Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 467 à 471.

QUELQUES CONJECTURES DE FINITUDE EN GÉOMÉTRIE DIOPHANTIENNE

par A. N. PARŠIN

Suivant une tradition établie, j'aimerais examiner une série de conjectures relatives à l'arithmétique des courbes et des variétés abéliennes. Dans ce domaine, Chafarevitch a formulé au Congrès de Stockholm [13], il y a huit ans, deux conjectures fondamentales. Elles concernent la situation suivante.

Soit K un corps de nombres de degré fini sur $\underline{Q}$ ou un corps de fonctions algébriques d'une variable; dans ce dernier cas, nous désignerons par k le corps des constantes. Nous étudierons les schémas projectifs lisses X géométriquement irréductibles sur K. Si v est une place du corps K, alors X a bonne réduction en v si v n'est pas archimédienne et s'il existe sur Spec O_v (O_v est l'anneau local de la place v) un schéma lisse propre de fibre générique X, et a mauvaise réduction dans le cas contraire. Nous désignerons par S l'ensemble fini des places du corps K ou X a mauvaise réduction et ces notations seront utilisées dans toute la suite. Enfin, soit $k(v)$ le corps résiduel de l'anneau local O_v.

CONJECTURE C1. — Il existe seulement un nombre fini, à K isomorphismes près, de courbes sur K de genre $g \geqslant 1$ donné et d'ensemble S donné (si $g = 1$, on suppose qu'il y a une K-place sur les courbes et si K est un corps de fonctions il est nécessaire de se limiter à des courbes non constantes).

La courbe X est dite constante si elle est de la forme $Y \otimes L$ sur une extension finie L du corps K, ou Y, est définie sur le corps des constantes du corps L.

CONJECTURE C2. — Soit $K = \underline{Q}$ ou $k(x)$. Toute courbe sur K de genre $g \geqslant 1$ dont l'ensemble S est vide est constante.

En particulier, dans le cas arithmétique $K = \underline{Q}$, il n'existe pas de telle courbe. Cette conjecture est donc analogue aux classiques théorèmes de Hermite et Minkowski en théorie des nombres.

La conjecture C1 est en liaison avec la conjecture suivante de Mordell.

CONJECTURE M ([5], [7]). — Si X est une courbe non constante de genre $g > 1$ sur K, alors l'ensemble $X(K)$ est fini.

Si K est un corps de fonctions dont le corps des constantes est fini, il existe des courbes constantes sur K pour lesquelles la conjecture M est en défaut.

THÉORÈME 1. — La conjecture C1 entraine la conjecture M.

La démonstration repose sur l'argument suivant : si X/K est une courbe de genre

$g \geqslant 1$ et $P \in X(K)$, alors on peut construire des courbes X_P, définies sur des corps K_P, dont le degré et le genre sur K ne dépendent pas de P. Ces courbes sont des revêtements de la courbe X ramifiés seulement en P et les corps K_P sont ramifiés sur K seulement sur l'ensemble S relatif à la courbe X. Enfin, les courbes X_P possèdent la propriété suivante : si π est la projection canonique de l'ensemble des places du corps K_P dans l'ensemble des places du corps K, alors X_P a une bonne réduction en dehors de $\pi^{-1}(S)$.

Cette construction généralise un résultat connu de Kodaira [4]. L'étude des courbes X_P, $P \in X(K)$, montre, en utilisant $C1$, qu'il n'y a, à isomorphisme près sur le corps de définition, qu'un nombre fini de telles courbes (et aussi un nombre fini de corps K_P). Pour $g > 1$, on en déduit la finitude de l'ensemble $X(K)$ puisque, pour une courbe, il n'y a qu'un nombre fini de morphismes sur une courbe de genre $g > 1$.

La conjecture M a été démontrée pour un corps de fonctions par Yu. V. Manin [6] et H. Grauert [2]. Nous donnons une autre démonstration dans [9], en utilisant le fait que si $\tilde{X}_P$ est le modèle minimal de la courbe X_P, alors la hauteur du point $P \in X(K)$ relativement au faisceau Ω^1_X est bornée par l'indice de self-intersection d'une classe canonique sur la surface $\tilde{X}_P$. De considérations topologiques faciles il résulte que cet indice est borné explicitement en fonction du genre du corps K_P, du genre de la courbe X_P et du nombre de ses points où la courbe a mauvaise réduction ; par suite, ce nombre est borné uniformément par rapport à P.

