UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

ZÁKLADY ELEMENTÁRNEJ GEOMETRIE

ŠEDIVÝ ONDREJ – VALLO DUŠAN

Vydané v Nitre 2009

Fakultou prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre

s finančnou podporou projektu

Tvorba geometrických predstáv žiaka v mladšom školskom veku a adekvátna príprava učiteľov – elementaristov KEGA 3/6314/08

NITRA 2009

Názov:	Základy elementárnej geometrie
Autori:	prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
	RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Recenzenti:	doc. RNDr. Oliver Židek, CSc.
	RNDr. Janka Drábeková, PhD.
Technická spolupráca:	Vladimír Ondrejka
Edícia:	Prírodovedec č. 391
Schválené:	Vedením FPV UKF v Nitre dňa 13.10.2009

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN: 978-80-8094-623-4

EAN: 9788080946234

9 788080 946234

1 PLANIMETRIA

1.1 Historické poznámky

Slovo geometria pochádza z gréckeho výrazu ***hé gé meteón***, čo znamená vymeriavanie pozemkov pomocou lán.

Geometria vznikla v dávnej minulosti a úspešne sa rozvíjala najmä v Egypte, Babylone, Indii a v Číne. Avšak teoretické základy geometrie nachádzame až v Grécku. Starogrécki filozofi sa vo veľkej miere zaoberali aj matematikou. Známe sú školy: Tálesova, Pytagorejská, Platonova, Apollóniova, Aristotelova, Archimedova, Euklidova.

Škola Tálesova položila cenné základy elementárnej geometrie. Tálesa okrem geometrie zaujímala i astronómia a on prvý vypočítal zatmenie Slnka, ktoré bolo presne podľa jeho výpočtov.

Škola Pytagorejská mala pre vývoj geometrie veľký význam a obohatila geometriu ďalšími poznatkami – napr. veta o súčte vnútorných uhlov trojuholníka, Pytagorova veta, atď.

Škola Aristotelova začala budovať geometriu na princípoch logiky a Aristoteles vypracoval deduktívnu metódu pre potreby geometrie.

Archimedes – predstaviteľ Archimedovskej školy – zblížil teóriu s praxou a udal smer vývoja matematiky vôbec.

V treťom storočí pred naším letopočtom sa nahromadilo toľko poznatkov z geometrie, že bolo potrebné ich dať do určitého systému na deduktívnom základe.

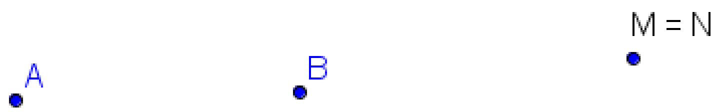
Túto veľkú prácu pri vytváraní systému vedeckého budovania geometrie urobil geniálny starogrécky vedec Euklid (3. storočie pred naším letopočtom). On zozbieral, doplnil a vydal v diele „Základy“ všetky dovtedy známe poznatky z elementárnej geometrie. Niekoľko storočí boli „Základy“ jedinou učebnicou geometrie. Po ňom sa nazýva i geometria – euklidovská geometria.

1.2 Základné útvary geometrie

Základné geometrické útvary sú :

- bod
- priamka
- rovina

Body označujeme veľkými písmenami *A, B, C, X, Y, Z* ... Dva body môžu byť rôzne $A \neq B$, $X \neq Y$, alebo môžu splývať, hovoríme aj, že sú totožné, $M = N$, $P = Q$.



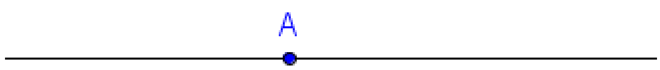
Priamky označujeme malými písmenami *a, b, p, q* ... alebo bodmi, ktorými je určená, $m = \overleftrightarrow{AB}$, $p = \overleftrightarrow{PQ}$. Priamka je jednoznačne určená dvoma rôznymi bodmi.

Bod a priamka môžu mať nasledovnú vzájomnú polohu :

- bod patrí priamke (bod leží na priamke), napr. $A \in p$,
- bod nepatrí priamke (bod neleží na priamke), napr. $M \notin m$.

Priamka je bodová množina, teda jej prvky sú body. Priamku môžeme určiť ktorýmikoľvek jej dvoma rôznymi bodmi.

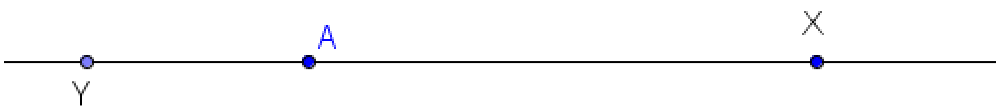
Priamku môžeme rozdeliť ľubovoľným jej bodom na dve časti. Každú z týchto častí nazývame **polpriamka**.



Na určenie polpriamky okrem bodu *A* použijeme ďalší bod, napr. *X*.

Polpriamku budeme označovať $\overrightarrow{AX}$. Bod *A* je začiatok polpriamky.

Keďže bod rozdelí priamku na dve polpriamky, jednu označíme napr. $\overrightarrow{AX}$, druhú $\overrightarrow{AY}$.

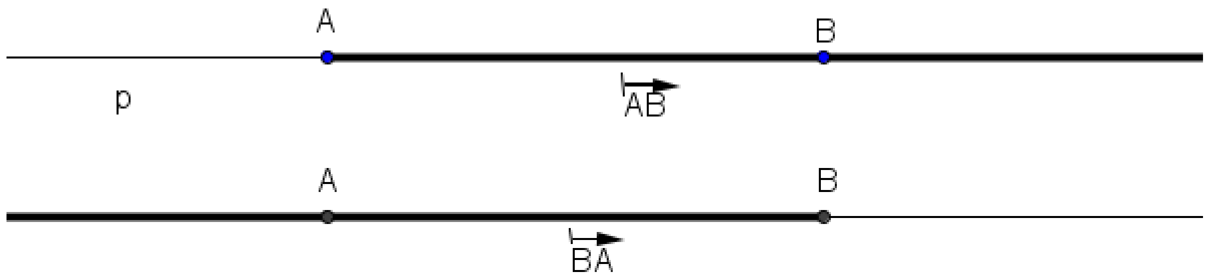


Ak vezmeme polpriamku $\overrightarrow{AX}$ ako prvú, potom polpriamku $\overrightarrow{AY}$ nazývame opačná polpriamka $\overrightarrow{AX}$. Platí aj, že polpriamka $\overrightarrow{AX}$ je opačná polpriamka k polpriamke $\overrightarrow{AY}$, teda polpriamky $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AY}$ sú navzájom opačné polpriamky. Opačné polpriamky majú spoločný začiatok.

Príklad

Na priamke *p* sú dané dva rôzne body *A, B*. Aké polpriamky určujú tieto dva body ?

Riešenie :

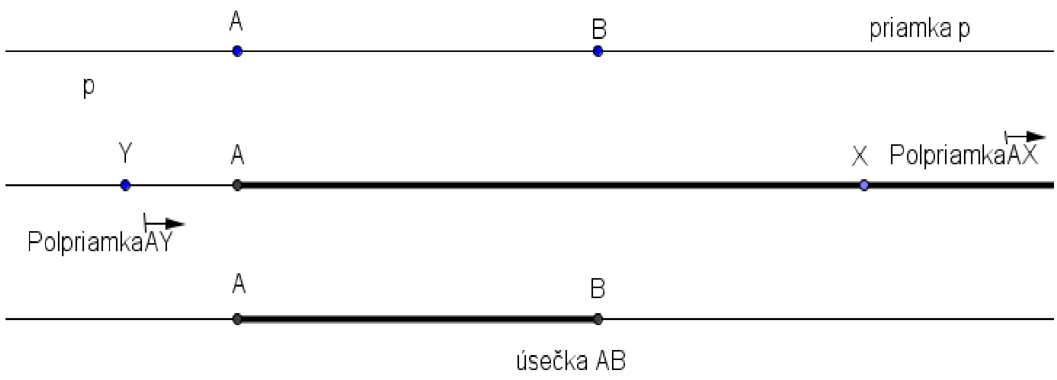


Odpoveď : Dva rôzne body *A, B* ležiace na jednej priamke určujú dve rôzne polpriamky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

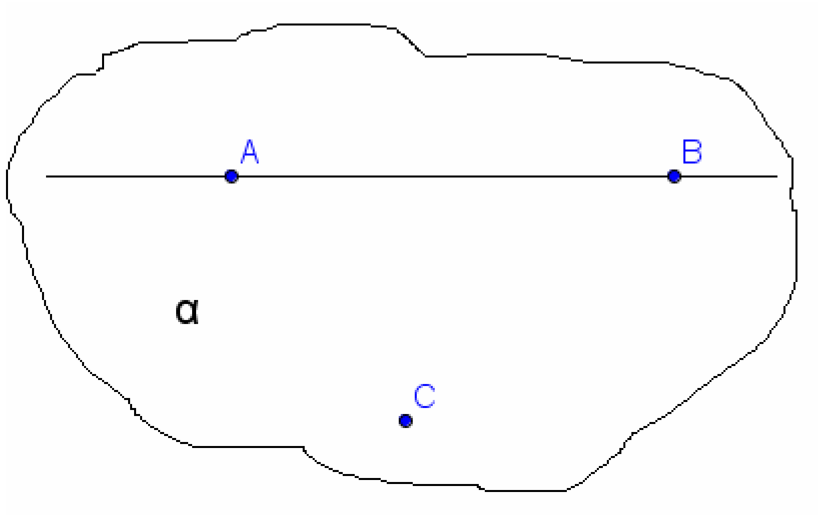
Časť priamky *p*, ktorá je tvorená bodmi ležiacimi medzi bodmi *A, B*, vrátane bodov *A, B*, nazývame **úsečka** *AB*. Body *A, B* sú krajné body úsečky, úsečku budeme označovať *AB*.

Úsečka *AB* a úsečka *BA* je tá istá časť priamky, t. zn., že pri označení úsečky nezáleží na poradí krajných bodov.

Urobme prehľad častí priamky



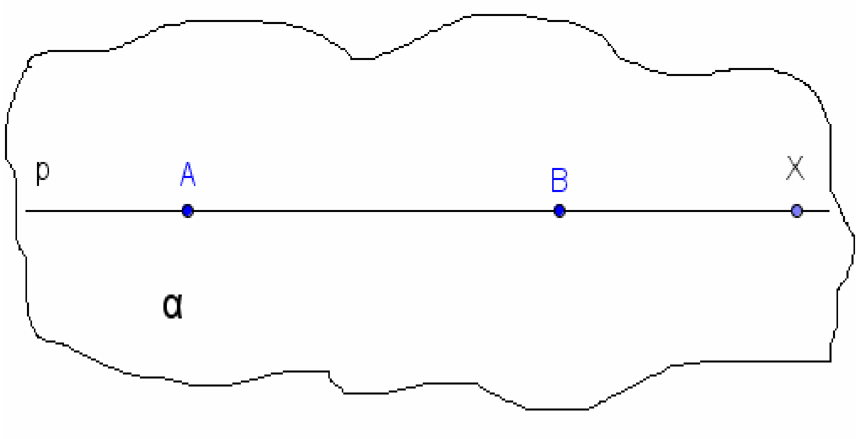
Rovina je opäť základný geometrický útvar. Rovina je jednoznačne určená tromi rôznymi bodmi neležiacimi na jednej priamke. Rovinu budeme označovať písmenami gréckej abecedy α, β, χ, ..., alebo písmenami, ktoré určujú rovinu, napr. $\overleftrightarrow{ABC}$.



Zapisujeme $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$

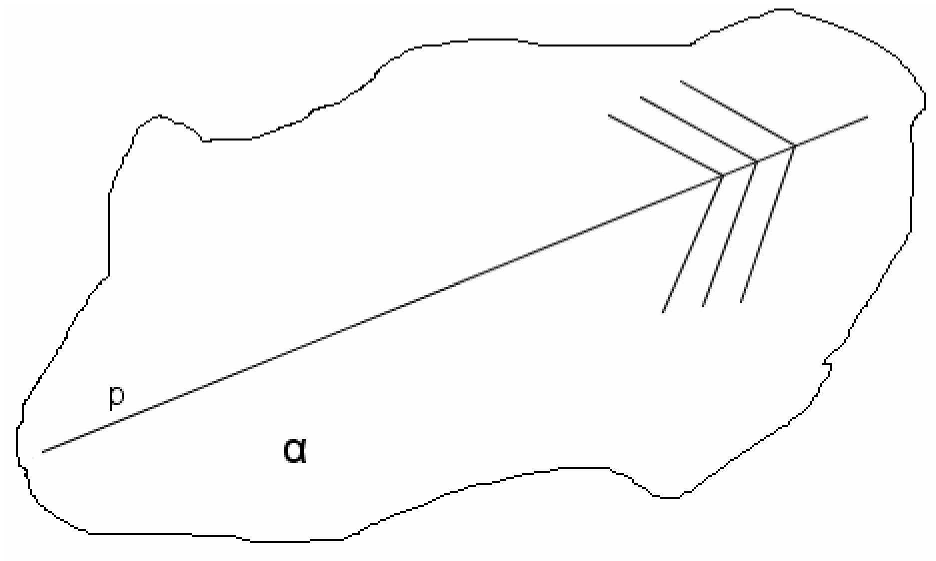
Rovina je opäť bodová množina, to znamená, že body ležiace v rovine sú prvkami roviny. Nech bod A leží (je prvkom) v rovine α, zapíšeme $A \in \alpha$. Ak bod M neleží (nie je prvkom) v rovine α, zapíšeme $M \notin \alpha$.

Nech je daná priamka p, ktorej všetky body ležia v rovine α. Potom priamka p je časťou roviny α, čo zapíšeme $p \subset \alpha$.

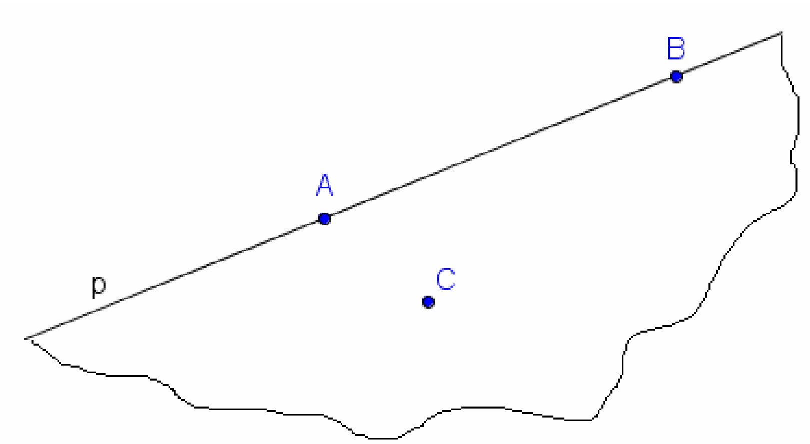


$A \in p, A \in \alpha$
$B \in p, B \in \alpha$
$X \in p, X \in \alpha$
$p \subset \alpha$

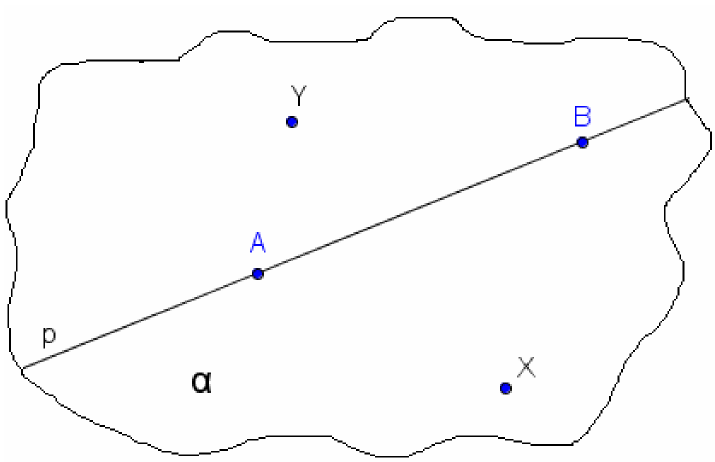
Rovinu α môžeme rozdeliť ľubovoľnou jej priamkou p na dve časti. Každú z týchto častí nazývame **polrovina**.



Ak priamka *p* je určená bodmi *A, B* a mimo priamky *p* leží bod *C*, potom polrovinu môžeme označiť $\overrightarrow{ABC}$. Polrovinu môžeme označiť aj $\overrightarrow{pC}$



Ako sme vyššie uviedli, priamka rovinu rozdelí na dve časti, teda na dve polroviny. Jedna je $\overrightarrow{ABX}$ a druhá $\overrightarrow{ABY}$.



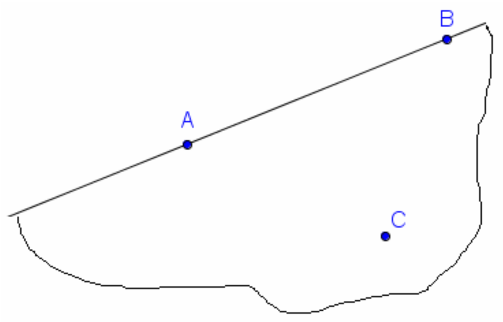
Priamka *AB* je pre obidve polroviny hranicou.

Polrovina $\overrightarrow{ABY}$ je opačnou polrovinou k polrovine $\overrightarrow{ABX}$. Taktiež polrovina $\overrightarrow{ABX}$ je opačnou polrovinou k polrovine $\overrightarrow{ABY}$. Hovoríme, že polroviny $\overrightarrow{ABX}$, $\overrightarrow{ABY}$ sú navzájom opačné polroviny.

Príklad

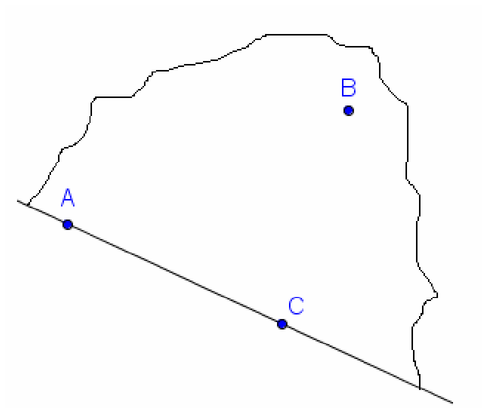
Nech sú dané tri body *A, B, C*, ktoré neležia na jednej priamke. Napíšte všetky polroviny, ktoré sú určené danými tromi bodmi.

Riešenie :



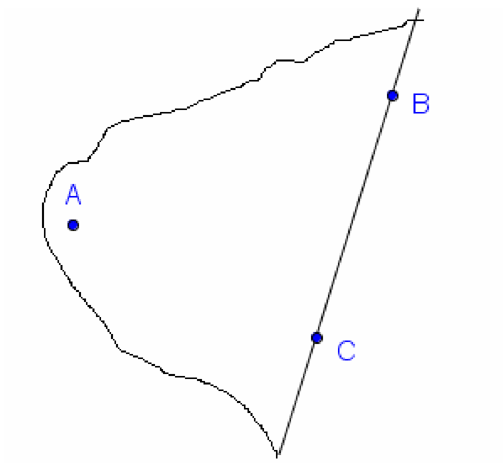
polrovina $\overrightarrow{ABC}$

hranica $\overleftrightarrow{AB}$



polrovina $\overrightarrow{ACB}$

hranica $\overleftrightarrow{AC}$



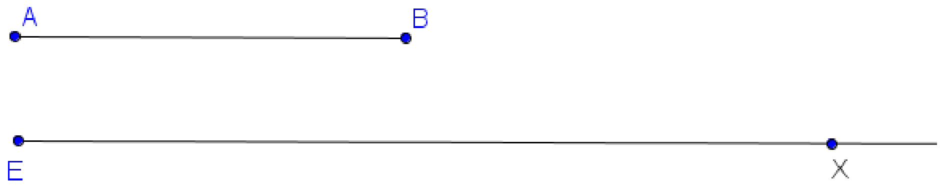
polrovina $\overrightarrow{BCA}$

hranica $\overleftrightarrow{BC}$

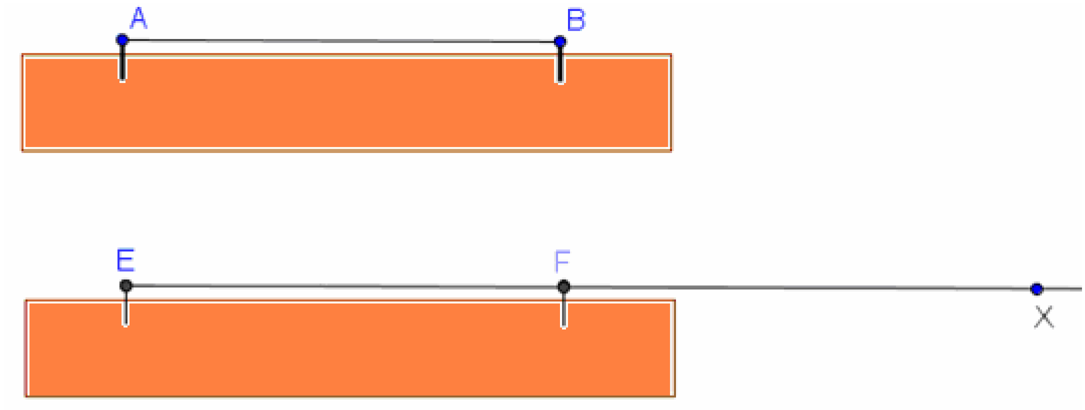
Odpoveď: Tri body neležiace na jednej priamke určujú tri rôzne polroviny.

1.3 Prenášanie úsečiek. Porovnávanie úsečiek

Nech je daná úsečka *AB* a polpriamka *EX*.



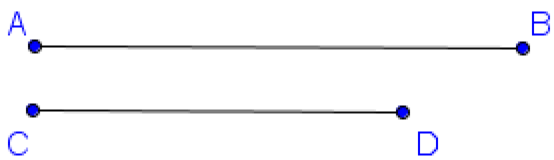
Použime pásik papiera a označme na ňom dva body tak, aby splývali s bodmi *A, B*. Pomocou tohto pásika vyznačme na polpriamke *EX* bod *F*.



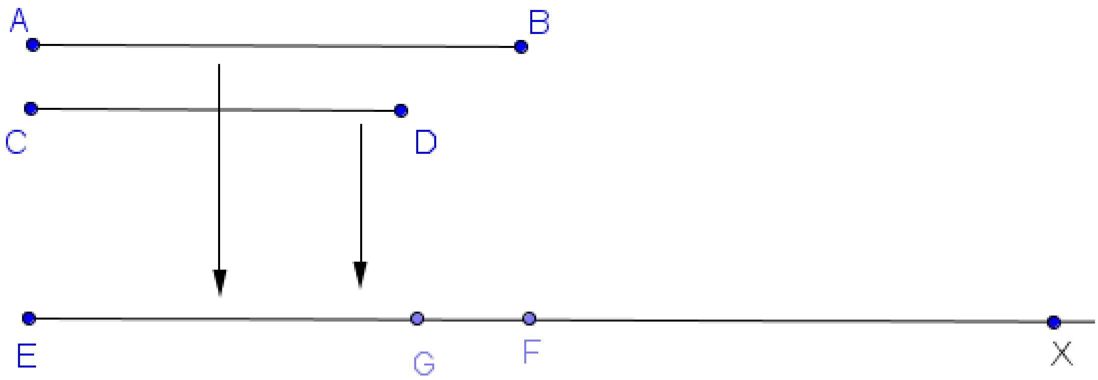
Úsečka *EF* vznikla **prenesením** úsečky *AB* pomocou pásika papiera. Úsečku *EF* môžeme vytvoriť aj napr. pomocou kružidla. Úsečka *EF* je **zhodná** s úsečkou *AB*, čo zapisujeme $\boldsymbol{AB \cong EF}$.

V ďalšom sa budeme zaoberať **porovnávaním** dvoch úsečiek *AB, CD*. Rozlíšime tri prípady.

1. prípad



Zvoľme ľubovoľnú polpriamku *EX*. Na túto polpriamku prenesieme obidve úsečky *AB, CD* tak, aby body *A, C* sa stotožnili s bodom *E*. Dostaneme dva ďalšie body *F, G*, pričom $AB \cong EF$, $CD \cong EG$.



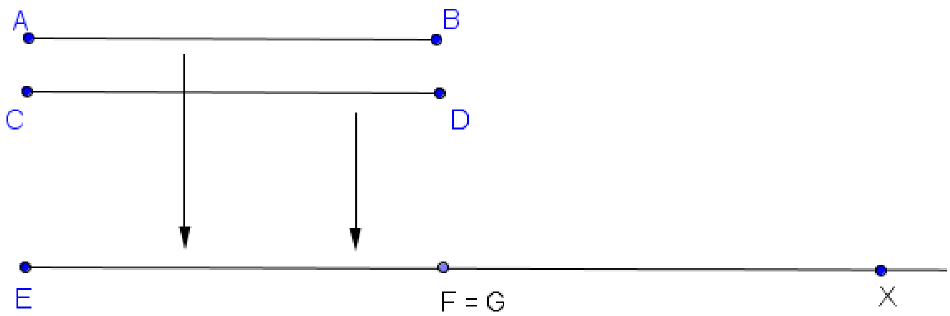
V tomto prípade bod G padol do vnútra úsečky EF. Na základe toho je úsečka EF väčšia ako úsečka EG. Zapíšeme

$$EF > EG.$$

Úsečka EF vznikla prenesením úsečky AB a úsečka EG vznikla prenesením úsečky CD. Potom $AB \cong EF$, $CD \cong EG$. Na základe toho môžeme vzťah $EF > EG$ nahradiť vzťahom $AB > CD$. Hovoríme, že **úsečka *AB* je väčšia ako úsečka *CD***.

2. prípad

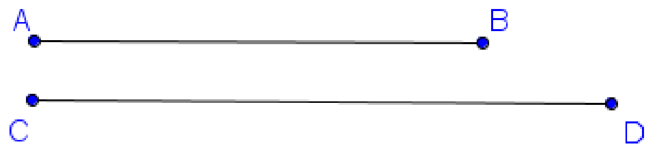
Po prenesení oboch úsečiek na polpriamku EX vznikne nasledovná situácia:



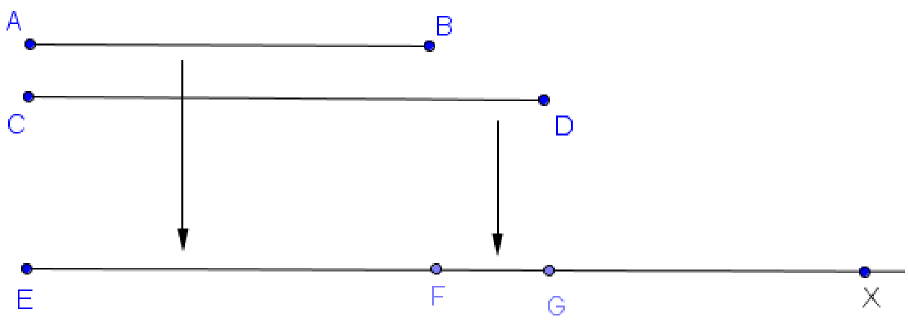
$EF \cong FG$

V zmysle predchádzajúcej úvahy je $AB \cong CD$.

3. prípad



Prenesme opäť úsečky AB, CD na polpriamku EX a dostaneme:



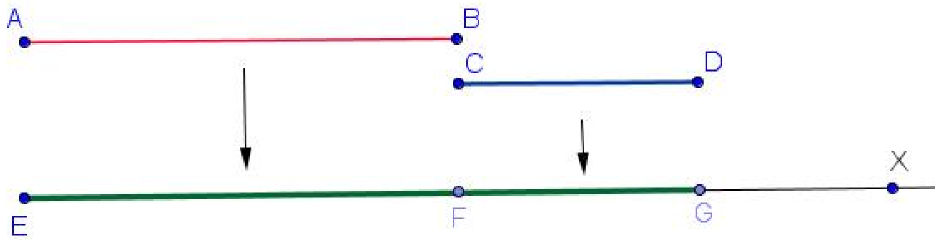
Bod G padne za bod F. $EF < EG$. Potom aj $AB < CD$.

Záver: Ak *AB, CD* sú dve úsečky, potom môže nastať jeden z nasledujúcich prípadov:

1. $AB > CD$,
2. $AB \cong CD$
3. $AB < CD$

1.4 Grafický súčet a grafický rozdiel úsečiek

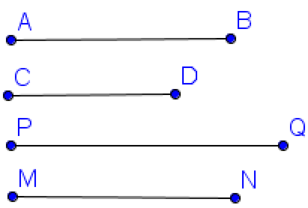
Nech sú dané dve ľubovoľné úsečky *AB, CD* a polpriamka *EX*. Postupne prenesme na polpriamku *EX* úsečku *AB* do úsečky *EF* a úsečku *CD* do úsečky *FG*.



Dostali sme úsečku *EG*, ktorú možno napísať ako súčet úsečiek *EF* a *FG*. Úsečka $EF \cong AB$ a $FG \cong CD$. Úsečku *EG* nazývame **grafickým súčtom úsečiek *AB*, *CD***.

Príklad

Dané sú štyri úsečky *AB, CD, PQ, MN*. Postupne sčítajte dané štyri úsečky.



Riešenie:

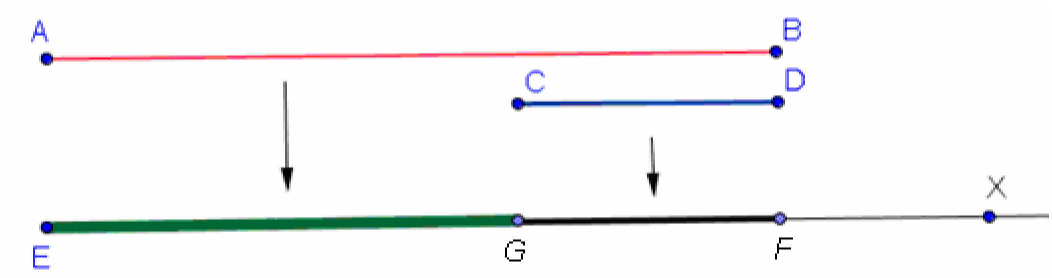
Zvolíme si ľubovoľnú polpriamku *EX*. Postupne budeme prenášať dané úsečky.

Platí : $EK = EF + FG + GH + HK$

$EF \cong AB,\ FG \cong CD,\ GH \cong PQ,\ HK \cong MN$

Odpoveď: Úsečka *EK* je grafickým súčtom úsečiek *AB, CD, PQ, MN*.

Majme opäť dve ľubovoľné úsečky *AB, CD* a polpriamku *EX*. Prenesme opäť úsečky *AB, CD* na polpriamku *EX* tak, ako je znázornené na obrázku.

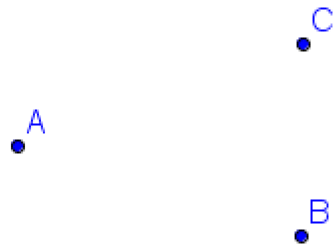


$AB \cong EF,\ CD \cong GF$

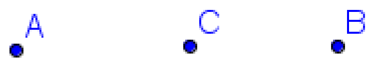
Úsečku *EG* môžeme zapísať: *EG* = *EF* – *FG* = *AB* – *CD*. Úsečku *EG* nazývame **grafickým rozdielom úsečiek *AB, CD***. Zrejme platí *EF* = *EG* - *GF*.

Cvičenia

1. Na obrázku sú dané tri body *A, B, C*. Koľko rôznych priamok môže byť určených ľubovoľnou dvojicou z bodov *A, B, C* ?



2. Zmení sa počet priamok určených dvojicami z bodov *A, B, C*, ak ich poloha je takáto ?

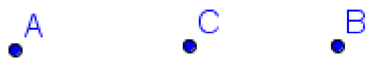


3. Najmenej koľko úsečiek potrebujeme na vymodelovanie písmen L, K, T ?

4. Koľko rôznych polpriamok môže byť určených dvojicou z bodov *A, B, C* ?

a)

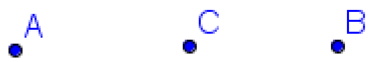
b)



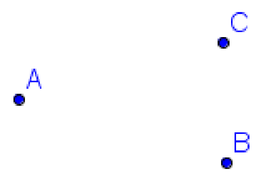
5. Koľko rôznych úsečiek môže byť určených ľubovoľnou dvojicou z bodov *A, B, C* ?

a)

b)



6. Znázornite (vyšrafujte) spoločnú časť polrovín *ABC* a *CBA*.



7. Pomocou grafického sčítania úsečiek zostrojte trojnásobok úsečky *AB*.
8. Na priamke p sú dané tri body *A, B, C*. Pomocou úsečiek určených danými bodmi vyjadrite úsečku *BC*.
9. Dané sú štyri rôzne body *A, B, C, D* v napísanom poradí a ležiace na jednej priamke. Určte prienik:

   a) polpriamok *AB*, *BA*

   b) polpriamok *BC*, *DA*

   c) polpriamok *BA*, *BC*

   d) polpriamok *BA*, *CD*

   e) úsečiek *AC*, *CD*

   f) úsečiek *AC*, *BC*

   g) úsečiek *AD*, *BC*

   h) úsečiek AB, CD

   i) úsečky *AC* a polpriamky *BD*

10. Na priamke *AB* zvoľte bod *C* tak, aby :

    a) neležal vnútri úsečky *AB*

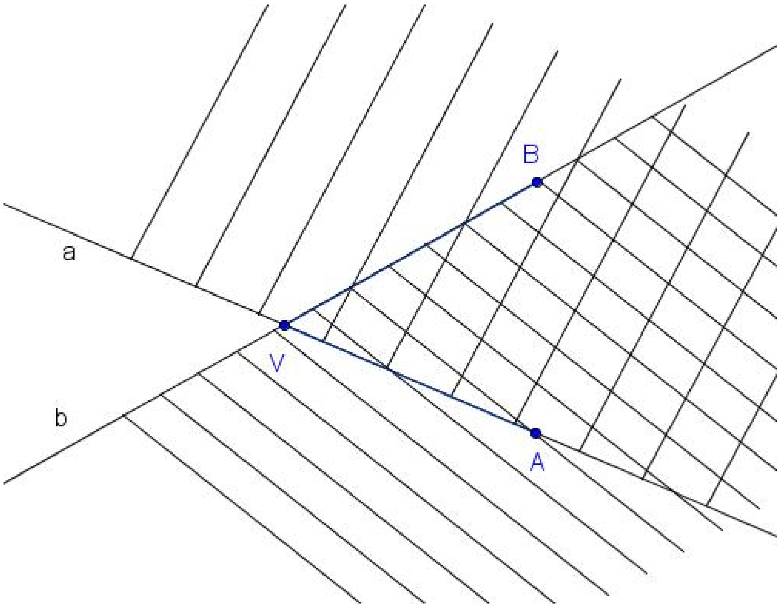
    b) aby ho bod *B* neoddeľoval od bodu *A*.

1.5 Uhol. Konvexný uhol

Nech v rovine sú dané dve rôznobežné priamky a, b. Ich spoločný bod nech je V, bod $A \in a$, $B \in b$. Priamka a rozdeľuje rovinu na dve polroviny VAB, VBA.

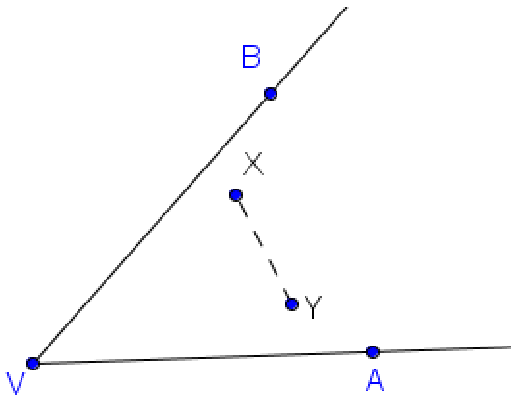
Prienik polrovín VAB, VBA sa nazýva **dutý uhol** $\sphericalangle AVB$.

$\sphericalangle AVB = \overrightarrow{VAB} \cap \overrightarrow{VBA}$

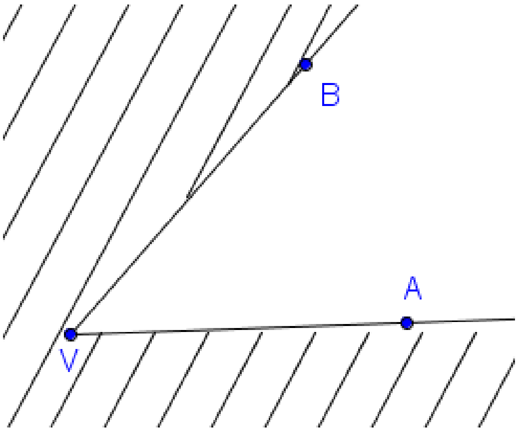


Polpriamky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ sú **ramená** dutého uhla $\sphericalangle AVB$, V je **vrchol** tohto uhla.

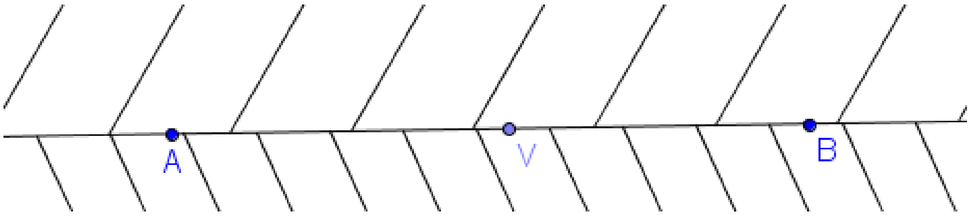
Dutý uhol je **konvexná bodová množina**, pretože úsečka XY určená ktorýmikoľvek bodmi X, Y daného uhla nepretne hranicu, t.j. polpriamky VA, VB. $\sphericalangle AVB$ sa nazýva **konvexný uhol**.



Polpriamky $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ určujú ešte jeden uhol, ktorý budeme značiť $\sphericalangle AVB$. Tento uhol je nekonvexný a budeme ho nazývať **spriaznený** uhol s uhlom $\sphericalangle AVB$.



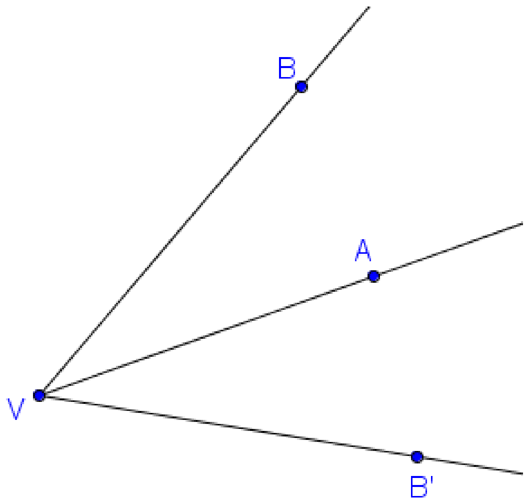
Ak ramená *VA*, *VB* sú navzájom opačné polpriamky, tak vzniknuté uhly sú **priame.**



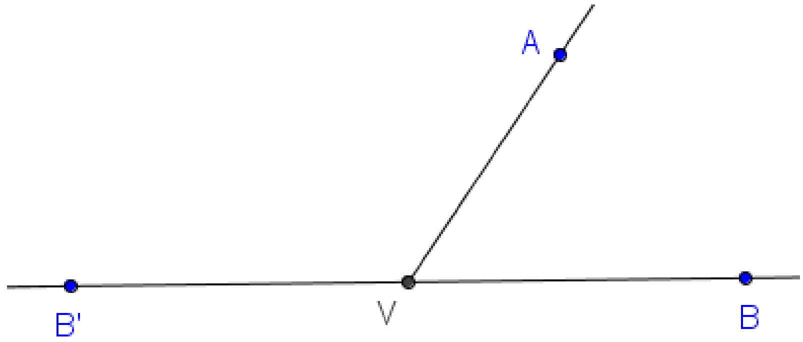
Priamy uhol splýva s polrovinou, ktorej hranica je priamka *AB*.

Ak ramená $\sphericalangle AVB$ splývajú, tak $\sphericalangle AVB$ sa nazýva **nulový** uhol.

Dva konvexné uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB'$ sa nazývajú **styčné** uhly, ak majú spoločné rameno *VA* a ramená *VB*, *VB'* ležia v opačných polrovinách s hranicou *VA*.

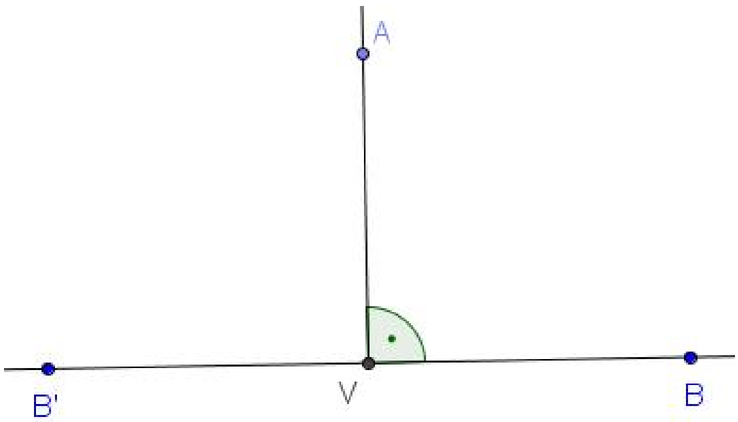


Ak ramená *VB*, *VB'* styčných uhlov $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB'$ tvoria opačné polpriamky, nazývajú sa **susednými** alebo **vedľajšími** uhlami.

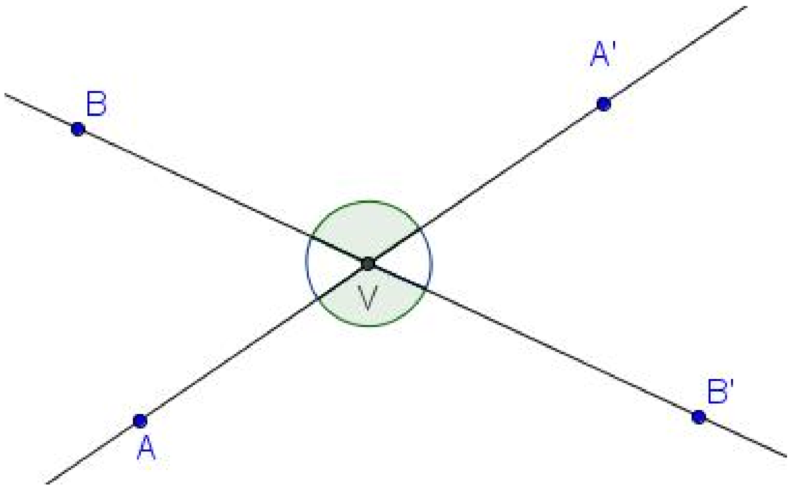


Zjednotením oboch susedných uhlov vznikne priamy uhol.

Ak uhol AVB je zhodný so svojim susedným uhlom, potom tento uhol je **pravý.**

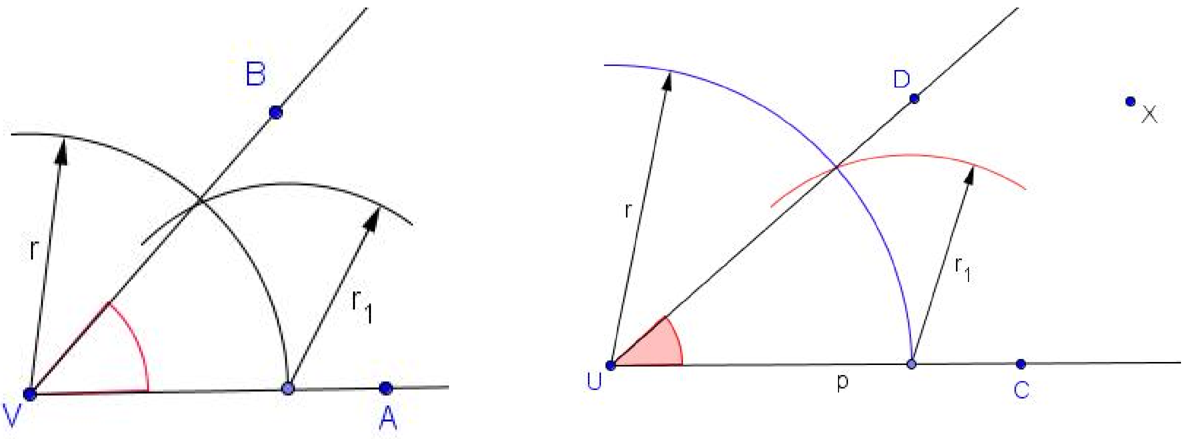


Dve rôznobežné priamky *a, b* určujú štyri dvojice susedných uhlov. Z nich sú dve dvojice **vrcholových** uhlov. Vrcholové uhly majú spoločný vrchol, ich ramená sú opačné polpriamky.



