GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Paris-Lodron-Universität Salzburg

Markus Hohenwarter

Salzburg, 12. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Ausgangspunkt

Diese Arbeit stellt die Fortführung eines mit meiner Diplomarbeit begonnenen Forschungsprojektes über die Unterrichtssoftware *GeoGebra* dar (vgl. [54]). GeoGebra ist ein von mir speziell für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen entwickeltes Werkzeug, das dynamische Geometrie, Algebra und Analysis auf neue Art und Weise verbindet.[1]

1.2 Ziele dieser Arbeit

Das Dissertationsprojekt *GeoGebra - Entwicklung didaktischer Materialien und Anwendungen für den Unterricht* wird von der österreichischen Akademie der Wissenschaften durch ein DOC-Stipendium (Februar 2004 - Jänner 2006) gefördert. Die kostenlos verfügbare Software GeoGebra ist in dieser Zeit in über ein Dutzend Sprachen übersetzt und mit mehreren internationalen Bildungssoftware Preisen ausgezeichnet worden.[2] Die Ziele dieses Projekts sind:

1. die Implementierung interaktiver Unterrichtsmaterialien,
2. die Weiterentwicklung der Software GeoGebra,
3. die Publikation von Unterrichtsmaterialien auf e-Learning Plattformen im Internet,
4. sowie die formative Evaluation der Software.

[1] vgl. Bidirektionale Verbindung von Geometrie und Algebra, S. 78

[2] vgl. die Bildungssoftware Preise EASA 2002, L@rnie 2003, digita 2004, Comenius 2004, L@rnie 2005 und Trophées du Libres 2005 auf www.geogebra.at unter 'Info'

Die Umsetzung der Ziele (1) und (3) wird im Teil II *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* (S. 115) dieser Arbeit beschrieben. Auf die Weiterentwicklung von GeoGebra (Ziel 2), die Hand in Hand mit der Entwicklung und Publikation von Materialien geht, wird im Teil III *Mathematische und informatische Hintergründe* (S. 199) eingegangen. Die Ergebnisse einer Fragebogenuntersuchung (Ziel 4) zu GeoGebra werden im Teil IV (S. 223) besprochen.

1.3 Aufbau dieser Arbeit

Der erste Teil dieser Arbeit widmet sich den Themen *Didaktik und e-Learning*. Er bildet die theoretische Grundlage für die Unterrichtsmaterialien des zweiten Teils. Zunächst wird auf ausgewählte mathematikdidaktische Aspekte im Zusammenhang mit GeoGebra eingegangen. Danach folgt ein Kapitel mit bereits veröffentlichten fachdidaktischen Artikeln über die Unterrichtssoftware. Schließlich wird die Rolle von GeoGebra in Bezug auf Lerntheorien und e-Learning erörtert.

Der zweite Teil (S. 115) umfasst konkrete *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* zu GeoGebra. Dabei werden verschiedene e-Learning Plattformen und Projekte angeführt, über die mit GeoGebra erstellte Unterrichtsmaterialien im Internet zur Verfügung gestellt werden. Zunächst wird auf den interaktive Materialienpool *GeoGebraWiki* eingegangen. Danach folgen das österreichische Projekt *Medienvielfalt im Mathematikunterricht*, die deutsche Plattform *Lehrer-Online* und das internationale Lehrer-Fortbildungsprojekt *Intel - Lehren für die Zukunft*.

Der dritte Teil *Mathematische und informatische Hintergründe* (S. 199) geht auf einige Aspekte der Weiterentwicklung des Programms selbst ein. Es wird zunächst die Versionsgeschichte seit 2004 erzählt sowie die Internationalisierung und die aktuelle Open Source Lizenz der Software besprochen. Danach geben ausgewählte Implementierungsdetails die Möglichkeit, einen Blick auf einige mathematische und informatische Hintergründe von GeoGebra zu werfen.

Im vierten Teil (S. 223) werden die im Rahmen der Evaluation von GeoGebra gesetzten Maßnahmen vorgestellt. Zunächst wird kurz auf den Begriff der *formativen Evaluation* eingegangen und die Rolle des *Benutzerforums* geklärt. Anschließend folgt die ausführliche Analyse einer Fragebogenuntersuchung zu GeoGebra vom Ende des Schuljahres 2004/2005.

Nach einer Zusammenfassung ist im Anhang schließlich die aktuelle Version der *GeoGebra Hilfe* zu finden, in der sämtliche Funktionen und Befehle des Programms beschrieben werden.

Teil I

Didaktik und e-Learning

Kapitel 2

Mathematikdidaktik

In diesem Kapitel wird auf ausgewählte mathematikdidaktische Aspekte im Zusammenhang mit GeoGebra eingegangen. Der Abschnitt *Wozu GeoGebra?* erläutert zunächst die Grundintention des Werkzeugs. Basierend auf den *didaktischen Prinzipien* des zweiten Abschnitts werden ein Modell des *enaktiven, ikonischen und symbolischen Lernens* mit GeoGebra vorgestellt sowie *Leitlinien des Einsatzes neuer Technologien* besprochen. Unter letzteren wird besonders auf den Aspekt des *Selbstlernens im Mathematikunterricht* eingegangen. Die folgenden beiden Abschnitte widmen sich der Rolle GeoGebras in Bezug auf *funktionales Denken* sowie *Vermuten und Begründen*. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein Blick in die österreichischen und bayerischen Gymnasiallehrpläne.

2.1 Wozu GeoGebra?

> Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen. (Schupp in [52, S. 70])

Die Meinung, dass sich allein durch die Einführung neuer Technologien wie grafikfähiger Taschenrechner und Computer der Mathematikunterricht verbessern würde, ist aus heutiger Sicht sicherlich verfehlt. Die Hoffnung, dass neue Medien Lernerfolge schlagartig erhöhen können, hat es auch früher schon gegeben - sie war stets vergebens. So haben zahlreiche Medien-Vergleichsstudien der letzten Jahrzehnte gezeigt, dass Lernerfolge de facto unabhängig vom verwendeten Medium sind.[1]

> Die Medien haben an sich nur eine untergeordnete Bedeutung. Primär wichtig sind die an ihnen ausgeführten Aktivitäten. Medien, die nicht „bearbeitet“, sondern nur betrachtet werden können, haben daher nur sehr beschränkten Wert. [135, S. 79]

[1] vgl. Ist e-Learning besser?, S. 97

Worauf es ankommt, ist die Art und Weise, *wie* ein Medium eingesetzt wird. Entscheidend sind letztlich die didaktischen Methoden, ob der Einsatz neuer Technologien erfolgreich ist oder nicht. Doch wenn es nur auf die Methoden ankommt, brauchen wir dann den Computer im Klassenzimmer überhaupt?

Der Übergang vom Taschenrechner zum Computer ist vergleichbar mit jenem vom Rechenschieber zum Taschenrechner: dem Mathematikunterricht steht ein neues Werkzeug[2] zur Verfügung. Qualitativ gibt es jedoch einen bedeutenden Unterschied: während frühere Taschenrechner lediglich beim Rechnen mit Zahlen hilfreich waren, sind grafikfähige Taschenrechner und vor allem Computer universelle Werkzeuge, die insbesondere im Bereich der Visualisierung große Stärken haben.

Unbestritten lässt sich auch heute noch guter Mathematikunterricht ohne neue Technologien gestalten. Doch sollte man dabei einen wesentlichen Punkt nicht vergessen: neue Technologien sind Werkzeuge, die neue didaktische Möglichkeiten bringen.[3] Ein Verzicht auf diese Werkzeuge bedeutet daher auch immer einen Verzeicht auf neue Wege zur Erreichung didaktischer Ziele.

GeoGebra ist ein computerbasiertes Werkzeug, das insbesondere durch die Verbindung von symbolischer und ikonischer Darstellung zahlreiche Möglichkeiten bietet, um aktives,[4] handlungsorientiertes,[5] experimentelles[6] und entdeckendes Lernen[7] zu fördern. Ich bin der festen Überzeugung, dass neue Technologien im Allgemeinen und GeoGebra im Besonderen einen wertvollen Beitrag für einen verständlicheren und schülernäheren Unterricht leisten können. Diese Arbeit liefert unter anderem Argumente und Beispiele für diese Auffassung.

2.2 Didaktische Prinzipien

Wie bei jedem anderen Werkzeug ist auch bei GeoGebra das *Wie* und *Wann* für einen erfolgreichen Einsatz entscheidend. Dieser Abschnitt bespricht das *Wie* mit ausgewählten didaktischen Prinzipien, für die GeoGebra gut geeignet erscheint. Die inhaltliche Komponente und damit das *Wann* des Einsatzes von GeoGebra ist Thema des Abschnitts 2.8 Lehrplanbezug (S. 50) und des Teils II *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* (S. 115).

Didaktische Prinzipien beziehen Ergebnisse psychologischer Lerntheorien ein und stellen Erfahrungen aus der Unterrichtspraaxis verdichtet und verkürzt dar.

> Sie sind sowohl konstruktive Regeln für die Gestaltung von Unterricht als auch Kriterien für die Analyse und Beurteilung von Unterricht. [130, S. 27]

[2] vgl. Kognitives Werkzeug, S. 108
[3] vgl. Welche Vorteile bietet e-Learning?, S. 98
[4] vgl. Prinzip des aktiven Lernens, S. 18
[5] vgl. operatives Prinzip, S. 17
[6] vgl. Experimentelles Lernen, S. 46
[7] vgl. Entdeckendes Lernen, S. 91

Einen guten Überblick über didaktische Prinzipien des Mathematikunterrichts geben etwa Wittmann [135], Vollrath [127] oder Krauthausen/Scherer [94].

2.2.1 Operatives Prinzip

Wissen lässt sich laut Bruner auf drei Arten darstellen bzw. erschließen (vgl. [135, S. 87]):

- *enaktiv*: durch Handlungen
- *ikonisch*: durch Bilder
- *symbolisch*: durch Zeichen und Sprache

Nach Piaget [108] beginnt die kindliche Denkentwicklung zunächst mit realen Handlungen an konkreten Objekten. Später werden diese durch Handlungen an Bildern, Zeichen oder Symbolen erweitert und führen zu einem Verinnerlichungsprozess, indem sie sich von konkreten Erfahrungen lösen und als abstrakte oder formale Handlungen zu Denkoperationen werden. Denken ist damit verinnerlichtes oder vorgestelltes Tun.

> Daher sind im Unterricht konkrete Materialien, zeichnerische Darstellungen und Textmaterialien einzusetzen, an denen die Schüler real oder gedanklich operieren und „forschen" können. [135, S. 79]

Nach dem *operativen Prinzip* besteht die Aufgabe des Lehrers darin, die Schüler auf das Verhalten der Eigenschaften, Beziehungen und Funktionen mathematischer Objekte bei den transformierenden Operationen hinzulenken. Die zentrale Frage dabei ist „Was passiert mit ..., wenn ...?" (vgl. [135, S. 79]). GeoGebra ist ein passendes Werkzeug für die Umsetzung des operativen Prinzips, das viele Freiräume für solche mathematischen Experimente zu verschiedensten Themen bietet.

> Die Jury erkennt mit großer Freude den Förderpreis dem Programm GeoGebra zu, weil es in hervorragender Weise entdeckendes, handlungs-orientiertes Lernen fördert und sich zur Lösung von Problemaufgaben eignet. Das Werkzeug hat durch die neuartige Verbindung von dynamischer Geometrie und Computeralgebra auf den behandelten Gebieten didaktische Vorteile, die andere vergleichbare Werkzeuge so nicht bieten.
> (Deutscher Bildungssoftware Preis *digita 2004*)

Die Möglichkeit des interaktiven Manipulierens von Objekten ist wohl überhaupt der größte Vorteil neuer Medien im Vergleich zu traditionellen Unterrichtsmaterialien im Mathematikunterricht: einerseits können neue Eigenschaften selbsttätig entdeckt und andererseits vermutete Eigenschaften in direkter Interaktion überprüft und mit Hilfe von Rückmeldungen des Systems gegebenenfalls korrigiert werden.

Ein weiteres Prinzip, das die enaktive Komponente des Lernens besonders betont, ist das *Prinzip des aktiven Lernens*. Es beruht auf der kognitivistischen[8] Theorie von Piaget, ist aber auch mit dem konstruktivistischen Paradigma[9] gut vereinbar:

> Aktive Assimilations- und Akkomodationsversuche des Schülers sind unverzichtbare Lernbedingungen und müssen während des Unterrichts in geeignet organisierten Lernsituationen breiten Raum erhalten. [135, S. 77]

Die Hauptaufgabe des Lehrers liegt hierbei darin, Probleme verständlich zu machen, Schüler bei der Erforschung der Probleme anzuleiten und ihnen bei der Ordnung ihrer Ergebnisse behilflich zu sein. Mit GeoGebra können zu diesem Zweck sogenannte *dynamische Arbeitsblätter*[10] erstellt werden. Diese interaktiven Konstruktionen mit manipulierbaren Objekten, dynamischen Texten und konkreten Aufgabenstellungen sind unabhängig vom Programm mit einem Internet Browser (z.B. Firefox, Internet Explorer) verwendbar. Beispiele für solche Arbeitsblätter, die die Schüleraktivität födern sollen, werden im Teil II *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* (S. 115) vorgestellt.

2.2.2 Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen

> Wissen, das in verschiedenen Darstellungen erworben wurde und verfügbar ist, kann leichter behalten werden und die Fähigkeit, Wissen nach Bedarf in die eine oder andere Form zu transponieren, erhöht die Flexibilität und den Erfolg beim Problemlösen. [135, S. 91]

Diese Aussage ist wohl *die* didaktische Kernidee hinter GeoGebra. Die moderne kognitivistische und konstruktivistische Lernforschung[11] besagt, dass eine vielschichtige Einbettung und Vernetzung neuer Informationen in die bereits vorhandene Wissenstruktur Grundvoraussetzungen für Behalten und Verstehen, welches erst den Transfer erworbenen Wissens auf andere Situationen ermöglicht, sind. Mehrere Darstellungsformen mathematischer Objekte erlauben auch mehrere Anknüpfungspunkte für diesen Prozess der kognitiven Enkodierung. Eine Schülerin, die verschiedene Vorstellungen mit einem mathematischen Begriff verbindet, wird dafür auch mehr Anwendungssituationen erkennen können.

GeoGebra bietet dazu die ikonische und symbolische Darstellung mathematischer Objekte im Geometrie- und Algebrafenster parallel an. Die lernpsychologische Sinnhaftigkeit dieser parallelen Darstellung ist durch das Multimediaprinzip[12] der modernen e-Learning

[8]vgl. Kognitivismus, S. 90
[9]vgl. Konstruktivismus, S. 93
[10]vgl. dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra, S. 137
[11]vgl. Kognitive Prozesse und e-learning, S. 98, sowie Konstruktivismus, S. 93
[12]vgl. Multimediaprinzip, S. 101

Forschung empirisch gut abgesichert. Auch in der Mathematikdidaktik wurde dieses Nebeneinander der Darstellungsformen häufig gefordert. Als Beispiel sei hier das *Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen* von Bauersfeld, Winter und Wittmann angeführt:

> Die Fähigkeit, einen Inhalt von einer Darstellung in eine andere [. . .] zu übertragen, soll gefördert werden. [135, S. 91]

Duval geht davon aus, dass mathematische Objekte nicht direkt, sondern nur über semiotische Repräsentationen[13] zugänglich sind. Die Notwendigkeit der Verwendung verschiedener Darstellungsformen formuliert er mit sehr klaren Worten:

> [. . .] there is no other way of gaining access to the mathematical objects but to produce some semiotic representations. [. . .] There is no true understanding in mathematics for students who do not incorporate into their cognitive architecture the various registers of semiotic representations used to do mathematics. [26]

GeoGebra bietet mit dem Geometriefenster und dem Algebrafenster in diesem Sinne zwei unterschiedliche Sichtweisen auf dieselben mathematischen Objekte. An dieser Stelle sei auch das *Integrationsprinzip* genannt, da es im Zusammenhang mit den verschiedenen Darstellungsformen mathematischer Objekte eine Rolle spielt:

> Im Unterricht soll auf die Schaffung von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen hingearbeitet werden. [135, S. 77]

Das Integrationsprinzip steht in klarem Gegensatz zum Instruktionsparadigma[14] mit seinem linear aufgebauten und in kleine und kleinste Lernschritte gegliederten Unterricht. Mit Hilfe von GeoGebra ist hingegen eine Integration algebraischer und geometrischer Ideen im Mathematikunterricht möglich.

2.2.3 Spiralprinzip

> An den Anfang setzen wir die Hypothese: Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden. [17]

Bruner meint mit diesem Satz insbesondere die *fundamentalen Ideen* (vgl. [121, 110]) der Mathematik wie funktionale Abhängigkeit, Approximation oder Linearisierung. Er fordert eine Ausrichtung des Unterrichts auf solche Grundideen in allen Altersstufen, wobei Form und Darstellungsmittel den kognitiven Fähigkeiten der Schüler angepasst werden

[13] vgl. Bidirektionale Verbindung von dynamischer Geometrie und Algebra in GeoGebra, S. 78

[14] vgl. Instruktionsparadigma, programmierter Unterricht, S. 89

sollen. Wittmann nennt dies auch das *Prinzip der Orientierung an Grundideen* (vgl. [135, S. 84]).

> Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf diese Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat. [...] Man muß noch viel über die 'Curriculum-Spirale' lernen, die auf höheren Ebenen immer wieder zu sich selbst zurückkommt. [17, S. 26f]

Dieses *Spiralprinzip* liegt auch dem aktuellen österreichischen Mathematik-Lehrplan für die HS/AHS Unterstufe [12] zu Grunde, der den Kernstoff der 5.–7. Schulstufen jeweils in folgende vier Abschnitte gliedert:

1. Arbeiten mit Zahlen und Maßen

2. Arbeiten mit Variablen

3. Arbeiten mit Figuren und Körpern

4. Arbeiten mit Modellen, Statistik

Das Thema 'Lineare Gleichungen' wird beispielsweise unter 'Arbeiten mit Variablen' in allen vier Schulstufen angeführt, wobei die Anforderungen den kognitiven Fähigkeiten der Schüler entsprechend wachsen:

5. Schulstufe: Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können

6. Schulstufe: unter Verwendung von Umkehroperationen einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten lösen und Formeln umformen

7. Schulstufe: Lösen von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten

8. Schulstufe: Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können

GeoGebra ist als Darstellungsmittel, welches die Möglichkeit zur Anpassung an die intellektuellen Fähigkeiten der Schüler erlaubt, für einen spiralförmig aufgebauten Unterricht gut geeignet. In unteren Schulstufen kann etwa durch Ausblenden des Algebrafensters geometrisch-anschaulich gearbeitet werden. Das spätere Hinzunehmen des Algebrafensters ermöglicht dann die nochmalige Untersuchung eines Problems von algebraischer Sicht aus, also auf einem höheren Niveau.

In Bezug auf das Spiralprinzip hat GeoGebra zwei für die Praxis wichtige Vorteile gegenüber anderen Softwarepaketen für den Mathematikunterricht:

1. GeoGebra ist wegen der algebraischen Möglichkeiten vielseitiger einsetzbar als reine dynamische Geometrie Systeme.

2. GeoGebra ist wegen der einfacheren Bedienbarkeit und der schulnahen Notation schon früher als Computeralgebra Systeme verwendbar.

Aus dem Spiralprinzip lassen sich die folgenden beiden Prinzipien direkt ableiten (vgl. [135, S. 86]):

- *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens:* ein Thema soll nicht aufgeschoben werden, bis eine abschließende Behandlung möglich erscheint, sondern ist bereits früher in einfacher Form einzuleiten.

- *Prinzip der Fortsetzbarkeit:* ein Thema soll nicht ad hoc behandelt werden, sondern so, dass ein Ausbau auf höherem Niveau möglich ist.

Ganz im Sinne der didaktischen Ideen hinter GeoGebra ist auch das von Dienes formulierte *Aufbauprinzip*:

> Die Konstruktion eines Begriffes oder einer Erkenntnis hat der Analyse voranzugehen. [23, S. 47]

Damit ist gemeint, dass die Schüler zuerst durch Anwendungsbeispiele eine Vorstellung von mathematischen Begriffen bekommen sollen, bevor diese strukturiert und analysiert werden. Durch experimentelles und entdeckendes Lernen kann mit GeoGebra die Ausbildung solcher Vorstellungen gefördert werden, um neue Begriffe implizit einzuführen. Eine anschließende Phase der Analyse und Exaktifizierung kann dadurch auf ein intuitives Verständnis des Begriffes aufbauen.

Spiralprinzip und Aufbauprinzip werden auch von Piagets Theorie gestützt, wonach die enaktive und ikonische Beschäftigung mit einem Thema die Grundlage für eine spätere Symbolisierung bilden.

2.2.4 Genetisches Prinzip

Das *genetische Prinzip* besagt, dass der Mathematikunterricht nach der *genetischen Methode* organisiert werden soll. Diese Methode wurde und wird von zahlreichen Didaktikern und Psychologen vertreten, unter anderem von Klein, Freudenthal, Piaget, Bruner und Wittmann (vgl. [135, S. 130ff]). Die *genetische* Darstellung einer mathematischen Theorie richtet sich an den erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von

Mathematik aus. Kern der genetischen Methode ist die Auffassung, dass die Mathematik nur über den Prozess der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden kann, nicht als Fertigfabrikat. Damit steht sie in klarem Gegensatz zur Aufgabendidaktik und einer Imitation der deduktiven Methode im Unterricht (vgl. [135, S. 144]). Wichtige Merkmal einer genetischen Darstellung sind (vgl. [135, S. 131]):

- Anschluss an das Vorverständnis der Schüler
- Einbettung der Überlegungen in größere Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik
- Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus
- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze
- durchgehende Motivation und Kontinuität

GeoGebra eignet sich besonders gut für heuristische Ansätze und mathematische Experimente. Bereits im letzten Abschnitt wurde im Rahmen des Aufbauprinzips angesprochen, dass dadurch ein intuitives Begriffsverständnis gefördert werden kann. Ganz entscheidend für die genetische Methode ist das Ausgehen von konkreten Problemen aus der Erfahrungswelt der Schüler. Ein deduktiver Mathematikunterricht ist geneigt dazu, Lösungen anzubieten, bevor den Schülern überhaupt das Problem bewusst werden konnte. Bei der genetischen Methode versucht man gerade den umgekehrten Weg zu gehen. Dadurch kann das Gefühl geweckt werden, dass Mathematik tatsächlich benötigt wird, um Probleme zu lösen, was überaus motivierend sein kann.

Ein Modell für die Umsetzung der genetischen Methode von Heugl, Klinger und Lechner ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Die erste Schleife dieser genetischen Spirale umfasst Lernen auf intuitiver Basis während die zweite Schleife Lernen auf systematischer Basis beinhaltet. Enstprechend dem Aufbauprinzip schließt also die Exaktifizierungsphase an eine heuristisch, experimentelle Phase an (vgl. [51, S. 85]). Auch Wittmann schlägt zur konkreten Realisierung der genetischen Methode im Unterricht drei Phasen von Aktivitäten vor (vgl. [135, S. 140]):

1. Entwicklung inhaltlicher Mathematik
2. Begrifflich-strukturelle Analyse und logisches Ordnen
3. Anwendung

In der ersten Phase wird zu einem gegebenen Problemkontext ein mathematischer Apparat von Begriffen und Verfahren entwickelt bzw. weiterentwickelt und schließlich das Problem gelöst. Die zweite Phase der *Distanzierung* löst sich vom konkreten Problem und

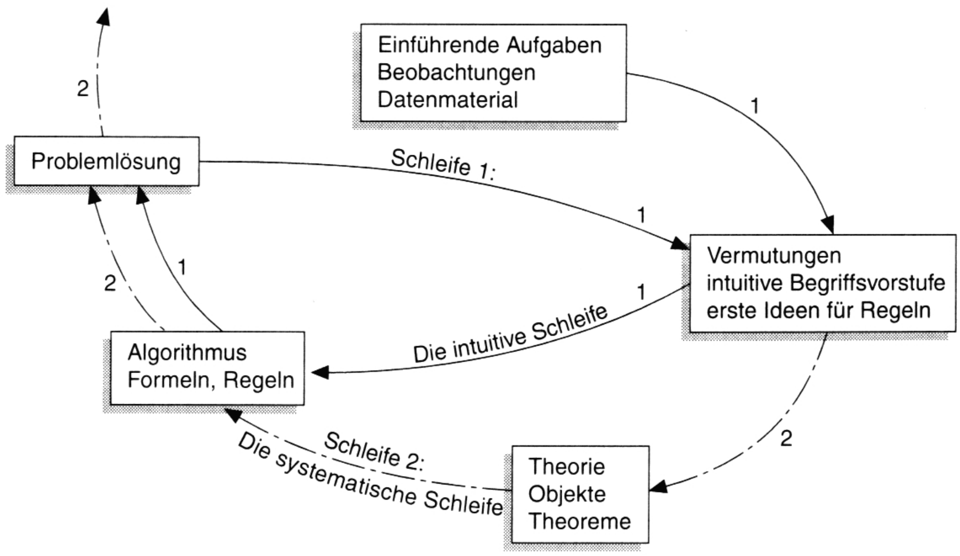


Abbildung 2.1: Die genetische Spirale [51, S. 85]

stellt die Exaktifizierung und Einordnung der neuen Begriffe und Verfahren dar. In der dritten Phase geht es um den Transfer des Gelernten auf andere Anwendungssituationen.

GeoGebra kann in allen drei Phasen eingesetzt werden: (1) Zunächst wird versucht, experimentelle Zugänge zu finden und das Problem zu lösen, z.B. näherungsweise oder geometrisch. (2) Die induktiv gewonnenen Erkenntnisse und Vermutungen aus der ersten Phase können dann als Basis für eine informelle Begriffsbildung dienen. Darauf baut schließlich die Exaktifizierung auf.[15] (3) Bei der Anwendung zur Lösung weiterer Probleme können vorgefertigte Funktionen und Befehle von GeoGebra eingesetzt werden, um die Schüler vom algorithmischen Rechnen zu entlasten und die Tätigkeiten des Modellbildens und Interpretierens zu fördern.

Ein Beispiel für eine genetische Vorgangsweise mit GeoGebra ist im Lernpfad *Integrale - forschend entdeckt* (S. 153) beschrieben. Darin wird die Integralrechnung ausgehend von einem konkreten Problem - der Berechnung der Fläche eines krummlinig begrenzten Grundstücks - eingeführt. Eine konkrete Umsetzung dieser Ideen im Unterricht ist in der Unterrichtseinheit *Einführung in die Integralrechnung* (S. 131) dokumentiert.

[15]vgl. Aufbauprinzip, S. 21

2.3 Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra

GeoGebra ist so konzipiert, dass alle drei Modi der Darstellung und Erarbeitung von Wissen - enaktiv, ikonisch und symbolisch - in das Lernen einbezogen werden. Ausganspunkt ist dabei vor allem das operative Prinzip,[16] mit dem vielfältige systematische Veränderungen verbunden sind: Konstruktion eines Modells, Veränderung der Ausganssitutation, Suche nach alternativen Lösungswegen und Variation von Einflussgrößen.

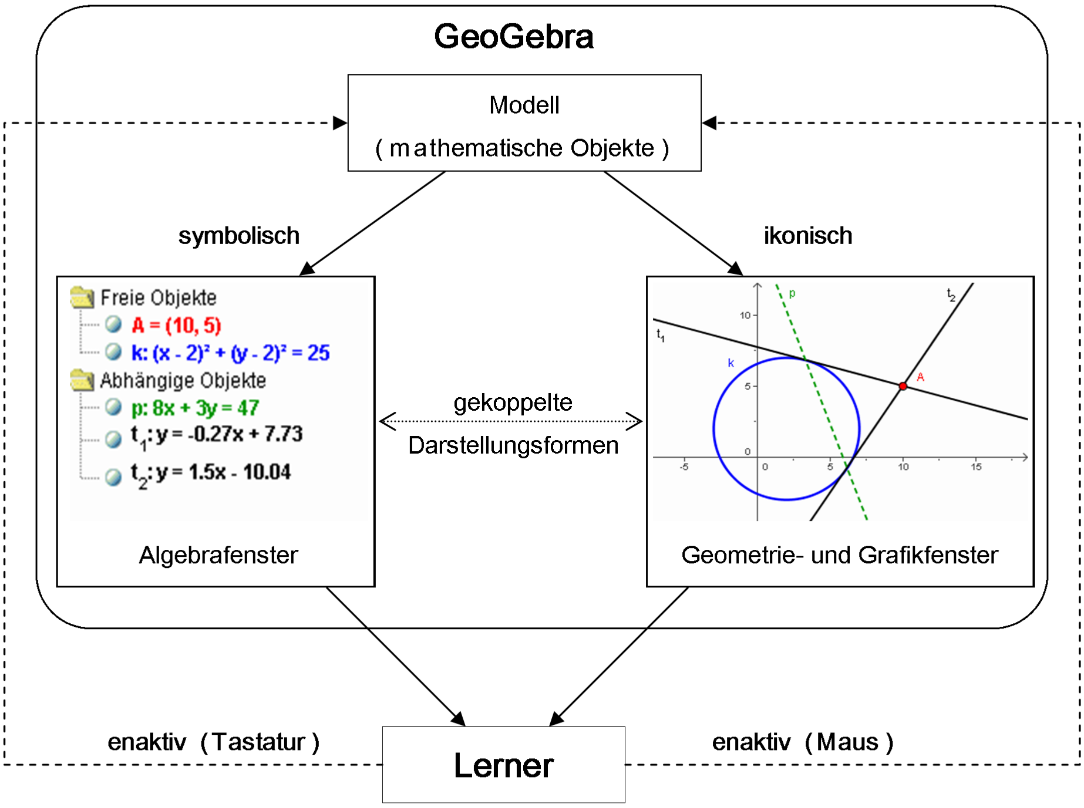


Abbildung 2.2: Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra

Abbildung 2.2 zeigt ein einfaches Modell des Lernens mit GeoGebra. Das Programm stellt eine Mikrowelt[17] zur Untersuchung mathematischer Objekte dar, welche durch die Möglichkeit zur interaktiven Manipulation dieser Objekte dem Prinzip des aktiven Ler-

[16] vgl. operatives Prinzip, S. 17
[17] vgl. Mikrowelt, S. 92

nens[18] Rechnung trägt. Darüberhinaus unterstützt die Koppelung von ikonischer und symbolischer Darstellung das Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen.[19]

enaktiv: der Lerner kann mit Hilfe der Maus (Konstruktionswerkzeuge) oder der Tastatur (Eingabe von Koordinaten, Gleichungen und Befehlen) aktiv ein Modell mathematischer Objekte erstellen bzw. beeinflussen.

ikonisch: das Modell der abstrakten mathematischen Objekte wird im Geometrie- und Grafikfenster bildhaft dargestellt.

symbolisch: dieselben mathematischen Objekte werden parallel dazu im Algebrafenster mittels Koordinaten, Gleichungen und Zahlenwerten dargestellt.

Die beiden Darstellungsformen geben dem Lerner einerseits direkte Rückmeldungen über das von ihm erstellte Modell. Andererseits kann er das Modell auch über beide Repräsentationsarten beeinflussen: ikonisch mit der Maus und symbolisch über die Tastatur. Diese Möglichkeit der Manipulation des Modells über zwei unterschiedliche Darstellungsarten zeichnet GeoGebra aus und unterscheidet es von klassischen dynamischen Geometrieprogrammen und Computeralgebra Systemen. In einem Computeralgebra System ist die Manipulation des Modells nur über die symbolische Darstellung möglich, in einem dynamischen Geometrieprogramm nur über die ikonische.

Diese bidirektionale Koppelung von ikonischer und symbolischer Darstellung in GeoGebra ist auch als Weiterentwicklung des *Window-Shuttle-Prinzips* (vgl. [51]) zu sehen, welches ursprünglich im Zusammenhang mit der Mehrfenstertechnik des Computeralgebra Systems *Derive* formuliert wurde.

> Arbeiten mit der Window-Shuttle-Technik bedeutet also, daß sich ein Begriff, eine Problemlösung durch mehrmaliges Hin- und Herpendeln (»Shutteln«) zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das heißt zwischen verschiedenen Fenstern des CAS, entwickelt. [51, S. 200]

Auf die Bidirektionalität der ikonischen und symbolischen Modi in GeoGebra wird im Artikel *Bidirektionale Verbindung von dynamischer Geometrie und Algebra in GeoGebra* (S. 78) genauer eingegangen. Das Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen beschränkt sich in GeoGebra nicht nur auf die Parallelität von Geometrie- und Algebrafenster: beispielsweise lässt sich im Algebrafenster auch die symbolische Darstellungsform von Objekten verändern. So können etwa Geradengleichungen in impliziter, expliziter oder Parameterdarstellung sowie Punkte und Vektoren in cartesischen oder Polarkoordinaten angezeigt werden.

---

[18]vgl. Prinzip des aktiven Lernens, S. 18

[19]vgl. Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen, S. 18

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der Begriff *E-I-S Bild* nach Kautschitsch (vgl. [83]). Ein solches Bild stellt eine Verzahung von enaktivem, ikonischem und symbolischem Wissen dar, das die notwendige Wissenskategorie im geeigneten Moment zu (re)konstruieren und abzurufen gestattet. Eine mathematische Abbildung ist in der Regel nicht selbstevident: um sie richtig deuten zu können, benötitgt man Wissen über ihre Entstehung und die Zusammenhänge ihrer Teile. Interaktive dynamische Konstruktionen in GeoGebra können solche E-I-S Bilder sein, indem sie entweder von den Schülern selbst erstellt werden oder bei der nachträglichen Manipulation invariante Zusammenhänge der dargestellten Größen erkennen lassen.

> Man erreicht damit eine Aussagekraft, die weder durch Wahrnehmungsbilder, noch durch Sprache (auch nicht durch die Kunstsprache Mathematik) erzeugt werden kann. Dadurch könnten letztendlich amodale Verknüpfungen im Kopf des Lernenden induziert werden, die ihrerseits wieder für die (Re-)Konstruktion des für die Interpretation der Veranschaulichung notwendigen begrifflichen Wissens notwendig sind. [83]

2.4 Leitlinien des Einsatzes neuer Technologien

> Beim Einsatz neuer Technologien geht es vorranging nicht darum, Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts zu verändern, sondern es ist vielmehr die Art und Weise des Umgangs mit diesen Inhalten, die *Methode* des Unterrichtens oder das Beschreiten neuer Wege, das zum besseren oder anderen Erreichen „alter“ Ziele und zum besseren Verständnis „alter“ Inhalte führen soll. [130, S. 27]

Diese Ansicht wurde auch für GeoGebra bereits am Beginn dieses Kapitels vertreten. Der Frage, wie diese neuen Wege aussehen können, wird in diesem Abschnitt nachgegangen. Einige allgemeine Ansatzpunkte wurden bereits in den vorgestellten didaktischen Prinzipien (ab S. 16) aufgezeigt. Hier werden nun basierend auf diesen Prinzipien konkrete Leitlinien des Einsatzes neuer Technologien unter besonderer Berücksichtigung von GeoGebra betrachtet (vgl. [130, S. 27–38]).

2.4.1 Inhaltsbezogene Leitlinien
  - An Grundideen orientieren
  - Beziehungen herstellen

2.4.2 Schülerbezogene Leitlinien
  - Lernen, Fragen zu stellen

- Operative arbeiten
- Selbsttätig lernen
- Produktiv üben und wiederholen

2.4.3 Werkzeugbezogene Leitlinien

- Adäquat visualisieren
- Wissen und Können auslagern

2.4.1 Inhaltsbezogene Leitlinien

An Grundideen orientieren

Neue Technologien können das Aufzeigen fundamentaler Ideen (vgl. [121, 110]) im Unterricht unterstützen. Sie bieten erweiterte Visualisierungsmöglichkeiten und entlasten von kalkülhaftem Rechnen. Dadurch erleichtern sie die Konzentration auf zentrale Aspekte der Mathematik. Im Sinne des Spiralprinzips[20] können mit neuen Technologien manche Lerninhalte bereits früher und auf verschiedenen Niveaus im Unterricht behandelt werden.

Oft werden mathematische Tätigkeiten vereinfacht in *Darstellen - Operieren - Interpretieren* untergliedert. In der Schule wird meist dem Operieren der größte Zeitanteil zugestanden. Neue Medien können helfen, dieses Ungleichgewicht ein wenig zugunsten des Darstellens - des Suches von Zugängen zu einer Problemstellung und der Modellbildung - und des Interpretierens - des Rückbeziehens der Lösung auf die Ausgangsfrage und den Lösungsweg - auszugleichen.

Beziehungen herstellen

Wissen wird im Gedächtnis als ein Netzwerk von Begriffen und Beziehungen konstruiert und gespeichert.[21] Das Integrationsprinzip[22] fordert daher, dass auch im Unterricht Beziehungen und Vernküpfungen hergestellt werden sollen. Hierbei ist neben innermathematischen Beziehungen natürlich vor allem das Aufzeigen der Beziehung mathematischer Begriffe zur Umwelt der Lernenden gemeint.

> Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muß man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muß sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüft ist. Das - ich meine die Wirklichkeit - ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt. [34, S. 77]

[20] vgl. Spiralprinzip, S. 19
[21] vgl. Kognitive Prozesse und e-Learning, S. 98
[22] vgl. Integrationsprinzip, S. 19

Den neuen Technologien und insbesondere GeoGebra kommt beim Herstellen solcher Beziehungen eine besondere Rolle zu:

> Durch die vielfältige und parallele Verfügbarkeit verschiedener Darstellungsformen werden Beziehungen zwischen der symbolischen, numerischen und graphischen Ebene hergestellt. [130, S. 30]

Oftmals wird diese Parallelität erst durch den Einsatz mehrerer Werkzeuge erreicht. GeoGebra bietet dagegen eine sehr direkte Koppelung von symbolisch/numerischer und graphischer Darstellung in einem Programm. Um Beziehungen zur Lebenswirklichkeit der Lernenden herzustellen, kann realitätsnahes und aktuelles Datenmaterial Verwendung finden. Eine unerschöpfliche Quelle bietet hierzu das Internet.

2.4.2 Schülerbezogene Leitlinien

Lernen, Fragen zu stellen

Bei der genetischen Methode[23] sollen Lernende Mathematik als Hilfsmittel zur Lösung von Problemen kennen lernen. Begriffe sind nicht leere anschauungslose Objekte, sondern werden als Antworten auf konkrete Fragen entwickelt - genau so wie es auch in der Geschichte der Mathematik der Fall war. Anders als beim fragend-erarbeitenden Unterricht (vgl. etwa [43, S. 17]), bei dem nur die Lehrperson Fragen formuliert, sollen die Schüler im Rahmen eines genetischen Unterrichts selbst lernen, Fragen zu stellen. Die Lernenden erhalten so einen Einblick in den Prozess der Entstehung von Mathematik und erleben diese nicht als Fertigprodukt.

Wie bereits angesprochen, entlasten neue Technologien die Lernenden verstärkt vom Ausführen algorithmischer Tätigkeiten, wodurch heuristische und experimentelle Arbeitsweisen an Bedeutung gewinnen. Diese Arbeitsweisen machen aber nur dann Sinn, wenn sie zielgerichtet sind und als Antworten auf konkrete Fragen verstanden werden.

Operativ Arbeiten

Das auf der genetischen Erkenntnistheorie von Piaget basierende operative Prinzip[24] stellt enaktives Lernen in den Vordergrund. Wissenserwerb erfolgt primär nicht durch Zuschauen oder Nachahmen, sondern durch vielfältiges Operieren mit Objekten. Neue Technologien wie GeoGebra bieten neue Möglichkeiten eines ikonischen und symbolischen Umgangs mit graphischen Darstellungen, geometrischen Konstruktionen und mathematischen Symbolen.[25] Insbesondere kann so Fragestellungen der Art *Was passiert ... wenn ... ?* durch expe-

[23] vgl. Genetisches Prinzip, S. 21

[24] vgl. operatives Prinzip, S. 17

[25] vgl. Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra, S. 24

rimentelles Arbeiten nachgegangen und das Ausbilden von Begriffsvorstellungen gefördert werden.

Das operative Prinzip ist zwar für den Einsatz von GeoGebra zentral, es sollte jedoch nicht als absolutes Muss verstanden werden. Im Sinne eines moderaten Konstruktivismus[26] ist auch rezeptives Lernen in Phasen systematisch aufeinanderfolgenden Erklärungen in einem darbietenden Unterricht möglich und sinnvoll. GeoGebra kann in diesem Zusammenhang als Präsentationswerkzeug - auch von Schülern - Verwendung finden.[27]

Selbsttätig lernen

Schülerorientierte Arbeitsformen wie problemlösender, entdeckender, projektorientierter- oder offener Unterricht setzen Eigenaktivitäten und Selbsttätigkeit der Schüler voraus. Mit einem solchen Unterricht sind Ziele wie Entwicklung von Selbstständigkeit, kritisches Reflektieren der eigenen Tätigkeit, Motivation durch eigenen Erfolg und Lernen aus eigenen Fehlern verbunden.

> Alle bisherigen Erfahrungen zum Einsatz neuer Technologien zeigen, dass mit dem Einsatz des Computers als Werkzeug in der Hand des Schülers eine größere Selbsttätigkeit einhergeht. [130, S. 34]

Auf die Thematik *Selbstlernen im Mathematikunterricht* wird in einem eigenen Abschnitt ab S. 32 ausführlicher eingegangen.

2.4.3 Werkzeugbezogene Leitlinien

Produktiv üben und wiederholen

Üben und Wiederholen sind wichtig zur Sicherung des Unterrichtsertrags, zur Vertiefung der Lerninhalte und zur Entwicklung der Fähigkeit, das Gelernte in anderen Situationen anwenden zu können. Daher sollte das Üben im Unterricht regelmäßig und in die Unterrichtskonzeption eingebunden stattfinden. Übungen mit kleinschrittig konstruierten Aufgabenkolonnen[28] tragen wenig zur Erreichung der eben genannten Ziele bei und bergen die Gefahr, dass sich beim stereotypen Üben Fehlermuster verfestigen. Beim aktiv entdeckenden Lernen[29] und *produktiven Üben* werden Lernabschnitte dagegen großzügiger bemessen. Aufgaben sollen danach aus Sinnzusammenhängen entwickelt werden und die Eigenverantwortlichkeit für das Lernen fördern (vgl. [136]).

[26] vgl. moderater Konstruktivismus, S. 93
[27] vgl. dazu *Dynamische Mathematik mit GeoGebra*, S. 70
[28] vgl. Behaviorismus und programmierte Instruktion, S. 89
[29] vgl. Prinzip des aktiven Lernens, S. 18, und Entdeckendes Lernen, S. 91

Im Bereich der neuen Technologien gibt es eine Vielzahl von Übungsprogrammen und interaktiven Seiten im Internet für alle Altersstufen, die dem Lerner Rückmeldung über fehlerhafte Eingaben und mögliche Lösungshinweise anbieten. Mit GeoGebra können insbesondere dynamische Arbeitsblätter[30] für Übungszwecke verwendet werden. Diese können inzwischen auch zu interaktiven Übungen mit Rückmeldungen ausgebaut werden.[31] Zahlreiche Beispiele für solche mit GeoGebra erstellten Übungen sind auf *www.realmath.de* zu verschiedensten Themenbereichen zu finden.

Adäquat visualisieren

Die drei Darstellungsweisen des Wissens - enaktiv, ikonisch und symbolisch - wurden bereits mehrfach angesprochen (vgl. S. 17 und S. 24). Für ein umfassendes Begriffsverständnis ist es wichtig, Eigenschaften von Begriffen in verschiedenen Darstelungen zu erkennen, Darstellungsformen zueinander in Beziehung zu setzen und zwischen diesen Darstellungen wechseln zu können.[32]

Mit Hilfe neuer Technologien können Darstellungen schnell und in hoher Qualität erzeugt werden. Auf die Besonderheit der bidirektionalen Verknüpfung des ikonischen und symbolischen Modus in GeoGebra wurde bereits hingeweisen (vgl. S. 24). Dadurch kann auf eine neue Art mit mathematischen Objekten und ihren Darstellungen operiert werden.