Quant à la conjecture $C1$, elle a été démontrée récemment ([13]) pour les courbes hyperelliptiques (dans le cas d'un corps de fonctions, il faut supposer k fini) et pour les courbes sur un corps de fonctions de caractéristique nulle avec un ensemble S vide ([9]). Dans le cas fonctionnel, on montre aussi dans [9] que l'ensemble des courbes étudiées a une « hauteur bornée ».

Enonçons maintenant l'analogue de $C1$ pour les variétés abéliennes.

CONJECTURE $S1$. — Soient N et d des entiers et soit S un ensemble fini de places du corps K. Alors, il existe seulement un nombre fini de variétés abéliennes X sur K telles que

1) $\dim X = N$ et il existe sur X une polarisation de degré d ;
2) X a une bonne réduction en dehors de S.

Cette conjecture a été énoncée par J.-P. Serre ([10]) dans le cas $N = 2, d = 1$. J'ignore le lien entre $C1$ et $S1$ dans le cas d'un corps de nombres, sauf pour la situation triviale $N = d = 1$. Les tentatives en vue d'utiliser le théorème de Torelli pour déduire $C1$ de $S1$ se heurtent au fait que, pour une variété abélienne sur un corps de nombres, il peut exister une infinité de polarisations de degré donné définies sur K non équivalentes à automorphisme près. Il est possible que, dans cette conjecture, il faille tenir compte des « points de dégénérescence » de la polarisation, définis de façon convenable. Noter aussi qu'une courbe sur K peut avoir en une certaine place v mauvaise réduction alors que sa variété jacobienne a bonne réduction. La conjecture $S1$ a été démontrée dans [13] pour les courbes elliptiques. On peut formuler la conjecture suivante, plus accessible.

CONJECTURE $S2$. — Il existe seulement un nombre fini de variétés abéliennes X sur K de dimension N donnée ayant une polarisation de degré d donné et de conducteur A donné.

On se reportera à [12] pour la définition du conducteur. Remarquons seulement que X a une mauvaise réduction seulement aux places v divisant A ; donc $S1$ implique $S2$. Réciproquement $S2$ entraine $S1$ pour les ensembles S tels que

$$\forall v \in S, \qquad \text{car} \quad k(v) = 0 \qquad \text{ou} \qquad > 2N + 1.$$

De $S1$, et aussi de $S2$, résulte que :

CONJECTURE T [15]. — Soit X une variété abélienne sur K et soit d un entier $\geqslant 1$. Il existe seulement un nombre fini, à K-isomorphisme près, de variétés abéliennes Y/K telles que

1) Y est isogène à X ;
2) il existe sur Y une polarisation de degré d donné.

J. Tate a considéré un énoncé un peu plus faible. La conjecture T est liée à la conjecture de Tate sur les homomorphismes des variétés abéliennes (cf. [15], [16]). L'implication $S1 \Rightarrow T$ résulte de ce que les ensembles S coincident pour des variétés abéliennes isogènes (cf. [12]). Introduisons maintenant la nouvelle définition suivante : soit X et Y des variétés abéliennes (ou des schémas) avec des polarisations λ et ω respectivement ; une isogénie $f: X \to Y$ s'appelle une isogénie de Tate si deg $f = \mathscr{K}^g$, $g = \dim X$ et $f^*\omega = \mathscr{K}\lambda$ (de telles isogénies ont été considérées par Tate dans [15]).

THÉORÈME 2. — Soient K un corps de nombres, X/K une variété abélienne ayant potentiellement une bonne réduction (cf. [12]) et λ une polarisation de X de degré 1. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de variétés abéliennes Y avec une polarisation ω telles qu'il existe une isogénie de Tate $f: X \to Y$ satisfaisant à la condition suivante: si v est une place non archimédienne du corps K et car $k(v) \mid \deg f$, alors X a en v une bonne réduction et f définit une isogénie étale des modèles minimaux de Néron des variétés X et Y sur Spec O_v.

THÉORÈME 3. — Soient K un corps de fonctions sur un corps fini k, d un entier $\geqslant 1$, X une variété abélienne sur K ayant potentiellement bonne réduction. Désignons par $M(K, X, d)$ l'ensemble des couples (Y, λ) — ou Y est une variété abélienne et λ sa polarisation de degré d — tels qu'il existe une isogénie $f: Y \to X$ degré premier à $p =$ car k. Alors, pour tout p n'appartenant pas à un ensemble fini $I(d, N)$, qui ne dépend que de d et $\dim X = N$, les ensembles $M(K, X, d)$ sont finis modulo les K-isomorphismes conservant la polarisation.

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses du théorème, $S1$ entraine $C1$ pour presque tout p.

Comme l'a remarqué J.-P. Serre [10], on peut, en utilisant la méthode de Tate [15] et une considération additionnelle, déduire du théorème 3 le résultat suivant.