1.6 Prenášanie uhlov a porovnávanie uhlov

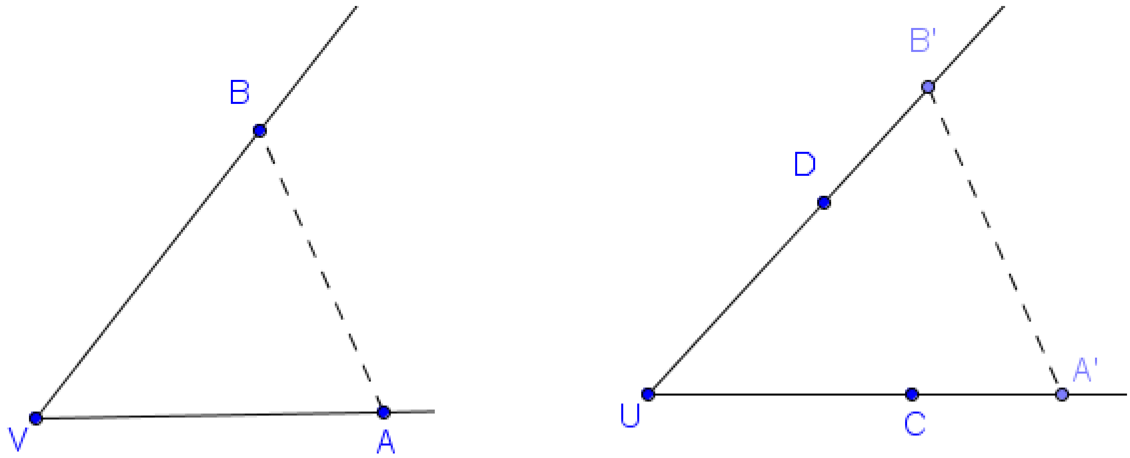
Nech je daný dutý uhol AVB a polrovina určená priamkou p a bodom X.



Zvoľme na priamke p bod U a bod C. Pomocou kružidla zostrojme polpriamku VD (postup vidieť z obrázka). Dostali sme uhol $\sphericalangle CUD$, ktorý vznikol prenesením uhla $\sphericalangle AVB$ do zvolenej polroviny. Uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ sú zhodné (po prenesení sa kryjú).

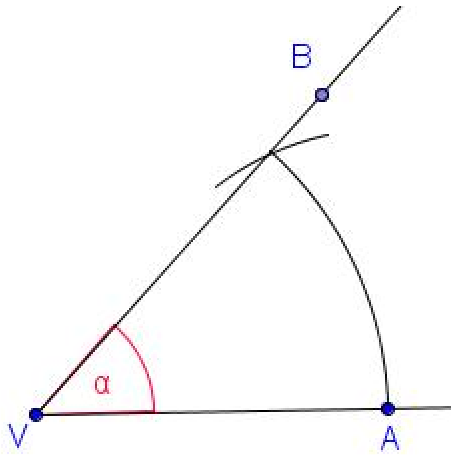
Zhodnosť uhlov môžeme definovať aj nasledovne :

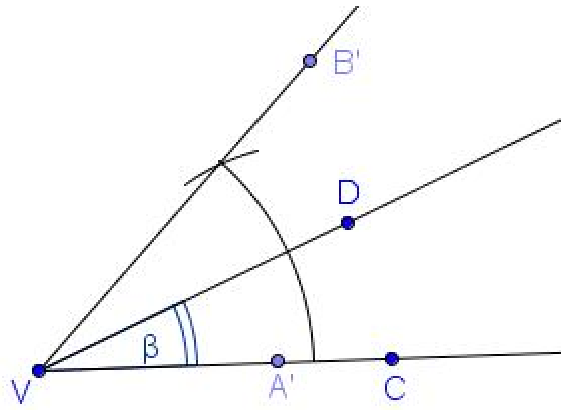
Konvexný uhol $\sphericalangle AVB$ je zhodný s konvexným uhlom $\sphericalangle CUD$ (t.j. $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$) práve vtedy, keď na polpriamkach UC, UD existujú také body A', B', že platí $UA' \cong VA$, $UB' \cong VB$, $A'B' \cong AB$.



Poznámka 1: Zhodnosť konvexných uhlov $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ nezávisí od voľby bodov A, B na ramenách $\sphericalangle AVB$.

Ak máme dva uhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, tieto dva uhly môžeme porovnať, t.j. zistiť, či sú alebo nie sú zhodné. To urobíme nasledovným spôsobom : Uhol $\sphericalangle AVB$ prenesieme tak, aby sa jedno jeho rameno stotožnilo s jedným ramenom uhla $\sphericalangle CUD$. Potom zistíme, či sa stotožnia aj zvyšné ramená. Ak sa stotožnia, potom dané uhly sú zhodné. Ak sa nestotožnia, nie sú zhodné. V našom prípade nie sú zhodné, ale $\sphericalangle AVB$ je väčší ako uhol $\sphericalangle CUD$.

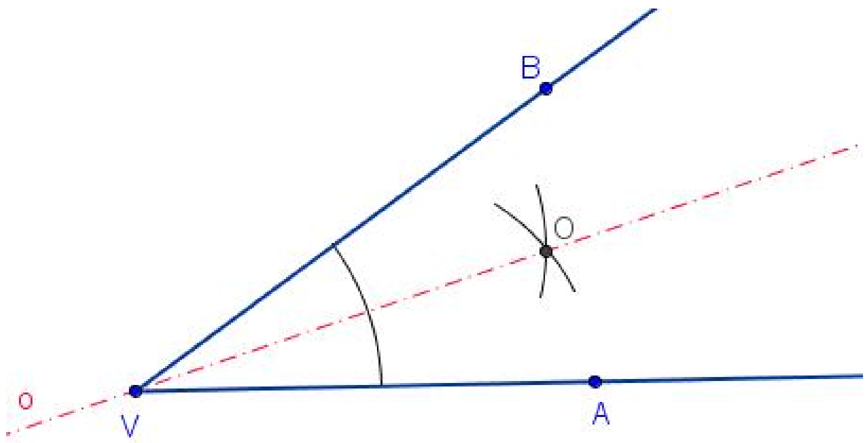




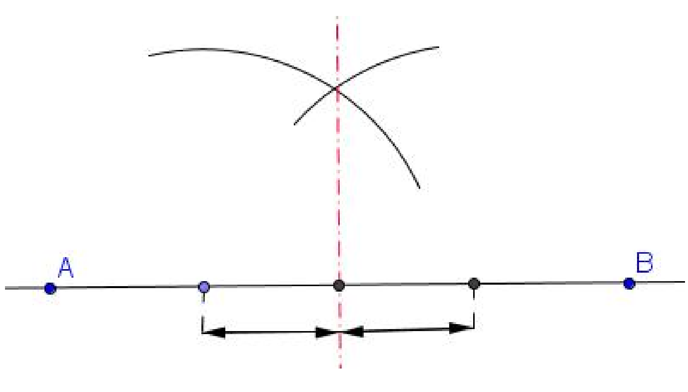
Poznámka 2: Pri porovnávaní dvoch uhlov $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ môže nastať jeden z troch prípadov:

1. $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$
2. $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$
3. $\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD$

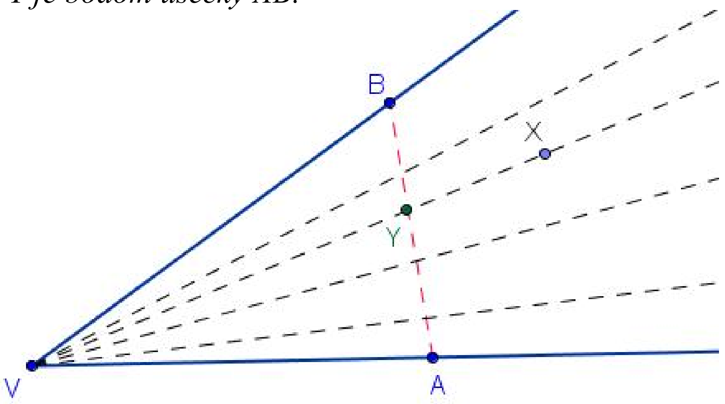
Uhol $\sphericalangle AVB$ možno rozdeliť na dva zhodné uhly. Polpriamka, ktorá delí uhol na dve zhodné časti, sa nazýva **osou** uhla. Jej konštrukcia je znázornená na obrázku.



Os priameho uhla zostrojíme analogicky.



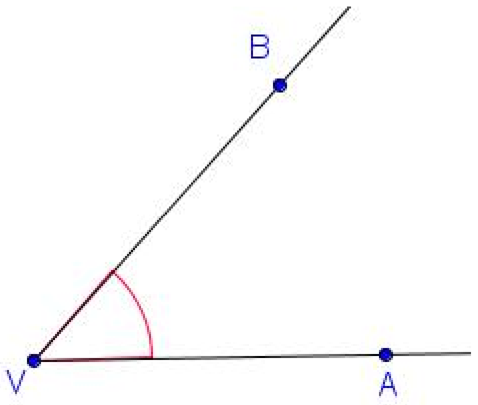
Poznámka 3: Dutý uhol $\sphericalangle AVB$ môžeme chápať aj ako zjednotenie všetkých polpriamok VY za predpokladu, že bod Y je bodom úsečky AB.

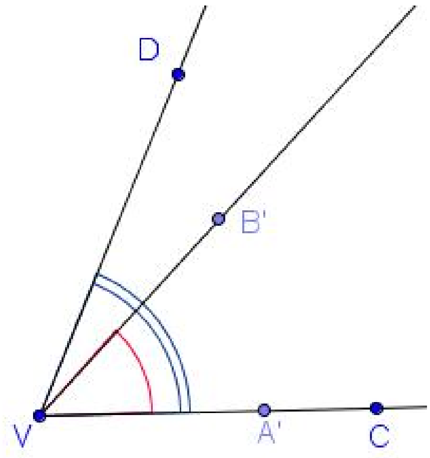


V ďalšom ukážeme možnosti pri porovnávaní uhlov.

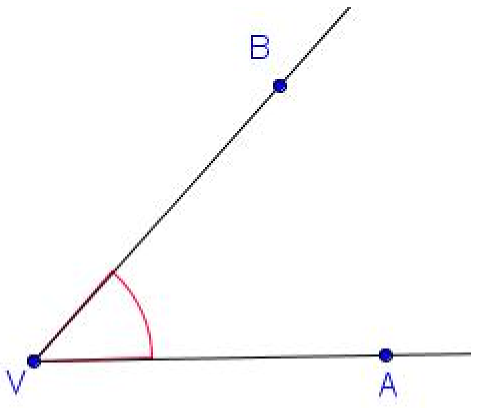
Nech sú dané dva uhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$. Po prenesení $\sphericalangle AVB$ k polpriamke UC do polroviny CUD nastane jedna z týchto troch možností:

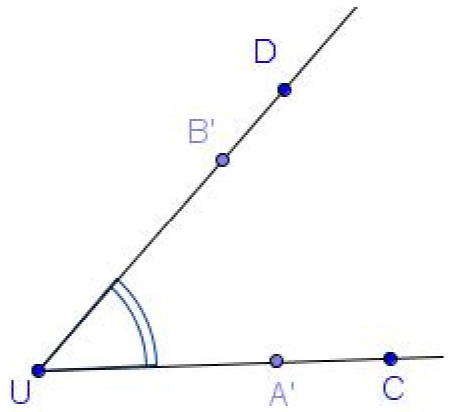
1. Polpriamka *UB'* leží v uhle *CUD*, *B'* neleží v na polpriamke *UD*, hovoríme, že $\sphericalangle AVB$ je menší než $\sphericalangle CUD$, píšeme $\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD$.



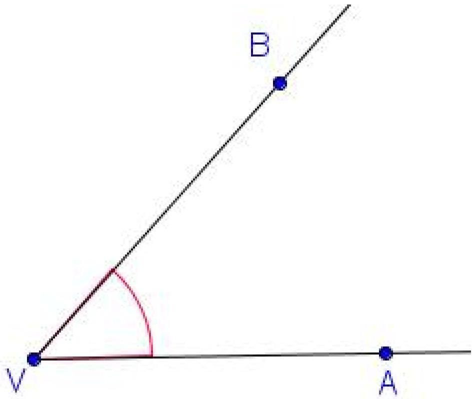


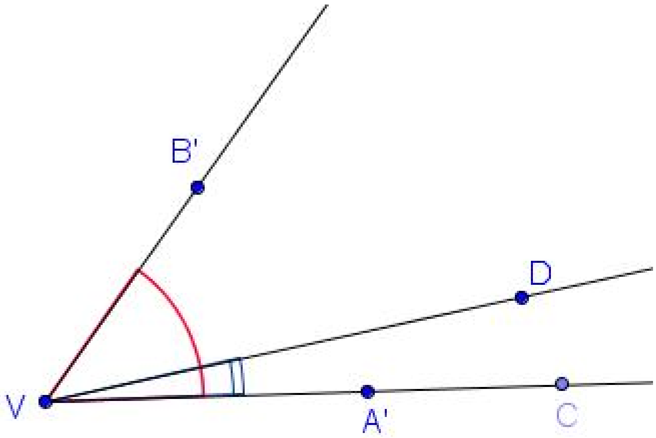
2. Polpriamka *UB'* je totožná s polpriamkou *UD*, vtedy $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$





3. Polpriamka UD leží v uhle $\sphericalangle CUB'$, B' neleží na polpriamke UD, hovoríme, že $\sphericalangle AVB$ je väčší ako $\sphericalangle CUD$, píšeme $\sphericalangle AVB > \sphericalangle CUD$

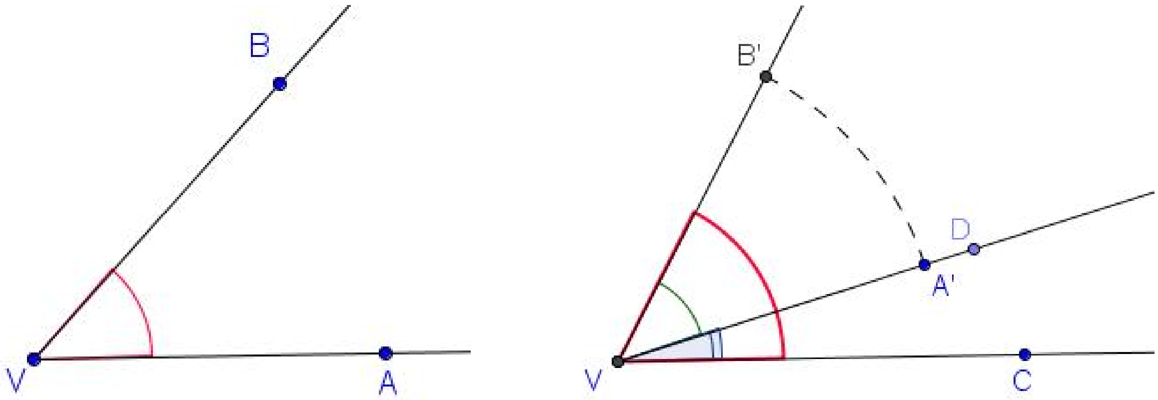




1.7 Grafický súčet a grafický rozdiel uhlov

Ak máme sčítať uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$, prenesieme napr. $\sphericalangle AVB$ k polpriamke UD (jednému z ramien $\sphericalangle CUD$) do polroviny opačnej k polrovine UDC, $\sphericalangle DUB' \cong \sphericalangle AVB$. Potom uhol CUB' nazývame **grafickým súčtom uhlov** $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ a píšeme

$\sphericalangle AVB + \sphericalangle CUD = \sphericalangle CUB'$.

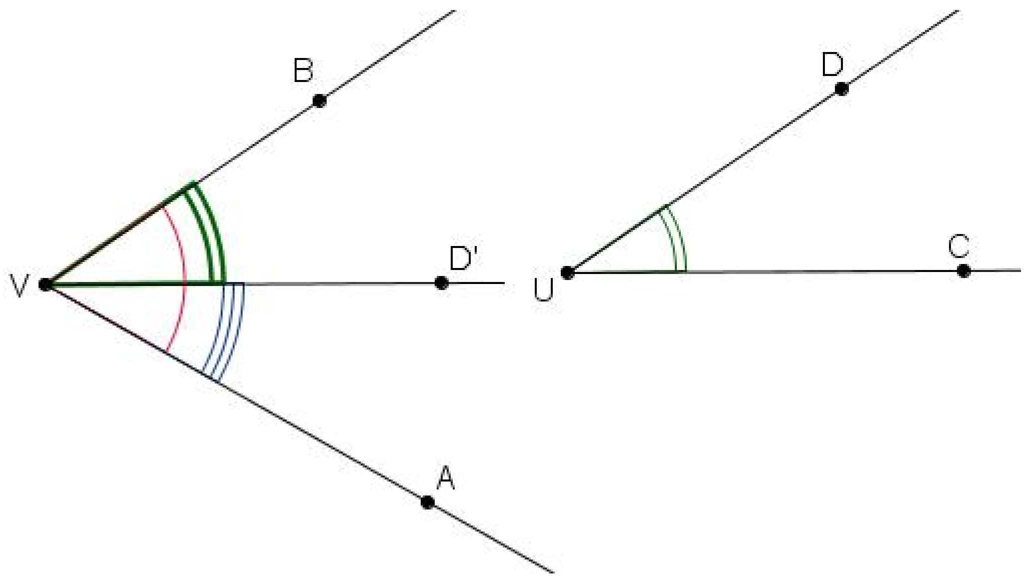


Poznámka:
1. Grafický súčet dvoch konvexných uhlov vždy existuje.
*2. Súčet dvoch priamych uhlov je uhol **plný** (celá rovina), obrázok si čitateľ urobí sám.*

Pri grafickom rozdiele uhlov postupujeme nasledovne:

Nech sú dané uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$. Ak chceme odčítať uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$, prenesieme $\sphericalangle CUD$ k jednému z ramien $\sphericalangle AVB$ do tej polroviny, v ktorej leží $\sphericalangle AVB$. Na našom obrázku sme preniesli $\sphericalangle CUD$ k ramenu VB do polroviny VBA, $\sphericalangle CUD \cong \sphericalangle BVD'$. Potom uhol $\sphericalangle AVD'$ sa nazýva grafický rozdiel uhlov $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$, píšeme

$\sphericalangle AVB - \sphericalangle CUD = \sphericalangle AVD'$.



Cvičenia

1. Je daná rovina. Zvoľte v nej tri body *A, B, C* neležiace na jednej priamke. Zapíšte všetky polroviny určené týmito bodmi.

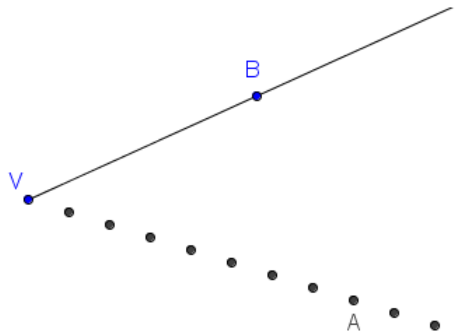
2. Načrtnite uhol $\sphericalangle AVB = \overrightarrow{VAB} \cap \overrightarrow{VBA}$ a určte, čo je prienikom :

a) polroviny $\overrightarrow{VAB}$ a polroviny opačnej k polrovine $\overrightarrow{VBA}$

b) polroviny $\overrightarrow{VBA}$ a polroviny opačnej k polrovine $\overrightarrow{VAB}$

c) polrovín opačných k polrovinám $\overrightarrow{VAB}$, $\overrightarrow{VBA}$.

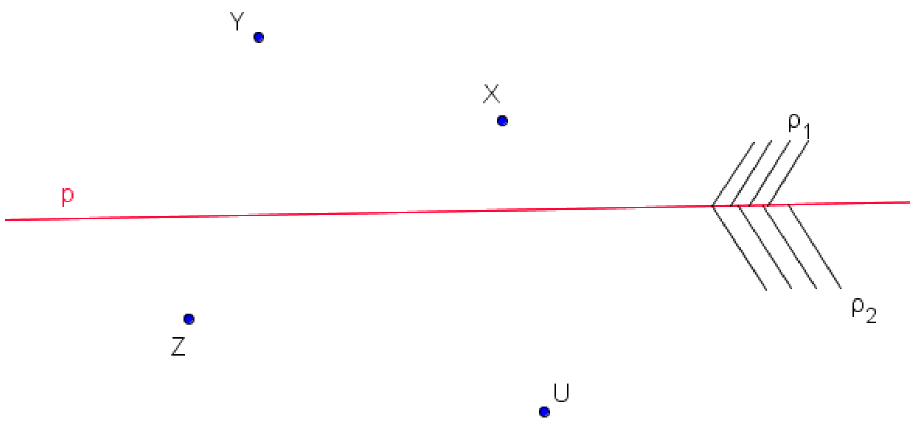
3. Daný je dutý uhol $\sphericalangle AVB$. Zistite, či útvar zložený z vnútra dutého uhla a vnútra jedného jeho ramena je konvexný.



4. Priamka *p* je hranicou dvoch opačných polrovín ρ_1, ρ_2. Vnútri polroviny ρ_1 sú dané dva rôzne body *X, Y* a vnútri polroviny ρ_2 dva rôzne body *U, Z.*

a) Na priamke $\overleftrightarrow{XY}$ zvoľte bod *M* a na priamke $\overleftrightarrow{ZU}$ bod *N* tak, aby úsečka *MN* určite preťala hranicu *p*.

b) Akú polohu musia mať priamky $\overleftrightarrow{XY}$ a $\overleftrightarrow{ZU}$ vzhľadom na hranicu *p*, aby každá úsečka *MN* preťala hranicu *p* ?



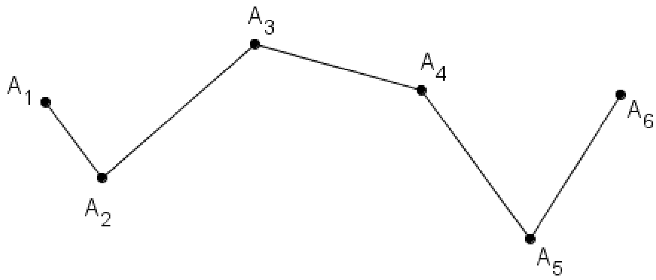
5. Zvoľte si dva ľubovoľné duté uhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$. Zostrojte uhol, ktorý bude :

a) grafickým súčtom daných dvoch uhlov

b) grafickým rozdielom daných dvoch uhlov

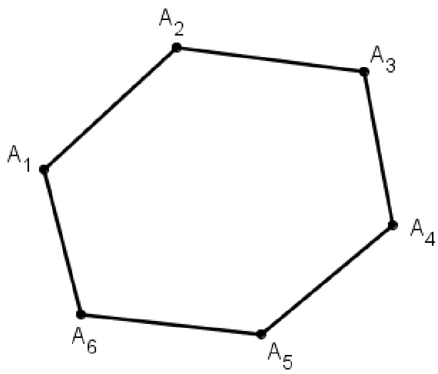
1.8 Mnohouholníky

Lomená čiara $A_1A_2A_3A_4 ...A_n$ ($n > 2$) sa skladá z úsečiek A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, z ktorých každé dve susedné majú spoločný jeden krajný bod a neležia na jednej priamke (na obrázku $n = 6$).



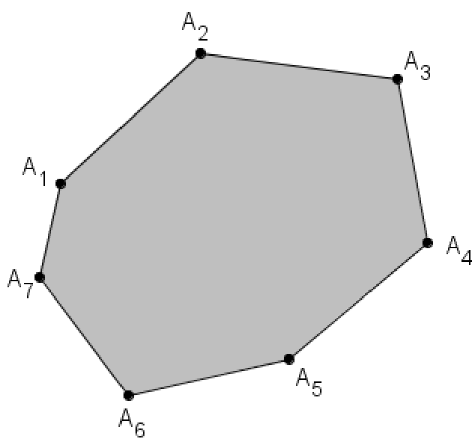
Body $A_1, A_2, A_3, \dots , A_{n-1}, A_n$ sa nazývajú **vrcholy** a úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \dots , A_{n-1}A_n$ **strany** lomenej čiary.

Lomená čiara, ktorej strany sú $A_1A_2, A_2A_3, \dots , A_{n-1}A_n, A_nA_1$ sa nazýva **uzavretá lomená čiara** (na obrázku $n = 6$).

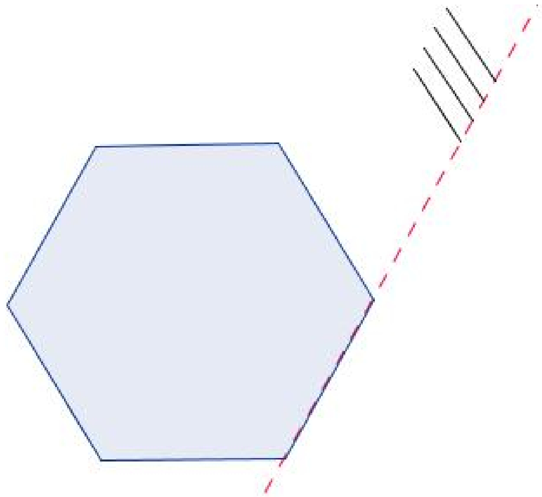


Uzavretá lomená čiara spolu s časťou roviny ohraničenou touto lomenou čiarou sa nazýva **mnohouholník** (***n*-uholník**).

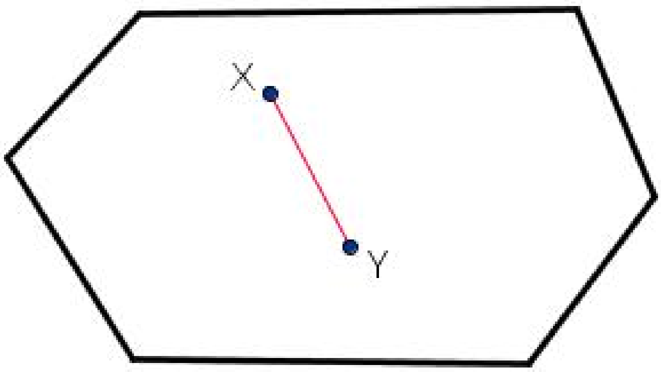
Uzavretá lomená čiara, ktorá ohraničuje mnohouholník, sa nazýva **hranica** mnohouholníka. Strany a vrcholy hranice sú strany a vrcholy mnohouholníka.



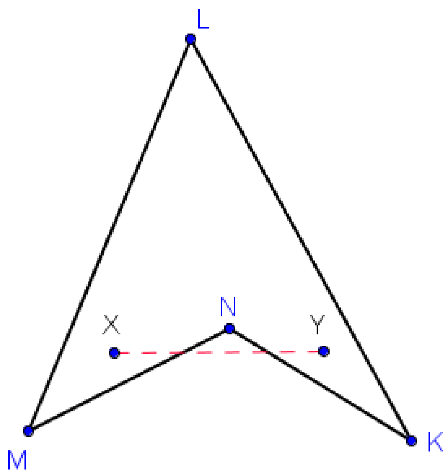
Ak mnohouholník leží vždy v jednej z polrovín určených ktoroukoľvek jeho stranou, nazýva sa **vypuklý** (konvexný) mnohouholník.



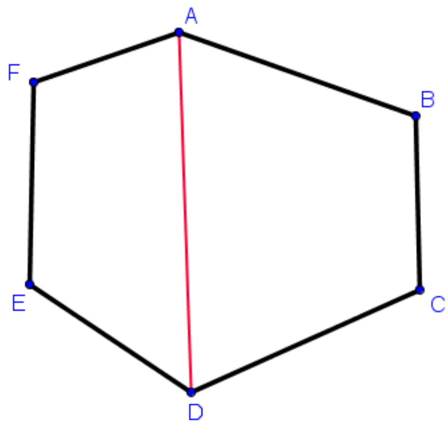
Na určenie konvexnosti mnohouholníka môžeme použiť aj kritérium konvexnosti uhla. Vyslovte toto kritérium pre mnohouholník !



Mnohouholník *KLMN* je nekonvexný.



Uhlopriečka mnohouholníka je úsečka určená dvoma nesusednými vrcholmi.



Počet uhlopriečok vypuklého n-uholníka je

$$\boxed{P_n = \frac{n(n-3)}{2}},$$

čo vyplýva z toho, že z jedného vrcholu vychádza (n - 3) uhlopriečok a každú počítame dvakrát.

Príklad

Porovnajte počet uhlopriečok vo vypuklom šesťuholníku a desaťuholníku.

Riešenie

Počet uhlopriečok v šesťuholníku je

$$P_6 = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

Počet uhlopriečok v desaťuholníku je

$$P_{10} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

Odpoveď: V desaťuholníku je počet uhlopriečok o 26 väčší ako v šesťuholníku.

Príklad

Počet uhlopriečok n-uholníka je o 26 menší ako počet uhlopriečok vypuklého (n + 4)-uholníka. Určte počet strán obidvoch mnohouholníkov.

Riešenie

Počet uhlopriečok jedného je

$$P_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Počet uhlopriečok vypuklého (n + 4)-uholníka je

$$P_{n+4} = \frac{(n+4)(n+1)}{2}$$

Z podmienky úlohy vyplýva

$$P_{n+4} = P_n + 26$$

Po dosadení za P_n a P_{n+4} dostaneme rovnicu

$$\frac{(n+4)(n+1)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 26,$$

ktorej koreňom je $n = 6$.

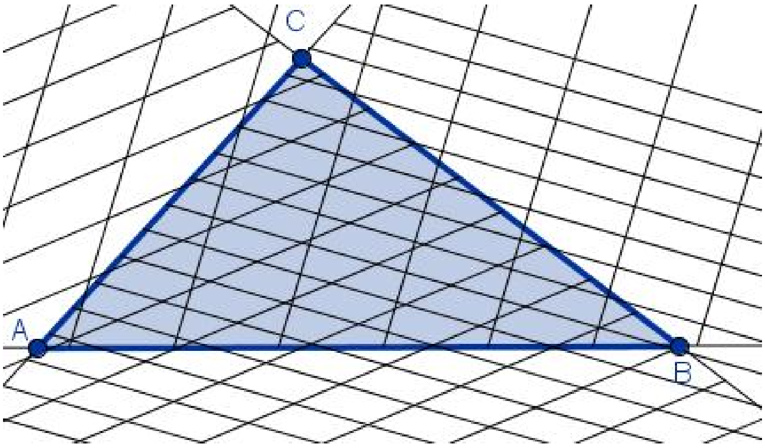
Odpoveď: Úlohe vyhovuje šesťuholník a desaťuholník.

Cvičenia

1. Narysujte ľubovoľný konvexný mnohouholník.
2. Narysujte ľubovoľný nekonvexný mnohouholník, v ktorom počet strán je väčší ako štyri.
3. Narysujte päťuholník a vyznačte v ňom uhlopriečky.
4. Vypočítajte počet uhlopriečok v sto-uholníku.
5. Zistite, o koľko viac je uhlopriečok v dvadsaťpäťuholníku ako v päťuholníku.

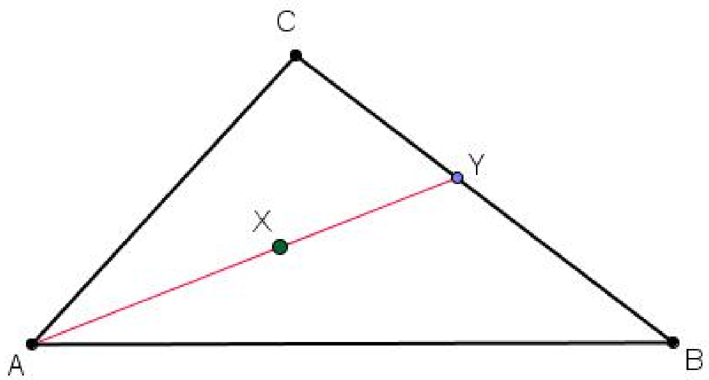
1.9 Trojuholník

Trojuholník ABC tvorí množina všetkých bodov, ktoré súčasne ležia v polrovinách $\overrightarrow{ABC}$, $\overrightarrow{BCA}$, $\overrightarrow{CAB}$, pričom body A, B, C neležia na jednej priamke.

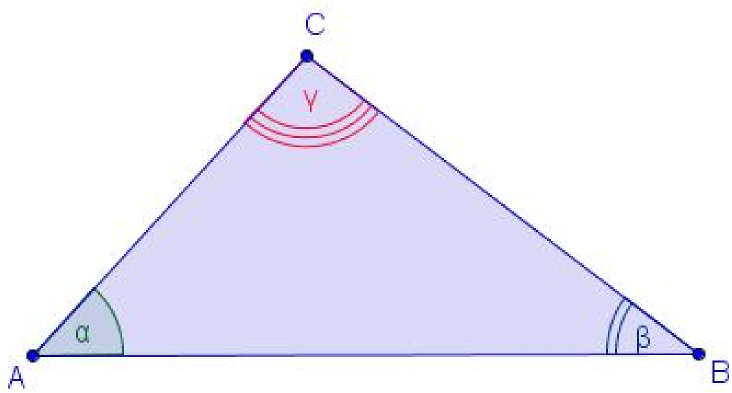


$$\triangle ABC = \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{CAB}$$

Trojuholník ABC možno chápať aj ako množinu všetkých bodov X úsečky AY, kde bod Y prebieha úsečku BC.



Teda na obrázku je vyznačená množina bodov v rovine, ktorej hovoríme trojuholník ABC.



Pripomeňme pomenovanie jednotlivých prvkov trojuholníka :

body A, B, C **vrcholy** ΔABC

úsečky AB, BC, CA **strany** ΔABC

uhly CAB, ABC, BCA **vnútorné uhly** ΔABC

Poznámka: 1. Strany trojuholníka označujeme aj malými písmenami (v súhlase s protiľahlými vrcholmi) :

$a = BC,\ b = CA,\ c = AB$

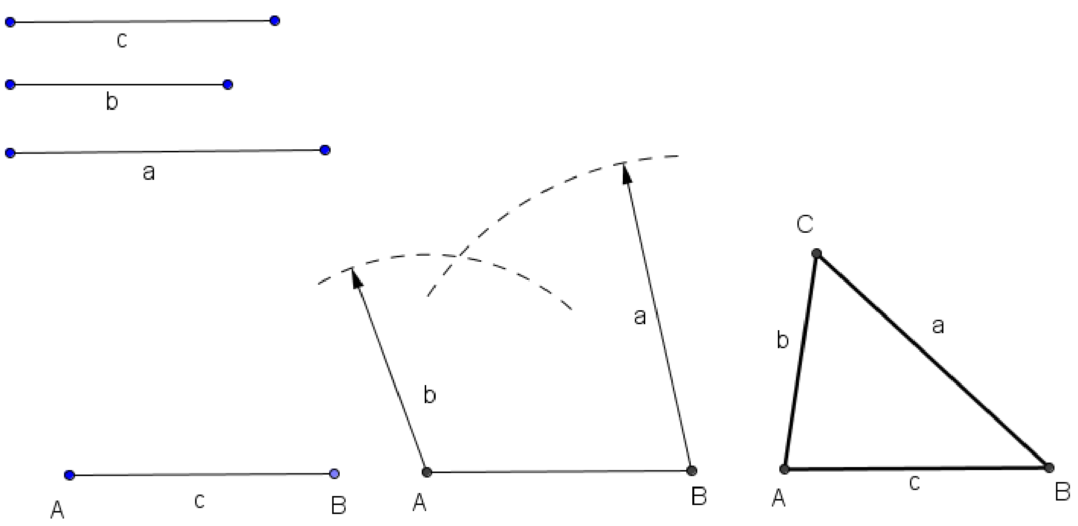
2. Vnútorné uhly ΔABC označujeme písmenami gréckej abecedy : $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Ako zostrojíme trojuholník ?

Trojuholník považujeme za zostrojený, ak sú narysované všetky tri jeho strany.

Základná konštrukcia trojuholníka ABC je, ak sú dané všetky tri jeho vrcholy A, B, C. Môžu to byť ľubovoľné tri body roviny, ktoré neležia na jednej priamke.

Pripomeňme si konštrukciu trojuholníka v prípade, že sú dané dĺžky troch jeho strán (tieto strany nemôžu byť dané ako tri úsečky).



Pre strany trojuholníka ABC platí tzv. **trojuholníková nerovnosť**:

Súčet každých dvoch strán trojuholníka je väčší ako tretia strana.

$$a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b$$

Cvičenia

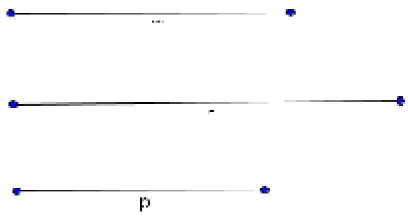
1. Zostrojte trojuholník ABC, ak jed dané :

a) $|AB| = |BC| = |CA|$ = 7 cm

b) a = 6 cm, b = 4 cm, c = 2 cm

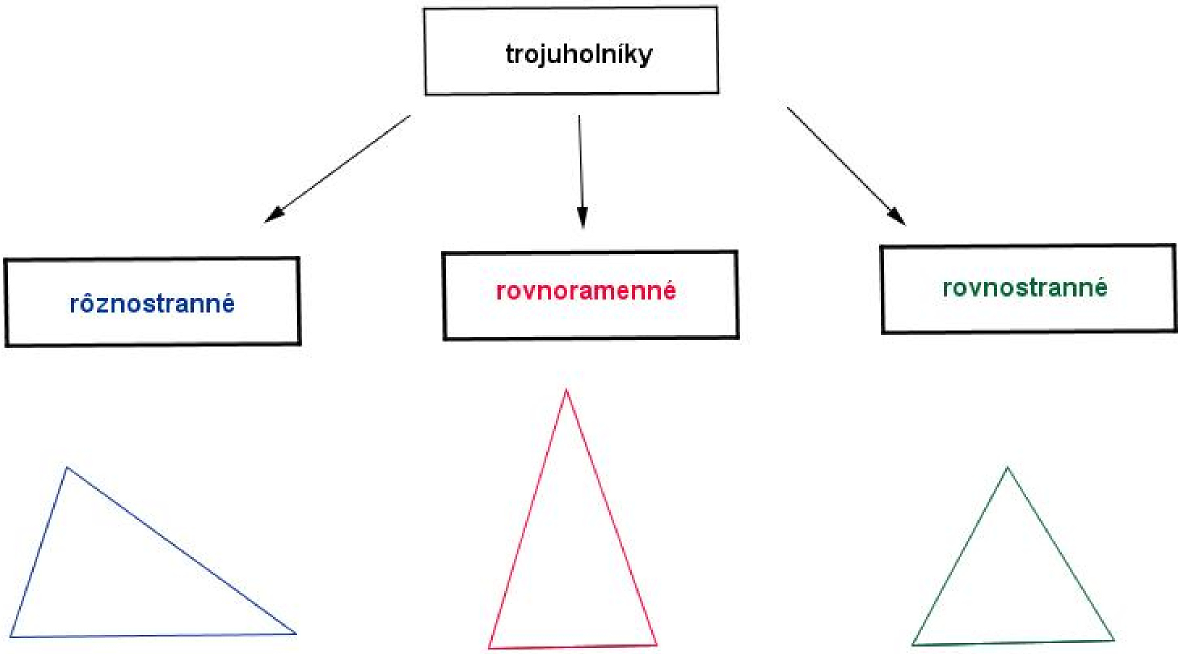
c) $|AB|$ = 5 cm, $|BC|$ = 3,5 cm, $|CA|$ = 3,5 cm.

2. Dané sú tri úsečky m, n, p. Zistite, či možno z nich zostrojiť trojuholník.



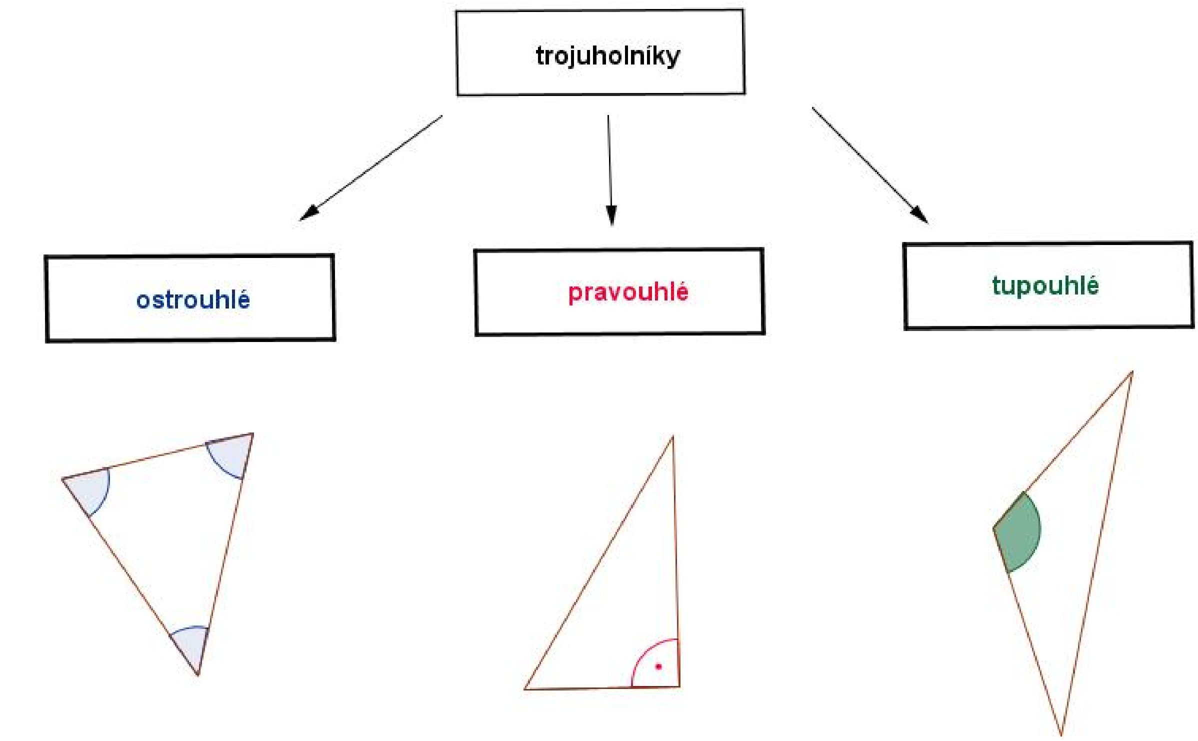
3. Daná je úsečka AB a priamka $m \parallel AB$. Zostrojte ΔABC tak, aby jeho vrcholy boli body A, B a vrchol C ležal na priamke m. Koľko trojuholníkov možno zostrojiť ?

Ako delíme trojuholníky podľa dĺžok strán ?



všetky tri strany sú rôzne | dve strany sú zhodné | všetky tri strany sú zhodné

Ako delíme trojuholníky podľa veľkosti uhlov ?



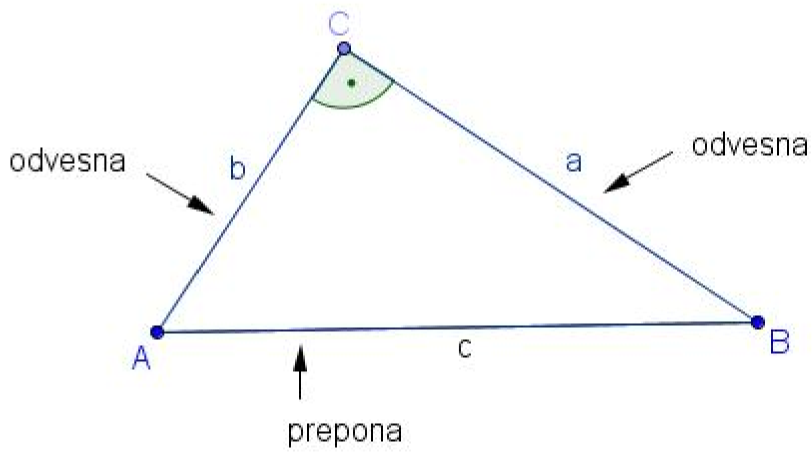
všetky tri vnútorné uhly sú **ostré**	práve jeden vnútorný uhol je **pravý**	práve jeden vnútorný uhol je **tupý**

Ako sa nazývajú strany pravouhlého trojuholníka ?