> Das Arbeiten mit Darstellungen erhält somit im Rahmen des computerunterstützten Arbeitens eine neue Qualität. Allerdings ist der Computer auch ein Werkzeug mit einer eigenen mathematischen Notation und mit speziellen Befehlen, das neue Handlungsschemata durch Tastatureingaben, Menübefehle und Maussteuerung erfordert. [130, S. 37]

Neben mathematischer Kompetenz brauchen Schüler beim Einsatz neuer Technologien auch stets zusätzliche Werkzeugkompetenz. Das Hauptaugenmerk soll aber natürlich stets bei mathematischen und nicht bei Bedienungsfragen liegen. Aus diesem Grund wurde und wird bei der Entwicklung von GeoGebra auf eine möglichst einfache, intuitiv zu bedienende und an der Schulnotation orientierte Benutzeroberfläche gelegt.[33] So sind beispielsweise alle Befehle nicht - wie in CAS üblich - nur in Englisch sondern auch in der jeweils gewählten Sprache der Benutzeroberfläche verfügbar.

[30] vgl. dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra, S. 137
[31] vgl. Steuerung von Applets über JavaScript, S. 219
[32] vgl. Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen, S. 18
[33] vgl. KISS Prinzip, S. 81

Wissen und Können auslagern

Dörfler [25] sieht neue Technologien als *kognitive Werkzeuge*,[34] die zur Erweiterung und Verstärkung unseres Denkens beitragen können. Sie werden so zu einem zentralen Bestandteil des Denkens und ermöglichen das Auslagern mathematischer Fertigkeiten vom Kopf in die Technik.

> Ein Hindernis für verstärkte Einbeziehung von Software als Unterrichtsthema besteht darin, daß diese allzu oft im Gegensatz zur traditionellen (und als "eigentlich" verstandenen) Mathematik gesehen wird. Der "Computer" wird als Bedrohung des Intellekts empfunden statt als Mittel zu seiner Erweiterung und Reorganisation. Die Hinzunahme neuer oder leistungsfähiger kognitiver Technologien wird als Verlust des "Geistigen" empfunden. Ich denke demgegenüber, daß es produktiver ist, extensiven und intensiven Gebrauch kognitiver symbolischer Technologien anzustreben und nicht künstlich Beschränkungen zu errichten. [25, S. 63f]

Durch das Auslagern algorithmischer Tätigkeiten kann das Planen von Rechenabläufen und das Interpretieren von Ergebnissen an Bedeutung gewinnen. Damit ist auch eine vermehrte Hinwendung zu fundamentalen Ideen[35] des Faches im Sinne des Spiralprinzips[36] möglich.

> Der Schüler löst sich von seiner bisherigen Rolle als *Rechner* und erfährt die Beförderung zum *Anweiser und Planer* von Rechnungen. [132, S. 108]

Das Reduzieren routinemäßiger Fertigkeiten im Unterricht stellt eine neue Herausforderung für Lehrkräfte dar: einerseits wird der Unterricht zwar algorithmisch einfacher, andererseits aber intellektuell anspruchsvoller. Der sinnvolle Einsatz neuer Technologien besteht nicht in einem völligen Verzicht auf algorithmisches Operieren, das vor allem für schwächere Schüler einen wichtigen Beitrag zur Ausbildung von Vorstellungen über mathematische Objekte liefert, sondern in einer stärkeren Betonung der bisher oftmals vernachlässigten Tätigkeiten des Modellbildens und Interpretierens. Die Möglichkeiten des enaktiven Lernens mit GeoGebra können mithelfen, diesen Ausgleich zu schaffen.

[34] vgl. kognitives Werkzeug, S. 108
[35] vgl. die Leitlinie *An Grundideen orientieren* S. 27
[36] vgl. Spiralprinzip, S. 19

2.5 Selbstlernen im Mathematikunterricht

> Ich höre und ich vergesse.
> Ich sehe und ich erinnere mich.
> Ich tue und ich verstehe.
> (Konfuzius, um 500 v. Chr.)

2.5.1 Neue Unterrichtskultur

Die Ideen des operativen Prinzips,[37] des Prinzips aktiven Lernens[38] und des Konstruktivismus[39] in Bezug auf mehr Schülerorientierung sind keineswegs neu. Der Ruf nach mehr Selbsttätigkeit der Schüler im Unterricht war schon häufig eine zentrale Forderung bei Lern- und Bildungsprozessen: Rousseau (1712-1778), John Dewey (1859-1952) und Kerschensteiner (1854-1932) sahen eine zentrale Bedeutung des selbstständigen Erarbeitens für die Bildung des Menschen. Bereits 1916 hat Kühnel für den Mathematikunterricht einen Wechsel der Unterrichtskultur weg von Leitung und Rezeptivität hin zu Organisation und Aktivität beschrieben.

> Beibringen, darbieten, übermitteln sind [...] Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage und haben für die Gegenwart geringen Wert; denn der pädagogische Blick unserer Zeit ist nicht mehr stofflich eingestellt. Wohl soll der Schüler auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten gewinnen - wir hoffen sogar: noch mehr als früher - aber wir wollen sie ihm nicht beibringen, sondern er soll sie sich erwerben. [...]
>
> Und das Tun des Schülers ist nicht mehr auf Empfangen eingestellt, sondern auf Erarbeiten. Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet. [96, S. 70]

Ein knappes Jahrhundert danach ist dieses Lehrverfahren leider noch immer nicht selbstverständlich. In neuerer Zeit haben daher Winter [134] sowie Müller und Wittmann [136] die Idee der Selbsttätigkeit im Rahmen des aktiv, entdeckenden Lernens[40] betont. Wenn heute von einer *neuen Unterrichtskultur* gesprochen wird, so ist damit die alte Idee eines Umganges zwischen Lehrenden und Lernenden in Form eines Unterrichts- oder Kommunktationsstils gemeint, der stärker auf Eigenständigkeit und Selbstverantwortung der Schüler ausgerichtet ist.

[37] vgl. operatives Prinzip, S. 17
[38] vgl. Prinzip aktiven Lernens, S. 18
[39] vgl. Konstruktivismus, S. 93
[40] vgl. entdeckends Lernen, S. 91

> Mit der Zunahme der Phasen des individuellen Arbeitens, der Partner- und Gruppenarbeit wird der Lehrer zum einen zum individuellen Berater für unterschiedlich schnell lernende Arbeitsgruppen und zum anderen zum Koordinator dafür, dass in der gesamten Klasse auch eine Basis für gemeinsame Gespräche vorhanden bleibt. [130, S. 38]

Dieses Lehrerbild deckt sich mit dem konstruktivistischen Paradigma,[41] wonach die Aufgabe des Lehrers vor allem die eines Lernberaters ist, der den individuellen Wissenskonstruktionsprozess anregen und unterstützen, aber nicht wirklich steuern kann und soll.

2.5.2 Selbstgesteuertes Lernen

Die Begriffe *Selbstlernen* und *selbstgesteuertes Lernen* werden hier synonym gebraucht. Die Bedeutung von *Selbststeuerung* reicht von der aktiven Auseinandersetzung mit gegebenen Lerngegenständen über die eigenverantwortliche Orangisation von Lerninhalten bis hin zu selbstbestimmten Formen des Lernens (vgl. [74, S. 15ff]). Weinert definiert *selbstgesteuertes Lernen* als eine Lernform, bei der

> [...] der Handelnde die wesentlichen Entscheidungen, ob, was, wann und worauf er lernt, gravierend und folgenreich beeinflussen kann. [131, S. 102].

Dem gegenüber steht das fremdgesteuerte Lernen, bei dem nicht der Lernende, sondern der Lehrende die Entscheidung über Inhalte, Ziele, Methoden und Lernkontrollen trifft. Selbststeuerung und Fremsteuerung von Lernen sind als Extrema auf einer Skala zu sehen. Wir unterscheiden hier die folgenden drei Stufen des selbstgesteuerten Lernens (vgl. Abbildung 2.3, [74, S. 16]).

Selbsttätigkeit: der Lernende bearbeitet aktiv in einem vorstrukturierten Lernarrangement von außen gegebene Aufgaben.

Selbstorganisation: der Lernende übernimmt zusätzlich Verantwortung für die Organisation des Lernprozesses. Er plant sein Vorgehen und wählt Arbeitsmethoden aus.

Selbstbestimmtheit: der Lernende legt zusätzlich auch die Ziele des Lernens selbst fest.

Selbstbestimmtes Lernen als Idealform des selbstgesteuerten Lernens ist im vorsystematisierten Zusammenhang der Schule kaum erreichbar. Ein Beispiel wäre, wenn der Lernende die Schule als Mittel zur Erreichung übergeordneter Ziele wie die Vorbereitung auf das weitere berufliche Leben sieht. Selbstorganisiertes Lernen liegt dann vor, wenn die Lernenden selbst über Reihenfolge, Tempo und Lernunterstützung entscheiden können.[42]

[41] vgl. Konstruktivismus, S. 93
[42] vgl. Selbststeuerungsprinzip, S. 106

Offenes Lernen und Stationenbetriebe fallen in diese Kategorie. Selbsttätiges Lernen steht für die aktive Auseinandersetzung mit einer vorgegebenen Aufgabe, die klar über das reine Nachvollziehen und Zuhören hinausgeht, da der Lernende seinen Handlungen einen Sinn zuweisen können muss.

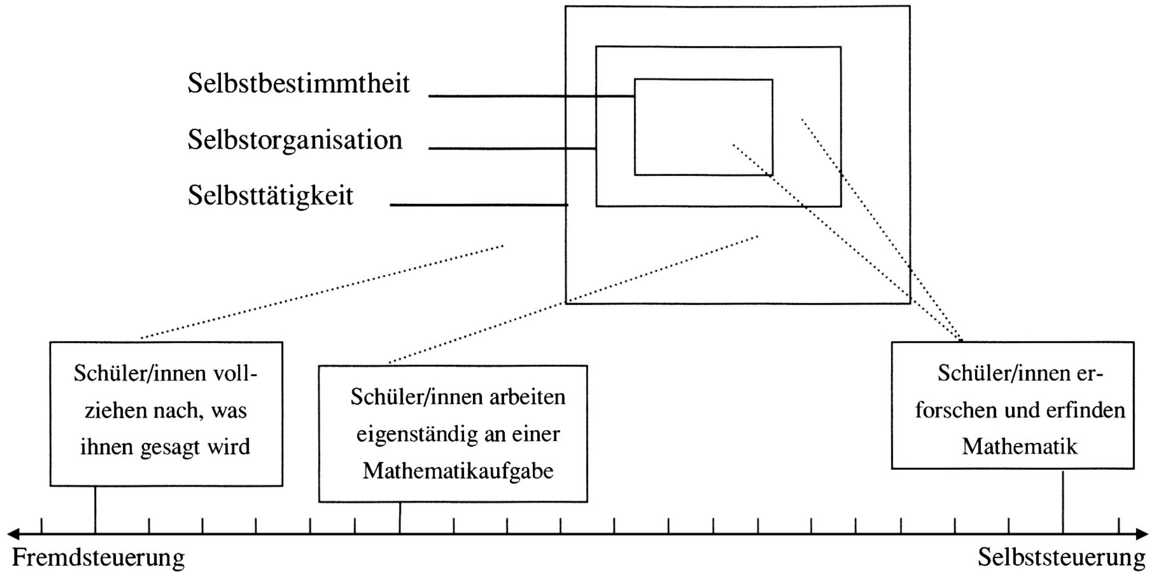


Abbildung 2.3: Drei Stufen von Selbststeuerung [74, S. 16]

Die dynamischen Arbeitsblätter[43] von GeoGebra eignen sich sehr gut für selbsttätiges Lernen. Kombiniert man mehrere solcher Arbeitsblätter zu einem e-Learning Kurs kann auch der Schritt zum selbstgesteuerten Lernen gelingen. Beispiele für Lernumgebungen, die dies versuchen, sind im Kapitel *Medienvielfalt* (S. 127) zu finden.

Die Grundvoraussetzung für selbstgesteuertes Lernen ist, dass die Lernenden wissen, warum sie etwas lernen und wozu es nützlich ist. Entsprechend dem genetischen Prinzip[44] ist daher beim selbstgesteuerten Lernen die Mathematik als Tätigkeit und Prozess zu verstehen, nicht als Fertigprodukt. In diesem Zusammenhang spielen *intentionale Probleme* eine besondere Rolle. Sie stellen sich in das Spannungsfeld zwischen Stoff und Erfahrungswelt der Schüler und bereiten den Weg für eine selbstständige Erschließung eines neuen Stoffgebietes (vgl. [74, S. 23]).

Intentionale Probleme beinhalten die Intentionen der Lehrperson: sie zielen auf Anforderungen des Lehrplanes ab, basieren auf fundamentalen Ideen des Faches und dienen Schülern als motivierender Einstieg in ein neues Themengebiet. In Wittmanns Konkretisierung des genetischen Modells (vgl. S. 22) stellen intentionale Probleme den Ausgangspunkt

[43]vgl. dynamische Arbeitsblätter, S. 137
[44]vgl. genetisches Prinzip, S. 21

für die Entwicklung inhaltlicher Mathematik dar. Ausgehend von einem gegebenen Problemkontext soll dabei ein mathematischer Apparat von Begriffen und Verfahren entwickelt werden.

Intentionale Probleme [74, S. 30]

- sind Lernauslöser selbstständigen Lernens
- motivieren, sich mit Mathematik auseinander zu setzen
- sind offen, unstrukturiert und authentisch
- bieten durchgehende Motivation und Kontinuität
- sind komplex, so dass sie soziales und kooperatives Lernen erforderlich machen
- lassen sich unter vielfältigen Perspektiven bearbeiten
- führen auf unterschiedlichen Lösungswegen zu unterschiedlichen Lösungen
- weisen über sich hinaus auf allgemeine mathematische Begriffe
- tragen alle bereichsspezifischen Grundvorstellungen des zu erarbeitenden Gebietes in sich
- spiegeln die Interessen und Kernideen der Lehrperson bzgl. der jeweiligen Wissensdomäne wider

Beispiele für intentionale Probleme zur Integralrechnung sind die Fragestellungen 'Welchen Einfluss hat die TV-Übertragung eines Fußballspiels auf den Wasserverbrauch einer Stadt?' in der Unterrichtseinheit *Einführung in die Integralrechnung* (S. 131) und 'Wie wird die Fläche und damit der Verkaufswert eines an ein Gewässer grenzenden Grundstücks berechnet?' im Lernpfad *Integrale - forschend entdeckt* (S. 153). Weitere intentionale Probleme sind in [74] zu finden.

2.5.3 Bewertung

Im Hinblick auf die bekannten kognitiven Prozesse des Lernens[45] und das konstruktivistische Paradigma,[46] nach dem Wissen nur in einem aktiven Erkenntnisprozess konstruiert werden kann, ist selbstgesteuertes Lernen sehr wünschenswert.

Selbsttätigkeit darf jedoch nicht in unproduktiven Aktionismus abgleiten. Die hohe Geschwindigkeit, mit der Computer Rückmeldungen auf Fragen geben können, birgt auch die Gefahr eines 'Versuch und Irrtum' - Verfahrens. Selbstgesteuertes Lernen kann nur

[45] vgl. Kognitive Prozesse und e-Learning, S. 98
[46] vgl. Konstruktivismus, S. 93

dann zum Erfolg führen, wenn es in einen gut strukturierten Unterricht eingebettet ist. Die Erarbeitung eines verankerten Vorverständnisses, prototypische Beispiele und ein roter Faden sind wichtige Begleitmaßnahmen.

Es hat sich gezeigt, dass e-Learning Kurse, die selbstgesteuertes Lernen ermöglichen, bei Lernenden sehr beliebt sind.[47] Das *Selbststeuerungsprinzip* der modernen e-Learning Forschung besagt jedoch auch, dass selbstgesteuertes Lernen vor allem Lernenden mit Vorwissen und guten metakognitiven Fähigkeiten[48] entgegen kommt.

Eine ausschließliche Fixierung auf selbsttätiges und entdeckendes Lernen in der Schule wäre ineffektiv, da es viel Zeit und strukuriertes Vorwissen erfordert.[49] Ein völliger Verzicht auf rezeptives Lernen ist daher nicht sinnvoll. Insgesamt ist jedoch eine stärkere Betonung schülerorientierter und aktivitätsfördernder Methoden im Mathematikunterricht wünschenswert. Neue Technologien wie GeoGebra helfen dabei.

2.6 Funktionales Denken

Das Konzept der *funktionalen Abhängigkeit* ist eine fundamentale Idee der Mathematik (vgl. [121]). Im Wesentlichen geht es darum, wie sich die Änderungen einer Größe auf eine abhängige Größe auswirken. Diese Idee tritt sowohl in der Geometrie, etwa bei geometrischen Abbildungen, als auch bei den reellwertigen Funktionen in der Analysis auf. Auch das mathematische Modell von GeoGebra beruht auf dynamischen funktionalen Abhängigkeiten: wird ein freies Objekt verändert, so ändern sich auch alle davon abhängigen Objekte. In diesem Abschnitt soll daher auf einige Möglichkeiten eingegangen werden, wie mit GeoGebra *funktionales Denken* gefördert werden kann.

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist. [128, S. 6]

Der Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten wiederum ist typisch für die Mathematik. In den Reformvorschlägen von Meran (vgl. [95]) hoben Klein und Gutzmer bereits 1908 erstmals die „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ als besondere Aufgabe hervor (vgl. [46]). Nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Geometrie sollte das funktionale Denken „durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lageänderungen im einzelnen erleidet.“ GeoGebra ermöglicht eine Förderung des funktionalen Denkens in beiden Bereichen mit Hilfe dynamischer Geometrie und dynamischer Funktionen.

[47] vgl. Selbststeuerungsprinzip, S. 106
[48] vgl. Metakognition, S. 92
[49] vgl. Kritisches zum entdeckenden Lernen in [43, S. 61ff]

Für Kautschitsch (vgl. [84]) hat das funktionale Denken mittels Graphen und Tabellen auch eine heuristische Funktion für das Entdecken von Invarianten, welche wiederum auch nützlich für das formelmäßige Beschreiben von Zusammenhängen sind. Neben der raschen Erzeugung von Bildern und Zahlen sieht er in diesem Zusammenhang insbesondere zwei Vorteile des Einsatzes neuer Technologien:

> Computerunstütztes funktional-kinematisches Denken ...
>
> - hat eine verbindende und einsichtfördernde Funktion.
> - erzeugt eine Gesamtschau eines Vorganges und entlastet dadurch das Gedächtnis.

2.6.1 Dynamische Geometrie

Der Zugmodus dynamischer Geometrie Systeme eignet sich hervorragend für die Untersuchung von Abhängigkeiten und invarianten Eigenschaften geometrischer Konstruktionen.

> Eine entscheidene Rolle kommt [...] dem funktionalen Denken zu, das durch DGS sich nicht nur auf einem Denken in und mit Funktionen beschränken muss, sondern infolge der möglichen Beweglichkeit von Figuren auch auf ein Denken mit Veränderungen von Bildern und Mustern erweitert werden kann und soll. [85, S. 115]

GeoGebra bietet neben den üblichen Konstruktionswerkzeugen die Möglichkeit, auch Bilder und Fotos gemäß den geometrischen Abbildungen zu verschieben, zu drehen, zu spiegeln oder zu strecken. Eine Besonderheit stellt zudem das interaktive Konstruktionsprotokoll dar, welches anhand des folgenden einfachen Beispiels vorgestellt werden soll.

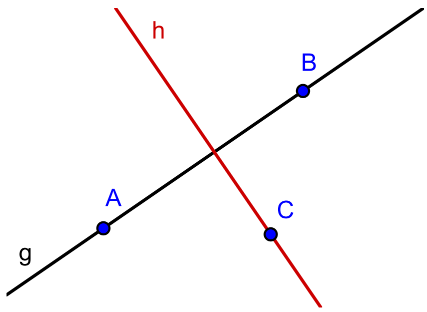


Abbildung 2.4: Gerade h senkrecht zu g durch C

Zu einer Geraden g durch die Punkte A und B wird die Senkrechte h durch einen weiteren Punkt C konstruiert (siehe Abbildung 2.4). Die Abhängigkeiten der Objekte dieser

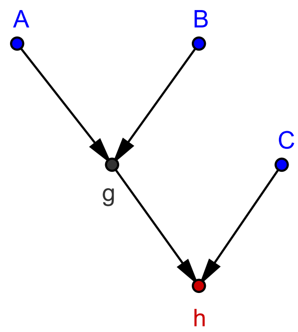


Abbildung 2.5: Abhängigkeitsgraph der Konstruktion aus Abbildung 2.4

Nr.	Name	Definition
1	Punkt A	
2	Punkt B	
3	Gerade g	Gerade durch A, B
4	Punkt C	
5	Gerade h	Gerade durch C senkrecht zu g

Abbildung 2.6: Konstruktionsprotkoll der Konstruktion aus Abbildung 2.4

Konstruktion lassen sich in einem gerichteten Abhängigkeitsgraphen darstellen (siehe Abbildung 2.5). Die Punkte A, B und C sind dabei freie Objekte, da sie keine eingehenden Kanten haben. Die Gerade g ist von A und B abhängig, die Senkrechte h von g und C.

Zusätzlich zu diesem Abhängigkeitsgraphen speichert GeoGebra auch die Konstruktionsreihenfolge, die durch den Graphen allein nicht eindeutig festgelegt ist. Diese Reihenfolge lässt sich im *Konstruktionsprotokoll* von GeoGebra als Tabelle anzeigen (siehe Abbildung 2.6). Mit den Pfeiltasten im unteren Teil des Fensters kann eine Konstruktion schrittweise wiederholt und 'durchgeblättert' werden. Diese Navigationsleiste lässt sich auch am unteren Rand des Geometriefensters einblenden, um die Konstruktionsschritte nochmals ablaufen zu lassen. Außerdem ist es so möglich, an jeder beliebigen Stelle der Konstruktion neue Objekte nachträglich einzufügen.

In Bezug auf das funktionale Denken ist die Interaktivität des Konstruktionsprotokolls interessant: durch Ziehen einer Zeile mit der Maus lässt sich nämlich die Konstruktionsreihenfolge verändern. So ist es im Beispiel möglich, den Punkt C in der vierten Zeile zum dritten Konstruktionsschritt zu machen, wodurch die Gerade g um eine Position nach unten rutscht. Wird hingegen versucht, die Gerade h nach oben zu ziehen, verändert sich der Mauszeiger zu einem Verbotsschild, um zu symbolisieren, dass dies nicht möglich ist. Die Frage nach dem *Warum* drängt sich auf und führt in natürlich Weise zu einer Diskussion über funktionale Zusammenhänge. Die implizit in dieser Konstruktion festgelegten funktionale Abhängigkeiten werden so zum Thema im Unterricht. Die Veränderung der Reihenfolge der Konstruktionsschritte erlaubt auch verschiedene Lösungsvarianten und ermöglicht eine Hinführung zum algorithmischen Denken.

> Nach den Überlegungen zur Optimierung ist die Aufstellung und Ausführung von Herstellvorschriften die nächste wesentliche Konstituente im operativen Begriffsbildungsprozeß. Hier befindt sich eine vortheoretische Basis für die Idee des Algorithmus [...]. [10]

Mit der Funktion *Umdefinieren* von GeoGebra können die funktionalen Zusammenhänge einer Konstruktion aufgebrochen und verändert werden. In der obigen Konstruktion könnte beispielsweise die Gerade g von `g = Gerade[A, B]` in `g = Gerade[A, C]` umdefiniert werden. Dabei verändert GeoGebra automatisch die Reihenfolge der Schritte im Konstruktionsprotokoll, falls C in der Tabelle unterhalb von g steht. Der Versuch, die Gerade g in `g = Senkrechte[A, h]` umzudefinieren, schlägt hingegen mit dem Hinweis „Zirkeldefinition“ fehl. Auf diese Art lässt sich funktionales Denken auch im Bereich der Geometrie an vielfältigen Beispielen fördern.

2.6.2 Dynamische Funktionen

Bei der Betrachtung von Funktionen in einer Variablen der Form $f : x \mapsto f(x)$ unterscheidet Malle zwei Aspekte (vgl. [102]):

Zuordnung: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.

Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Während die Funktion beim Zuordnungsaspekt lokal betrachtet wird, macht der Kovariationsaspekt eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig. Beide Aspekte sind auch bei unterschiedlichen Darstellungen praktisch immer präsent. Eine Wertetabelle lässt sich zeilenweise (Zuordnungsaspekt) oder spaltenweise (Kovariationsaspekt) lesen. Am Graphen einer Funktion kann ein bestimmer Funktionswert abgelesen werden (Zuordnungsaspekt), andererseits ist auch erkennbar, wie sich der Funktionswert verändert, wenn sich das Argument verändert (Kovariationsaspekt). Beispiele für konkrete Fragen zu beiden Aspekten sind (vgl. [102, S. 9]):

Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:

- Welches $f(x)$ gehört zu einem bestimmten x?
- Welches x gehört zu einem bestimmten $f(x)$?

Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:

- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x wächst?
- Wie muss sich x ändern, damit $f(x)$ fällt?
- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x verdoppelt wird?
- Wie muss x geändert werden, damit sich $f(x)$ verdreifacht?
- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?
- Wie muss x geändert werden, damit $f(x)$ um 2 erniedrigt wird?

GeoGebra bietet mehrere Möglichkeiten, um beiden Aspekten gerecht zu werden. Funktionsplotter und Computeralgebra Systeme haben den didaktischen Nachteil, dass der Prozess der Entstehung eines Funktionsgraphen beim Plotten des Funktionsterms nicht ersichtlich wird. Einen Ausweg bieten hier Tabellenkalkulationsprogramme, mit denen einzelne Punkt einer Wertetabelle gezeichnet werden können. Allerdings ist dieser Weg relativ aufwändig.

Graph als Spur des Punktes $(x, f(x))$

Dynamische Geometrie Systeme bieten inzwischen in der Regel die Möglichkeit, Punkte über berechnete Koordinaten anzugeben. Dadurch kann einem konkreten x dynamisch ein Punkt $(x, f(x))$ zugeordnet werden. Abbildung 2.7 zeigt, wie der Zuordnungsaspekt auf diese Weise mit GeoGebra umgesetzt wurde, wobei der Graph der Funktion punktweise als Spur des Punktes $(x, f(x))$ entstanden ist. Um den Kovariationsaspekt zu betonen, kann der Punkt auch umgekehrt in dynamischer Abhängigkeit von $f(x)$ festgelegt werden.

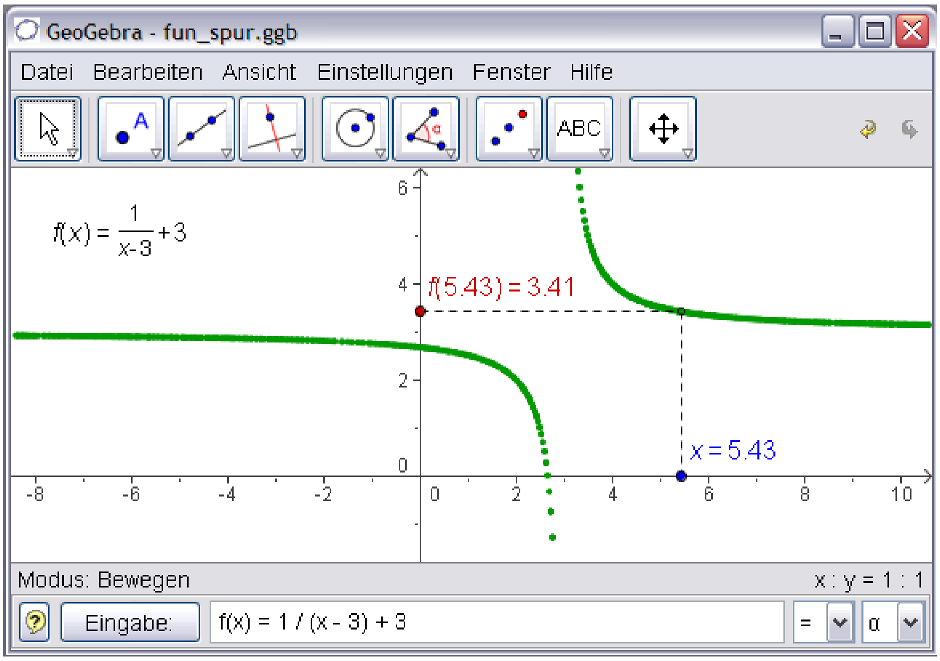


Abbildung 2.7: Graph einer Funktion als Spur des Punktes $(x, f(x))$

Punkt auf dem Graphen

Anders als klassische dynamische Geometrie Software wie *Cabri II* oder *Dynageo* unterstützt GeoGebra Funktionen der Form $f(x)$ als eigenständigen Objekttyp. Dadurch können Funktionsgraphen wie mit einem Funktionsplotter auf einen Schlag - ohne den aufwändigen Umweg über Ortslinien - dargestellt werden. Im Unterschied zu einem Computeralgebra System sind aber auch dynamische geometrische Konstruktionen nutzbar. Durch einfaches Anklicken des Funktionsgraphen wird ein Punkt darauf gesetzt (vgl. Abbildung 2.8). Die Koordinaten dieses Punktes werden dynamisch aktualisiert während er mit der Maus entlang des Graphen gezogen wird. Umgekehrt ist auch die direkte Angabe der x-Koordinate des Punktes möglich - seine y-Koordinate wird dabei automatisch ange-

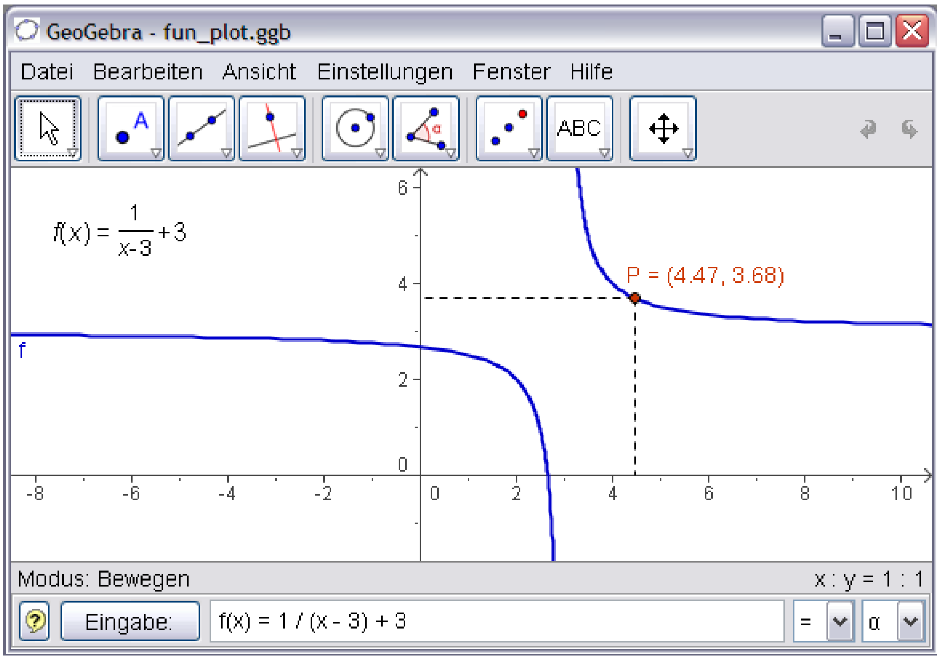


Abbildung 2.8: Punkt auf dem Graphen einer Funktion

passt. In Kombination mit einem Zugang über die Spur des Punktes $(x, f(x))$ kann auch hier die Entstehung des Graphen veranschaulicht werden.

Die Möglichkeit der direkten Eingabe von Funktionen gibt es übrigens auch in der dynamischen Geometrie Software *Geonext*. Anders als mit GeoGebra ist es dort jedoch nicht möglich, den Funktionsterm nachträglich zu verändern. Gerade dies ist aber bei der Untersuchung von Funktionen sehr häufig nötig.

Dynagraph

Dynagraph (vgl. [45]) ist eine dynamische Umsetzung der wenig genutzten Leiterdiagramm-Darstellung von Funktionen, die dem Kovariationsaspekt sehr entgegen kommt (vgl. [102]). Dabei wird ein Wertepaar von x und $f(x)$ auf zwei parallelen Zahlenstrahlen dargestellt. Ein Dynagraph kann mit dynamischen Geometrie Systemen sehr schön umgesetzt werden, indem die Veränderung von x im Zugmodus eine Veränderung von $f(x)$ bewirkt. Zusätzlich kann auch die Spur von $f(x)$ betrachtet werden (vgl. Abbildung 2.9).

> Dabei entsteht im Zugmodes schnell und besonders eindrucksvoll ein Gefühl für Monotonie, Linearität, Extrema, Polstellen und Periodizität, für qualitative Eigenschaften. [32]

Auf der GeoGebra Homepage (www.geogebra.at) steht unter „Beispiele“ eine interaktive Version eines Dynagraphen zur Verfügung.

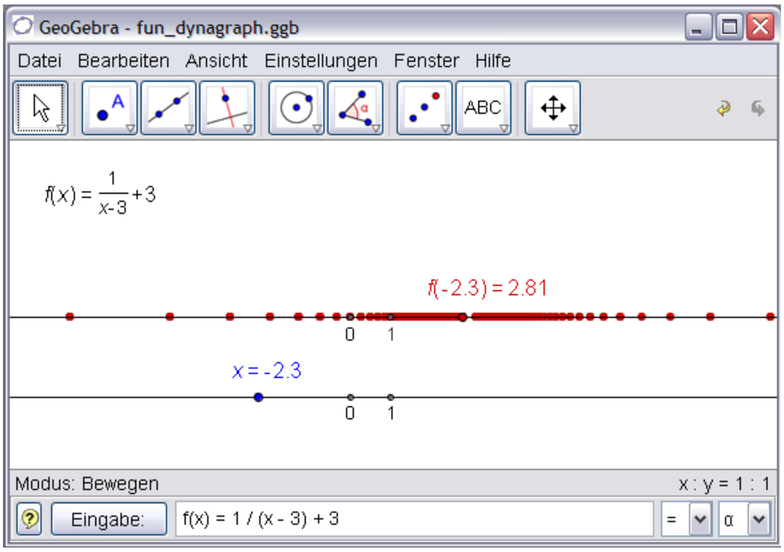


Abbildung 2.9: Dynagraph

Funktionstypen

> Der Computer kann ohne Zweifel helfen, Eigenschaften von Funktionstypen zu entdecken und zentrale Grundvorstellungen auszubilden. Vor allem ist es mit seiner Hilfe leicht möglich, die Parameter zu variieren und dabei zu beobachten, wie sich der jeweilige Graph verändert. [101, S. 7]

Für die Untersuchung des Einflusses von Parametern in einem Funktionsterm auf den Verlauf des zugehörigen Funktionsgraphen ist GeoGebra ein ideales Werkzeug, da das Programm zwei Möglichkeiten verbindet:

- direkte Unterstützung von *Funktionen als eigener Objekttyp*
- im Grafikfenster integrierte *Schieberegler* zur Veränderung von Parametern

Inzwischen gibt es auch im Computeralgebra System *Derive 6* Schieberegler zur Veränderung von Zahlwerten. Leider sind diese aber nicht in das Grafikfenster integriert und die Qualität der Darstellung ist aufgrund des Ruckelns und der fehlenden Kantenglättung deutlich geringer als in GeoGebra. Für Paramteruntersuchungen an Funktionen bietet sich mit GeoGebra folgende Vorgangsweise an:

1. Beginn mit konkreten Parameterwerten für den untersuchten Funktionstyp

2. Einführung der Parameter als Schieberegler und Verallgemeinerung zum untersuchten Funktionstyp

3. gezielte Variation der Parameter

So kann beispielsweise der Einfluss der Parameter p und q auf die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ untersucht werden - etwa um einen Zusammenhang zwischen diesen Parametern und dem Scheitelpunkt (vgl. Abbildung 2.10) oder den Nullstellen der Funktion herzustellen. (1) Zunächst beginnt man mit konkreten Beispielen wie $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + x$, usw. Die Gleichung der Funktion kann im Algebrafenster dabei schnell und problemlos verändert werden. (2) Nachdem erste Vorstellungen über den Einfluss der Parameter gewonnen wurden, folgt die Verallgemeinerung der Funktion f. Dazu werden zwei Schieberegler für p und q erzeugt und die Funktion f in $f(x) = x^2 + px + q$ umdefiniert. (3) Die Parameter p und q können nun auf mehrere Arten verändert werden: im Grafikfenster mit Hilfe der Schieberegler und im Algebrafenster durch direkte Eingabe eines Werts oder ebenfalls kontinuierlich mit Hilfe der Pfeiltasten. In dieser Phase ist es besonders wichtig, auf eine gezielte Vorgangsweise bei der Variation der Parameter zu achten. Dies kann etwa durch begleitende Fragestellungen auf einem Arbeitsblatt geschehen.

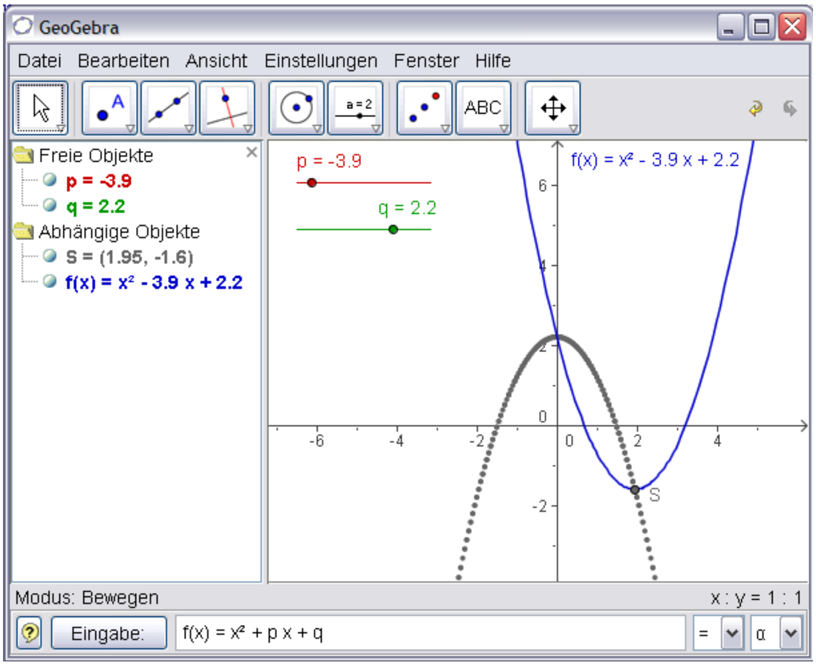


Abbildung 2.10: Einfluss des Parameters p auf den Scheitelpunkt von $f(x) = x^2 + px + q$

Solche dynamischen Parameteruntersuchungen eignen sich sehr gut für entdeckendes Lernen[50] und ermöglichen insbesondere den Blick auf Spezialfälle. Die statische Darstellung von Funktionenscharen als mehrere gleichzeitig gezeichnete Graphen hat den Nachteil, dass für Schüler nur schwer zu erkennen ist, welcher Parameterwert zu welchem Graphen gehört. Der große Vorteil von GeoGebra gegenüber anderen Programmen ist zudem die äußerst einfache Bedienbarkeit: Schüler können die oben angeführten Schritte mit minimalem Vorwissen selbsttätig durchführen. Dies fördert zum einen die Schüleraktivität und mindert zum anderen den Vorbereitungsaufwand für die Lehrkraft.

Umkehrfunktionen und -relationen

GeoGebra eignet sich auch sehr gut zur Einführung in das Thema *Umkehrfunktion* bzw. *Umkehrrelation*. In Abbildung 2.11 ist die Umkehrrelation zur Einheitsparabel zu sehen. Diese wurde in GeoGebra als Ortslinie konstruiert: der Punkt P auf dem Graphen von f wird an der Geraden $g : y = x$ zu P' gespiegelt. Der Graph der Umkehrrelation ergibt sich als Ortslinie von P' in Abhängigkeit von P.

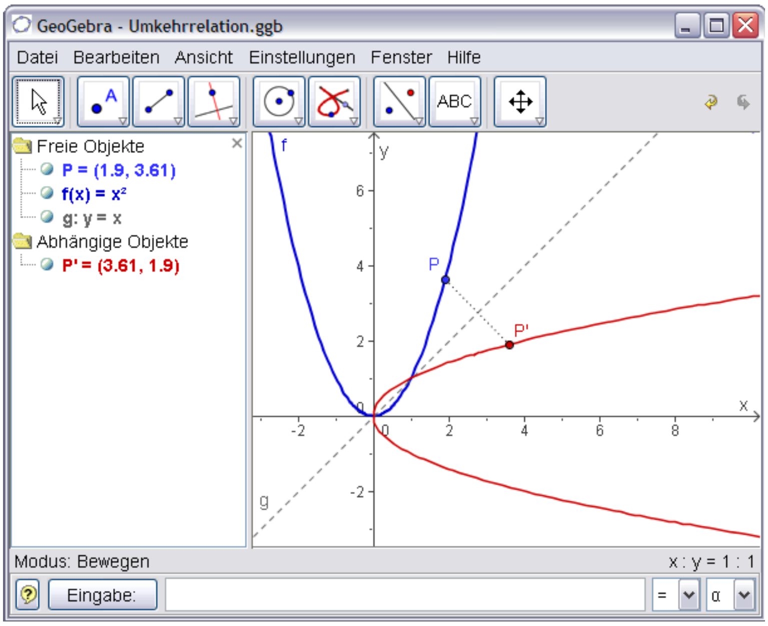


Abbildung 2.11: Umkehrrelation zu $f(x) = x^2$

Das Schöne an dieser Konstruktion ist ihre Allgemeinheit: der Funktionsterm von f kann beliebig verändert werden, um Umkehrrelationen anderer Funktionen zu untersuchen

[50] vgl. entdeckendes Lernen, S. 91

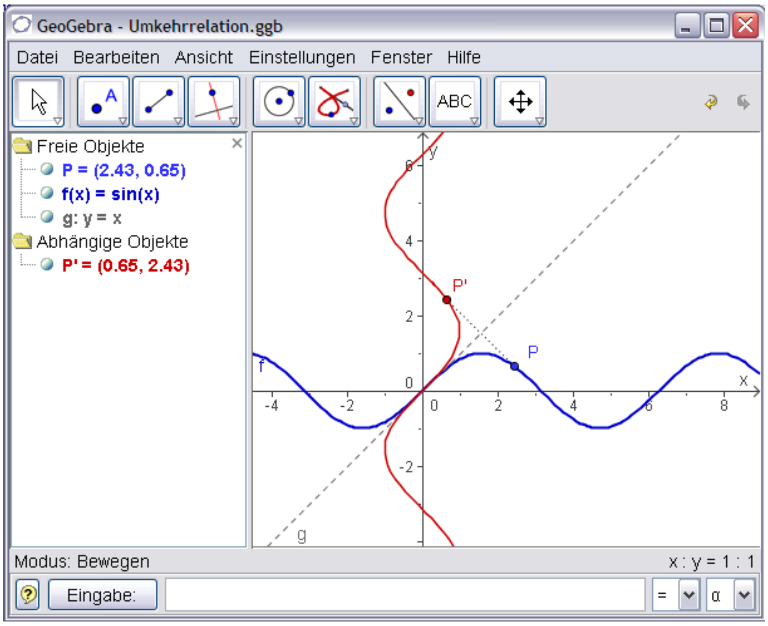


Abbildung 2.12: Umkehrrelation zu $f(x) = \sin(x)$

(siehe Abbildung 2.12). Durch Ziehen des Punktes P kann zudem jeweils der entsprechende Punkt P' auf der Umkehrfunktion beobachtet werden.

2.7 Vermuten und Begründen

Neue Technologien wie GeoGebra schaffen die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge experimentell zu entdecken.[51] Nach Kautschitsch ist unter *experimentell* dabei Folgendes zu verstehen (vgl. [85, S. 114f]):

- Betonung einer planmäßigen (gelenkten) Selbsttätigkeit mit Unterstützung durch Arbeitsblätter
- Bereitstellung von Erfahrungs-, Variations- und Umordnungsmöglichkeiten, sowie von Wiederholungsmöglichkeiten von Experimenten
- Einbeziehung von naturwissenschaftlichen Methoden (Messen, Rechnen, Erzeugen und Interpretationen von Abhängigkeitsgraphen, Rückführung auf bekannte Konstellationen)

Ähnlich einem empirisch arbeitenden Naturwissenschaftler können die Schüler so zu Vermutungen kommen, die mit Hilfe der neuen Werkzeuge auch sofort überprüft werden

[51] vgl. Entdeckendes Lernen, S. 91

können. Arbeitsblätter mit offenen Fragestellungen ermöglichen dabei ein strukturiertes Denken und Handeln.[52] Selbstverständlich ist eine auf diese Art und Weise induktiv gefundene Vermutung aus mathematischer Sicht noch keine Gewissheit. Bedarf es im Mathematikunterricht an dieser Stelle eines formalen Beweises, wenn die zu beweisende Aussage beispielsweise in einem dynamischen Geometrie System als Invariante *offensichtlich* ist?

