases}$$

EKSEMPEL:  $\bar{a} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$ ,  $\bar{b} = \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$   $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \begin{cases} 3 - 4 \\ -2 - 6 \end{cases} = \begin{cases} -1 \\ -8 \end{cases}$

## SÆTNING Ligevægt

Vektorene  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  og  $\bar{d}$  er i ligevægt, hvis de "ophæver" hinanden, d.v.s.:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = \bar{0}$$

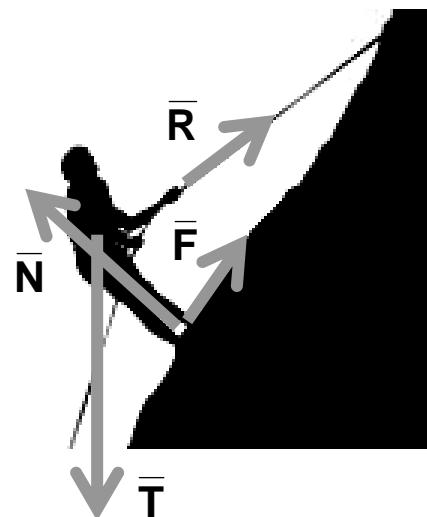
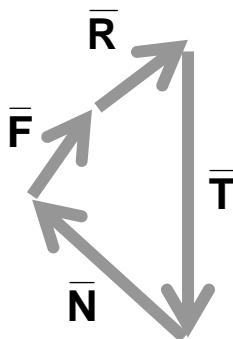
Hvilket med vektorkoordinater svarer til:

$$\begin{cases} x_a + x_b + x_c + x_d \\ y_a + y_b + y_c + y_d \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

**BEMÆRK:**  $\bar{0}$  kaldes *nul-vektoren*; men er egentlig bare et punkt (længden 0 og ingen retning).

EKSEMPEL: En bjergbestiger står stille. De kræfter der påvirker ham er: Tyngdekraften ( $\bar{T}$ ), normalkraften ( $\bar{N}$ ) og friktionskraften ( $\bar{F}$ ) fra bjerget samt kraften fra rebet ( $\bar{R}$ ).

$$\bar{T} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{R} = \bar{0}$$



EKSEMPEL:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad \bar{c} \text{ holder ligevægt, hvis } \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{c} = -\bar{a} - \bar{b} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

# HJÆLPE-STØRRELSER

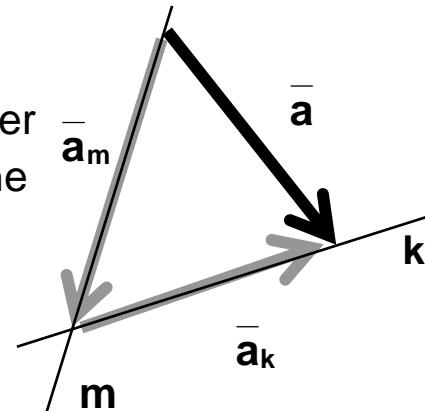
Det kan nogle gange være fordelagtigt at *opløse* én vektor i to vektorer, der peger i bestemte ønskede retninger.

## DEFINITION Komposanter

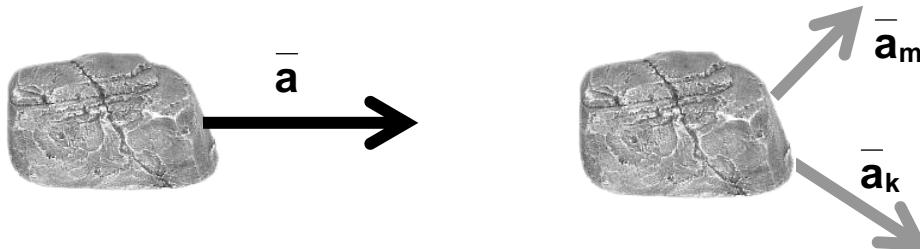
Vektoren  $\bar{a}$  kan oploses i de to vektorer  $\bar{a}_m$  og  $\bar{a}_k$ , der er parallelle med linierne  $m$  og  $k$ .

$$\bar{a} = \bar{a}_m + \bar{a}_k$$

$\bar{a}_m$  og  $\bar{a}_k$  kaldes vektor-komposanter.

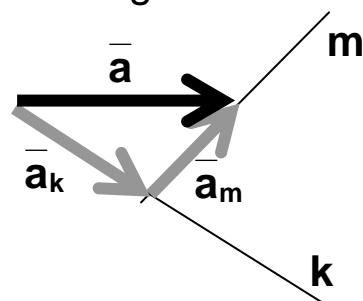


EKSEMPEL: En mand flytter en stor sten. Manden trækker med kraften ( $\bar{a}$ ).



På et tidspunkt får manden hjælp af en anden mand. De trækker i hver sin retning parallel med linierne  $m$  og  $k$ .

For at stenen bliver trukket fremad med den "oprindelige" kraft ( $\bar{a}$ ), skal de to mænd trække med kræfterne  $\bar{a}_m$  og  $\bar{a}_k$ .



## SÆTNING Komposanter

En vektor ( $\bar{a}$ ) opløses i to komposanter ( $\bar{a}_b, \bar{a}_c$ ), der er parallelle med to vektorer ( $\bar{b}, \bar{c}$ ). Komposanterne ( $\bar{a}_b, \bar{a}_c$ ) kan findes ved at løse ligningssystemet:

$$\begin{cases} x_a = p \cdot x_b + q \cdot x_c \\ y_a = p \cdot y_b + q \cdot y_c \end{cases}$$

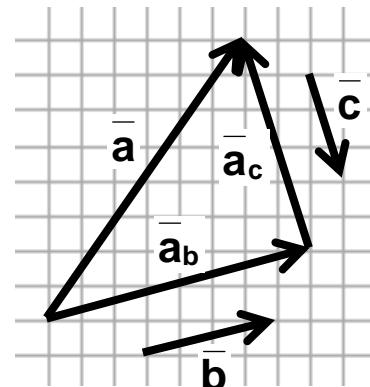
Hvorved tallene  $p$  og  $q$  findes og indsættes i:

$$\begin{cases} \bar{a}_b = p \cdot \bar{b} \\ \bar{a}_c = q \cdot \bar{c} \end{cases}$$

EKSEMPEL:  $\bar{a} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 8 \end{Bmatrix}$   $\bar{b} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$   $\bar{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} 6 = p \cdot 4 + q \cdot 1 \\ 8 = p \cdot 1 + q \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = -2 \end{cases}$$

$$\bar{a}_b = 2 \cdot \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \bar{a}_c = -2 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 6 \end{Bmatrix}$$



## SÆTNING Basis-vektorer

Opløses en vektor ( $\bar{a}$ ) i komposanter, der peger i koordinat-aksernes retning fås:

$$\bar{a} = x_a \cdot \bar{e}_x + y_a \cdot \bar{e}_y$$

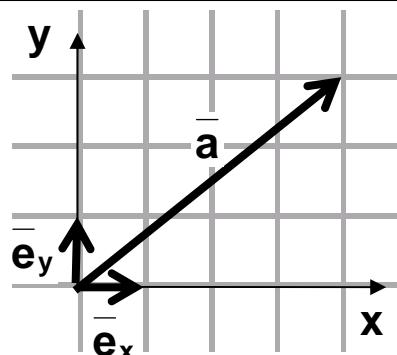
Enhedsvektorerne  $\bar{e}_x$  og  $\bar{e}_y$  er parallelle med koordinat-akserne og kaldes *basisvektorer*.

**BEMÆRK:**  $\bar{e}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$  og  $\bar{e}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

EKSEMPEL:

$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{a} = 4 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 3 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

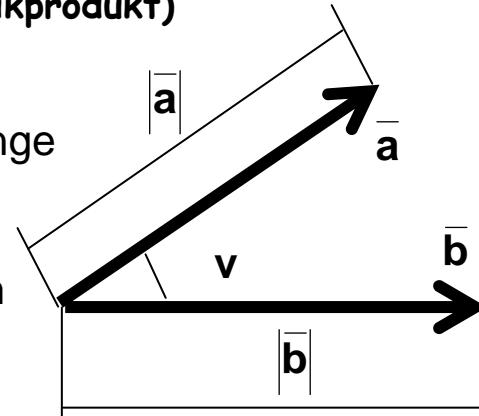


Man kan *ikke* gange to vektorer. Derimod kan man 'prikke' to vektorer, dette kaldes også at finde prikproduktet eller skalarproduktet.