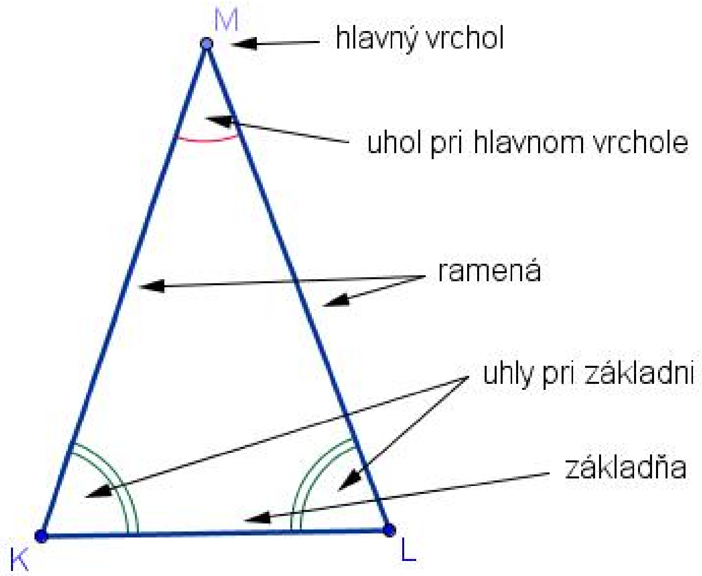
Strany pravouhlého trojuholníka majú špeciálne názvy.

Prepona je strana, ktorá leží oproti pravému uhlu.

Odvesny sú ďalšie dve strany trojuholníka.

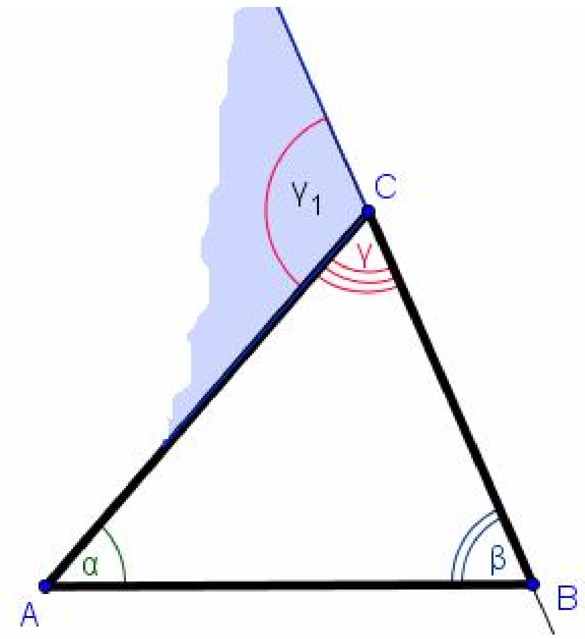


Ako sa nazývajú strany rovnoramenného trojuholníka ?



Zhodné strany KM, LM sa nazývajú **ramená** trojuholníka, tretia strana sa nazýva **základňa.**

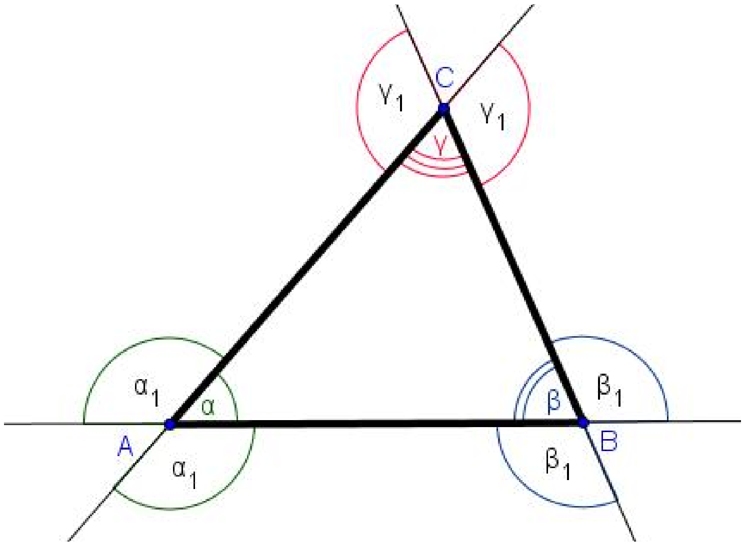
Čo je vonkajší uhol trojuholníka ?



Na obrázku je trojuholník ABC. Jeho strana BC je predĺžená za vrchol C. Uhol γ_1 sa nazýva **vonkajší** uhol trojuholníka ABC pri vrchole C.

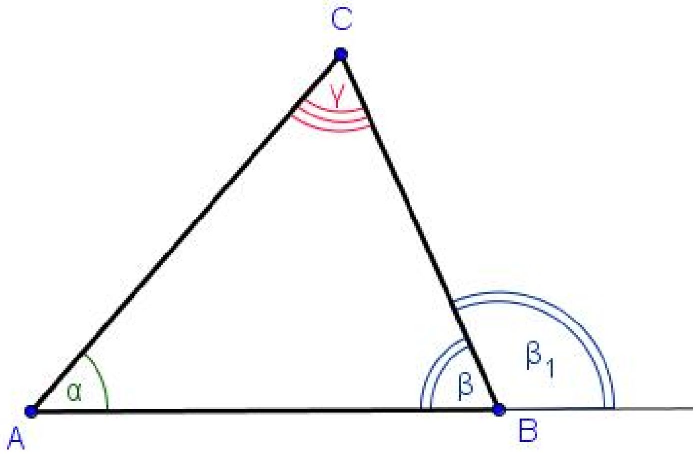
Pretože uhly γ a γ_1 sú susedné, ich grafický súčet je priamy uhol.

Každý trojuholník má tri vnútorné uhly a šesť vonkajších uhlov (pozri obrázok).

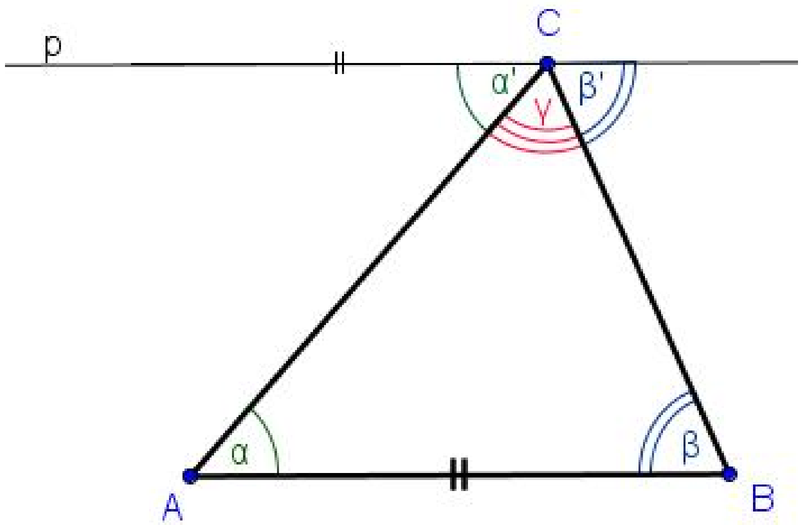


$$\alpha_1 \cong \alpha_2, \beta_1 \cong \beta_2, \gamma_1 \cong \gamma_2$$

Súčet vnútorného a vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole je priamy uhol.



Pozorujme obrázok, na ktorom sú vyznačené vnútorné uhly trojuholníka *ABC*, priamka *p* rovnobežná s priamkou *AB*. O vyznačených uhloch *α, α', γ, β, β'* platí:



Uhly *α, α' a β, β'* tvoria dvojice striedavých uhlov, sú zhodné :

$\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta'$

Súčet $\alpha + \beta + \gamma$ sa rovná súčtu $\alpha' + \beta' + \gamma$. Preto:

Súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je priamy uhol.

Cvičenia

1. Narysujte ľubovoľný :

a) ostrouhlý trojuholník *KLM*

b) pravouhlý trojuholník *RST*

c) tupouhlý trojuholník *XYZ*

V pravouhlom a tupouhlom trojuholníku vyznačte farebne najdlhšiu stranu a najväčší vnútorný uhol.

2. Pomenujte strany pravouhlého trojuholníka *KLM*, ak poznáte ich dĺžky :

a) $|KL| = 3$ cm, $|LM| = 5$ cm, $|KM| = 4$ cm

b) $|KL| = 13$ cm, $|LM| = 5$ cm, $|KM| = 12$ cm

3. Rozhodnite, či existuje trojuholník :

a) s dvoma pravými vnútornými uhlami

b) s dvoma tupými vnútornými uhlami

4. Určte súčet ostrých vnútorných uhlov v ľubovoľnom pravouhlom trojuholníku.

5. Zdôvodnite, prečo v ľubovoľnom trojuholníku *ABC* platí :

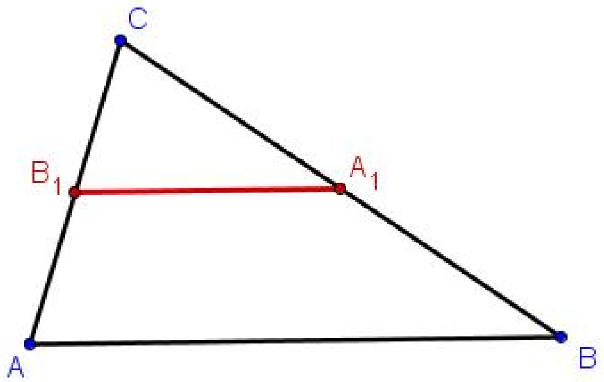
Vonkajší uhol pri vrchole *A* sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri vrcholoch *B* a *C*.

1.9.1 Dôležité úsečky (priamky) v trojuholníku

V ďalšom sa budeme venovať dôležitým úsečkám (priamkam) v trojuholníku.

a) *Čo je stredná priečka trojuholníka*?

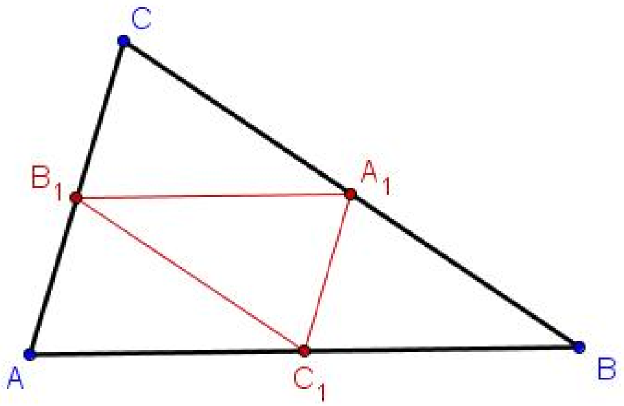
Nech je opäť daný trojuholník ABC. Vyznačme stred A_1 strany BC a stred B_1 strany AC. Úsečka A_1B_1 sa nazýva **stredná priečka** trojuholníka ABC.



Ak porovnáme úsečku A_1B_1 s úsečkou AB, tak zistíme, že:

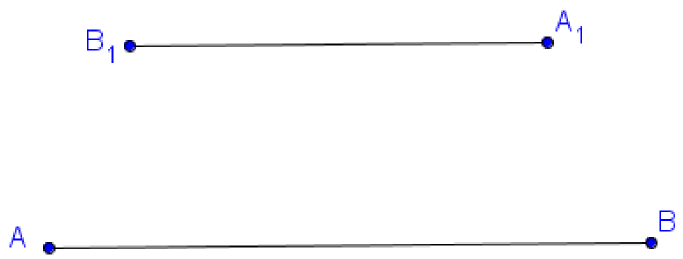
Stredná priečka trojuholníka je rovnobežná s jeho treťou stranou a je polovicou tejto strany.

Ak zostrojíme stred C_1 strany AB, zistíme, že v trojuholníku sú tri stredné priečky.

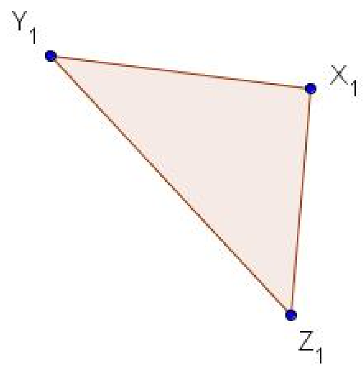


Cvičenia

1. Je daná úsečka AB a s ňou rovnobežná úsečka A_1B_1. Zostrojte trojuholník ABC, keď AB je jeho strana a A_1B_1 je jeho stredná priečka.



2. Vysvetlite, prečo k danému trojuholníku $X_1Y_1Z_1$ možno zostrojiť jediný trojuholník ABC, ktorého stredné priečky sú úsečky X_1Y_1, Y_1Z_1 a Z_1X_1. Popíšte, ako trojuholník XYZ môžeme zostrojiť !



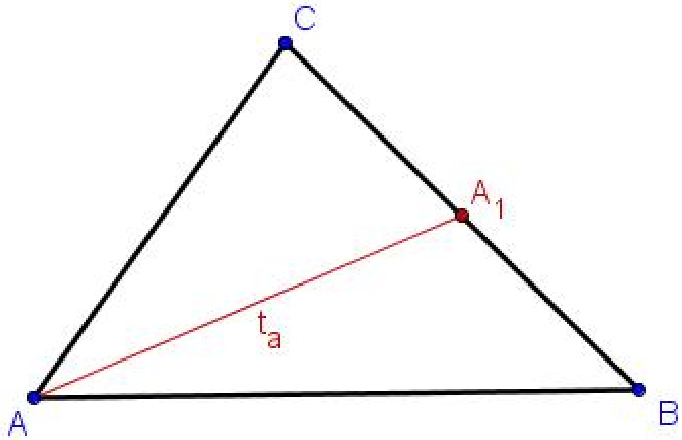
3. Určte dĺžky strán trojuholníka, ak poznáme dĺžky jeho stredných priečok : 2 cm, 4 cm, 3 cm.
4. Narysujte ľubovoľný tupouhlý trojuholník. Narysujte jeho stredné priečky. Overte, že trojuholník je strednými priečkami rozdelený na 4 trojuholníky, ktoré sú taktiež tupouhlé.
5. Zistite, či existuje trojuholník, ktorého dve strany majú dĺžky 4 cm a 7 cm a stredná priečka, ktorá je rovnobežná s treťou stranou, má dĺžku

   a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm

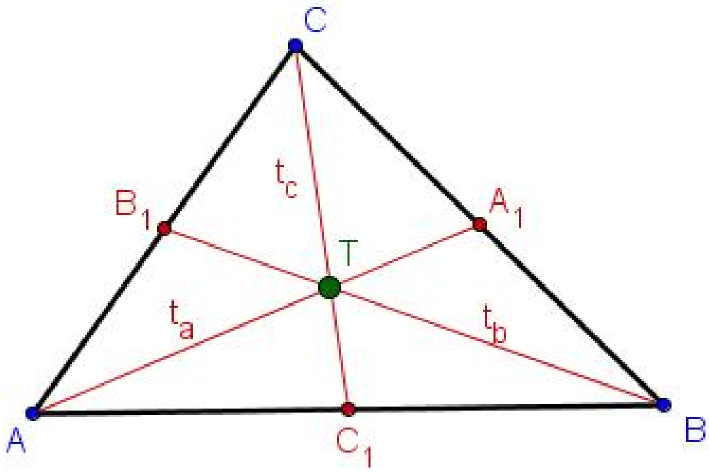
   e) 5 cm f) 6 cm g) 7 cm h) 8 cm

a) *Čo je ťažnica trojuholníka* ?

Opäť budeme uvažovať o trojuholníku ABC. Vyznačme v ňom stred A_1 strany BC a zostrojme úsečku AA_1. Úsečka AA_1 sa nazýva **ťažnica** prechádzajúca vrcholom A. Ťažnicu AA_1 budeme označovať t_a.

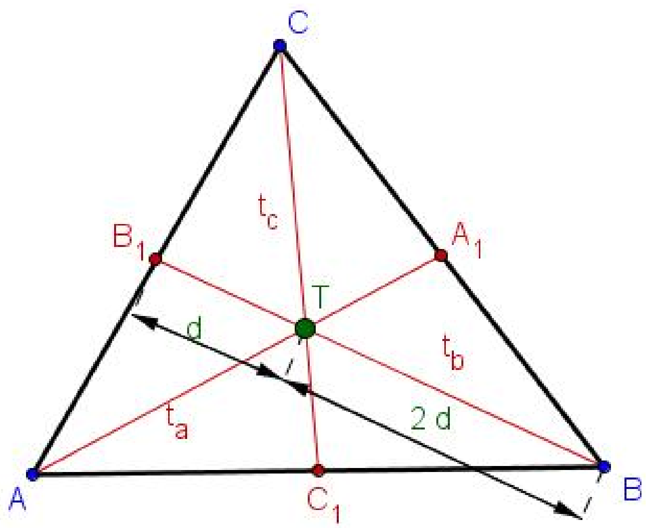


Každý trojuholník má tri ťažnice. Ťažnice trojuholníka *ABC* budeme označovať t_a, t_b, t_c.



Ak presne rysujeme, zistíme, že ťažnice sa pretínajú v jednom bode. Tento bod sa nazýva **ťažisko** trojuholníka. Ťažisko budeme označovať písmenom *T*.

Každá ťažnica je bodom *T* rozdelená na dve úsečky rôznych dĺžok. Dlhšia z nich obsahuje vrchol trojuholníka, kratšia stred protiľahlej strany. Dlhšia časť má dvojnásobnú dĺžku než jej kratšia časť.

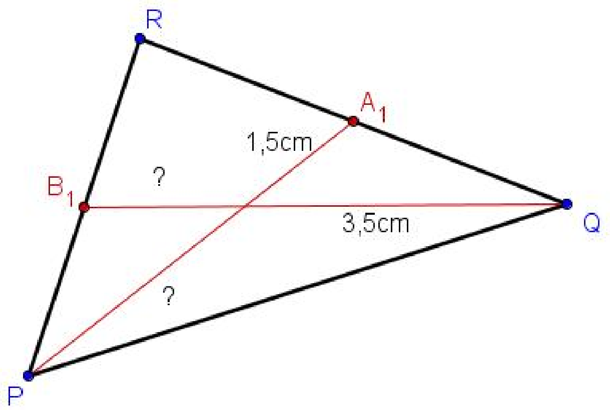


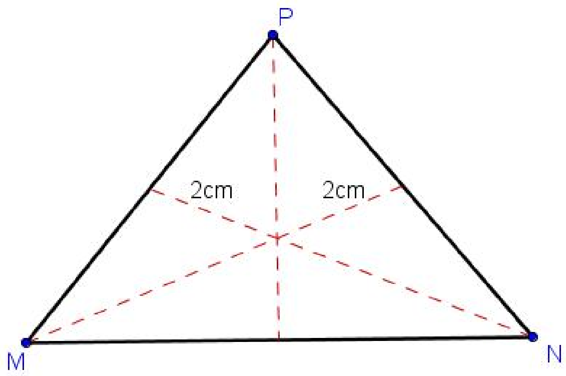
Zapíšme:

Ťažnica trojuholníka je úsečka určená vrcholom a stredom protiľahlej strany. Všetky tri ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode – v ťažisku trojuholníka. Ťažisko rozdeľuje každú ťažnicu na dve úsečky. Dlhšia časť obsahuje vrchol a je dvakrát dlhšia než druhá časť.

Cvičenia

1. Doplňte chýbajúce údaje v náčrtku trojuholníka s ťažnicami.



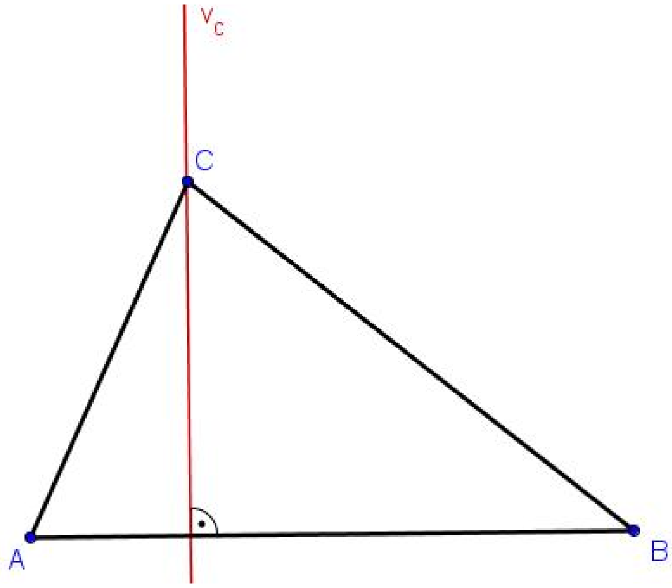


2. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník EFG. Narysujte jeho ťažnice a zmerajte dĺžky týchto ťažníc.
3. Narysujte rovnoramenný pravouhlý trojuholník, zostrojte jeho ťažnice a zmerajte dĺžky jeho ťažníc.
4. Zostrojte trojuholník ABT, ak $|AB| = 8{,}7$ cm, $|BT| = 5$ cm, $|AT| = 4$ cm. Potom narysujte trojuholník ABC tak, aby bod T bol jeho ťažiskom.
5. Daný je trojuholník ABC. Body A_1, B_1, C_1 sú stredy strán $\triangle ABC$. Zostrojte ťažisko trojuholníka ABC, aj trojuholníka $A_1B_1C_1$. Zistite ich vzájomnú polohu.

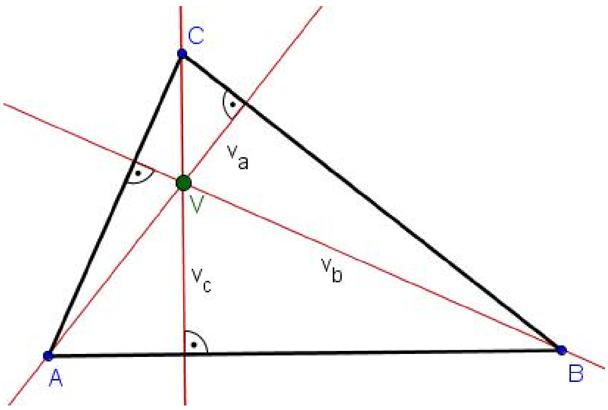
b) *Čo je výška trojuholníka*?

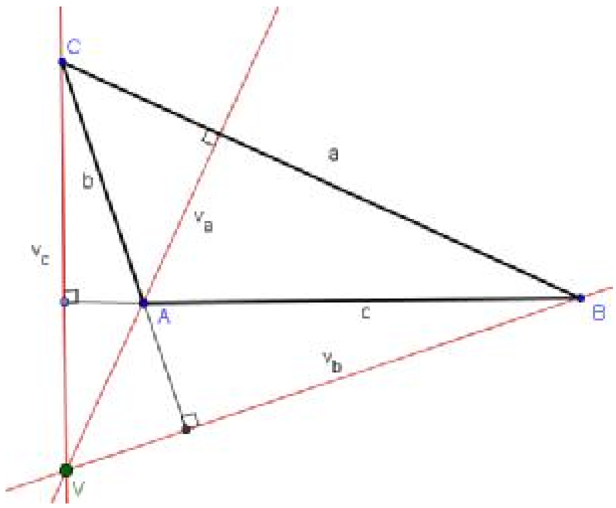
Na obrázku je narysovaný trojuholník ABC. Zostrojme vrcholom C kolmicu na priamku AB. Túto kolmicu nazveme **výškou** trojuholníka. Označíme ju v_c.

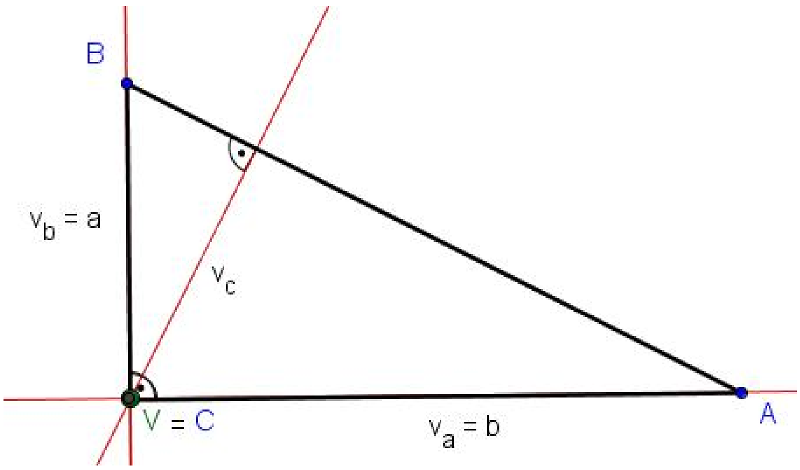
Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva výška trojuholníka.



Pretože trojuholník má tri vrcholy, každý trojuholník má tri výšky. Budeme ich označovať v_a, v_b, v_c.







Výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode *V*.

Tento bod nazývame priesečník výšok alebo ortocentrum.

Zapamätajme si:

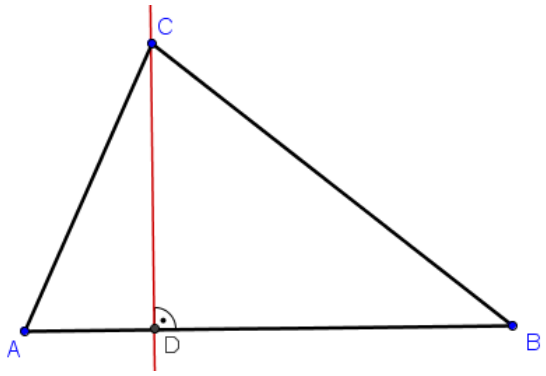
V ostrouhlom trojuholníku je bod *V* vnútorným bodom trojuholníka.

V tupouhlom trojuholníku bod *V* leží mimo trojuholníka.

V pravouhlom trojuholníku bod *V* splýva s vrcholom pravého uhla.

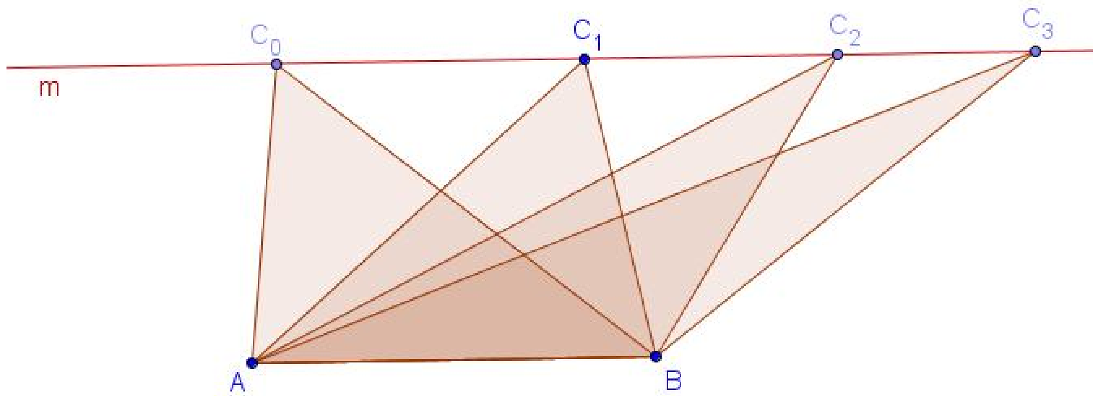
Poznámka: Názov výška trojuholníka má tri významy, znamená:

a) priamku CD
b) úsečku CD
c) dĺžku úsečky CD

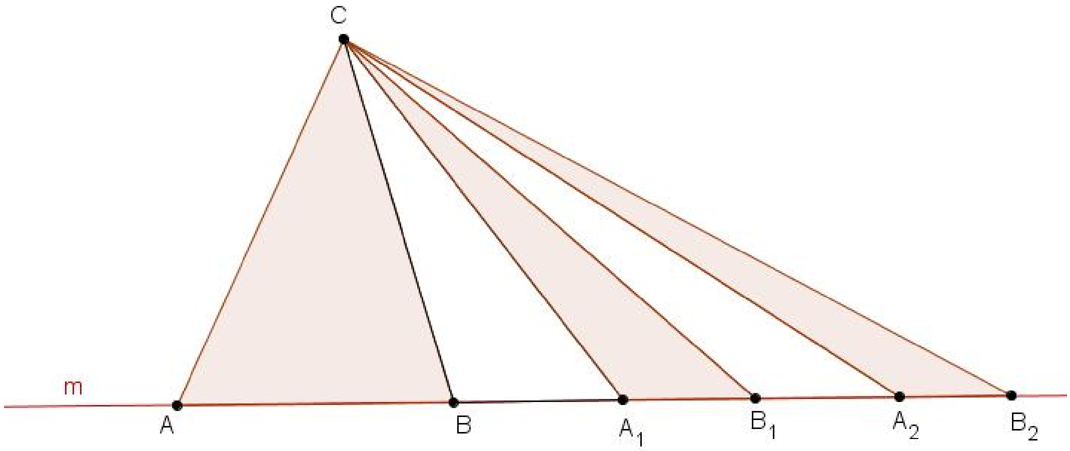


Cvičenia

1. Narysujte ostrouhlý trojuholník *ABC*. Vyznačte v ňom výšky a priesečník výšok.
2. Narysujte ľubovoľný ostrouhlý rôznostranný trojuholník *ABC*. Vyznačte v ňom výšku v_c a ťažnicu t_c. Porovnajte tieto úsečky.
3. Narysujte ľubovoľný rovnostranný trojuholník *MNP*. Zostrojte v ňom výšku v_a a ťažnicu t_a. Čo platí o ich polohe a dĺžke ? Vyslovená vlastnosť platí aj pre ďalšie výšky a ťažnice ?
4. Narysujte ľubovoľný tupouhlý trojuholník *MNP*. Zostrojte priesečník výšok daného trojuholníka.
5. Aký trojuholník má dĺžky výšok:
   a) rovnaké,
   b) rôzne,
   c) dve rovnaké, tretia je rôzna.
6. Na obrázku vidíte trojuholníky so spoločnou stranou *AB*. Ich ďalšie vrcholy ležia na priamke *m* rovnobežnej so stranou *AB*. Čo môžete povedať o výškach daných trojuholníkov ?

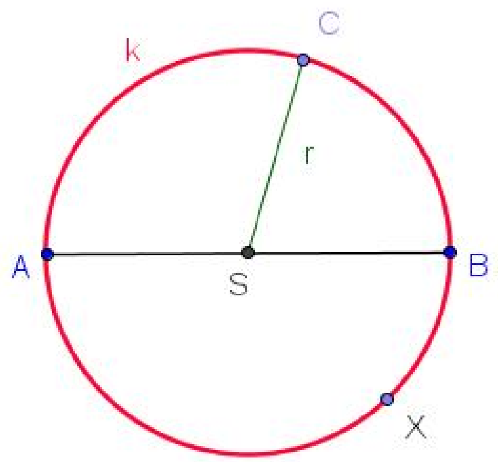


7. Na obrázku sú trojuholníky so spoločným vrcholom C, protiľahlé strany k tomuto vrcholu ležia na jednej priamke. Aké sú ich výšky ?



1.9.2 Kruh, kružnica, vzájomná poloha kružníc

Kružnica je množina bodov v rovine, ktoré majú od pevného bodu S rovnakú vzdialenosť.



$|SC| = r$ polomer kružnice

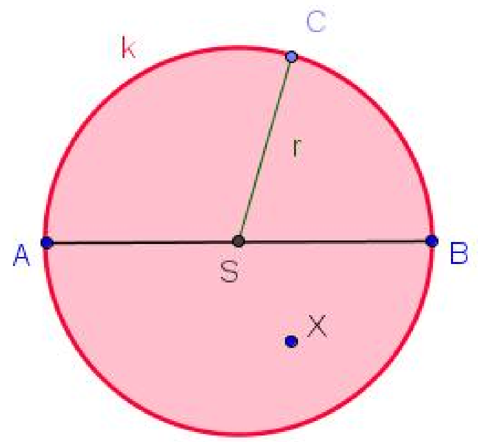
AB - priemer kružnice

$d = 2r$

Všetky body X kružnice sú body, pre ktoré platí

$|SX| = r$

$k(S,r)$ - označenie kružnice



Pre všetky body X kruhu platí

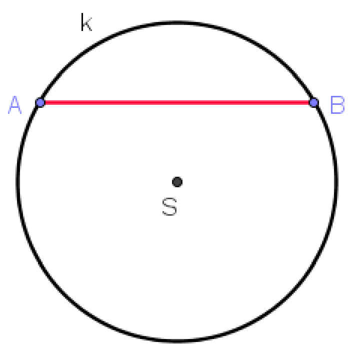
$|SX| \leq r$

$K(S,r)$ - označenie kruhu

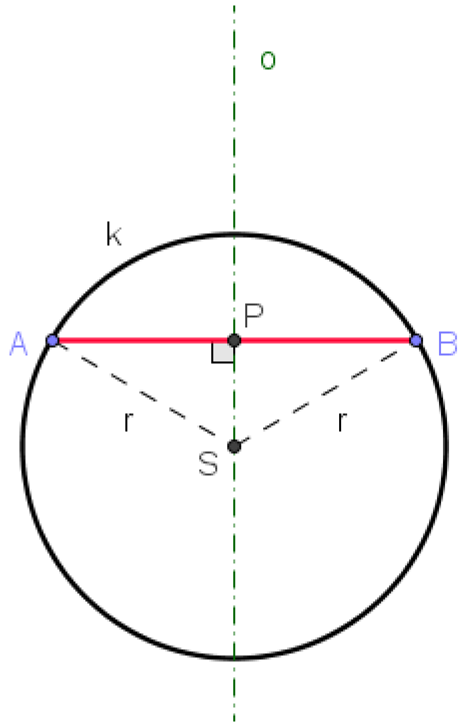
r má dva významy : úsečka *SC*,

dĺžka úsečky *SC*

Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; r)*. Na kružnici sú vyznačené dva rôzne body *A, B*. Úsečka *AB* sa nazýva **tetiva kružnice**.



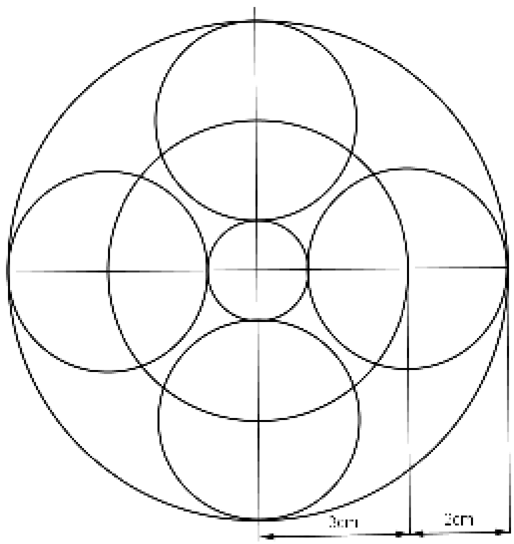
Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; r)*. Úsečka *AB* je jej tetivou. Os *o* tetivy *AB* je osou úsečky *AB*; os *o* je kolmá na *AB* a prechádza stredom *P* úsečky *AB*. Body *A, B* ležia na kružnici *k*; platí $|AS| = |BS| = r$



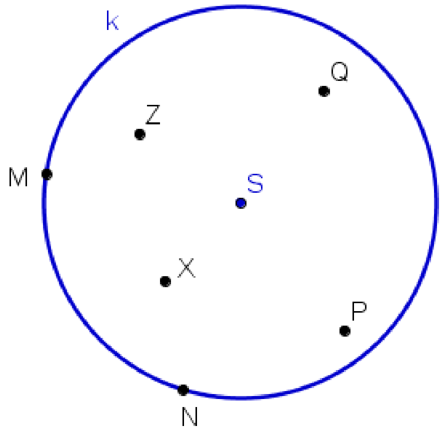
Os tetivy prechádza stredom kružnice.

Cvičenia

1. Prerysujte tento obrázok.



2. Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; 4 cm)*. Súčasne sú vyznačené body *M, P, X, Z, Q, N*. Napíšte vzťahy, ktoré platia pre vzdialenosti týchto bodov od stredu *S*.



3. Zostrojte kružnicu *k (S; r)*. Vyznačte dva navzájom kolmé priemery *AB, CD* kružnice *k*. Zapíšte všetky pravé uhly, ktoré takto vznikli.
4. Zostrojte kruh *K (S; 3 cm)*. Vyznačte aspoň dva body M_1, M_2, pre ktoré platí:

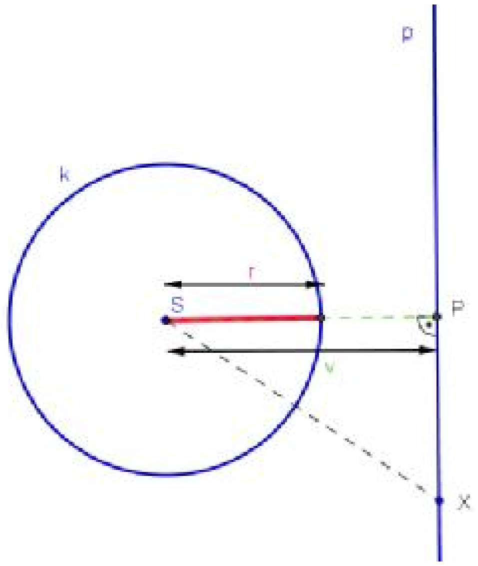
   $2{,}5 \text{ cm} < |SM_1| < 4 \text{ cm}$

   $2{,}5 \text{ cm} < |SM_2| < 3{,}5 \text{ cm}$
5. Vo vnútri kružnice *k (S; r)* leží bod *P* rôzny od stredu *S*. Zostrojte tetivu *AB* kružnice *k* tak, aby bod *P* bol stredom tetivy.
6. Dané sú dve tetivy *AB, CD* kružnice *k*. Nájdite stred *S* kružnice *k*.
7. Zostrojte tetivu kružnice *k (S; 3 cm)*, ktorá prechádza stredom *S*. Aká je jej dĺžka ?
8. Daná je kružnica *k (S; 4 cm)*. Narysujte niekoľko tetív tejto kružnice tak, aby mali všetky dĺžku 4 cm. Kde budú ležať stredy týchto tetív ?
9. Daná je kružnica *k (S; 3 cm)*. Narysujte dva kolmé priemery *AB, CD* tejto kružnice, kde *A, B, C, D* ležia na kružnici. Aký útvar tvoria body *A, D, B, C* ?
10. Daná je kružnica *k (S; 3 cm)*. Narysujte niekoľko priemerov *XY* tejto kružnice. Zostrojte stredy *P* úsečiek *SX, SY* na každom priemere. Na akom geometrickom útvare budú ležať body *P* ?

a) Vzájomná poloha priamky a kružnice

Nech je daná kružnica *k (S; r)* a priamka *p*. Skúmajme vzájomnú polohu kružnice *k* a priamky *p*.

1. Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; r)* a priamka *p*, ktorej vzdialenosť $v = |SP|$ od stredu kružnice *k* je väčšia než polomer *r*. Zrejme platí: $|SX| > |SP| > r$



$v > r$

Ak má priamka *p* od stredu *S* kružnice *k* vzdialenosť v > r,

tak priamka *p* kružnicu *k* nepretína.

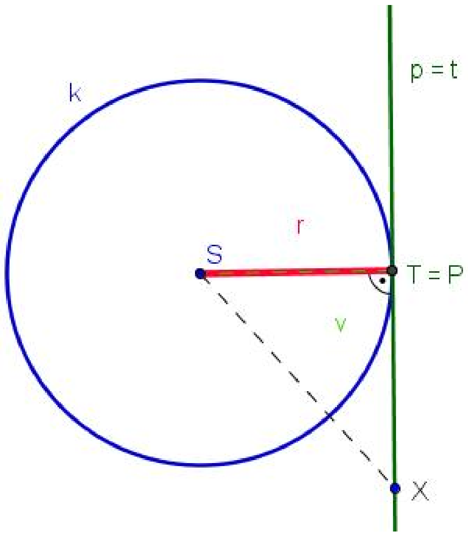
Priamka *p* sa nazýva ***nesečnicou*** kružnice *k*.

2. Na ďalšom obrázku je opäť narysovaná kružnica *k (S; r)* a priamka *p*, ktorej vzdialenosť v od stredu kružnice sa rovná polomeru, v = r. Päta *T* kolmice vedenej stredom *S* na priamku *p* je bodom kružnice *k*, lebo platí:

   $|ST| = \mathrm{v} = \mathrm{r}$

   Každý iný bod X priamky *p= t* je vonkajší bod kružnice *k*.

   $|SX| > |ST| = \mathrm{r}$



$v = r$

Ak priamka má od stredu kružnice vzdialenosť v = r,

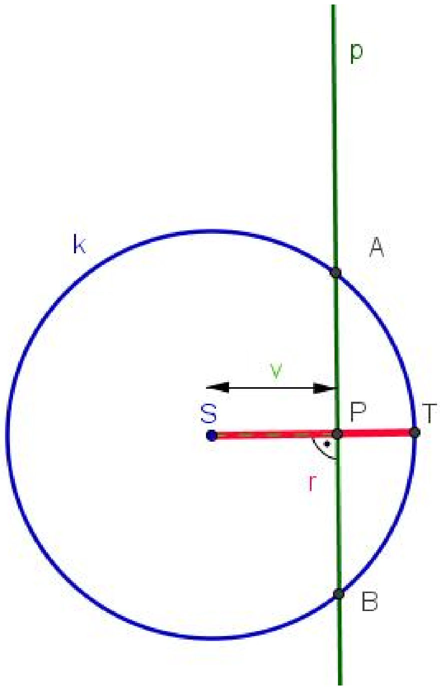
tak má priamka s kružnicou jediný spoločný bod.

Priamka, ktorá má s kružnicou jediný spoločný bod, sa nazýva ***dotyčnica*** kružnice**.**

Spoločný bod priamky a kružnice je **bod dotyku.**

Dotyčnica je vždy kolmá na polomer kružnice.

3. Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; r)* a priamka *p*, ktorej vzdialenosť *v* od stredu *S* kružnice *k* je menšia než polomer. Priamka s kružnicou má dva spoločné body.



v < *r*

Ak má priamka od stredu kružnice vzdialenosť v < r,

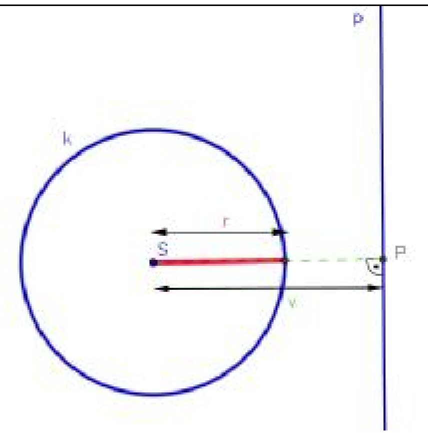
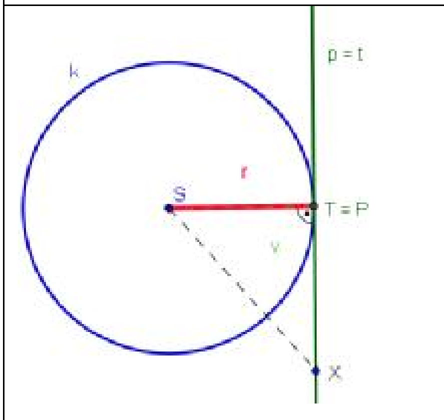
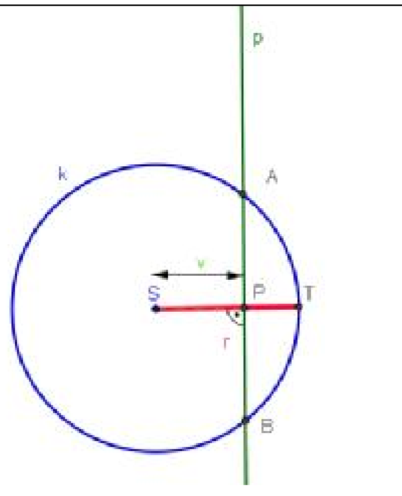
tak má priamka a kružnica dva rôzne spoločné body.

Priamka, ktorá má s kružnicou dva rôzne spoločné body, sa nazýva ***sečnica*** kružnice**.**

Spoločné body priamky a kružnice sú ich priesečníky.

Urobme prehľadnú tabuľku vzájomnej polohy priamky a kružnice. Zapamätajme si, že vzájomná poloha priamky a kružnice závisí od vzťahu vzdialenosti v priamky od stredu a od polomeru kružnice.