In der mathematischen Fachwissenschaft geht es bei einem Beweis um das Klären von Zusammenhängen und vor allem um Erkenntnissicherung. Aus Sicht der Schüler ist es aber äußerst fraglich, ob ein formaler Beweis nach einer auf experimentellem Weg gefundenen Vermutung wirklich zu tieferem Verständnis führt. Sind also Beweise im Zeitalter der neuen Medien im Mathematikunterricht obsolet?

Nein, mit Sicherheit nicht. Allerdings sollte die Form des Beweisens mehr an den Schülern als an der Mathematik ausgerichtet werden. Für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge ist nämlich nicht der wahrheitssichernde Aspekt eines Beweises sondern der begründende Aspekt ausschlaggebend. So fordert etwa Hischer [53] eine neue Unterrichtskultur weg vom "Beweise, dass das ... gilt!" hin zum "Kannst du begründen, warum das gilt?"

> Der Computer als Instrument der Erkenntnisgewinnung macht somit das Beweisen keinesfalls überflüssig, kann diesem Prozess jedoch unterrichtsmethodisch und erkenntnistheoretisch eine andere Qualität verleihen. [53, S. 119]

Auch Kautschitsch geht von einem neuen Beweisverständnis im Zusammenhang mit neuen Medien aus und bringt dies auf folgende Formeln (vgl. [85, S. 120f]):

Vermuten = Finden von invarianten Eigenschaften
Beweisen = Finden von stets durchführbaren Handlungen

Beim Einsatz neuer Technologien bleiben das Erklären der Zusammenhänge und das *Warum* im Mittelpunkt. Diese Werkzeuge bieten neue Wege, solche Erklärungen auch enaktiv (handelnd) und ikonisch (bildunterstützt) zu geben. Dadurch wird ein visuelles, aber dennoch vollgültiges Beweisen ermöglicht (vgl. [29]). GeoGebra lässt sich auf diese Weise nicht nur für die Phase des Vermutens, sondern insbesondere auch für das enaktiv-ikonische Begründen einsetzen. Der Vorteil im Vergleich zum streng formalen Beweis liegt darin, dass das Augenmerk auf einem anschaulichen Verständnis von Zusammenhängen und nicht bei symbolischen Formulierungen liegt.

Dies ist auch aus kognitiven Gründen sinnvoll:[53] Schüler haben im Unterschied zum Lehrer nur wenig Übung und Erfahrung im Umgang mit symbolischen Beweisen. Es ist daher für Schüler ungleich schwieriger, ungewohnte und komplexe symbolische Formulierungen

[52] vgl. dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra, S. 137
[53] vgl. Kognitive Prozesse: cognitive overload, S. 98ff

zu verarbeiten als anschauliche Abbildungen. Das Multimedia Prinzip[54] belegt zudem, dass Lernen und damit auch Verstehen leichter fällt, wenn symbolische und ikonische Elemente kombiniert werden. Die zusätzliche interaktive Komponente dynamischer Werkzeuge wie GeoGebra fördert darüber hinaus die Lerneraktivität und Selbststeuerung.

Neue Werkzeuge geben Schülern also die Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge anschaulich und aktiv zu begründen. Sie bieten Wege, die Inhalte traditioneller symbolischer Beweise schülergerechter aufzubereiten und unterstützen Schüler bei der eigenständigen Begründung mathematischer Sätze.[55] Der österreichische AHS Oberstufenlehrplan (9. - 12. Schulstufe) fordert in diesem Zusammenhang ein *Lernen in Phasen* wie es auch dem Aufbauprinzip[56] enstpricht:

> Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret-anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren. [13, Didaktische Grundsätze]

Heugl, Klinger und Lechner [51] gehen mit Computeralgebra Systemen ebenfalls in mehreren Phasen vor: auf eine heuristische, experimentelle Phase folgen die exaktifizierende und schließlich die Anwendungsphase.

> Komplexe Rechenvorgänge, die oft von der eigentlichen Beweisidee nur ablenken, können vom CAS übernommen werden. Das CAS kann einzelne Beweisschritte ausführen, die der Schüler dann nur noch begründen muß. [51, S. 116]

Das ‘nur’ beim Begründen sollte an dieser Stelle allerdings weggelassen werden, da gerade dieses Begründen den wesentlichen und aktiven Part der Schüler in der exaktifizierenden Phase ausmacht. Im Zusammenhang mit dynamischen Geometrie Systemen spricht Elschenbroich vom *visuell-dynamischen Beweisen*. Ein visuell-dynamischer Beweis beinhaltet in der Figur sowohl die Aussage als auch die Begründung und ist in diesem Sinn ganzheitlich (vgl. [30]):

> *visuell:* anschaulich, auf eine Zeichnung bezogen
>
> *dynamisch:* keine einzelne, starre Zeichnung, sondern eine ideale Zeichnung, eine Figur, lebendig geworden durch den Zugmodus von DGS
>
> *Beweis:* eine nicht durch rationale Argumentationen zu erschütternde Antwort auf die Frage nach dem ‘Warum’

[54] vgl. Multimedia Prinzip, S. 101

[55] vgl. interaktiver Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung im Lernpfad *Einführung in die Integralrechnung* auf www.austromath.at/medienvielfalt

[56] vgl. Aufbauprinzip, S. 21

Beckmann [8] unterscheidet drei Stufen des Beweisens: (1) enaktiv/ikonisch, (2) ikonisch/deduktiv und (3) symbolisch/deduktiv. In empirischen Untersuchungen von Schülerbeweisen der Sekundarstufe I zeigte sich, dass Beweise vor allem auf den Stufen (1) und (3) versucht wurden, während Stufe (2) kaum vorkam. Die mit dynamischen Geometrie Systemen möglichen visuell-dynamischen Beweise können helfen, diese Lücke zu schließen. Allerdings ist dabei auf ein gezieltes Vorgehen durch konkrete Arbeitsaufträge, Protokolle und Dialoge sowie auf verbales Begründen der beobachteten Invarianten zu achten. Für den Einsatz im Unterricht bieten sich interaktive elektronische Arbeitsblätter[57] an.

Colette Laborde fasst eine Untersuchung zum Beweisen im Zusammenhang mit dem Einsatz der dynamischen Geometrie Software *Cabri* wie folgt zusammen:

> Without doubt the dynamic geometry environment fostered this interaction between construction and proof, between doing on the computer and justifying by means of theoretical arguments [...]. [97, S. 158]

Ob im Unterricht Beweisbedürftigkeit geweckt werden kann, hat aber nur zum Teil mit dem verwendeten Medium zu tun.

> Was eine schlüssige Begründung ist, wann ein Argument akzeptiert werden kann, hängt vom Kontext, von der Gruppe, ja offensichtlich sogar vom Werkzeug ab. Dieses Problem ist nicht allein auf die Computernutzung beschränkt. [100, S. 210f]

Neue Technologien bieten vielfältige Möglichkeiten im heuristisch, experimentellen Bereich und helfen teilweise auch bei symbolischen Umformungen. Am wichtigsten sind jedoch das Aufstellen von Vermutungen und das Entstehen neuer Fragen aus dem Forschungsprozess - beides kann durch gezielten Einsatz neuer Technologien gefördert werden. Die Erfahrungen aus dem Unterricht von Hefendehl-Hebeker und Hußmann belegen dies:

> Auf diese Weise erlebten die Schülerinnen und Schüler Beweisen und Argumentieren nicht als zähe Pflichtübung im Kampf mit Symbolen und deren richtiger Anordnung, sondern als ein durch Ineresse an der Problemsituation entfachtes Suchen nach Erklärungen. Dabei entwickelte sich ein ambitioniertes Streiten um die besten Argumente und ein Suchen nach geeigneten Mitteln, um diese zu erhärten. Es entfaltete sich eine genuine Beweisbedürftigkeit, die nur durch eine schlüssige Argumentation zu befriedigen ist. [49, S. 106]

[57] vgl. dynamische Arbeitsblätter von GeoGebra, S. 137

2.8 Lehrplanbezug

Der Einsatz grafikfähiger Taschenrechner und mathematischer Software ist zwar inzwischen nicht mehr nur eine Domäne weniger engagierter Lehrer, doch eine flächendeckende Verbreitung hängt ganz entscheidend von den Lehrplänen ab. Langsam halten neue Technologien auch hier Einzug, sei es direkt als Forderung oder indirekt in Anregungen. Im Folgenden werden die neuesten Lehrpläne für Gymnasien in Österreich und Bayern (vgl. [12], [13], [75]) unter besonderer Berücksichtung der Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra untersucht. In diesem Abschnitt werden Anmerkungen aus den Lehrplänen in Bezug auf didaktische Grundsätze und Bildungsziele angeführt, welche für eine Verwendung von GeoGebra im Unterricht sprechen.

2.8.1 Österreich

Im österreichischen Unterstufen-Lehrplan (5. – 8. Schulstufe) wird eine konstruktivisitsche Sicht des Lernens vertreten, die auch GeoGebra zu Grunde liegt:[58]

> Verständnisvolles Lernen ist ein individueller, aktiver und konstruktiver Prozess. Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren. [12, didaktische Grundsätze]

Der Unterricht soll handlungsorientiert sein und sich nicht auf das Erlernen von Verfahren und Fertigkeiten beschränken. Der Einsatz von neuen Technologien wird dabei in der österreichischen Unterstufe explizit gefordert:

> Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen. [12, didaktische Grundsätze]

Außerdem sollen Schüler praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können. Besonders die Verbindung dieser verschiedenen Darstellungsformen ist eine Stärke von GeoGebra.

Der österreichische Oberstufenlehrplan sieht *darstellend-interpretierendes Arbeiten* mit besonderer Betonung des Wechsels von Darstellungsformen sowie *experimentell-heuristisches Arbeiten* als zentrale Bildungs- und Lehraufgaben:

[58]vgl. Konstruktivismus, S. 93, und Die Rolle von GeoGebra, S. 108

> Experimentell-heuristisches Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten. [13, Bildungs- und Lehraufgabe]

Auch in der Oberstufe wird die Verwendung neuer Medien ganz konkret eingefordert:

> Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. [13, Didaktische Grundsätze]

GeoGebra verbindet Möglichkeiten der dynamischen Geometrie mit jenen der Computeralgebra in einem Programm. Beim Lernen mit technologischer Unterstützung wird übrigens zwischen einer minimalen und einer maximalen Realisierung unterschieden. Die minimale Realisierung sieht das Kennenlernen und die gelegentliche Nutzung dieser Technologien vor, während in der maximalen Realisierung der sinnvolle Einsatz neuer Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts ist.

2.8.2 Bayern

Auch der bayerische Gymnasiallehrplan nennt Methodenvielfalt und die Förderung selbstständigen Arbeitens in einem Atemzug mit der sinnvollen Verwendung von Rechnern im Unterricht und bei der häuslichen Arbeit (vgl. [75, M 7]). Im Zusammenhang mit der Figurengeometrie wird die Verwendung von dynamischen Geometriesystemen explizit gefordert:

> Um geometrische Zusammenhänge auch experimentell zu erschließen, nutzen die Schüler dynamische Geometriesoftware als interaktives Werkzeug und knüpfen dabei an die aus Natur und Technik (Schwerpunkt Informatik) bekannte objektorientierte Sichtweise an. [75, M 7.5]

Als wesentliches Ziel wird an dieser Stelle außerdem die Fähigkeit genannt, Konstruktionsabläufe zu planen und zu dokumentieren. GeoGebra bietet hierzu mit seinem interaktiven Konstruktionsprotokoll (vgl. S. 286) passende Möglichkeiten. Laut bayerischem Lehrplan der 8., 9. und 10. Schulstufe unterstützt der Einsatz von Funktionsplottern die Schüler beim Aufbau des Verständnisses funktionaler Zusammenhänge (vgl. [75, M 8.1.2, M 9.2, M 10.2]). GeoGebra bietet diese Funktionalität und erlaubt die dynamische Variation von Parametern in Funktionsgleichungen und -graphen, etwa zur Untersuchung einer quadratischen Funktion:[59]

> Bei paralleler Betrachtung von Funktionsgraph und entsprechender Gleichung entwickeln sie [Anm.: die Schüler] Verständnis dafür, wie sich die Änderung von Koeffizienten eines quadratischen Funktionsterms auf Form und Lage der zugehörigen Parabel, auf deren Achsenpunkte und damit auf die Lösungen der entsprechenden Gleichungen auswirkt. [75, M 9.2.1]

2.8.3 Lerninhalte

Die ersten Versionen von GeoGebra waren vor allem zur Behandlung der Elementargeometrie und analytischen Geometrie prädestiniert. Mit der Hinzunahme von Funktionen (samt Nullstellen, Ableitungen und Integralen) ab GeoGebra 2.0 wurden die Anwendungsmöglichkeiten der Software enorm erweitert. Das Werkzeug ist damit von der 5. bis zur 12. Schulstufe einsetzbar und deckt weite Teile der gymnasialen Lehrpläne ab.

Auf eine detaillierte Auflistung von Lerninhalten, die mit GeoGebra behandelt werden können, wird hier aus Platzgründen verzichtet. Konkrete Anwendungsmöglichkeiten von GeoGebra bilden jedoch einen wichtigen Teil dieser Arbeit und werden in den Artikeln des 3. Kapitels (ab S. 53) und vor allem im Teil II *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* (ab S. 115) vorgestellt.

[59]vgl. Funktionstypen, S. 43

Kapitel 3

Mathematikdidaktische Publikationen

3.1 Überblick

Dieses Kapitel umfasst bereits veröffentlichte Publikationen über GeoGebra in chronologischer Reihenfolge ihres Enstehens. In den hier zu findenden Artikeln wurden lediglich die Literaturangaben verändert, die nun auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit verweisen. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über den Inhalt der einzelnen Artikel gegeben.

3.2 GeoGebra - dynamische Geometrie und Algebra (S. 55)

Dieser Artikel entstand auf Einladung von Prof. Heinz Schumann [115, 116, 117, 118] und erschien im Heft 4/2003 in *Der Mathematikunterricht* (siehe [55]).

Nach einer kurzen Besprechung von dynamischen Geometrie Systemen und Computeralgebra Systemen werden einige Besonderheiten von GeoGebra im Bereich der analytischen Geometrie vorgestellt. Vier konkrete Beispiele zeigen Möglichkeiten für geometrische und algebraische Experimente mit der Software. Dabei geht es um die Themen 'Kreis-Gerade', 'Streckenteilung mittels Vektoren', 'Gleichungen von Kegelschnitten und Geraden' sowie 'Parameteruntersuchung am Beispiel der Gleichung $ax^2 + by^2 = c$'.

3.3 Combination of dynamic geometry, algebra and calculus (S. 64)

Hierbei handelt es sich um einen Beitrag in Englisch, der im Juli 2004 zusammen mit Karl Fuchs für den Tagungsband der Konferenz *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching* in Pecs, Ungarn enstanden ist. Der Tagungsband wurde 2005 veröffentlicht (siehe [41]).

Es wird zunächst kurz auf die Enstehung der Idee zu GeoGebra eingegangen: der Taschencomputer TI-92 mit seinen integrierten DGS und CAS Programmen weckte den Wunsch nach einer engeren Verbindung dieser beiden Softwaretypen. Anschließend werden einige Besonderheiten von GeoGebra beschrieben, darunter insbesondere das Konstruktionsprotokoll. Schließlich wird auf vier Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra im Unterricht eingegangen: Demonstration und Visualisierung, Konstruktionswerkzeug, experimentelles Entdecken von Mathematik und Erzeugung von Lernmaterialien. Den Abschluss bildet ein Ausblick auf zukünftige Weiterentwicklungen der Software.

3.4 Dynamische Mathematik mit GeoGebra (S. 70)

Diese Veröffentlichung erschien in der Zeitschrift *Praxis der Mathematik* im Heft 6/2004 und richtet sich direkt an Lehrer (siehe [58]).

GeoGebra wird einerseits als Werkzeug für selbstgesteuertes, individuelles und entdeckendes Lernen und andererseits als Präsentationswerkzeug vorgestellt. Konkreten Hinweisen zum Einsatz im Unterricht folgen vier Beispiele für Arbeitsaufträge mit offenen Fragestellungen zu den Themen ‘Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten’, ‘Kreisgleichung’, ‘Tangenten an einen Kreis’ sowie ‘Ableitung und Tangente einer Funktion’.

3.5 Bidirektionale Verbindung von dynamischer Geometrie und Algebra (S. 78)

Hierbei handelt es sich um einen Beitrag im Tagungsband des GDM Arbeitskreises für Mathematikunterricht und Informatik zur Herbsttagung 2004 in Soest. Der Tagungsband ist 2005 erschienen (siehe [62]). Eine leicht veränderte Version dieses Artikels wurde auch im *Computeralgebra-Rundrief* 2/2004 veröffentlicht (siehe [59]).

Zunächst werden charakteristische Eigenschaften von DGS bzw. CAS genannt. Danach wird erklärt, was unter einer bidirektionalen Verbindung dieser beiden Softwaretypen zu verstehen ist, warum diese didaktisch sinnvoll erscheint und wie sie in GeoGebra realisiert wurde. Hierbei wird auf ausgewählte Grundobjekte, Operationen und Konsequenzen durch die Bidirektionalität für GeoGebra eingegangen. Als neue Möglichkeiten werden neben der analytischen Geometrie auch die dynamische Analysis anhand von Beispielen beschrieben.

3.2 GeoGebra – dynamische Geometrie und Algebra

Markus Hohenwarter
In: Der Mathematikunterricht 4/2003, S. 33-40

Dynamische Geometrie-Systeme

Die synthetische Elementargeometrie der Ebene lässt sich mit Computerwerkzeugen, den so genannten dynamischen Geometrie-Systemen (DGS), sehr anschaulich und effektiv betreiben (vgl. [115], [123], [124]). Beispiele für solche Systeme sind „Cabri géomètre II+“[1], „Cinderella“[2], „DynaGeo“[3], „The Geometer‘s Sketchpad“[4], „Geonext“[5] und „Zirkel und Lineal“[6].

In diesen Werkzeugen können mittels Maus geometrische Figuren konstruiert und dynamisch verändert werden. Dabei bleiben die Lagebeziehungen der geometrischen Objekte (z.B. „senkrecht“ oder „parallel“) erhalten. Als Objekte sind Punkte, Geraden, Kreise und meistens die Kegelschnitte und auch Funktionsgraphen erzeugbar.

Gewöhnlich ist in Dynamischen Geometrie-Systemen auch die analytische Betrachtung der Objekte möglich, indem Koordinaten oder Gleichungen bezüglich eines Koordinatensystems angezeigt werden können. Umgekehrt kann der Benutzer aber diese Koordinaten und Gleichungen nicht eingeben, um sie grafisch darzustellen und auch nicht direkt verändern, um die betreffende grafische Veränderung zu beobachten.

Computeralgebra-Systeme

Für die Behandlung der analytischen Geometrie bieten sich Computeralgebra-Systeme (CAS) an (vgl. [21], [37]). Prominente Vertreter sind Derive, Maple und Mathematica. In diesen Werkzeugen kann man die Koordinaten und Gleichungen der geometrischen Objekte (Punkte, Geraden, Kegelschnitte usw.) visualisieren, d.h. grafisch darstellen und die Auswirkung der Veränderung an den algebraischen Objekten an den betreffenden geometrischen Objekten beobachten. Diese grafischen Darstellungen, so genannte Plots, können leider nicht direkt mit der Maus verändert werden. Die Eingabe der algebraischen Objekte gestaltet sich jedoch nicht immer einfach, da die Syntax der Systeme oft nur wenig mit der Schulnotation gemeinsam hat.

Computeralgebrasysteme können unter anderem algebraische Gleichungssysteme lösen und so beispielsweise die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte ermitteln. Die Darstellung

[1] www.cabri.com
[2] www.cinderella.de
[3] www.dynageo.de
[4] www.keypress.com/sketchpad
[5] www.geonext.de
[6] http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann

impliziter Funktionen, etwa entsprechende Gleichungen von Geraden und Kegelschnitten, ist prinzipiell möglich.

Computeralgebrasysteme sind zwar sehr mächtige allgemeine Werkzeuge, die jedoch im Bereich der analytischen Geometrie keine direkte dynamische Variation zulassen.

GeoGebra

Es wäre vorteilhaft, ein Werkzeug zu haben, das synthetische und analytische Geometrie dynamisch miteinander verbindet. In [115] befindet sich ein erster Hinweis auf eine solche Kombination von DGS und CAS. Für Geraden und Ebenen wurde dies wohl erstmals in dem Werkzeug „3D-Geometer“ [87] durchgeführt. Diese Grundidee wird durch das im folgenden beschriebene Werkzeug „GeoGebra“ [54] (von *Geo*metrie und Al*gebra*) auf Kegelschnitte ausgedehnt und adäquat softwaretechnisch realisiert. Geometrie und Algebra treten „partnerschaftlich“ auf (vgl. [42]).

Einerseits ist GeoGebra ein dynamisches Geometrie-System. Direkt interaktiv können Punkte, Vektoren, Geraden und Kegelschnitte konstruiert und durch Ziehen dynamisch verändert werden. Neben Kreisen werden auch Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln und die uneigentlichen Kegelschnitte unterstützt. Die Konstruktionen von Polaren und Tangenten sind ebenfalls Grundfunktionen. Auf die geometrischen Konstruktionen in Geogebra gehen wir hier nicht näher ein, da sie im Prinzip wie in anderen DGS funktionieren. Andererseits kann man in GeoGebra algebraische Gleichungen und Koordinaten direkt eingeben. GeoGebra kennt implizite und explizite Geraden- und Kegelschnittsgleichungen, Parameterdarstellungen von Geraden sowie Polar- und kartesische Koordinaten von Punkten und Vektoren. Da mit Zahlen, Winkeln, Vektoren, Punkten, Geraden und Kegelschnitten gerechnet werden kann, funktioniert GeoGebra auch wie ein numerisches Computeralgebra-System.

Darüber hinaus bietet GeoGebra eine Vielzahl an geometrischen Befehlen: So liefern etwa die Befehle `Mittelpunkt[c]`, `Brennpunkt[c]` und `Scheitel[c]` den Mittelpunkt, die Brennpunkte und Scheitel eines Kegelschnitts c. Weitere Beispiele sind die Steigung, der Richtungsvektor und der Normalvektor einer Geraden g (`Steigung[g]`, `Richtung[g]`, `Normalvektor[g]`), die Hauptachsen und die Durchmessergerade eines Kegelschnitts (`Achsen[c]`, `Durchmesser[c]`), oder die Leitlinie und der Parameter einer Parabel (`Leitlinie[par]`, `Parameter[par]`).

GeoGebra ist in der plattformunabhängigen Programmiersprache *Java* geschrieben. Damit ist die Software problemlos unter Windows, Linux, MacOS X und Unix lauffähig. Außerdem ist es möglich Geogebra direkt über einen Internet Browser (z.B. Internet Explorer, Netscape) zu starten. (Es ist geplant, die Java WebStart Technologie zu verwenden. Dabei wird das Programm bei der ersten Benutzung lokal installiert, danach immer vom eigenen Rechner gestartet und neue Versionen automatisch aus dem Internet geholt. Dies ist besonders für die Verwendung in Schulen von Vorteil, da neue Versionen nicht extra auf jedem Rechner installiert werden müssen.)

GeoGebra basiert auf reeller projektiver und euklidischer Geometrie. Parser, Polynomvereinfachung und geometrische Algorithmen sind vom Autor selbst geschrieben und damit aus einem Guss. Um kontinuierliche Bewegungen zu erreichen und springende Objekte zu vermeiden, verwendet GeoGebra einen aufwändigen heuristischen Ansatz der Nähe-Beziehung [93, pp.163]. Die Möglichkeit der algebraischen Eingabe führt aber in natürlicher Weise zu nichtkontinuierlichem Verhalten.

GeoGebra ist das Ergebnis der Diplomarbeit des Autors, die bei Prof. Karl Fuchs am Institut für Didaktik der Naturwissenschaften der Universität Salzburg verfasst wurde. Das Programm wurde mit dem renommierten European Academic Software Award (EASA 2002, Ronneby, Schweden) ausgezeichnet. GeoGebra ist übrigens mehrsprachig und unterstützt momentan Englisch und Deutsch.

Beispiel 1: Kreis und Gerade

Bei der Entwicklung wurde großes Augenmerk auf die einfache Bedienbarkeit der Software gelegt, um bei Schülern die Lust am mathematischen Experimentieren zu wecken. Koordinaten und Gleichungen können daher sehr einfach in Schulnotation eingegeben werden.

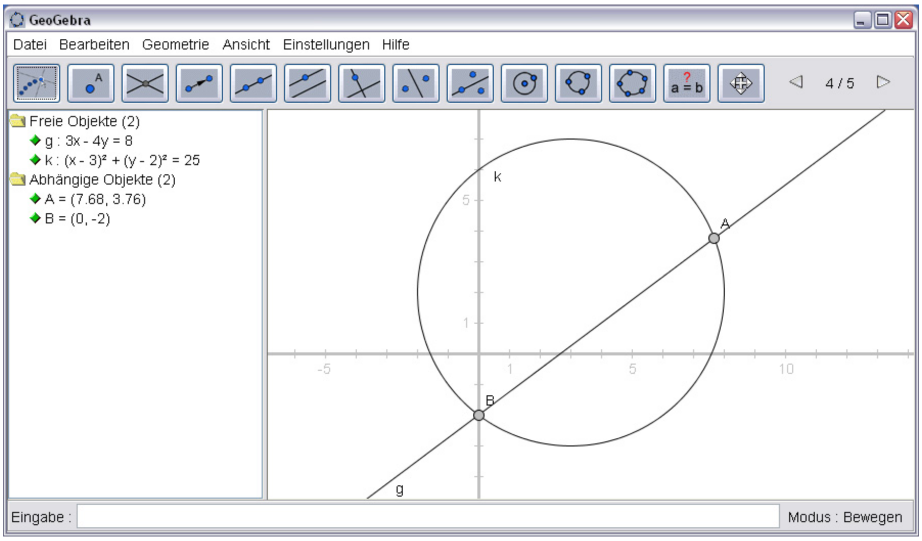


Abb. 1: Kreis und Gerade

Ein Beispiel dazu: Die Gerade g und der Kreis k sollen geschnitten werden. Ihre Gleichungen sind im Schulbuch als $g : 3x - 4y = 8$ und $k : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ angegeben — und genau so tippt man sie auch in die Eingabezeile von GeoGebra. Ein weiterer Klick genügt, um die Schnittpunkte zu ermitteln (Abb. 1).

Durch Klicken und Ziehen kann die Gerade anschließend mit der Maus verschoben und aus der Sekante eine Tangente oder Passante gemacht werden. Dabei verändern sich auch die Koordinaten der Schnittpunkte und die Gleichung der Geraden dynamisch. Es drängt sich die Frage auf, was sich denn da an der Geradengleichung ändert. GeoGebra erlaubt es uns, Gleichungen auf verschiedene Arten darzustellen (Abb. 2).

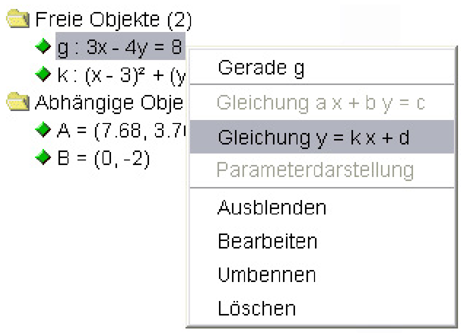


Abb. 2: Verschiedene Darstellungsarten von Gleichungen

So können wir von der impliziten zur expliziten Darstellung wechseln. In dieser erkennt man schnell, dass sich an der Gleichung $y = kx + d$ nur d, also der Abschnitt auf der y-Achse, ändert und die Steigung k gleich bleibt.

Diesem geometrischen Experiment könnte nun ein algebraisches folgen, indem die Schüler etwa die Steigung der Geraden durch direkte Veränderung ihrer Gleichung beeinflussen. Die geometrischen Auswirkungen der Änderung solcher Parameter zeigen sich sofort im Geometriefenster und ermöglichen einen spielerischen Zugang.

Beispiel 2: Streckenteilung und Parameterdarstellung

Dieses einfache Beispiel soll zeigen, wie man in GeoGebra mit Zahlen, Vektoren und Punkten rechnen kann. Eine Strecke AB sei im Verhältnis 7 : 3 zu teilen. Nach der Festlegung unserer Punkte `A = (-2, 1)` und `B = (3, 3)` gibt es zur Lösung dieser Aufgabe mehrere Möglichkeiten. Die direkteste ist `T = A + 7/10 (B - A)`. Wir könnten aber auch zunächst den Verbindungsvektor von A und B einführen, `v = Vektor[A, B]`, und dann `T = A + 7/10 v` berechnen.

Verallgemeinern wir nun die Aufgabe, indem wir das Teilungsverhältnis nicht mit 7/10 fix vorgeben, sondern eine Variable t dafür einführen, und fassen zusammen:

```
t = 0.7
v = Vektor[A, B]
T = A + t v
```

Durch Markieren von t im Algebrafenster und Gedrückthalten der `+` oder `-` Taste können wir die Werte von t schnell verändern und damit Animationen erzeugen. Der Punkt T wandert dabei auf einer Geraden durch A und B. Mit diesen Überlegungen kommt man unmittelbar zur Parameterdarstellung dieser Geraden (Abb. 3), deren Eingabe in GeoGebra denkbar einfach ist: $g : X = A + sv$.

Beim Ziehen von A oder B mit der Maus ändern sich der Teilungspunkt T, der Richtungsvektor v und die Gerade g dynamisch unter Beibehaltung der angegebenen Beziehungen.

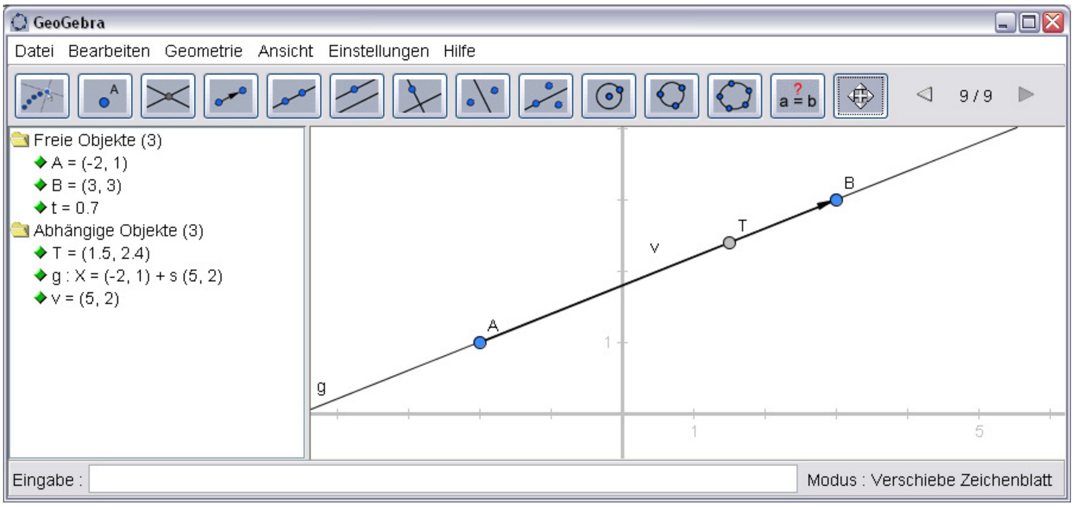


Abb. 3: Streckenteilung und Parameterdarstellung

Beispiel 3: Gleichungen von Kegelschnitten und Geraden

Jeder Kegelschnitt lässt sich durch eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ beschreiben. GeoGebra kann beliebige quadratische Polynome in x und y verarbeiten. Ob eine Ellipse als $9x^2 + 16y^2 = 144$, $x^2/16 + y^2/9 = 1$ oder $(3x)^2 = 144 - (4y)^2$ eingegeben wird, ist völlig unerheblich. Alle diese Eingaben werden intern durch symbolische Polynomvereinfachung auf die Normalform $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ gebracht. Danach wird der Kegelschnitt klassifiziert und als Ellipse erkannt.

Nicht jede quadratische Gleichung ist aber ein echter Kegelschnitt. Der vermeintliche Kegelschnitt $(x-3)^2 = x^2-6x-3y+12$ entpuppt sich nach Vereinfachung zur Normalform als die Gerade $y = 1$.

Dieses Erkennen von Kegelschnitten und Geraden unterscheidet GeoGebra wesentlich von Systemen, die Gleichungen oder Funktionen nur plotten können (z.B. Computeralgebrasysteme oder Geonext). GeoGebra weiß nämlich, um welches geometrische Objekt es sich bei einer Gleichung handelt. Damit ist dieses Objekt natürlich auch für alle geometrischen Befehle und Konstruktionen verwendbar, also etwa um die Tangenten an eine Ellipse zu erzeugen.

Beispiel 4: Die Gleichung $ax^2 + by^2 = c$

Besonders interessant ist die Untersuchung von Gleichungen mit veränderbaren Koeffizienten. Betrachten wir dazu folgende Aufgabe:

> Gegeben ist die Gleichung $ax^2 + by^2 = c$, wobei a, b, c reelle Zahlen sind. Gib Bedingungen für a, b und c an, sodass die Gleichung eine Ellipse mit horizontaler bzw. vertikaler Hauptachse (in 1. und 2. Hauptlage) beschreibt.

Anhand dieses Beispiels lassen sich die Experimentiermöglichkeiten mit GeoGebra sehr gut illustrieren. Ein Schüler, der die Ellipsengleichung in Hauptlage noch nicht kennt, wird diesem Beispiel zunächst ziemlich hoffnungslos gegenüber stehen. Mit Hilfe von GeoGebra kann er durch Ausprobieren ein Gefühl für die Koeffizienten bekommen. Dabei braucht er nur zu wissen, wie eine Ellipse in 1. und 2. Hauptlage aussehen soll, um zu entscheiden, welche Koeffizienten das gewünschte Resultat liefern. Aufgrund von Experimenten kann er zunächst Vermutungen anstellen und diese sofort grafisch überprüfen. Dadurch ist es leichter möglich, zu einer allgemeinen Aussage zu kommen.

Wie könnte so ein Experiment in GeoGebra aussehen? Legen wir zunächst irgendwelche Werte für die Koeffizienten a, b und c fest. Seien etwa $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$. Nun geben wir die zu untersuchende Gleichung $ax^2+by^2 = c$ ein. Es erscheint der Kreis $x^2+y^2 = 1$ am Bildschirm. Bei Bewegung des Mauszeigers über den Kreis oder seine Gleichung erhalten wir von GeoGebra die Auskunft, dass es sich tatsächlich um einen Kreis handelt. Nun verändern wir durch Eingabe von beispielsweise $b = 2$ einen der Koeffizienten und der Kreis wird zu einer Ellipse (Abb. 4). Durch Markieren eines Koeffizienten im Algebrafenster und Gedrückthalten der `+` oder `-` Taste können wir die Werte schnell verändern und damit Animationen erzeugen.

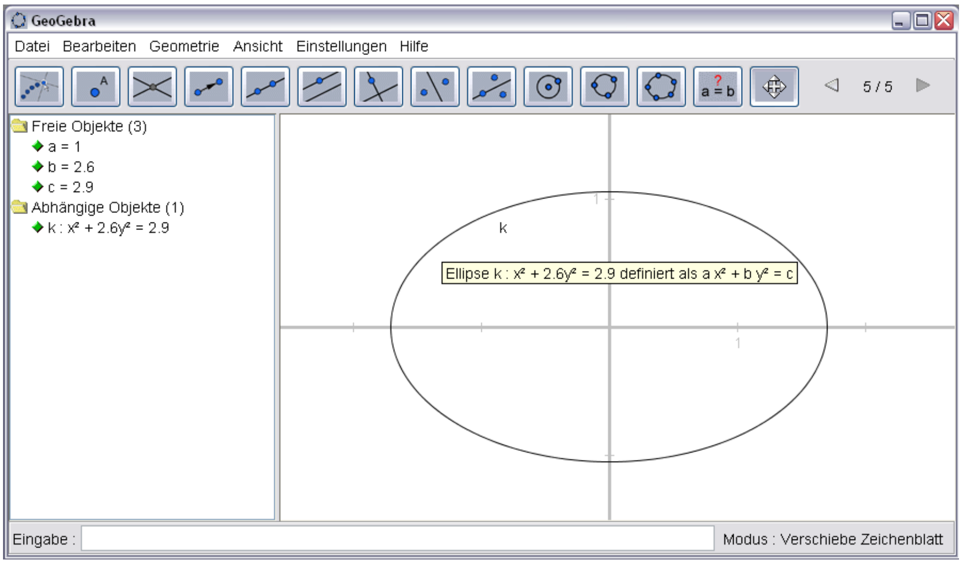


Abb. 4: Ellipse $x^2 + 2.6y^2 = 2.9$

Auf diese Art und Weise kann man eine Menge über diese einfache Gleichung herausfinden: Für $a, b, c > 0$ oder $a, b, c < 0$ erhält man Ellipsen. Die Ellipsen in erster Hauptlage haben $|a| < |b|$ und jene in zweiter Hauptlage $|a| > |b|$. Im Fall $a = b$ entstehen Kreise. Genauso könnte man sich nun fragen, wann Hyperbeln in erster und zweiter Hauptlage entstehen.

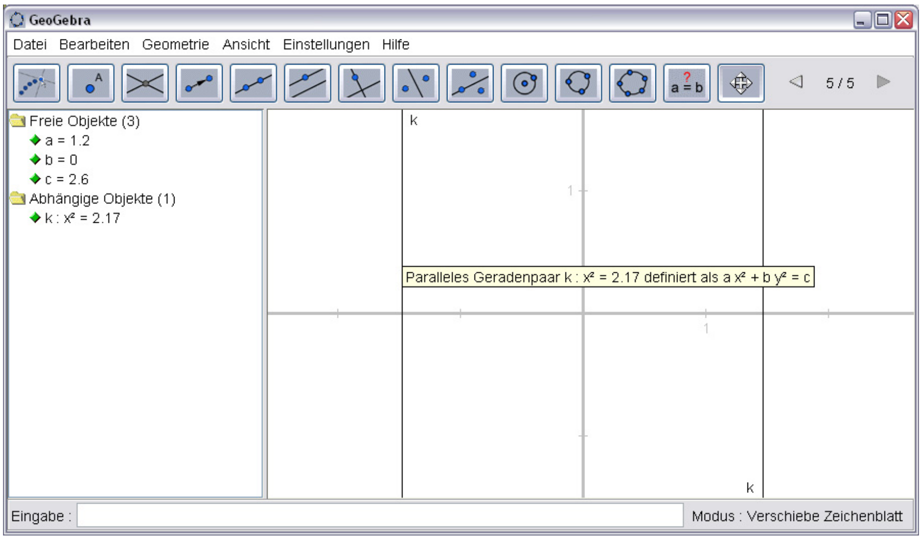


Abb. 5: Paralleles Geradenpaar $x^2 = 2.17$

In GeoGebra kommen die in der Schule eher vernachlässigten uneigentlichen Kegelschnitte natürlich und selbstverständlich ins Spiel. Für $a = 0$ und $b = 0$ entsteht jeweils ein paralleles Geradenpaar (Abb. 5).

Der Koeffizient c hängt mit der „Größe" des Kegelschnitts zusammen. Macht man ihn immer kleiner, so schrumpft eine Ellipse schließlich für $c = 0$ zu einem Punkt und aus einer Hyperbel wird ein schneidendes Geradenpaar (Abb. 6, vgl. [3]). Wenn neben $c = 0$ auch noch $a = 0$ oder $b = 0$ ist, dann erhält man die Doppelgerade $x^2 = 0$ bzw. $y^2 = 0$. In unserem einfachen Experiment kommen damit sämtliche uneigentlichen Kegelschnitte vor: Punkt, paralleles und schneidendes Geradenpaar sowie die Doppelgerade. Auch die leere Lösungsmenge der Gleichung, wenn c ein anderes Vorzeichen wie a und b hat, wird zum Thema.

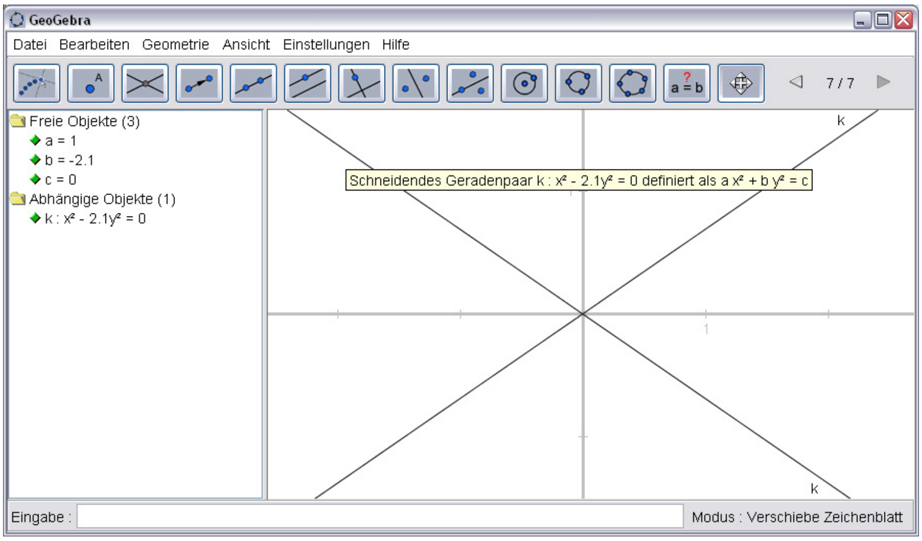


Abb. 6: Schneidendes Geradenpaar $x^2 - 2.1y^2 = 0$

Auf ähnliche Art und Weise können natürlich auch die Koeffizienten anderer Gleichungen untersucht werden, wie z.B.:

- implizite und explizite Geradengleichung: $ax + by = c$ und $y = kx + d$
- Kreisgleichung: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$
- Ellipsen- und Hyperbelgleichung in Hauptlage: $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$
- Parabelgleichungen $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$

Beispiel 5: Ortsliniendefinition der Parabel

Die eigentlichen Kegelschnitte lassen sich in GeoGebra auch über ihre Ortsliniendefinitionen angeben. Beispielsweise ist eine Parabel die Menge aller Punkte, welche vom Brennpunkt F und der Leitlinie l den gleichen Abstand haben.

Wir geben zunächst den Brennpunkt `F = (1, 0)` und die Leitlinie `l : y = -1` an. Nach Eingabe des Befehls `par = Parabel[F, l]` erscheint die Parabel $par : y^2 - 4x = 0$ am Bildschirm. Mit der Maus können wir den Brennpunkt F und die Leitlinie l verschieben und dabei die Veränderung der Parabel beobachten. Je näher der Brennpunkt der Leitlinie kommt, desto „schmaler" wird die Parabel. Kommt der Brennpunkt auf der Parabel zu liegen, wird die Parabel zu einer Doppelgeraden. Brennpunkt und Leitlinie lassen sich auch algebraisch durch Eingabe der Koordinaten bzw. Geradengleichung verändern.

Bei allen diesen Veränderungen beobachten wir die Gleichung der Parabel. Diese Gleichung können wir aber nicht verändern, da sie vom Brennpunkt und der Leitlinie abhängt. Es gibt aber eine einfache Möglichkeit, um auch mit dieser Gleichung zu experimentieren: man erstellt eine Kopie der Parabel, indem man sie einer neuen Variable zuweist: `par2 = par`. Die Parabel par2 können wir nun mit der Maus verschieben und ihre Gleichung direkt abändern. Durch solche Experimente lässt sich auch hier ein Gefühl für die Koeffizienten der Parabelgleichung bekommen (Abb. 7). GeoGebra bietet auch entsprechende Befehle für die Ortsliniendefinition von Ellipse und Hyperbel.