THÉORÈME 4. — Soient X et Y des courbes elliptiques sur un corps de fonctions K, de corps des constantes k fini avec car $k \notin I(1, 2)$, et soient $T_l(X)$ et $T_l(Y)$ leurs modules de Tate. Alors, la représentation naturelle

$$\mathrm{Hom}_K(X, Y) \otimes \underline{Q}_l \to \mathrm{Hom}(T_l(X), T_l(Y))$$

est bijective.

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses du théorème, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) il existe l tels que les modules $T_l(X)$ et $T_l(Y)$ soient isomorphes ;
2) les courbes X et Y sont isogènes.

Probablement, les théorèmes 3 et 4 sont vrais quelle que soit la caractéristique du corps k. On peut montrer qu'il en est ainsi si le théorème d'irréductibilité de Mumford et Deligne [1] est vrai pour les schémas de modules des variétés abéliennes, et si le groupe de Picard de l'espace modulaire de Siegel module la torsion est égal à $\underline{Z}$ ([1]).

Terminons en disant maintenant quelques mots de la conjecture $C2$. Elle a été démontrée pour $g = 1$ (cf, [13]) et pour $g = 2$ (B. V. Martinov, non publié). Si $K = k(x)$, car $k = 0$, alors $C2$ est vraie pour tout $g \geqslant 1$, cf. [14], [3] (dans ce cas, il n'y a pas de variété abélienne non constante). Dans le cas d'un corps de fonctions, $C2$ est aussi vérifiée si K est un corps de genre 1 et car $K = 0$, cf. [9].

Bien que, dans le cas ou $g = 1$ et où K est un corps de nombres, les conjectures $S2$ et $C2$ aient été démontrées, on peut dire qu'elles résultent aussi de la conjecture sur l'équation fonctionnelle des fonctions zêta, de la conjecture de Tate, et du travail de Weil [17]. Pour $C2$, cela a été remarqué par A. Ogg [8]. Il est possible que cela soit encore vrai en dimension supérieure. Ce point doit être lié à la forme la plus précise, due à Serre [11], de la conjecture sur l'équation fonctionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE and D. MUMFORD. — The irreducibility of the space of curves of given genus, *Pub. Math. I. H. E. S.*, No. 36 (1969), pp. 75-109.

[2] H. GRAUERT. — Mordells Vermütung über Rationale Punkte auf Algebraischen Kurven und Funktionenkörper, *Pub. Math. I. H. E. S.*, No. 25 (1965), pp. 131-149.

[3] A. GROTHENDIECK. — Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, *Inv. Math.*, 2 (1966), pp. 59-78.

[4] K. KODAIRA. — A certain type of irregular algebraic surfaces, *J. Analyse Math.*, 19 (1967), pp. 207-215.

[5] S. LANG. — *Diophantine geometry*, Interscience (New York, 1962).

[6] Ю. И. МАНИН. — Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями, Изв. АН СССР, 27 (1963), pp. 1397-1442.

[7] L. J. MORDELL. — On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 21 (1922).

[8] A. P. OGG. — Abelian curves of small conductor, *Journ, für die reine und ang. Math.*, 226 (1967), pp. 204-215.

[9] А. Н. ПАРШИН. — Алгебраическпе кривые над функциональными полями, Изв. АН СССР, 32 (1968), pp. 1191-1219, English summary, *Soviet Math. Doklady*, 9 (1968), No. 6, pp. 1419-1421.

[10] J. P. SERRE. — *Abelian l-adic representations and Elliptic curves*, Benjamin (New York, 1968).

(*) Comme me l'a communiqué D. MUMFORD, c'est toujours le cas et par suite le théorème 4 est vrai pour tout k.

[11] —. — *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques* (Définitions et conjectures), Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des nombres), n° 19, (1969-1970).
[12] — and J. TATE. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.*, 88 (1968), pp. 492-517.
[13] И. Р. ШАФАРЕВИЧ. — Поля алгебраических чисел, *Proc. Intern. Congress Math.*, Stockholm (1962), pp. 163-176.
[14] —. — Главные однородные пространства, определенные над полем функций, Труды МИАН СССР, 64 (1961), 316-346.
[15] J. TATE. — Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, *Inv. Math.*, 2 (1966), pp. 134-144.
[16] —. — *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, in *Arithmetical algebraic geometry*, Harper and Row (New York, 1965), pp. 93-110.
[17] A. WEIL. — Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.*, 168 (1967), pp. 149-156.

Mathematical Institute
AN SSSR
Ul Vavilova 42,
Moscow V 333
(U. R. S. S.)