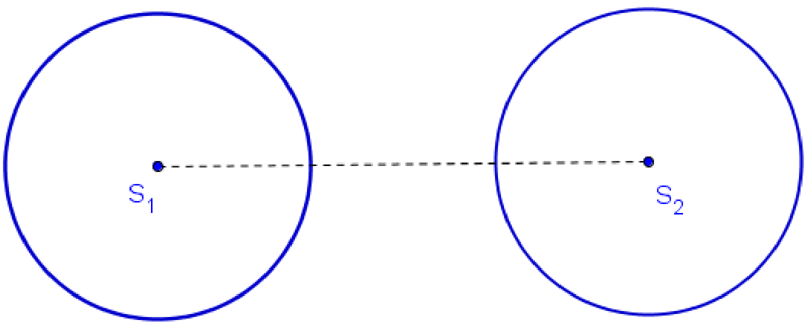
Prehľadná tabuľka

	priamka nemá s kružnicou spoločný bod $p \cap k = \emptyset$ $\boxed{v > r}$	**nesečnica** kružnice
	priamka má s kružnicou jeden spoločný bod – bod dotyku $p \cap k = T$ $\boxed{v = r}$	**dotyčnica** kružnice
	priamka má s kružnicou dva spoločné body – priesečníky A, B $p \cap k = \{A, B\}$ $\boxed{v < r}$	**sečnica** kružnice

Cvičenia

1. Daná je priamka *p* a vzdialenosť v = 3 cm. Narysujte niekoľko bodov v rovine, ktoré majú od priamky *p* vzdialenosť 3 cm. Aký útvar v rovine vytvoria všetky body, ktoré majú od priamky *p* vzdialenosť 3 cm ?
2. Charakterizujte priamku *p*, ktorá prechádza stredom *S* kružnice *k*. Zaraďte ju medzi tri možné vzájomné polohy priamky a kružnice.
3. Narysujte kružnicu *k (S; r)*. Na kružnici zvoľte bod *T*. Zostrojte dotyčnicu, ktorá prechádza bodom *T*.

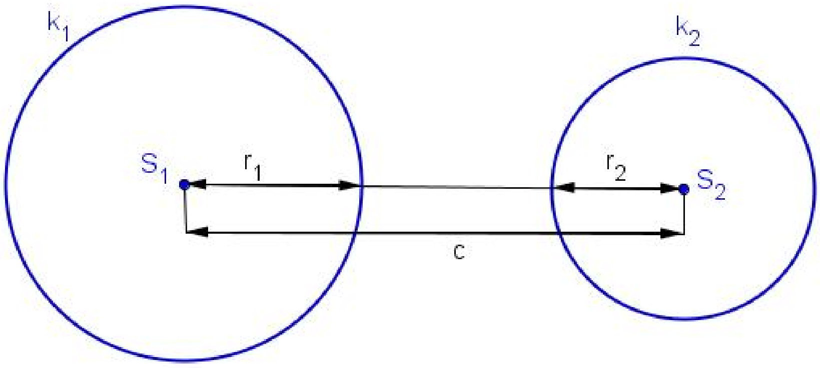
4. Daná je kružnica *k (S;3,5 cm)* a priamka *p*, ktorej vzdialenosť od stredu *S* kružnice *k* je 4,5 cm. Zostrojte dotyčnicu *t* kružnice *k*, rovnobežnú s danou priamkou *p*.
5. Narysujte štyri navzájom rovnobežné priamky *a, b, c, d*. Vzdialenosť medzi každými dvoma susednými priamkami je 1 cm. Na priamke *a* zvoľte bod *S*. Narysujte kružnicu *k (S; r = 2 cm)*. Určte vzájomnú polohu priamok *a, b, c, d* a kružnice *k*.
6. Narysujte kružnicu *k (S; r =3 cm)* a jej ľubovoľnú tetivu *AB,* ktorá nie je priemerom.
   a) Zostrojte dotyčnice kružnice *k,* ktorých dotykové body sú *A, B*.
   b) Aká je vzájomná poloha týchto dotyčníc ?
   c) Zostrojte priamku *o*, ktorá je určená priesečníkom zostrojených dotyčníc a stredom *S*. Je priamka *o* kolmá na tetivu *AB* ? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
7. Daný je bod *S*. Narysujte ľubovoľnú priamku *t*, ktorá je od bodu *S* vzdialená 3 cm. Ďalej narysujte kružnicu *k* so stredom v bode *S* tak, aby sa dotýkala priamky *t*.
8. Daná je priamka *t* a na nej bod *T*. Narysujte niekoľko kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky *t* v bode *T*. Čo vyplnia stredy všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej priamky *t* a majú dotykový bod *T* ?
9. Daná je priamka *t*, na nej bod *T* a bod *A*, ktorý neleží na priamke *t*. Narysujte kružnicu *k*, ktorá sa dotýka priamky *t* v bode *T* a prechádza bodom *A*. Stručne zapíšte postup konštrukcie.
10. Na obrázku sú narysované dve kružnice s rôznymi stredmi a rovnako dlhými polomermi. Narysujte aspoň jednu spoločnú dotyčnicu oboch kružníc.



b) Vzájomná poloha dvoch kružníc

Pri skúmaní vzájomnej polohy dvoch kružníc si všímame, či kružnice majú spoločné body alebo nemajú. Súčasne určíme podmienky, za ktorých jednotlivé prípady nastanú.

1. Nech sú dané dve kružnice s rôznymi stredmi k_1 $(S_1; r_1)$, k_2 $(S_2; r_2)$. Priamka S_1S_2 (niekedy aj úsečka S_1S_2) sa nazýva **stredná** dvoch kružníc. Dĺžka úsečky S_1S_2, $|S_1S_2|$ = c, je **dĺžka strednej úsečky**.



$$\boxed{|S_1S_2| > r_1 + r_2}$$

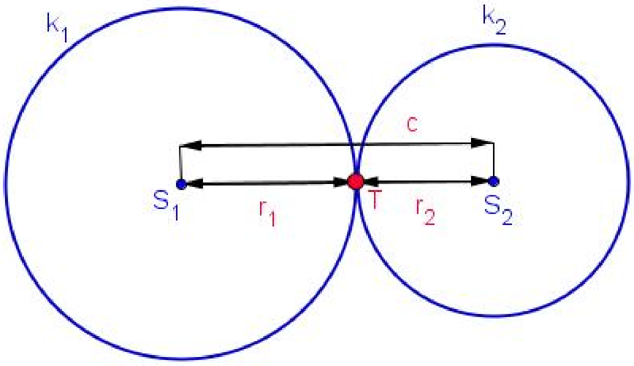
Kružnice k_1 a k_2 nemajú spoločný bod, pričom všetky body každej kružnice ležia zvonka druhej. Hovoríme, že **kružnice ležia mimo seba**.

Zrejme platí: $c = |S_1S_2| > r_1 + r_2$, $k_1 \cap k_2 = \theta$

Ak pre dve kružnice platí c = $|S_1S_2|$ > $r_1 + r_2$,

leží jedna kružnica mimo druhej (kružnice nemajú spoločný bod).

2. Na ďalšom obrázku kružnice k_1 a k_2 majú **jediný spoločný bod** *T*. Každý bod jednej kružnice rôzny od bodu *T* leží zvonka druhej kružnice.



$$\boxed{|S_1S_2| = r_1 + r_2}, \quad k_1 \cap k_2 = T$$

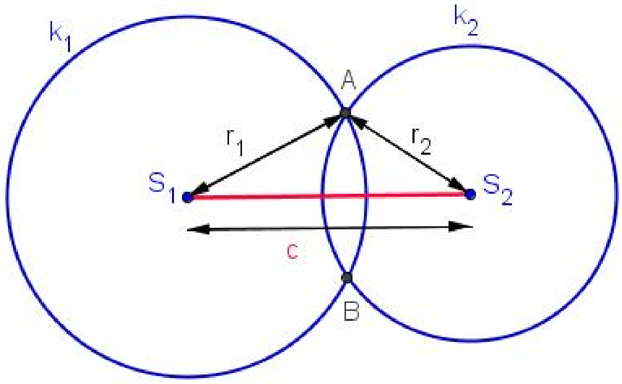
Hovoríme, že tieto dve **kružnice majú vonkajší dotyk** alebo sa dotýkajú zvonka.

$k_1 \cap k_2 = T$.

Ak pre dve kružnice k_1 a k_2 platí c = $|S_1S_2|$ = $r_1 + r_2$,

kružnice majú vonkajší dotyk (majú spoločný bod).

3. Dve kružnice k_1 a k_2 sa **pretínajú v dvoch rôznych bodoch** A, B. Okrem týchto bodov nemajú žiadny spoločný bod.

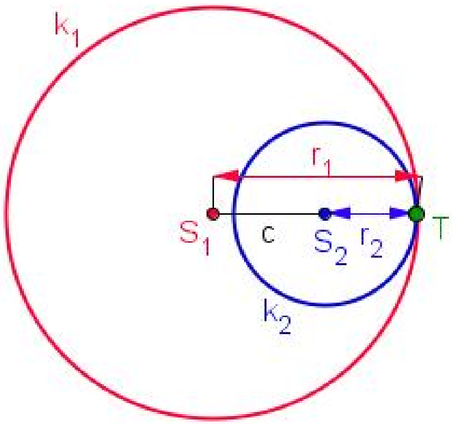


Z trojuholníka S_1S_2A vyplýva $\boxed{r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2}$, $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$, $r_1 > r_2$.

Ak pre dve kružnice platí $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$,

kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch.

4. Kružnice k_1 a k_2 **majú jediný spoločný bod** T. Body kružnice k_2 rôzne od bodu T ležia vnútri kružnice k_1. Hovoríme, že **kružnice majú vnútorný dotyk** (dotýkajú sa zvnútra).

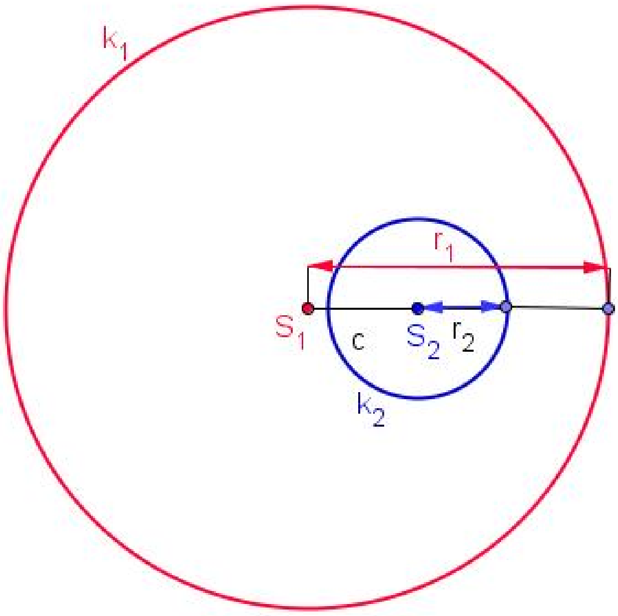


$\boxed{c = |S_1S_2| = r_1 - r_2}$, $k_1 \cap k_2 = T$

Ak pre dve kružnice platí $|S_1S_2| = r_1 - r_2$,

majú kružnice vnútorný dotyk (jeden spoločný bod), kružnica k_2 leží vnútri kružnice k_1.

5. Jedna kružnica leží **vnútri druhej a nemajú spoločný bod**.

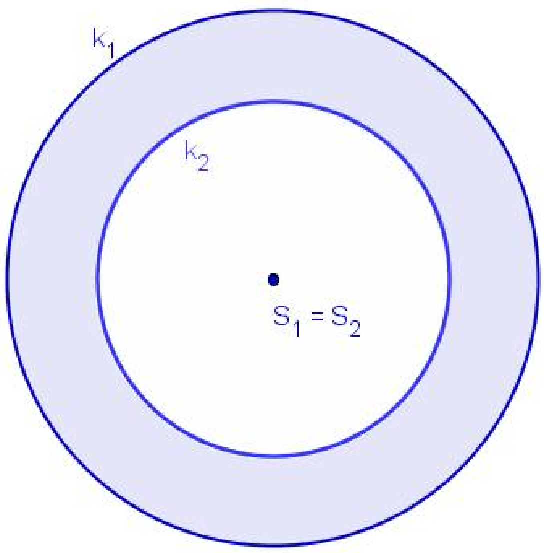


$\boxed{c = |S_1S_2| < r_1 - r_2}$, $\quad k_1 \cap k_2 = \emptyset$

Ak pre dve kružnice platí $|S_1S_2|$ < r$_1$ – r$_2$, S$_1$ $\neq$ S$_2$,

leží jedna vnútri druhej (nemajú spoločný bod a rôzne stredy).

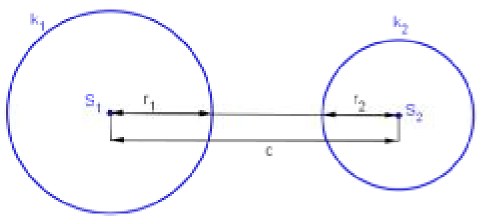
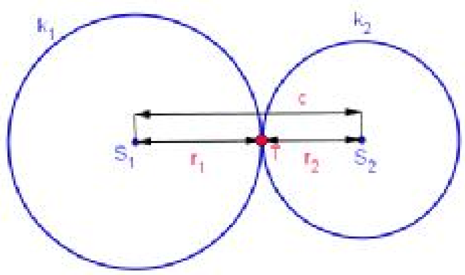
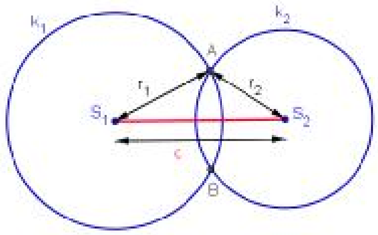
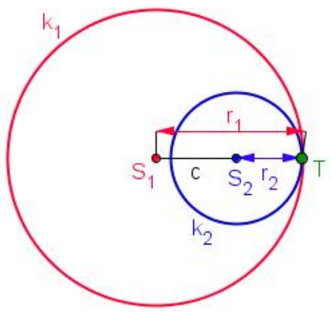
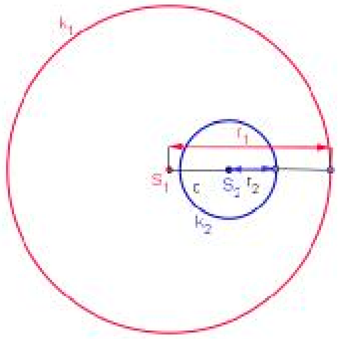
6. Nakoniec si všimneme prípad, keď kružnice majú spoločný stred a $r_1 \neq r_2$. **Kružnice sú sústredné**.

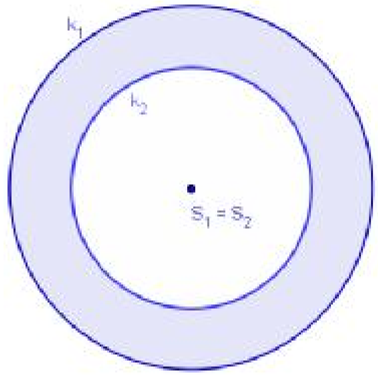


$\boxed{S_1 = S_2}$, $\quad |S_1S_2| = 0$

Vyznačený útvar medzi kružnicami sa nazýva **medzikružie.**

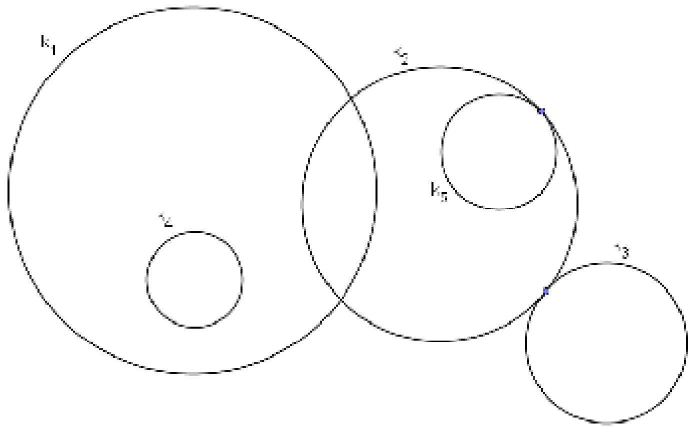
Prehľadná tabuľka

1. 	$\lvert S_1S_2 \rvert > r_1 + r_2$ $k_1 \cap k_2 = \varnothing$	Kružnice ležia **mimo seba.**
2. 	$\lvert S_1S_2 \rvert = r_1 + r_2$ $k_1 \cap k_2 = T$	Kružnice majú **vonkajší dotyk**.
3. 	$r_1 - r_2 < \lvert S_1S_2 \rvert < r_1 + r_2$	Kružnice sa **pretínajú** **v dvoch rôznych** **bodoch**.
4. 	$\lvert S_1S_2 \rvert = r_1 - r_2$	Kružnice majú **vnútorný dotyk**.
5. 	$0 < \lvert S_1S_2 \rvert < r_1 - r_2$ $k_1 \cap k_2 = \varnothing$	Jedna kružnica leží **vo vnútri druhej**.

6. 	$\lvert S_1S_2 \rvert = 0$ $k_1 \cap k_2 = \emptyset$	Jedna kružnica leží vo vnútri druhej – stredy splývajú – **sústredné kružnice**.

Cvičenia

1. Daná je kružnica k_1 *(S_1; 3 cm)* a na nej bod *A*. Zostrojte kružnicu k_2 s polomerom 2 cm, ktorá má s kružnicou k_1 vonkajší dotyk.
2. Daná je kružnica *m (O; 2 cm)* a na nej bod *M*. Zostrojte kružnicu *n* s polomerom 3 cm, ktorá má s kružnicou *m* vnútorný dotyk.
3. Na obrázku je narysovaných 5 kružníc k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Popíšte vzájomnú polohu kružníc:



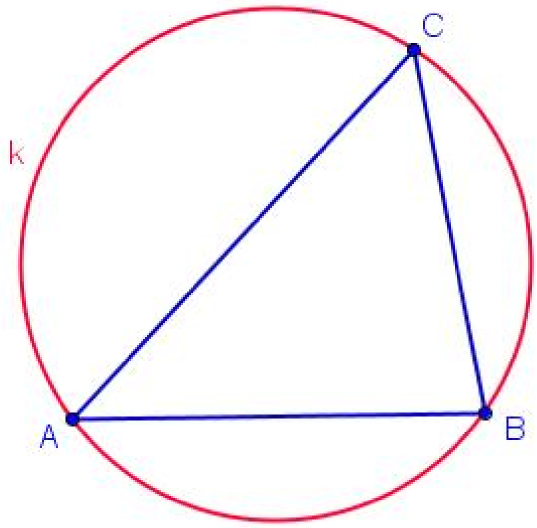
   a) k_1 a k_2; b) k_2 a k_5; c) k_1 a k_4; d) k_3 a k_4;
   e) k_4 a k_5; f) k_5 a k_3; g) k_3 a k_2.

4. Zistite možnosti vzájomnej polohy dvoch kružníc s rovnakými polomermi. Urobte prehľadnú tabuľku.
5. Daná je kružnica *k (S; 2,5 cm)*. Zostrojte niekoľko kružníc s polomerom r = 2 cm tak, aby sa dotýkali zvonka kružnice *k*. Kde budú ležať stredy takto zostrojených kružníc?
6. Daná je kružnica *k (S; 4,5 cm)*. Zostrojte niekoľko kružníc s polomerom r = 2 cm tak, aby sa dotýkali kružnice *k* zvnútra. Kde budú ležať stredy takto zostrojených kružníc?

1.9.3 Kružnica opísaná a vpísaná trojuholníku

V predošlých častiach sme zistili, že os tetivy kružnice prechádza stredom kružnice.

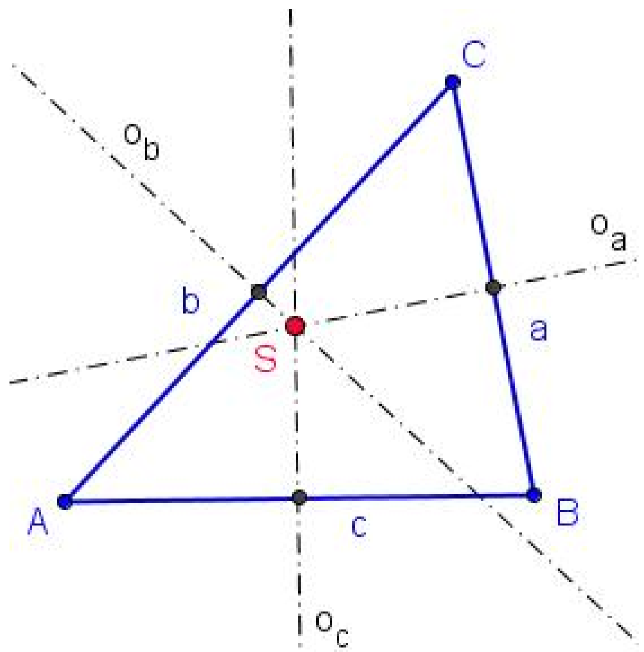
Nech je daný trojuholník ABC a kružnica, ktorá prechádza vrcholmi trojuholníka. Takúto kružnicu budeme nazývať **kružnica opísaná trojuholníku**.



Bude nás zaujímať, ako zostrojíme stred takejto kružnice. Strany trojuholníka sú tetivy danej kružnice. Preto stred tejto kružnice musí ležať na osiach strán (na osiach tetív). Teda:

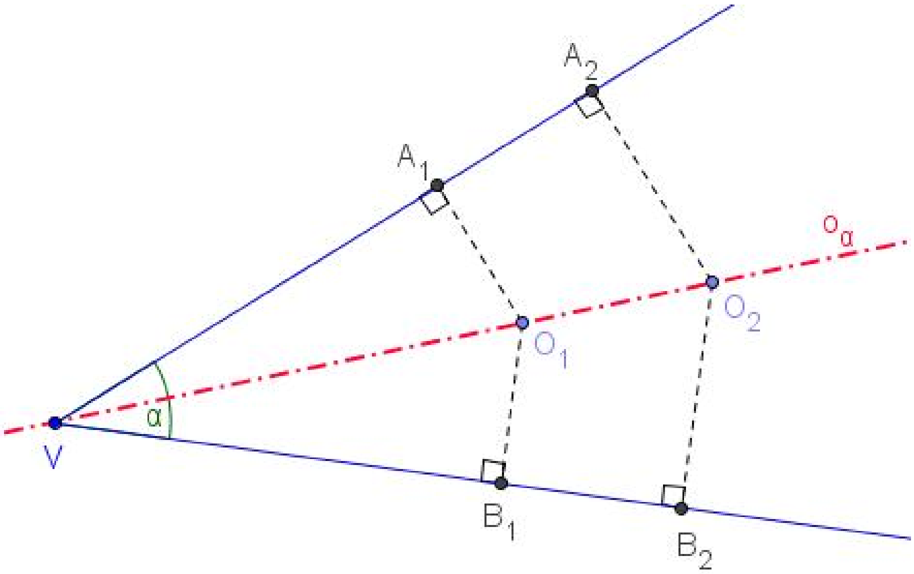
Priesečník osí strán trojuholníka je stred kružnice opísanej trojuholníku.

Každému trojuholníku možno opísať kružnicu.

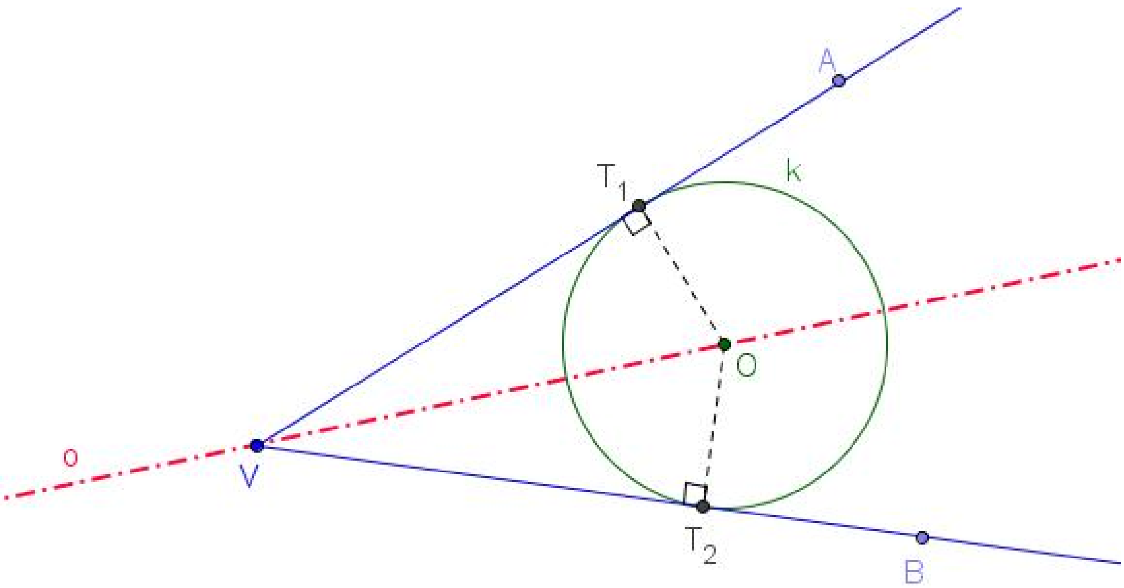


V ďalšom si pripomeňme **os uhla**.

Os uhla rozdeľuje každý uhol na dve zhodné časti. Každý bod osi uhla je rovnako vzdialený od ramien uhla.



Z toho vyplýva, že kružnica, ktorá sa dotýka ramien uhla, má stred na osi uhla.

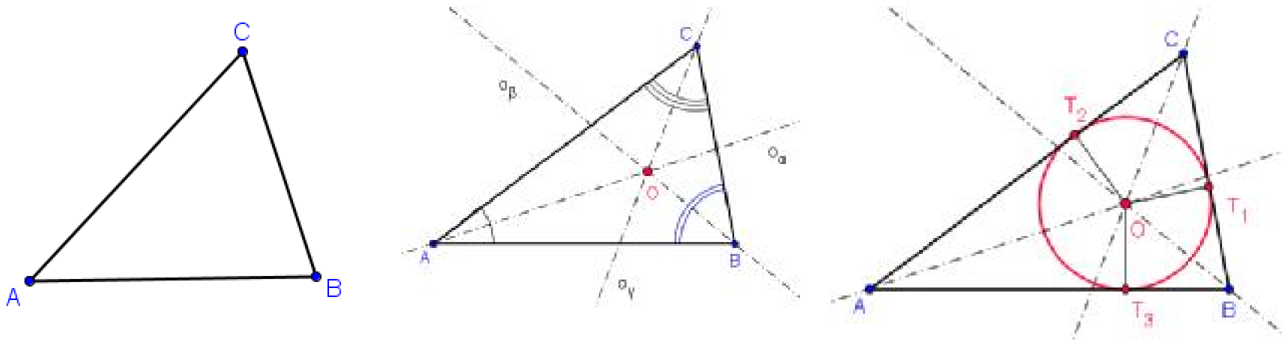


Nech je daný trojuholník *ABC*. Zostrojme osi jeho vnútorných uhlov. Dve z nich sa pretínajú v bode *O*. Týmto bodom musí prechádzať aj tretia os. To sa ľahko zdôvodní na základe vlastnosti osi uhla.

Z toho vyplýva, že bod *O* bude rovnako vzdialený od strán trojuholníka. Kružnica, ktorá sa dotýka strán trojuholníka, nazýva sa **kružnica vpísaná trojuholníku**.

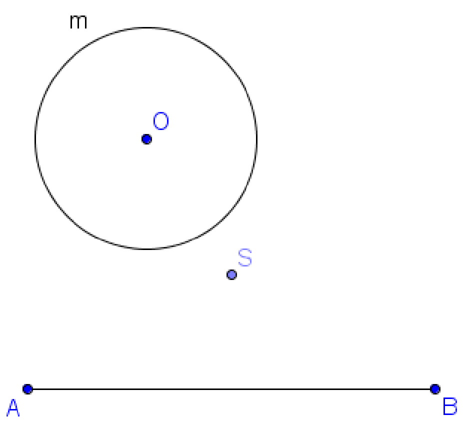
Priesečník osí uhlov trojuholníka je stred kružnice vpísanej trojuholníku.

Na obrázku je postup konštrukcie kružnice vpísanej trojuholníku.



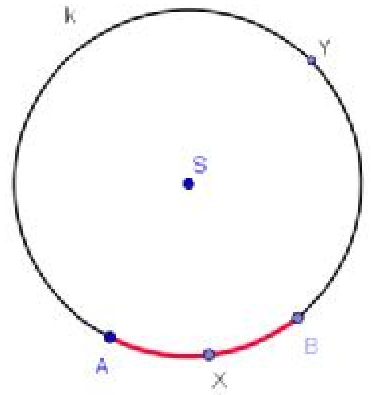
Cvičenia

1. Dané sú tri body *A, B, C*, ktoré neležia na jednej priamke. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodmi *A, B, C*.
2. Daný je pravouhlý trojuholník *ABC*, v ktorom dĺžky odvesien sú 3 cm a 4 cm. Zostrojte kružnicu opísanú tomuto trojuholníku. Aký bude priemer tejto kružnice ?
3. Zostrojte kružnicu opísanú a vpísanú rovnostrannému trojuholníku.
4. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník *ABC* a opíšte mu kružnicu. Akú polohu má stred tejto kružnice vzhľadom na daný trojuholník ?
5. Zostrojte ľubovoľný tupouhlý trojuholník *ABC* a vpíšte mu kružnicu. Akú polohu má stred tejto kružnice vzhľadom na daný trojuholník ?
6. Daný je ostrouhlý trojuholník *ABC*. Zostrojte kružnice, ktoré sa dotýkajú:
   a) strany *AB* a priamok *AC* a *BC*;
   b) strany *BC* a priamok *AB* a *AC*;
   c) strany *AC* a priamok *BC* a *BA*.
7. Na obrázku je daná úsečka *AB*, bod *S*, ktorý je rovnako vzdialený od bodu *A, B*, ďalej je daní kružnica *m (O; r)*. Zostrojte trojuholník *ABC*, v ktorom *S* je stredom kružnice opísanej a vrchol *C* leží na kružnici *m*.



1.9.4 Oblúk kružnice. Kruhový výsek. Stredový, obvodový a úsekový uhol

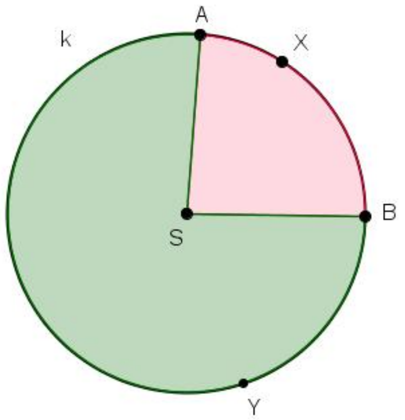
Na obrázku je narysovaná kružnica *k (S; r)*. Body *A, B* delia kružnicu *k* na dve časti, ktoré nazývame **oblúky kružnice** alebo **kružnicové oblúky**.



$\overset{\frown}{AXB}$ je oblúk kružnice *k* s krajnými bodmi A,B, ktorý obsahuje bod *X*.

$\overset{\frown}{AYB}$ je oblúk kružnice *k* s krajnými bodmi A,B, ktorý obsahuje bod *Y*.

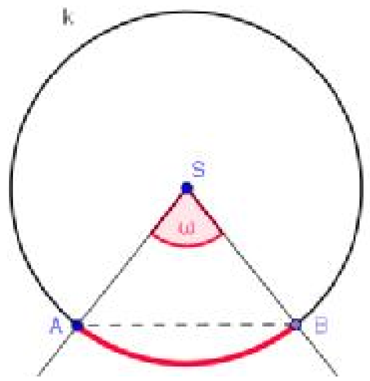
Na ďalšom obrázku je kruh *K (S; r)* ohraničený kružnicou *k (S; r)*. Zvoľme dva polomery *SA, SB*. Tieto dva polomery rozdelia kruh *K* na dve časti, ktoré nazývame **kruhové výseky**.



Kruhový výsek $ASB(X)$ - obsahuje bod *X*.

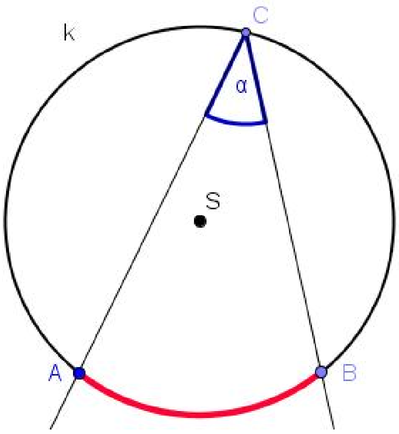
Kruhový výsek $ASB(Y)$ - obsahuje bod *Y*.

Nech je daná kružnica *k (S; r)* a body *A, B*, ktoré rozdeľujú kružnicu na dva kružnicové oblúky. Zostrojme uhol *ASB*. Jeden z oblúkov leží vo vnútri tohto uhla. Uhol *ASB* nazývame **stredový uhol** prislúchajúci k oblúku *AB*.



Bodmi A,B je určená aj tetiva, preto niekedy hovoríme, že *stredový uhol prislúcha tetive* AB *kružnice k.*

Ak na kružnici *k (S; r)* zvolíme tri body *A, B, C*, potom uhol *ACB* sa nazýva **obvodový uhol** prislúchajúci k oblúku *AB*.

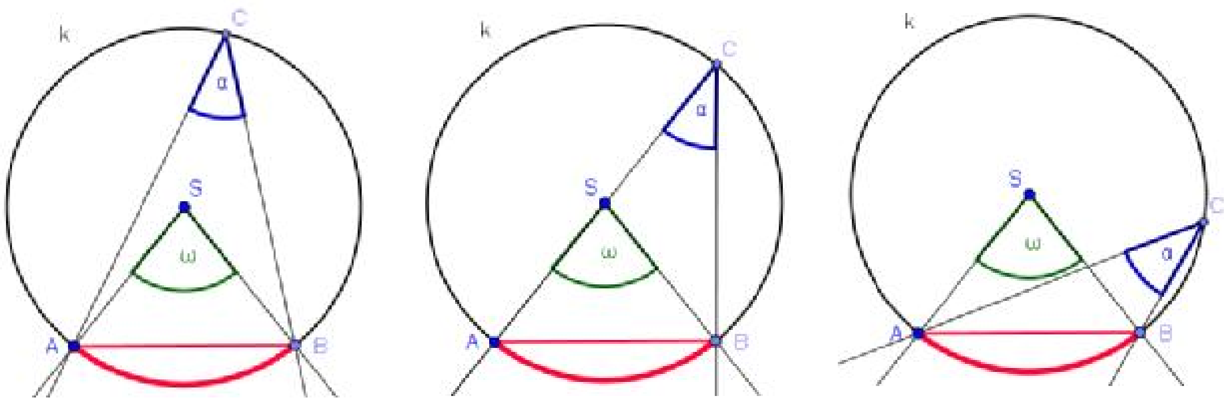


Taktiež hovoríme, že

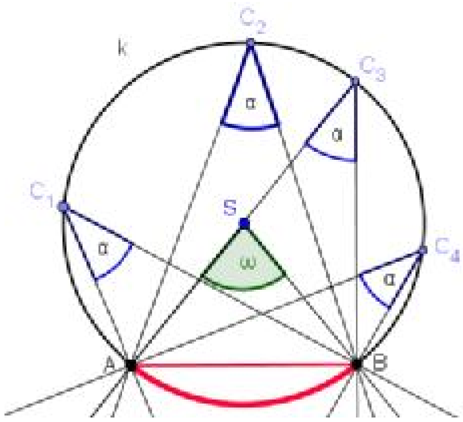
obvodový uhol prislúcha tetive AB kružnice k.

O obvodových a stredových uhloch platí:

1. **Obvodový uhol je polovicou stredového uhla prislúchajúceho k tomu istému oblúku.**
2. **Všetky obvodové uhly prislúchajúce k tomu istému oblúku sú zhodné (sú rovnako veľké).**



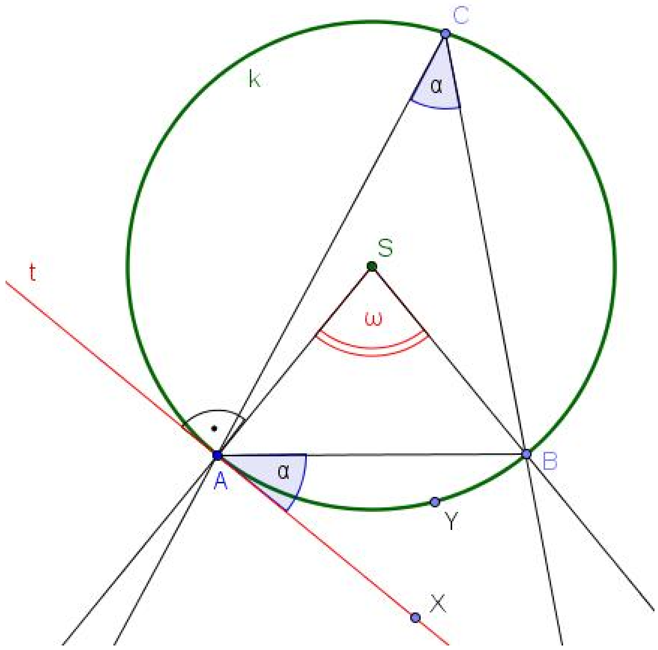
Na obrázkoch sú znázornené rôzne polohy vrcholu *C* obvodového uhla.



Veľkosť obvodového uhla nezávisí od polohy bodu *C*, rozhodujúce sú body *A,B*.

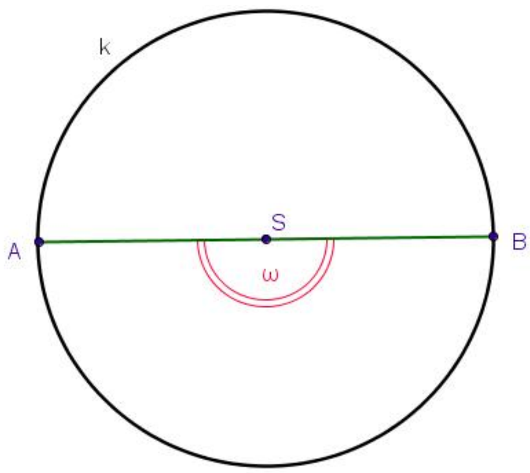
Sledujme nasledujúci obrázok.

Na ňom sú vyznačené obvodový uhol α a stredový uhol ω nad oblúkom AYB. Ďalej je vyznačená tetiva AB a dotyčnica t ku kružnici k v bode A. Uhol BAX, kde bod X je vyznačený na dotyčnici t, nazývame **úsekový uhol** patriaci oblúku AYB.



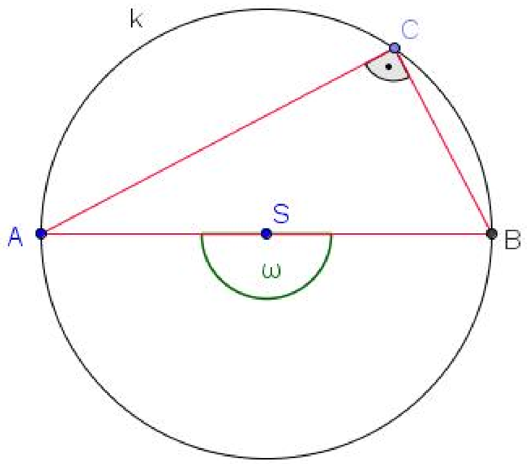
Úsekový uhol patriaci oblúku *AYB* kružnice *k* je zhodný s obvodovým uhlom nad tým istým oblúkom.

Ak body *A, B* kružnice *k (S; r)* sú body priemeru, tak rozdelia kružnicu na dva zhodné kružnicové oblúky, každý z nich je **polkružnica**.



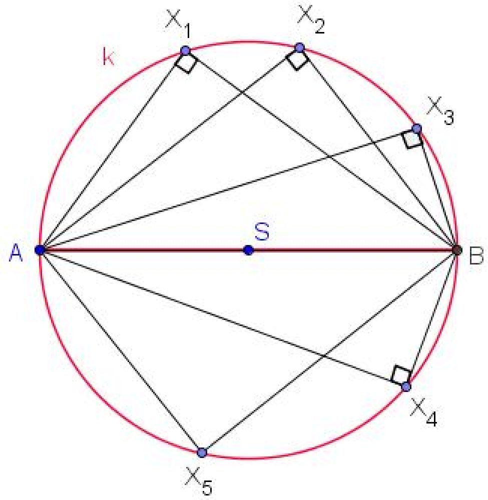
V tomto prípade **stredový uhol** je **priamy.**

Ak zostrojíme v tomto prípade obvodový uhol ACB (kde *A, B* sú body priemeru), potom uhol ACB je pravý.



Obvodový uhol ACB je polovicou stredového uhla ASB, a keďže stredový uhol ASB je priamy, potom obvodový uhol ACB je pravý.

Z vlastností obvodových a stredových uhlov vyplýva **Tálesova veta**.



Tálesova veta

Vrcholmi pravých uhlov *AXB* sú body *X* kružnice *k* s priemerom *AB* (s výnimkou *A, B*) a žiadne iné.

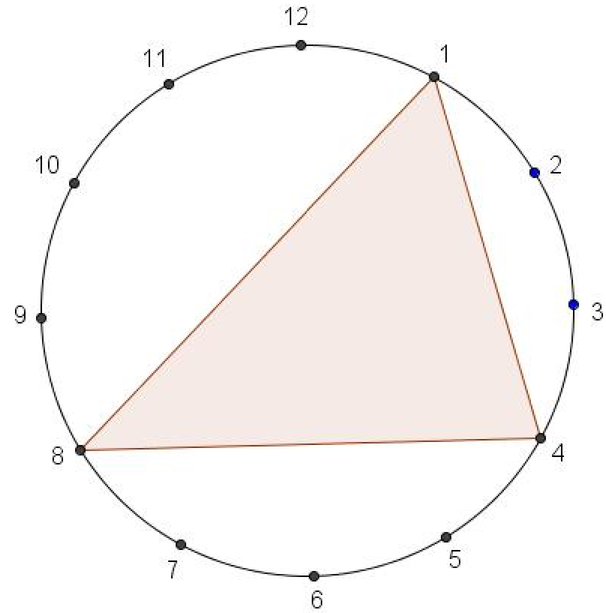
Množinou vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou *AB* je kružnica *k* s priemerom *AB* okrem bodov *A, B*.

Kružnicu ***k*** nazývame **Tálesova kružnica.**

Cvičenia

1. Daná je kružnica *k (S; 3 cm)*. Zvoľte na kružnici dva rôzne body *A, B*. Vyznačte kružnicové oblúky, na ktoré tieto body rozdelia kružnicu *k*.
2. Určte kružnicový oblúk, ktorému prislúcha stredový uhol a ten je pravý.
3. Určte kružnicový oblúk, ktorý prislúcha priamemu stredovému uhlu.
4. Určte stredový a obvodový uhol, ktorý prislúcha štvrť kružnici.
5. Určte stredový a obvodový uhol, ktorý prislúcha polkružnici.

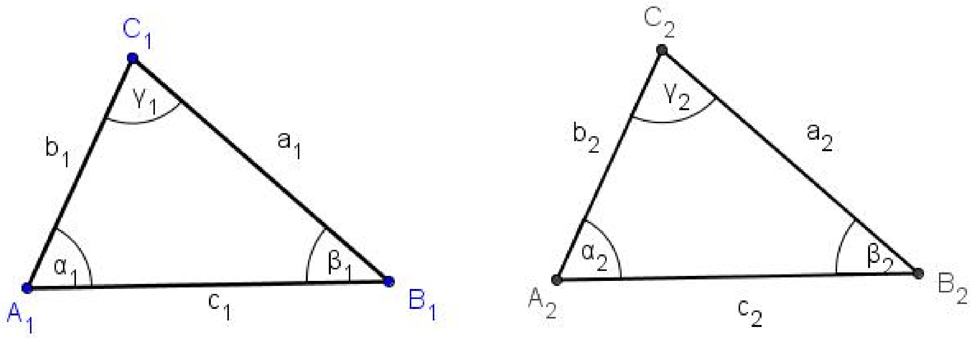
6. Daný je kruh *K (S; 4 cm)*. Farebne vyznačte kruhové výseky, ktoré sú určené dvoma na seba kolmými polomermi.
7. Daná je úsečka *MN*. Zostrojte Tálesovu kružnicu, ktorej priemer je úsečka *MN*.
8. Je daný hodinový ciferník. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, ktorého vrcholy ležia na ciferníku v bodoch 1, 4, 8.