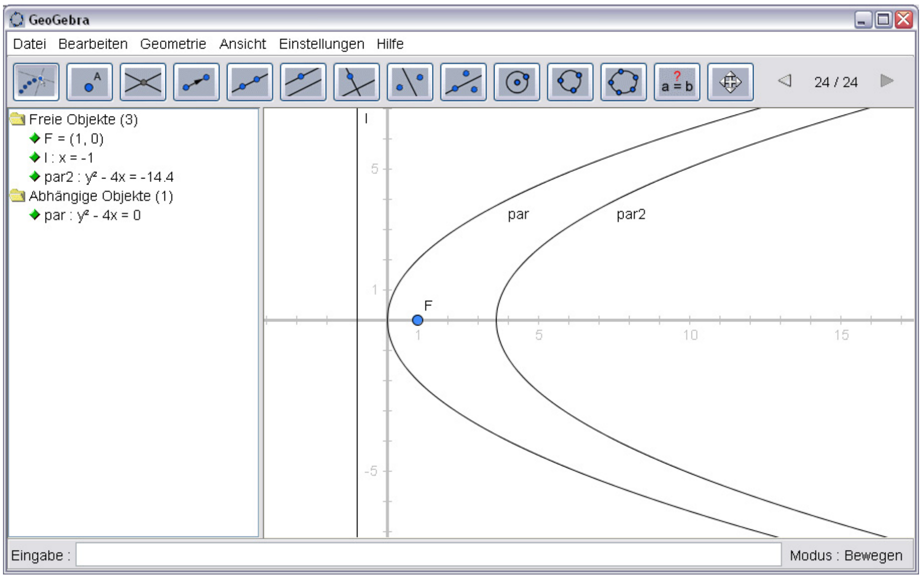


Abb. 7: Parabel par mit Brennpunkt F und Leitlinie l

Weiterentwicklung und Verfügbarkeit

Die Weiterentwicklung von GeoGebra ist im Rahmen eines Forschungsprojekts an der Universität Salzburg geplant. GeoGebra ist zur Zeit für jedermann frei verfügbar und kostenlos nutzbar. Weitere Informationen und die aktuelle Version von GeoGebra unter: http://www.geogebra.at.

3.3 Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra

Karl Fuchs and Markus Hohenwarter
In: Proceedings of Computer Algebra Systems and
Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching.
Pecs, Hungary, 2005, p. 128–133

Abstract. Dynamic geometry and computer algebra systems have highly influenced mathematics education. Unfortunately, these tools have been totally unconnected. *GeoGebra* is a new software system that integrates the possibilities of both Dynamic Geometry and Computer Algebra in one powerful tool for mathematics education.

Introduction

Dynamic geometry systems (DGS, see [115, 123, 124]) like *Cabri* or *Cinderella* and computer algebra systems (CAS, see [21, 37]), such as *Mathematica*, *Maple* or *Derive* have highly influenced mathematics education.

The teachers' training curriculum in mathematics at the University of Salzburg has been responsive to these developments. Algebra systems (mainly *Derive*, *TI-92* and *Mathematica*) and the dynamic geometry system *Cabri* have been introduced in special lectures.

On the basis of prototypical examples university students have been presented the benefits and possibilities of the different kinds of software [39]. The variation of parameters in the algebraic representation and the ensuing effects on the graphs have been investigated using computer algebra systems. But more and more it turned out that the abilities of students to generate prototypes of mathematical objects [25] necessitated the converse way too. This means studying the influence on the algebraic representation by dynamical manipulations of the geometric objects.

In 1997 Karl Fuchs gave a lecture on the use of the *TI-92* calculator in mathematics education at the University of Salzburg (see [71]). This calculator already offered both DGS and CAS but these two parts were completely separated programs. During this time, Markus Hohenwarter, one of Mr. Fuchs' students suggested a closer connection between visualisation capabilities of CAS and the dynamic changeability of DGS.

This wish for a bidirectional combination of dynamic geometry and computer algebra had already been stated before (see [115]).

> The three solution protocols [graphical, numerical, algebraic] should not be considered separate, but rather as constituting a holistic comprehensive computer-aided approach. [119, p. 324]
>
> There is a need for further software development to provide a single package combining the desired features. [119, p. 337]

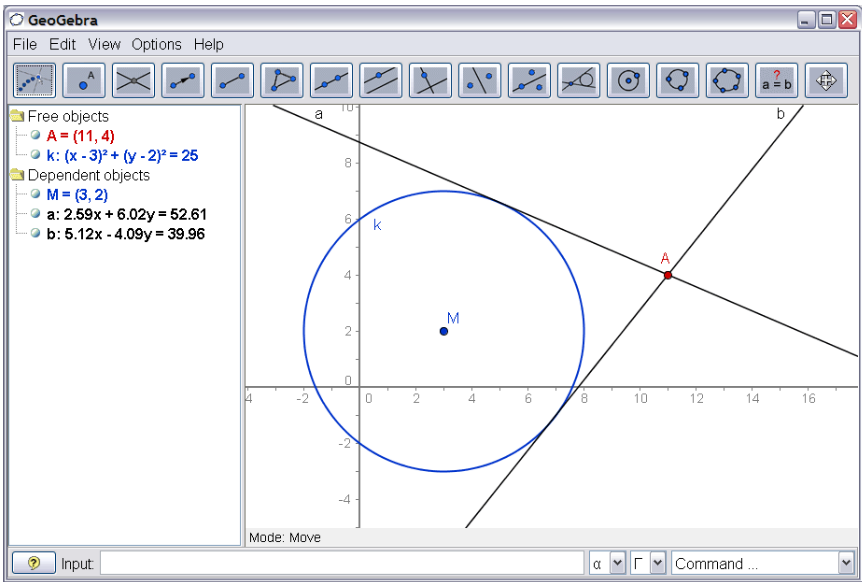
In 2001, Markus Hohenwarter began the work for his master's thesis *GeoGebra - a Software System for Dynamic Geometry and Algebra in the Plain*. The aim of this project was to develop a completely new kind of tool for mathematics education in secondary schools.

GeoGebra already received several international educational software awards: *European Academic Software Award 2002* (Ronneby, Sweden), *L@rnie Award 2003* (Vienna, Austria), *digita 2004* (Cologne, Germany) and *Comenius 2004* (Berlin, Germany).

What is GeoGebra?

GeoGebra is an interactive geometry software [54, 55] that also offers algebraic possibilities like entering equations directly. It is aimed at students (aged 10 to 18) and teachers in secondary schools.

The program encourages students to approach mathematics in an experimental way. For example, it is possible to investigate the parameters of a circle's equation by dragging the circle with the mouse. On the other hand, students may also manipulate the equation directly and see the changed circle in the geometry window.



Circle with tangents

The interactive construction protocol is indeed significant. Already Bender and Schreiber pointed out that the description of a geometric construction is the pretheoretical basis for the idea of an algorithm [10].

The construction protocol of *GeoGebra* makes it possible to redo constructions at any time, insert new elements and even change its order with hindsight. Whenever students are entering or deleting expressions they must be aware of functional dependencies [128].

What does GeoGebra offer?

The basic objects in *GeoGebra* are points, vectors, segments, polygons, straight lines, all conic sections and functions in x.

With *GeoGebra* dynamic constructions can be done like in any other dynamic geometry system. These constructions may be altered dynamically by dragging free objects. Furthermore, it is possible to enter coordinates of points or vectors, equations of lines, conic sections or functions and numbers or angles directly.

Hence, from the very beginning the software has been designed for the use in schools. The treatment of problems should not be affected by system-caused translations. Manipulations ought to be possible in a familiar way [18].

Big efforts have been made to allow input in school notation: For example a line g may be entered as $g : 3x + 4y = 7$ or a circle c as $c : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Also, calculations with geometric objects like points and vectors are feasible: The centroid of a triangle with vertices A, B and C might be entered as $S = (A + B + C)/3$.

Additionally, *GeoGebra* offers many powerful commands starting from the slope of a straight line up to differentiation and integration of functions.

GeoGebra is multilingual not only in its menus but also in its commands. For example, the English command *Intersect* becomes *Schneide* in German and *Intersección* in Spanish.

Applications in Schools

GeoGebra is a very versatile tool for mathematics education in secondary schools. In teaching mathematics it might be used in many different ways.

1. *GeoGebra* for demonstration and visualisation

   Even in traditional teaching, computer software has its status. In his discussion about the role of specific software Becker [7] mentions the aspect of specific software as a tool for demonstration and visualisation. In this sense, *GeoGebra* is a software with a wide coverage due to its different representations.

2. *GeoGebra* - a construction tool

   In 1990 Karl Fuchs [36] pointed out the importance of computer aided drawing/designing systems for teaching constructive geometry at the state of the art. Not substitution of traditional but integration of new methods was intended by him. The idea of 'computer utilisation' became fundamental. *GeoGebra* has all the abilities which are demanded from a suitable drawing/designing software [14].

3. *GeoGebra* and discovering mathematics

   Computers and mathematical software have provoked new basic questions on teaching mathematics. Students can organize knowledge on their own. For example, Artigue and Lagrange [1] are reporting on the positive influence of computer algebra systems on teaching mathematics. This experimental form is added to the traditional form of teacher concentrated education as described in item 1 above. *GeoGebra* can be used as an important tool for this challenge. It can help to create a suitable atmosphere for learning (compare with [113]).

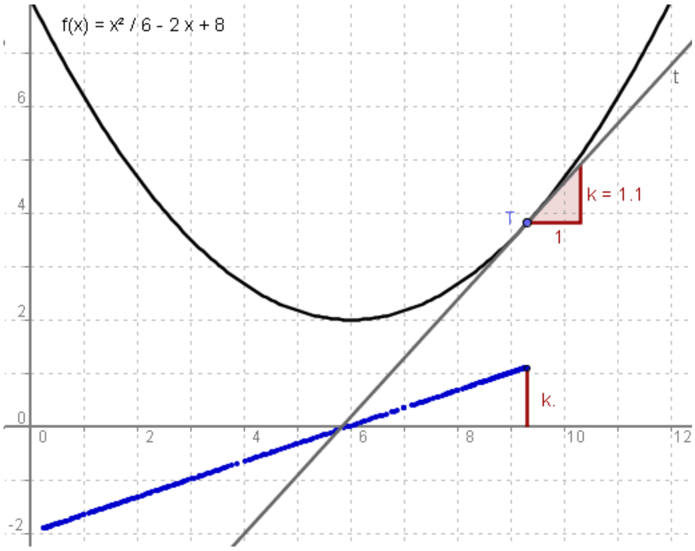
4. *GeoGebra* for preparing teaching materials

   GeoGebra encourages teachers to prepare materials for the teaching process using it as a cooperation-, communication- and representation tool. This follows Kerres' ideas of the educational functions of new media [86].

The software can be used with students aged 10 to 18, beginning with simple constructions up to the integration of functions. No matter if students explore mathematics alone or in groups, the teacher should try to be an advisor in the background who gives support when help is needed.

The students' results of their experiments with *GeoGebra* should be the basis for discussions in class. This gives teachers more time to concentrate on fundamental ideas and mathematical reasoning [121].

The following example shows a dynamic worksheet where students can discover the function of the slope of a parabola themselves. They see an arbitrary point T on the graph, the tangent t through this point and its slope k. Now we investigate another point (x_T, k) with the x-coordinate of T and the corresponding slope k as its y-coordinate. By dragging the point T along the graph of the parabola, a trace of the slope function is generated experimentally. Now, the students should try to read off the equation of the slope function using the coordinate grid. By plotting this equation with *GeoGebra* they can verify their assumption easily.



Slope function of $x^2/6 - 2x + 8$

This is a motivating example for the geometric model of the first derivative. Here, the tangent is used as a *black box* [40, p.57] providing a basis for the discussion of the tangent line problem afterwards.

Dynamic Worksheets

With *GeoGebra* it is possible to create interactive *HTML* pages - so called *dynamic worksheets* - which can be used with any Internet browser that supports Java (e.g. Internet Explorer, Mozilla, Netscape). These worksheets are totally independent from the program itself, i.e. *GeoGebra* does not have to be installed to use the worksheet. Thus, *GeoGebra* is also a tool to create interactive e-learning content.

The stand-alone application can be used on any platform (*MS Windows*, *Unix*, *Linux*, *MacOS*) and *GeoGebra* may even be started directly from the Internet eliminating complicated installation or upgrade procedures which is especially useful for computer networks in schools.

Behind the Scenes

GeoGebra is based on projective and Euclidian geometry in the real plane. Equations are expanded and simplified symbolically and a special grammar for arithmetical expressions in school notation has been implemented.

In most dynamic geometry systems you will encounter jumping objects in certain constructions. For example, the intersection points of two conic sections may permutate wildly in *Cabri* when an ellipse becomes a hyperbola. In *GeoGebra* this *continuity problem* [93, pp.84] is tackled by a sophisticated heuristic approach [54, pp.163] eliminating jumping objects.

For the differentiation and integration of functions in one variable the open source computer algebra system *JSCL* is built into *GeoGebra*.

Future Aspects

The development of *GeoGebra* by Markus Hohenwarter is going on rapidly in the course of his PhD thesis *GeoGebra - Development of Educational Material and Applications in Mathematics Teaching*. Some of the planned features are:

- intersection of functions, function - line
- root finding of arbitrary functions, local minimum/maximum, turning point
- locus lines
- automatic animations
- macros

The free software and further information can be found on the *GeoGebra* website on the Internet *http://www.geogebra.at*.

3.4 Dynamische Mathematik mit GeoGebra

Markus Hohenwarter
In: Praxis der Mathematik 6/2004, S. 293–295

Wenn über den Einsatz neuer Medien im Mathematik Unterricht gesprochen wird, kommt man an Computeralgebra Systemen (z.B. Derive, Mathematica, Maple) und dynamischen Geometrie Systemen (z.B. Cabri, Cinderella) nicht vorbei. So ist es nicht verwunderlich, dass bereits der Taschenrechner TI-92 einfache Versionen von Derive und Cabri umfasste. Doch selbst hier gab es keine echte Verbindung dieser beiden Programmtypen, sodass der Wunsch nach einer Software entstand, die die Möglichkeiten von dynamischer Geometrie und Computeralgebra vereint.

Dieser Wunsch führte zur Entwicklung von *GeoGebra* [54, 55], einer mittlerweile mehrfach preisgekrönten Unterrichtssoftware, die *Geo*metrie und Al*gebra* als gleichwertige Partner versteht [42]. Mit diesem neuen Werkzeug können auf einfachste Weise Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Geraden, Vielecken, allen Kegelschnitten sowie Funktionen erstellt und diese dynamisch mit der Maus verändert werden. Andererseits ist auch eine direkte Eingabe in üblicher Schulnotation wie $g : 3x + 4y = 7$, $k : (x - 3)^2 + (x + 5)^2 = 25$ oder $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ möglich, und es steht eine Vielzahl von Befehlen bis hin zum Differenzieren und Integrieren zur Verfügung.

GeoGebra erhielt den deutschen Bildungssoftware Preises *digita 2004*, weil es laut Jury „in hervorragender Weise entdeckendes, handlungsorientiertes Lernen fördert." Im Folgenden wird an konkreten Beispielen gezeigt, wie durch den Einsatz von GeoGebra im Unterricht bei Schülerinnen und Schülern die Lust am mathematischen Experimentieren geweckt werden kann.

Was ist GeoGebra?

GeoGebra ist ein dynamisches Werkzeug für den Mathematikunterricht, in dem Geometrie und Algebra gleichwertige Partner sind. Einerseits ist GeoGebra eine dynamische Geometriesoftware. Man kann Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Strecken, Vielecken, Geraden, Kegelschnitten und Funktionen erstellen und danach dynamisch verändern.

Andererseits ist auch die direkte Eingabe von Gleichungen und Koordinaten möglich. Sie können mit Zahlen und Vektoren rechnen und sogar Funktionen dynamisch differenzieren und integrieren. Wird also beispielsweise die Funktion $f(x) = x^2 - 3x$ mit der Maus verschoben, so ändern sich ihre Ableitungen bzw. das Integral dynamisch mit.

Das Programm zeichnet die doppelte Sichtweise der Objekte aus: ein Ausdruck im Algebra Fenster entspricht einem Objekt auf dem Zeichenblatt und umgekehrt. Das kostenfreie Programm wird von M. Hohenwarter an der Abteilung für Didaktik der Mathematik und Informatik der Universität Salzburg entwickelt.

Mathematische Experimente

Das dynamische Nebeneinander von Geometrie und Algebra ermöglicht Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise einen experimentellen Zugang zur Mathematik. Dadurch wird selbstgesteuertes, individuelles und entdeckendes Lernen gefördert.
Die Software kann in der gesamten Sekundarstufe genutzt werden, eignet sich zur Veranschaulichung mathematischer Unterrichtsinhalte und lässt Schülerinnen und Schüler selbst Mathematik entdecken.
Außerdem ist es auch möglich, mit der Software auf einfache Art und Weise dynamische, interaktive Arbeitsblätter zu erstellen, die in einem Internet Browser von Ihren Schülerinnen und Schülern verwendet werden können. Einige dynamische Arbeitsblätter finden Sie auf www.geogebra.at unter „Beispiele“. Im Folgenden wird GeoGebra als eigenständiges Programm für den Unterricht vorgestellt, das den Schülerinnen und Schülern ein Algebra Fenster und ein Zeichenblatt mit vielen Konstruktionswerkzeugen und Befehlen anbietet.

GeoGebra im Unterricht

GeoGebra lässt sich in beiden Sekundarstufen in vielfältiger Weise immer dann einsetzen, wenn geometrische oder algebraische Lerninhalte vermittelt werden sollen. Die Software kann natürlich auch zum Konstruieren und zum Veranschaulichen von Gleichungen und Funktionen verwendet werden. Das Besondere an GeoGebra ist jedoch die Kombination dieser beiden Möglichkeiten, die Schülerinnen und Schülern neue Einsichten in mathematische Zusammenhänge eröffnen soll.

GeoGebra als Werkzeug für mathematische Experimente

Arbeitsaufträge können in Form eines Arbeitsblattes oder einer Overheadfolie gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese dann mit Hilfe von GeoGebra. Dabei muss Ihr Unterricht nicht unbedingt im Computerraum stattfinden. Es genügt schon ein PC mit GeoGebra, um in einer Gruppenarbeit oder einem Stationenbetrieb damit zu experimentieren. Nachdem GeoGebra kostenlos verfügbar ist, sind auch Hausübungen mit dem Programm kein Problem.

Dazu einige Tipps

- Formulieren Sie die Fragestellungen möglichst *offen*, damit die Schülerinnen und Schüler genügend Freiräume für eigene Lösungswege haben und sich selbstständig mit mathematischen Problemen auseinandersetzen können. Lernen ist ein individueller Prozess, den Sie so fördern können.

- Verbinden Sie individuelles Lernen mit Team-Work. Wenn Sie die Schülerinnen und Schüler zu zweit oder in Kleingruppen arbeiten lassen, entstehen oft allein durch das gegenseitige Erklären der eigenen Gedanken neue Einsichten.

- Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler Vermutungen und Ergebnisse auch aufschreiben - entweder direkt auf ein Arbeitsblatt oder ins Heft. Dabei können sie die Möglichkeit des Ausdruckens der Konstruktion und ihres Protokolls verwenden.

- Eine derartige Dokumentation bietet die Basis für eine Diskussion in der Klasse über die gesammelten Vermutungen und Ergebnisse. Lassen Sie dazu Schüler oder Schülergruppen ihre „Theorien“ präsentieren und von der Klasse kritisch beurteilen.

- Während der Arbeitsphasen mit GeoGebra sollten Sie sich als Berater im Hintergrund halten und nur Hilfestellung geben, wenn diese von den Schülerinnen und Schülern angefordert wird. So geben Sie ihnen die Gelegenheit, in Ruhe nachzudenken und eigene Lösungswege zu suchen.

GeoGebra als Präsentationswerkzeug

GeoGebra kann auch als „dynamische Overheadfolie“ verwendet werden, um Sachverhalte zu veranschaulichen oder Experimente mit der gesamten Klasse durchzuführen. Dazu werden ein Laptop oder PC und einen Projektor („Beamer“) im Unterrichtsraum benötigt. Die Bandbreite der Einsatzmöglichkeiten reicht dabei vom

- Start mit der leeren Oberfläche und der Erstellung einer Konstruktion im Unterricht über das

- Laden von Teilen einer Konstruktion mit entsprechenden Ergänzungen im Unterricht bis hin zur

- Verwendung einer bereits fertig vorbereiteten Konstruktion.

In letzterem Fall bietet sich das Konstruktionsprotokoll an, um eine Konstruktion Schritt für Schritt vorzuführen.

Dazu einige Tipps

- Versuchen Sie die Schülerinnen und Schüler bei der Präsentation aktiv einzubinden. Fördern Sie „mathematische Diskussionen“ in der Klasse, indem Sie Vermutungen der Schüler aufgreifen und mit Hilfe von GeoGebra überprüfen.

- Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler selbst Ergebnisse aus Arbeitsphasen mit GeoGebra präsentieren.

- Bieten Sie Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, Referate mit GeoGebra zu gestalten. Da GeoGebra kostenlos ist, können die Schülerinnen und Schüler die Software auch problemlos zu Hause nutzen.

Ausgangspunkte für Arbeitsaufträge

Bei der Erstellung von Arbeitsaufträgen, die mit GeoGebra bearbeitet werden sollen, bieten sich verschiedene Ausgangspunkte an:

- *Offene Fragestellungen*: Regen Sie die Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Experimenten an, indem Sie die Fragen so formulieren, dass eigenes Entdecken und individuelle Lösungswege möglich sind.
- *Bild der Konstruktion*: Die Schülerinnen und Schüler sollen versuchen, eine als Bild vorgegebene Konstruktion selbst durchzuführen. Das Konstruktionsprotokoll kann hier zum Vergleich der verschiedenen Lösungen verwendet werden.
- *Konstruktionsprotokoll*: Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine Konstruktion anhand eines vorgegebenen Konstruktionsprotokolls an. Entfernen Sie einzelne Schritte aus dem Protokoll und lassen Sie die Schülerinnen und Schüler die leeren Stellen wie in einem Lückentext ergänzen.

Arbeitsaufträge mit offenen Fragestellungen

Die folgenden einfachen Beispiele beinhalten offene Fragestellungen und sollen zeigen, wie sich GeoGebra als eigenständiges Programm von Schülerinnen und Schülern für mathematische Experimente einsetzen lässt. Natürlich ist es auch möglich, eine Konstruktion teilweise oder komplett vorgefertigt als dynamisches Arbeitsblatt oder gespeicherte Datei bereit zu stellen.

Beispiel 1: Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten
Beispiel 2: Kreisgleichung
Beispiel 3: Tangenten an einen Kreis
Beispiel 4: Ableitungen und Tangente einer Funktion

Beispiel 1: Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Aufgabe: Ermittle graphisch die Lösung des folgenden Gleichungssystems:
$g : 4x = -6$, $h : x - 3y = 3$. Führe die Probe in deinem Heft durch Einsetzen in beide Gleichungen aus.

1. Versuche, die Gleichung g so zu verändern, dass die Lösungsmenge der beiden Gleichungen leer ist. Was bedeutet das geometrisch? Schreibe deine Vermutungen und Ergebnisse in dein Heft.

2. Versuche weitere Gleichungen g und h anzugeben, bei denen die Lösungsmenge leer ist. Kannst du eine Methode angeben, wie man solche Gleichungen finden kann? Schreibe deine Vermutungen und Ergebnisse in dein Heft.

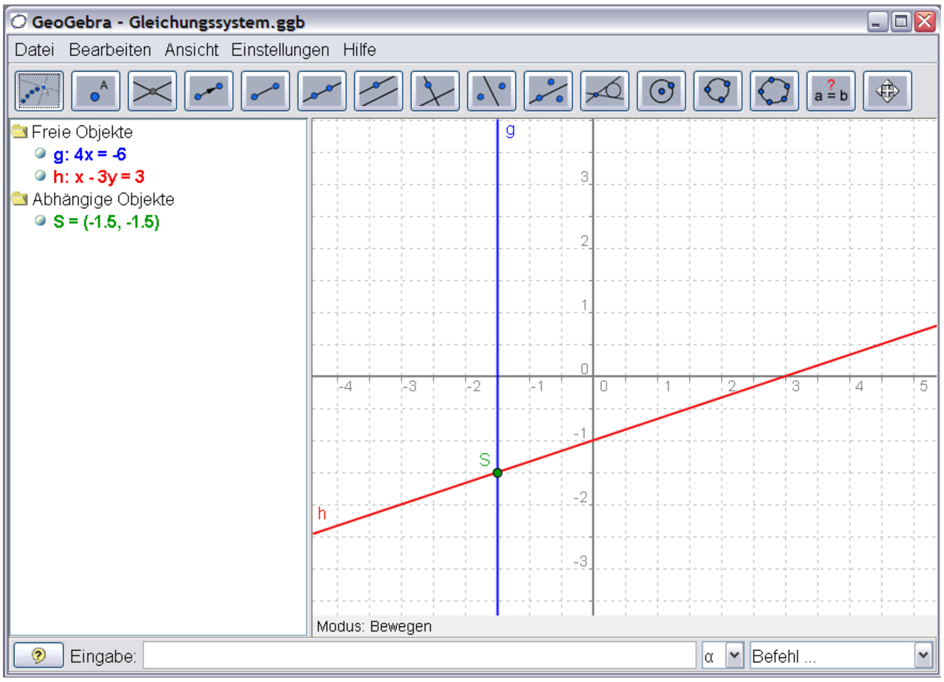


Abb. 1: Lineares Gleichungssystem

Beispiel 2: Kreisgleichung

Kreisgleichung und Radius

Zeichne mit GeoGebra den Kreis $k : x^2 + y^2 = 25$ und lass dir seinen Radius anzeigen.

1. Verändere die rechte Seite der Gleichung mit der Tastatur und beobachte dabei den Radius. Was fällt dir auf? Schreibe deine Beobachtungen und Vermutungen in dein Heft.

2. Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass der Radius a) r = 4, b) r = 6, c) r = 7 ist. Wie könnte die Gleichung mit dem allgemeinen Radius r aussehen? Schreibe deine Ergebnisse und Vermutungen in dein Heft.

Kreisgleichung und Mittelpunkt

Zeichne mit GeoGebra den Kreis $k : (x-2)^2+(y-1)^2 = 25$ und lass dir seinen Mittelpunkt und Radius anzeigen.

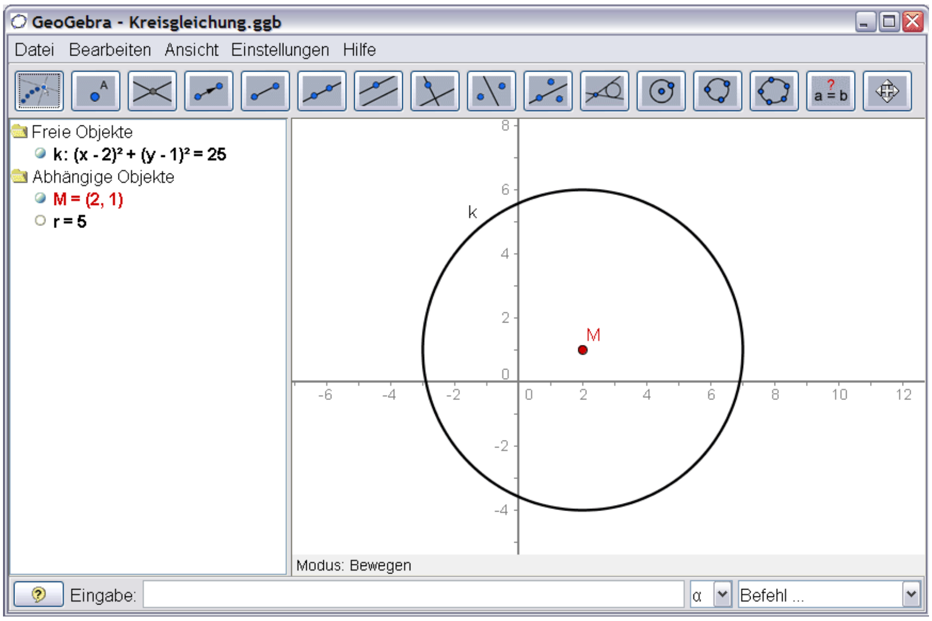


Abb. 2: Kreis und Kreisgleichung

1. Verschiebe den Kreis, indem du ihn mit der Maus ziehst, und beobachte dabei die Kreisgleichung und die Koordinaten seines Mittelpunktes. Was fällt dir dabei auf? Schreibe deine Beobachtungen und Vermutungen in dein Heft.

2. Verändere die Kreisgleichung mit der Tastatur so, dass der Mittelpunkt die Koordinaten a) $M = (4, 2)$, b) $M = (3, -2)$, c) $M = (-2, -1)$ hat. Wie könnte die Gleichung mit dem allgemeinen Mittelpunkt $M = (m, n)$ aussehen? Schreibe deine Ergebnisse und Vermutungen in dein Heft.

Abbildung 2 zeigt, wie die Ausgangskonstruktion des zweiten Beispiels in GeoGebra aussieht.

Beispiel 3: Tangenten an einen Kreis

Aufgabe: Konstruiere mit GeoGebra den Kreis mit Mittelpunkt $M = (3, 2)$ und Radius $r = 5$ und lass dir die Tangenten an den Kreis durch den Punkt $A = (11, 4)$ anzeigen.

1. Was fällt dir auf, wenn du den Punkt A mit der Maus verschiebst?

2. Wie wirkt sich die Lage von A auf die Tangenten aus? Schreibe deine Beobachtungen in dein Heft.

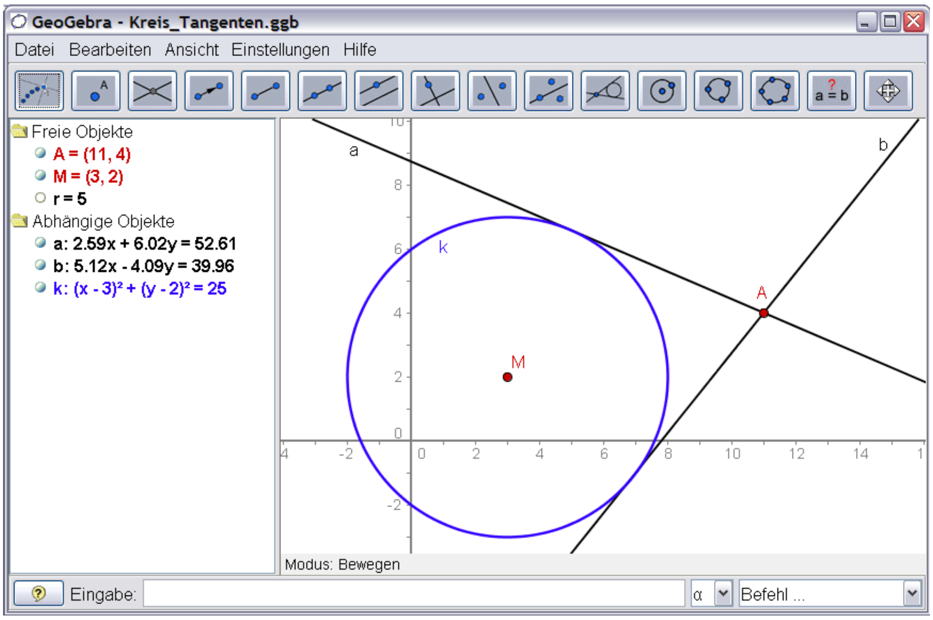


Abb. 3: Tangenten an einen Kreis

Das folgende mit GeoGebra erstellte Konstruktionsprotokoll kann auch zur Dokumentation verwendet werden:

Nr.	Name	Befehl	Algebra
1	Punkt M		M = (3, 2)
2	Zahl r		r = 5
3	Kreis k	Kreis[M, r]	k: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
4	Punkt A		A = (11, 4)
5	Gerade a	Tangente[A, k]	a: 2.59x + 6.02y = 52.61
5	Gerade b	Tangente[A, k]	b: 5.12x - 4.09y = 39.96

Beispiel 4: Ableitungen und Tangente einer Funktion

Aufgabe: Zeichne mit GeoGebra die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und lass dir die ersten beiden Ableitungen anzeigen. Setze weiters einen Punkt T auf die Funktion und erstelle die Tangente an f in diesem Punkt.
Verschiebe nun den Punkt T mit der Maus und versuche folgende Fragen zu beantworten:

1. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Tangente und der 1. Ableitung? Schreibe deine Vermutungen in dein Heft.

2. Was passiert mit den beiden Ableitungen bei einem Hochpunkt bzw. bei einem Tiefpunkt? Notiere deine Vermutungen im Heft.

3. Verändere nun die Funktion $f(x)$ in $f(x) = x^3 - 2x^2$ und betrachte auch hier die beiden Ableitungen im Hoch- und Tiefpunkt. Stimmen deine Vermutungen von vorhin auch hier? Notiere deine Ergebnisse in deinem Heft.

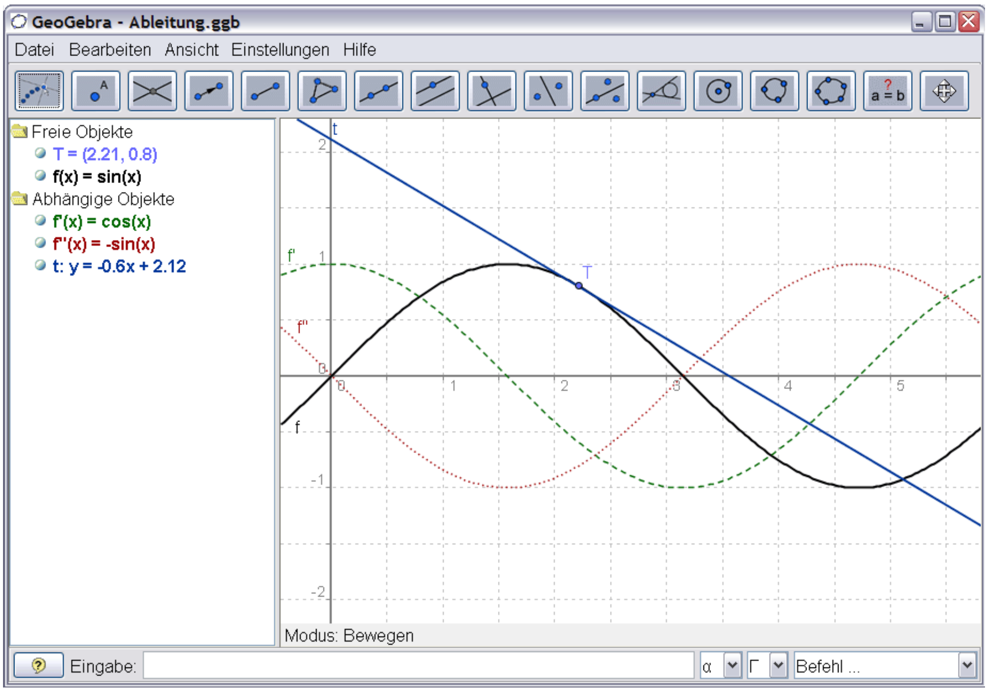


Abb. 4: Ableitungen und Tangente einer Funktion

Weitere Informationen

Auf der Homepage von GeoGebra http://www.geogebra.at finden Sie die kostenlose Software selbst, eine kurze Einführung in ihre Bedienung (GeoGebra Quickstart) und Beispiele für dynamische Arbeitsblätter, die mit GeoGebra erstellt wurden. Unterrichtseinheiten mit GeoGebra finden Sie auch auf Lehrer Online [63, 61].

3.5 Bidirektionale Verbindung von dynamischer Geometrie und Algebra in GeoGebra

Markus Hohenwarter
erscheint im Tagungsband des GDM Arbeitskreises
für Mathematikunterricht und Informatik. Soest, 2005

Dynamische Geometrie (DGS) und Computeralgebra Systeme (CAS) haben den Mathematikunterricht verändert. GeoGebra ist ein neues Werkzeug, das versucht, die Möglichkeiten von DGS und CAS miteinander auf bidirektionale Weise zu verbinden. In diesem Artikel wird darauf eingegangen, warum eine solche Verbindung sinnvoll ist und wie diese aussehen kann.

Dynamische Geometrie Software (DGS) und Computeralgebra Systeme (CAS) sind aus dem Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken und ihr Einsatz wird inzwischen auch in den Lehrplänen gefordert:

> Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra - Systeme, dynamische Geometrie - Software [. . .] sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. [13]

Da GeoGebra auf Ideen dieser beiden Softwaretypen basiert, werden ihre grundlegenden Eigenschaften im Folgenden zunächst verglichen.

Dynamische Geometrie

Es gibt mittlerweile eine Vielzahl von DGS, die sich in ihrer Ausrichtung und ihrem Funktionsumfang teilweise beträchtlich unterscheiden. Einige prominente Vertreter sind *Cabri*, *Cinderella*, *Geometer's Sketchpad*, *Dynageo* sowie *Zirkel und Lineal*. Trotz aller Unterschiede haben alle diese Systeme zwei wichtige Eigenschaften gemeinsam:

1. den Zugmodus und

2. die Konzentration auf die geometrische bzw. grafische Repräsentation mathematischer Objekte.

Der Zugmodus unterscheidet ein DGS von einem bloßen Zeichenprogramm und bietet durch die Dynamik der grafischen Darstellung einen echten Mehrwert gegenüber Papier und Bleistift. Die grafische Repräsentation steht bei allen DGS stark im Vordergrund: typischerweise können auf einem Zeichenblatt mit der Maus Konstruktionen erstellt und dynamisch variiert werden.

Computeralgebra

Auf Seiten der CAS sind unter anderem *Derive*, *Mathematica*, *Maple* und *MuPad* zu nennen. Die Unterschiede hinsichtlich der Funktionalität und Bedienung der einzelnen Programme sind enorm.

Als grundlegende gemeinsame Eigenschaften können aber die folgenden beiden Punkte festgehalten werden:

1. symbolisches Rechnen und

2. die Konzentration auf die algebraische und numerische Repräsentation mathematischer Objekte

Symbolisches Rechnen ermöglicht beispielsweise das Finden der Ableitung oder des Integrals einer Funktion sowie das Lösen von Gleichungen.

Die algebraische Seite der Mathematik steht bei einem CAS im Mittelpunkt. Dies zeigt sich auch daran, dass die Eingabe mittels algebraischer Ausdrücke, Zahlen und Befehlen erfolgt.

Unterschiede

Duval geht davon aus, dass mathematische Objekte nicht direkt, sondern nur über semiotische Repräsentationen zugänglich sind:

> ...there is no other way of gaining access to the mathematical objects but to produce some semiotic representations. [26]

DGS und CAS haben in diesem Sinne unterschiedliche Sichtweisen auf mathematische Objekte, da sie von einer geometrischen bzw. algebraischen Repräsentation ausgehen.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen diesen beiden Softwaretypen betrifft die Dynamik: den CAS fehlt meist ein Pendant zum Zugmodus. Sie erlauben zwar häufig die grafische Darstellung von Gleichungen und Funktionen; diese kann jedoch nicht direkt beeinflusst werden. Selten gibt es in CAS eine dynamische Kopplung von Parametern und grafischer Darstellung (z.B. in LiveMath). Für diesen Zweck wird daher gerne auf Tabellenkalkulationen zurückgegriffen.

Umgekehrt bieten DGS keine bis wenige Möglichkeiten der direkten Eingabe von Gleichungen oder des symbolischen Rechnens. Es können zwar Gleichungen und Koordinaten angezeigt werden; eine direkte Manipulation derselben ist aber kaum möglich.

Eine Verbindung

Warum und wie?

Es liegt nahe, darüber nachzudenken, die beiden Softwaretypen zu verbinden. Schumann hat dies bereits 1991 getan und später sogar ein entsprechendes Bedürfnis konstatiert:

> There is a need for further software development to provide a single package combining the desired features. [119]

Es stellen sich dabei zwei Fragen:

1. Warum soll man die Möglichkeiten von DGS und CAS verbinden?

2. Wie soll eine solche Verbindung aussehen?

Die Antworten auf diese beiden Fragen hängen natürlich zusammen. Zunächst einmal sollte ein solches System Schülerinnen und Schülern helfen, Mathematik besser bzw. leichter zu verstehen. Laut Duval muss man, um mathematische Zusammenhänge zu verstehen, zwischen mehreren semiotischen Repräsentationen wechseln können:

> There is no true understanding in mathematics for students who do not incorporate into their cognitive architecture the various registers of semiotic representations used to do mathematics. [26]

Die Verbindung mehrerer Repräsentationen bringt also Vorteile für das Verständnis von Mathematik. Dabei ist aber natürlich nicht ein bloßes Nebeneinander, sondern ein Miteinander entscheidend: wichtig sind die Übergänge von der einen in die andere Repräsentation.

Ein System, das DGS und CAS verbindet, sollte daher den Wechsel zwischen geometrischer und algebraischer Repräsentation ermöglichen und zwar am besten in beide Richtungen, also *bidirektional*.

Bidirektionale Verbindung

Diese Art der Verbindung geht deutlich über eine bloße Koppelung eines DGS mit einem CAS hinaus. Es geht also nicht darum, eine technische Schnittstelle zwischen diesen beiden Welten zu definieren, sondern neue Möglichkeiten zu schaffen.

Das geforderte System umfasst die in Abbildung 1 skizzierten Bereiche 1, 2, und 3, wobei die neuen Möglichkeiten im Bereich 3 anzusiedeln sind. Ein konkretes Beispiel dazu:

Bereich 1: Ein Kreis kann in einem DGS dynamisch konstruiert und seine Gleichung angezeigt werden.

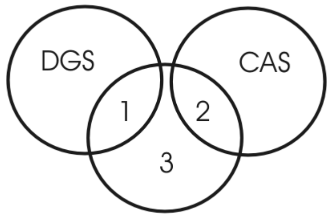


Abb. 1: Verbindung von DGS und CAS

Bereich 2: Ein Kreis kann in einem CAS mit Hilfe seiner Gleichung eingegeben und als statisches Bild dargestellt werden.

Bereich 3: Ein Kreis kann mit Hilfe seiner Gleichung eingegeben und dynamisch mit der Maus verschoben werden.

Ein System, das alle drei Bereiche abdeckt, erlaubt damit einen bidirektionalen Wechsel zwischen Kreisbild und Kreisgleichung. In diesem Fall werden dazu im Bereich 3 die Möglichkeiten des CAS um die Dynamik des Zugmodus erweitert.

Die eierlegende Wollmilchsau

Ein solches Programm kann und muss dabei nicht sämtliche Möglichkeiten von DGS und CAS umfassen. Wie gesagt, geht es eher um neue Möglichkeiten des Nebeneinanders und des Wechsels zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen. Dafür eignen sich nicht alle Funktionen eines DGS bzw. CAS gleich gut.

Wie ein solches System konkret aussieht, hängt von vielen Design Entscheidungen ab: Wie soll die Benutzeroberfläche aussehen? Welche Grundobjekte soll es geben? Welche Operationen sollen mit diesen Grundobjekten möglich sein? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den Bereich 3 der neuen Möglichkeiten?

GeoGebra

GeoGebra steht für dynamische *Geo*metrie und Al*gebra* und stellt eine Realisierung eines solchen bidirektionalen Systems dar (www.geogebra.at). Im Folgenden soll auf einige Designentscheidungen bei der Entwicklung von GeoGebra eingegangen werden.

KISS Prinzip

KISS ist ein Akronym und steht für *Keep it small and simple!*, was soviel bedeutet wie *Gestalte es einfach und überschaubar!* Dieses aus der Informatik stammende Prinzip war und ist eine zentrale Leitidee bei der Entwicklung von GeoGebra.

Als Unterrichtssoftware soll das System möglichst einfach zu bedienen sein, damit Schülerinnen und Schüler auch selbst damit Mathematik entdecken können. Die Verwendung einer Mathematiksoftware erfordert neben mathematischem Wissen natürlich auch Wissen über die Bedienung der Software selbst. Diese zusätzliche Hürde sollte daher möglichst klein gehalten werden.

In GeoGebra orientiert sich die algebraische Eingabe nahe an der Schulnotation. Eine Gerade kann als $g : 3x+4y = 7$, ein Kreis als $k : (x-2)^2+(y+3)^2 = 25$ und eine Funktion als $f(x) = x^3 - 2x$ eingegeben werden. In den CAS sind üblicherweise alle Befehle nur auf Englisch verfügbar. GeoGebra verwendet Befehlsnamen in der aktuell eingestellten Sprache der Benutzeroberfläche.

Algebrafenster und Zeichenblatt

Eine im Mathematikunterricht verwendete Software beeinflusst auch die Art, wie Schülerinnen und Schüler Mathematik sehen und betreiben (vgl. [107]). GeoGebra bietet daher zwei parallele Repräsentationen der mathematischen Objekte: ein Algebrafenster und ein Zeichenblatt.