### DEFINITION Skalarprodukt (prikprodukt)

Skalarproduktet af to vektorer er lig længden ( $|\bar{a}|$ ) af den ene vektor gange længden ( $|\bar{b}|$ ) af den anden vektor gange cosinus til vinklen ( $v$ ) mellem vektorerne:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(v)$$



**BEMÆRK:** Skalarproduktet er et tal ikke en vektor.

EKSEMPEL: En legetøjs-and trækkes med en kraft ( $\bar{F}$ ) et stykke ( $\bar{x}$ ) hen ad et gulv. Fra fysikken har vi flg. definition: "Arbejdet er lig kraften i bevægelsesretningen ganget med vejstrækningen", eller med andre 'ord':

$$A = \bar{F} \bullet \bar{x} = |\bar{F}| \cdot |\bar{x}| \cdot \cos(v)$$

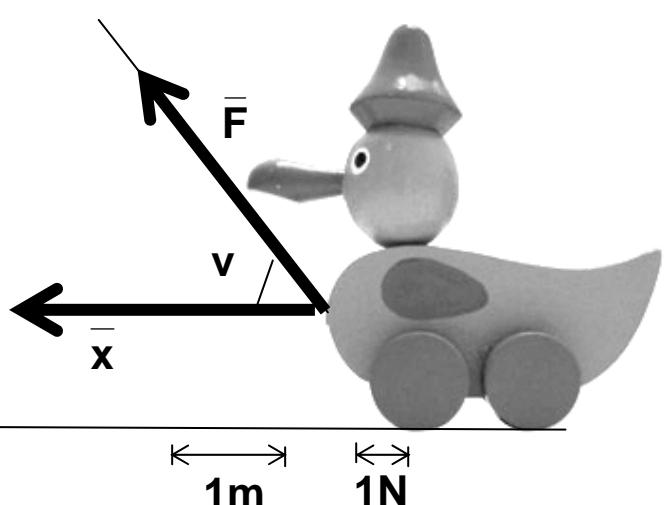
Hvis vi mäter på tegningen

Får vi:

$$|\bar{F}| = 9\text{N}, |\bar{x}| = 2,7\text{m}, v = 50^\circ$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} A &= |\bar{F}| \cdot |\bar{x}| \cdot \cos(v) \\ &= 9\text{N} \cdot 2,7\text{m} \cdot \cos(50^\circ) = \underline{\underline{15,6\text{J}}} \end{aligned}$$



## SÆTNING Skalarprodukt (prikprodukt)

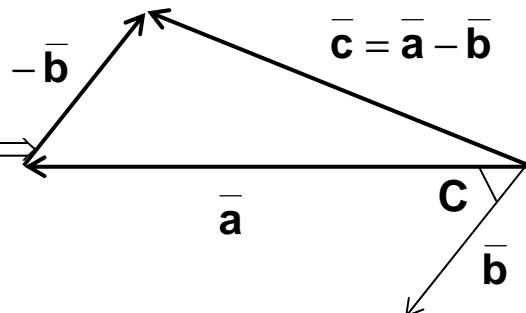
Skalarproduktet af to vektorer ( $\bar{a}$ ) og ( $\bar{b}$ ) kan findes ved:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

### BEVIS

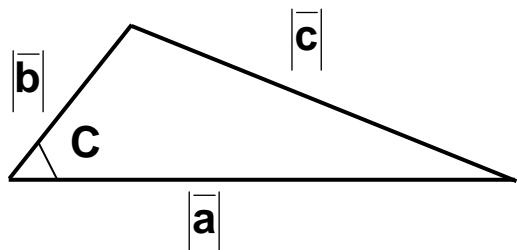
Cosinus-relationen giver

$$\begin{aligned} |\bar{c}|^2 &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(C) \\ |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(C) &= \frac{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{c}|^2}{2} \end{aligned}$$



Fra definitionen har vi:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(C)$$



D.v.s.

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(C) = \frac{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{c}|^2}{2} \\ &= \frac{(x_a^2 + y_a^2) + (x_b^2 + y_b^2) - [(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2]}{2} \\ &= x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

## SÆTNING Vinklen mellem to vektorer

Vinklen ( $v$ ) mellem to vektorer ( $\bar{a}$ ) og ( $\bar{b}$ ) kan findes ved:

$$\cos(v) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

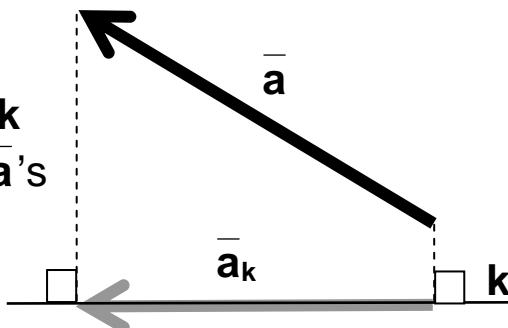
### EKSEMPLER

$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} -7 \\ -4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 6 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-4) = \underline{\underline{-30}}$$

$$\cos(v) = \frac{6 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{6^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2}} \Rightarrow v = \underline{\underline{123,7^\circ}}$$

## DEFINITION **Projektion**

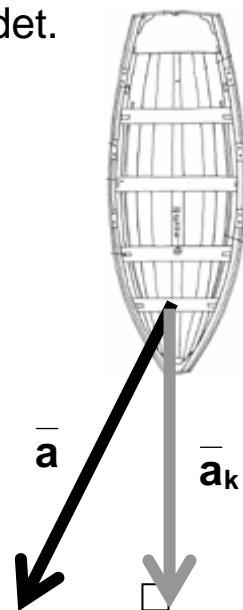
Vektoren  $\bar{a}$ 's projktion på linien  $k$  kaldes  $\bar{a}_k$ .  $\bar{a}_k$  findes ved at føre  $\bar{a}$ 's begyndelsespunkt og endepunkt vinkelret ind på linien  $k$ .



Projektionen ( $\bar{a}_k$ ) er den del af vektoren ( $\bar{a}$ ) der er parallel med linien ( $k$ ).

### EKSEMPEL:

Hesten på billedet trækker en flodpram. Den kraft ( $\bar{a}$ ) hesten trækker med er parallel med rebet. Det er kun 'projektionskraften' ( $\bar{a}_k$ ) der flytter prammen fremad i vandet.



BEMÆRK: Kraften fra roret bevirket, at prammen ikke sejler ind i flodbredten.

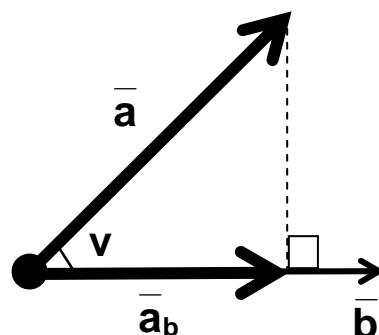


Tyskeren Hermann Grassmann (1809-1877) var lige som sin far lærer på et gymnasium. Han underviste i en lang række fag inden for både naturvidenskab og humaniora. I 1844 udgav han bogen "Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik", hvori han grundlagde vektorregning.

## SÆTNING Projektion

En vektorens ( $\bar{a}$ ) projktion ( $\bar{a}_b$ ) på en anden vektor ( $\bar{b}$ ) kan findes ved:

$$\bar{a}_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \cdot \bar{b}$$



### BEVIS

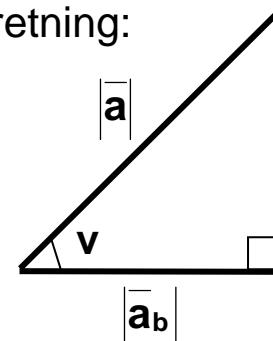
Projktionens længde:

$$\cos(v) = \frac{|\bar{a}_b|}{|\bar{a}|} \Leftrightarrow |\bar{a}_b| = |\bar{a}| \cdot \cos(v) = \frac{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(v)}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Projktionens retning – enhedsvektor i  $\bar{b}$ 's retning:

$$\mathbf{e}_b = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \text{D.v.s.} \quad \bar{a}_b = |\bar{a}_b| \cdot \mathbf{e}_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \cdot \bar{b}$$

q.e.d.