9. Narysujte kružnicu *k (S; 3 cm)* a vyznačte bod *M*, pre ktorý platí $|SM| = 5{,}5$ cm. Zostrojte dotyčnice z bodu *M* ku kružnici *k* (použite Tálesovu vetu).
10. Zostrojte trojuholník *ABC*, keď je daná strana $c = 7$ cm, $v_a = 5$ cm, $v_b = 4$ cm.
11. Narysujte útvar, ktorý je množinou bodov, z ktorých vidieť úsečku *AB* pod uhlom α (použite úsekový uhol).

1.9.5 Zhodnosť trojuholníkov

Na obrázku sú narysované trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$.



Priložme priesvitku a narysujme na ňu napr. trojuholník $A_1B_1C_1$.

Premiestnime priesvitku tak, aby vrchol A_1 splynul s vrcholom A_2. Presvedčme sa, či vrchol B_1 splynie s vrcholom B_2 a vrchol C_1 s vrcholom C_2. Splynuli.

Hovoríme, že trojuholník $A_1B_1C_1$ je zhodný s trojuholníkom $A_2B_2C_2$, čo zapisujeme

$$\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$$

Pretože pri premiestňovaní sa dĺžky úsečiek (strán) ani veľkosti uhlov nemenia, platí:

$$a_1 \cong a_2 \qquad b_1 \cong b_2 \qquad c_1 \cong c_2$$

$$\alpha_1 \cong \alpha_2 \qquad \beta_1 \cong \beta_2 \qquad \gamma_1 \cong \gamma_2$$

Dva trojuholníky sú zhodné, ak sú zhodné každé dve odpovedajúce si strany a každé dva odpovedajúce si vnútorné uhly.

Niekedy máme rozhodnúť o zhodnosti dvoch trojuholníkov a pritom vieme iba to, že pre ne platia niektoré z tých šesť rovností. Kedy máme zaručené, že tieto trojuholníky sú zhodné ?

Uvedieme, že pri vhodne vybranej trojici rovností sú trojuholníky zhodné. Teda vyslovíme **tri vety o zhodnosti trojuholníkov**.

Veta *sss*

Ak pre dva trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí

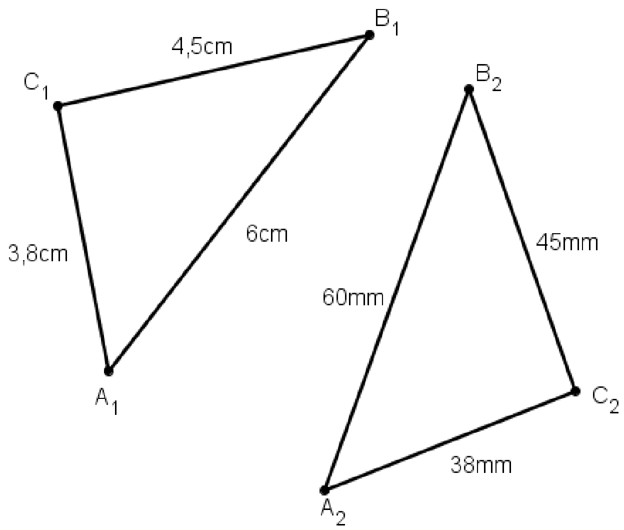
$A_1B_1 \cong A_2B_2$, $B_1C_1 \cong B_2C_2$ a $C_1A_1 \cong C_2A_2$,

potom sú tieto trojuholníky zhodné: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.

Vetu *sss* môžeme vysloviť aj takto:

Ak sa dva trojuholníky zhodujú vo všetkých troch stranách, tak sú zhodné.

Ukážka:



Veta *usu*

Ak pre dva trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí

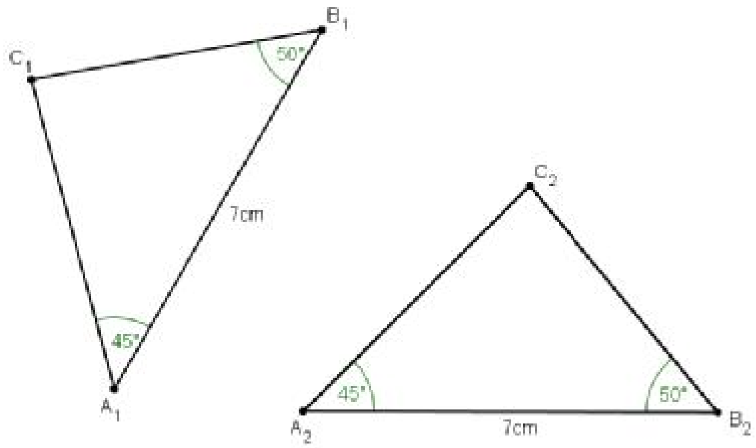
$A_1B_1 \cong A_2B_2$, $\sphericalangle C_1A_1B_1 \cong \sphericalangle C_2A_2B_2$ *a* $\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$,

potom sú tieto trojuholníky zhodné: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.

Túto vetu môžeme preformulovať aj takto:

Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých, tak sú zhodné.

Ukážka:



Veta *sus*

Ak pre dva trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí

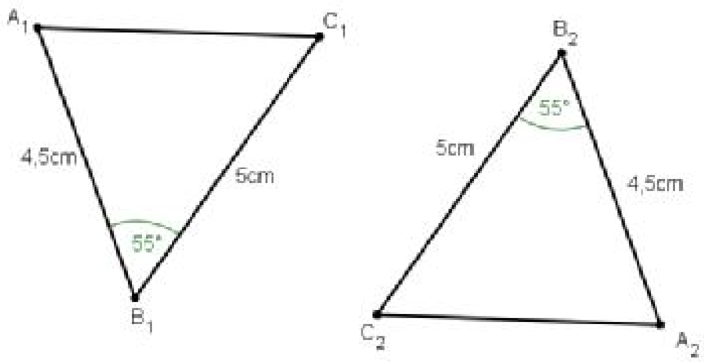
$A_1B_1 \cong A_2B_2$, $B_1C_1 \cong B_2C_2$ *a* $\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$,

potom sú tieto trojuholníky zhodné: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.

Túto vetu môžeme preformulovať takto:

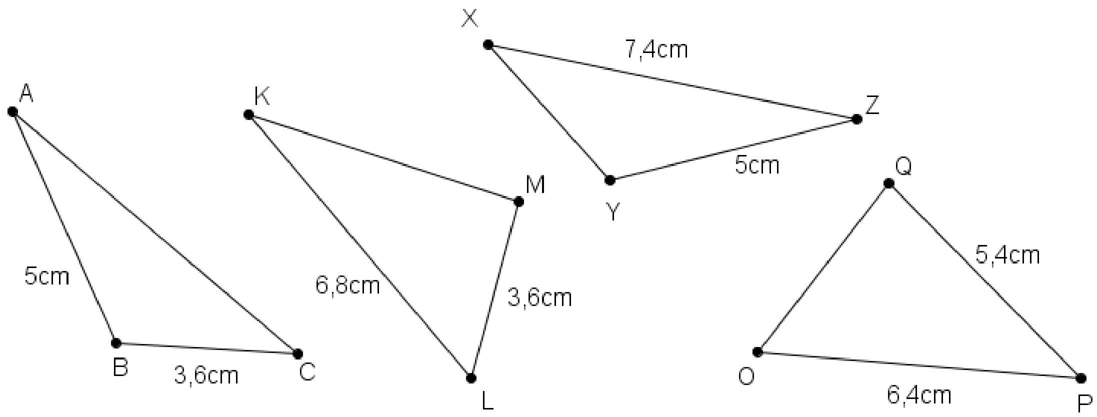
Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle nimi určenom, tak sú zhodné.

Ukážka:

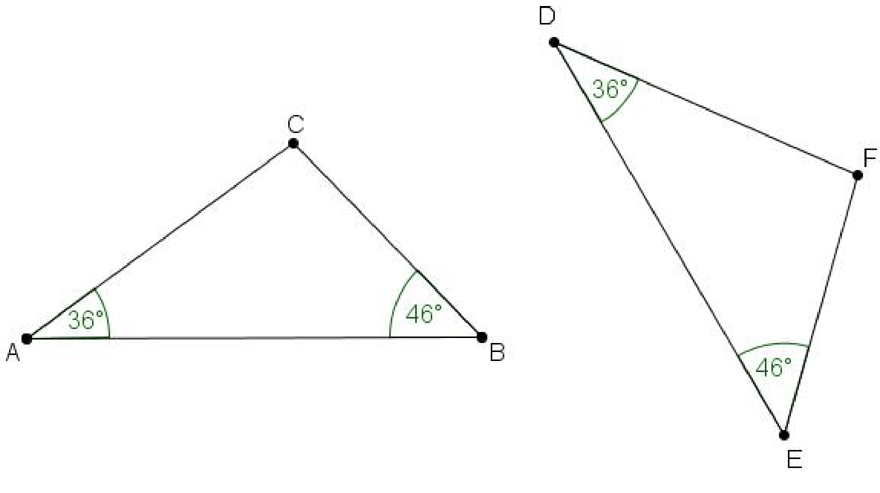


Cvičenia

1. Narysujte dva zhodné trojuholníky. Označte ich vrcholy a zapíšte zhodnosť narysovaných trojuholníkov.
2. Každý z trojuholníkov na obrázku má obvod 16 cm. Nie však všetky sú zhodné. Nájdite zhodné trojuholníky a ich zhodnosť zdôvodnite.



3. Môžete z uvedených údajov o trojuholníkoch *ABC* a *DEF* na náčrtku rozhodnúť, či sú zhodné ?



4. Rozhodnite, či trojuholníky *ABC* a *EFG* sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť odôvodnite a zapíšte.

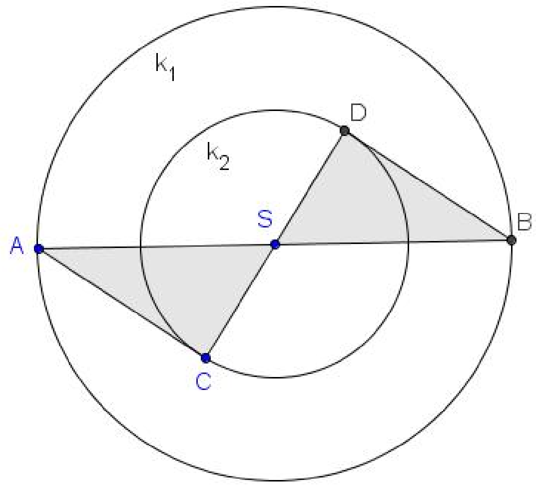
a) $|AB| = 60$ mm, $|\sphericalangle CAB| = 56°$, $|\sphericalangle ABC| = 71°$

$|FG| = 60$ mm, $|\sphericalangle EFG| = 56°$, $|\sphericalangle FGE| = 71°$

b) $|AC| = 9$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 80°$, $|\sphericalangle BCA| = 46°$

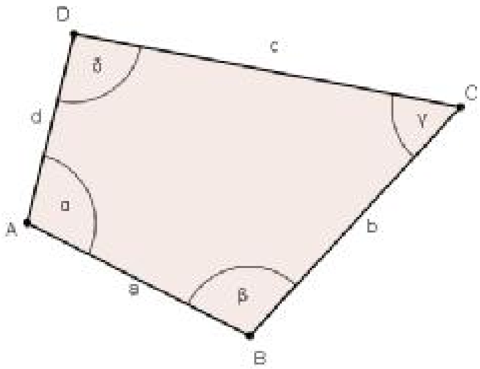
$|EF| = 9$ cm, $|\sphericalangle EFG| = 46°$, $|\sphericalangle FGE| = 54°$

5. Kružnice k_1 a k_2 majú spoločný stred S. Úsečka AB je priemer kružnice k_1, úsečka CD je priemer kružnice k_2. Rozhodnite, či vyfarbené trojuholníky sú zhodné. Ak áno, ich zhodnosť zdôvodnite a zapíšte.



1.10 Štvoruholník

Mnohouholník, ktorý má štyri vrcholy, štyri strany a štyri vnútorné uhly, sa nazýva **štvoruholník**.



body A, B, C, D — **vrcholy** štvoruholníka $ABCD$

úsečky AB, BC, CD, DA — **strany** štvoruholníka $ABCD$

uhly DAB, ABC, BCD, CDA — **vnútorné uhly** štvoruholníka $ABCD$

Strany štvoruholníka $ABCD$ označujeme aj malými písmenami:

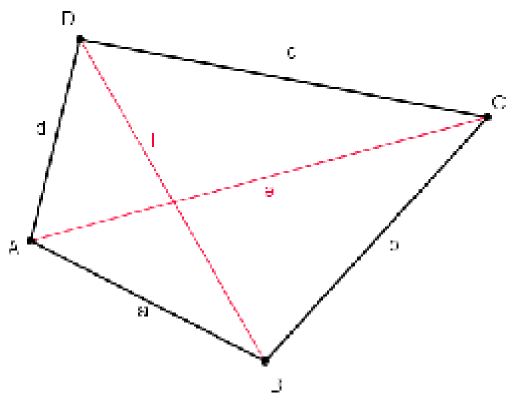
$$a = AB,\ b = BC,\ c = CD,\ d = DA.$$

Podľa toho, či dve strany štvoruholníka majú spoločný vrchol alebo nemajú, nazývajú sa **susedné** alebo **protiľahlé**. Napríklad strany a, b sú susedné, strany a, c sú protiľahlé. Krajné body strany sú **susedné vrcholy**. Vrcholy, ktoré nie sú susedné, nazývajú sa **protiľahlé**.

Vnútorné uhly štvoruholníka $ABCD$ označujeme písmenami gréckej abecedy:

$$\alpha = |\sphericalangle DAB|,\ \beta = |\sphericalangle ABC|,\ \chi = |\sphericalangle BCD|,\ \delta\ |\sphericalangle CDA|.$$

Úsečky, ktoré spájajú protiľahlé vrcholy štvoruholníka, nazývajú sa **uhlopriečky**.

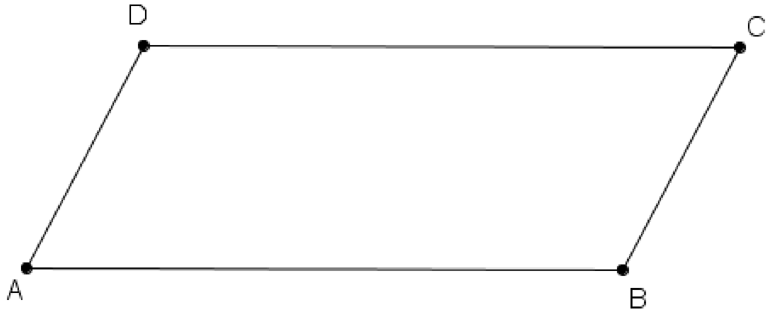


Štvoruholníky delíme na:

1. *rovnobežníky*
2. *lichobežníky*
3. *iné*

1.10.1 Rovnobežníky

Rovnobežník je štvoruholník, ktorého každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné.



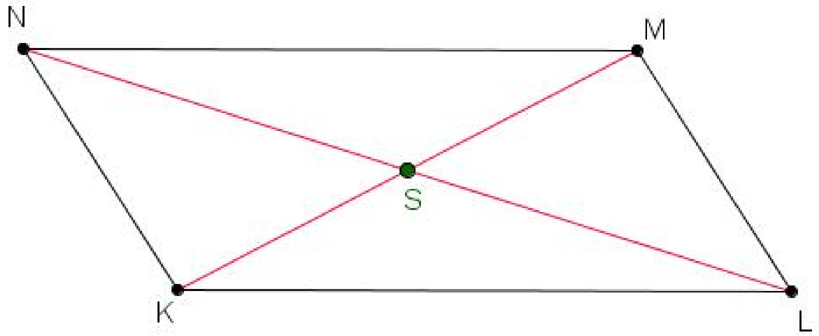
Na obrázku je rovnobežník *ABCD*. Pre jeho strany platí $AB \| CD$, $BC \| AD$. Z toho vyplýva, že taktiež platí $|AB| = |CD|$ a $|AD| = |BC|$. Aj protiľahlé uhly sú zhodné. Teda:

Štvoruholník, ktorého každé dve protiľahlé strany sú rovnobežné, nazýva sa rovnobežník.

Každé dve protiľahlé strany rovnobežníka sú zhodné.

Každé dva protiľahlé uhly rovnobežníka sú zhodné.

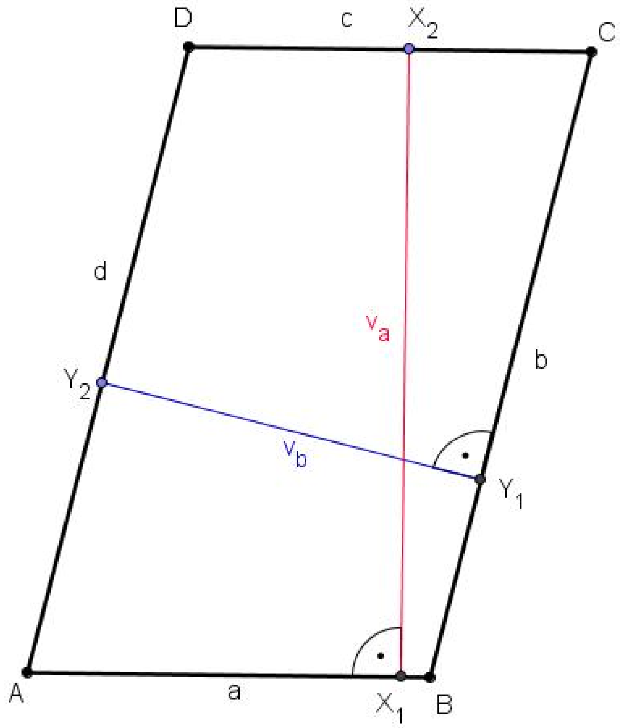
Na obrázku je rovnobežník *KLMN*. Sú vyznačené jeho uhlopriečky. V každom rovnobežníku je priesečník uhlopriečok stredom každej z nich.



Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú.

Čo je výška rovnobežníka ?

Výška rovnobežníka je vzdialenosť jeho protiľahlých rovnobežných strán. Pretože rovnobežník má dve dvojice rovnobežných strán, má aj dve výšky.



Na obrázku sú znázornené úsečky X_1X_2 a Y_1Y_2, ktorých dĺžky sú výšky:

$$|X_1X_2| = v_a,\ |Y_1Y_2| = v_b.$$

Ako triedime rovnobežníky ?

Všetky rovnobežníky môžeme rozdeliť podľa vnútorných uhlov do dvoch skupín:

a) Ak sú všetky vnútorné uhly rovnobežníka pravé, nazývame tento rovnobežník **pravouholníkom**.

b) Ak ani jeden vnútorný uhol nie je pravý, nazývame tento rovnobežník **kosouholníkom**.

Kosouholník má dva vnútorné uhly ostré a dva tupé.

Ďalej pravouholníky delíme na **obdĺžniky** a **štvorce**.

Rovnobežník, ktorého všetky vnútorné uhly sú pravé, sa nazýva ***pravouholník.***

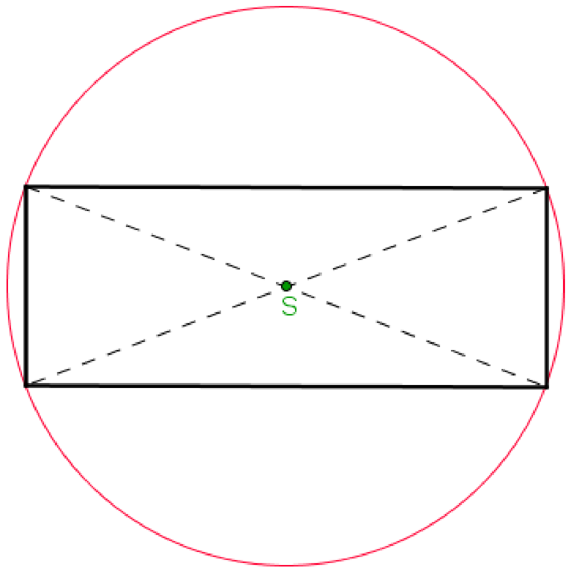
Pravouholník, ktorého susedné strany nie sú zhodné, nazýva sa ***obdĺžnik.***

Pravouholník, ktorého susedné strany sú zhodné, nazýva sa ***štvorec.***

Vlastnosti obdĺžnika

Obdĺžnik je rovnobežník, ktorého

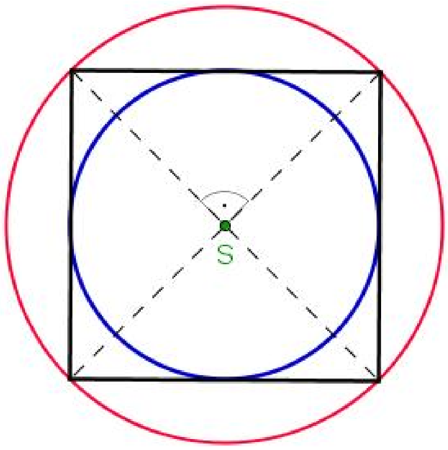
- *vnútorné uhly sú pravé,*
- *protiľahlé strany sú zhodné,*
- *susedné strany nie sú zhodné,*
- *uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú a sú zhodné,*
- *každá uhlopriečka rozdeľuje obdĺžnik na dva zhodné pravouhlé trojuholníky*
- *priesečník S uhlopriečok je stredom opísanej kružnice*

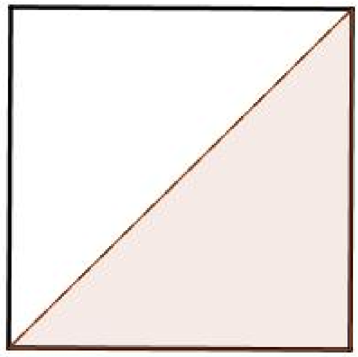


Vlastnosti štvorca

Štvorec je pravouholník

- *všetky jeho strany sú zhodné,*
- *uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú, sú zhodné a na seba kolmé,*
- *každá uhlopriečka ho delí na dva zhodné rovnoramenné pravouhlé trojuholníky,*
- *priesečník S uhlopriečok je stredom kružnice opísanej a kružnice vpísanej*





Kosouholníky triedime podľa strán nasledovne:

a) Ak kosouholník nemá susedné strany zhodné, nazýva sa **kosodĺžnik**.

b) Ak kosouholník má susedné strany zhodné, nazýva sa **kosoštvorec**.

Teda:

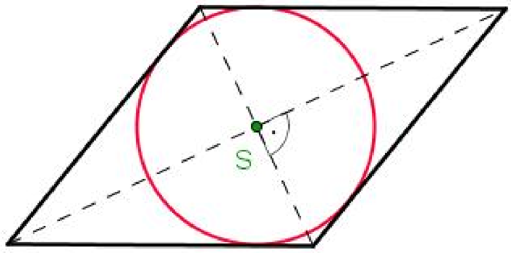
Rovnobežník, ktorého dva vnútorné uhly sú ostré a dva tupé, nazýva sa ***kosouholník.***

Kosouholník, ktorého susedné strany sú zhodné, nazýva sa ***kosoštvorec.***

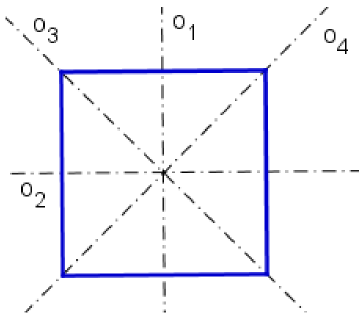
Kosouholník, ktorého susedné strany nie sú zhodné, nazýva sa ***kosodĺžnik.***

Vlastnosti kosoštvorca

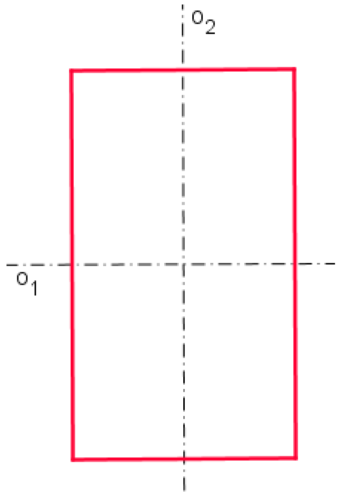
- *Kosoštvorec je kosouholník, ktorého všetky strany sú zhodné.*
- *Uhlopriečky kosoštvorca sa navzájom rozpoľujú, sú na seba kolmé.*
- *Priesečník S uhlopriečok je stredom vpísanej kružnice do kosoštvorca.*



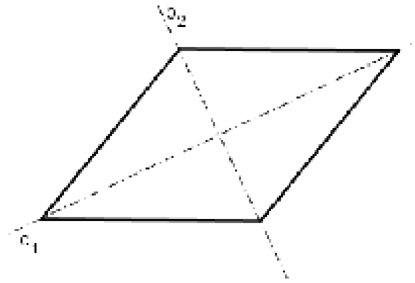
Osi súmernosti



štyri osi súmernosti



dve osi súmernosti



dve osi súmernosti

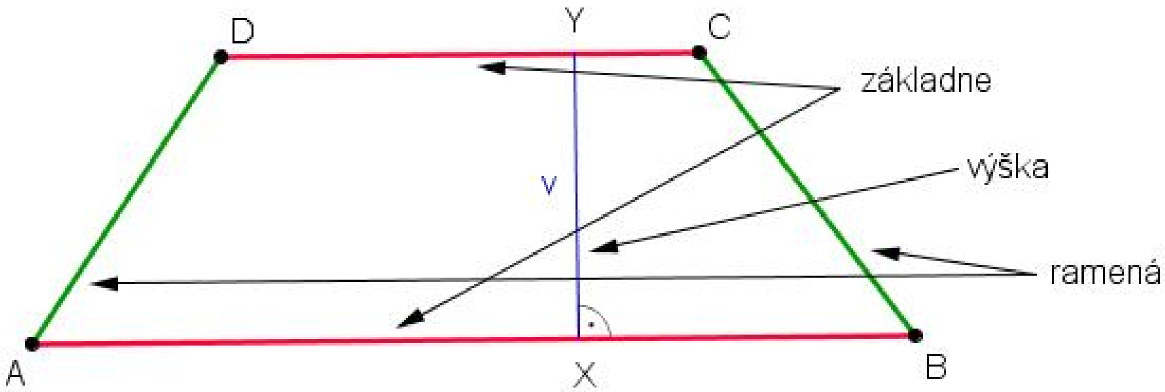
Cvičenia

1. Zostrojte rovnobežník *RSTU*, ak je dané : $|RS| = 6$ cm, $|RU| = 3$ cm, $|\sphericalangle URS| = 60°$.
2. Zostrojte rovnobežník *ABCD*, ak je $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3{,}5$ cm, $|BD| = 4$ cm.
3. Zostrojte obdĺžnik *EFGH* so stranou dĺžky 4 cm a uhlopriečkou dlhou 5 cm.
4. Narysujte ľubovoľný trojuholník *ABC* a doplňte ho na rovnobežníky *ABCD*, *ABEC*, *CAFB*. Strany trojuholníka *ABC* sú známe úsečky v trojuholníku *DEF*. Ako sa nazývajú ?
5. Načrtnite a pomenujte rovnobežník, ktorého uhlopriečky
   a) sú zhodné a navzájom kolmé,
   b) sú zhodné a nie sú kolmé,
   c) nie sú zhodné a sú navzájom kolmé.
6. Ktorým rovnobežníkom možno opísať a ktorým vpísať kružnicu ?
7. Zostrojte štvorec,
   a) ktorého strana má dĺžku 5 cm,
   b) ktorého uhlopriečka má dĺžku 5 cm.

1.10.2 Lichobežníky

Štvoruholník, ktorý má práve jednu dvojicu rovnobežných protiľahlých strán, sa nazýva ***lichobežník.***

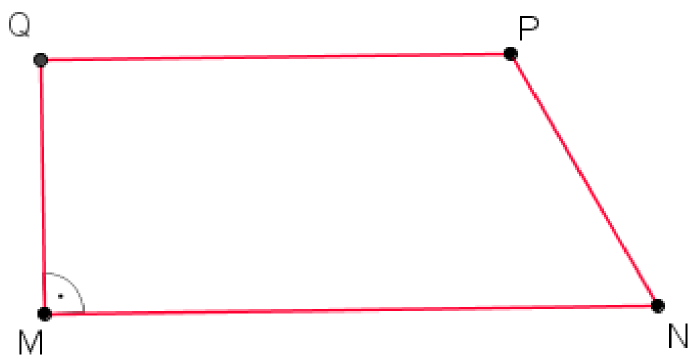
Na obrázku je nakreslený lichobežník *ABCD*.



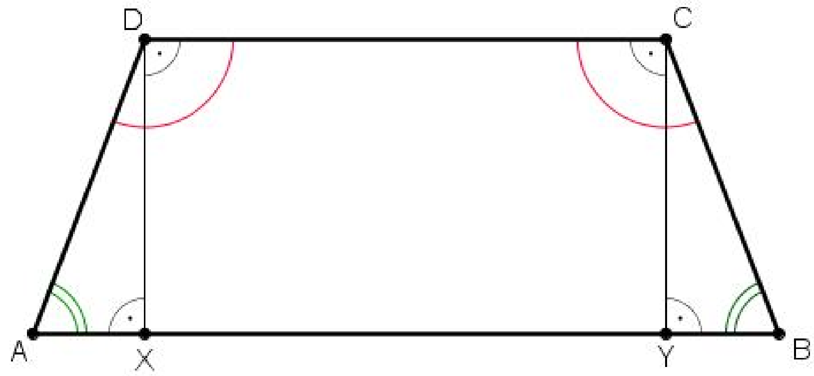
Rovnobežné strany *AB* a *CD* sa nazývajú **základne** lichobežníka *ABCD,* strany *AD* a *BC* sú **ramená** lichobežníka. Vzdialenosť základní je **výška** lichobežníka. Túto vzdialenosť môžeme vyznačiť nekonečne mnoho úsečkami, na našom obrázku je výška vyznačená úsečkou *XY*.

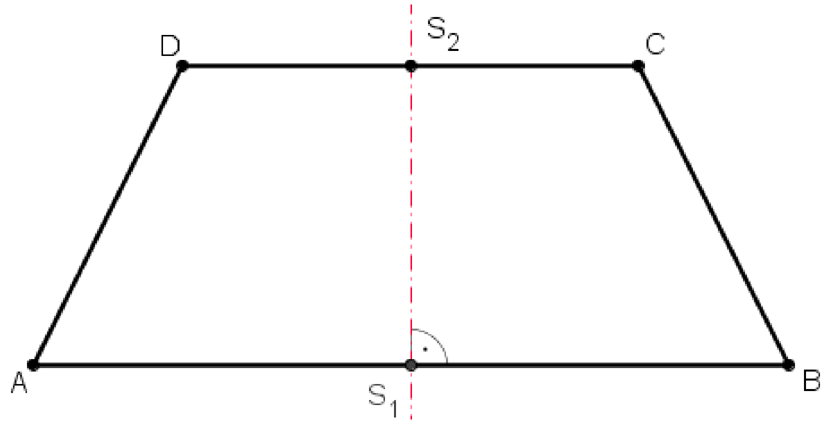
Poznáme aj špeciálne lichobežníky.

Lichobežník *MNPQ* na obrázku má jedno rameno *MQ* kolmé na základne *MN* a *PQ*. Je príkladom **pravouhlého lichobežníka**.



Lichobežník, ktorého ramená sú zhodné, nazýva sa **rovnoramenný lichobežník**.



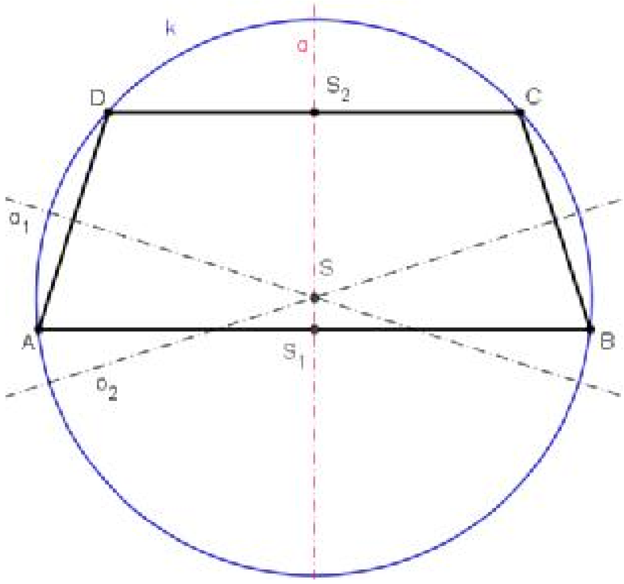


Uhly pri každej základni rovnoramenného lichobežníka sú zhodné.

Rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi,

ktorá prechádza stredmi základní.

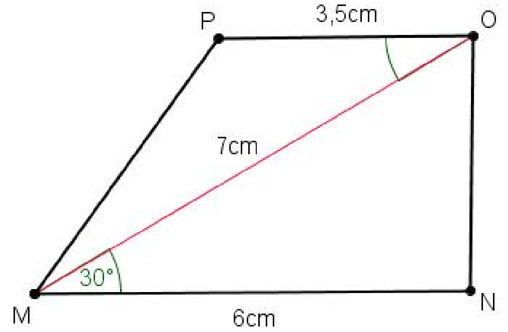
Rovnoramennému lichobežníku možno opísať kružnicu.



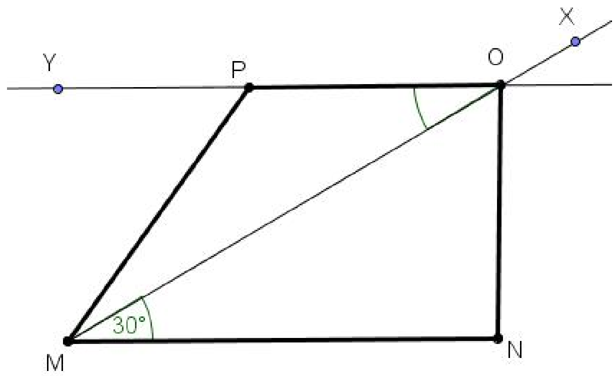
Pri konštrukcii lichobežníka využijeme obyčajne uhlopriečku, ktorá lichobežník rozdelí na dva trojuholníky a tieto zostrojíme podľa známych konštrukcií.

Napr. na obrázku je načrtnutý lichobežník $MNOP$, v ktorom poznáme $|MN| = 6$ cm, $|OP| = 3{,}5$ cm, $|MO| = 7$ cm, $|\sphericalangle OMN| = 30°$.

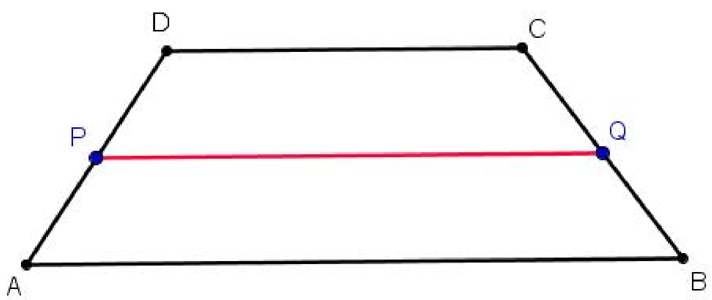
Náčrt



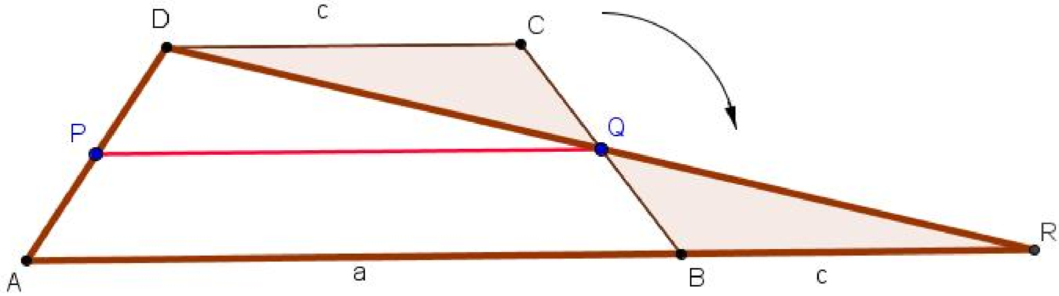
Uvedomíme si, že z rovnobežností základní MN a OP vyplýva zhodnosť striedavých uhlov OMN a MOP. Môžeme zostrojiť trojuholník MNO. Bod P zostrojíme na základe rovnobežnosti priamok MN a OP a $|OP| = 3{,}5$ cm.



V každom lichobežníku možno vyznačiť úsečku, ktorá je určená stredmi ramien. Túto úsečku nazývame **strednou priečkou** lichobežníka.



Vlastnosti strednej priečky lichobežníka môžeme vyčítať z nasledujúceho obrázka.



PQ je stredná priečka lichobežníka $ABCD$ a súčasne stredná priečka trojuholníka ARD, a preto $PQ \| AR$ a $|PQ| = \frac{a+c}{2}$.

Stredná priečka lichobežníka je úsečka určená stredmi ramien.

Stredná priečka lichobežníka je rovnobežná so základňami

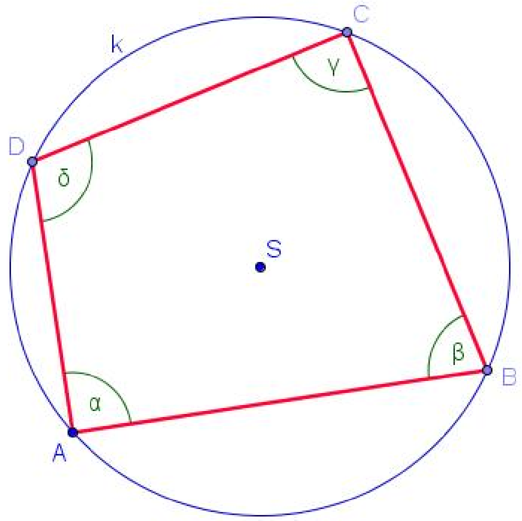
a jej dĺžka sa rovná $\frac{a+c}{2}$, kde a, c sú dĺžky základní.

Cvičenia

1. Zostrojte ľubovoľný
   a) pravouhlý lichobežník $MNOP$ ($MN \| OP$)
   b) rovnoramenný lichobežník $KLMN$ ($KL \| MN$)
2. Narysujte ľubovoľný
   a) pravouhlý, b) rovnoramenný, c) rovnostranný
   trojuholník ABC. Nájdite bod D tak, aby štvoruholník $ABCD$ bol lichobežník so základňami AB a CD.
3. Zostrojte ľubovoľný rovnoramenný lichobežník $EFGH$ a opíšte mu kružnicu.
4. Zostrojte lichobežník $DEFG$ ($DE \| FG$), ak je dané:
   a) $|DE| = 6{,}4$ cm, $|DF| = 4{,}4$ cm, $|GF| = 2{,}5$ cm, $|\sphericalangle FDE| = 40°$
   b) $|DE| = 3{,}7$ cm, $|EF| = 4{,}7$ cm, $|GD| = 5{,}4$ cm, $|\sphericalangle DEF| = 118°$

1.10.3 Iné štvoruholníky

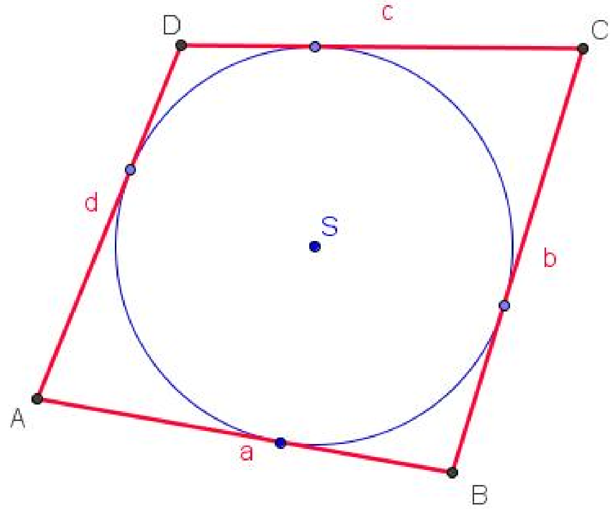
Na obrázku je znázornený štvoruholník, ktorého každá strana je tetivou kružnice. Takýto štvoruholník nazývame **tetivový štvoruholník**.



Z vlastnosti obvodových uhlov a stredových uhlov vyplýva

$$\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2R\ (priamy\, uhol)}$$

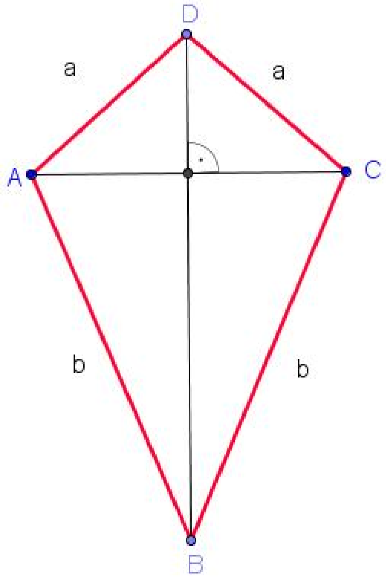
Na obrázku je znázornený štvoruholník, ktorého strany sú dotyčnice kružnice. Takýto štvoruholník nazývame **dotyčnicový štvoruholník**.



Pre dotyčnicový štvoruholník $ABCD$ platí

$$\boxed{a + c = b + d}$$

Ďalším štvoruholníkom je tzv. **deltoid**. Je to štvoruholník, ktorý ma dve susedné a ďalšie dve susedné strany zhodné.



$AB \cong BC$
$AD \cong CD$

Uhlopriečky deltoidu sú na seba kolmé, nie sú zhodné, uhlopriečka *BD* je osou úsečky *AC*, uhlopriečka *AC* nie je osou uhlopriečky *BD*.

1.10.4 Pravidelné n-uholníky

Pravidelným *n*-uholníkom ($n \geq 3$) nazývame *n*-uholník, ktorý má všetky vnútorné uhly zhodné a všetky strany zhodné. Medzi ne patrí: rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný päťuholník, pravidelný šesťuholník,....

Všetkým pravidelným *n*-uholníkom možno opísať a vpísať kružnicu.

Konštrukcie niektorých pravidelných *n*-uholníkov

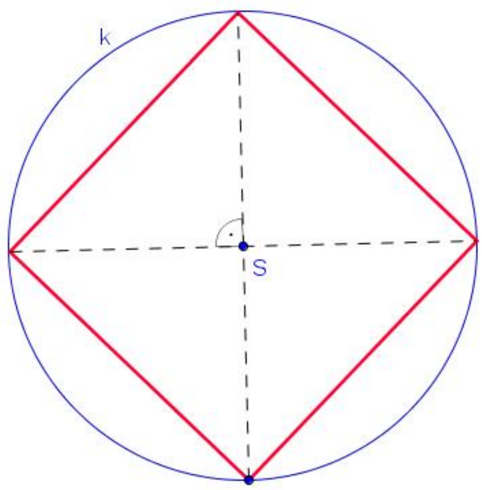
1. **Štvorec (pravidelný štvoruholník) a pravidelný osemuholník**

Využijeme vlastnosti, že každý pravidelný *n*-uholník má opísanú kružnicu.

Štvorec má uhlopriečky na seba kolmé.