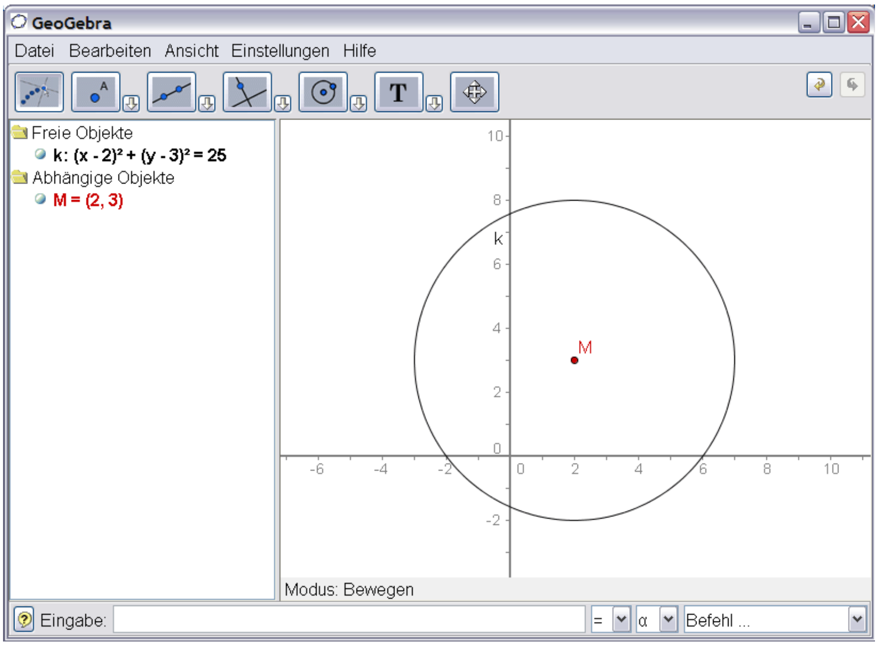


Abb. 2: Oberfläche von GeoGebra

Dieses Design kommt auch der Forderung von Schumann und Green nach:

> The three solution protocols [graphical, numerical, algebraic] should not be considered separate, but rather as constituting a holistic comprehensive computer-aided approach. [119]

Grundobjekte

Die Grundobjekte eines DGS sind Punkte, Geraden, Strecken, Vielecke, Kreise und manchmal allgemeine Kegelschnitte. In GeoGebra gibt es zusätzlich auch Vektoren (DGS kennen teilweise nur Pfeile, aber keine Vektoren).

An Grundobjekten aus dem CAS Bereich wurden Zahlen (bzw. Parameter), Winkel, polynomiale Gleichungen 1. und 2. Grades (für Geraden und Kegelschnitte) und später Funktionen in GeoGebra implementiert.

Operationen

Entscheidend für den Bereich der neuen Möglichkeiten (Abb. 1, Bereich 3) sind natürlich die Operationen auf diesen Grundobjekten. Ein CAS kann Kegelschnittsgleichungen zwar darstellen, es *weiß* jedoch nicht, dass es sich bei einer solchen Gleichung um einen Kegelschnitt handelt.

In GeoGebra wird jede eingegebene Gleichung klassifiziert und als Gerade oder Kegelschnitt erkannt. Damit sind nun geometrische Operationen für diese erkannten Objekte möglich: Schneiden mit anderen Objekten, Drehen, Spiegeln, Verschieben, Bestimmung von Mittelpunkt, Scheitel, Hauptachsen usw.

Umgekehrt kann mit geometrischen Objekten wie Vektoren und Punkten gerechnet werden. Der Mittelpunkt einer Strecke AB könnte also als $M = (A + B)/2$ oder $M = A + 1/2(B - A)$ bestimmt werden.

Auf weitere besondere Operationen wird im Abschnitt *Neue Möglichkeiten* weiter unten eingegangen.

Konsequenzen

Durch die Festlegung der Grundobjekte müssen diese irgendwie eindeutig unterschieden werden. Dies ist ein neues Problem, das erst durch die bidirektionale Verbindung von CAS und DGS entsteht.

Stellt beispielsweise das Koordinatenpaar $(3, 2)$ einen Punkt oder einen Vektor dar? GeoGebra löst dies durch folgende Konventionen: Punkte haben Groß- und Vektoren Kleinbuchstaben als Namen. $P = (3, 2)$ liefert daher einen Punkt und $v = (3, 2)$ einen Vektor. Ein namenloses Koordinatenpaar ist ein Punkt, und um einen namenlosen Vektor zu erhalten, gibt es den Befehl `Vektor[(3,2)]`. Der Befehl `Gerade[(1,1), (3,2)]` liefert damit eine Gerade durch die Punkte $(1, 1)$ und $(3, 2)$. Mit `Gerade[(1,1),Vektor[(3,2)]]` erhält man hingegen eine Gerade durch den Punkt $(1, 1)$ mit Richtung $(3, 2)$.

Ein ähnliches Unterscheidungsproblem gibt es bei der Parabel $y = x^2$. Handelt es sich hierbei um einen Kegelschnitt oder um eine Funktion in x? Dies macht deshalb einen Unterschied, weil ein Kegelschnitt beispielsweise gedreht werden kann, eine Funktion aber nicht. Umgekehrt kann eine Funktion differenziert oder integriert werden, ein Kegelschnitt jedoch nicht.

Anders gesagt: mit Kegelschnitten sind andere Operationen möglich als mit Funktionen. Wieder wird dies in GeoGebra durch eine Konvention gelöst: Eine Funktion wird als $f(x) = x^2$ oder nur x^2 geschrieben. Eine polynomiale Gleichung zweiten Grades in x und y und damit $y = x^2$ wird als Kegelschnitt interpretiert.

Neue Möglichkeiten

GeoGebra bietet im Wesentlichen alle Funktionen eines DGS und kann natürlich auch wie ein solches zum Konstruieren verwendet werden. Im Folgenden soll jedoch auf die neuen Möglichkeiten durch die Einführung der Bidirektionalität eingegangen werden.

Analytische Geometrie

Die ersten Versionen von GeoGebra [55] waren vor allem für den Einsatz im Bereich der analytischen Geometrie prädestiniert. Als interessante neue Möglichkeiten sind hier vor allem die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Parametern und geometrischer Figur zu nennen.

Als Beispiel sei hier die Bedeutung der Parameter p und q in der Parabelgleichung $y = x^2 + px + q$ angeführt. Elschenbroich stellte dazu ein elektronisches MathView Arbeitsblatt vor, bei dem sich durch Änderung der Parameter p und q das Bild der Parabel dynamisch verändert (vgl. [31]). Ein solches Arbeitsblatt kann auch mit GeoGebra erstellt werden, wobei die Veränderung der Parameter nicht nur durch direkte Eingabe sondern auch mittels Pfeiltasten kontinuierlich möglich ist.

GeoGebra erweitert dieses schöne Beispiel um die völlig neue Möglichkeit einer echten bidirektionalen Untersuchung der Parabelgleichung. Geht man beispielsweise von der Parabel $y = x^2 + x + 1$ aus, so kann diese sowohl durch Veränderung ihrer Gleichung als auch durch Ziehen ihrer geometrischen Darstellung mit der Maus verändert werden. Es sind also beide Repräsentationen direkt beeinflussbar.

Zusätzlich bietet GeoGebra auch geometrische Befehle, die ein CAS nicht kennt, hier aber sehr hilfreich sein können: der Befehl `Scheitel[par]` liefert etwa den Scheitelpunkt der Parabel und kann Ausgangspunkt für eine Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Scheitelpunkt und Parabelgleichung sein.

Dynamische Analysis

Anfangs beschränkten sich die symbolischen Fähigkeiten von GeoGebra auf die Polynomvereinfachung zur Bestimmung der Normalform von Kegelschnitten. Damit wird etwa die

Gleichung $x + y^2 = y + y^2$ intern in $x - y = 0$ umgewandelt und als Gerade erkannt. Dies ermöglicht die Eingabe von Geraden und Kegelschnittsgleichungen in beliebiger Form.

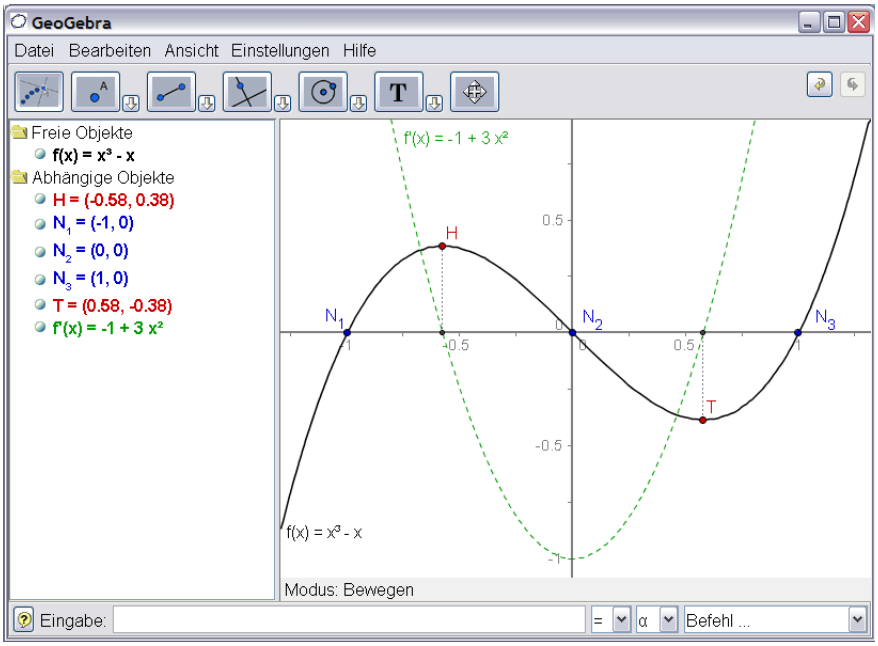


Abb. 3: Dynamische Kurvendiskussion

Mit der Version 2.0 wurde das neue Grundobjekt *Funktion in x* eingeführt und damit das Tor zur Welt der dynamischen Analysis aufgestoßen. Auch für Funktionen gilt nämlich der bidirektionale Ansatz: So ist es möglich, den Graphen einer Funktion mit der Maus zu ziehen oder mit den Pfeiltasten zu verschieben, wobei gleichzeitig die algebraische Repräsentation dynamisch verändert wird.

Seit Anfang dieses Jahres ermöglicht GeoGebra auch die symbolische Berechnung von Ableitungen und Integralen. Lässt man sich nun die Ableitung oder das Integral einer Funktion f anzeigen, so werden auch diese Funktionen beim Ziehen von f mit der Maus dynamisch mitverändert. Diese neue Möglichkeit nenne ich *dynamisches Differenzieren* bzw. *Integrieren*. Da in GeoGebra auch die Parameter in Befehlen dynamische Größen sind, kann sogar die Ordnung einer Ableitung über einen Zahlparameter oder eine Streckenlänge dynamisch verändert werden.

Eine wichtige Anwendung von CAS ist das Lösen von Gleichungen. Die geometrische Entsprechung dazu sind Schnittoperationen bzw. Nullstellenbestimmung. Für Geraden und Kegelschnitte war dies von Anfang an auch in GeoGebra möglich.

Für Funktionen wurden diese Schnittoperationen in der aktuellen Version 2.4 realisiert. Für Polynomfunktionen ermöglicht GeoGebra damit durch die automatische Bestimmung aller Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte und den Zugmodus für Funktionen eine *dynamische Kurvendiskussion* (Abb. 3).

Weitere Besonderheiten

Eine Besonderheit von GeoGebra ist die automatische grafische Darstellung bestimmter Zahlenwerte. Beispielsweise werden die Steigung einer Geraden als Steigungsdreieck und das bestimmte Integral einer Funktion als Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraph visualisiert. Unter- und Obersummen werden durch Rechtecke dargestellt und können im Hinblick auf Funktion, Intervallgrenzen und Anzahl der Rechtecke dynamisch verändert werden (Abb. 4)

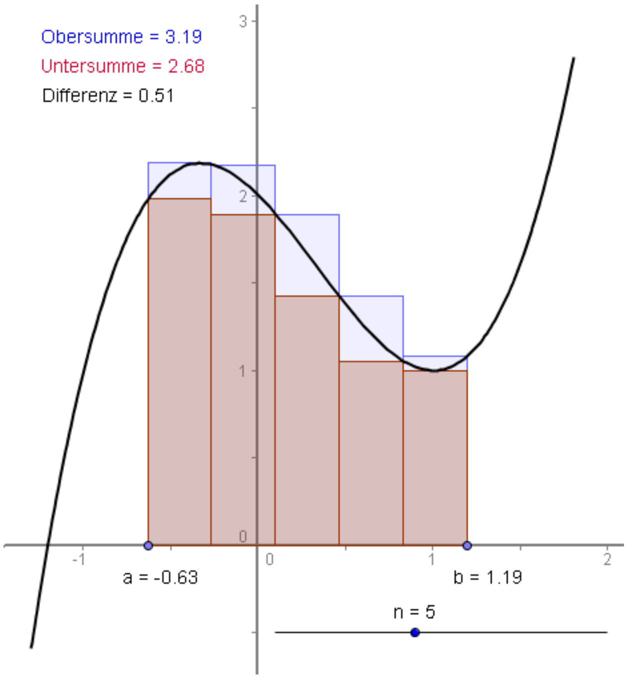


Abb. 4: Dynamische Unter- und Obersumme

Das interaktive, dynamische Konstruktionsprotokoll ermöglicht die schrittweise Wiederholung einer Konstruktion, das Einfügen von Konstruktionsschritten an beliebiger Stelle und sogar das Ändern der Konstruktionsreihenfolge.

Mit GeoGebra können übrigens auch dynamische Arbeitsblätter für einen Internet Browser erstellt werden. Solche Arbeitsblätter sind besonders dann nützlich, wenn die Schülerinnen und Schüler mit der Bedienung der Software nicht so vertraut sind. Die instrumentelle Hürde kann so niedrig gehalten werden. Beispiele für solche dynamischen Arbeitsblätter sind auf der Homepage von GeoGebra zu finden: www.geogebra.at.

Rück- und Ausblick

Die Entwicklung von GeoGebra wurde von mir im Zuge meiner Diplomarbeit begonnen und wird derzeit im Rahmen einer Dissertation aus Mathematik Didaktik an der Universität Salzburg fortgeführt. Dieses Dissertationsprojekt wird von der Österreichischen Akademie der Wissenschaften gefördert.

GeoGebra hat bereits mehrere Bildungssoftware Preise erhalten: European Academic Software Award 2002 (Ronneby, Schweden), L@rnie Award 2003 (Wien), digita 2004 (Köln) und Comenius Siegel 2004 (Berlin).

Durch den Einsatz der frei verfügbaren Software in Schulen und viele anregende Rückmeldungen von Lehrern wird die Funktionalität von GeoGebra stetig erweitert. Dabei wird großes Augenmerk darauf gelegt, bei allen Neuerungen Dynamik und Bidirektionalität zu ermöglichen.

GeoGebra verbindet die Möglichkeiten von DGS und CAS in einer neuen Art und Weise, die hoffentlich zu einem verständlichen Mathematikunterricht beiträgt.

Links

GeoGebra: http://www.geogebra.at

Oberstufenlehrplan Österreich 2004: http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/abs/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml

Kapitel 4

Lerntheorien und e-Learning

In diesem Kapitel werden zunächst kurz die Hauptströmungen der Lernpsychologie sowie das Modell der kognitiven Informationsverarbeitung vorgestellt. Nach einer Begriffsklärung von *e-Learing* werden aufbauend auf dem theoretischen Fundament der Lernpsychologie empirisch belegte Prinzipien des multimedialen Lernens erörtert. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine Diskussion der Rolle von GeoGebra in Bezug auf Lerntheorien und multimediale Gestaltungsprinzipien.

4.1 Lerntheorien und -paradigmen

In diesem Abschnitt werden kurz die Hauptströmungen und Paradigmen der Lernpsychologie vorgestellt (vgl. [11], [77], [72], [138]).

4.1.1 Behaviorismus und Instruktionsparadigma

Im Behaviorismus (z.B. Watson, Skinner, Thorndike, Pawlow) geht es vor allem um die Beschreibung und Steuerung des Lernens durch Hinweisreize und Verstärkung erwünschten Verhaltens. Introspektion - verbale Berichte über Empfindungen, Vorstellungsbilder und Gefühle - wird als inakzeptable Methode zur Untersuchung des Verhaltens angesehen, weil sie zu sehr subjektiven Einflüssen ausgesetzt und daher nicht wissenschaftlich sei. Der Lerner wird als *Black Box* verstanden und den internen Prozessen, die zum Lernen führen, keine Aufmerksamkeit geschenkt.

Wenn beim Lernen die Vermittlung von Wissen von einem Lehrenden zum Lernenden im Vordergrund steht, so spricht man vom *Instruktionsparadigma*. Dieser Ansatz wurde vor allem durch den Behaviorismus etwa in der programmierten Instruktion (Skinner) favorisiert und war auch Bestandteil rezeptiver Lerntheorien der kognitiven Psychologie (z.B. Ausubel).

In den 1960er Jahren sind Computerprogramme entstanden, die eine konkrete Umsetzung der programmierten Instruktion von Skinner darstellten. Dabei wurden die Lerninhalte in sehr kleine linear angeordnete Einheiten gegliedert, auf die jeweils Testfragen folgten. Technisch wurden diese Programme auf Großrechnern mit Textterminals realisiert, da es damals noch keine Personal Computer gab. Aus diesem Grund fanden sie keine große Verbreitung und wurden lediglich an Universitäten und in manchen Unternehmen eingesetzt. Zudem waren die Programme unflexibel und führten oft zu Langeweile, da die Lernenden nur auswendig gelerntes Wissens wiedergeben sollten und die Möglichkeit der Anwendung von erworbenem Wissen fehlte. Außerdem waren die Darstellungsmöglichkeiten auf den Textterminals stark eingeschränkt. Heute entsprechen sogenannte *Drill & Practice* Programme mit vorwiegendem Übungs- und Wiederholungscharakter dem Instruktionsparadigma.

4.1.2 Kognitivismus und Problemlösungsparadigma

Im Kognitivismus (z.B. Piaget, Bruner) spielen die Denk- und Verstehensprozesse eine zentrale Rolle. Im Gegensatz zum Behaviorismus wird der Lernende als Individuum gesehen, das äußere Reize aktiv und selbstständig bearbeitet und nicht einfach durch äußere Reize steuerbar ist.

Man spricht vom *Problemlösungsparadigma*, wenn die aktive Erarbeitung der Inhalte durch den Lerner im Vordergrund steht. Diese Ansicht geht insbesondere auf die Entwicklungspsychologie von Piaget zurück, demzufolge Handlungsweisen in sogenannten *Schemata* zusammengefasst werden. Bei der *Akkomodation* wird ein bestehendes Schema der Umwelt angepasst, während bei der *Assimilation* ein Schema angewandt und damit die Umwelt verändert wird.

> Die Sichtweise des Hirns als ein informationsverarbeitendes Gerät, in etwa wie es der Computer ist, wird als wichtigste heuristische Metapher [Anm.: des Kognitivismus] betrachtet. [4, S. 105]

Im Kommunikationsmodell des Kognitivismus werden Lehrende als Sender, Medien als Überträger und Lernende als Empfänger von Informationen gesehen. Die Informationen sind in einem Medium codiert und werden vom Lernenden mit Hilfe seiner internen Schemata decodiert. Lernprobleme können dann immer darauf zurückgeführt werden, dass entweder die Information fehlerhaft, das gewählte Medium unpassend, oder die Decodierung des Lernenden in irgendeiner Form gestört war - z.B. durch Mangel an Motivation oder Vorwissen.

Auf Grund dieses Informationsverarbeitungsansatzes gibt es Berührungspunkte mit dem Gebiet der Künstlichen Intelligenz (KI), wo versucht wird, intelligentes Verhalten in technischen Systemen zu simulieren. Die Anerkennung individueller Unterschiede bei den Lernenden führte so zur Entwicklung Intelligenter Tutorieller Systeme:

> *Intelligente Tutorielle Systeme (ITS)* sind hochadaptive Systeme, die Methoden der Künstlichen Intelligenz (KI) verwenden. Damit wird eine Ergänzung und Flexibilisierung des traditionellen tutoriellen Ansatzes angestrebt. Das System soll in der Lage sein, unterschiedliche Anforderungen der Lernenden an den Grad der Schwierigkeit und Unterstützung zu erfüllen. Diese sind beispielsweise bei Novizen und Experten sehr unterschiedlich. Auch die Bedürfnisse eines einzelnen Lernenden verändern sich im Laufe der Zeit oder mit den Themengebieten. Eine selbständige Anpassung des Lernsystems an den jeweiligen Benutzer ist im Idealfall mit dem Einsatz individualisierter Strategien durch einen Lehrer vergleichbar. [11, S. 41]

Entdeckendes Lernen

Im Rahmen des Kognitivismus wurde in den 60er Jahren auch das *entdeckende Lernen* insbesondere von Bruner [16] stark betont.

> Das wesentlichste Merkmal des entdeckenden Lernens ist [...] die Tatsache, dass der Hauptinhalt dessen, was gelernt werden soll, nicht gegeben ist, sondern vom Schüler entdeckt werden muss. [3, S. 47]

Die wichtigsten Aspekte des entdeckenden Lernens können wie folgt zusammengefasst werden (vgl. [11, S. 113] und [28, S. 141ff]).

- Entdeckendes Lernen wird durch den Lernenden selbst gesteuert.
- Statt alle relevanten Informationen fertig strukturiert zu präsentieren, muss der Lernende Informationen finden, bewerten und neu ordnen, bevor er daraus Regeln ableiten und Probleme lösen kann.
- Das Entdecken wird geleitet von Neugier und Interesse des Lernenden. Er soll Lösungen für interessante Fragen entwickeln, statt Fakten auswendig zu lernen.
- Ziel des Lernens ist die Ausbildung der Problemlösungsfähigkeit.

Besonders wichtig ist dabei, wie bei jeder Form des selbstgesteuerten Lernens, ein hoher Grad an intrinsischer Motivation.[1] Der Stellenwert des impliziten Lernens[2] und der Intui-

[1]Intrinsische Motivation: Lernen oder Arbeiten aus eigenem, innerem Antrieb und zur persönlichen Befriedigung (z.B. Neugier)

[2]Implizites Lernen erfolgt im Unterschied zu explizitem Lernen unbewusst (z.B. spielerisches Lernen bei Kindern)

tion wird ebenfalls betont. Dem Entdeckenden Lernen wird insgesamt eine motivierende Wirkung zugesprochen.

Die Anwendung des Konzepts des entdeckenden Lernens auf computerunterstützte Lernsysteme führt zur Entwicklung von Lernumgebungen, die unterschiedlichen Lernern auch verschiedene Wege offen lassen und stärkeren Wert auf Metakognition[3] legen:

> The exploration approach in suggesting new subjects implies a more responsible attitude for the learner and requires teacher confidence that elaborating, integrating and orienting for the learner will pay back in the long run. It also trains the learner to work more autonomously and stimulates a higher level of metaknowledge: knowing what you know, knowing how you learn, and knowing how to discuss your knowledge with the system, your classmates, and your teacher in particular. [92, S. 31]

Mikrowelten

Aus dem Kognitivismus ging außerdem das Konzept des Lernens mit *Mikrowelten* hervor. Eine Mikrowelt ist ein Computermodell eines bestimmten Gegenstandsbereichs, welches die Lernenden durch verschiedene Operationen manipulieren können. Damit lassen sich zuvor aufgestellte Hypothesen und Gesetzmäßigkeiten des Systems überprüfen. Im Unterschied zu einer *Simulation* ist die Modellkonstruktion ebenfalls ein wichtiger Aspekt neben der Arbeit mit und an dem Modell (vgl. [5, S. 167]).

Eines der bekanntesten Beispiele einer Mikrowelt ist die von Seymour Papert speziell für Schüler entwickelte Programmiersprache LOGO. Einer der Gründe für den Einsatz von LOGO war die Hoffnung, dass Kinder durch das Erlernen einer Programmiersprache in ihrer allgemeinen kognitiven Entwicklung in Bezug auf logisches Denkvermögen und Problemlösefähigkeit gefördert würden. Dies konnte jedoch nicht nachgewiesen werden (vgl. [129, S. 549f], [9]).

[3]Unter *Metakognition* versteht man Wissen über die eigenen kognitiven Prozesse und deren Bedingungen. Dabei sind drei Bereiche relevant: Wissen über die Person (z.B. über eigene Stärken und Schwächen), über Aufgaben (z.B. über die Bearbeitung schwieriger Texte) sowie über kognitive Strategien (z.B. Strategien zum Auswendiglernen).

4.1.3 Konstruktivismus und konstruktivistisches Paradigma

> Der Konstruktivismus geht davon aus, dass das erkennende Subjekt die Wirklichkeit nicht passiv abbildet, sondern nur aktiv im Erkenntnisprozess für sich konstruieren kann. Gegenstände der Umwelt bewirken beim Betrachter nicht kausal Abbilder ihrer selbst, sondern sie müssen „wahrgenommen“, „erfahren“, „erlebt“ und in die bereits vorhandene Wissenstruktur integriert werden. [76, S. 154]

Aus konstruktivistischer Sicht (z.B. Maturana, Varela, Jonassen) kann Wissen nicht durch Instruktion vermittelt werden, sondern muss vom Lernenden durch aktives Konstruieren (z.B. durch Erfahren, Erleben, Untersuchen) in seine individuelle Erfahrungs-, Erlebnis- und Wissenswelt integriert werden. Im Unterschied zum Behaviorismus betont der Konstruktivismus die internen Verstehensprozesse. In Abgrenzung zum Kognitivismus lehnt er jedoch die Annahme einer Wechselwirkung zwischen der externen Präsentation und dem internen Verarbeitungsprozess ab. Stattdessen wird der individuellen Wahrnehmung, Interpretation und Konstruktion eine wesentlich stärkere Bedeutung eingeräumt (vgl. [126, S. 46]). Das aus dem Konstruktivismus abgeleitete pädagogische Modell, bei dem der Lernende als aktiver Konstrukteur seines Wissens im Mittelpunkt steht, nennt man *konstruktivistisches Paradigma*.

Innerhalb des Konstruktivismus gibt es eine große Bandbreite von Vorstellungen über den Grad des Einflusses, den Unterricht auf Lernprozesse haben kann. Während „radikale“ Konstruktivisten ausschließlich selbstgesteuertes, kollektives Lernen für sinnvoll halten, ist der „moderate“ Konstruktivismus auch gut mit Ideen des entdeckenden Lernens und dem Problemlösungsparadigma aus dem Kognitivismus vereinbar.

Im konstruktivistischen Paradigma ist die Aufgabe des Lehrers vor allem die eines Lernberaters, der den individuellen Konstruktionsprozess anregen und unterstützen, aber nicht wirklich steuern kann und soll. Vielmehr ist er verantwortlich für die Aktivierung der Lernenden, die Anregung des Lernprozesses sowie die Förderung von Metakognition[4] und Toleranz für andere Perspektiven. Damit besteht seine Funktion eher in der Bereitstellung einer herausfordernden Umgebung, welche die Lernenden dazu anregt, Probleme in Zusammenarbeit mit anderen zu lösen. Der Lehrer ist ein wichtiger, aber längst nicht der einzige Einflussfaktor auf die Qualität des Lernprozesses. Damit ist der Gesamtansatz stärker am Lernenden als am Lehrenden orientiert (vgl. [88, S. 253]).

---
[4] vgl. S. 92

4.1.4 Vergleich und Bewertung

Zusammenfassend sind in Abbildung 4.1 die unterschiedlichen Sichtweisen auf Lernende, Lehrende, Methoden und Medien im Behaviorismus (Instruktionismus), Kognitivismus und Konstruktivismus vereinfacht dargestellt.

Die Ablehnung von Introspektion und die Black-Box-Betrachtung des menschlichen Bewusstseins im Behaviorismus führen zu einer Vernachlässigung individueller Faktoren. Behavioristische Erklärungsmodelle beschäftigen sich ausschließlich mit Anreizen durch Belohnung und Zwang, konzentrieren sich also auf die extrinsische Motivation.[5]

Im Unterschied zum Behaviorismus hebt der Kognitivismus die individuellen Unterschiede der Lernenden stark hervor. Der Schwerpunkt des Interesses liegt auf Informationsverarbeitungsprozessen, wobei Lernen als Wechselwirkung eines externen Angebots mit der internen Struktur verstanden wird.

Im Gegensatz dazu sieht der Konstruktivismus die Bildung interner Strukturen als im Wesentlichen durch innere Zustände determiniert. Im Mittelpunkt stehen die Lernenden und nicht länger die Wissensvermittlung. Der Vorteil des konstruktivistischen Paradigmas ist, dass Wissen nicht aufgezwungen, sondern verstanden und damit auch besser behalten wird. Im Idealfall wird Wissen aufgrund von Neugier (intrinsische Motivation) konstruiert (vgl. [11, S. 116], [27]).

Ich vertrete die Auffassung des moderaten Konstruktivismus, der Lernende als Konstrukteure ihres Wissens und Lehrer als Lernberater sieht, die diesen Prozess so gut wie möglich unterstützen sollen. Als geeignete Möglichkeiten dafür erscheinen mir insbesondere entdeckendes Lernen und das Problemlösungsparadigma des Kognitivismus. Auch ein völliger Verzicht auf das Instruktionsparadigma ist allein schon aus zeitlichen Gründen in Schulen nicht sinnvoll. Daher hat jedes der drei vorgestellten Lernparadigmen in bestimmten Situationen seine Berechtigung.

Insgesamt ist jedoch eine stärkere Betonung kognitiver und konstruktivistischer Ansätze in der Unterrichtspraxis wünschenswert. Die Software *GeoGebra* und die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Materialien versuchen für den Mathematikunterricht einen entsprechenden Beitrag zu leisten.

[5] Bei extrinsischer Motivation liegt das Ziel außerhalb des eigentlichen Lernbereiches. Beispiele sind das Lernen für gute Noten, zur Vermeidung von Bestrafung oder weil eine Belohnung durch Lehrende oder Eltern erwartet wird.

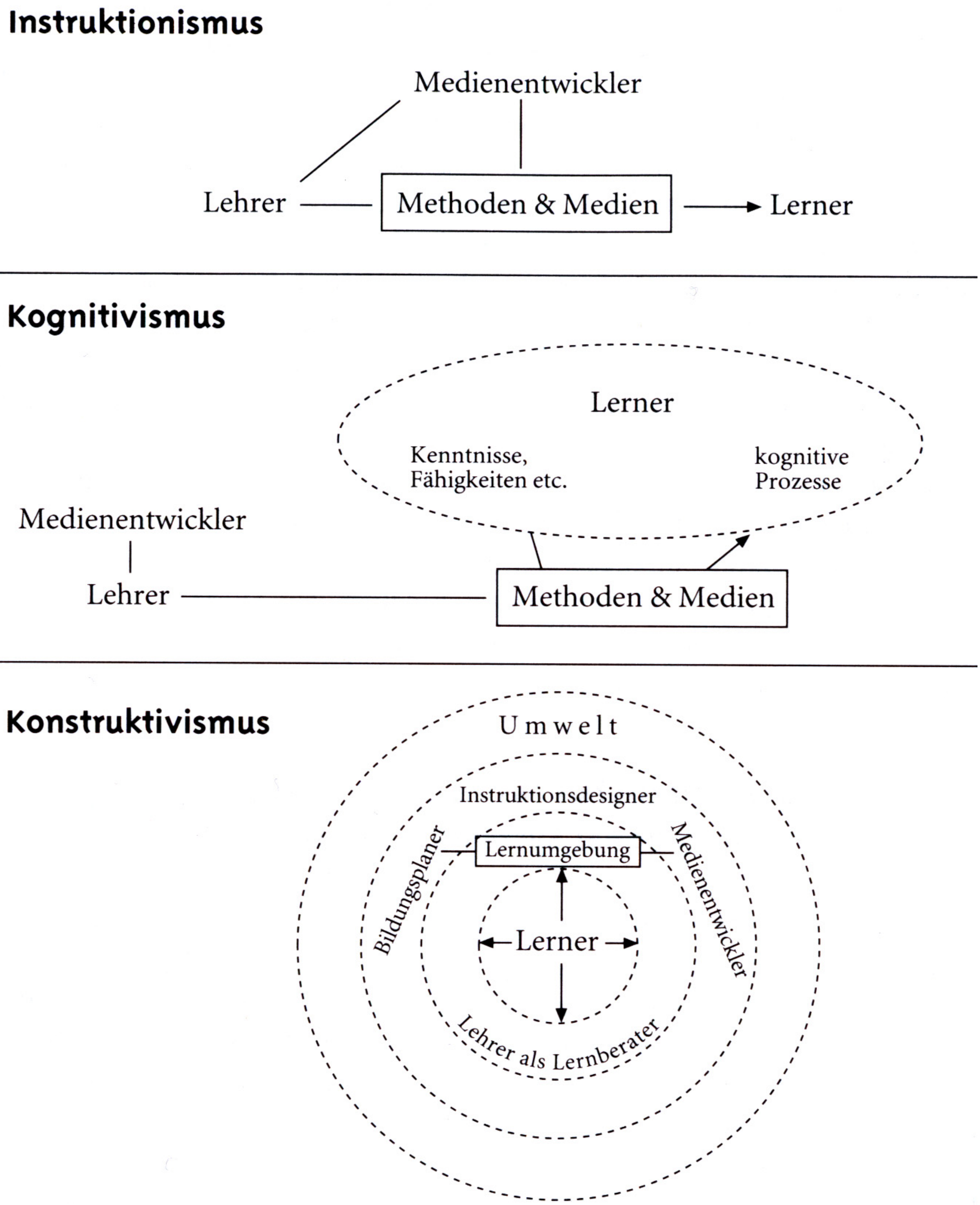


Abbildung 4.1: Vereinfachte Darstellung der Sichtweisen vom Lernen mit Medien in Behaviorismus (Instruktionismus), Kognitivismus und Konstruktivismus [76, S. 156]

4.2 Was ist e-Learning?

Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir in diesem Kapitel von folgender Definition ausgehen:

> We define e-Learning as instruction delivered on a computer by way of CD-ROM, Internet, or intranet with the following features:
>
> - Includes content relevant to the learning objective
> - Uses instructional methods such as examples and practice to help learning
> - Uses media elements such as words and pictures to deliver the content and methods
> - Builds new knowledge and skills linked to individual learning goals or to improved organizational performance
>
> [19, S. 13]

Diese Definition beantwortet die Fragen nach dem *Was*, *Wie* und *Warum* von e-Learning, wie im Folgenden deutlich wird.

Was. e-Learning Kurse beinhalten sowohl konkrete Inhalte (Informationen) als auch didaktische Methoden, welche Menschen dabei helfen, diese Inhalte zu lernen.

Wie. e-Learning Kurse sind über Computer verfügbar und verwenden geschriebene oder gesprochene Texte und Abbildungen in Form von Zeichnungen, Fotos, Animationen oder Filmen.

Warum. e-Learning Kurse sollen Lernern dabei helfen, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben, sei es aus eigenem Interesse oder als Teil einer Organisation (z.B. Firma oder Schule).

Das *e* in e-Learning bezieht sich auf das *Wie*, da e-Learning Kurse in elektronischer Form gespeichert und zur Verfügung gestellt werden. Das *learning* bezieht sich auf das *Was* und *Warum*.

Viele der heutigen e-Learning Kurse sind im kommerziellen Kontext anzutreffen: einerseits wird e-Learning verbreitet zur Schulung von Mitarbeitern in Unternehmen und andererseits im Bereich der Erwachsenenbildung, beispielsweise für Fernstudien, eingesetzt. Im ersten Fall geht es um die Steigerung der Produktivität eines Unternehmens, im zweiten Fall um spezielle Qualifikationsnachweise oder akademische Grade für Privatpersonen. Der Einsatz von e-Learning Kursen in Schulen steht im Vergleich dazu erst ganz am Anfang, wo nach wie vor traditionelle Medien wie das Schulbuch dominieren. Neue Technologien sind für Schüler und Eltern oft nur ein Thema für den Nachmittagsmarkt, wo Lernspiele und insbesondere Programme und CD-ROMs für Zwecke der Nachhilfe zu finden sind.

Die obige Definition von e-Learning umfasst übrigens sowohl *distance learning* als auch *blended learning*. Unter *distance learning* versteht man e-Learning über das Internet oder auch *online learning*. Hierbei treffen sich Lehrende und Lernende nie oder fast nie persönlich. Beim *blended learning* werden hingegen die Vorteile von Präsenzveranstaltungen und elektronischen Lernformen verbunden. e-Learning wird hier insbesondere in der Vor- und Nachbereitung der Präsenzveranstaltungen eingesetzt. e-Learning in Schulen ist daher praktisch immer blended learning.

4.2.1 Ist e-Learning besser?

Führt der Einsatz von e-Learning Kursen zu besseren Lernerfolgen als der Einsatz von traditionellen Medien wie Büchern?

Jede neue Technologie im Bereich des Bildungswesens hat optimistische Vorhersagen über große Lernfortschritte mit sich gebracht. Als Beispiel sei hier eine der ersten Medien-Vergleichsuntersuchung aus dem Jahre 1947 angeführt [47]:

Damals versuchte die U.S. Army zu zeigen, dass der Einsatz von Filmen bessere Lernerfolge bringt als traditioneller Unterricht in der Klasse oder Unterlagen auf Papier. Dazu wurden drei Versionen von Unterrichtseinheiten zum Ablesen eines Mikrometers entwickelt. Die Film-Version enthielt eine moderierte Demonstration des Ablesens eines Mikrometers. In der zweiten Version wurde im Klassenraum unterrichtet, wobei der Lehrer dasselbe Skriptum wie im Film zusammen mit einem echten Mikrometer und Overhead-Folien verwendete. In der dritten Version bekamen die Lerner ein Skriptum mit Abbildungen und Texten aus dem Film zum Selbststudium. Die Probanden wurden zufällig einer der drei Versionen zugewiesen und nach dem Unterricht getestet, wie gut sie ein Mikrometer ablesen konnten. Welche Gruppe lernte am meisten? Es gab keine signifikanten Unterschiede im Lernerfolg zwischen den drei Gruppen.

In sehr vielen nachfolgenden Medien-Vergleichsstudien konnten mit wenigen Ausnahmen ebenfalls keine signifikanten Unterschiede gefunden werden (vgl. [20, 24]). Es machte beispielsweise keinen Unterschied für den Lernerfolg, ob ein Text in einem Buch oder auf einem Computer-Bildschirm gelesen wurde.

> What we have learned from all the media comparison research is that it's not the medium, but rather the instructional methods that cause learning. When the instructional methods remain essentially the same, so does the learning, no matter how the instruction is delivered. [19, S. 21]

Vor allem die Aufbereitung der Inhalte ist entscheidend und nicht das Medium selbst. Warum sollte man dann überhaupt e-Learning einsetzen? Verschiedene Medien bieten unterschiedliche Möglichkeiten des Einsatzes von didaktischen Methoden. e-Learning kann also nur dann vorteilhaft genutzt werden, wenn die besonderen Möglichkeiten dieses Mediums so eingesetzt werden, dass sie menschliches Lernen effektiv unterstützen.

4.2.2 Welche Vorteile bietet e-Learning?

Was sind nun die besonderen Möglichkeiten von e-Learning? Es ist klar, dass nicht alle Medien für sämtliche Methoden gleich gut geeignet sind. Beispielsweise ist ein Buch kein gutes Medium, um Animationen darzustellen.

> Three potentially valuable instructional methods unique to e-Learning are:
>
> 1. practice with automated tailored feedback
> 2. integration of collaboration with self-study, and
> 3. use of simulation to accelerate expertise.
>
> [19, S. 21]

In e-Learning Kursen können Lerner sehr direkt Rückmeldungen über ihre Lernfortschritte bekommen, sei es durch interaktive Aufgaben, Hilfe-Agenten oder Tests zur Überprüfung des Lernerfolgs am Ende einer Lerneinheit. e-Learning Kurse können sowohl selbstständiges Lernen als auch die Zusammenarbeit mit anderen fördern. Lerner können Lernwege und Lerntempo selbstständig bestimmen und bei Bedarf Unterstützung und Rat bei anderen suchen. Simulationen realer Situationen und komplexer Zusammenhänge ermöglichen den Transfer des erworbenen Wissens auf Anwendungssituationen insbesondere im Alltag der Lerner.

4.2.3 Kognitive Prozesse und e-Learning

In diesem Abschnitt wird ein Modell der grundlegenden kognitiven Prozesse beim Lernen beschrieben. Dieses bildet eine wichtige theoretische Basis für die im nächsten Abschnitt angeführten Prinzipien des multimedialen Lernens.

Wie funktioniert Lernen? Die kognitive Lerntheorie gibt darauf in Bezug auf e-Learning folgende grundlegenden Antworten (vgl. [19, S. 35]):

1. Das menschliche Gedächtnis hat zwei Kanäle, um Informationen zu verarbeiten: den visuellen und den auditiven Kanal.

2. Das menschliche Gedächtnis hat eine beschränkte Kapazität, um Informationen zu verarbeiten.

3. Lernen geschieht durch aktive Verarbeitung im Gedächtnis.

4. Neues Wissen und neue Fähigkeiten müssen aus dem Langzeitgedächtnis wieder abgerufen werden können, um auf Anwendungssituationen transferiert werden zu können.

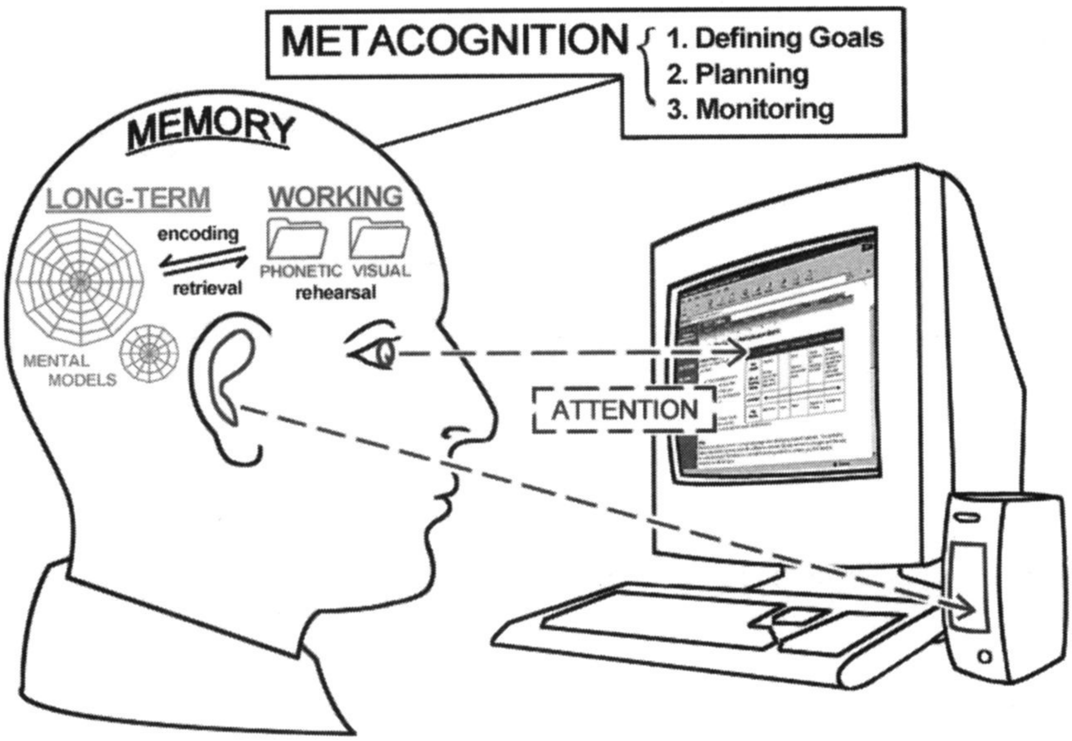


Abbildung 4.2: Kognitive Prozesse und e-Learning, [19, S. 35]

Abbildung 4.2 zeigt, wie die Informationsverarbeitung während einer e-Learning Einheit abläuft. Visuelle und auditive Informationen werden über Augen und Ohren aufgenommen, kurz im visuellen und auditiven sensorischen Gedächtnis gespeichert, ins Kurzzeitgedächtnis (working memory) weitergeleitet und schließlich permanent im Langzeitgedächtnis (long-term memory) gespeichert.[6]

Das Zentrum des Bewusstseins liegt im Kurzzeitgedächtnis, da hier das aktive Denken stattfindet. Dieser Teil des Gedächtnisses kann nur etwa 5 bis 9 Informationseinheiten (*chunks*) gleichzeitig verarbeiten. Damit Lernen stattfindet, müssen die neuen Informationen im Kurzzeitgedächtnis in das vorhandene Wissen im Langzeitgedächtnis integriert werden. Diesen Vorgang nennt man *Enkodierung* (encoding). Das Enkodieren erfordert

[6]vgl. für eine detaillierte Beschreibung dieser Abläufe [138, S. 235ff]

eine aktive Verarbeitung der Informationen im Kurzzeitgedächtnis. Diese aktive Verarbeitung wird *elaborierendes Wiederholen* (rehearsal) genannt. Es genügt allerdings nicht, neues Wissen und neue Fähigkeiten im Langzeitgedächtnis zu enkodieren. Entscheidend ist, dass dieses Wissen später auch wieder in Anwendungssituationen abgerufen werden kann (retrieval). In diesem Fall spricht man von gelungenem *Transfer*.