### EKSEMPLER:

$$\bar{a} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -4 \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \bar{a}_b = \frac{7 \cdot 2 + (-4) \cdot 1}{2^2 + 1^2} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}}}$$

**SÆTNING Sted-vektor**

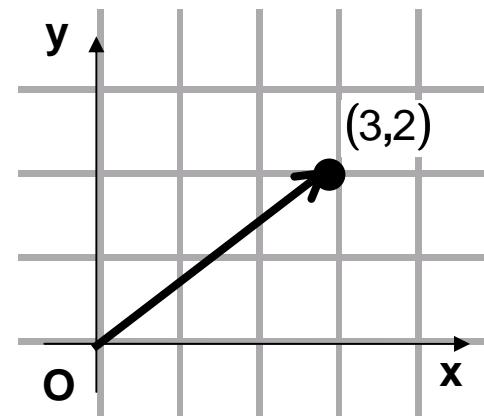
En vektor hvis begyndelsespunkt ligger i koordinatsystemets origo, kaldes en sted-vektor.

Vektor-koordinaterne er altså lig *punkt*-koordinaterne til vektorens endepunkt.

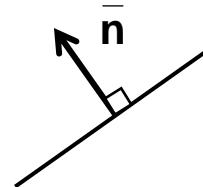
EKSEMPEL:

Vektor-koordinater:  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$

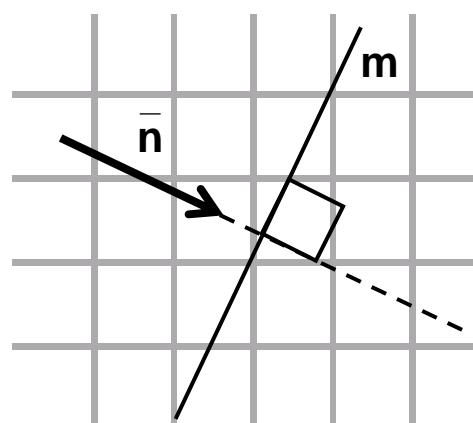
Endepunkts-koordinater: (3,2)

**DEFINITION Normal-vektor**

En vektor, der er *ortogonal* (står vinkelret) på en linie eller en plan kaldes en normalvektor.



EKSEMPEL:



**GRÆNSEVÆRDI****DEFINITION Grænse-værdi**

Når  $x$  nærmer sig tallet  $x_0$ , nærmer funktionen  $f(x)$  sig grænseværdien  $y_0$ . Dette skrives (grænse hedder på latin limes):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ eller } f(x) \rightarrow y_0 \text{ når } x \rightarrow x_0$$

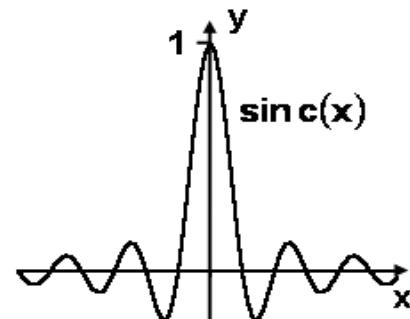
**BEMÆRK:**

- Tallet  $x_0$  behøver ikke at tilhøre  $Dm(f)$ .
- Det behøver ikke at gælde at:  $y_0 = f(x_0)$

**EKSEMPEL: sinc(x)**

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & , x \in \mathbb{R}/\{0\} \end{cases}$$

... Husk man må ikke dividere med 0.

**DEFINITION Grænseværdi fra højre eller venstre**

Hvis  $x$  nærmer sig tallet  $x_0$  fra højre skrives:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$$

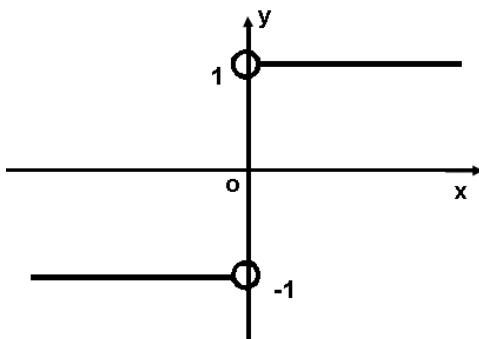
Hvis  $x$  nærmer sig tallet  $x_0$  fra venstre:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

**EKSEMPEL:**

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$



Uendelig ( $\infty$ ) er *ikke* et tal; men en tænkt størrelse hvis værdi er større end ethvert tal.

Grundlæggeren af mængdelæren den tyske matematiker Georg F. L. P. Cantor (1845-1918) interesserede sig for uendelige mængder. Han viste bl.a., at  $0,9999\dots = 1$



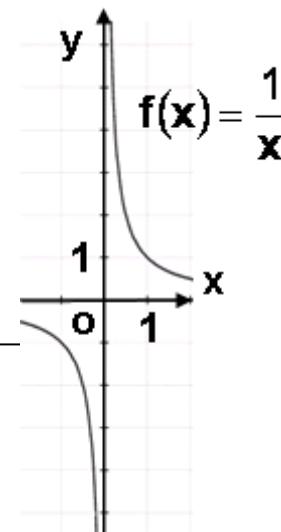
### DEFINITION Uendelig grænseværdi

En funktion  $f(x)$  har "grænseværdien uendelig i tallet  $x_0$ ", hvis funktionsværdien er større end et vilkårligt tal, når blot  $x$  er tilstrækkelig tæt på  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

$f(x)$  har "grænseværdien minus uendelig i tallet  $x_0$ ", hvis  $f(x)$  er mindre end et vilkårligt tal, når blot  $x$  er tilstrækkelig tæt på  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



### EKSEMPEL: Hyperbel

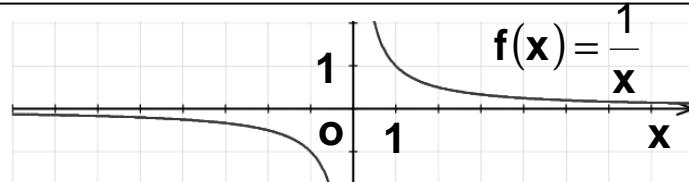
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

### BEMÆRKNING Grænseværdi i uendelig

En funktion kan også have en grænseværdi, når  $x$  går mod uendelig eller minus uendelig.

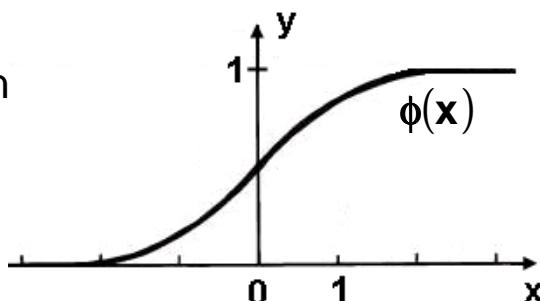
### EKSEMPEL: Hyperbel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



### EKSEMPEL: Fordelingsfunktion

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$$



DEFINITION **Kontinuitet**

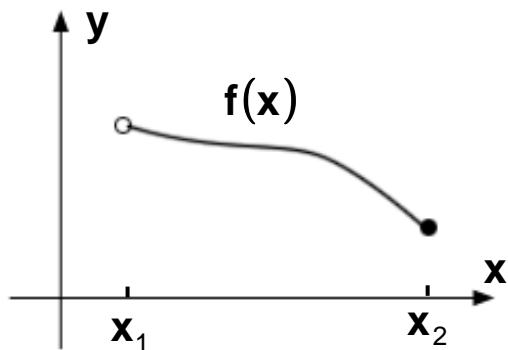
En funktion er kontinuert, hvis grafen er sammenhængende  
– kan tegnes uden at løfte blyanten fra papiret.