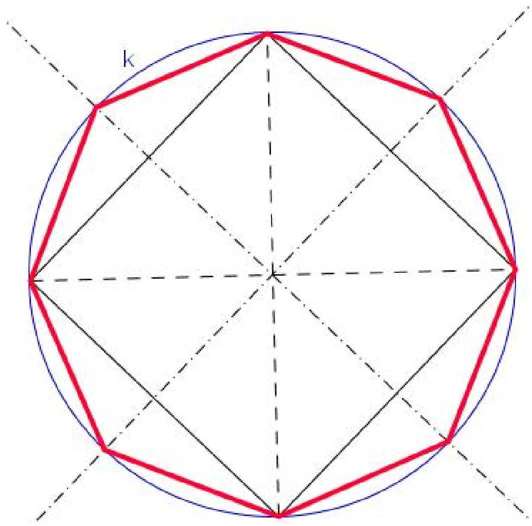
Konštrukcia:

1. *Zostrojíme kružnicu*
2. *Zostrojíme dva navzájom kolmé priemery*
3. *Krajné body týchto priemerov sú vrcholy štvorca*



Osemuholník

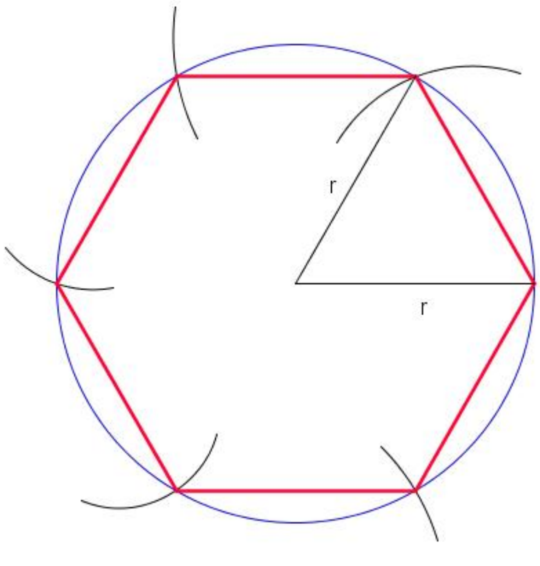
1. *Zostrojíme štvorec*
2. *Zostrojíme osi strán štvorca*
3. *Priesečníky osí strán štvorca s kružnicou a vrcholy štvorca vpísaného do kružnice, sú vrcholy pravidelného osemuholníka*



2. Pravidelný šesťuholník a rovnostranný trojuholník (pravidelný trojuholník), pravidelný dvanásťuholník

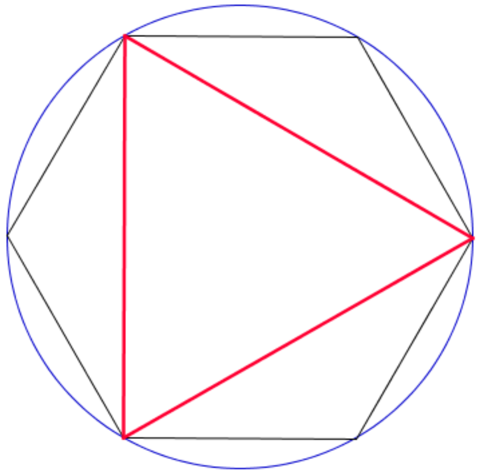
Šesťuholník

1. *Zostrojíme kružnicu s polomerom r*
2. *Úsečku dĺžky r nanesieme šesťkrát za sebou ako tetivu*
3. *Takto zostrojené body sú vrcholy pravidelného šesťuholníka*



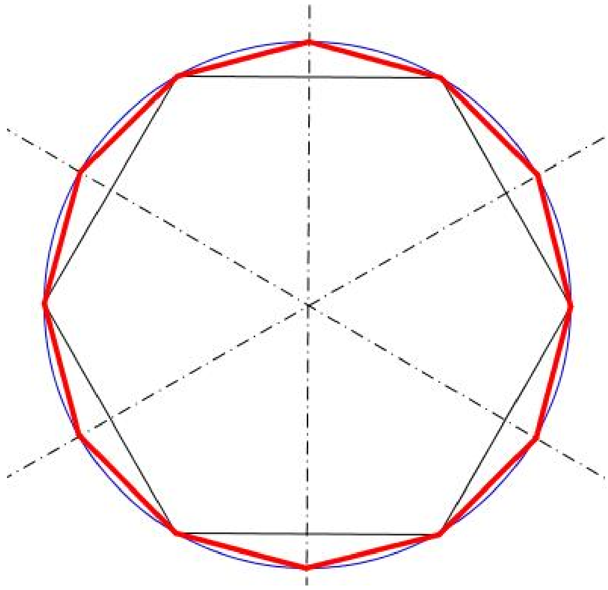
Trojuholník

1. *Zostrojíme vrcholy pravidelného šesťuholníka*
2. *Spojíme tri nesusedné vrcholy pravidelného šesťuholníka*



Pravidelný dvanásťuholník

1. *Zostrojíme pravidelný šesťuholník*
2. *Zostrojíme osi strán pravidelného šesťuholníka*
3. *Zostrojíme priesečníky týchto osí s kružnicou*
4. *Tieto priesečníky spolu s vrcholmi šesťuholníka sú vrcholy pravidelného dvanásťuholníka*

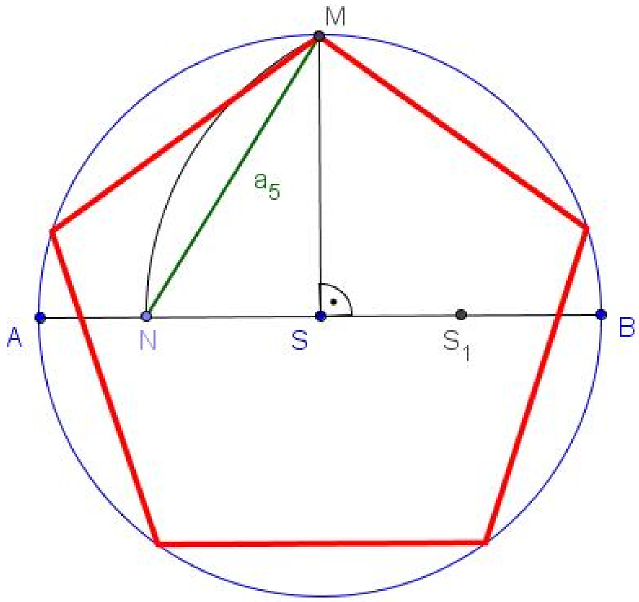


3. Pravidelný päťuholník a pravidelný desaťuholník

Pravidelný päťuholník

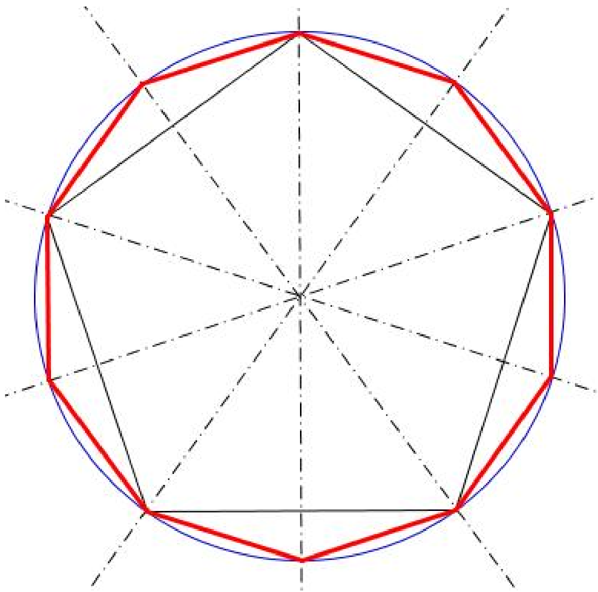
1. *Zostrojíme kružnicu*
2. *Zostrojíme priemer AB*
3. *Zostrojíme polomer $SM \perp AB$*
4. *Zostrojíme stred S_1 polomeru SB*
5. *Zostrojíme kružnicový oblúk MN so stredom S_1*

6. *Dĺžka úsečky MN je dĺžka strany pravidelného päťuholníka*

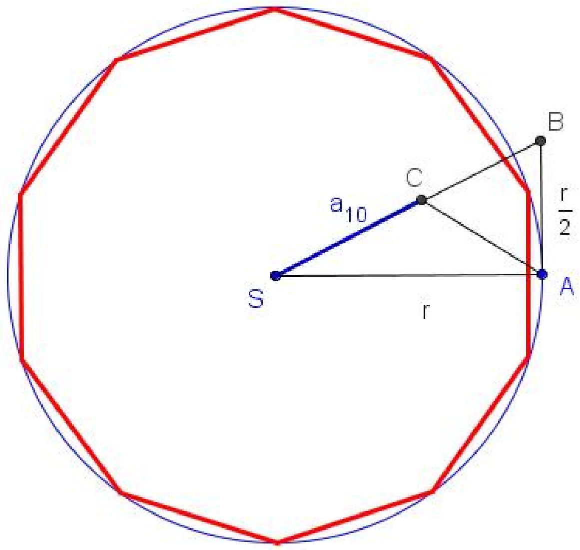


Pravidelný desaťuholník

1. *Zostrojíme pravidelný päťuholník*
2. *Zostrojíme priesečníky osí strán pravidelného päťuholníka s kružnicou*
3. *Tieto priesečníky spolu s vrcholmi pravidelného päťuholníka sú vrcholy desaťuholníka.*

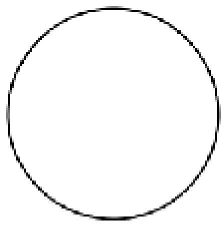


Poznámka: Môžeme najskôr zostrojiť pravidelný desaťuholník konštrukciou pomocou trojuholníka SAB a potom pravidelný päťuholník ?

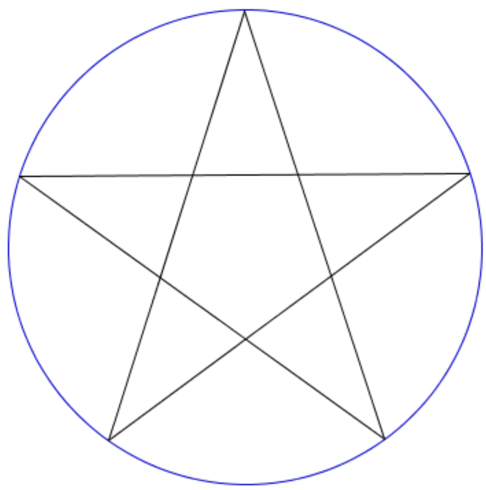


Cvičenia

1. Zostrojte stred narysovanej kružnice.



2. Zostrojte pravidelný osemuholník vpísaný do kružnice s priemerom 6 cm.
3. Zostrojte pravidelný päťuholník vpísaný do kružnice s priemerom 6 cm.
4. Zostrojte pravidelný dvanásťuholník vpísaný do kružnice s priemerom 6 cm.
5. Napíšte postup konštrukcie päťcípej hviezdy narysovanej na obrázku.



1.11 Niektoré množiny bodov danej vlastnosti

V geometrii sa často stretávame s množinami bodov, ktoré spĺňajú určité vlastnosti.

Množina všetkých bodov danej vlastnosti (geometrické miesto bodov) je množina M bodov, ktoré spĺňajú tieto podmienky:

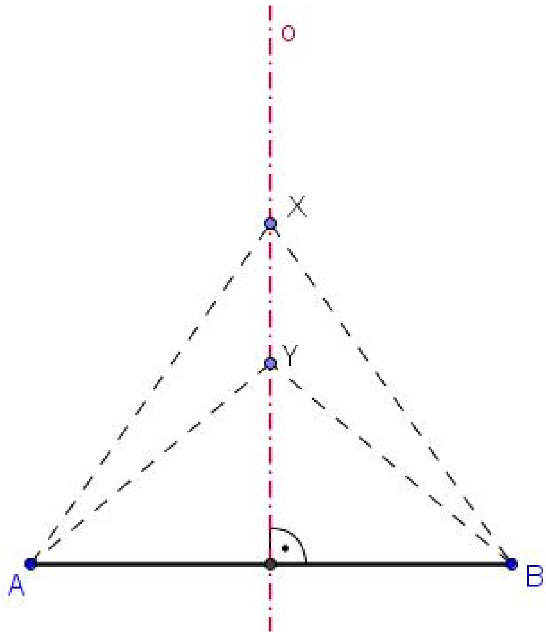
a) každý bod množiny M má dané vlastnosti,

b) každý bod, ktorý má dané vlastnosti, patrí do množiny M.

Množinami bodov danej vlastnosti môžu byť rôzne geometrické útvary, napr. priamky, kružnice, podmnožiny priamok alebo kružníc, môžu to byť aj útvary, ktoré nemajú špeciálne pomenovanie.

V predošlých častiach tejto publikácie sme sa už stretli s niektorými množinami bodov danej vlastnosti. Teraz niektoré množiny uvedieme.

1. Množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od krajných bodov *A, B* úsečky *AB* rovnaké vzdialenosti, je **os *o* úsečky** *AB*.

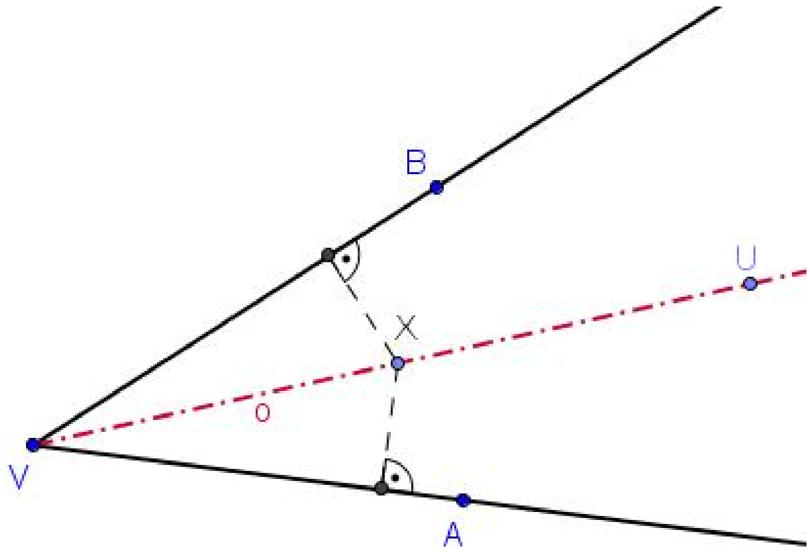


To znamená :

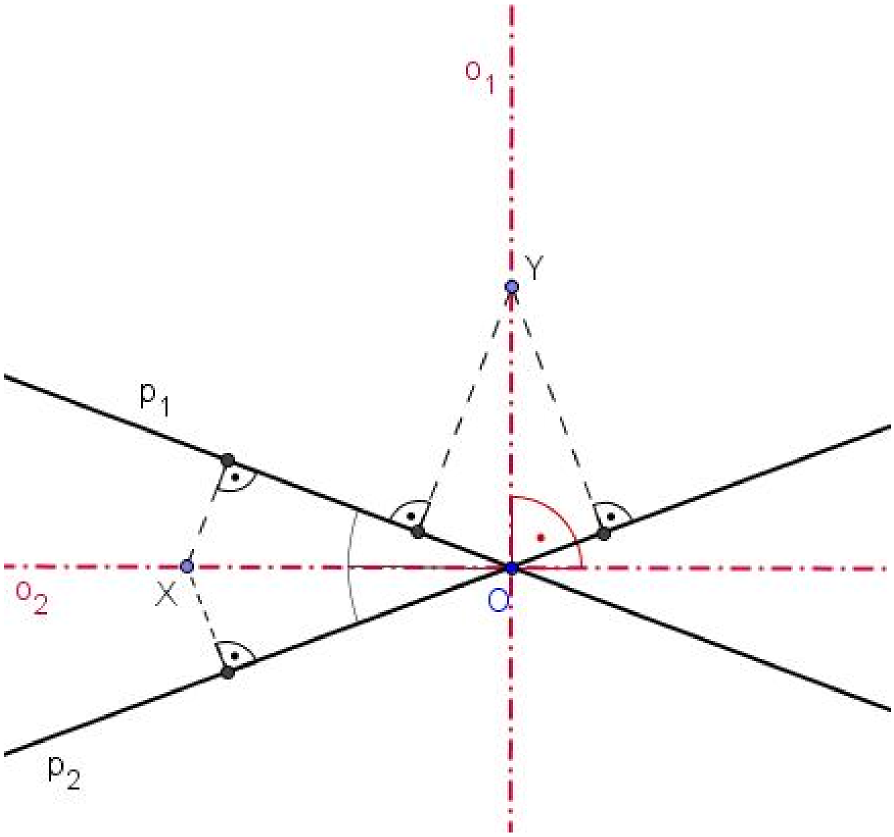
a) Ak je $X \in p$, tak pre bod X platí : $|AX| = |BX|$

b) Ak je $Y \in p$, o ktorom platí $|AY| = |BY|$, potom $Y \in p$.

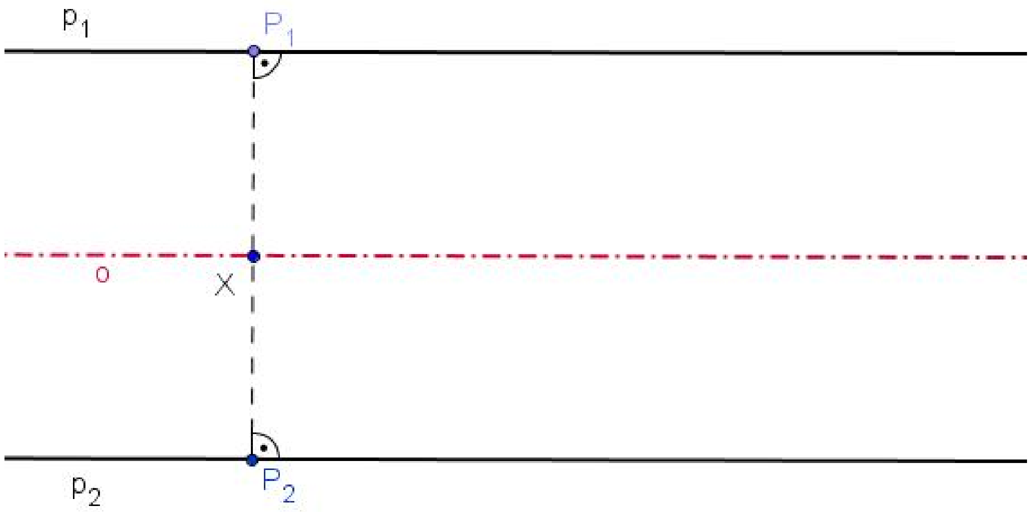
2. Nech je daný $\sphericalangle AVB$. Množina všetkých bodov, ktoré majú od ramien $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ rovnaké vzdialenosti a ležia v danom uhle, je **os** $\overrightarrow{VU}$ **daného uhla**.



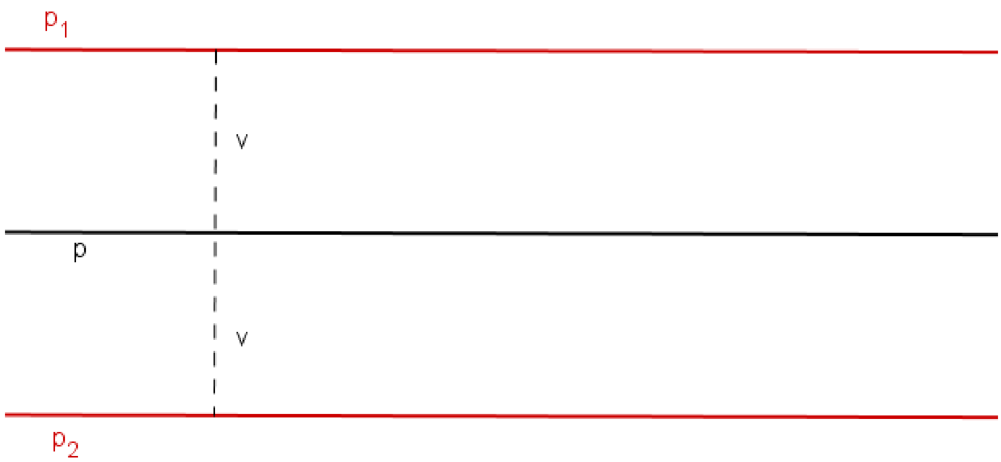
3. Množinou bodov, ktoré majú rovnaké vzdialenosti od dvoch rôznobežiek p_1, p_2, sú dve priamky o_1, o_2 na seba kolmé, na ktorých ležia osi uhlov určených týmito rôznobežkami.



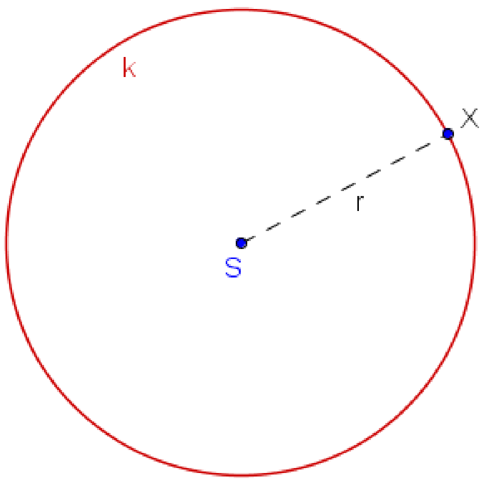
4. Množinou bodov, ktoré majú od daných dvoch rovnobežiek p_1, p_2 rovnaké vzdialenosti, je os o pása vytvoreného danými rovnobežkami p_1, p_2.



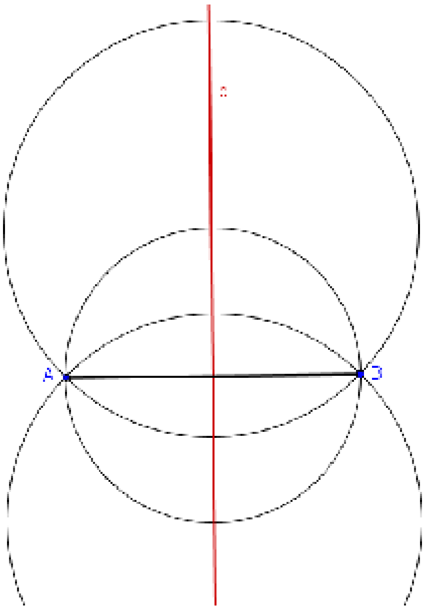
5. Množinou bodov, ktoré majú od danej priamky p vzdialenosť v, sú dve priamky $p_1 || p$, $p_2 || p$. Priamky p_1, p_2 majú od priamky p vzdialenosť v a ležia v navzájom opačných polrovinách určených priamkou p.



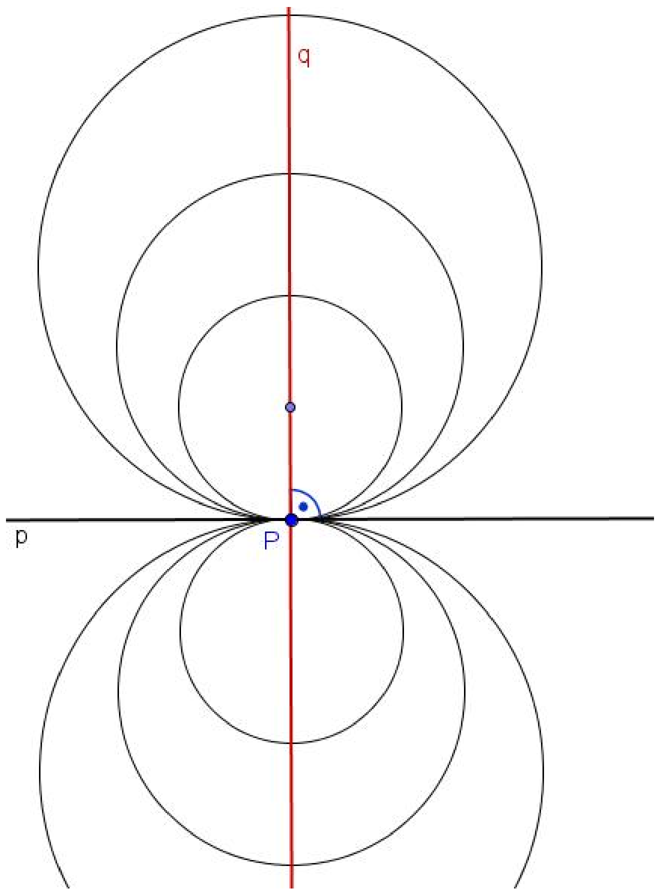
6. Množinou bodov, ktorých vzdialenosť r od bodu S je konštantná, je kružnica $k (S; r)$.



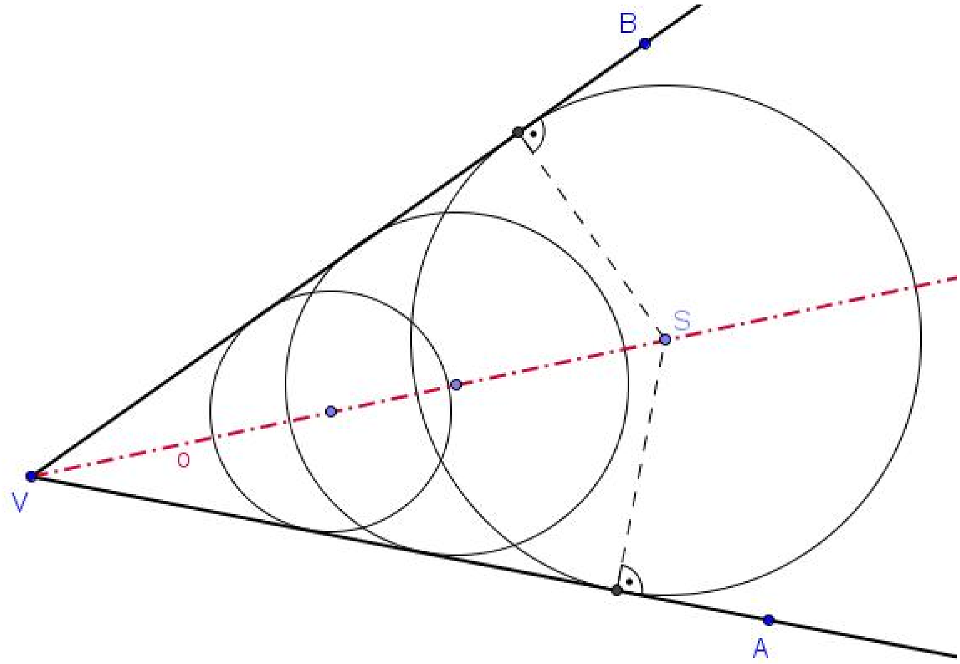
7. Množina stredov S všetkých kružníc k, ktoré prechádzajú bodmi A,B úsečky AB, je os p úsečky AB.



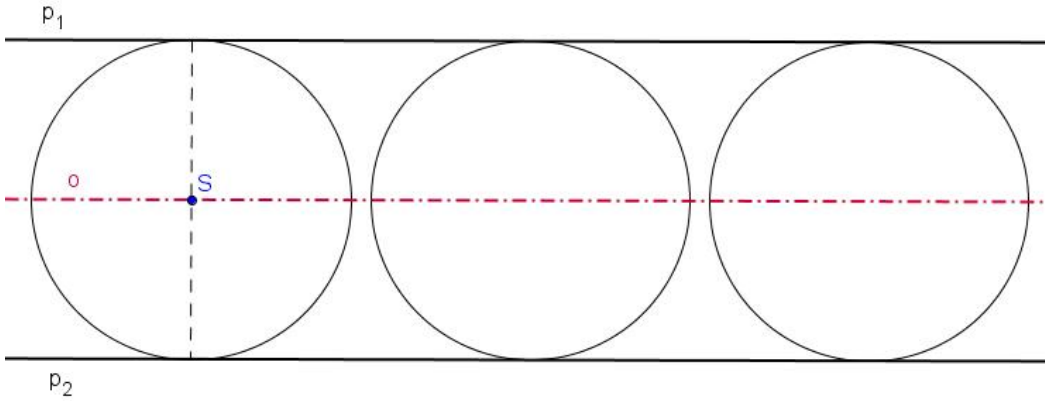
8. Množina stredov S všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky p v bode P, je priamka $q \perp p$, ktorá prechádza daným bodom P, pričom bod P do tejto množiny nepatrí.



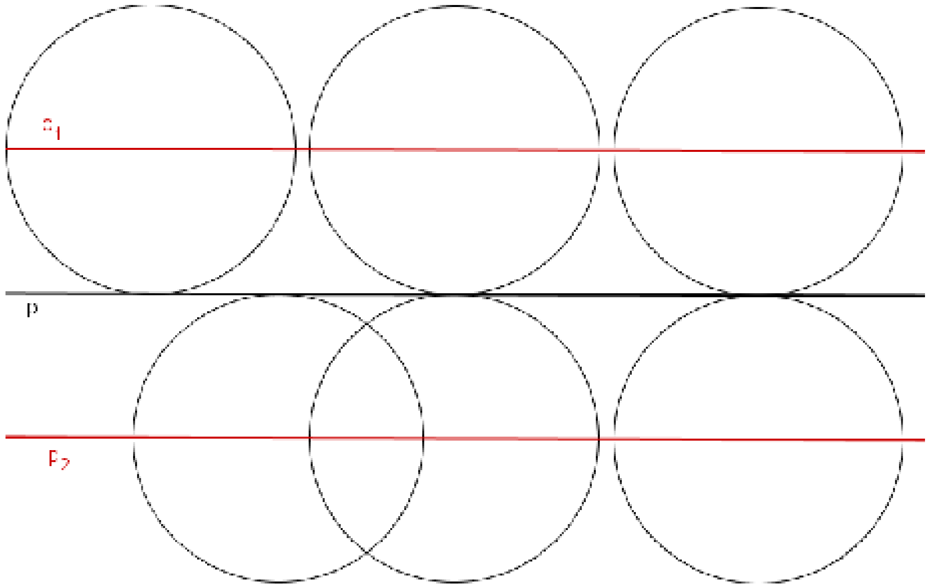
9. Nech je daný uhol $\sphericalangle AVB$. Množina stredov S všetkých kružníc, ktoré ležia v danom uhle a ktoré sa dotýkajú polpriamok AV, BV, je os o uhla AVB okrem bodu V.



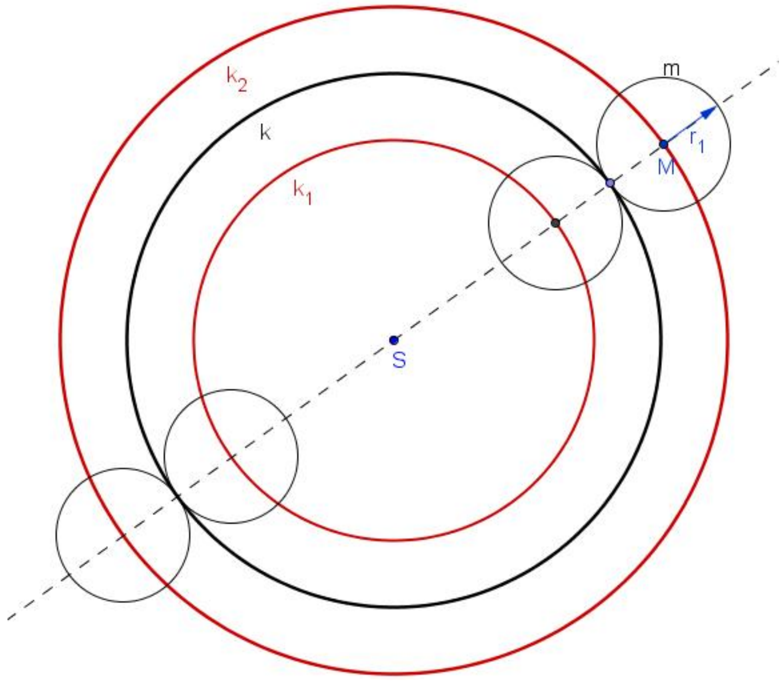
10. Nech sú dané dve rôznobežky p_1, p_2. Množina stredov S všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamok p_1, p_2 je os o pása obidvoch rovnobežiek p_1, p_2.



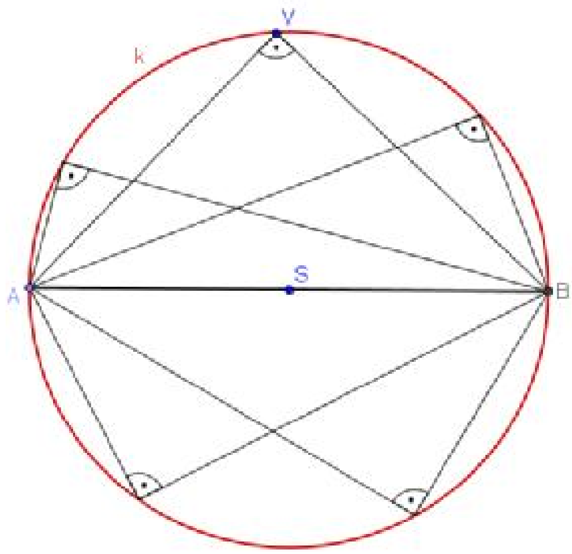
11. Nech je daná priamka p a úsečka dĺžky r. Množina stredov S všetkých kružníc, ktoré majú polomer r a ktoré sa dotýkajú priamky p, sú dve priamky $p_1 || p$, $p_2 || p$, ktoré majú od priamky p vzdialenosť r a ktoré ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p.



12. Nech je daná kružnica *k (S; r)* a úsečka dĺžky r_1. Množina stredov *M* všetkých kružníc *m (M,* r_1*)*, ktoré sa dotýkajú danej kružnice *k* a majú polomer r_1, sú dve sústredné kružnice k_1 *(S;* $r+r_1$*)*, k_2 *(S;* $r-r_1$*)*.



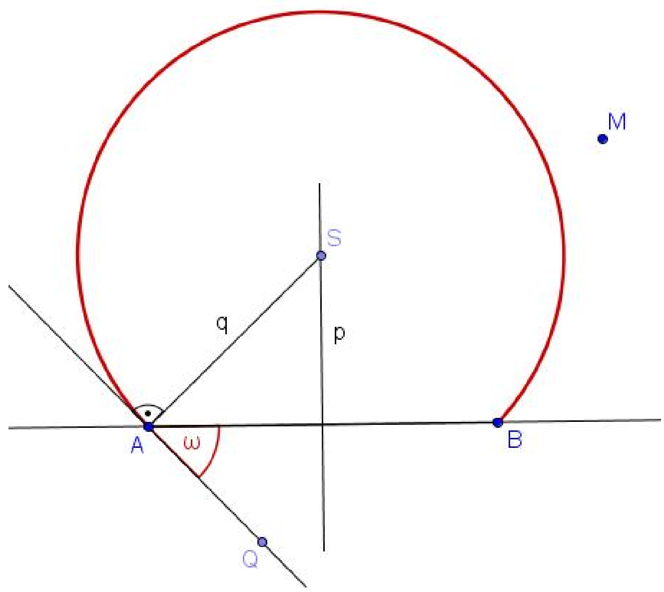
13. Množinou vrcholov *V* všetkých pravých uhlov, ktorých ramená prechádzajú dvoma danými bodmi *A, B*, je kružnica k zostrojená nad úsečkou určenou bodmi *A, B* ako priemerom s výnimkou daných bodov. (Talesova veta).



14. Nech je daná úsečka AB, polrovina ABM a konvexný uhol ω. Množina všetkých bodov X, ktoré ležia v danej polrovine ABM a pre ktoré platí $\sphericalangle AXB \cong \omega$, je istý oblúk AB bez krajných bodov A, B.

    Oblúk zostrojíme takto:

    V polrovine ABN, opačnej k polrovine ABM, zostrojíme úsekový uhol $\sphericalangle BAQ \cong \omega \cong \omega$ '. Ďalej zostrojíme priamku $q \perp AQ$, ktorá prechádza bodom A, a označíme os úsečky AB písmenom p. Priesečník $S = p \cap q$ je stred hľadaného oblúka AB.



Cvičenia

1. Dané sú dve navzájom kolmé priamky a, b. Nájdite množinu bodov, ktoré majú od priamky a vzdialenosť v_1 a od priamky b vzdialenosť v_2.

2. Nájdite množinu bodov, ktoré ležia na osiach daných priamok *m, n* a od priesečníka priamok majú vzdialenosť *v*.
3. Určte množinu bodov v rovine, ktoré majú od danej priamky *a* vzdialenosť 2,5 cm a od stredu kružnice *k (S; 3 cm)* vzdialenosť 4 cm.
4. Dané sú dva body S_1, S_2. $|S_1S_2| = 4$ cm. Nájdite množinu všetkých bodov *X*, ktoré majú od bodu S_1 vzdialenosť 3 cm a od bodu S_2 vzdialenosť 3,5 cm.
5. Nájdite množinu všetkých bodov *X* v rovine, z ktorých úsečku *AB* vidieť pod uhlom $\alpha = 60°$. $|AB| = 4{,}5$ cm.
6. Dané sú dve rôznobežné priamky *a, b*. Nájdite množinu všetkých bodov *X* v rovine, ktoré majú od priamky *a* vzdialenosť 3 cm a od priamky *b* vzdialenosť 2 cm.
7. Daná je kružnica *k (S; 3,5 cm)* a jej dotyčnica *t* s dotykovým bodom *T*. Nájdite množinu bodov *X,* ktoré majú od dotyčnice vzdialenosť 2 cm a od stredu *S* vzdialenosť 6 cm.
8. Zdôvodnite, že množina bodov *X*, ktoré sú od pevného bodu *A* vzdialené 3 cm a od pevného bodu *B* vzdialené 2 cm, keď $|AB| = 6$ cm.
9. Daný je uhol $\sphericalangle AVB$. Nájdite množinu bodov na osi *o* daného uhla, ktorá je od ramena *VA* vzdialená 2 cm a od ramena *VB* 2,5 cm.
10. Daná je priamka *d* a bod *F* neležiaci na priamke *d*. Nájdite niekoľko bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od priamky *d* a od bodu *F*.

1.12 Dĺžka úsečky. Obvod útvaru

Jeden z prvých geometrických pojmov, s ktorými sa stretávame už na prvom stupni základnej školy, je **veľkosť** čiže **dĺžka úsečky**.

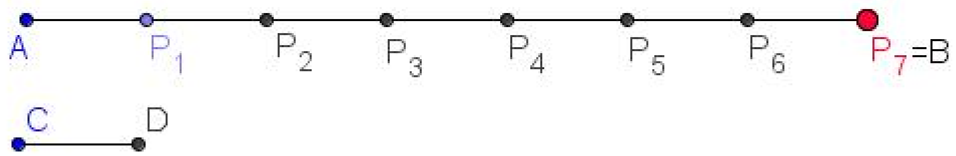
Dĺžka úsečky je **číslo** a určujeme ju meraním.

Ak máme zmerať úsečku AB, zvolíme určitú úsečku CD za **jednotkovú** (t.j. priradíme jej číslo 1) a zostrojujeme na polpriamke AB navzájom rôzne body P_1, P_2, P_3,...tak, aby platilo

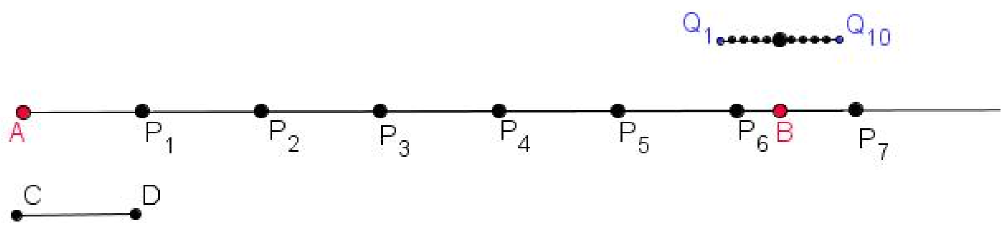
$AP_1 \cong P_1P_2 \cong P_2P_3 \cong \ldots \cong CD,$

stručne povieme, že úsečku CD nanášame postupne na polpriamku AB.

Ak niektorý z bodov P_1, P_2, P_3,...splynie s bodom B, čiže ak pre niektoré n je $P_n = B$, je dĺžka (veľkosť) úsečky AB prirodzené číslo n.



Obyčajne však tento prípad nenastane, potom leží bod B medzi bodmi P_n, P_{n+1}. V tomto prípade rozdelíme jednotkovú úsečku CD na určitý počet zhodných dielov a postupujeme analogicky ako v predchádzajúcom prípade, kde za jednotkovú úsečku zvolíme jeden z týchto dielov.



Ak je potrebné, tento postup znovu opakujeme.

Pre dĺžku úsečky platí:

1. **Dĺžka úsečky je kladné číslo.**
2. **Zhodné úsečky majú rovnaké dĺžky.**
3. **Grafický súčet dvoch úsečiek má dĺžku, ktorá sa rovná súčtu dĺžok oboch úsečiek.**

Uveďme aj nasledovné tvrdenia :

1. **Úsečky, ktorých dĺžky (pri tej istej jednotkovej úsečke) sú rovnaké, sú zhodné.**
2. **Každé kladné číslo je dĺžkou niektorej úsečky.**

Pri meraní úsečiek nastanú často také okolnosti, že musíme zmeniť jednotkovú úsečku. Potom sa zmenia aj dĺžky tých úsečiek.

Ak zmeníme jednotkovú úsečku, znásobia sa dĺžky všetkých úsečiek tým istým koeficientom, ktorý nazývame meniteľ.

Môžeme vysloviť tvrdenie:

Ak je *x* dĺžka úsečky *AB* pri jednotkovej úsečke *e* a *y* dĺžka tej istej úsečky *AB* pri jednotkovej úsečke *f*, platí : $y = kx$, kde *k* je koeficient závislý od obidvoch jednotlivých úsečiek.

Dĺžku úsečky AB budeme označovať $|AB|$.

Pre meranie úsečiek používame tieto jednotky dĺžky :

meter (m), decimeter (dm), centimeter (cm), milimeter (mm), kilometer (km)

1 m = 10 dm

1 dm = 10 cm

1 cm = 10 mm

1 km = 1000 m

Používajú sa aj iné jednotky dĺžky, napr. morská míľa, ktorej dĺžka je 1850 m, v nedávnej minulosti sa používala aj siaha, ktorej dĺžka je 1,896 m.

V anglicky hovoriacich krajinách sa prevažne používajú tieto jednotky dĺžky :

1 palec (šírka ľudského palca je približne 25,4 mm)

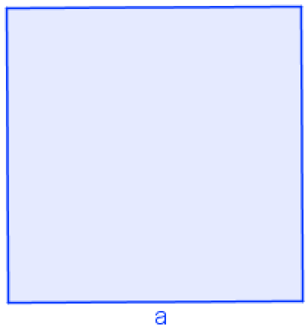
1 yard (0,9144 m)

1 stopa (0,3048 m)

1 anglická míľa (1609 m)

Obvod rovinného útvaru je priradenie (funkcia), ktoré rovinnému geometrickému útvaru priradí nezáporné reálne číslo. Pri mnohouholníkoch obvod je súčet dĺžok strán tohto mnohouholníka.

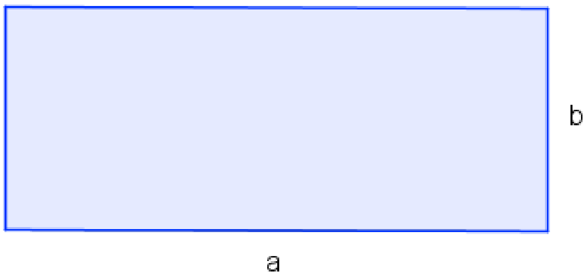
Uveďme prehľad vzťahov pre výpočet obvodu rovinných útvarov.