4.3 Gestaltungsprinzipien für Multimedia

In diesem Abschnitt werden die Gestaltungsprinzipien für Multimedia von Mayer (vgl. [103], [19]) vorgestellt. Diese empirisch belegten Prinzipien beruhen auf dem im letzten Abschnitt besprochenen Modell der kognitiven Informationsverarbeitung und geben konkrete Hinweise für die Art und Weise, wie e-Learning Kurse aufgebaut werden sollten.

Ein ganz entscheidender Ausgangspunkt ist die Einsicht, dass die Kapazität des Kurzzeitgedächtnis einerseits relativ klein ist und dort andererseits während des Lernens eine aktive Verarbeitung der neuen Informationen vor sich gehen soll. Die Gefahr, das Kurzzeitgedächtnis mit zu vielen Informationen zu überfordern, ist daher relativ groß.

> Therefore, instructional methods that overload working memory make learning more difficult. The burden imposed on working memory is the form of information that must be held plus information that must be processed is referred to as *cognitive load*. Methods that reduce cognitive load foster learning by freeing working memory capacity for the rehearsal and integration process. [19, S. 38]

Die folgenden Gestaltprinzipien von Clark und Mayer (vgl. [19]) basieren auf kontrollierten empirischen Untersuchungen und geben konkrete Hinweise, wie verschiedene mediale Elemente didaktisch sinnvoll miteinander kombiniert und cognitive overload vermieden werden können.

Multimedia Principle: use words and graphics rather than words alone

Contiguity Principle: place corresponding words and graphics near each other

Modality Principle: present words as audio narration rather than onscreen text

Redundancy Principle: presenting words in both text and audio narration can hurt learning

Coherence Principle: adding interesting material can hurt learning

Personalization Principle: use conversational style and virtual coaches

Learner Control Principle: use learner control for learners with high prior knowledge or high metacognitive skills

Mit ‘words’ sind neben geschriebenen auch gesprochene Texte gemeint. Unter ‘graphics’ (Abbildungen) sind sowohl statische Bilder wie Zeichnungen, Diagramme, Landkarten oder Fotos als auch dynamische Abbildungen wie Animationen oder Videos zu verstehen. Man unterscheidet übrigens zwischen *erklärenden* Abbildungen, die sich direkt auf Inhalte des Kurses beziehen, und rein *dekorativen* Abbildungen, die nur der Verschönerung von Seiten oder als Blickfang dienen. Dekorative Abbildungen lenken eher vom eigentlichen Inhalt ab und können sogar einen negativen Einfluss auf den Lernerfolg haben (vgl. Kohärenzprinzip, S. 104)

4.3.1 Multimedia Prinzip

Multimedia Principle: use words and graphics rather than words alone

In mehreren Untersuchungen zum *Multimedia Prinzip* (vgl. [19, S. 61ff]) konnte gezeigt werden, dass die Verwendung von Text mit begleitenden Abbildungen deutlich bessere Lernerfolge brachte als der alleinige Einsatz von Text. In einer Studie von Moreno und Mayer [105] wurde ein mathematisches Computerspiel entwickelt, mit dem Schüler das Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen lernen sollten. In dem Programm wurde ein gezeichneter Hase verwendet, um dies veranschaulichen. Im Beispiel $2-(-3)$ etwa startete der Hase am Zahlenstrahl bei 2, drehte sich nach links, wanderte drei Schritte zurück und landete bei 5. Die Kontrollgruppe arbeitete hingegen mit einem Drill & Practice Programm, das nur textbasiert war. Es zeigte sich, dass die Lernerfolge mit der Kombination von Text und Veranschaulichung wesentlich besser waren als mit der reinen Textversion.

4.3.2 Kontiguitätsprinzip

Contiguity Principle: place corresponding words and graphics near each other

Ein Beispiel für die Realisierung des *Kontiguitätsprinzips* sind pop-up Texte, die erscheinen, wenn man mit der Maus über eine bestimmte Stelle einer Grafik fährt (*mouse over* oder *rollover*). Weitere Möglichkeiten sind das Integrieren von Text in Grafiken sowie das Nebeneinander-Stellen von Text und zugehöriger Grafik auf einer Bildschirmseite. Untersuchungen der Augenbewegungen von Lernern anhand von Texten und zugehörigen Diagrammen haben ergeben, dass erfolgreiche Lerner zunächst einen kurzen Abschnitt Text lesen, dann das beschriebene Objekt im Diagramm suchen, danach im Text weiterlesen und das nächste Objekt im Diagramm suchen usw. (vgl. [50]). Daher ist es sinnvoll, solche Texte etwa als Liste übersichtlich darzustellen und in der Nähe der Grafik zu positionieren. In keinem Fall sollten Text und Grafik in verschiedenen Fenstern angeboten werden.

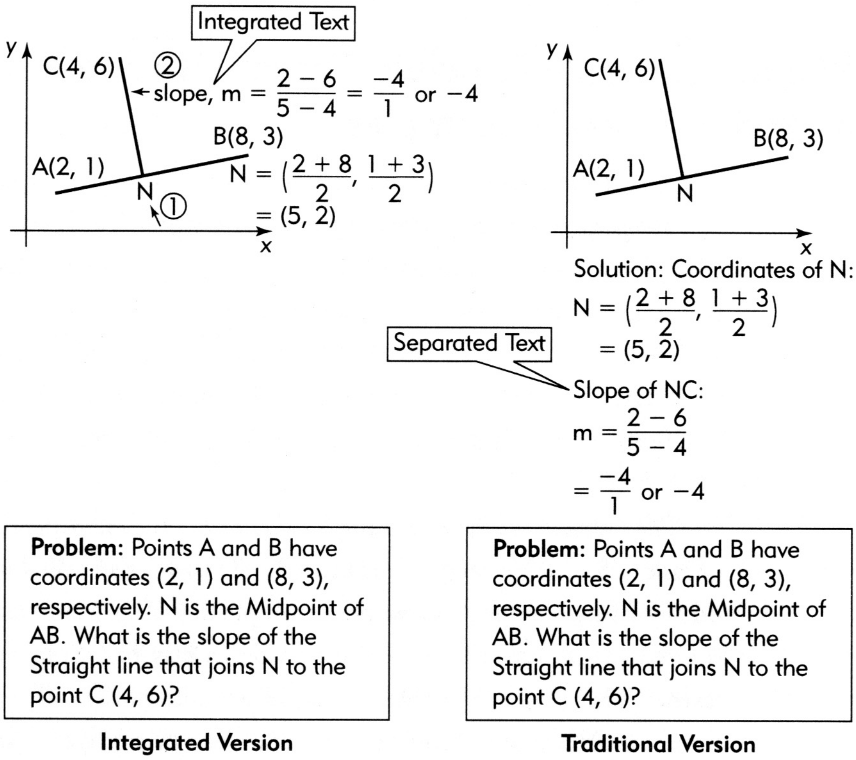


Abbildung 4.3: Vergleich von Textelementen außerhalb und innerhalb einer Grafik, [19, S. 185]

In einer Untersuchung von Sweller [125] wurden Probanden zwei unterschiedliche Versionen eines ausgearbeiteten Geometrie-Beispiels präsentiert (vgl. Abbildung 4.3). Im einen Fall wurden die Umformungen zur Berechnungen der Lösung innerhalb der Grafik dargestellt (integrated text), im anderen Fall (traditional version) darunter (separated text). Auch hier bestätigte sich das Kontiguitätsprinzip: die Gruppe mit den integrierten Texten schnitt bei einem Post-Test deutlich besser ab als jene mit den Berechnungen unterhalb der Grafik.

4.3.3 Modalitätsprinzip

Modality Principle: present words as audio narration rather than onscreen text

Das *Modalitätsprinzip* besagt, dass es besser ist, Informationen auf beide kognitive Kanäle aufzuspalten - gesprochenen Text auf den auditiven und Abbildungen auf den visuellen Kanal - als für Texte und Bilder nur den visuellen Kanal zu verwenden. Dadurch ist die Gefahr der Überlastung des visuellen Kanals geringer. Obwohl dieses Prinzip in mehreren Studien empirisch untermauert werden konnte, gibt es doch wichtige Ausnahmen insbesondere im Zusammenhang mit komplexen Inhalten wie jenen der Mathematik:

> For example, a mathematical formula may be part of an audio explanation of an animated demonstration, but because of its complexity, it should remain visible as onscreen text. [19, S. 87]

Ein technisches Problem des Einsatzes von digitalisierter Sprache sind die im Vergleich zu Texten und Bildern relativ großen Datenmengen. Die Bandbreiten vieler Internet Zugänge lassen hochqualitatives Audio-Streaming noch immer nicht zu, weshalb gesprochene Texte derzeit vorwiegend in CD oder DVD basierten Lernumgebungen Verwendung finden.

4.3.4 Redundanzprinzip

Redundancy Principle: presenting words in both text and audio narration can hurt learning

Das *Redundanzprinzip* besagt, dass die gleichzeitige Verwendung von Grafiken zusammen mit geschriebenem Text und identischem gesprochenen Text zu einer Verschlechterung des Lernerfolgs führen kann.

Diese Aussage ist insofern bemerkenswert als sie in klarem Gegensatz zu der weit verbreiteten Vorstellung steht, dass es Menschen mit visuellen und solche mit auditiven Lernstilen gibt. Nach dieser *Lerntypen Hypothese* müsste es besser sein, sowohl geschriebenen als auch gesprochenen Text anzubieten, sodass beide Lerntypen bedient werden. Diese Hypothese basiert auf dem Instruktionsparadigma (siehe S. 89), bei dem die Vermittlung von Wissen im Vordergrund steht. Der Lernende wird als leeres Gefäß gesehen, das lediglich mit der richtigen Information gefüllt werden muss.

Die kognitive Lerntheorie (vgl. Abbildung 4.2, S. 99) besagt hingegen, dass redundanter Bildschirmtext in einer Multimedia Präsentation den visuellen Kanal überfordern könnte. Tatsächlich konnte das Redundanzprinizip in mehreren Untersuchungen (vgl. [19, S. 103ff]) belegt werden. Wie schon beim Modalitätsprinzip gibt es aber auch hier Situationen, in denen das Redundanzprinzip nicht gilt und es Sinn macht, gesprochenen und geschriebenen Text gleichzeitig anzubieten:

- Wenn neben dem Text keine Abbildungen vorhanden sind.
- Wenn die Lernenden genügend Zeit haben, um Text und Abbildungen zu verarbeiten.
- Wenn es sich um für die Lernenden schwer verständliche Texte handelt.

4.3.5 Kohärenzprinzip

Coherence Principle: adding interesting material can hurt learning

Das *Kohärenzprinzip* erscheint zunächst verwunderlich, besagt es doch, dass das Hinzufügen von interessantem Material Lernen behindert. Gemeint sind hierbei für den Inhalt des e-Learning Kurses im Wesentlichen belanglose Materialien wie ...

1. unterhaltsame Geschichten, die nicht direkt mit dem Lernziel zusammenhängen
2. Dekorative Abbildungen, Hintergrundmusik und Soundeffekte, um die Motivation zu steigern
3. detaillierte Beschreibungen in Textform

Solche möglicherweise interessanten, aber für die Lernziele irrelevanten Informationen können das Lernen auf mehrere Arten behindern (vgl. [19, S. 111f]):

- Ablenkung: die Aufmerksamkeit des Lernenden wird von relevantem zu irrelevantem Material gelenkt
- Störung: das irrelevante Material behindert den Lernenden bei der Verarbeitung der relevanten Informationen
- Verführung: der Lernende wird dazu verleitet, das angebotene Material mit unpassendem Vorwissen zu verknüpfen

Das Kohärenzprinzip besagt also, dass man e-Learning Kurse nicht durch überflüssige Abbildungen, Animationen, Musik „aufpeppen“ soll, um sie schöner, spannender oder interessanter erscheinen zu lassen. Bereits 1913 hat Dewey bezweifelt, dass das Hinzufügen interessanter Materialien zu langweiligen Inhalten Lernen fördern kann:

> When things have to be made interesting, it is because interest itself is wanting. Moreover, the phrase is a misnomer. The thing, the object, is no more interesting than it was before. [22, S. 11f]

Interesse ist keine Zutat, die man im Nachhinein durch aufwändige Gestaltung hinzufügen kann. Dewey sollte damit Recht behalten: die kognitive Lerntheorie besagt, dass irrelevante Informationen zu cognitive overload beitragen und daher die Informationsverarbeitung und damit Lernen behindern. Diese Tatsache wurde in zahlreichen kontrollierten Studien nachgewiesen ([19, S. 118ff]). Eine aufregend gestaltete Lernumgebung garantiert nicht, dass Lernende sich vermehrt anstrengen, die Inhalte zu verstehen. Es ist eher umgekehrt: wenn Lernende die Inhalte verstehen, empfinden sie dabei Freude. Verstehen führt zu Vergnügen und nicht umgekehrt.

4.3.6 Personalisierungsprinzip

Personalization Principle: use conversational style and virtual coaches

Das *Personalisierungsprinzip* empfiehlt die Verwendung von Umgangssprache[7] in Texten anstelle von formeller Sprache. Der Lernende soll in Texten direkt angesprochen und wie ein Dialogpartner einbezogen werden, etwa durch die Verwendung der Worte 'ich' und 'du' bzw. 'Sie'.

Ein häufiger Einwand gegen dieses Prinzip ist, dass Umgangssprache von der Ernsthaftigkeit und Bedeutung der Inhalte ablenkt. Außerdem sei das Ziel eines Kurses die effiziente Vermittlung von Informationen, wofür formelle Sprache besser geeignet sei als Umgangssprache.

Diese Ansicht basiert auf dem Instruktionsparadigma (vgl. S. 89) und übersieht die Tatsache, dass der Lernende eine entscheidene Rolle bei der Verarbeitung der angebotenen Informationen und der Konstruktion von Wissen spielt. So haben Studien gezeigt (vgl. [6]), dass sich Lernende mehr anstrengen Inhalte zu verstehen, wenn sie sich wie in einer Unterhaltung mit einem Gesprächspartner fühlen als wenn sie nur formelle Informationen erhalten.

Das folgende Beispiel zum Unterschied zwischen der formalen und personalsierten Version eines Textes stammt aus einer Untersuchung von Moreno und Mayer [106]. Lernende mit der personalisierten Version erzielten deutlich bessere Erfolge als jene Gruppe mit dem formellen Text:

Formal Version: „This program is about what type of plants survive on different planets. For each planet, a plant will be designed. The goal is to learn what type of roots, stem, and leaves allow the plant to survive in each environment. Some hints are provided throughout the program.“

Personalized Version: „You are about to start a journey where you will be visiting different planets. For each planet, you will need to design a plant. Your mission is to learn what type of roots, stem, and leaves will allow your plant to survive in each environment. I will be guiding you through by giving out some hints.“

Eine weitere Möglichkeit, um Lernende direkt und persönlich anzusprechen sind sogenannte *pädagogische Agenten*. Diese sind Darstellungen von Charakteren wie Cartoons, Videos von realen Personen oder Avatare[8], welche den Lernenden durch den e-Learning Kurs mit geschriebenem oder gesprochenem Text begleiten. Untersuchungen zum Einsatz solcher Agenten unterstützen bislang ebenfalls das Personalisierungsprinzip: die Verwendung von Umgangssprache führt zu besseren Lernerfolgen als formeller Stil (vgl. [19, S. 138ff]).

[7] hier zu verstehen als 'dialogorientierte Sprache' (conversational style)

[8] virtuelle Figuren

4.3.7 Selbststeuerungsprinzip

Learner Control Principle: use learner control for learners with high prior knowledge or high metacognitive skills

Im Unterschied zum traditionellen Unterricht in der Klasse kann man in e-Learning Kursen die Lernenden wählen lassen, welche Themen sie wann bearbeiten, wie schnell sie weiter gehen und ob sie Teile wie etwa Beispiele oder Übungen ganz überspringen möchten. Wenn Lernende diese Entscheidungen weitgehend selbst treffen können, so spricht man von *Selbststeuerung* (learner control), andernfalls von *Fremdsteuerung* (program control).

Der traditionelle Unterricht in einer Klasse ist üblicherweise fremdgesteuert: das Tempo wird vorgegeben, der Unterricht verläuft linear aufbauend und es werden dieselben Unterrichtsmethoden für alle Lernenden verwendet. Selbststeuerung kann in Bezug auf e-Learning verschiedene Erscheinungsformen haben (vgl. [19, S. 227ff]):

1. Reihenfolge: der Lernende kann die Reihenfolge der Inhalte frei wählen. Dazu gibt es Auswahlmenüs.

2. Tempo: der Lernende kann entscheiden, wie lange er sich mit einem bestimmten Inhalt beschäftigen möchte (Ausnahmen: kurze Video oder Audio Sequenzen). Es gibt eine ‘Beenden’ oder ‘Zurück’ Schaltfläche auf jeder Bildschirmseite.

3. Lernunterstützung: der Lernende kann entscheiden, ob er zusätzlich durch Beispiele, Übungen, Definitionen oder weitere Verweise beim Lernen unterstützt werden möchte.

Es hat sich gezeigt, dass e-Learning Kurse, die Selbststeuerung in der eben beschriebenen Weise ermöglichen, bei Lernenden sehr beliebt sind. Die Lernerfolge bei solchen Kursen sind allerdings sehr heterogen. Selbststeuerung ist nur dann effektiv, wenn ein Lerner in der Lage sind, für ihn passende Entscheidungen zu treffen. Wenn jemand gut beurteilen kann, welche Inhalte er schon verstanden hat und welche noch nicht, dann kann er auch gute Entscheidung darüber treffen, welche Inhalte er sich noch ansehen sollte und wie viel Energie und Zeit er darin investieren will.

Young [137] hat in einer Studie die Lernerfolge von Lernern mit hohen und niedrigen metakognitiven[9] Fähigkeiten getestet, die vier e-Learning Einheiten mit Selbststeuerung bzw. Fremdsteuerung zu absolvieren hatten. Bei Selbststeuerung konnten die Probanden Definitionen, Beispiele und Übungen wählen oder überspringen, während die Gruppe bei Fremdsteuerung alle diese Inhalte durchlaufen musste. Die Lerner der selbstgesteuerten Version sahen sich weniger als 50 Prozent aller verfügbaren Bildschirmseiten an. Tabelle 4.1 zeigt die Ergebnisse der Studie: die Lernenden mit geringen metakognitiven Fähigkeiten aus der Selbststeuerungsgruppe schnitten mit Abstand am schlechtesten ab.

[9] vgl. Metakognition, S. 92

	Selbststeuerung	Fremdsteuerung
Niedrige metakognitive Fähigkeiten	20%	79%
Hohe metakognitive Fähigkeiten	60%	82%

Tabelle 4.1: Ergebnisse der Studie von Young [137]

Im Zusammenhang mit den metakognitiven Fähigkeiten sind auch Selbsteinschätzungstests (calibration) interessant. Dabei wird eine Person befragt, wie sie vor einem Test über ein bestimmtes Fachgebiet ihre zu erwartende Leistung einschätzt. Nach dem Test werden dann die tatsächlichen Ergebnisse mit den geschätzten verglichen. Untersuchungen von Glenberg [44] ergaben, dass die Korrelation zwischen geschätzten und tatsächlichen Werten bei solchen Tests fast Null ist:

> „Contrary to intuition, poor calibration of comprehension is the rule, rather than the exception.“ [44, S. 119]

Diese Resultate geben Anlass dazu, vorsichtig mit Selbststeuerung umzugehen. Zusammenfassend (vgl. [122]) lässt sich sagen, dass selbstgesteuerte Kurse nicht gut geeignet sind für Lerner mit geringem Vorwissen oder geringen metakognitiven Fähigkeiten. Selbststeuerung führt eher zu Lernerfolgen, wenn

- die Lerner Vorwissen über die Inhalte mitbringen.
- die Inhalte eher gegen Ende eines Kurses bzw. der Kurs eher gegen Ende des Lehrplans behandelt werden.
- die Lerner gute metakognitive Fähigkeiten haben.
- der Schwierigkeitsgrad des Kurses gering ist.

Eine völlige Selbststeuerung (wie etwa beim Surfen im Internet) wird also in vielen Fällen nicht zum gewünschten Lernerfolg führen. Oft wird es sinnvoller sein, nur gewisse Teile eines Kurses selbstgesteuert zu belassen und andere Teile verpflichtend vorzugeben (z.B. Übungen). Ein auwändigerer Ansatz ist, dem Lernenden auf Basis von Ergebnissen bei Zwischenüberprüfungen Empfehlungen zu geben, welche Teile er gegebenenfalls wiederholen bzw. wie er weiter machen soll. Der Vorteil dieser beiden Lösungen im Vergleich zu einem völlig fremdgesteuerten Kurs: die Lernenden arbeiten mit mehr Freude an dem Kurs, wenn sie zumindest teilweise Entscheidungen über Reihenfolge, Tempo und Inhalte machen können.

4.4 Die Rolle von GeoGebra

In diesem Abschnitt wird auf den lerntheoretischen Hintergrund von GeoGebra und die Rolle des Programms in Bezug auf die Gestaltungsprinzipien multimedialen Lernens eingegangen.

4.4.1 Lerntheoretischer Hintergrund von GeoGebra

GeoGebra basiert auf einer gemäßigten konstruktivistischen Sicht des Lernens (vgl. S. 4.1.3). Die Software bietet den Schülern Freiräume, um in (zumindest teilweise) selbstgesteuerten Experimenten mathematische Zusammenhänge entdecken und verstehen zu können. GeoGebra wurde in erster Linie für Schüler entwickelt und stellt die Lernenden als aktive Konstrukteure ihres Wissens in den Mittelpunkt.[10]

Neben der konstruktivistischen Sicht der Lernenden waren und sind insbesondere die Konzepte des entdeckenden Lernens (vgl. S. 91) und das Problemlösungsparadigma (vgl. S. 90) des Kognitivismus bestimmende Ideen bei der Entwicklung der Software.

Aus kognitivistischer Sicht ist GeoGebra eine *Mikrowelt* (vgl. S. 92): es stellt ein Computermodell mathematischer Objekte dar, das von den Lernenden interaktiv - und sogar dynamisch - manipuliert werden kann. Der Gegenstandsbereich beschränkt sich dabei nicht wie bei anderen dynamischen Geometrie Systemen im Wesentlichen auf die Elementargeometrie, sondern er umfasst auch wichtige, für die Schule relevante Teile der analytischen Geometrie und Analysis.

Aus konstruktivistischer Sicht ist GeoGebra ein *kognitives Werkzeug* (cognitive tool, dt. auch *kognitives Medium*; vgl. [25, 79]). Ein kognitives Werkzeug wird im Gegensatz zu behavioristischen Konzeptionen vom Lerner kontrolliert und von ihm gesteuert. Die kognitiven Werkzeuge lassen sich in einem Würfel in Abhängigkeit vom Grad der Lerneraktivität, der Art der Kontrolle und der Produktionsart einordnen (vgl. Abbildung 4.4).

GeoGebra betont die aktive Rolle der Schüler (Lerneraktivität), indem es Ihnen Möglichkeiten zur interaktiven Exploration mathematischer Zusammenhänge bietet. Die Lernenden können selbst Konstruktionen erstellen und dadurch kreativ mathematische Modelle entwickeln (Produktionsart). Die Steuerung dieser Abläufe geht dabei vor allem von den Schülern aus (Art der Kontrolle und Steuerung). GeoGebra stellt damit eine entgegengesetzte Position zur programmierten Instruktion[11] dar, die den Lerner vorwiegend passiv sieht und Präsentation sowie Kontrolle und Steuerung dem System überlässt.

[10] vgl. Operatives Prinzip, S. 17
[11] vgl. Behaviorismus, S. 89

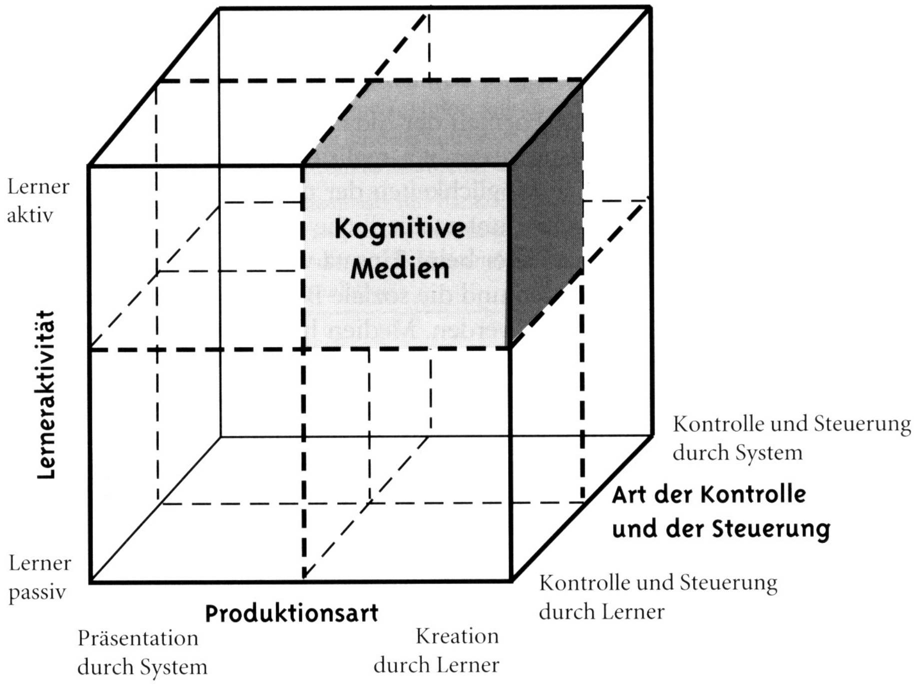


Abbildung 4.4: Kognitive Werkzeuge (Medien) nach Jonassen [89, S. 15]

4.4.2 GeoGebra und die Gestaltungsprinzipien für Multimedia

GeoGebra basiert auf dem *KISS Prinzip* (keep it short, simple) aus der Informatik. Damit ist gemeint, dass die Benutzeroberfläche eines Programmes überschaubar bleiben soll. Dieses Prinzip deckt sich mit dem in Abschnitt 4.2.3 (S. 98) vorgestellten Modell der kognitiven Prozesse beim Lernen mit neuen Medien. Eine zentrale Konsequenz dieses Modells ist, dass die Überlastung des Kurzzeitgedächtnisses durch zu viele Informationen Lernen behindert (cognitive overload, vgl. S. 100). Aus diesem Grund wurde und wird bei der Gestaltung der Benutzeroberfläche von GeoGebra darauf geachtet, eine einfache und übersichtliche Struktur zu wahren (vgl. Abbildung 4.5).

GeoGebra ist zwar vor allem als kognitives Werkzeug (vgl. S. 108) für Schüler konzipiert, die Software eignet sich aber auch für die Erstellung von Lernmaterialien durch Lehrer. Einerseits können maßstabsgetreue statische Abbildungen von geometrischen Konstruktionen und mathematischen Graphen in hoher Qualität erzeugt werden (Postscript Export), andererseits ist die Erstellung sogenannter *dynamischer Arbeitsblätter*[12] möglich. Bei der Gestaltung solcher Lernmaterialien sollten die Prinzipien multimedialen Lernens (vgl. S. 100ff) berücksichtigt werden.

[12]vgl. insbesondere den Lernpfad *Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra*, S. 137

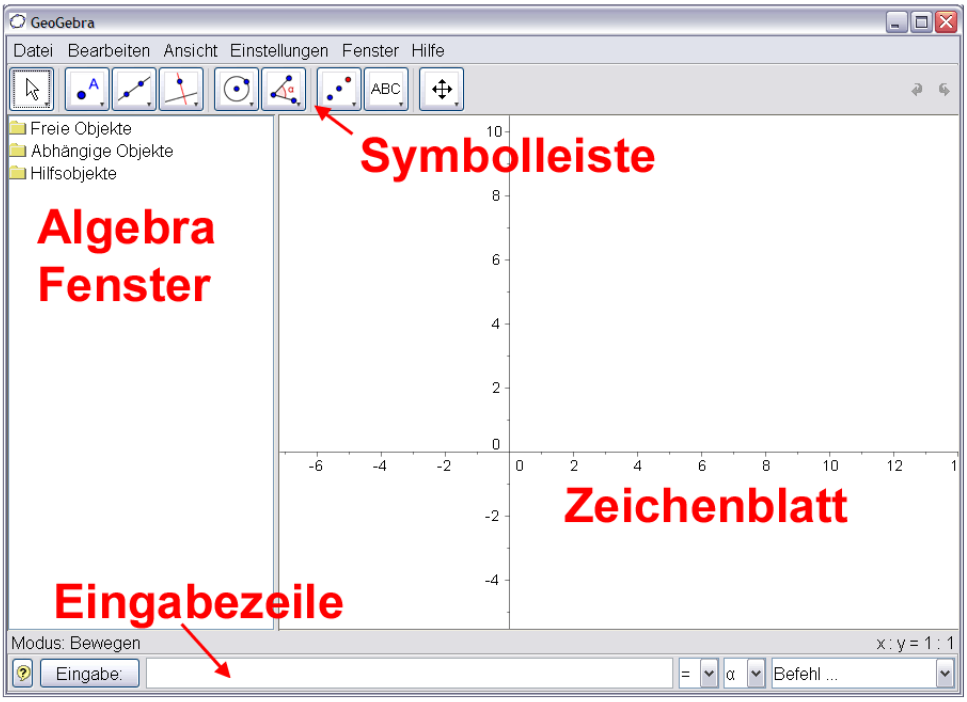


Abbildung 4.5: Benutzeroberfläche von GeoGebra

GeoGebra berücksichtigt das Multimedia Prinzip auf mehreren Ebenen. Zunächst einmal bietet die Software selbst die parallele Darstellung mathematischer Objekte durch Abbildung und Text in Geometrie- und Algebrafenster. Weiters verbinden mit GeoGebra erstellte dynamische Arbeitsblätter interaktive dynamische Abbildungen mit beschreibenden Texten und Übungsaufgaben. Auch der Export des Konstruktionsprotokolls[13] liefert eine textuelle Beschreibung der Konstruktion in Form einer Tabelle zusammen mit einer Abbildung der Konstruktion.

Das Kontiguitätsprinzip wurde in GeoGebra folgendermaßen umgesetzt: beim Bewegen der Maus über ein Objekt wird seine Definition in einem erscheinenden Textfeld (*Tooltip*) angezeigt. Beschriftungen wandern beim Ziehen eines Objekts im Geometriefenster gemeinsam mit den Objekten und können neben dem Namen auch den Wert eines Objekts (z.B. Länge einer Strecke, Gleichung einer Geraden) dynamisch anzeigen. Der Text eines Objekts im Algebrafenster und seine graphische Darstellung im Geometriefenster stimmen farblich überein, damit deutlich sichtbar wird, welche Darstellungen zusammen gehören. Diese farbliche Zuordnung wurde auch in der Tabelle des Konstruktionsprotokolls umgesetzt.

Mit dynamischen Texten kann in GeoGebra das Kontiguitätsprinzip für beliebige Texte

[13]vgl. S. 38

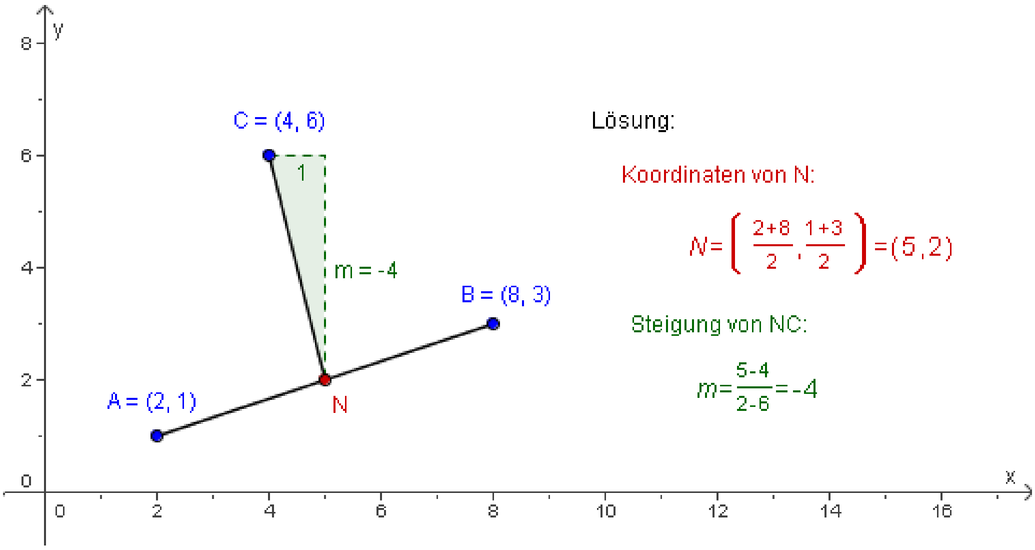


Abbildung 4.6: Integrierte dynamische Texte in GeoGebra

und Formeln umgesetzt werden. In Abbildung 4.6 ist die GeoGebra Version des Geometrie-Beispiels aus der Untersuchung von Sweller (vgl. Abbildung 4.3, S. 102) zu sehen. Mit GeoGebra ist es darüber hinaus sogar möglich, die Punkte A, B und C durch Ziehen mit der Maus dynamisch zu bewegen, wobei sich die Texte ebenfalls dynamisch anpassen - deshalb spricht man hier von dynamischen Texten.

Das bereits eingangs erwähnte KISS Prinzip (keep it short, simple), welches bei der Gestaltung der Benutzeroberfläche angewandt wurde, wird auch durch das Kohärenzprinzip untermauert. In GeoGebra wird übersichtlichen, einfachen Strukturen ganz klar der Vorzug gegenüber künstlich „aufgeppten“ Elementen gegeben. Auch bei der Erstellung der im Laufe dieser Arbeit vorgestellten Unterrichtsmaterialien wurde darauf besonderes Augenmerk gelegt (siehe Kapitel 9 und 8). Entsprechend dem Personalisierungsprinzip werden in den dort zu findenden Arbeitsaufträgen auf dynamischen Arbeitsblättern die Schüler persönlich und direkt mit ‘du’ angesprochen. Dass GeoGebra als kognitives Werkzeug Möglichkeiten zum selbstgesteuerten Lernen bietet, wurde bereits im letzten Abschnitt angesprochen.

Teil II

Unterrichtsmaterialien und Anwendungen

Kapitel 5

Übersicht der Materialien und Anwendungen

In den folgenden Kapiteln werden konkrete Materialien und Anwendungen von GeoGebra für den Mathematikunterricht vorgestellt, die im Rahmen dieses Dissertationsprojektes entstanden sind. Dieser Teil der Arbeit dokumentiert damit das Erreichen der Ziele (1) und (3) des Projekts:

1. Implementierung interaktiver Unterrichtsmaterialien
2. Weiterentwicklung der Software GeoGebra
3. Publikation von Unterrichtsmaterialien auf e-Learning Plattformen im Internet
4. Formative Evaluation der Software

Zunächst wird auf die Internetpräsenz von GeoGebra selbst eingegangen (www.geogebra.at). Eine besondere Rolle spielt hier der interaktive Materialienpool *GeoGebraWiki*. Im nächsten Kapitel wird kurz das österreichische Projekt *Medienvielfalt im Mathematikunterricht* (www.austromath.at/medienvielfalt) vorgestellt, in das GeoGebra als wichtiger Teil eingebunden ist. Danach folgt die deutsche Lernplattform *Lehrer-Online* (www.lehrer-online.de) mit zahlreichen Unterrichtseinheiten zu GeoGebra. Den Abschluss bildet das internationale Lehrer-Fortbildungsprojekt *Intel - Lehren für die Zukunft* (http://aufbaukurs.intel-lehren.de), bei dem Lernpfade für Lehrer zum Einsatz kommen.

Kapitel 6

Die Internetpräsenz von GeoGebra

> Mit Internetpräsenz (auch Internetangebot) wird die Gesamtheit der Funktionalitäten verstanden, die von einem Anbieter im Internet in einer als zusammenhängend empfundenen Weise zu Verfügung gestellt werden. Hierzu kann die Webpräsenz (Website), Kontaktmöglichkeiten über E-Mail oder ein Bereich zum Herunterladen über FTP gehören. [http://de.wikipedia.org, September 2005]

Die Internetpräsenz von GeoGebra umfasst derzeit (Ende 2005) mehrere Websites (GeoGebra Website, GeoGebraWiki, GeoGebraWiki International und GeoGebra Benutzerforum) und Bereiche zum Hochladen und Herunterladen von Materialien (GeoGebra Upload Manager), welche in den folgenden Abschnitten besprochen werden.

GeoGebra Website	www.geogebra.at
GeoGebraWiki	www.geogebra.at/wiki
GeoGebra Upload Manager	www.geogebra.at/de/upload
GeoGebraWiki International	www.geogebra.at/en/wiki
GeoGebra Upload Manager International	www.geogebra.at/en/upload
GeoGebra Benutzerforum	www.geogebra.at/forum

6.1 GeoGebra Website

> Webpräsenz (auch Webangebot, Webauftritt oder Website, englisch site – Ort, Standort, Platz, Stelle – nicht etwa Seite) wird ein ganzes Projekt im World Wide Web bezeichnet, das meist aus mehreren Dokumenten (Dateien, Ressourcen) besteht, die durch eine einheitliche Navigation (das Hypertext-Verfahren) zusammengefasst und verknüpft werden. (http://de.wikipedia.org, September 2005)

Die GeoGebra Website (www.geogebra.at) ist Ausgangspunkt für alle weiteren Teile der Internetpräsenz des Projekts GeoGebra. Die Struktur der Website orientiert sich an den folgenden Fragen rund um GeoGebra.

- Was ist GeoGebra? Bereich *Info*.
- Wie sieht GeoGebra aus? Bereiche *Screenshots* und *Beispiele*.
- Was kann man mit GeoGebra machen? Bereiche *Hilfe* und *GeoGebraWiki*.
- Wo bekomme ich GeoGebra? Bereiche *WebStart* und *Download*.
- Was ist neu in der aktuellen Version und was kommt in den nächsten? Bereich *Zukunft*.

Im Bereich *Info* werden das Werkzeug GeoGebra in kurzen Worten beschrieben und die gewonnenen Bildungssoftware Preise sowie Publikationen zu GeoGebra angeführt. Unter *WebStart* kann das Programm GeoGebra direkt aus dem Internet gestartet und installiert werden. Diese Möglichkeit ist vor allem für die Verwendung in Schulen sehr praktisch, da GeoGebra nicht auf den Schulrechnern vorinstalliert werden muss. Von *Download* können Dateien zur lokalen Installation von GeoGebra unter Windows, MacOS X, Linux und anderen Java fähigen Betriebssystemen heruntergeladen werden. Diese Download-Version ist vor allem für die Weitergabe an Schüler gedacht. Eine Lehrkraft kann eine hier heruntergeladene Datei beispielsweise auf CD-ROM brennen und an ihre Schüler zur Installation zu Hause verteilen.

Der Bereich *Hilfe* umfasst mehrere Dokumente im PDF Format, die Hinweise zur Bedienung und den Einsatz im Unterricht von GeoGebra geben. Die Kurzeinführung *GeoGebra Quickstart*[1] ermöglicht anhand konkreter Beispiele einen schnellen Einstieg in die Verwendung der Software. Die *GeoGebra Hilfe*[2] enthält einige Beispiele und beschreibt alle Funktionen und Befehle von GeoGebra. Weiters sind in diesem Bereich eine Anleitung zur Erstellung dynamischer Arbeitsblätter[3] und Tipps zum Unterrichtseinsatz von GeoGebra und damit erstellten Materialien zu finden. Für fortgeschrittene Benutzer gibt es Hinweise zu GeoGebra Applets und JavaScript[4] sowie zum Dateiformat[5] der Software.

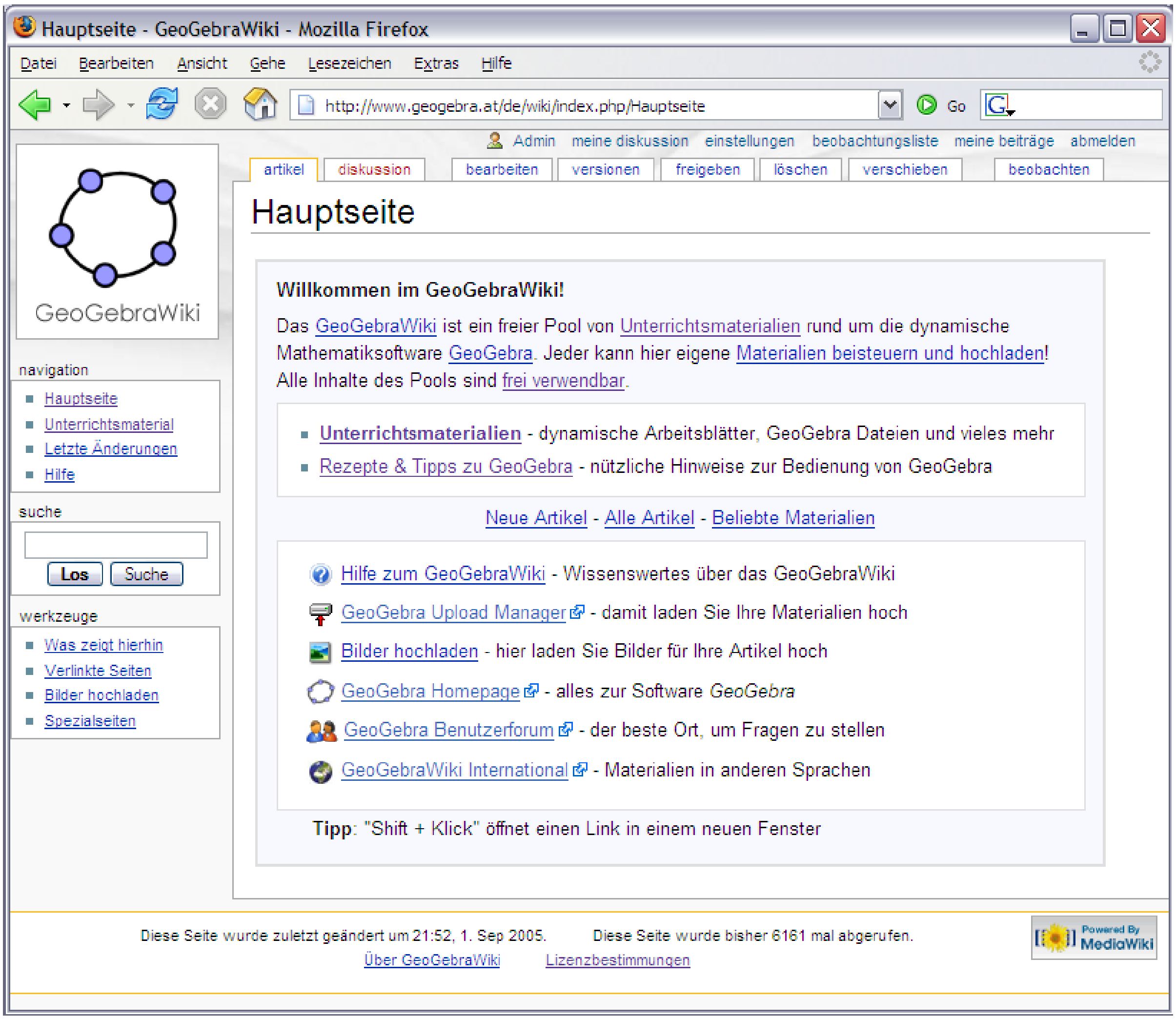
Im Bereich *Beispiele* sind mit GeoGebra erstellte dynamische Arbeitsblätter zu finden. Diese sollen exemplarisch die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der Software in den Schulstufen 5–12 zeigen. Gleichzeitig wurde versucht, durch offene Fragestellungen in den Arbeitsblättern den Aspekt des handlungsorientierten, entdeckenden Lernens[6] zu betonen. Diese Beispiele sollen damit auch als 'Vorbild' für Lehrer dienen, die selbst solche Arbeitsblätter erstellen möchten. Solche von Lehrern erstellten Materialien sind im *GeoGebraWiki* zu finden, welches im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

Unter *Zukunft* wird auf Geschichte und Zukunft von GeoGebra eingegangen. Hier sind die wesentlichen Veränderungen und Funktionen aller bisherigen Versionen in chronologischer Reihenfolge nachzulesen. Auf dieser Seite werden auch die wichtigsten geplanten Neuerungen für die nächsten Versionen angeführt. Interessierte können hier sogar die gerade in Entwicklung befindliche Version als *GeoGebra Pre-Release WebStart* vorab ausprobieren.