D.v.s. hvis:

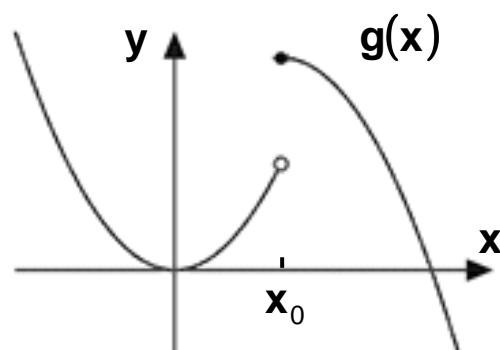
$$Dm(f) = [x_1; x_2]: \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) , \quad \forall x_0 \in Dm(f)$$

**BEMÆRK:** Hvis funktionen ikke er kontinuert, kaldes den *diskontinuert*.

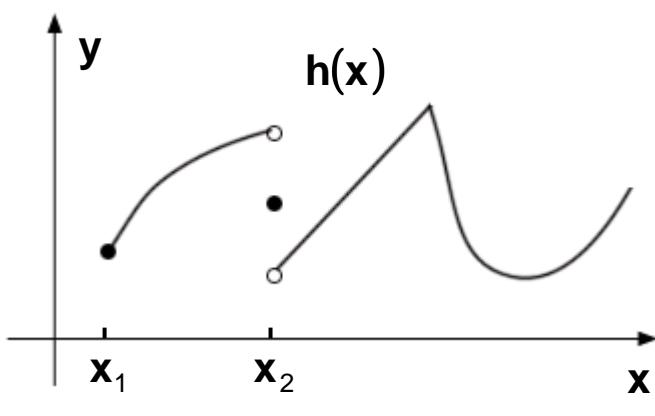
## EKSEMPLER



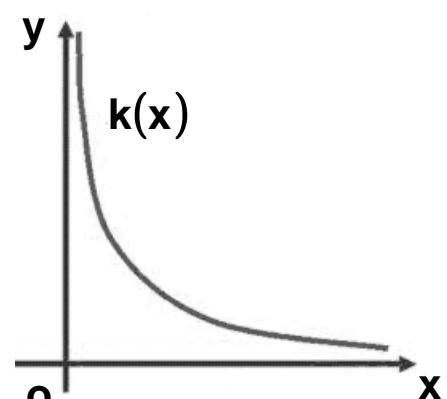
$f(x)$  er kontinuert i  $[x_1; x_2]$



$g(x)$  er kontinuert i  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$   
- altså diskontinuert i  $x = x_0$



$h(x)$  er kontinuert i  $[x_1; x_2] \cup ]x_2; \infty[$   
- altså diskontinuert i  $x = x_2$



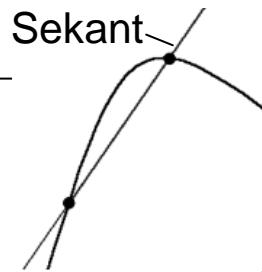
$k(x)$  er kontinuert i  $\mathbb{R}_+$

# DIFFERENTIAALKVOTIENT

DEFINITION

## Sekant

En sekant er en linie, der skærer en graf i to punkter.

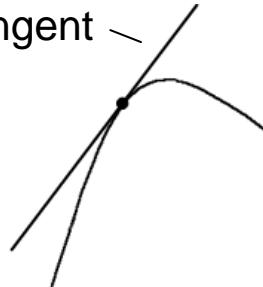


DEFINITION

## Tangent

Ligger en sekants skæringspunkter uendelig tæt på hinanden, kaldes linien en tangent, forudsat grafen ikke har et knæk i punktet.

## Tangent



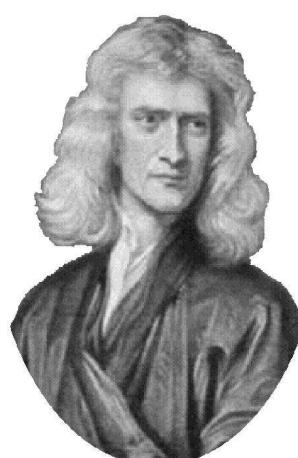
DEFINITION

## Differentialkvotient (den aflede)

Differentialkvotienten i et punkt er lig tangentens stigningstal.  
De mest almindelige *symboler* for differentialkvotienten er:

$$f'(x) \text{ og } \frac{df(x)}{dx}$$

De (næsten) jævnaldrende videnskabsmænd englænderen Isaac Newton (1643–1727) og tyskeren Gottfried W. von Leibniz (1646–1716) opfandt uafhængigt af hinanden differentialregningen omkring 1666.



Isaac Newton

G.W. v. Leibniz

## SÆTNING

**Differentialkvotient (den afledede)**

Differentialkvotienten for en funktion ( $f(x)$ ) er givet ved:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

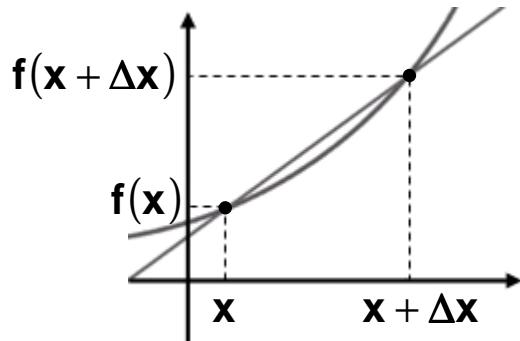
**BEVIS**

Sekantens stigningstal er:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Tangenten fremkommer når  $\Delta x$  bliver uendelig lille, d.v.s.

tangentens stigningstal er:



$$a_{\text{tangent}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Hvilket pr. definition er } \frac{df(x)}{dx}$$

q.e.d.

EKSEMPEL:  $f(x) = x^2$

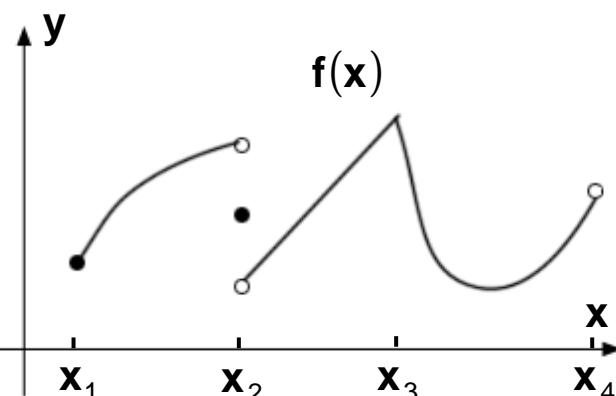
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (\Delta x)^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x - x^2}{\Delta x} = 2 \cdot x$$

## DEFINITION

**Differentiabilitet**

Hvis grafen har en tangent, er funktionen ( $f(x)$ ) differentiabel i den pågældende  $x$ -værdi ( $x_0$ ). D.v.s. der eksisterer én ikke uendelig differentialkvotient:

$$\left| \frac{df(x_0)}{dx} \right| < \infty$$



EKSEMPEL:

$f(x)$  er differentiabel i

$$[x_1; x_2] \cup [x_2; x_3] \cup [x_3; x_4]$$

SÆTNING

**Differentiabel / Kontinuert**

Hvis en funktion er differentiabel, er den også kontinuert  
– det omvendte er ikke nødvendigvis sandt.

SÆTNING

**Tangentens ligning**

Ligningen for en tangent til en funktion  $f(x)$  for  $x = x_0$  er:

$$y = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

**BEVIS**

Tangentens stigningstal kan findes på flg. to måder:

$$a_{\text{tangent}} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}, \quad a_{\text{tangent}} = \frac{df(x_0)}{dx}$$

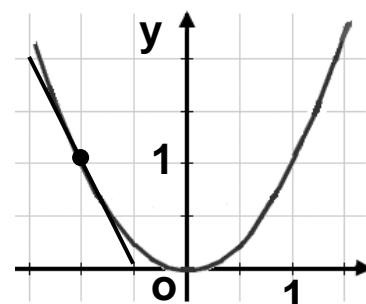
$$\text{D.v.s.: } \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} \Rightarrow y = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

q.e.d.