ŠTVOREC

$o = 4.a,$

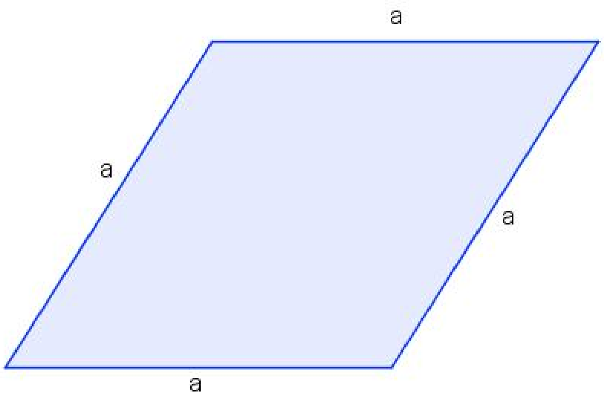
a = dĺžka strany štvorca



OBDĹŽNIK

$o = 2.(a+b),$

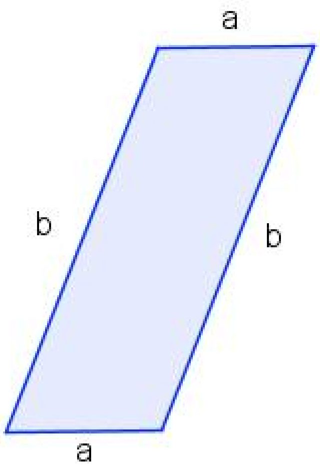
a,b – rozmery obdĺžnika



KOSOŠTVOREC

$o = 4.a,$

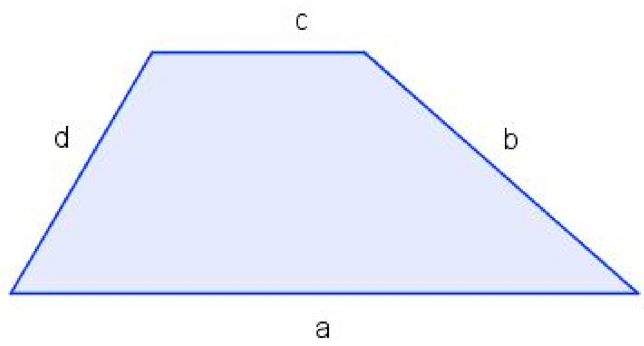
a = dĺžka strany kosoštvorca



KOSODĹŽNIK

$o = 2.(a+b),$

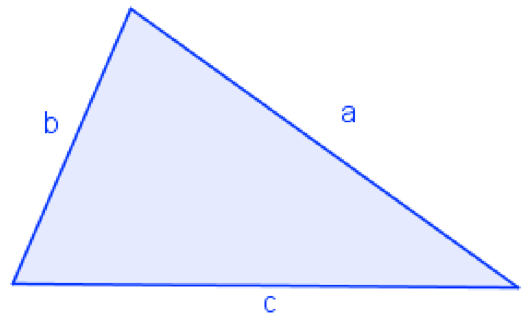
a,b – dĺžky strán kosodĺžnika



LICHOBEŽNÍK

$O = a + b + c + d,$

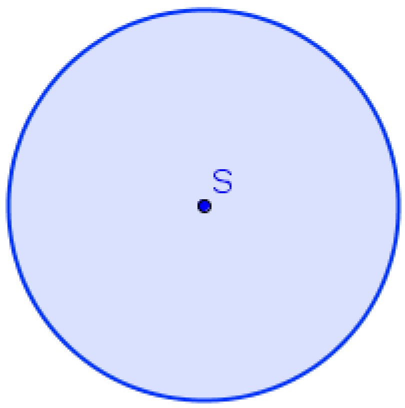
a,b,c,d – dĺžky strán lichobežníka



TROJUHOLNÍK

$o = a + b + c,$

a,b,c – dĺžky strán trojuholníka



KRUŽNICA, KRUH

(dĺžka kružnice, obvod kruhu)

$o = 2.\pi.r,$

r – veľkosť polomeru,

π – Ludolfovo číslo,

$\pi \doteq 3,14$

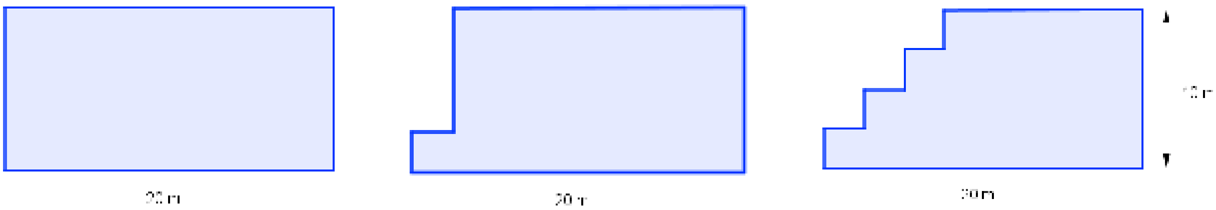
Cvičenia

1. Zoraďte podľa dĺžok úsečky, ktorých dĺžky sú :

   $a = 1,3\ dm,\ b = 14\ cm,\ c = \dfrac{40}{3}\ cm,\ d = 0,1345\ m.$

2. Morská míľa má dĺžku 1850 m. Označte y vzdialenosť dvoch bodov v morských míľach, x vzdialenosť tých istých dvoch bodov v kilometroch. Napíšte závislosť y pomocou x.
3. Napíšte vzorec pre premenu siah na metre.
4. Versta a sažeň boli staré morské dĺžkové jednotky. Versta mala 500 sažňov, čo je približne 1067 m. Odvoďte vzorce približne platné pre všetky dĺžkové jednotky.

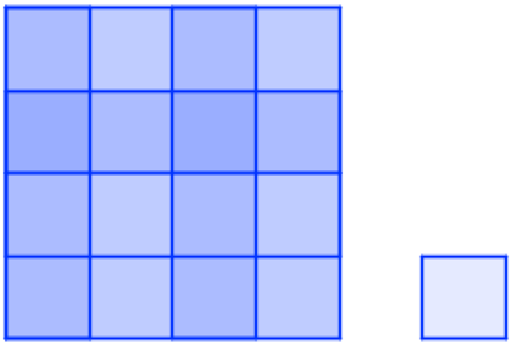
5. Zostrojte výšku *v* rovnostranného trojuholníka so stranou *a* a na základe merania porovnajte úsečky 0,8 a, 0,9a, v. (zvoľte $a = 1\ dm$)
6. Postačuje 60 m pletiva na ohradenie každého pozemku daného tvaru ?



7. Zostrojte v štvorcovej sieti (štvorec so stranou 1 cm) štvoruholníky s obvodom 8 cm.

1.13 Obsah rovinného útvaru

Obsah rovinného útvaru je opäť priradenie (funkcia), ktoré rovinnému útvaru priradí nezáporné číslo. Pri meraní obsahu útvaru porovnávame plochu útvaru s **jednotkovým štvorcom.** Jednotkový štvorec je štvorec, ktorého strana má dĺžku 1 (napr. 1 cm). Obsah útvaru je potom číslo, ktoré udáva, koľkokrát sa jednotkový štvorec „nachádza“ v útvare.

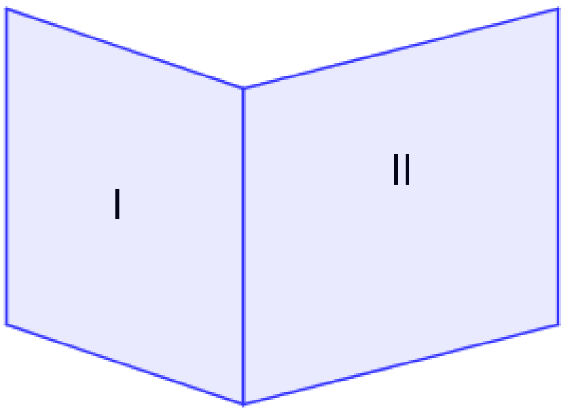


jednotkový štvorec

Obsah útvaru je 12 jednotkových štvorcov

Obsah útvaru má tieto vlastnosti:

1. **Obsah útvaru je nezáporné číslo.**
2. **Zhodné útvary majú rovnaké obsahy.**
3. **Ak je útvar zložený z dvoch častí, ktoré sa „neprekrývajú“, jeho obsahom je číslo, ktoré sa rovná súčtu obsahov obidvoch častí.**



Obsah útvaru budeme označovať písmenom *S.*

$$S = S_I + S_{II}$$

Základnou jednotkou na meranie obsahu útvaru je **jeden meter štvorcový** (1 m^2), čo je obsah štvorca so stranou dĺžky jeden meter.

Okrem základnej jednotky 1 m^2 používame pri meraní útvarov aj odvodené jednotky, ktorými sú : decimeter štvorcový, centimeter štvorcový, milimeter štvorcový, kilometer štvorcový.

Platí :

$1\ m^2 = 100\ dm^2$

$1 dm^2 = 100\ cm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

$1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$

Ďalšími metrickými jednotkami, ktoré sa všeobecne používajú najmä v poľnohospodárstve, sú ***ár*** a ***hektár***.

Ár (skratka *a*) je jednotka obsahu a predstavuje obsah štvorca so stranou dĺžky 10 m, ide teda o plochu s obsahom 100 m^2.

Hektár (v skratke *ha*) predstavuje obsah štvorca so stranou dĺžky 100 m, ide o plochu s obsahom 10 000 m^2.

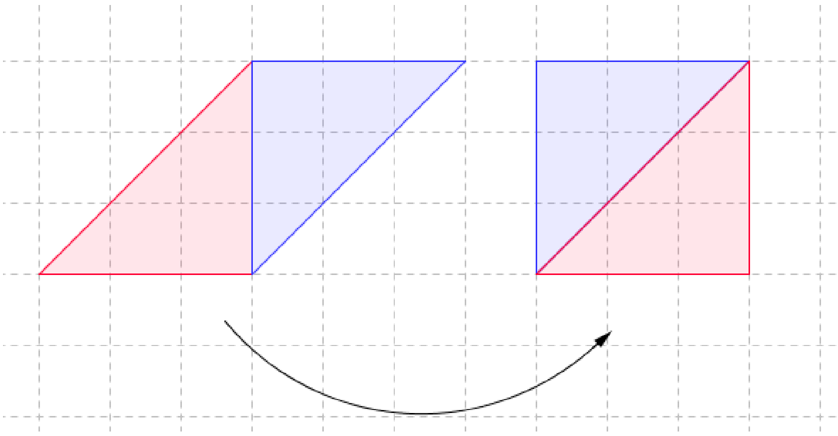
$1\ a = 100\ m^2$

$1\ ha = 10\ 000\ m^2 = 100\ a$

$1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2 = 100\ ha$

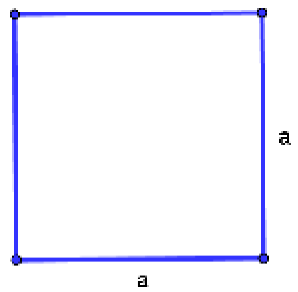
Pri určovaní obsahu „zložitejšieho“ útvaru je vhodné tento útvar rozdeliť na niekoľko jednoduchších častí. Určíme obsahy týchto častí, ich obsahy sčítame a dostaneme obsah pôvodného útvaru.

V niektorých prípadoch je výhodné útvar „rozstrihnúť“ a vzniknuté časti premiestniť a nakoniec „zlepiť“ do jednoduchšieho útvaru. Na obrázku je „premena“ jedného rovnobežníka na štvorec.



Túto premenu pri rovnobežníku možno vždy uskutočniť ?

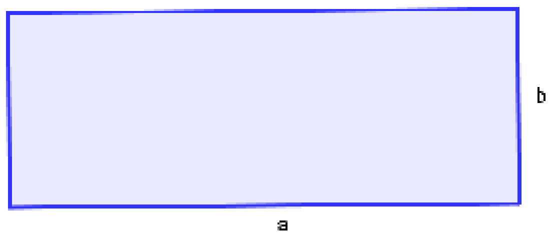
Uveďme prehľad vzorcov na výpočet obsahov niektorých útvarov.



ŠTVOREC

$S = a.a = a^2,$

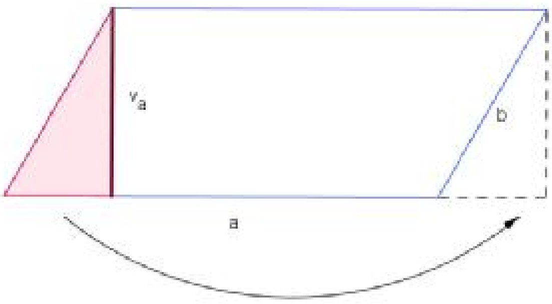
a – dĺžka strany štvorca



OBDĹŽNIK

$S = a.b,$

a,b – dĺžky strán obdĺžnika

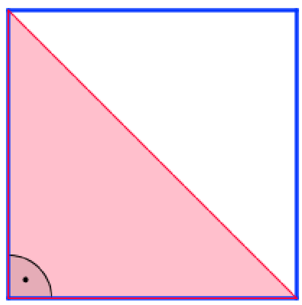


ROVNOBEŽNÍK

$S = a.v_a,$

a – dĺžka strany rovnobežníka,

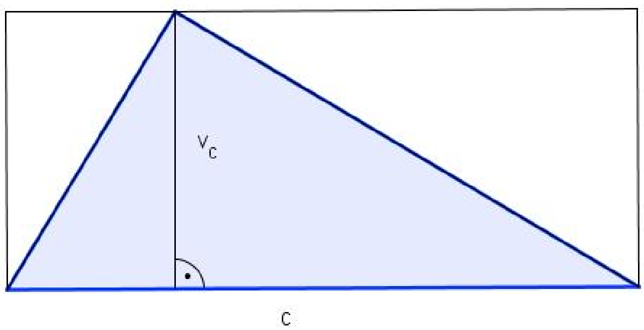
v – výška na stranu a



PRAVOUHLÝ TROJUHOLNÍK

$S = \frac{1}{2}.a.b,$

a,b – dĺžky odvesien

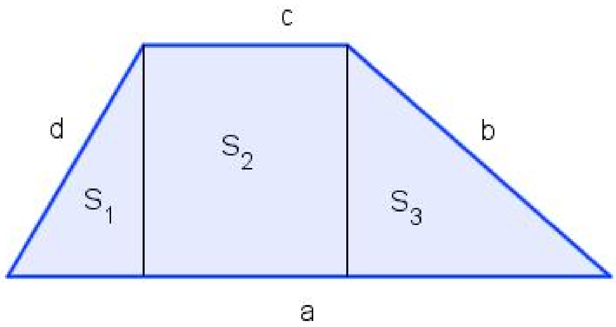


TROJUHOLNÍK

$S = \frac{1}{2}.c.v_c,$

c – dĺžka strany,

v_c – dĺžka výšky na stranu c

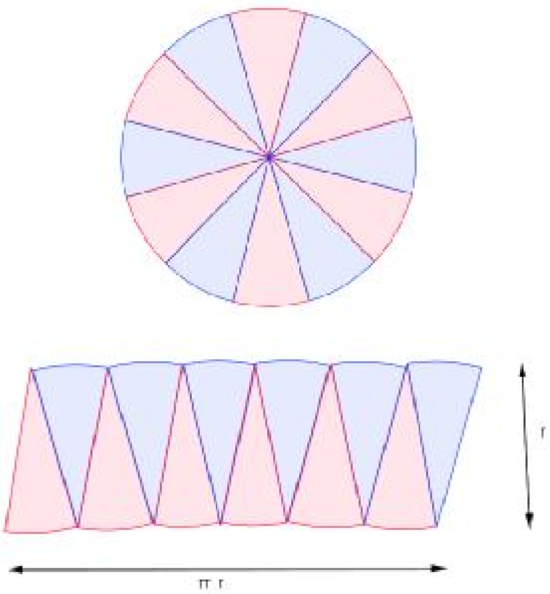


LICHOBEŽNÍK

$S = \frac{(a+c)}{2}.v,$

a,b – dĺžky základní,

v – výška



KRUH

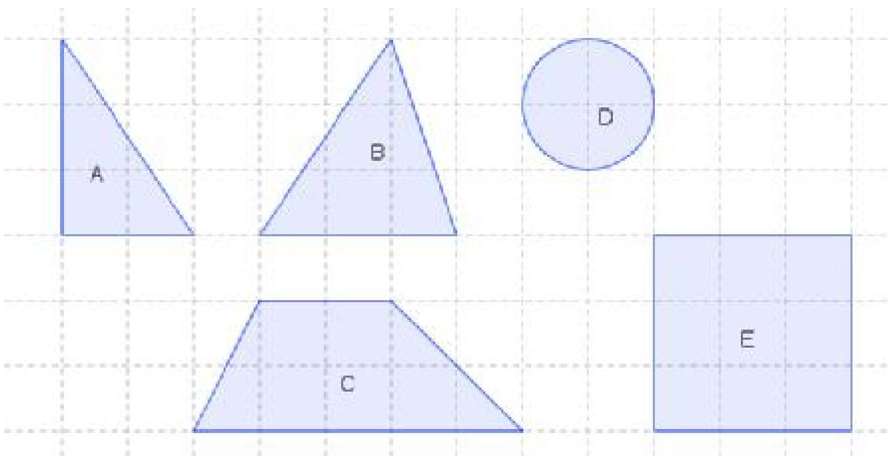
$S = \pi.r.r = \pi.r^2,$

r – dĺžka polomeru,

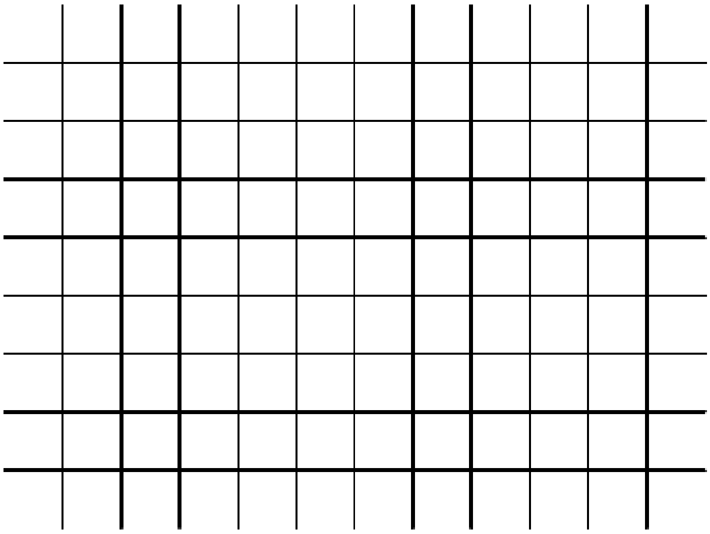
π – Ludolfovo číslo

Cvičenia

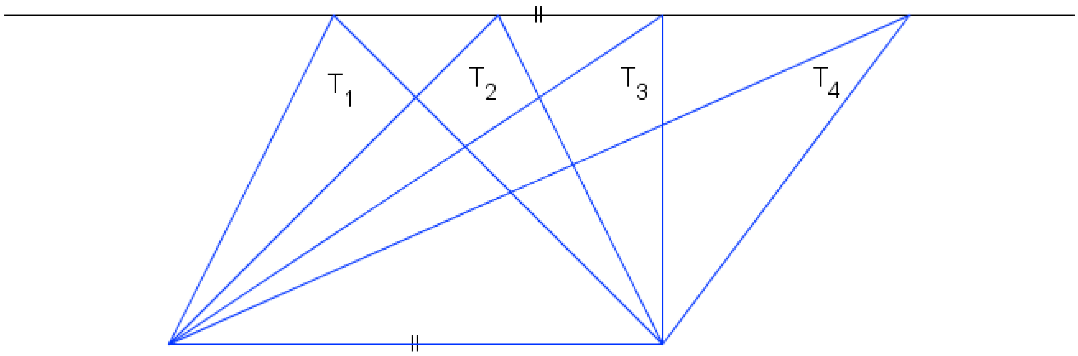
1. Pomenujte útvary A, B, C, D, E a určte ich obsahy, ak dĺžka strany štvorca štvorcovej siete je 1 cm.



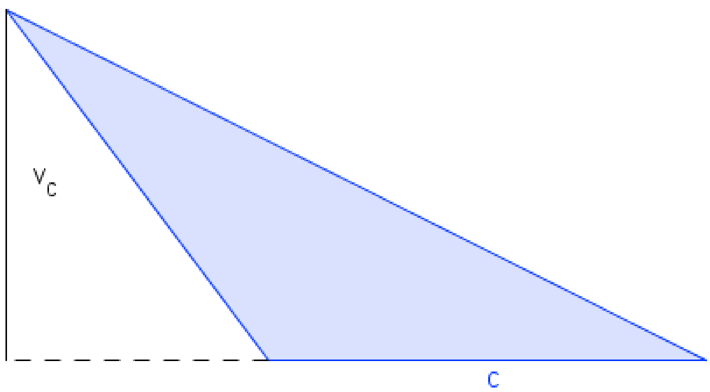
2. Zostrojte v štvorcovej sieti (štvorec so stranou 1 cm) trojuholníky s obsahom 6 cm^2.



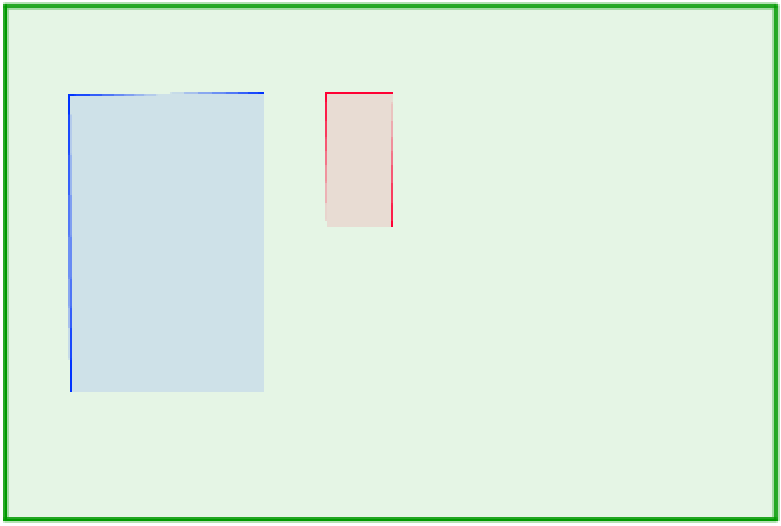
3. Na obrázku sú narysované trojuholníky T_1, T_2, T_3, T_4. Čo možno tvrdiť o ich obsahoch ?



4. Ako možno odôvodniť, že vzorec $S = \frac{1}{2}.c.v_c$ pre tupouhlý trojuholník správny?



5. Na pozemku obdĺžnikového tvaru s rozmermi 20 m a 30 m je postavená dom s rozmermi 12,5 m a 9,20 m a garáž s rozmermi 5,75 m a 2,80 m. Aká časť pozemku (v m^2) môže slúžiť na okrasnú a úžitkovú záhradu ?



6. Doplňte chýbajúce údaje do tabuľky

ha	**a**	**m^2**	**dm^2**
	2		
		10	
			500
1			
	0,5		

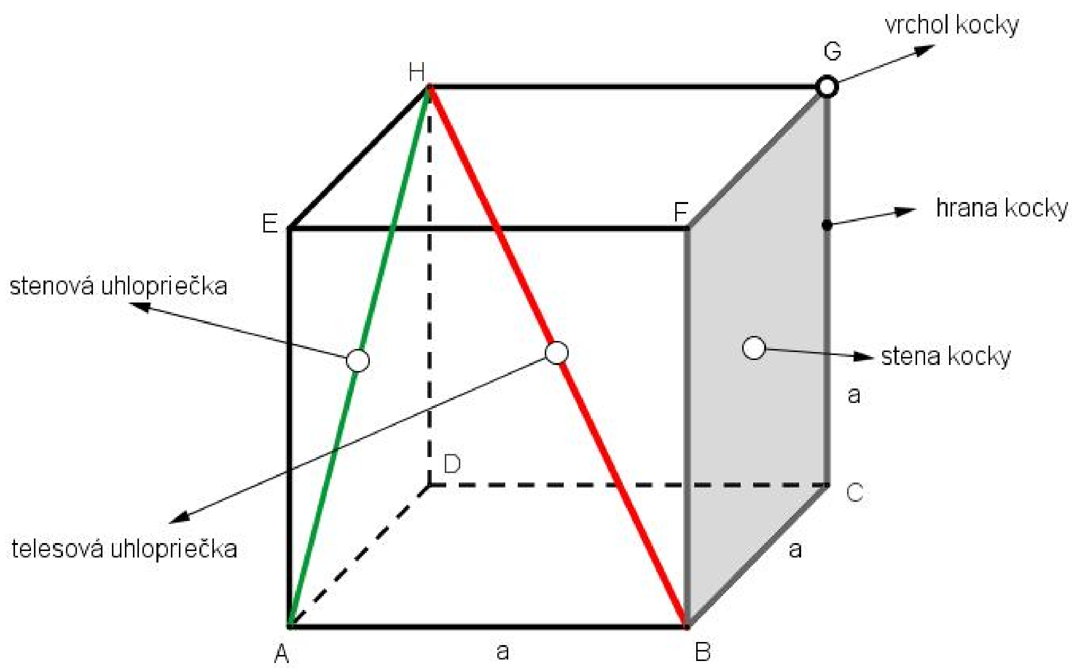
7. Narysujte ľubovoľný trojuholník a rozdeľte ho na :
   a) dva trojuholníky s rovnakými obsahmi,
   b) tri trojuholníky s rovnakými obsahmi.
8. Kružnici *k* s polomerom $r = 5$ cm je vpísaný štvorec. Vypočítajte, o koľko je obsah štvorca menší než obsah kruhu ohraničeného kružnicou *k*.
9. Vypočítajte obsah medzikružia ohraničeného kružnicami, ktorých polomery majú veľkosti 6,4 dm a 3,7 dm.
10. Pomocou dĺžky strednej priečky lichobežníka zdôvodnite vzorec pre výpočet obsahu lichobežníka.

2 STEREOMETRIA

Stereometria je oblasť geometrie, ktorá sa zaoberá priestorovými útvarmi a ich vlastnosťami (grécky ***stereos*** značí pevný, tuhý; ***metrein*** - merať).

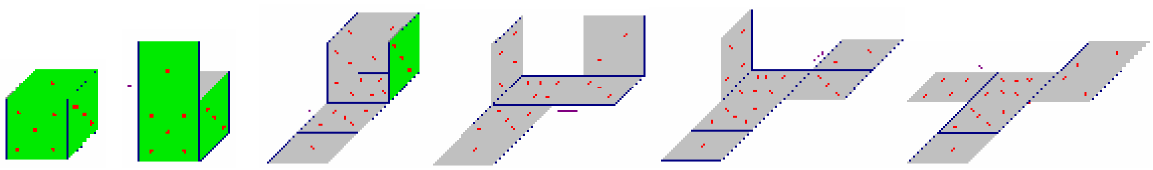
2.1 Hranaté telesá

Kocka je hranaté teleso majúce šesť zhodných stien, ktorými sú štvorce. Má šesť stien, osem vrcholov, dvanásť hrán, štyri telesové uhlopriečky a dvanásť stenových uhlopriečok.



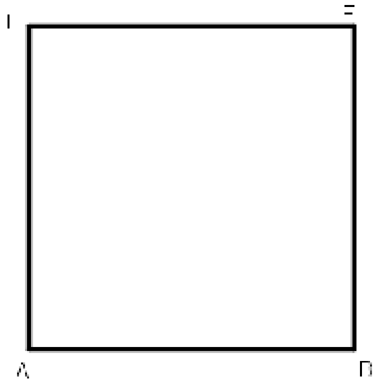
Sieť kocky vznikne rozložením stien kocky (jej plášťa) do roviny tak, aby po ich opätovnom zložení vznikla kocka. Steny kocky (zhodné štvorce) majú v sieti kocky spoločné niektoré strany.

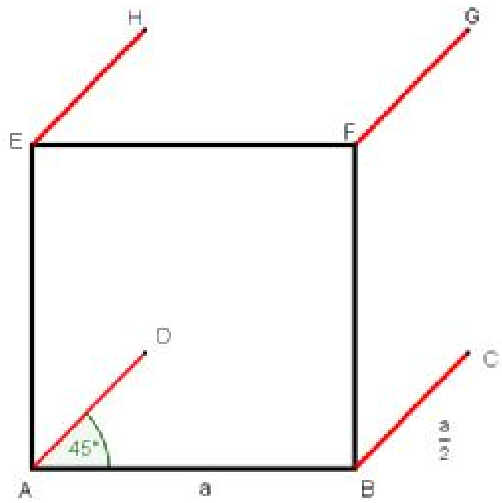
Možné siete kocky :

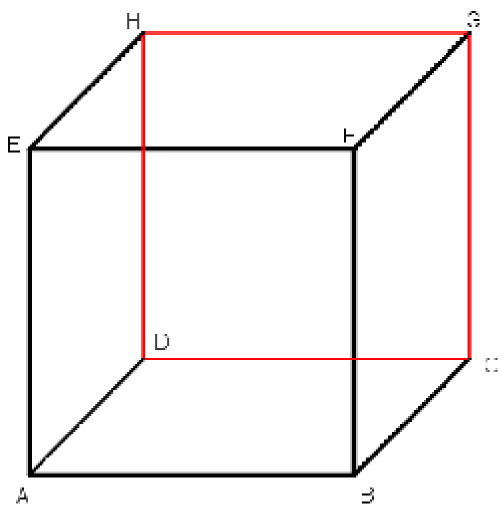


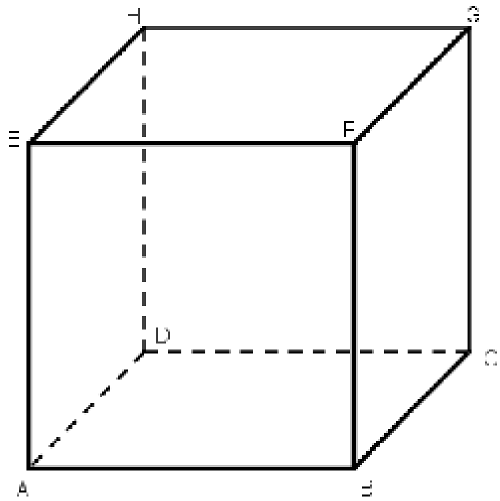
Pri rysovaní obrazu kocky používame voľné rovnobežné premietanie. Pri zostrojovaní obrazu kocky postupujeme :

1. Stenu ABFE zobrazíme v skutočnej veľkosti a v skutočnom tvare, teda ABFE je štvorec s dĺžkou strany a.
2. Úsečky AD, BC, EH, FG sú rovnobežné, zhodné a kolmé na prednú stenu. Veľkosť ich obrazu sa rovná polovici príslušnej úsečky, teda polovici hrany kocky, pričom veľkosť uhla BAD je 45°. Obrazy úsečiek BC, FG, EH sú rovnobežné s obrazom úsečky AD.
3. Hrany kocky, ktoré sú viditeľné, rysujeme plnou čiarou. Hrany, ktoré nie sú viditeľné, rysujeme čiarkovane.

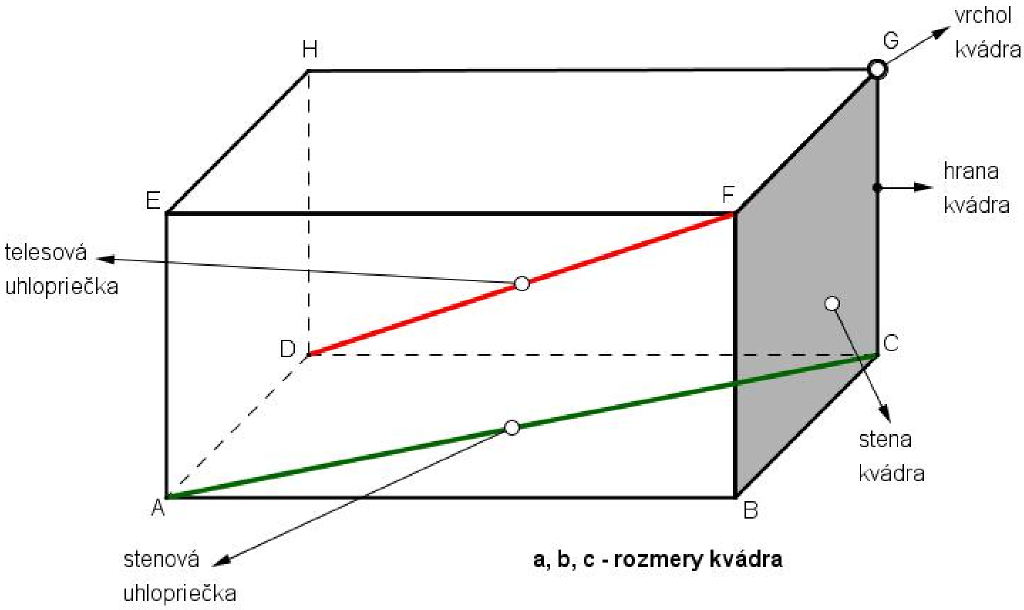




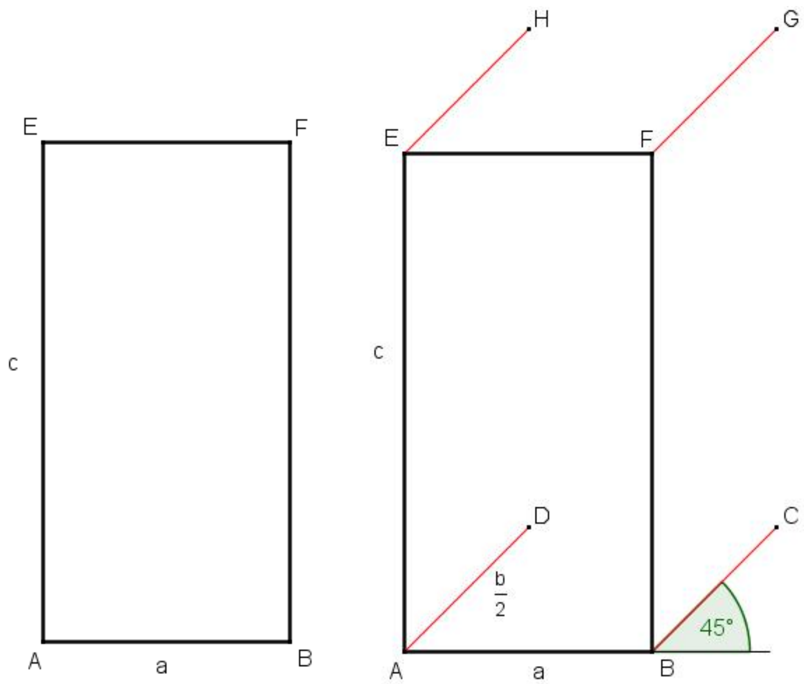


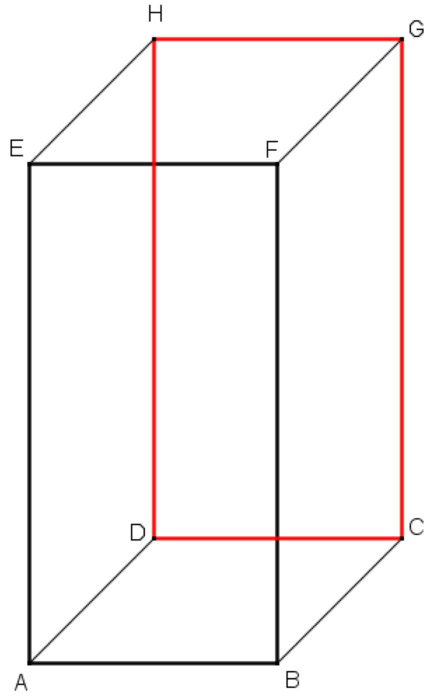


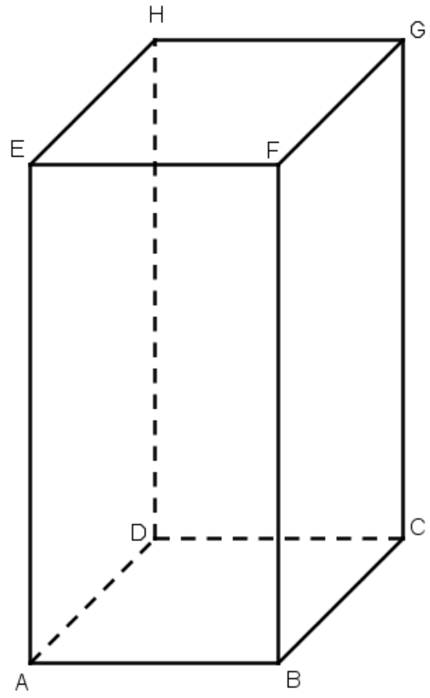
Kváder je hranaté teleso majúce šesť zhodných stien, ktorými sú tri dvojice zhodných obdĺžnikov. Má dvanásť hrán, šesť stien, štyri telesové uhlopriečky a dvanásť stenových uhlopriečok.



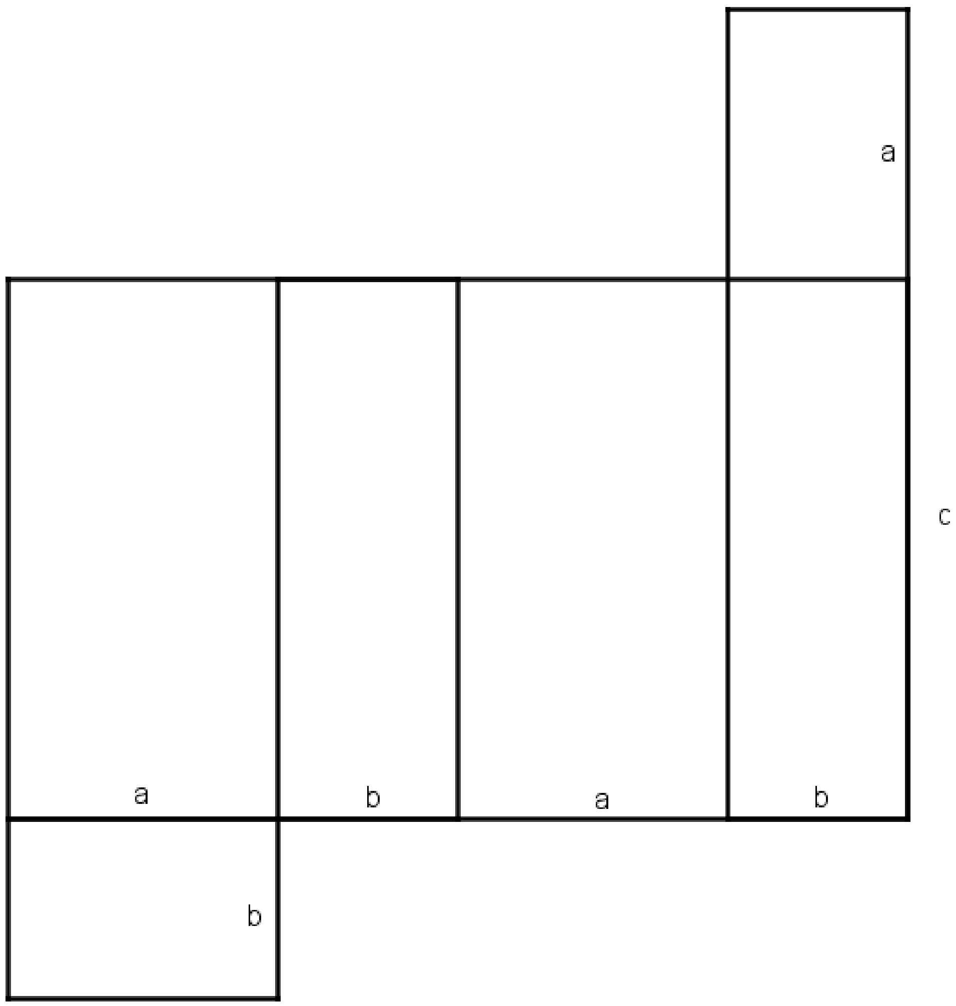
Postup pri rysovaní obrazu kvádra.



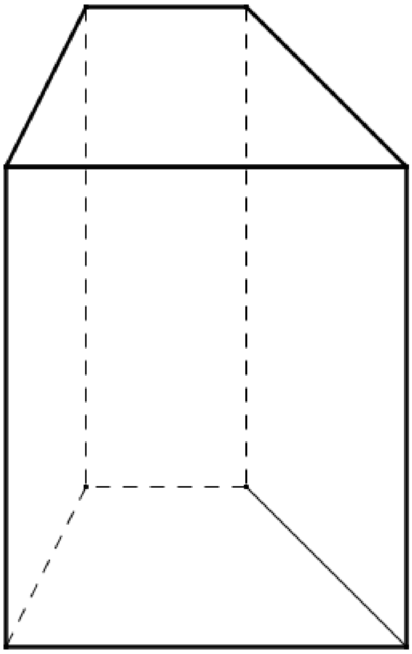




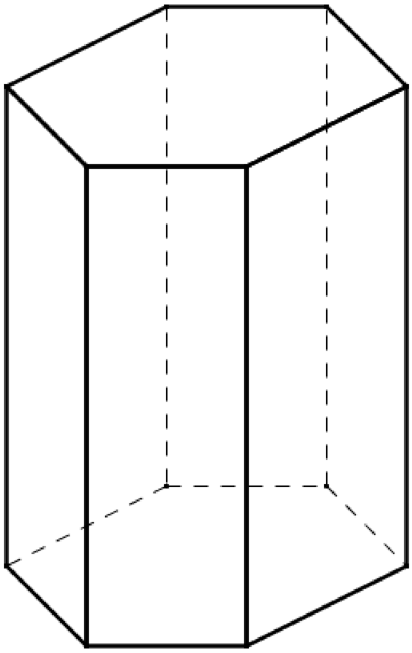
Sieť kvádra



Hranol je hranaté teleso, ktoré má dve zhodné podstavy (n-uholníky) a bočné steny tvorí n obdĺžnikov.

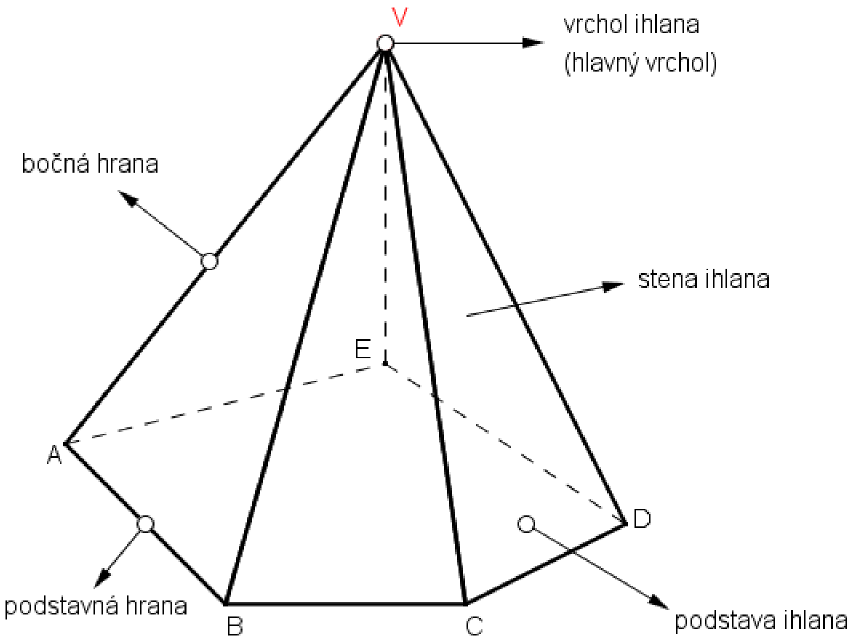


4 - boký hranol

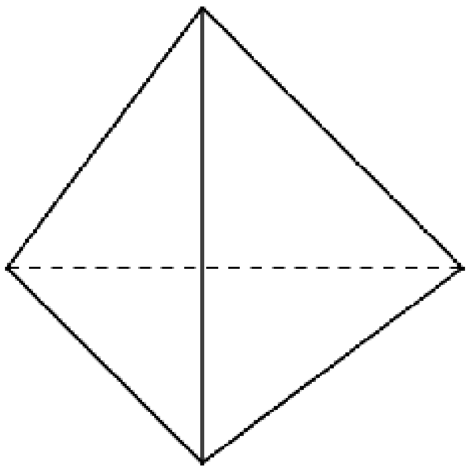


6 - boký hranol

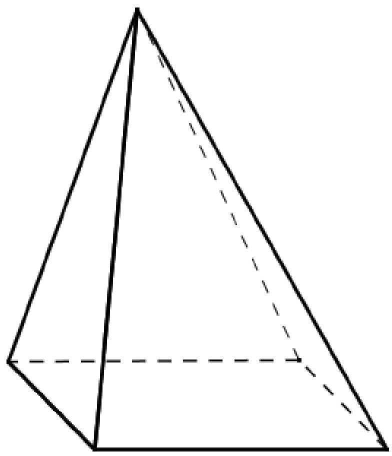
Ihlan je hranaté teleso majúce n stien tvaru trojuholníka a jednu podstavu tvaru n-uholníka. Má n bočných stien, n bočných hrán, n podstavových hrán, n+1 vrcholov.



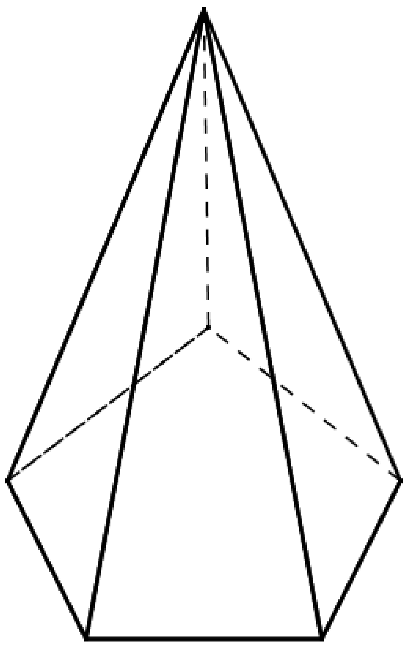
Pravidelný n-boký ihlan má podstavu pravidelný n-uholník a steny sú zhodné rovnoramenné trojuholníky.