[1]vgl. GeoGebra Quickstart, www.geogebra.at/help/geogebraquickstart_de.pdf
[2]vgl. GeoGebra Hilfe, www.geogebra.at/help/docude und www.geogebra.at/help/docude.pdf
[3]vgl. dynamische Arbeitsblätter, S. 137
[4]vgl. GeoGebra Applets und JavaScript, S. 219
[5]vgl. GeoGebra XML Format, S. 220
[6]vgl. operatives Prinzip, S. 17, und entdeckendes Lernen, S. 91

6.2 GeoGebraWiki

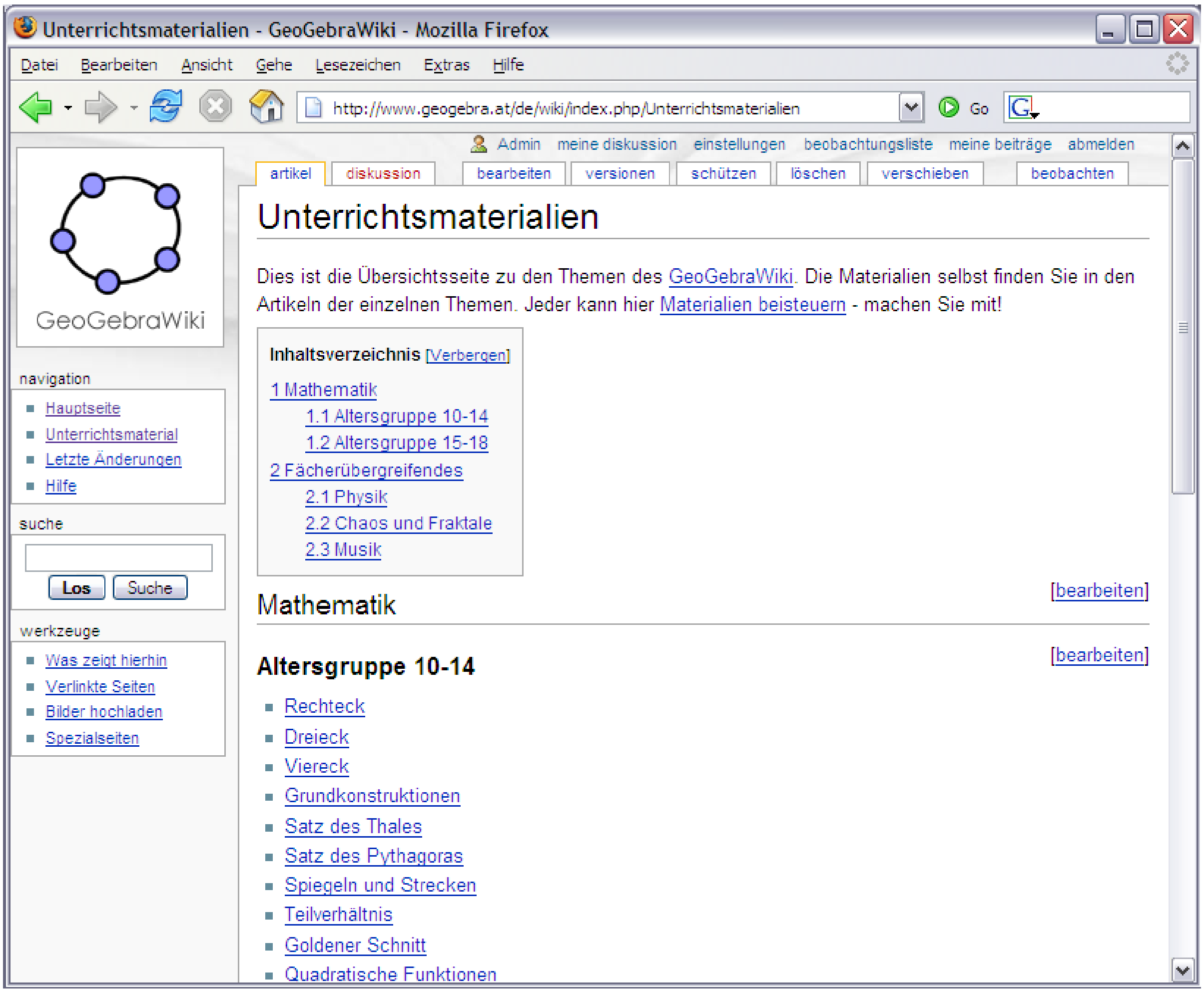
Das GeoGebraWiki (www.geogebra.at/wiki) ist ein freier Pool von Unterrichtsmaterialien rund um die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra, bei dem jeder Besucher eigene Materialien beisteuern und hochladen kann. Die Inhalte des Pools dürfen dabei kostenlos verwendet und verändert werden.[7]



Diese Plattform für Materialien rund um GeoGebra wurde im Mai 2005 eröffnet. Es gab im Wesentlichen zwei Gründe für die Einrichtung des GeoGebraWikis. Einerseits war die Zahl der verfügbaren dynamischen Arbeitsblätter für den Bereich *Beispiele* auf der GeoGebra Website zu groß geworden, sodass eine übersichtlichere Art der Strukturierung notwendig erschien. Andererseits wurden mir zahlreiche Materialien von Lehrern via E-Mail mit dem Wunsch zugesandt, diese im Bereich *Beispiele* der Homepage zu veröffentlichen.

[7] vgl. Creative Commons Lizenz, www.geogebra.at/de/cc_license/cc_license.htm

Der interaktive Materialienpool GeoGebraWiki befriedigt beide Anliegen. Einerseits ermöglicht er eine bessere Strukturierung der Materialien über mehrere Seiten hinweg. Andererseits haben engagiert Lehrer damit die Möglichkeit, ihre eigenen dynamischen Arbeitsblätter, GeoGebra Dateien, Dokumente und Bilder selbst hochzuladen und in Artikeln zu präsentieren. Das GeoGebraWiki wurde zu Beginn mit jenen Beispielen, die auch auf der GeoGebra Website verfügbar sind, gefüllt. Die Ausgangsstruktur wurde dabei bewusst nicht nach Schulstufen festgelegt, da durch die internationale Verbreitung des Werkzeugs nicht von einem einheitlichen Lehrplan ausgegangen werden kann. Stattdessen wurde die Übersichtsseite der Unterrichtsmaterialien grob nach Alter (10–14 Jahre, 15–18 Jahre) und nach Themen eingeteilt.



GeoGebraWiki ist - wie der Name schon sagt - ein *Wiki*. Dies bedeutet, dass die interaktive Bearbeitung und Erstellung seiner Seiten durch Besucher möglich ist.

> Ein *Wiki*, auch *WikiWiki* und *WikiWeb* genannt, ist eine im World Wide Web verfügbare Seitensammlung, die von den Benutzern nicht nur gelesen,

> sondern auch online geändert werden kann. Wikis ähneln damit Content Management Systemen. Der Name stammt von *wikiwiki*, dem hawaiianischen Wort für "schnell". Wie bei Hypertexten üblich, sind die einzelnen Seiten und Artikel eines Wikis durch Querverweise (Links) miteinander verbunden. Die Seiten lassen sich jedoch sofort am Bildschirm ändern. Dazu gibt es in der Regel eine Bearbeitungsfunktion, die ein Eingabefenster öffnet, in dem der Text des Artikels bearbeitet werden kann. [http://de.wikipedia.org/wiki/Wiki, September 2005]

Interessante Aspekte eines Wikis sind die Selbstorganisation und kooperative Weiterentwicklung des Systems. Auch im GeoGebraWiki haben die Besucher nicht nur die Möglichkeit, Inhalte zu ergänzen oder zu bearbeiten, sondern sie können auch die Struktur der Seiten selbst verändern. Wenn also beispielsweise ein Artikel aufgrund zu vieler Einträge unübersichtlich geworden ist, kann ein Besucher daraus mehrere neue Unterseiten erzeugen. Diese Flexibilität ist für einen Materialienpool sehr vorteilhaft.

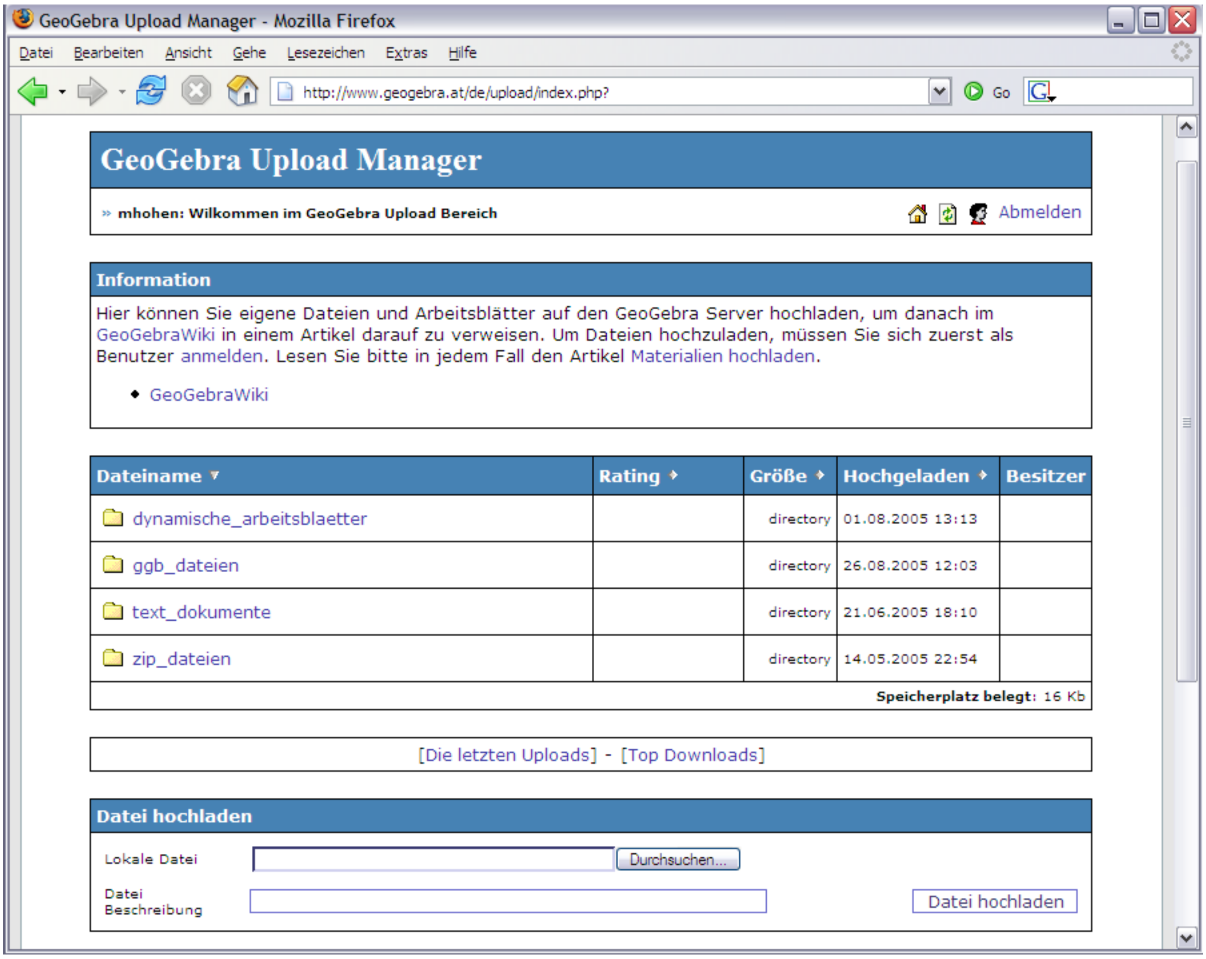
> Ein oft gebrachter Einwand gegenüber Wikis besteht in der Möglichkeit des Vandalismus. Bei typischer Wiki-Software ist es Benutzern jedoch möglich, von Vandalen durchgeführte Zerstörungen durch den Aufruf unzerstörter Fassungen der betroffenen Seiten zu beheben. [http://de.wikipedia.org/wiki/Wiki, September 2005]

Auch im GeoGebraWiki kann man jederzeit eine beliebige frühere Version einer Seite wiederherstellen, sollte diese versehentlich oder mutwillig zerstört worden sein. Um im GeoGebraWiki Seiten anlegen oder verändern zu können, muss man sich zunächst mit einem selbstgewählten Benutzernamen anmelden. Einerseits ist dies nötig, um allen Materialien auch ihren Autor zuordnen zu können.[8] Andererseits soll diese kleine Hürde auch dazu beitragen, Vandalismus zu vermeiden. In den ersten Monaten des Betriebs des GeoGebraWiki gab es in dieser Hinsicht keinerlei Probleme. Im Gegenteil: zahlreiche Unterrichtsmaterialien von hoher Qualität wurden von engagierten Lehrern auf diesem Weg öffentlich verfügbar gemacht. Das GeoGebraWiki gibt es auch in einer internationalen Fassung (www.geogebra.at/en/wiki). Dort sind inzwischen Materialien auf Englisch, Französisch, Italienisch, Spanisch und Katalanisch zu finden.

[8] vgl. Creative Commons Lizenz, www.geogebra.at/de/cc_license/cc_license.htm

6.3 GeoGebra Upload Manager

Der *GeoGebra Upload Manager* (www.geogebra.at/de/upload) ist in gewissem Sinne Teil des GeoGebraWikis. Er dient dazu, dynamische Arbeitsblätter, GeoGebra Dateien und Dokumente auf den GeoGebra Server hochzuladen. Diese hochgeladenen Materialien können dann in den Artikeln des GeoGebraWikis verlinkt werden. Zusätzlich bietet er Funktionen an, um automatisch Downloadpakete in Form von ZIP Dateien zu einzelnen dynamischen Arbeitsblättern zu erstellen und anzubieten. Genaue Informationen dazu sind im GeoGebraWiki zu finden.[9] Außerdem können sich Benutzer über neue und beliebte Materialien informieren oder automatisch per e-Mail benachrichtigen lassen.



Den GeoGebra Upload Manager gibt es so wie das GeoGebraWiki selbst ebenfalls in einer internationalen Variante (www.geogebra.at/en/upload). Hier sind Materialien in vielen anderen Sprachen zu finden.

[9]vgl. Materialien hochladen, www.geogebra.at/de/wiki/index.php/Materialien_hochladen

6.4 GeoGebra Benutzerforum

Bis März 2005 habe ich sämtliche Rückmeldungen, Fragen, Anregungen und Fehlerhinweise von Benutzern zu GeoGebra über e-Mail abgewickelt. Aufgrund der enormen Resonanz musste jedoch eine andere und effektivere Form der Kommunikationen mit den Benutzern gefunden werden. Daher wurde das *GeoGebra Benutzerforum* ins Leben gerufen, welches jedem Benutzer die Möglichkeit bietet, Fragen und Anregungen öffentlich zu stellen und zu diskutieren. Im Vergleich zur e-Mail Kommunikation müssen ähnliche Fragen nicht mehrfach, sondern nur mehr einmal beantwortet werden. Außerdem können die Benutzer so auch miteinander Diskussionen führen.

Im GeoGebra Benutzerforum gibt es derzeit Foren zu folgenden Themenbereichen:

- *Bedienung von GeoGebra:* Fragen rund um die Bedienung von GeoGebra als Einzelanwendung
- *Dynamische Arbeitsblätter:* Fragen rund um die Erstellung und Verwendung dynamischer Arbeitsblätter

- *Installation, Download, WebStart, GeoGebraWiki:* Technische Fragen zu GeoGebra WebStart, zum Download, zur Installation und zum GeoGebraWiki
- *Anregungen und Wünsche:* Hier wird über Anregungen und Wünsche an zukünftige Versionen von GeoGebra diskutiert
- Fehlerberichte: Helfen Sie mit, Fehler in GeoGebra zu beseitigen

Das Benutzerforum wurde von den Anwendern dankbar angenommen und hat sich sehr gut bewährt. Inzwischen findet praktisch die gesamte Kommunikation über die in den Foren behandelten Themen auch wirklich im Benutzerforum und nicht mehr via e-Mail statt. Durch die vorhandene Suchfunktion müssen vielfach Fragen gar nicht mehr gestellt werden, da die gesuchte Antwort bereits in einem der über tausend Artikel zu finden ist.

Vor allem die Foren *Anregungen und Wünsche* sowie *Fehlerberichte* bieten den Anwendern eine sehr direkte Möglichkeit der Rückmeldung und haben bereits in den ersten Monaten ganz wesentlich zur Verbesserung und Weiterentwicklung von GeoGebra beigetragen. Für die internationalen Benutzer stehen auch Foren in Englisch, Französisch, Spanisch und Italienisch zur Verfügung. Letztere drei werden von engagierten Anwendern in Frankreich, Argentinien und Italien moderiert.

Kapitel 7

Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Das österreichische Projekt *Medienvielfalt im Mathematikunterricht* ist eine vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur geförderte Kooperation der Initiativen *ACDCA* (www.acdca.ac.at), *GeoGebra* (www.geogebra.at) und *mathe online* (www.mathe-online.at).

> Dem Mathematikunterricht stehen zahlreiche technologische Werkzeuge (Offline- und Online-Programme, Computeralgebrasysteme, dynamische Geometrie, ...), mediale Formen (Lernpfade, CD-ROM- und Internet-basierte Lernumgebungen, ...) und eine große Anzahl unterschiedlich aufbereiteter Lehr- und Lernmaterialien zur Verfügung.
>
> Medien können - geschickt eingesetzt - eine Hilfe sein, um sowohl mathematische Handlungstypen wie Modellieren, Operieren und Interpretieren zu stärken und zu unterstützen, neue Zugänge zu mathematischen Inhalten zu finden und auch überfachliche Kompetenzen wie Sozialkompetenz, Persönlichkeitskompetenz etc. zu fördern und zu steigern.
>
> Die Fragestellungen lauten daher: Wo liegen die Stärken der verschiedenen Werkzeuge, Medien und Materialien, und wie sieht ein optimiertes Zusammenspiel in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht aus? Aufbauend auf den unterschiedlichen Zugängen und Erfahrungen der beteiligten Initiativen werden Lehr-/Lernhilfen für den Einsatz im Mathematikunterricht entwickelt. Exemplarisch werden für jede Schulstufe Materialien in verschiedenen Medien angeboten und Unterrichtsvorschläge didaktisch reflektiert und aufbereitet.
>
> (www.austromath.at/medienvielfalt)

Seit Anfang 2005 wird im Rahmen des Projekts an entsprechenden Lernpfaden für Schüler samt didaktischen Kommentaren für Lehrer zu den folgenden ausgewählten Themenbereichen gearbeitet. Diese werden im Laufe des Schuljahres 2005/2006 von Testlehrern in Schulen erprobt.

- Geometrische Beweise (Unterstufe)
- Satz von Pythagoras (3. und 4. Klasse)
- Beschreibende Statistik (Unterstufe)
- Funktionen (Schwerpunkt 5. Klasse)
- Vektorrechnung (Schwerpunkt fächerübergreifender Unterricht)
- Ausgewählte Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Oberstufe)
- Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung (Oberstufe)
- Kryptographie (Oberstufe, Wahlpflichtfach Mathematik, Projektunterricht)

Ich selbst bin an der Entwicklung von Lernpfaden für Schüler in den Bereichen 'Vektorrechnung' und 'Ausgewählte Kapitel der Differential- und Integralrechnung' beteiligt. Alle Lernpfade und weitere Informationen zu diesem Projekt sind auf *www.austromath.at/medienvielfalt* zu finden.

Kapitel 8

Lehrer-Online

Die deutsche Lernplattform Lehrer-Online (www.lehrer-online.de) unterstützt angehende und praktizierende Lehrer mit einem kostenfrei nutzbaren Internet-Service rund um den schulischen Einsatz neuer Medien. Im Mittelpunkt stehen dabei Unterrichtseinheiten aus der Schulpraxis der verschiedenen Schulformen und -stufen sowie Internet-Tools, die pädagogisch sinnvoll und ohne größere Vorbereitungen im Unterricht eingesetzt werden können.

Da alle Inhalte von Lehrer-Online kostenlos verfügbar sind, werden aus Platzgründen im Folgenden jeweils nur die Internet-Adressen zu den Inhalten angeführt.

8.1 Rezension zu GeoGebra

Die folgende Rezension zu GeoGebra wurde im Mai 2004 bei Lehrer-Online veröffentlicht und im April 2005 für GeoGebra 2.5 überarbeitet. Darin wird in kurzen Worten das Werkzeug im Hinblick auf den konkreten Unterrichtseinsatz in den Sekundarstufen 1 und 2 beschreiben. Anhand von Screenshots werden einige Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt. Die Rezension beinhaltet auch eine Liste mit Links zu allen weiteren GeoGebra-Materialien bei Lehrer-Online.

Rezension zu GeoGebra:	Dynamische Mathematik mit GeoGebra 2.5
Internet-Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/geogebra

8.2 Unterrichtseinheiten

Seit Mai 2004 ist eine ganze Reihe von sogenannten *Unterrichtseinheiten* zu GeoGebra bei Lehrer-Online entstanden. Eine solche Unterrichtseinheit umfasst die folgenden Teile:

- Kurzbeschreibung
- Lernziele
- Kurzinformation
- didaktisch-methodischer Kommentar
- Arbeitsaufträge, Themenauswahl, Arbeitsmaterialien (optional)
- Download
- Internetadressen, Zusatzinformationen

Die Unterrichtseinheiten zu GeoGebra sind teilweise in Zusammenarbeit mit Sandra Schmidtpott, Fachberaterin von Lehrer-Online und Lehrerin an der Elsa-Brändström-Schule in Hannover, entstanden. Frau Schmidtpott berichtet darin auch von ihren Erfahrungen beim Einsatz der Materialien im Unterricht. Weitere Unterrichtseinheiten stammen von Judith Preiner, Dissertantin aus Mathematik Didaktik an der Universität Salzburg, von Andreas Lindner, Lehrer am Bundesgymnasium Bad Ischl, und von Andreas Meier, Lehrer an der Sophie-Scholl-Realschule in Weiden in Bayern.

Die im Folgenden angegebenen Schulstufen sind Richtmarken, die sich vorwiegend an deutschen Lehrplänen orientieren, in den meisten Fällen aber auch für Österreich gelten.

Mathematik

Steigung und Ableitung einer Funktion

Inhalt:	Steigung und Ableitung einer Funktion Experimentelles Entdecken des Zusammenhanges zwischen der ersten Ableitung und der Tangentensteigung mit dynamischen Arbeitsblättern (Jahrgangsstufe 11).
Autor:	Markus Hohenwarter, 2004
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/funktion-steigung-ableitung

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Inhalt:	Die mathematischen Zusammenhänge werden durch dynamische GeoGebra-Arbeitsblätter erarbeitet (Klasse 10).
Autorin:	Sandra Schmidtpott, 2004
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/trigonometrische-funktionen

Einführung der trigonometrischen Funktionen

Inhalt:	Die beiden in dieser Unterrichtseinheit verwendeten dynamischen GeoGebra-Arbeitsblätter können bei der Ein- und Fortführung des Themas in Klasse 9 bzw. 10 eingesetzt werden.
Autoren:	Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott, 2004
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/trigonometrie-einheitskreis

Einführung in die Integralrechnung

Inhalt:	Welchen Einfluss hat die TV-Übertragung eines Fußballspiels auf den Wasserverbrauch einer Stadt? (Jahrgangsstufe 12)
Autoren:	Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott, 2004
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/integral-geogebra

Einführung der Exponentialfunktionen

Inhalt:	Dynamische Arbeitsblätter, die mit der kostenfreien Software GeoGebra erzeugt wurden, ermöglichen eine anschauliche Bearbeitung der Thematik (Klasse 10).
Autoren:	Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/exponentialfunktion-geogebra

Besondere Linien im Dreieck

Inhalt:	Besondere Linien im Dreieck Die Schülerinnen und Schüler erstellen mit GeoGebra selbstständig dynamische geometrische Konstruktionen (Klasse 8).
Autoren:	Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/dreieck-geogebra

Spiegeln und Strecken mit GeoGebra

Inhalt:	Veranschaulichung von Achsen- und Punktspiegelung sowie zentrischer Streckung anhand anschaulicher dynamischer Arbeitsblätter (Klasse 7).
Autoren:	Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/spiegeln

Drehung von Vektoren um 90 beziehungsweise -90 Grad

Inhalt:	Durch Experimentieren wird der Zusammenhang zwischen den Koordinaten von Ur- und Bildvektor bei der Drehung um 90 und -90 Grad entdeckt (Klasse 7–8).
Autor:	Andreas Meier, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/vektoren-drehung

Mathematik, Musik, Physik

Schwingungen in Mathematik, Musik und Physik

Inhalt:	Schülerinnen und Schüler lernen die Fourier-Analyse auf experimentelle Art mit dynamischen Arbeitsblättern kennen (Jahrgangsstufe 10-11).
Autor:	Judith Preiner, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/schwingungen

Physik

Online-Kurs “Spezielle Relativitätstheorie” mit GeoGebra

Inhalt:	Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) gilt als nicht gerade leicht verständlich. Interaktive Applets erleichtern durch die dynamische Darstellung der geometrischen Zusammenhänge das Verständnis erheblich.
Autor:	Andreas Lindner, 2005
Adresse:	http://www.lehrer-online.de/url/srt-geogebra

Kapitel 9

Lehren für die Zukunft

9.1 Überblick

Das Projekt *Intel Lehren für die Zukunft*

GeoGebra ist seit Anfang 2004 Teil des internationalen Lehrerfortbildungsprojektes *Intel Lehren für die Zukunft - online trainieren und gemeinsam lernen*. Dieses Projekt

> [...] ist der Aufbaukurs zum Grundkurs "Intel Lehren für die Zukunf", in dem in den vergangenen 3 Jahren bereits mehr als 250.000 Lehrkräfte geschult wurden. Diese Fortbildung stellt Lehrkräften, die bereits Kenntnisse im Umgang mit PC und Internet haben, Bildungsinhalte rund um den Einsatz von Informations- und Kommunikationstechnologien im Unterricht zur Verfügung. In einem "Blended-Learning" - Verfahren trainieren Lehrkräfte gemeinsam die Einsatzmöglichkeiten, tauschen Ideen aus und entdecken die Vielfalt der Methoden, wie Technologien den Fachunterricht sinnvoll unterstützen. [http://aufbaukurs.intel-lehren.de, Juni 2004]

Kern dieser derzeit in Deutschland, Österreich und der Schweiz durchgeführten Fortbildung sind sogenannte *Lernpfade* für Lehrer. In einem Lernpfad werden die methodisch-didaktische Prinzipien eines konkreten Unterrichtsbeispiels aufgegriffen. Die Kompetenzen, die für die Adaption in den eigenen Unterricht erforderlich sind, werden von den Teilnehmern über Lernstationen schrittweise erarbeitet und mit Praxiserfahrungen verknüpft. Die Lehrkräfte erhalten damit die Möglichkeit, den Unterrichtsinhalt selbst auszuwählen, schul- und unterrichtsspezifische Gegebenheiten zu berücksichtigen und zusammen mit Kollegen die Unterrichtsentwicklung zu fördern. Ein Lernpfad wird dabei von einer Gruppe von Lehrern gemeinsam erarbeitet, die idealerweise an derselben Schule unterrichten.

Jeder Lernpfad umfasst folgende Stationen:

1. Einführung
2. a) Auswahl von Inhalten
   b) Bildung von Arbeitsteams in der Gruppe
   c) Festlegen der Zeitplanung
3. Analyse der Voraussetzungen
4. Steigerung der eigenen Medienkompetenz
5. Aufbau eines eigenen Unterrichtskonzeptes
6. Durchführung im Unterricht
7. Evaluation
8. Weitere Planung

In den Lernstationen 6 und 7 werden für jeden Lernpfad in Fragebögen mit Polaritätenprofilen Rückmeldungen eingeholt. Bei der Lernstation *Durchführung im Unterricht* sind dies Fragebögen für die durchführenden Lehrer (Selbstevaluation), die Schüler (Schülerevaluation) und für das Team (Evaluationsbogen für die Reflexion im Team). Beispielsweise wird im Bogen für die Selbstevaluation der Teilnehmer unter dem Punkt *Erfolg der Methode* nach dem Grad der Zustimmung zu folgenden Aussagen gefragt:

> Der Einsatz der Methode in Verbindung mit den Neuen Medien hat eine vielfältige Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsthema erleichtert.
>
> Der Einsatz der Methode in Verbindung mit den Neuen Medien hat das Interesse der Schülerinnen und Schüler am Unterrichtsthema gesteigert.
>
> Mit Hilfe der Verbindung der Methode mit den Neuen Medien haben die Schülerinnen und Schüler bessere Arbeitsergebnisse erreicht.

Im Schülerevaluationsbogen sind entsprechende Fragen zu finden:

> Die Arbeit mit den Neuen Medien hat mir eine vielfältige Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsthema erleichtert.
>
> Die Arbeit mit den Neuen Medien hat mein Interesse am Unterrichtsthema gesteigert.
>
> Mit Hilfe der Neuen Medien habe ich bessere Arbeitsergebnisse erreicht.

In der Lernstation *Evaluation* wird die Meinung der Teilnehmer zu den übrigen Lernstationen des Lernpfades selbst eingeholt. Beispielsweise wird zu Lernstation 4 *Steigerung der Medienkompetenz* der Grad der Zustimmung zu folgenden Aussagen eingeholt:

Die Anregungen haben mir beim Aufbau der Unterrichtsstunde geholfen.

Die Anregungen sind auf die Steigerung der Lernkompetenz ausgerichtet.

Die Anregungen lassen auch Alternativen bei der methodischen Umsetung zu.

Die Angebote im Übungsraum haben dazu geführt, dass ich meine Medienkompetenz steigern konnte.

Lernpfade zu GeoGebra

Die in den folgenden Abschnitten zu findenden Lernpfade vermitteln jeweils ausgehend von konkreten Unterrichtsbeispielen Möglichkeiten des Einsatzes von GeoGebra im Unterricht. Dabei kann jeder Lernpfad unabhängig von den anderen bearbeitet werden. Dies ist wichtig, da die Teilnehmer im Rahmen der Fortbildung jene Lernpfade, die sie im Team bearbeiten möchten, frei nach ihren Interessen auswählen können.

Die im Folgenden abgedruckten Lernpfade sind inhaltlich identisch zu ihren Pendants im Internet. In den Lernstationen *Durchführung im Unterricht* und *Evaluation* wurden lediglich die eingangs angesprochenen Evaluationsteile weggelassen. Strukturell unterscheiden sich die Online Lernpfade dadurch, dass ausgiebig von Links und Popup-Fenstern, in denen zusätzliche Informationen zu finden sind, Gebrauch gemacht wird. Die Inhalte solcher Popup-Fensters wurden bei der Übernahme in diese Arbeit an den entsprechenden Stellen eingefügt.

Geometrie und Algebra - Seite an Seite

In diesem Lernpfad werden überblickshaft die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra im Unterricht vorgestellt.

Einerseits wir gezeigt, wie Schüler die Software für mathematische Experimente zum Entdecken von Zusammenhänge zwischen Geometrie, Algebra und Analysis nutzen können. Hierbei werden Beispiele für Anleitungen zu solchen Experimenten mit offenen Arbeitsaufträgen gegeben. Andererseits wird GeoGebra auch als Präsentationswerkzeug vorgestellt, das von Schülern und Lehrern wie eine „dynamische Overheadfolie“ verwendet werden kann.

Teile dieses Lernpfads wurden auch im Artikel *Dynamische Mathematik mit GeoGebra* (S. 70) veröffentlicht. Daher wird auf seine Aufnahme in diese Arbeit verzichtet.

Dynamische Arbeistblätter mit GeoGebra

GeoGebra lässt sich auch als Werkzeug zur Erstellung interaktiver Unterrichtsmaterialen, sogenannter *dynamischer Arbeitsblätter* verwenden. Dies sind HTML-Seiten mit interaktiven Konstruktionen, die sich mit jedem Internet Browser verwenden lassen.

Dieser Lernpfad zeigt anhand von Beispielen, wie solche dynamischen Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellt werden können. Auch hier wird bei den angeführten Arbeitsblättern besonderer Wert auf die Verwendung offener Fragestellungen gelegt, die den Schülern Freiraum für eigene Lösungsansätze bieten.

Integrale - forschend entdeckt

In diesem Lernpfad wird die Methode des *forschenden, problemorientierten Unterrichts* nach Georg Kerschensteiner (1854-1932) am Beispiel eines möglichen Zugangs zur Integralrechnung vorgestellt. Am Beginn von forschendem Unterricht steht immer eine konkrete Problemstellung, die aus der Alltagswelt der Schüler stammen und eine Wissenslücke bewusst machen sollte.

Konkret wird hier vom Beispiel der Berechnung der Fläche eines Grundstücks am See ausgegangen. Mit Hilfe von GeoGebra gelangt man über die Veranschaulichung von Unter- und Obersummen sowie der Flächeninhaltsfunktion zum Begriff des bestimmten Integrals.

Dieser Lernpfad ist in Zusammenarbeit mit Sandra Schmidtpott, Fachberaterin von Lehrer-Online und Lehrerin an der Elsa-Brändström-Schule in Hannover, entstanden.

Mittels Mind Mapping zur Kurvendiskussion

Dieser Lernpfad zeigt, wie Schüler mit GeoGebra weitgehend selbstständig Zusammenhänge zwischen Nullstellen, Extrema, Wendepunkten und Ableitungen von Polynomfunktionen entdecken können. Dabei wird auch genauer auf die Methode des Mind Mappings eingegangen und gezeigt, wie die Ergebnisse und Vermutungen der Schüler zum Thema Kurvendiskussion übersichtlich strukturiert werden können.

Der Lernpfad ist in Zusammenarbeit mit Judith Preiner, Dissertantin aus Mathematik Didaktik an der Universität Salzburg, entstanden.

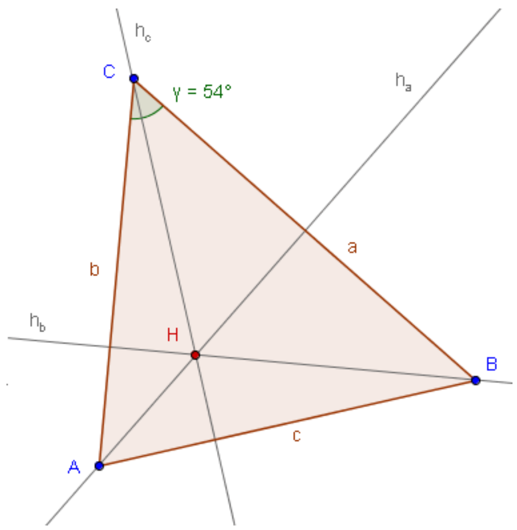
9.2 Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra

Markus Hohenwarter
Lernpfad für Intel Lehren für die Zukunft, August 2004
http://aufbaukurs.intel-lehren.de

Dynamische Geometrie und Algebra ergeben GeoGebra, eine mehrfach preisgekrönte Unterrichtssoftware, die Sie in der gesamten Sekundarstufe von einfachen Konstruktionen bis hin zum Differenzieren und Integrieren einsetzen können.

Deutscher Bildungssoftware Preis digita 2004: „Die Jury erkennt mit großer Freude den Förderpreis dem Programm GeoGebra von M. Hohenwarter zu, weil es in hervorragender Weise entdeckendes, handlungsorientiertes Lernen fördert und sich zur Lösung von Problemaufgaben eignet.“

In diesem Lernpfad erfahren Sie, wie Sie mit GeoGebra dynamische Arbeitsblätter erstellen können, die bei Ihren Schülern die Lust am mathematischen Experimentieren wecken.



Fach:	Mathematik
Thema der Einheit:	Dynamische Arbeistblätter mit GeoGebra
Grundfragen:	Wie können Schüler anhand dynamischer Arbeitsblätter Mathematik experimentell entdecken?
Zielgruppe:	Sekundarstufen 1 und 2
Zeitrahmen:	ca. 1 - 2 Unterrichtsstunden
Hardware:	PC
Software:	GeoGebra, Internet Browser

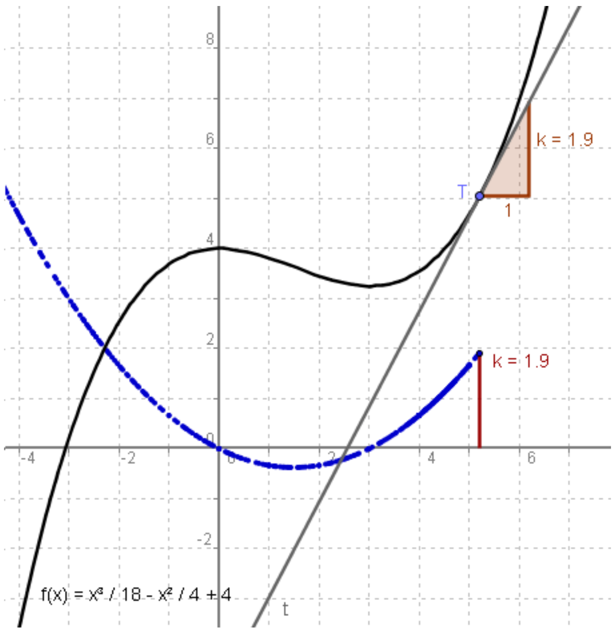
Unterrichtsdokumentation

In GeoGebra sind Geometrie und Algebra gleichberechtigte Partner. Daher lässt sich die Software sehr vielfältig in der gesamten Sekundarstufe einsetzen. In diesem Lernpfad erfahren Sie, wie Sie mit GeoGebra dynamische Arbeitsblätter erstellen können.

Als Vorgeschmack sehen Sie hier anhand eines Bildes, wie ein solches Arbeitsblatt aussehen könnte. Sie werden im Laufe dieses Lernpfades selbstverständlich auch dynamische Konstruktionen ausprobieren können.

Steigung und Ableitung einer Funktion

Im Folgenden siehst du die Funktion $f(x) = x^3/18 - x^2/4 + 4$ und ihre Tangente t zusammen mit dem Steigungsdreieck. Die Steigung k der Tangente ist außerdem nochmals von der x-Achse aus abgetragen.



1. Ziehe den Punkt T mit der Maus. Dabei wird die Spur der Steigung gezeichnet und es entsteht der Graph der Steigungsfunktion. Welche Art von Funktion ist diese Steigungsfunktion? Überlege dir, welche Funktionsgleichung sie haben könnte und schreibe deine Ergebnisse in dein Heft.

2. Berechne die erste Ableitung der Funktion f in deinem Heft.

3. Doppelklicke auf die Zeichnung und es öffnet sich das GeoGebra Fenster. Gib die Gleichung der ersten Ableitung in die Eingabezeile ein und drücke die Enter-Taste.

Wähle den "Bewegen Modus" und ziehe nochmals den Punkt T mit der Maus. Was fällt dir auf? Notiere deine Ergebnisse in deinem Heft.

Lernstation 1: Einführung

Was ist GeoGebra?

GeoGebra ist ein dynamisches Werkzeug für den Mathematikunterricht, in dem *Geo*metrie und Al*gebra* gleichwertige Partner sind.

Einerseits ist GeoGebra eine dynamische Geometriesoftware. Man kann Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Strecken, Polygonen, Geraden, Kegelschnitten und Funktionen erstellen und danach dynamisch verändern. Andererseits ist auch die direkte Eingabe von Gleichungen und Koordinaten möglich. Sie können mit Zahlen und Vektoren rechnen und sogar Funktionen dynamisch differenzieren und integrieren.

Mathematische Experimente

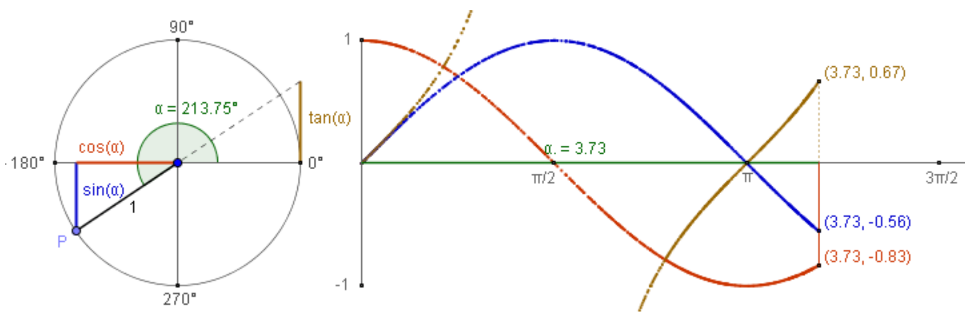
GeoGebra ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise einen experimentellen Zugang zur Mathematik. Dadurch können Sie selbstgesteuertes, individuelles und entdeckendes Lernen fördern.

Die Software ist in der gesamten Sekundarstufe einsetzbar. Sie können das Programm zur Veranschaulichung mathematischer Unterrichtsinhalte verwenden oder Ihre Schüler selbst mit GeoGebra Mathematik entdecken lassen.

Im Lernpfad "Dynamische Geometrie und Algebra" wird GeoGebra als eigenständiges Programm für Ihren Unterricht vorgestellt, das den Schülerinnen und Schülern ein Algebra Fenster und ein Zeichenblatt mit vielen Konstruktionswerkzeugen und Befehlen anbietet.

Dynamische Arbeitsblätter

In diesem Lernpfad werden Sie mit GeoGebra dynamische Arbeitsblätter erstellen, die in einem Internet Browser von Ihren Schülerinnen und Schülern verwendet werden können.



Lernstation 2: Auswahl von Inhalten

Unterrichtsinhalte

GeoGebra lässt sich in beiden Sekundarstufen in vielfältiger Weise immer dann einsetzen, wenn geometrische oder algebraische Lerninhalte vermittelt werden sollen. Sie können die Software natürlich auch zum Konstruieren und zum Veranschaulichen von Gleichungen und Funktionen verwenden. Das Besondere an GeoGebra ist jedoch die Kombination dieser beiden Möglichkeiten, die Ihren Schülern neue Einsichten in mathematische Zusammenhänge eröffnen kann.

In diesem Lernpfad werden Sie die die Erstellung dynamischer Arbeitsblätter mit GeoGebra anhand von Beispielen erlernen, in denen diese Verbindung von Geometrie und Algebra deutlich werden wird.

Technische Vorbereitung

Damit Sie im Folgenden dynamische Arbeitsblätter erstellen bzw. betrachten können, muss auf Ihrem Rechner Java 1.4.2 (oder höher) installiert sein. Bitte besuchen Sie dazu jetzt die Seite www.java.com/de und klicken rechts oben auf "Jetzt holen". Danach bestätigen Sie bitte alle erscheinenden Hinweise bis die Installation von Java abgeschlossen ist.

Beispiele für dynamische Arbeitsblätter

In diesem Lernpfad werden Sie die Erstellung dynamischer Arbeitsblätter mit GeoGebra anhand dreier Beispiele Schritt für Schritt erlernen. Einen ersten Eindruck der vielfältigen Möglichkeiten solcher Arbeitsblätter bietet Ihnen die folgende Beispielsammlung.

Beispiele: Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra (siehe www.geogebra.at unter "Beispiele")

Bildung von Arbeitsteams im Kollegium

Bei der Erstellung von Arbeitsblättern und Materialien mit offenen Fragestellungen, welche den Schülerinnen und Schülern einen experimentellen und entdeckenden Zugang zur Mathematik eröffnen, sind Gespräche und Diskussionen mit Kollegen meist anregend und vorteilhaft.

Die unterschiedlichen Erfahrungen und Fertigkeiten der einzelnen Personen in Ihrem Team lassen Sie schneller zu besseren Ergebnissen gelangen. Beispielsweise kann der Eine seine Erfahrungen im Formulieren offener Fragestellungen einbringen, während sich die Andere mehr mit der Realisierung am Computer beschäftigt.

Für die Arbeit mit diesem Lernpfad sollten Sie etwa 6 Stunden veranschlagen.

Lernstation 3: Analyse der Voraussetzungen

Grundlegende Voraussetzungen für Sie

In diesem Lernpfad werden Sie GeoGebra verwenden. Die dazu nötigen Fertigkeiten werden Sie in der nächsten Lernstation erwerben. Ansonsten sind lediglich Grundkenntnisse im Umgang mit dem Computer und Dateien (Windows Explorer) erforderlich.