EKSEMPEL:  $f(x) = x^2$  ,  $x_0 = -1$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{df(-1)}{dx} = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$y = -2 \cdot (x - (-1)) + (-1)^2 \Leftrightarrow y = -2 \cdot x - 1$$



# FUNKTIONS-OVERSIGT (f')

<b>a, k og n er konstanter</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x) , <math>\frac{df(x)}{dx}</math></b>
Konstant	k	0
Potensfunktion	$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
Eksponentialfunktion	$a^x$	$\ln(a) \cdot a^x$
Logaritmefunktion	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
Sinus	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
Tangens	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

EKSEMPLER:

$$f(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^4$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = \ln(e) \cdot e^x = e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(e) \cdot x} = \frac{1}{x}$$

# REGNEREGLER (f')

<b>k er et tal u og v er diff. funktioner</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x) , <math>\frac{df(x)}{dx}</math></b>
<b>Tal gange funktion</b>	<b><math>k \cdot u(x)</math></b>	<b><math>k \cdot u'(x)</math></b>
<b>Sum</b>	<b><math>u(x) + v(x)</math></b>	<b><math>u'(x) + v'(x)</math></b>
<b>Differens</b>	<b><math>u(x) - v(x)</math></b>	<b><math>u'(x) - v'(x)</math></b>
<b>Produkt</b>	<b><math>u(x) \cdot v(x)</math></b>	<b><math>u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)</math></b>
<b>Brøk</b>	<b><math>\frac{u(x)}{v(x)}</math></b>	<b><math>\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}</math></b>
<b>Sammensat funktion</b>	<b><math>u(v(x))</math></b>	<b><math>\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}</math></b>

EKSEMPLER      Givet:  $k = 3$ ,  $u(x) = \sin(x)$  og  $v(x) = x^2$

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(x) + x^2 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + 2 \cdot x$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2 \cdot x$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2 \cdot x}{x^4}$$

$$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x$$

**BÆVIS Funktions-oversigt (Potensfunktion)**

Definitionen på differentialkvotienten  $f'(x)$  og regnereglen for  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  giver:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) = x &\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x + \Delta x] - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \\
 f_2(x) = x^2 = x \cdot x &\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2 \cdot x \\
 f_3(x) = x^3 = x \cdot x^2 &\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2 \cdot x = 3 \cdot x^2 \\
 &: \\
 f_n(x) = x^n = x \cdot x^{n-1} &\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}
 \end{aligned}$$

q.e.d

**BÆVIS Regneregler (Produkt)**

Definitionen på differentialkvotienten  $f'(x)$  giver:

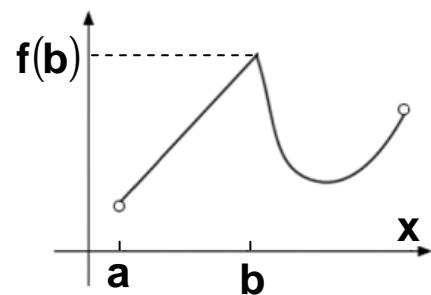
$$\begin{aligned}
 f(x) = u(x) \cdot v(x) &\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)] - [u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)] - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - [u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + [v(x + \Delta x) - v(x)] \cdot u(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \\
 &= u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)
 \end{aligned}$$

q.e.d

# EKSTREMUMSPUNKTER

**DEFINITION Ekstremum**

Ekstremum betyder ekstremværdi  
- største eller mindste funktionsværdi.

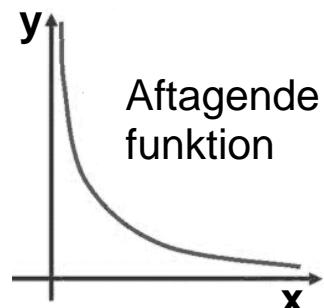


**EKSEMPEL:**  $\max f(x) = f(b)$   
 $\min f(x)$  eksisterer ikke da  $a \notin Dm(f)$ .

**DEFINITION Voksende el. aftagende funktion**

En funktion  $f(x)$  er voksende eller aftagende, hvis der om differentialkvotienten  $f'(x)$  gælder:

Voksende:  $f'(x) > 0$   
 Aftagende:  $f'(x) < 0$

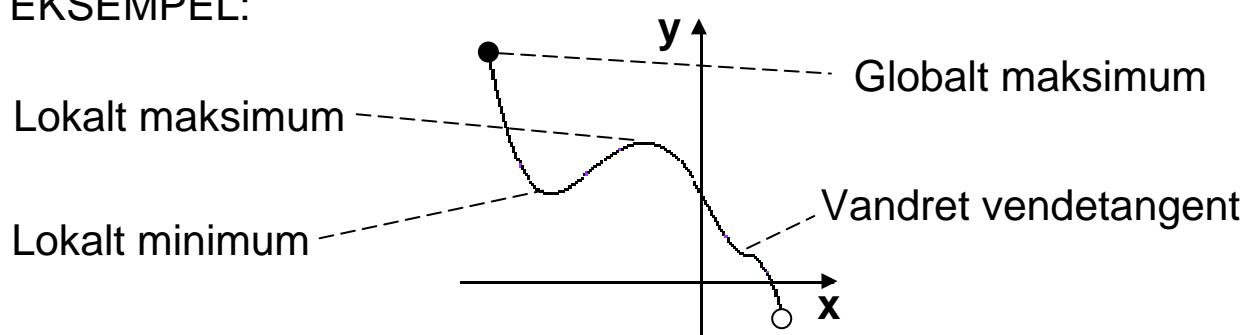

**SÆTNING Stationære punkter**

I et punkt **P** (kaldet et stationært punkt), hvor en funktion  $f$  har vandret tangent ( $f' = 0$ ) gælder, at  $f$  har:

Lokalt el. globalt maksimum hvis  $f'$  går fra + til - omk. **P**.

Lokalt el. globalt minimum hvis  $f'$  går fra - til + omk. **P**.

Vandret vendetangent hvis  $f'$  ikke skifter fortegn omk. **P**.

**EKSEMPEL:**


SÆTNING

**Ekstremumspunkt**

En funktions ekstremumspunkter findes enten i et:

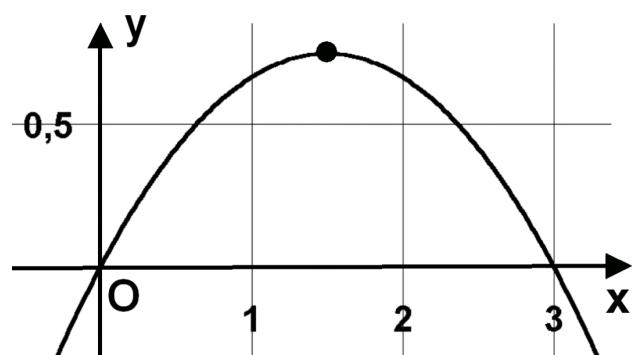
- Stationært punkt
- Ikke-differentiabelt punkt
- Interval-endepunkt

EKSEMPEL: Maksimum i stationært punkt

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x$$

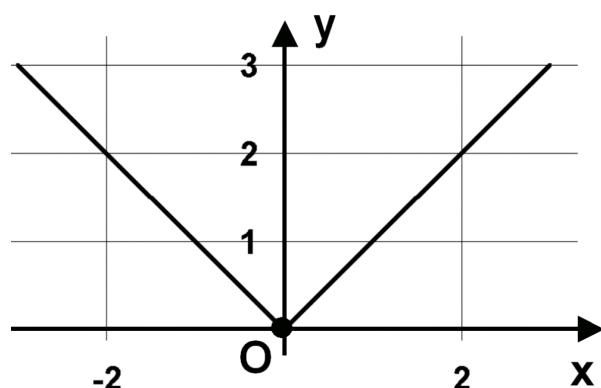
$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$-\frac{2}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



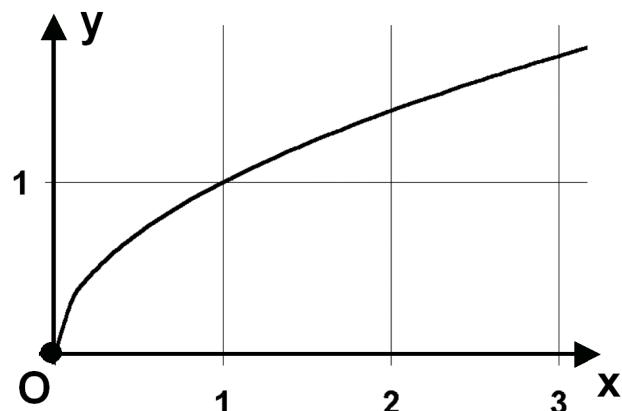
EKSEMPEL: Minimum i ikke-differentiabelt punkt

$$f(x) = |x|$$



EKSEMPEL: Minimum i interval-endepunkt

$$f(x) = \sqrt{x}$$



# ASYMPTOTER

## DEFINITION **Asymptote**

En asymptote er en ret linie, som nærmer sig grafen for en funktion  $f(x)$  uden at ramme den - En "tangent" i det uendelige. Langt fra alle funktioner har asymptoter.