3 - boký ihlan
(štvorsten)



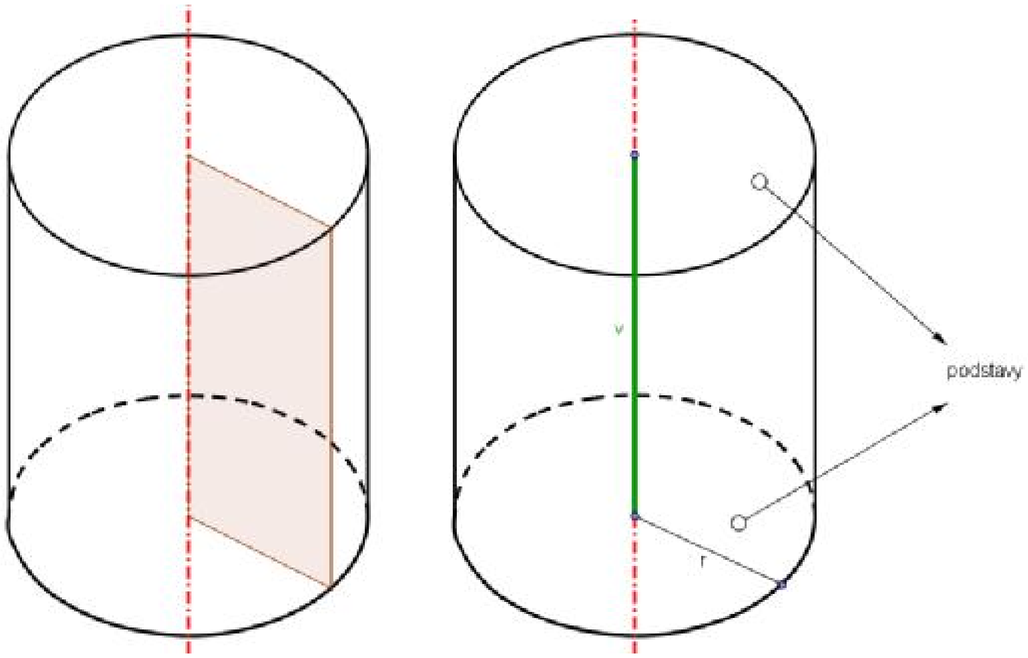
4 - boký ihlan



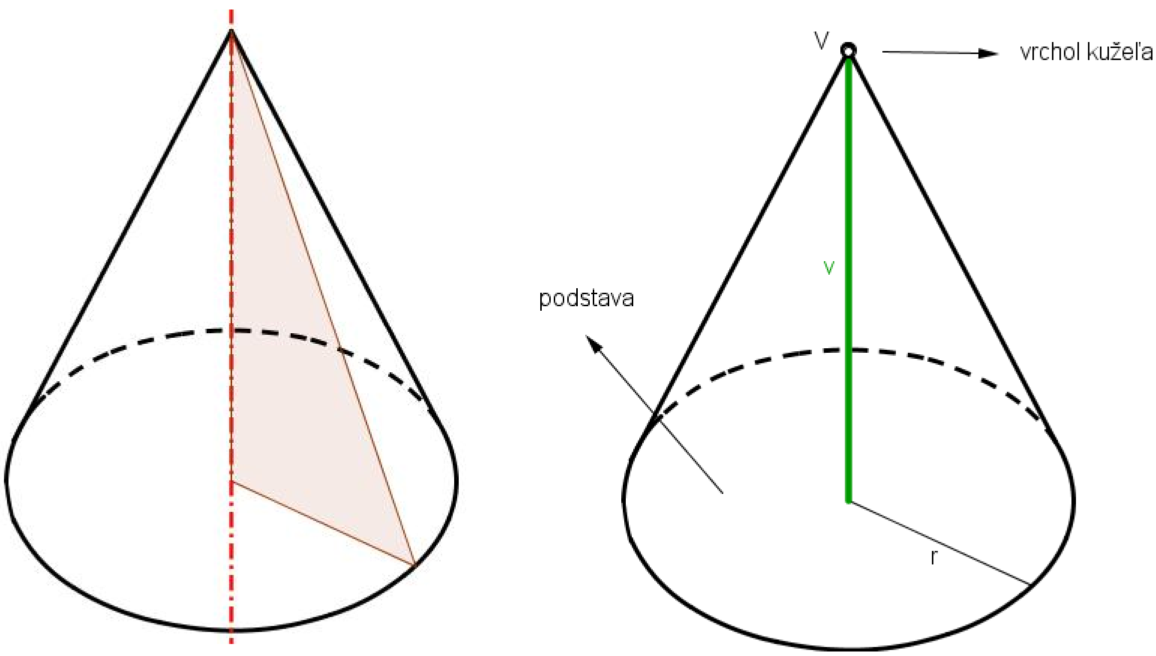
5 - boký ihlan

2.2 Rotačné telesá

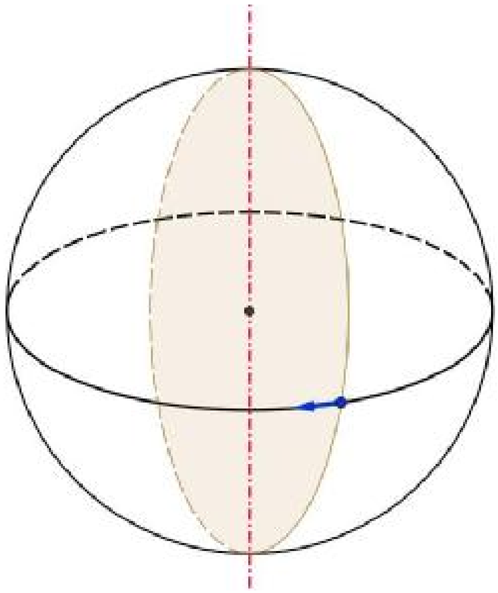
Valec je rotačné teleso, ktorí vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jeho strany. Má dve kruhové podstavy s polomerom *r, v* je výška.

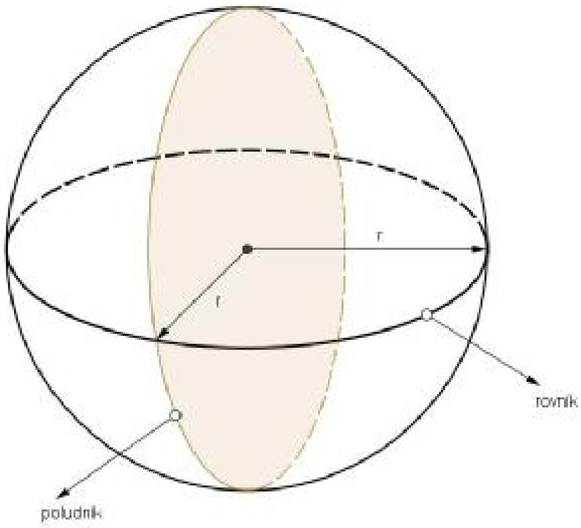


Kužeľ je rotačné teleso, ktoré vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej odvesny (to je len jedna z možností). Má jednu kruhovú podstavu a jeden vrchol *V*. Polomer podstavy je *r,* výška kužeľa *v*.



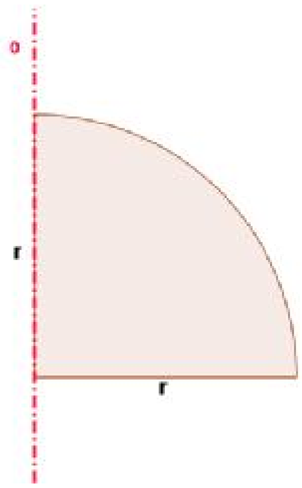
Guľa je rotačné teleso, ktoré vznikne otáčaním kruhu okolo jeho priemeru. Polomer gule je *r*.



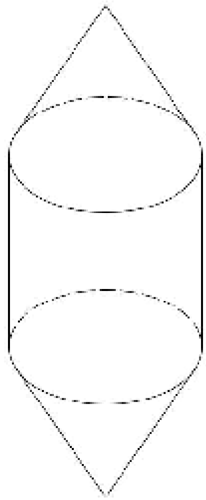


Cvičenia

1. Zostrojte obraz kvádra, ak :
    a) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm
    b) a = 2 cm, b = 6 cm, c = 3 cm
2. Zostrojte obraz kocky s hranou veľkosti 5 cm.
3. Narysujte jednu z možných sietí kocky, ktorá má dĺžku hrany 3 cm.
4. Na rysovací papier narysujte sieť kocky s hranou veľkosti 5 cm, vystrihnite ju a vytvorte model kocky.
5. Narysujte obraz päťbokého hranola.
6. Narysujte obraz ľubovoľného šesťbokého ihlana.
7. Zostrojte sieť kvádra, ktorý má rozmery a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm.
8. Narysujte sieť pravidelného štvorbokého hranola, ktorého podstavná hrana má veľkosť 4 cm, výška hranola je 6 cm.
9. Narysujte sieť pravidelného štvorbokého ihlana, ktorý má podstavnú hranu 4 cm a výška steny je 6 cm.
10. Aký valec vznikne rotáciou štvorca so stranou 5 cm, keď rotuje :
    a) okolo strany
    b) okolo priamky prechádzajúcej stredmi protiľahlých strán.
11. Aké teleso vznikne rotáciou rovnostranného trojuholníka okolo priamky prechádzajúcej jeho jedným vrcholom a stredom strany.
12. Aké teleso vznikne rotáciou štvrťkruhu podľa priamky *o* ?



13. Aké rotačné teleso vznikne rotáciou rovnostranného trojuholníka okolo priamky, na ktorej leží strana daného trojuholníka ?
14. Navrhnite rovinný útvar, ktorého rotáciou vznikne rotačné teleso znázornené na obrázku.



2.3 Objem priestorového útvaru

Objem priestorového útvaru je priradenie (funkcia), ktorá geometrickému útvaru (telesu) priradí nezáporné reálne číslo. Pri meraní objemu útvaru porovnávame teleso s jednotkovou kockou. Jednotková kocka je kocka, ktorá má hranu veľkosti 1 (napr. 1 dm).

Objem telesa má tieto vlastnosti:

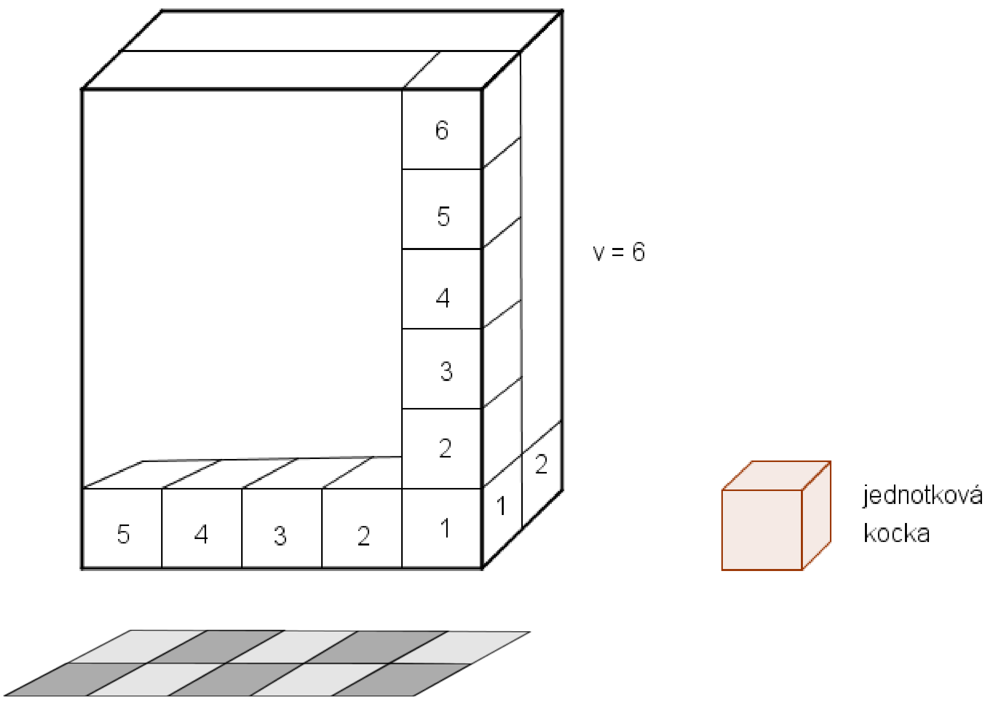
1. **Objem telesa je nezáporné reálne číslo.**
2. **Zhodné telesá majú rovnaké objemy.**
3. **Ak sa teleso *T* skladá z dvoch telies T_1, T_2, ktoré sa navzájom neprenikajú, potom objem telesa *T* rovná sa súčtu objemov oboch telies T_1 a T_2.**

Pri určovaní objemu kvádra, ktorého rozmery sú prirodzené čísla, môžeme postupovať nasledovne.

1. Poukladáme jednotkové kocky na podstavu tak, aby vyplnili celú podstavu. Týchto je a.b (obsah obdĺžnika). Tak vznikla jedna vrstva kociek.
2. Potom určíme, koľko takých vrstiev možno do kvádra uložiť. Týchto vrstiev je c (tretí rozmer kvádra).
3. Počet všetkých kociek je $a.b.c$. Toto číslo je objemom kvádra

   $V = a \,.\, b \,.\, c.$

   Na obrázku je a = 5 cm, b = 2 cm, c = 6 cm.



Všeobecne :

$$V = S_p \cdot v$$

Objem daného telesa sa rovná súčinu obsahu podstavy a výšky.

Základnou jednotkou na meranie objemu telies je **jeden kubický meter** (1 m^3), čo je kocka s hranou 1 meter.

Okrem tejto jednotky používame pri meraní objemu aj odvodené jednotky, ktorými sú:

decimeter kubický (dm^3)

centimeter kubický (cm^3)

milimeter kubický (mm^3)

kilometer kubický (km^3)

Uveďme prevody jednotiek :

1 m^3 = 1 000 dm^3 = 1 000 000 cm^3 = 1 000 000 000 mm^3

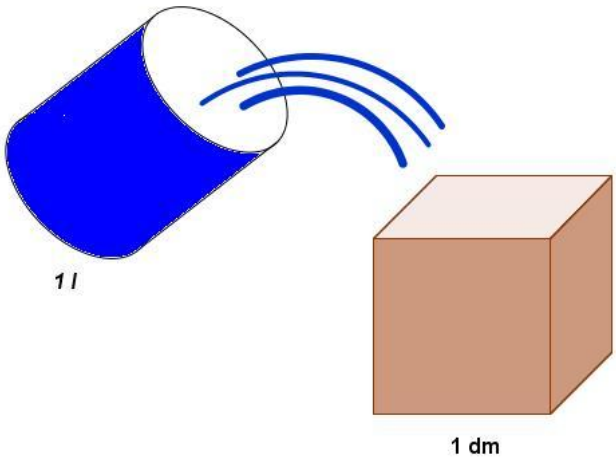
1 dm^3 = 1 000 cm^3

1 cm^3 = 1 000 mm^3

1 km^3 = 1 000 000 000 m^3

Ďalšou používanou jednotkou je jeden liter (**1 *l***). Je to objem valca, ktorý sa rovná kubickému decimetru.

1 l = 1 dm^3



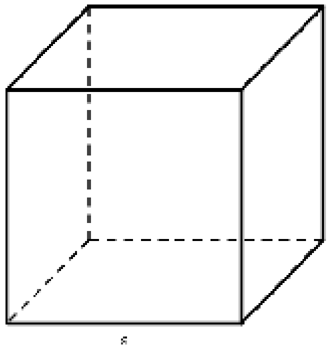
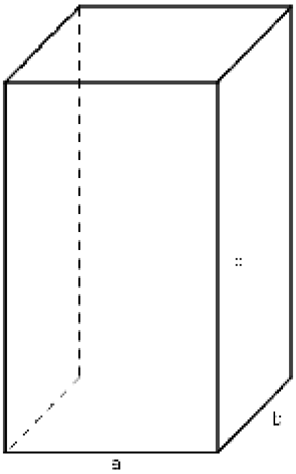
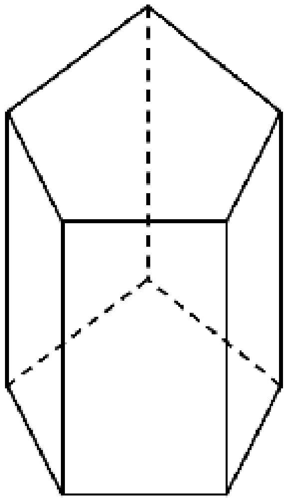
Väčšou jednotkou ako liter je jeden hektoliter (***hl***).

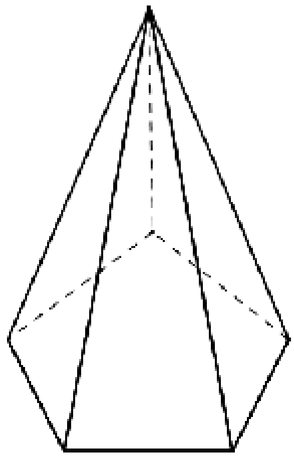
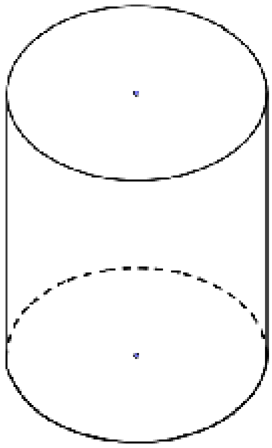
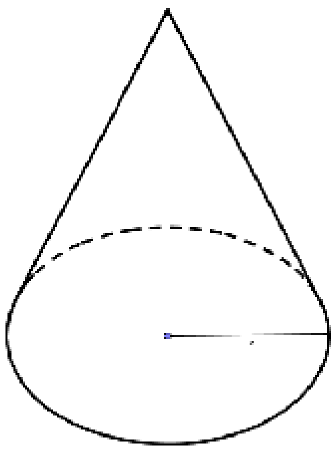
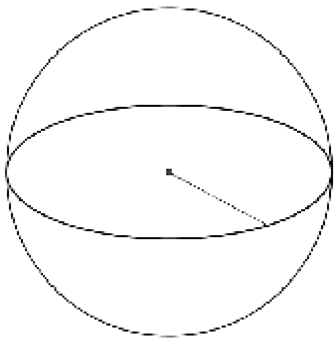
1 hl = 100 l

Povrch *P* telesa je obsah plochy ***T***, ktorá ohraničuje teleso ***T***.

Povrch hranatých telies je súčet obsahov všetkých jeho stien (podstáv). Zjednotenie bočných stien sa nazýva plášť ***Q*** telesa.

Prehľad vzorcov na výpočet objemu a povrchu základných telies

Názov	Teleso	Objem a povrch
KOCKA		$V = a \cdot a \cdot a = a^3$ $P = 6 \cdot a^2$
KVÁDER		$V = a \cdot b \cdot c$ $P = 2 \cdot (ab + ac + bc)$
HRANOL		$V = S_p \cdot v$ $P = 2S_p + Q$

IHLAN		$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ $P = S_p + Q$
VALEC		$V = \pi r^2 . v$ $P = 2.S_p \ + \ Q \ =$ $= \ 2.\pi.r^2 \ + \ 2\pi.r.v$
KUŽEĽ		$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $P = S_p + Q =$ $= \pi r^2 + 2\pi rs$
GUĽA		$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $P = 4\pi r^2$

Cvičenia

1. Vypočítajte objem kocky s hranou dĺžky 25,5 cm.
2. Vypočítajte výšku kvádra, ktorého objem je 192 cm^3, keď rozmery podstavy sú 6 cm a 4 cm.
3. Ako sa zmení objem kocky, keď dĺžku zväčšíme dvakrát ?
4. Ako sa zmení objem kvádra, keď dĺžku každej hrany zväčšíme o dve jednotky ?
5. Vypočítajte dĺžku hrany kocky, ktorej objem sa rovná dvojnásobku objemu kocky s hranou dĺžky a.
6. Ako sa zmení objem valca, ak :
   a) jeho polomer násobíme číslom h (h > 0)
   b) jeho výšku násobíme číslom h
   c) polomer násobíme číslom h a súčasne výšku k (k > 0).
7. Určte objem rotačného kužeľa s polomerom r a výškou v. Výpočet urobte pre tieto hodnoty :
   a) r = 6,5 cm, v = 12 cm
   b) r = 5 dm, v = 4 dm.
8. Vypočítajte výšku rotačného kužeľa, ak V = 1 000 cm^3, r = 10 cm.
9. Ako sa zmení objem gule, ak vynásobíme jej polomer r číslom k (k > 0) ?
10. Nádoba tvaru rotačného valca, ktorej polomer je 10 cm, výška 20 cm, je naplnená do polovice vodou. Do akej výšky vystúpi hladina, keď ponoríme do vody guľu s polomerom 4 cm ?
11. Pravidelný štvorboký hranol má podstavnú hranu a = 5 dm a povrch P = 1 m^2. Vypočítajte jeho výšku.
12. Ako sa zmení povrch kvádra, ak jeho rozmery postupne násobíme kladnými číslami h, k, l ?
13. Ako sa zmení povrch gule, keď jej polomer r násobíme kladným číslom k ?
14. Priemer Marsu sa rovná (približne) polovici priemeru Zeme. Koľkokrát je jeho povrch a objem menší než povrch a objem Zeme ?

2.4 Vzájomná poloha priamok a rovín

Priamka je určená dvoma rôznymi bodmi. Priamku budeme označovať $\overleftrightarrow{AB}$, ak určujúce body sú A, B. Ak priamku označíme napr. p a súčasne je táto určená bodmi A, B, zapíšeme

$$p = \overleftrightarrow{AB}.$$

Ak bod M leží na priamke p, zapisujeme $M \in p$.

Ak bod N neleží na priamke p, zapisujeme $N \notin p$.

Rovina je jednoznačne určená

a) tromi bodmi neležiacimi na jednej priamke,
b) priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
c) dvoma rôznobežnými priamkami,
d) dvoma rovnobežnými navzájom rôznymi priamkami.

Ak je rovina určená tromi bodmi A, B, C, zapisujeme $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$.

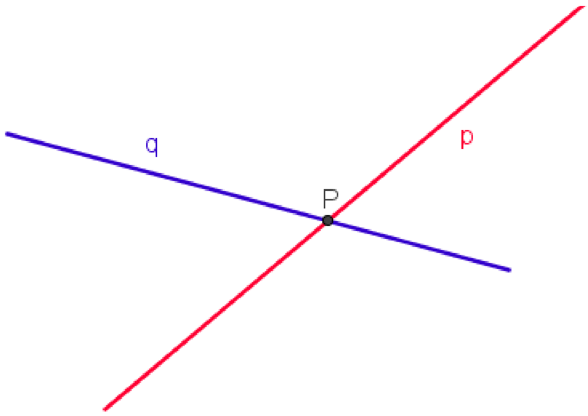
Ak priamka $p = \overleftrightarrow{AB}$ leží v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$, zapisujeme $p \subset \overleftrightarrow{ABC}$.

2.4.1 Vzájomná poloha dvoch priamok v priestore

Pre vzájomnú polohu dvoch priamok je rozhodujúce, či majú alebo nemajú spoločný bod, a či ležia alebo neležia v jednej rovine.

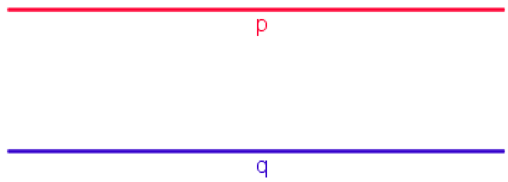
a) Priamky p,q sú **totožné alebo splývajúce**, ak všetky body jednej priamky sú bodmi aj druhej priamky, $p = q$.

b) Priamky p,q sú **rôznobežné,** ak majú spoločný jeden bod, $p \cap q = \{P\}$. Spoločný bod P nazývame **priesečník**. Rôznobežky ležia v jednej rovine.

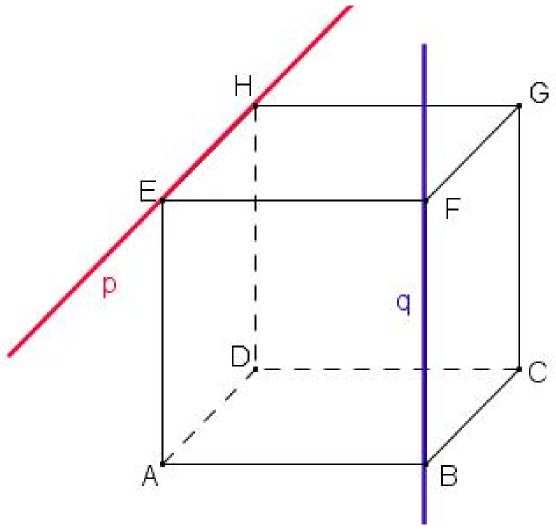


c) Priamky p,q sú **rovnobežné**, ak ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod.

$p \cap q = \{\theta\}$, $p \parallel q$



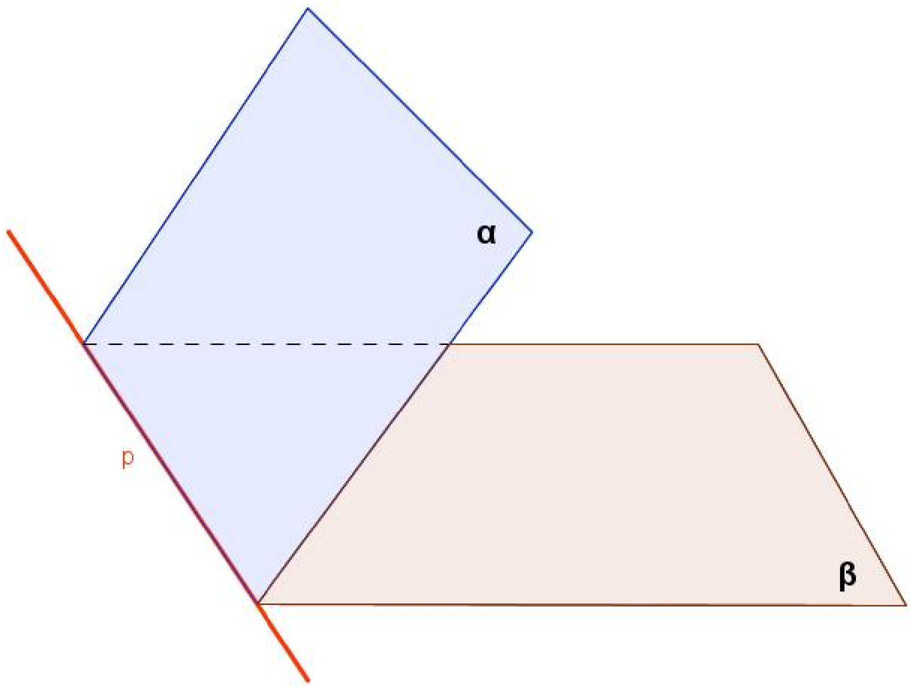
d) Priamky p,q sú **mimobežné**, ak neležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod.
Mimobežné priamky môžeme znázorniť takto:



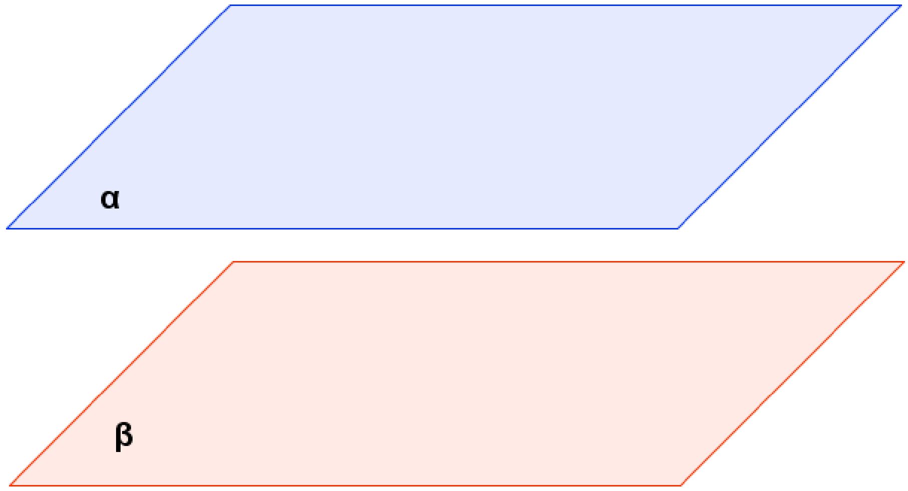
2.4.2 Vzájomná poloha dvoch rovín

a) Roviny α, β sú **totožné (splývajúce)**, ak majú spoločné všetky body, $\alpha = \beta$.

b) Roviny α, β sú **rôznobežné,** ak majú spoločnú práve jednu priamku.



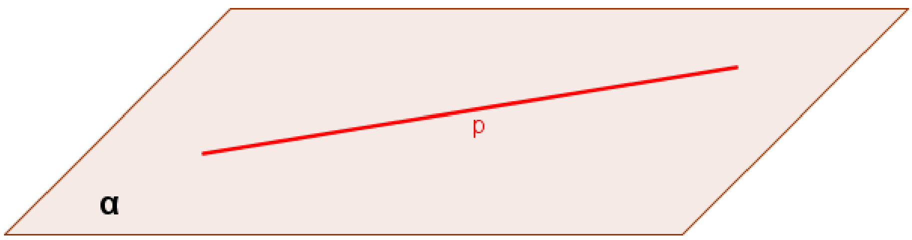
c) Roviny α, β sú **rovnobežné**, ak nemajú spoločný bod.



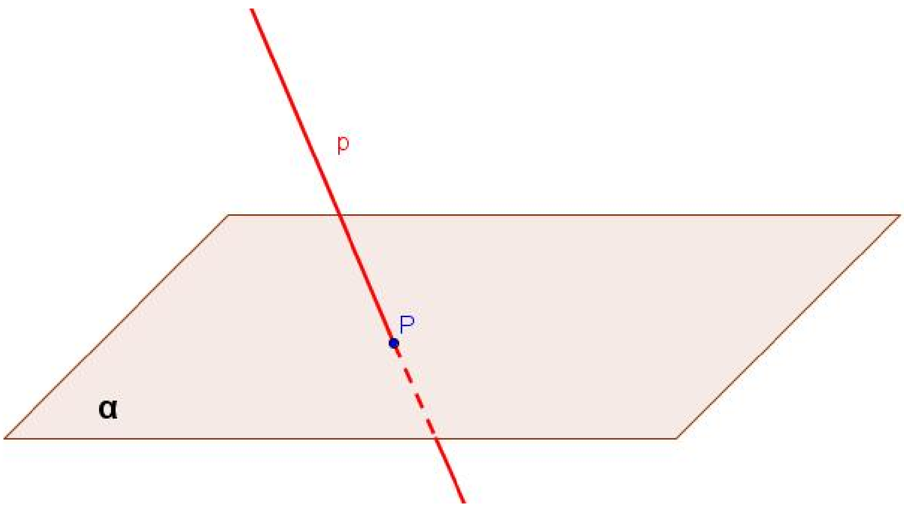
2.4.3 Vzájomná poloha priamky a roviny

Nech je daná priamka p a rovina α .

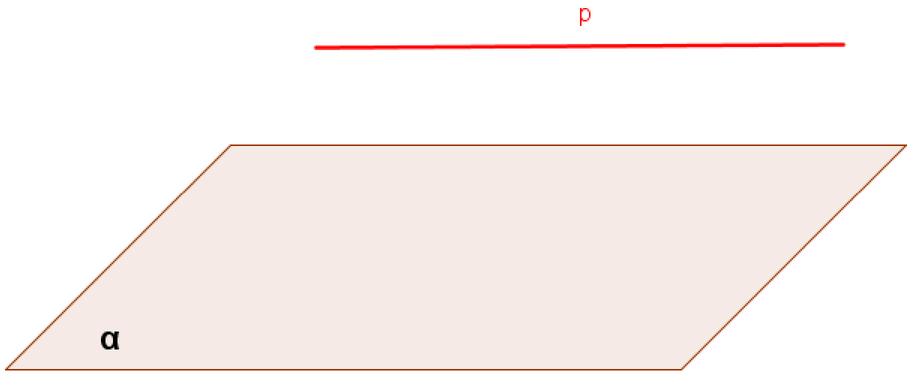
a) Priamka p **leží v rovine** α , ak každý bod priamky p je aj bodom roviny α .



b) Priamka p je **rôznobežná s rovinou** α , ak priamka p a rovina α majú spoločný práve jeden bod P.



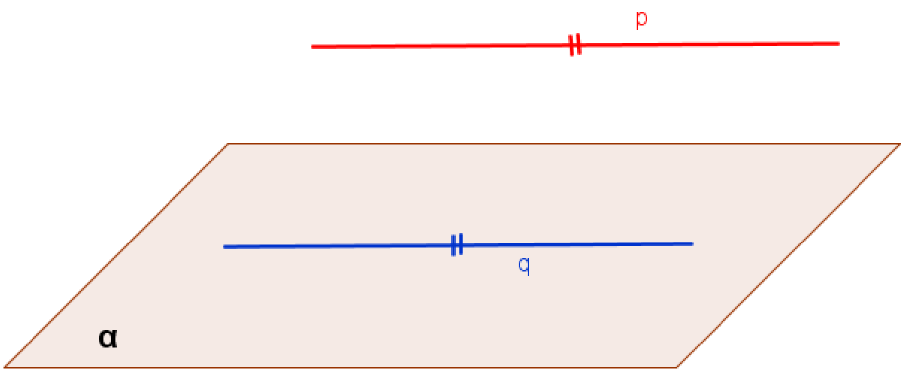
c) Priamka p je **rovnobežná s rovinou** α, ak priamka p a rovina α nemajú spoločný bod.



Poznámka: V mnohých prípadoch je ťažko rozhodnúť o tom, či priamka a rovina alebo dve roviny majú spoločný bod alebo nemajú. Existujú tzv. kritériá rovnobežnosti priamky a roviny a kritérium rovnobežnosti dvoch rovín.

Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny

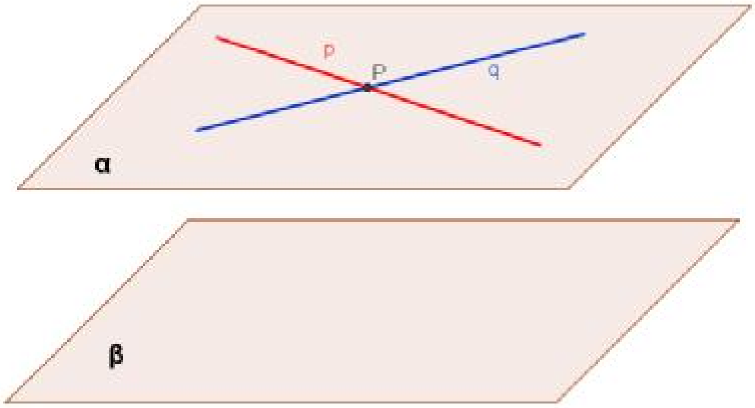
Ak je priamka *p* rovnobežná s niektorou priamkou *q* roviny α, potom je priamka *p* rovnobežná s rovinou α.



Ak $p \parallel q, q \subset \alpha$, potom $p \parallel \alpha$

Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín

Ak rovina α obsahuje dve rôznobežné priamky *p,q*, z ktorých každá je rovnobežná s rovinou β, potom sú roviny α, β rovnobežné.



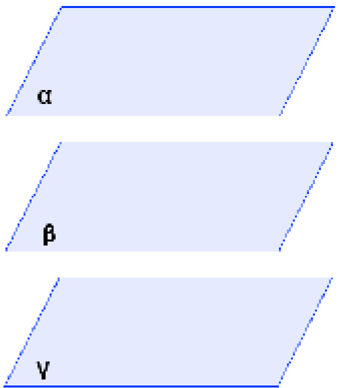
Ak $p, q \subset \alpha$ také, že $p \cap q = \{P\}$ a $p \parallel \beta, q \parallel \beta$, potom $\alpha \parallel \beta$.

2.4.4 Vzájomná poloha troch rovín

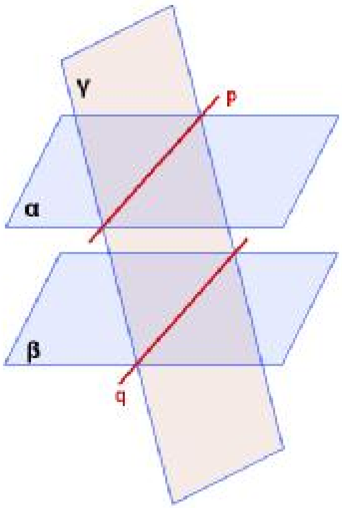
Uvažujeme o troch rovinách α, β, χ.

Pre vzájomnú polohu troch rovín platí:

a) tri roviny sú navzájom rovnobežné

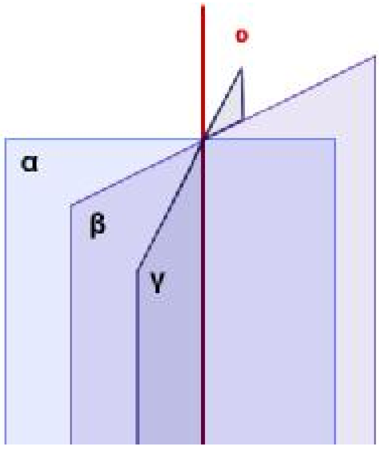


b) dve roviny sú navzájom rovnobežné a tretia rovina je s nimi rôznobežná

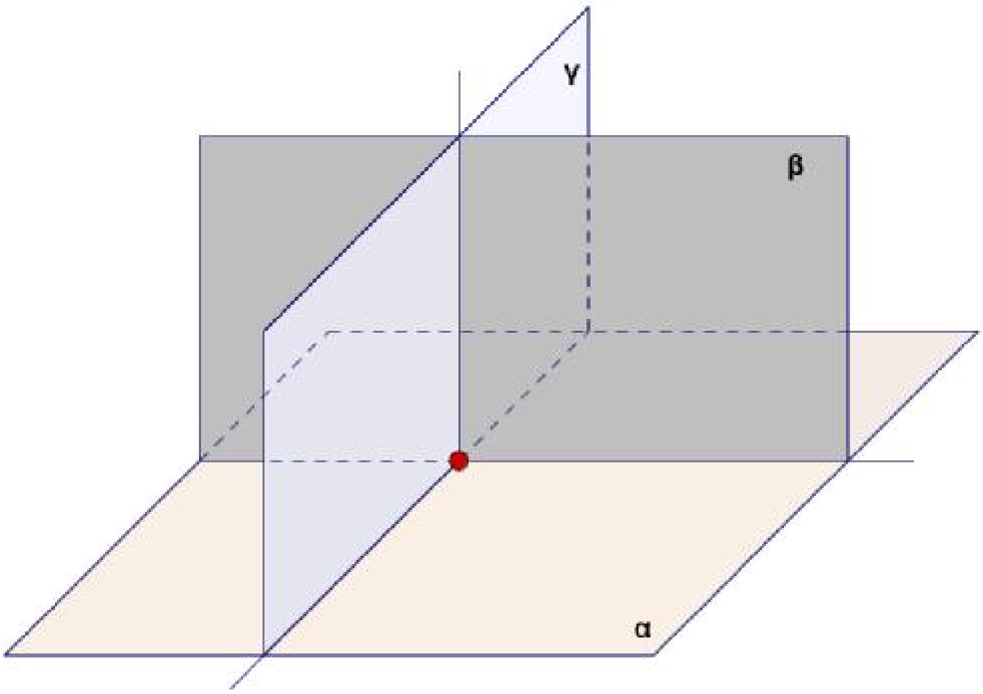


$p \parallel q$

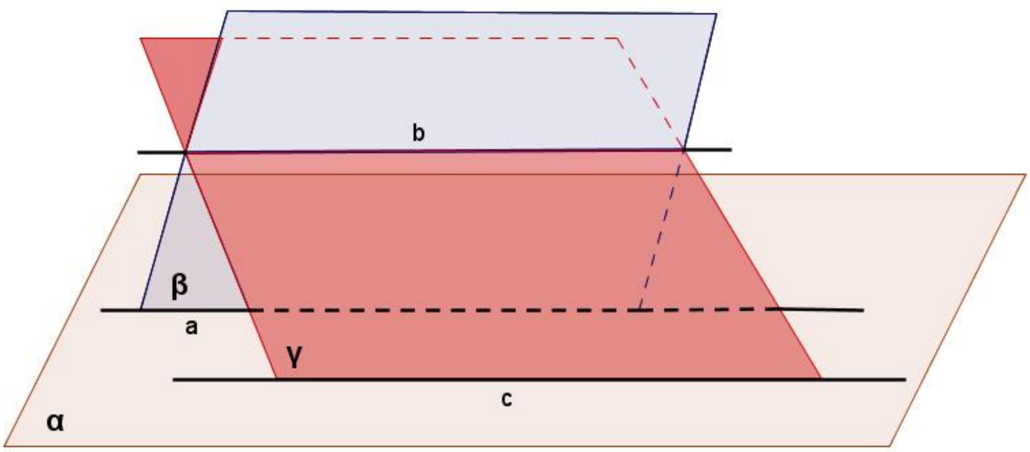
c) tri roviny majú spoločnú priamku o



d) tri roviny majú spoločný jediný bod



e) každé dve roviny sú rôznobežné, ich priesečnice sú rovnobežné



$$a \parallel b \parallel c$$

Cvičenia

1. Narysujte obraz kocky *ABCDEFGH*. Každými dvoma vrcholmi kocky sú určené priamky. Vyznačte a zapíšte aspoň dve dvojice priamok :
   a) rovnobežných,
   b) rôznobežných,
   c) mimobežných.
2. Narysujte obraz kvádra *ABCDEFGH*. Každou stenou kvádra je určená rovina. Vyznačte a zapíšte aspoň dve dvojice rovín :
   a) rovnobežných,
   b) rôznobežných.
3. Narysujte obraz kocky *ABCDEFGH.* Vyznačte a zapíšte aspoň dve dvojice priamok a roviny, ak :
   a) priamka leží v rovine,
   b) priamka je s rovinou rôznobežná,
   c) priamka je s rovinou rovnobežná.
4. Na obraze kocky *ABCDEFGH* vyznačte priamku *EF* a rovinu podstavy *ABCD*. Zdôvodnite tvrdenie : Priamka *EF* je rovnobežná s rovinou *ABCD*.
5. Na obraze kvádra *ABCDEFGH* vyznačte roviny *BCGF* a *ADHE*. Zdôvodnite tvrdenie : Rovina *BCGF* je rovnobežná s rovinou *ADHE*.
6. Na obraze kocky vyznačte tri roviny nasledovne :
   a) dve roviny rovnobežné preťaté treťou rovinou,
   b) tri roviny so spoločnou priamkou,
   c) tri roviny so spoločným bodom,
   d) tri roviny, z ktorých každé dve sú rôznobežné a ich priesečnice sú rovnobežné.

3 LITERATÚRA

[1] Boček, L., Kadleček, J.: Základy stereometrie. SPN Bratislava, 1987.

[2] Burjan, V., Hrdina, Ľ., Maxiáň, M.: Prehľad matematiky. 1. Časť. SPN Bratislava, 1997.

[3] Kuřina, F.: 10 pohledů na geometrii. Albra Praha, 1996.

[4] Mokriš, M.: Úvod do štúdia matematiky. PFPU Prešov, 2007.

[5] Molnár, J.: Rozvíjání prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Univerzita Palackého v Olomouci, 2004.

[6] Pedoe, D.: Geometry. A Comprehensive course. Dover Publications, INC, New York, 1988.

[7] Pavlič, G.: Školská encyklopédia matematiky. Bratislava, Príroda, 2001

[8] Prídavková, A.: Rozvíjanie predstáv o základných matematických pojmoch. PFPU Prešov, 2006.

[9] Šedivý, O. a kol.: STEREOMETRIA. Umenie vidieť a predstavovať si priestor. UKF v Nitre, 2007.

[10] Znám, Š. : Pohľad do dejín matematiky. Alfa Bratislava, 1986.

OBSAH

POZNÁMKY

Názov:	Základy elementárnej geometrie
Autori:	prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Edícia:	Prírodovedec č. 391
Schválené:	Vedením FPV UKF v Nitre dňa 13.10.2009
Typ publikácie:	ACB – vysokoškolské učebnice vydané v domácich vydavateľstvách. Vysokoškolská učebnica určená pre odbor Predškolská a elementárna pedagogika
Rozsah:	126 strán
Formát:	A4
Náklad:	100 ks
Tlač:	Štatistické a evidenčné vydavateľstvo tlačív, a.s. (ŠEVT, a.s.), Plynárenská 6, 821 09 Bratislava

ISBN : 978-80-8094-623-4

EAN: 9788080946234

9 788080 946234