## SÆTNING **Vandret asymptote**

$f(x)$  har den vandrette asymptote  $y = b$  hvis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

## SÆTNING **Lodret asymptote**

$f(x)$  har den lodrette asymptote  $x = x_0$  hvis:

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right| = \infty \quad \text{eller} \quad \left| \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right| = \infty$$

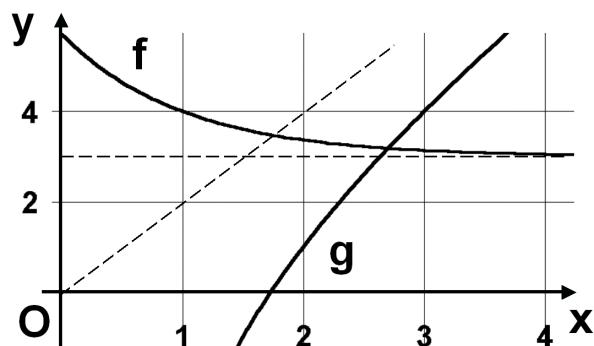
## SÆTNING **Skrå asymptote**

$f(x)$  har en skrå asymptote med stigningstal  $a$  hvis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

## EKSEMPLER

$$f(x) = e^{-x+1} + 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$



$$g(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 6}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^2 - 6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{6}{x^2} \right) = 2$$



G. F. A. Marquis de l'Hôpital (1661-1704) var oprindeligt officer i den franske hær; men p.g.a. nærsynethed skiftede han karriere og blev matematiker. Hans bog "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" som udkom i 1696 var den første bog om differentialregning.

### SÆTNING      l'Hôpitals regel (l'Hospital's rule)

Hvis funktionerne  $f(x)$  og  $g(x)$  er differentiable med differentialkvotienterne  $f'(x)$  og  $g'(x)$  og

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{eller} \quad \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right| = \infty$$

Da er:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**BEMÆRK:**  $x_0$  er et tal; men kan erstattes med  $\infty$  eller  $-\infty$

EKSEMPEL:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2 \cdot x} = \frac{1}{4}$

EKSEMPEL:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [x \cdot \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

EKSEMPEL:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2 \cdot x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x + 1}{4 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

BEMÆRK: l'Hôpitals regel er brugt to gange.

# FUNKTIONS-UNDERSØGELSE

Computere og lommeregner (CAS-værktøjer) er gode; men de viser ikke altid hele sandheden. Derfor kan man have brug for at lave en funktionsundersøgelse.

## DEFINITION **Funktionsundersøgelse**

En funktionsundersøgelse skal bruges til at lave en *skitse* af grafen for en funktion  $f(x)$ . Derfor bestemmes:

- a) Funktionens definitionsmængde: **Dm(f)**
- b) Grafens skæring med x-aksen:  $f(x) = 0$
- c) Grafens skæring med y-aksen:  $f(0)$
- d) Stationære punkter:  $f'(x) = 0$ 
  - o Maksimumspunkter
  - o Minimumspunkter
  - o Vandret vendetangent
- e) Asymptoter:
  - o Vandret  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$
  - o Lodret  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$
  - o Skrå  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
- f) Monotoni-intervaller
  - o Kurven er voksende:  $f'(x) > 0$
  - o Kurven er aftagende:  $f'(x) < 0$
- g) Funktionens værdimængde: **Vm(f)**

Se eksempel på næste side...

## EKSEMPEL:

Funktionen:  $f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x}$

a) *Definitionsmængden:*

$$Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (Husk division med 0 er forbudt!)}$$

b) *Skæring med x-aksen:*

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Bemærk at formlen for "Produktet af en to-leddet differens" kunne bruges her.

c) *Skæring med y-aksen:*

Grafen skærer ikke y-aksen, da der iflg. definitionsmængden gælder, at  $x \neq 0$

d) *Stationære punkter:*

$$f'(x) = \frac{(2 \cdot x - 2) \cdot x - (x^2 - 2 \cdot x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}{1} = 0, \quad f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1}{-1} = -4$$

Altså de stationære punkter  $(1; 0)$  og  $(-1; -4)$

e) *Vandrette asymptoter:*

I'Hôpitals regel giver:

$$\text{For } x \rightarrow \infty \text{ har vi: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x - 2}{1} = \infty$$

$$\text{For } x \rightarrow -\infty \text{ har vi: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot x - 2}{1} = -\infty$$

Der er ingen vandrette asymptoter (Husk  $\infty$  er ikke et tal).

Fortsætter på næste side...

*Lodrette asymptoter:*

Funktionen er ikke defineret for  $x = 0$ , derfor er  $x = 0$  muligvis en lodret asymptote.

$$x \rightarrow 0+ \text{ giver: } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = \infty$$

$$x \rightarrow 0- \text{ giver: } \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

D.v.s.  $x = 0$  er en lodret asymptote.

*Skrå asymptoter:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

D.v.s.  $f(x)$  har en skrå asymptote med stigningstal 1.

f) Resultaterne fra punkt a) til e) kan samles i en tabel:

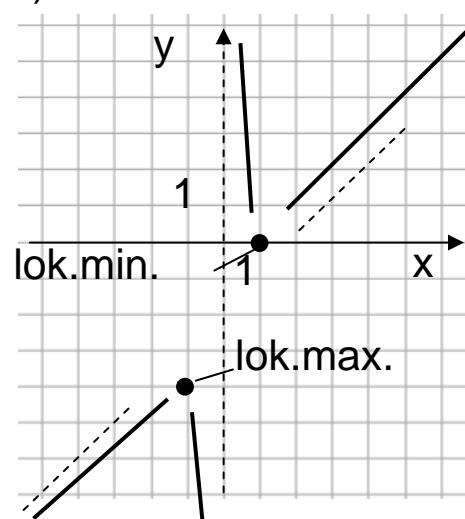
$x$	$-\infty$	-1	0-	0	0+	1	$\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$	i.d.	$\infty$	0	$\infty$
$f'(x)$	+	0	-	i.d.	-	0	+

Tabellen viser bl.a., at der er (lokalt) maksimum for  $x = -1$  og (lokalt) minimum for  $x = 1$ .

g) Desuden viser tabellen at:

$$Vm(f) = ]-\infty; -4] \cup [0; \infty[$$

Grafen er skitseret til højre.



# INTEGRALREGNING

Som du skal se, er integralregning yderst nyttigt. Det kan f.eks. bruges til at bestemme arealer (og rumfang).

**DEFINITION Stamfunktion (ubestemt integral)**

Har man en funktion  $f(x)$ , er en stamfunktion  $F(x)$  givet ved:

$$F'(x) = f(x)$$

D.v.s. differentieres stamfunktionen  $F(x)$  fås funktionen  $f(x)$ .

**BEMÆRK:** Stamfunktion symboliseres med et stort bogstav.

EKSEMPEL: Hvis  $f(x) = 2 \cdot x$  er  $F(x) = x^2$  da  $F'(x) = 2 \cdot x$

**SÆTNING Samtlige stamfunktioner**

Hvis  $F(x)$  er en stamfunktion til funktionen  $f(x)$ , er  $F(x) + k$  også en stamfunktion til  $f(x)$ , hvis  $k$  er en konstant.

**BEVIS**

Da  $F(x)$  er en stamfunktion til  $f(x)$  er  $F'(x) = f(x)$

$$\frac{d(F(x)+k)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dk}{dx} = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Differentieres  $F(x) + k$  fås  $f(x)$ , altså er  $F(x) + k$  en stamfunktion til  $f(x)$ .

q.e.d.

EKSEMPEL:  $G(x) = x^2 + 3$  er en stamfunktion til  $f(x) = 2 \cdot x$  da  $G'(x) = 2 \cdot x$

På engelsk hedder stamfunktion "primitive function". Et andet ord for stamfunktion er "ubestemt integral".



# FUNKTIONSOVERSIGT (F)

<b>a, K og n er konstanter</b>	$f(x)$	$F(x) , \int f(x)dx$
<b>Konstant</b>	$K$	$K \cdot x$
<b>Potensfunktion</b>	$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
<b>Eksponentialfunktion</b>	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
	$e^x$	$e^x$
<b>Logaritmefunktion</b>	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
<b>Sinus</b>	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
<b>Cosinus</b>	$\cos(x)$	$\sin(x)$
<b>Tangens</b>	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $

**HUSK** samtlige stamfunktioner fås ved at addere en konstant.

**EKSEMPLER:**

$$f(x) = -7 \quad \Rightarrow \quad F(x) = -7 \cdot x$$

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x$$

$$f(x) = 2 \cdot \ln(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x) - 2 \cdot x$$

**DEFINITION Ubekstmidt integral (Stamfunktion)**

En stamfunktion kan også defineres som et ubekstmidt integral:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

...Men hvad er et integral?

Ordet integral stammer fra det latinske ord integralis, som betyder "danner en helhed".

**DEFINITION Integral**

Et integral skrives på formen:  $\int f(x)dx$

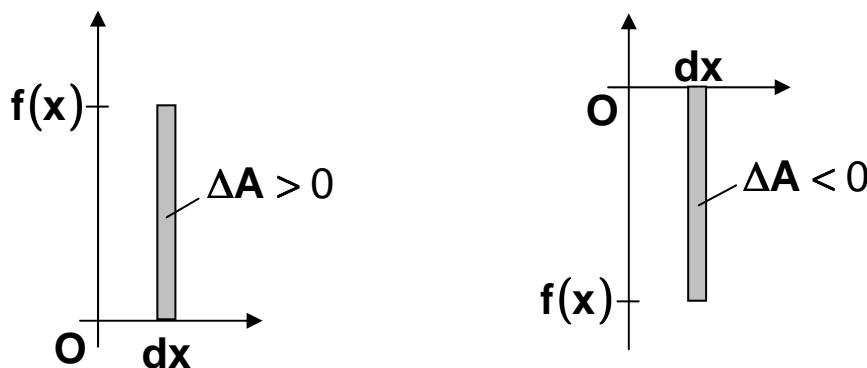
$\int$  Er integral-tegnet og kan opfattes som et "sum-tegn".

$f(x)$  Er en funktion, som her kaldes for integranden.

$dx$  Er et (uendeligt) lille x-interval.

**DEFINITION Integrations-elementet**

Størrelsen  $f(x)dx$  kaldes integrations-elementet, og kan opfattes som et areal ( $\Delta A$ ) med fortæn:  $|f(x)|$  er højden,  $dx$  er bredden og fortænnet er lig fortænnet af  $f(x)$ .



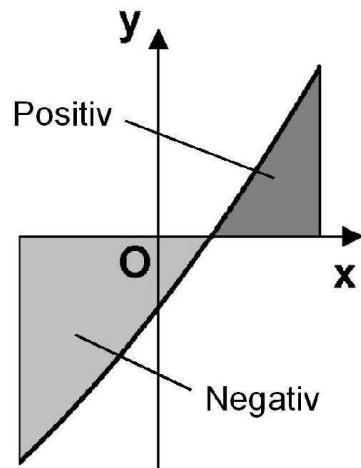
**DEFINITION Bestemt integral**

Hvis funktionen  $f(x)$  er kontinuert i intervallet  $[x_1; x_2]$ , er det bestemte integral givet ved:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Læses: Integralet fra  $x_1$  til  $x_2$  af  $f(x) dx$ .

Det bestemte integral er tæt knyttet til areal-begrebet og kan opfattes som arealet mellem grafen og x-aksen regnet med fortægning.

**REGNEREGLER (F)**

Tal gange funktion	$\int_{x_1}^{x_2} k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$
Sum eller differens af to funktioner	$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \pm g(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \pm \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$
Opdeling af integral $x_1 < x_2 < x_3$	$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

**EKSEMPLER:**

$$\int_{-2}^5 x^2 - 3 \cdot x dx = \int_{-2}^5 x^2 dx - \int_{-2}^5 3 \cdot x dx = \int_{-2}^5 x^2 dx - 3 \cdot \int_{-2}^5 x dx$$

$$\int_{0^\circ}^{180^\circ} \sin(x) dx + \int_{180^\circ}^{360^\circ} \sin(x) dx = \int_{0^\circ}^{360^\circ} \sin(x) dx$$

SÆTNING

**Bestemt integral**

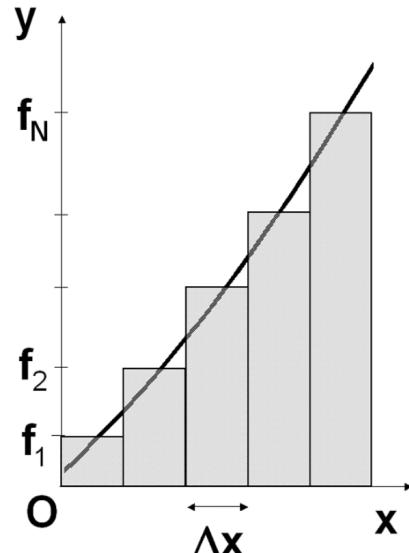
Et bestemt integral kan beregnes ved brug af stamfunktionen:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

**INDIKATION**

Dette er ikke et bevis; men en beregning som sandsynliggør, at sætningen er korrekt. Ved at opfatte det bestemte integral som arealet (**A**) under grafen og bruge, at  $f(x) = F'(x)$  fås:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx f_1 \cdot \Delta x + f_2 \cdot \Delta x + \dots + f_N \cdot \Delta x \\ &= (f_1 + f_2 + \dots + f_N) \cdot \Delta x \\ &= (F'_1 + F'_2 + \dots + F'_N) \cdot \Delta x \\ &\approx \left( \frac{F_2 - F_1}{\Delta x} + \frac{F_3 - F_2}{\Delta x} + \dots + \frac{F_N - F_{N-1}}{\Delta x} \right) \cdot \Delta x \\ &= (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \dots + (F_N - F_{N-1}) \\ &= F_N - F_1 = F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

**EKSEMPLER:**

$$\int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0^\circ}^{180^\circ} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{0^\circ}^{180^\circ} = \sin(180^\circ) - \sin(0^\circ) = 0$$

**DEFINITION Arealberegning – Positiv funktion**

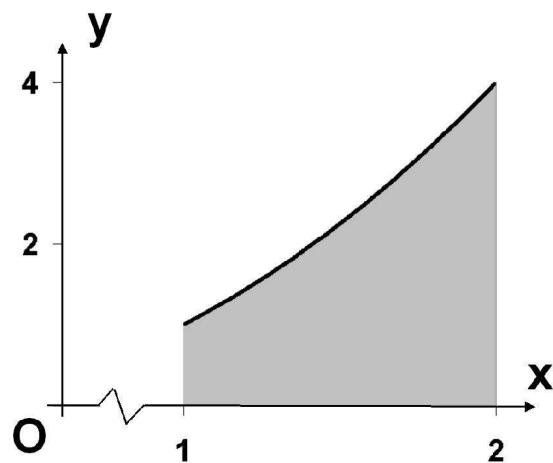
Hvis en funktion  $f(x)$  er *kontinuert* i intervallet  $[x_1; x_2]$  og positiv for alle  $x \in [x_1; x_2]$ , er arealet ( $A$ ) mellem funktionens graf og x-aksen i intervallet givet ved:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

EKSEMPEL:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1; 2]$$

$$A = \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

**DEFINITION Arealet mellem to funktioner**

Hvis funktionerne  $f(x)$  og  $g(x)$  er *kontinuerte* i intervallet  $[x_1; x_2]$  og  $f(x) \geq g(x)$  for alle  $x \in [x_1; x_2]$ , så er arealet ( $A$ ) mellem funktionernes grafer i intervallet givet ved:

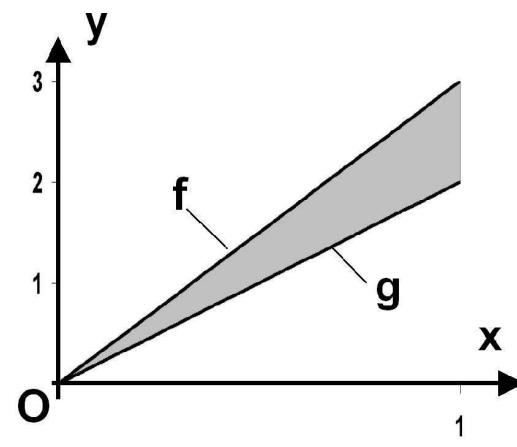
$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) dx$$

EKSEMPEL:

$$f(x) = 3 \cdot x, \quad g(x) = 2 \cdot x, \quad x \in [0; 1]$$

$$A = \int_0^1 3 \cdot x - 2 \cdot x dx$$

$$= \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$



## Matematiske symboler

=	Ligheds-tegn	$2 = 1 + 1$
≠	Forskellig fra	$2 \neq 3$
<	Mindre end	$2 < 3$
≤	Mindre end eller lig	$2 \leq 1 + 1$
>	Større end	$3 > 2$
≥	Større end eller lig	$2 \geq 1 + 1$
+	Additions-tegn (plustegn)	$2 + 3 = 5$
-	Subtraktions-tegn (minustegn)	$2 - 3 = -1$
.	Multiplikations-tegn (gangetegn)	$2 \cdot 3 = 6$
:	Divisions-tegn	$2 : 3 = 0, \bar{6} = 0,6666\dots$
—	Brøkstreg	$2/3 = 0, \bar{6} = 0,6666\dots$
	Numerisk-tegn	$ -2  =  2  = 2$
√	Rod-tegn	$\sqrt[3]{8} = 2$
(	Parentes	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$
[	Klamme-parentes	$2 \cdot [(b-a)+(a-b)] = 0$
{	Tuborg-parentes	$2 \cdot \{(b-a)+(a-b)\}^2 + 1\} = 2$
⇒	Medfører (så gælder der, at...)	$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
↔	Ensbetydende med	$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
R	Reelle tal (alle tal)	2,718281828 459...
N	De naturlige tal (positive heltal)	5648984638

## Matematiske symboler

Z	Alle helta	-7645383624
Q	Rationale tal (brøker)	-355/113
{ }	Mængde	$P = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots, 100\}$
$\infty$	Uendeligheds-tegn	Er et begreb - ikke et tal
$\cup$	Forenings-mængden	$P = \{3, 4, 5, \dots, 89\} \cup \{7, 8, 9, \dots, 100\}$
$\cap$	Fælles-mængden	$P = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \cap \{3, 4, 5, \dots, 111\}$
$\in$	Tilhører	$x \in P$
	For hvilket det gælder, at	$M = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 5\}$
$\emptyset$	Den tomme mængde	$L = \emptyset \quad L = \{ \}$
Dm	Definitionsmængde	$Dm(f) = \{x \in R \mid 0 < x < 7\}$
Vm	Værdimængde	$Vm(f) = \{f(x) \mid 0 < x < 7\}$
$\wedge$	Og	$P = \{x \in N \mid x \leq 100 \wedge x \geq 3\}$
$\vee$	Eller	$S = \{x \in R \mid x \leq 22 \vee x \geq 33\}$
[ ; ]	Lukket interval	$M = [2;5]$
[ ; [	Halvåbent interval	$S = ]-\infty; 22] \cup [33; \infty[$
] ; ]		
] ; [	Åbent interval	$Dm(f) = ]0; 7[$

## Stikord

2. grads-polynomie	47	Faseforskydning	53
2.grads-ligning	66	Fasevinklen	53
Abscisse-akse	43	Flade	27
Absolut værdi	18	Fordoblingskonstant	58
Addition	6	Fortegnsregler	3
Aftagende funktion	105	Frekvens	53
Amplitude	53	Funktion	42
Arcuscosinus	23	Funktionsforskrift	42
Arcussinus	22	Funktionsoversigt (F)	113
Arcustangens	23	Funktionsoversigt ( $f'$ )	102
Areal	27,117	Funktionsundersøg.	109
Asymptote	107	Funktionsværdi	42
Basis-vektor	90	Grad	11
Begyndelsespunkt	81	Grader	51
Bestemt integral	115	Graf-metoden	73,78
Brøk	3	Grundmængde	11
Brøk-ulighed	77	Grundtal	14,56,59
Cirkel	29, 40	Grænseværdi	96,97
Cosinus	20, 23	Halveringskonstant	58
Cosinus-funktion	52	Harmonisk svingning	53
Cosinusrelationen	26	Hat-vektor	86
Cylinder	28,30,33	Hierarki	6
Definitionsmængde	42	Hospitals regel	108
Differensvektoren	87	Hældningskoefficient	45
Differentiabilitet	100,101	Idiot-formlen	54
Differentialkvotient	99,100	Indskreven cirkel	39
Diskriminant	47,67	Integral	114
Dobbelt-logaritmisk	62	Integrations-element	114
Dobbelt-ulighed	80	Invers funktion	65
Eksponent	14	Isolere	12
Eksponentialfunkti.	56	Kamufl. 2.grads-lign.	69
Eksponential-ligni.	75	Kasse	33
Eksponentiel udvik.	56	Kegle	28,30,33
Ekstremum	105	Keglestub	28,30,33
Ekstremums-punkt	106	Komposanter	89, 90
Endepunkt	81	Konstantled	46,53
Enhedscirkel	19	Kontinuitet	98,101
Enhedscirkel-met.	74, 79	Koordinat	43
Enhedsvektor	86	Kugle	31,34
Enkelt-logaritmisk	56	Kugleafsnit	34

Kuglebælte	31	Prikprodukt	93,94
Kuglekalot	31	Prisme	28
Kugleudsnit	34	Projektion	91,92
Led	7	Proportional	44
Legeme	32	Punkt-koordinaterne	95
I'Hopitâls regel	108	Pyramide	28,34
I'Hospitals regel	108	Pyramidestub	34
Ligevægt	88	Pythagoras' sætning	24
Lighedstegn	10	Radian	51
Ligning	10	Radikand	16
Lignings-system	70-72	Rationale tal	42
Linie	35	Reduktion	6
Lodret asymptote	77	Reference-værdi	57
Logaritme regneregл.	60	Regneforskrift	42
Logaritme-funktion	59	Regneregler (F)	115
Logaritmisk ligning	75	Regneregler (f')	103
Længde	83,85	Rektangel	29
Løse en ligning	12	Relle tal	42
Løsningsformel	68	Resultanten	87
Median	36	Retvinklet trekant	22
Midtnormal	37	Rod	16
Modsatte vektorer	85	Rod-eksponent	16
Multiplikation	6	Rodtegn	16
Naturlig log.funktion	60	Rumfang	32
Naturlige tal	42	Sammensat funktion	64
Normal-vektor	95	Sekant	99
Nul-vektoren	88	Sinus	20,22
Numerisk værdi	18	Sinus-funktion	52
Omskrevnen cirkel	38	Sinusrelationen	25
Omskrivning	50	Skalarprodukt	93,94
Omskrivningsformler	54	Skrå asymptote	107
Omvendt funktion	65	Stamfunktion	112
Ordinat-akse	43	Stationært punkt	105
Parabel	47	Sted-vektor	95
Parallelle linier	46	Stigningstal	45
Parentes	7	Sumvektoren	87
Periode	53	Svingningstid	53
Potens	8,14	Symmetri-akse	49
Potens-funktion	62	Sædvanlig log.-funkt.	60
Potens-ligning	75	Talmængde	42

Tangens	20,23	Udfoldning	27,28
Tangens-funktion	51	Ulighed	76
Tangent	99	Ulighedstegn	18
Tangentens ligning	101	Vandret asymptote	107
Toppunkt	49	Vektor	81
Trapez	29	Vektor-addition	87
Trekant	29,35,37	Vektor-koordinaterne	84
Trekantsuligheden	18	Vektor-subtraktion	87
Trigonometrisk funk.	51	Vilkårlig trekant	25
Trigonom. Grundlign.	73	Vinkel	19
Trigonometr. ulighed	78	Vinkel mell. vektorer	82,94
Tværvektor	86	Vinkelfrekvens	53
Tyngdepunkt	37	Vinkelhalveringslinie	36
Ubekendt	10	Vinkelrette linier	46
Ubestemt integral	114	Voksende funktion	105
		Værdimængde	42

Som gymnasielærer ledte jeg efter en matematikbog, der opfyldte følgende krav:

- Let læselig.
- Overskuelig og logisk opbygning.
- Faglig præcis og solid.
- Fleksibel i brug.
- Udgivet i bogform og som elektronisk fil.

Da jeg ikke fandt den, skrev jeg den selv.

Søren Toftegaard Olsen  
[www.studienoter.dk](http://www.studienoter.dk)  
ISBN 978-87-991996-0-0