Grundlegende Voraussetzungen für Ihre Schüler

Mit dynamischen Arbeitsblättern können Ihre Schülerinnen und Schüler mathematische Zusammenhänge experimentell entdecken, indem sie dynamische Konstruktionen durch Ziehen mit der Maus verändern. Dazu benötigen sie keinerlei spezielle Softwarekenntnisse.

Technische Voraussetzungen

Damit Ihre Schülerinnen und Schüler die dynamischen Arbeitsblätter verwenden können, muss auf dem jeweiligen Rechner Java 1.4.2 (oder höher) und ein Internet-Browser (z.B. Internet Explorer, Netscape oder Mozilla) installiert sein.

- Verwendung der Arbeitsblätter in der Schule: setzen Sie sich mit dem Systembetreuer Ihrer Schule in Verbindung und fragen Sie ob Java 1.4.2 (oder höher) auf den betreffenden Rechnern installiert ist bzw. bitten Sie ihn, es zu installieren.

- Verwendung der Arbeitsblätter zu Hause: bitten Sie Ihre Schülerinnen und Schüler, auf ihren Rechnern zu Hause Java von www.java.com/de zu installieren.

Lernstation 4: Steigerung der Medienkompetenz

Drei Schritte zum dynamischen Arbeitsblatt

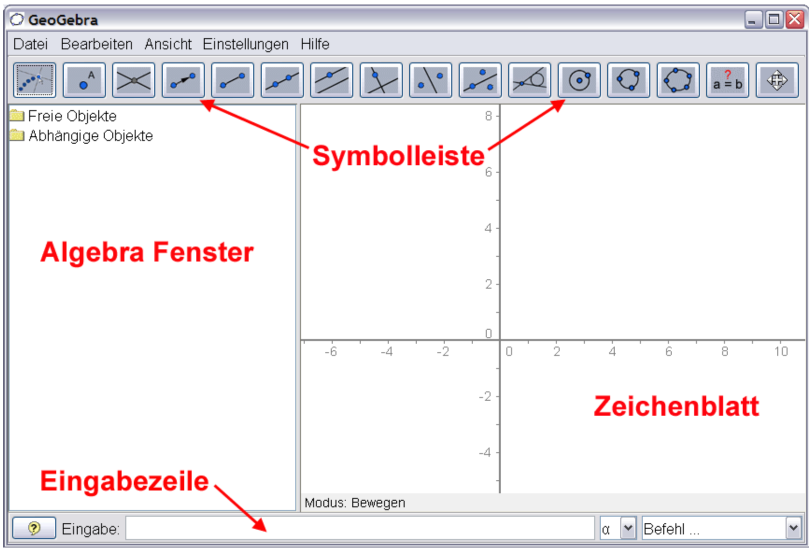
In den folgenden drei Schritten erfahren Sie, wie einfach es ist, mit GeoGebra ein dynamisches Arbeitsblatt zu erstellen. Danach werden Sie dies anhand von drei Beispielen selbst ausprobieren.

Schritt 1: Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen
Schritt 2: Das dynamische Arbeitsblatt erstellen
Schritt 3: Das Arbeitsblatt verfügbar machen

Wenn Sie im Folgenden lieber mit einer Anleitung auf Papier arbeiten möchten, dann drucken Sie einfach das Dokument "Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra" aus (siehe www.geogebra.at unter "Info").

Schritt 1: Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen

Zur Erstellung eines dynamischen Arbeitsblattes benötigen Sie die kostenlos verfügbare Software GeoGebra, die laufend verbessert und weiterentwickelt wird. Die aktuellste Version können Sie direkt von der Homepage (www.geogebra.at) von GeoGebra unter "Web-Start" starten.



Sie sollten GeoGebra nun anhand des *GeoGebra Quickstart* Dokumentes kennen lernen. Arbeiten Sie die dort angegebenen Beispiele der Reihe nach durch und probieren Sie auch die angegebenen Tipps aus: GeoGebra Quickstart (www.geogebra.at).

Weitere Beispiele und detaillierte Informationen zu allen Konstruktionswerkzeugen, Eingabemöglichkeiten und Befehlen finden Sie in der GeoGebra Hilfe (www.geogebra.at).

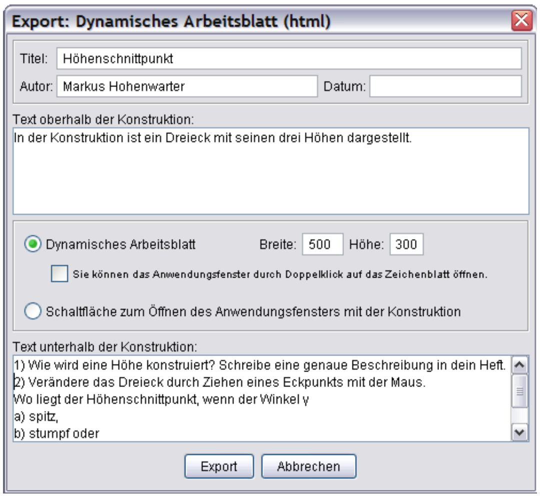
Schritt 2: Das dynamische Arbeitsblatt erstellen

Nachdem Sie Ihre Konstruktion mit GeoGebra wie gewünscht erstellt haben, können Sie diese als dynamisches Arbeitsblatt exportieren. Sie können die folgenden Schritte gleich jetzt oder erst später anhand der vorgestellten Beispiele ausprobieren.

Tipp: Verändern Sie noch vor dem Export die Größe des Anwendungsfensters von GeoGebra so, dass die Konstruktion gut sichtbar ist, aber auch nicht zu viel Platz am Bildschirm einnimmt (das können Sie durch Ziehen einer Ecke des Anwendungsfensters mit der Maus erreichen). Das dynamische Arbeitsblatt soll ja später im Internet-Browser gut sichtbar sein.

Export des Arbeitsblattes

1) Wählen Sie im Menü "Datei", "Export" den Punkt "Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite (html)".



Im erscheinenden Export Fenster können Sie Titel, Autor und Datum sowie einen Text oberhalb und unterhalb der dynamischen Konstruktion angeben (z.B. für eine Beschreibung der Konstruktion und Ihre Arbeitsaufträge). In der exportierten html Seite wird entweder die Konstruktion selbst ("dynamisches Arbeitsblatt") oder nur eine Schaltfläche ("Schaltfläche zum Öffnen...") zu sehen sein.

Hinweis: wählen Sie die Werte für die Breite und Höhe des dynamischen Arbeitsblattes nicht zu groß, damit es im Internet Browser gut sichtbar ist. GeoGebra schlägt Ihnen hier die aktuelle Größe der Konstruktion im Anwendungsfenster vor (vgl. Tipp oben).

2) Klicken Sie auf "Export" und speichern Sie Ihr Arbeitsblatt ab. Am besten speichern Sie alle Ihre Arbeitsblätter in einen eigens dafür erstellten Ordner.

Hinweis: verwenden Sie beim Speichern *keine* Umlaute oder Leerzeichen im Namen Ihres Arbeitsblattes (bzw. den Arbeitsblatt-Ordner), da dies zu Problemen führen könnte.

Beim Exportieren werden drei Dateien erstellt:

- *html* Datei, z.B. *hoehenschnittpunkt.html* - diese Datei enthält das eigentliche Arbeitsblatt
- *ggb* Datei, z.B. *hoehenschnittpunkt.ggb* - diese Datei enthält Ihre GeoGebra Konstruktion
- *geogebra.jar* – diese Datei macht Ihr Arbeitsblatt dynamisch

3) Testen des Arbeitsblattes

Öffnen Sie nun die exportierte HTML Datei – z.B. *hoehenschnittpunkt.html* – mit Ihrem

Internet Browser (z.B. *Internet Explorer, Netscape oder Mozilla*) und probieren Sie Ihr Arbeitsblatt aus.

4) Eventuell: Nachträgliches Bearbeiten des Arbeitsblattes
Den Text des Arbeitsblattes können Sie übrigens nachträglich bearbeiten, indem Sie die exportierte HTML Datei – z.B. *hoehenschnittpunkt.html* – mit einem Textverarbeitungsprogramm (z.B. *Microsoft Frontpage* oder *Word*) öffnen.

Ebenso können Sie auch die Konstruktion des Arbeitsblattes – z.B. *hoehenschnittpunkt.ggb* – noch im Nachhinein verändern, indem Sie sie mit GeoGebra bearbeiten.

Schritt 3: Das Arbeitsblatt verfügbar machen

Nachdem Sie Ihr dynamisches Arbeitsblatt erfolgreich erstellt haben, sollen nun natürlich Ihre Schülerinnen und Schüler damit arbeiten können. Dazu müssen Sie alle exportierten Dateien Ihres Arbeitsblattes – z.B. *hoehenschnittpunkt.html*, *hoehenschnittpunkt.ggb* und *geogebra.jar* – verfügbar machen.

Wichtiger Hinweis: Beachten Sie bitte, dass auf jedem Rechner, auf dem Ihr Arbeitsblatt verwendet werden soll, Java 1.4.2 (oder höher) installiert sein muss. Sie erhalten Java kostenlos von www.java.com/de. Setzen Sie sich dazu gegebenenfalls mit Ihrem Systembetreuer in Verbindung.

1. In der Schule

    - Einzelner Rechner: kopieren Sie alle exportierten Dateien in einen Ordner auf dem betreffenden Rechner
    - Im Schulnetzwerk: kopieren Sie alle exportierten Dateien in einen Ordner, auf den Ihre Schüler Lesezugriff haben. Setzen Sie sich dazu gegebenenfalls mit Ihrem Systembetreuer in Verbindung.

2. Im Internet
   Wenn Sie eine eigene Homepage haben, dann können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern Ihr Arbeitsblatt dort zur Verfügung stellen. Dazu müssen sich alle exportierten Dateien in einem Ordner Ihrer Homepage befinden.

Beispiele für Arbeitsblätter

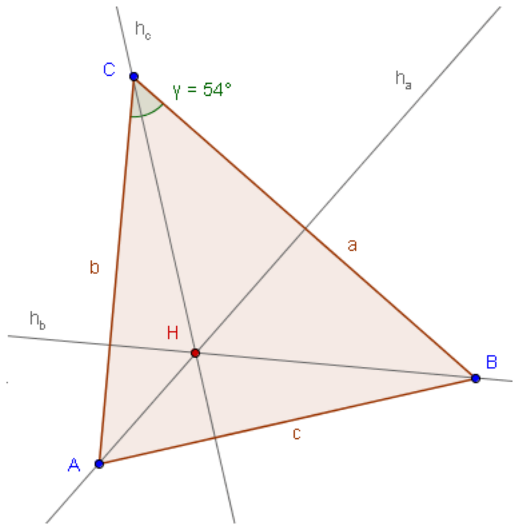
Die folgenden Beispiele werden Ihnen wertvolle Anregungen und Tipps für die Erstellung eigener dynamischer Arbeitsblätter liefern.

Laden Sie zunächst die Dateien der Beispielarbeitsblätter als ZIP Datei herunter, entpacken Sie diese auf Ihre Festplatte und betrachten Sie die fertigen Arbeitsblätter mit Ihrem Internet Browser. Danach können Sie diese Arbeitsblätter selbst anhand der folgenden Anleitungen erarbeiten.

Beispiel 1: Höhenschnittpunkt eines Dreiecks
Beispiel 2: Der Kreis und seine Gleichung
Beispiel 3: Steigung und Ableitung einer Funktion

Beispiel 1: Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte für die Erstellung der Konstruktion dieses Arbeitsblattes beschrieben.



Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (www.geogebra.at) durchgearbeitet haben, sollte die Konstruktion des Höhenschnittpunkts in GeoGebra kein Problem sein:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").
- Blenden Sie gleich zu Beginn die Achsen und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") aus.
- Das Dreieck erstellen Sie im Modus "Vieleck"mit der Maus.

- Die Höhen erhalten Sie mittels "Senkrechte Gerade"und die Indizes in ihren Namen wie folgt: Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf eine Höhe, wählen Sie "Umbenennen"und geben Sie ihr den neuen Namen *h_a*, *h_b* bzw. *h_c*.
- Den Höhenschnittpunkt erhalten Sie durch Schnitt zweier Höhen (Modus "Schneide zwei Objekte").
- Der Winkel γ wird nach Eingabe des folgenden Befehls in die Eingabezeile gezeichnet: γ = Winkel[A, C, B]
- Lassen Sie sich nun den Wert des Winkels anzeigen: Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf ã und wählen Sie unter "Eigenschaften"bei "Beschriftung anzeigen"den Eintrag "Name und Wert".
- Blenden Sie die Nachkommastellen von ã aus, indem Sie im Menü "Einstellungen"die "Kommastellen"auf 0 setzen.
- Ziehen Sie im "Bewegen"Modus die Bezeichnungen der Objekte mit der Maus so, dass sie gut lesbar sind.
- Verschieben Sie das Zeichenblatt abschließend so, dass Ihre Konstruktion links oben im GeoGebra Fenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt"). Verkleinern Sie nun das GeoGebra Fenster (durch Ziehen der rechten unteren Ecke), um Leerraum zu vermeiden.

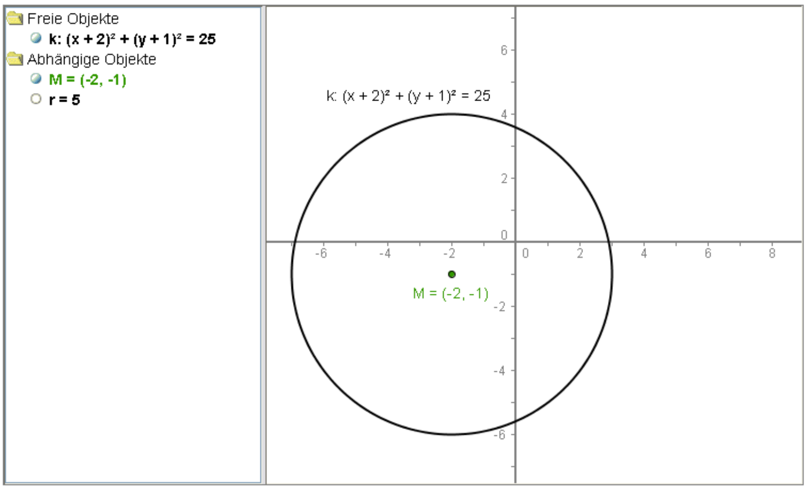
Damit ist Schritt 1 "Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen"erledigt. Wählen Sie nun im Menü "Datei", "Export", "Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite"und fahren Sie entsprechend der Anleitung "Drei Schritte zum dynamischen Arbeitsblatt"fort.

Beispiel 2: Der Kreis und seine Gleichung

Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte für die Erstellung der Konstruktion dieses Arbeitsblattes beschrieben. Bei diesem Beispiel findet auch das Algebra-Fenster Verwendung.

Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (www.geogebra.at) durchgearbeitet haben, sollte die Erstellung dieser Konstruktion in GeoGebra kein Problem sein:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.
- Stellen Sie die Kommastellen wieder auf 2 (Menü "Einstellungen").



- Den Kreis geben Sie direkt in die Eingabezeile ein:
  $k : x^2 + y^2 = 25$

- Mittelpunkt und Radius erhalten Sie durch die entsprechenden Befehle ebenfalls über die Eingabezeile:
  M = Mittelpunkt[k]
  r = Radius[k]

- Lassen Sie sich nun die Kreisgleichung und die Koordinaten des Mittelpunktes anzeigen: Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf den Kreis k bzw. den Punkt M, und wählen Sie unter "Eigenschaften" bei "Beschriftung anzeigen" den Eintrag "Name und Wert".

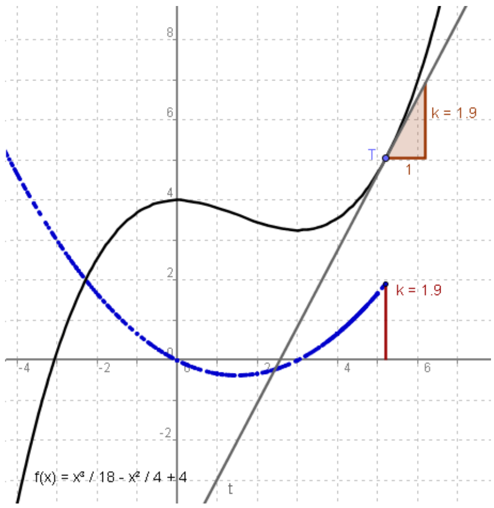
- Ziehen Sie im "Bewegen" Modus die Bezeichnungen der Objekte mit der Maus so, dass sie gut lesbar sind.

- Verschieben Sie das Zeichenblatt abschließend so, dass Ihre Konstruktion links oben im GeoGebra Fenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt"). Verkleinern Sie nun das GeoGebra Fenster (durch Ziehen der rechten unteren Ecke), um Leerraum zu vermeiden.

Damit ist Schritt 1 "Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen" erledigt. Wählen Sie nun im Menü "Datei", "Export", "Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite" und fahren Sie entsprechend der Anleitung "Drei Schritte zum dynamischen Arbeitsblatt" fort.

Beispiel 3: Steigung und Ableitung einer Funktion

Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte für die Erstellung der Konstruktion dieses Arbeitsblattes beschrieben. In diesem Arbeitsblatt wird unter anderem ein "dynamischer Text" verwendet.



Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (www.geogebra.at) durchgearbeitet haben, sollte Ihnen die Erstellung dieser aufwändigeren Konstruktion in GeoGebra ohne größere Schwierigkeiten gelingen:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen, das Koordinatengitter und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.
- Die Funktion f geben Sie direkt in die Eingabezeile ein:
  $f(x) = x^3/18 - x^2/4 + 4$
- Lassen Sie sich nun die Funktionsgleichung anzeigen: Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf die Funktion f und wählen Sie unter "Eigenschaften" bei "Beschriftung anzeigen" den Eintrag "Name und Wert". Setzen Sie für die Funktion f auch gleich das Häkchen bei "Objekt fixieren".
- Wählen Sie den Modus "Neuer Punkt" und klicken Sie auf den Funktionsgraphen. Geben Sie diesem Punkt den Namen T (rechter Mausklick und "Umbenennen").
- Im Modus "Tangenten" klicken Sie auf den Punkt T und die Funktion f. Nennen Sie die entstandene Tangente t.

- Die Steigung k und ihre bildliche Darstellung als Steigungsdreieck bekommen Sie durch Eingabe des folgenden Befehls in die Eingabezeile:
  k = Steigung[t]
  Wählen Sie als Beschriftung des Steigungsdreiecks "Name & Wert"(rechter Mausklick auf k im Algebrafenster, "Eigenschaften").

Nun soll die Steigung k auch von der x-Achse aus abgetragen werden. Dazu verwenden wir eine Strecke k'.

- Definieren Sie zwei Hilfspunkte N und Q in der Eingabezeile:
  N = (x(T), 0)
  Q = N + (0, k)

- Die Strecke k' geben Sie nun wie folgt an:
  k' = Strecke[N, Q]
  Blenden Sie die Beschriftung der Strecke k' aus (rechter Mausklick, "Eigenschaften").

- Wählen Sie den Modus "Text"und klicken Sie auf den Punkt Q. Geben Sie im erscheinenden Dialog den folgenden dynamischen Text ein, der den aktuellen Wert von k anzeigt:
  "k = "+ k

- Blenden Sie den Hilfspunkt N (rechter Mausklick, "Ausblenden") und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") aus.

- Schalten Sie abschließend die Spur für den Punkt Q ein und blenden Sie seine Beschriftung aus (rechter Mausklick, "Eigenschaften").

Wenn Sie nun den Punkt T im "Bewegen"Modus mit der Maus ziehen, sollte die Steigungsfunktion der Funktion f als Spur entstehen. Durch Drücken der Tastenkombination "Strg + f"das Zeichenblatt aufgefrischt und damit die Spur gelöscht werden.

- Ziehen Sie im "Bewegen"Modus die Bezeichnungen der Objekte mit der Maus so, dass sie gut lesbar sind.

- Verschieben Sie das Zeichenblatt abschließend so, dass Ihre Konstruktion links oben im GeoGebra Fenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt"). Verkleinern Sie nun das GeoGebra Fenster (durch Ziehen der rechten unteren Ecke), um Leerraum zu vermeiden.

Damit ist Schritt 1 "Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen"erledigt. Wählen Sie nun im Menü "Datei", "Export", "Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite"und fahren Sie entsprechend der Anleitung "Drei Schritte zum dynamischen Arbeitsblatt"fort.

Hinweis: Setzen Sie im Export Dialog das Häkchen bei "Sie können das Anwendungsfenster durch Doppelklick auf das Zeichenblatt öffnen". Dadurch ist es möglich, der Konstruktion später im Arbeitsblatt die Ableitung von f hinzuzufügen (siehe fertiges Arbeitsblatt "funktion_steigung.html").

Ergebnissicherung

Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler Ihre Überlegungen und Vermutungen zur Ergebnissicherung schriftlich notieren. Dazu können Sie die Arbeitsaufträge auch auf Papierbögen ausdrucken, die dann von Ihren Schülerinnen und Schülern mit Hilfe des dynamischen Arbeitsblattes ausgefüllt werden. Auf diese Art lassen sich dynamische Arbeitsblätter auch zur Lernzielkontrolle und Leistungsbeurteilung verwenden.

Lernstation 5: Aufbau des Unterrichtskonzepts

Dynamische Arbeitsblätter im Unterricht

Sie können nun daran gehen, Ihr frisch erworbenes Wissen in die Tat umzusetzen. Für die Verwendung der dynamischen Arbeitsblätter in Ihrem Unterricht haben Sie mehrere Möglichkeiten.

Mathematische Experimente

Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler selbst mathematische Sachverhalte mit Ihren dynamischen Arbeitsblättern entdecken.

Dabei muss Ihr Unterricht nicht unbedingt im Computerraum stattfinden. Es genügt schon ein PC mit Java, um in einer Gruppenarbeit oder einem Stationenbetrieb die Arbeitsblätter einzusetzen. Ebenso ist es denkbar, Ihre Arbeitsblätter via Internet für Hausübungen zu verwenden. Einige Tipps dazu:

- Formulieren Sie Ihre Fragestellungen möglichst offen, damit Ihre Schülerinnen und Schüler genügend Freiräume für eigene Lösungswege haben und sich selbstständig mit mathematischen Problemen auseinandersetzen können. Lernen ist ein individueller Prozess, den Sie so fördern können.
- Verbinden Sie individuelles Lernen mit Team-Work. Wenn Sie Ihre Schülerinnen und Schüler zu zweit oder in Kleingruppen arbeiten lassen, entstehen oft allein durch das gegenseitige Erklären der eigenen Gedanken neue Einsichten.
- Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler Vermutungen und Ergebnisse auch in Ihrem Heft aufschreiben.

- Eine derartige Dokumentation bietet die Basis für eine Diskussion in der Klasse über die gesammelten Vermutungen und Ergebnisse. Lassen Sie dazu Schülerinnen und Schüler oder Schülergruppen ihre "Theorien"präsentieren und von der Klasse kritisch beurteilen.

- Während der Arbeitsphasen mit den dynamischen Arbeitsblättern sollten Sie sich als Berater im Hintergrund halten und nur Hilfestellung geben, wenn diese von Ihren Schülerinnen und Schülern angefordert wird. So geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit, in Ruhe nachzudenken und eigene Lösungswege zu suchen.

Dynamische Overheadfolien

Verwenden Sie Ihr dynamisches Arbeitsblatt als "dynamische Overheadfolie", um Sachverhalte zu veranschaulichen oder Experimente mit der gesamten Klasse durchzuführen. Dazu benötigen Sie einen Laptop oder PC und einen Beamer im Unterrichtsraum. Einige Tipps dazu:

- Versuchen Sie Ihre Schüler bei der Präsentation aktiv einzubinden. Fördern Sie "mathematische Diskussionen" in der Klasse, indem Sie Vermutungen der Schüler aufgreifen und mit Hilfe des Computers überprüfen.

- Lassen Sie die Schüler selbst Ergebnisse aus Arbeitsphasen mit dem Arbeitsblatt präsentieren.

GeoGebra im Unterricht

Sie können Ihre Schülerinnen und Schüler natürlich auch direkt mit GeoGebra arbeiten lassen. Im Lernpfad "Dynamische Geometrie und Algebra"wird hierzu GeoGebra als eigenständiges Programm für Ihren Unterricht vorgestellt, das Ihren Schülerinnen und Schülern viele Möglichkeiten zum mathematischen Experimentieren und Problemlösen bietet.

Ausgangspunkte für Arbeitsaufträge

Bei der Erstellung von Arbeitsblättern, die Ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten sollen, haben Sie die Möglichkeit verschiedene Ausgangspunkte zu verwenden:

- *Offene Fragestellungen*: regen Sie Ihre Schüler zu mathematischen Experimenten an, indem Sie ihre Fragen so formulieren, dass eigenes Entdecken und individuelle Lösungswege möglich sind.

- *Algebrafenster*: durch Verwendung des Algebrafensters können Ihre Schülerinnen und Schüler selbst Änderungen an der Konstruktion des Arbeitsblattes vornehmen (z.B. $f(x) = x^2$ in $f(x) = \sin(x)$). Damit ist es ihnen z.B. möglich, eigene Vermutungen selbst zu überprüfen.

Arbeitsblätter mit offenen Fragestellungen

Die folgenden bereits von Lernstation 2 bekannten Arbeitsblätter beinhalten offene Fragestellungen und sollen hier nochmals als Anregung für Ihre eigene Unterrichtsvorbereitung dienen.

Anregung: Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra (www.geogebra.at unter ,,Beispiele“)

Lernstation 6: Durchführung im Unterricht

GeoGebra für Ihre Schülerinnen und Schüler

Da GeoGebra kostenlos ist, können auch Ihre Schülerinnen und Schüler das Programm problemlos für mathematische Experimente zu Hause nutzen.

Wer über einen Internet-Zugang verfügt, erhält die aktuellste Version direkt von der GeoGebra Homepage. Für alle anderen Schülerinnen und Schüler können Sie die Datei geogebra_setup.exe auf CDs brennen und diese in der Klasse für die Installation zu Hause verleihen.

Lernstation 8: Weiterführende Planung

Mit GeoGebra weiterarbeiten

In diesem Lernpfad haben Sie Ihre ersten Erfahrungen mit dynamischen Arbeitsblättern gemacht und gesehen, wie vielfältig sich GeoGebra für Ihren Unterricht nutzen lässt.

In weiteren Lernpfaden auf dieser Plattform können Sie die Anwendungsmöglichkeiten von GeoGebra für verschiedenste Themen der Sekundarstufe kennen lernen.

Besuchen Sie von Zeit zu Zeit auch die Homepage von GeoGebra (www.geogebra.at), um dort jeweils die aktuellste Version sowie weitere Beispiele und Informationen zu erhalten. Wenn Sie möchten, können Sie sich auch in die Mailinglist von GeoGebra eintragen, um via E-Mail über Neuigkeiten informiert zu werden.

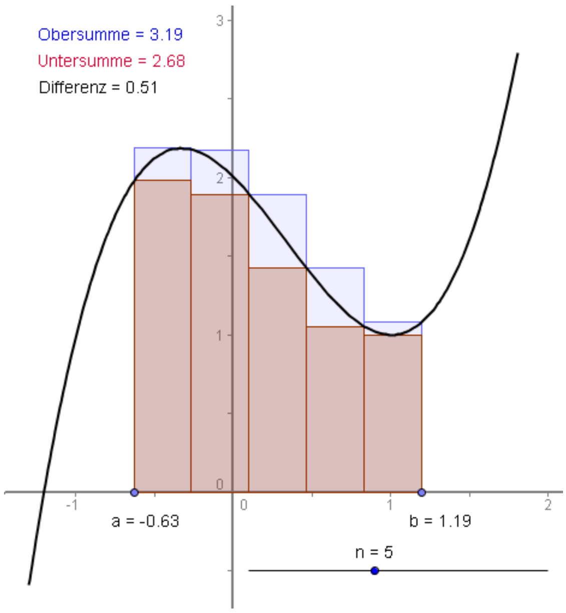
Über Rückmeldungen zu diesem Lernpfad und Anregungen im Zusammenhang mit GeoGebra würde ich mich sehr freuen: Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at

9.3 Integrale - forschend entdeckt

Markus Hohenwarter und Sandra Schmidtpott
Lernpfad für Intel Lehren für die Zukunft, September 2004
http://aufbaukurs.intel-lehren.de

Dynamische Geometrie und Algebra ergeben *GeoGebra*, eine mehrfach preisgekrönte Unterrichtssoftware, die Sie in der gesamten Sekundarstufe von einfachen Konstruktionen bis hin zum Differenzieren und Integrieren einsetzen können.

In diesem Lernpfad wird die Methode des forschenden, problemorientierten Unterrichts anhand eines konkreten Anwendungsbeispiels zur Berechnung krummlinig begrenzter Flächen vorgestellt. Mit GeoGebra können Ihre Schülerinnen und Schüler dabei Experimente mit dynamischen Unter- und Obersummen durchführen und das unbestimmte Integral durch Flächeninhaltsfunktionen entdecken. Der Einsatz neuer Medien ermöglicht so einen aktiven, experimentellen Zugang zur Integralrechnung.



Fach:	Mathematik
Thema der Einheit:	Dynamische Arbeistblätter mit GeoGebra
Grundfragen:	Wie können Schüler forschend Integrale entdecken?
Zielgruppe:	Sekundarstufe 2
Zeitrahmen:	ca. 3 Unterrichtsstunden
Hardware:	PC
Software:	GeoGebra

Unterrichtsdokumentation

Forschender Unterricht orientiert sich an der Methode der Erkenntnisgewinnung in der Physik. Ausgehend von einem konkreten Problem werden Hypothesen aufgestellt, die danach in Experimenten überprüft werden.
Die dynamische Software GeoGebra ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise einen solchen experimentellen Zugang zur Mathematik. Dadurch können Sie selbstgesteuertes, individuelles und entdeckendes Lernen fördern. Wie dies am Beispiel der Integralrechnung aussehen kann, sehen Sie in der folgenden Unterrichtsdokumentation. In diesem Lernpfad werden Sie unter anderem erfahren, wie Sie die entsprechenden dynamischen Konstruktionen mit GeoGebra erstellen können.

Fläche eines Grundstücks am See

Problemstellung

Am Beginn von forschendem Unterricht steht immer eine konkrete Problemstellung. Diese sollte aus der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler stammen und eine Wissenslücke bewusst machen. Das folgende Beispiel soll das Problem der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen bewusst machen.

Grundstück am See

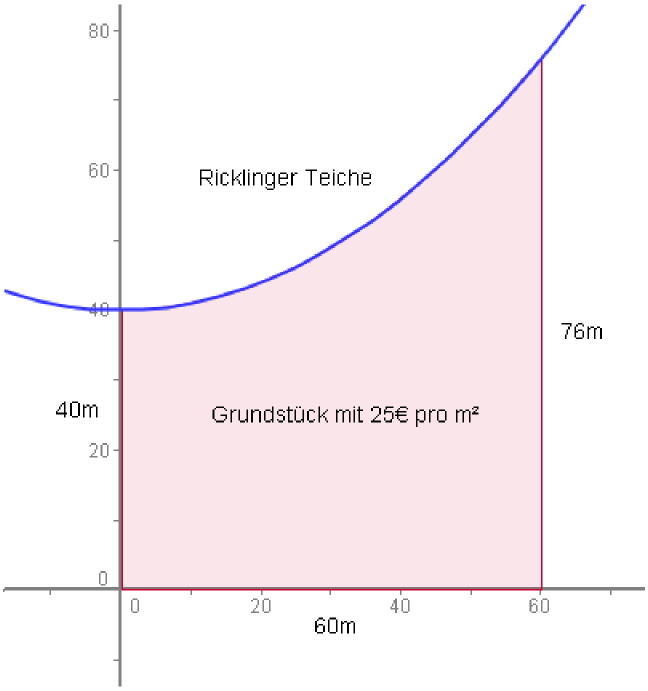
Ein Grundstück, das sich an einem der Ricklinger Teiche befindet, soll verkauft werden. Der Privateigentümer und die Stadt Hannover müssen sich auf einen fairen Preis einigen. Das Grundstück ist bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht vermessen. Die Stadt Hannover plant für den Haushalt einen kalkulierten Preis von 80.000 Euro ein. Hat die Stadt Hannover richtig kalkuliert?

Lösungsstrategien

Sobald nach einer Diskussion in der Klasse das Problem der Flächenberechnung erkannt wurde, kann die Lehrkraft zusammen mit den Schülerinnen und Schülern Problemlösungsstrategien entwickeln. Dabei soll die Aktivität der Schüler, selbst Lösungen zu erzielen, angeregt und die Kooperation und Teamfähigkeit durch gemeinsames Lösen von Schwierigkeiten gefördert werden. Die Lehrkraft gibt dabei Impulse, um das Denken der Schülerinnen und Schüler zu lenken.

Ausgehend vom Beispiel "Grundstück am See" sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst versuchen, in Kleingruppen die folgenden Fragen zu beantworten:

1. Wie groß ist das Grundstück (a) mindestens und (b) höchstens? Gebt jeweils auch den Rechenweg an.



2. Wie könnte man die Abschätzung der Grundstücksfläche aus der 1. Aufgabe genauer machen? Überlegt mögliche Lösungsansätze.

Jede Gruppe präsentiert danach ihre Lösungsansätze, die dann in der Klasse diskutiert werden. Die Lehrperson gibt dabei durch Fragen oder Gegenbeispiele Impulse, weist auf Widersprüche hin und ordnet die Beiträge. Es können durchaus Irrwege zugelassen werden, da dies den Lösungsprozess spannender macht.
Ergebnis einer solchen Diskussion sind schließlich eine oder mehrere Hypothesen, die in Experimenten mit GeoGebra überprüft werden können.

Experimente zu Unter- und Obersummen

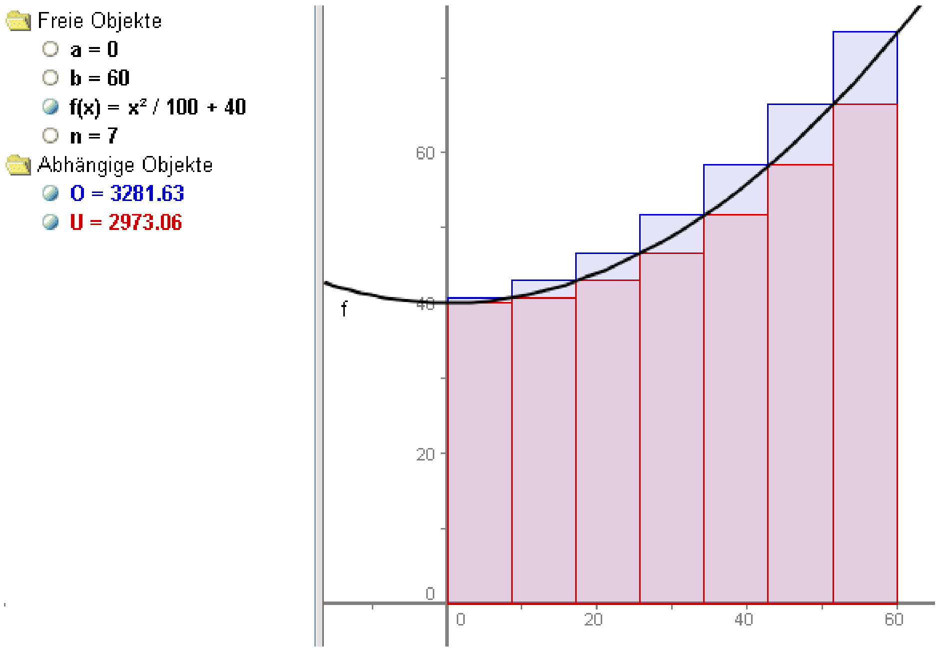
Auf dem eben beschriebenen Weg kann die Klasse zu einer Lösungsstrategie gelangen, bei der das Grundstück durch Rechtecke unterteilt wird. Eine genauere Hypothese wäre, dass sich die Grundstücksfläche durch Rechtecke "unterhalb" und "oberhalb" der gekrümmten Linie abschätzen lässt. Diese Hypothese wird dann von den Schülerinnen und Schülern mit GeoGebra genauer untersucht. Das Seeufer wird hierbei als Parabelbogen modelliert.

Folgende Fragestellungen könnten die Experimente der Kleingruppen begleiten:

1. Die Zahl n steht für die Anzahl der zu sehenden Rechtecke; U und O bezeichnen die Unter- bzw. Obersumme. Klickt auf n und verändert seinen Wert mit Hilfe der

Pfeiltasten. Wie verändern sich Unter- und Obersumme grafisch und algebraisch? Notiert eure Beobachtungen.

2. Versucht eine allgemeine Aussage für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Rechtecke n sowie Unter- und Obersumme zu formulieren.



In GeoGebra sind die Intervallgrenzen a und b, die Anzahl der Rechtecke n und die Funktion f (Seeufer) dynamisch veränderbar. Damit haben Ihre Schülerinnen und Schüler viele Experimentiermöglichkeiten und können das Problem der Flächenberechnung auch für andere Typen von Funktionen (z.B. Polynome dritten Grades) untersuchen.

Wie die dynamische Konstruktion für dieses Experiment mit GeoGebra erstellt wird, erfahren Sie detailliert in Lernstation 4.

Flächeninhaltsfunktionen

Problemstellung

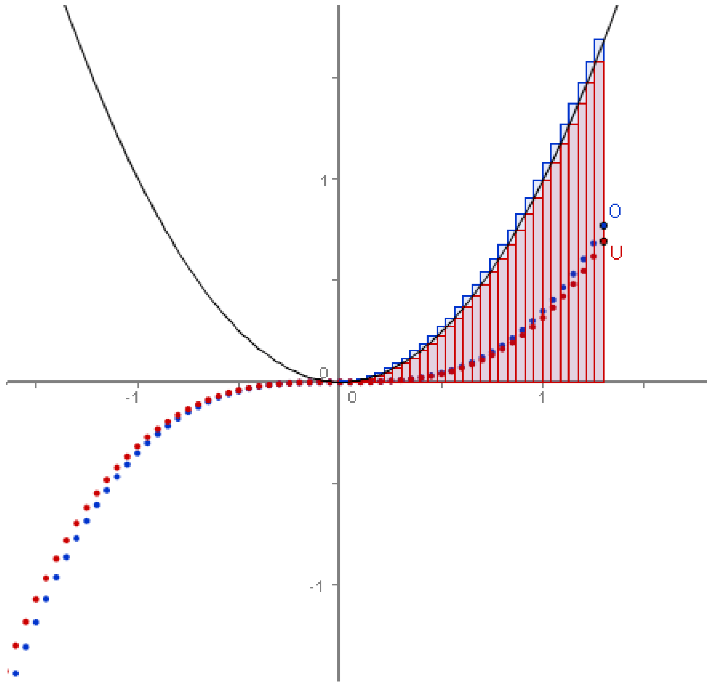
Die Schülerinnen und Schüler wissen nun bereits, wie man Flächeninhalte näherungsweise mit Unter- und Obersumme bestimmen kann. Für das praktische Rechnen ist dies aber sehr aufwändig. Es entsteht also eine neue Problemstellung: Lässt sich der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Kurve auch einfacher berechnen?

Lösungsstrategie

Die zentrale Idee ist hierbei die Verwendung einer Flächeninhaltsfunktion F(x), welche die Berechnung der Fläche vereinfachen würde. Dies muss zunächst mit den Schülern genau erörtert werden. Außerdem entsteht dabei eine interessante neue Frage: wie sieht so eine Flächeninhaltsfunktion aus?

Experiment

Zur Klärung dieser Frage kann GeoGebra eingesetzt werden, indem man z.B. die Parabel $f(x) = x^2$ wie im Folgenden beschrieben untersucht. Die Schülerinnen und Schüler können dabei selbst zu einer Hypothese über die Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x^n$ kommen.



Beschreibung der Konstruktion: Die Punkte U und O haben als x-Koordinate die rechte Intervallgrenze b und als y-Koordinate die Unter- bzw. Obersumme des Intervalls [0, b]. Verändert man die Intervallgrenze b mit den Pfeiltasten, so entstehen die Spuren der Flächeninhaltsfunktionen der Unter- und Obersumme.

Folgende Fragen sind nun von den Schülerinnen und Schülern in Kleingruppen zu bearbeiten:

1. Versucht die Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^2$ anzugeben. Überprüft eure Hypothese, indem ihr die Flächeninhaltsfunktion mit GeoGebra zeichnen lasst.

Berechnet mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion die Fläche unterhalb von f im Intervall [0, 2] und vergleicht euer Ergebnis mit den entsprechenden Werten der Unter- und Obersumme.

2. Untersucht nun genauso wie in (1) die Funktionen (a) $f(x) = x$ und (b) $f(x) = x^3$.

3. Wie könnte die Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^n$ aussehen?

Lernstation 1: Einführung

Forschender Unterricht

Die Methode des *forschenden, problemorientierten Unterrichts* (nach Kerschensteiner) orientiert sich an der Methode der Erkenntnisgewinnung in der Physik:

- Erkennung des Problems
- Erarbeitung von Lösungsvermutungen bzw. Hypothesen
- Prüfung der Hypothesen durch Experimente

Den Schülerinnen und Schülern wird dabei eine Methode zur Problemlösung und Erkenntnisgewinnung vermittelt, die ...

- die Fähigkeit zu kontrolliertem logischen Denken fördert,
- eine Grundlage für den Transfer auf andere Wissensbereiche darstellt und
- den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bietet, selbst neue Sachverhalte durch planmäßiges Arbeiten zu entdecken.

Unterrichtsphasen

Forschender Unterricht verläuft typischerweise in drei Phasen:

1. Entwicklung der Problemstellung
2. Erarbeiten von Lösungsmöglichkeiten, Bildung von Hypothesen
3. Prüfung der Hypothesen durch Planung, Durchführung und Auswertung von Experimenten

Ausgangspunkt ist dabei ein konkretes, für die Schülerinnen und Schüler relevantes Problem. Der Begriff *Problem* bezeichnet dabei eine Wissenslücke (unfertige kognitive Struktur) und die Schwierigkeit, diese Lücke zu schließen. Die Unvollständigkeit der kognitiven Struktur wird als affektive Spannungslage erlebt, die auf Verminderung drängt. Voraussetzung dafür ist ein Interesse der Schülerinnen und Schüler am Thema.

Problematisieren bedeutet eine Lehrtätigkeit, die Lückenerlebnisse provoziert, inszeniert oder aufgreift. Problematisieren lässt sich am besten dadurch realisieren, wenn problemweckende Impulse bzw. Informationen eine dosierte mittlere Diskrepanz zu bestehenden kognitiven Schemata erzeugen.

Ziele des forschenden Unterrichts

- Erzeugen eines affektiven Spannungszustandes mit Hilfe der Problemstellung: dadurch werden gefundene Lernergebnisse besser behalten
- Spannende Gestaltung der Lösungsprozesse: verzögerte Lösungen haften besser
- Provozieren von Fragestellungen durch Schülerinnen und Schüler: so wird eine tiefere Auseinandersetzung mit dem Thema erreicht
- Anregen zu kritischen, differenzierten Überlegungen
- Steigerung der Aktivität der Schülerinnen und Schüler, selbstständig Lösungen zu erzielen
- Motivation zur Auseinandersetzung mit dem Inhalt erzeugen
- Entwickeln von Problemlösungsstrategien durch und mit den Schülerinnen und Schülern
- Förderung von Kooperation und Teamfähigkeit durch gemeinsames Lösen von Schwierigkeiten und Problemen (z.B. in Partner- oder Gruppenarbeit)
- Handlungsorientierung, da ein anwendungsbezogenes Problem ein Handlungsvorhaben darstellt

Mathematik erforschen mit GeoGebra

GeoGebra ist ein dynamisches Werkzeug für den Mathematikunterricht, in dem Geometrie und Algebra gleichwertige Partner sind. Die Software ermöglicht Ihren Schülerinnen und Schülern auf einfache Weise einen experimentellen Zugang zur Mathematik. Dadurch können Sie selbstgesteuertes, individuelles und entdeckendes Lernen fördern.

GeoGebra eignet sich besonders gut für einen forschenden, problemorientierten Unterricht. Ihre Schülerinnen und Schüler können mit Hilfe des Programms mathematische Experimente durchführen, die auf Papier gar nicht oder nur mit sehr großem Aufwand möglich wären. Beispielsweise kann die Bedeutung von Parametern dynamisch sichtbar gemacht werden und dies zur Bildung eigener Hypothesen beitragen. Das Nebeneinander von grafischer und algebraischer Repräsentation trägt dabei zu einem tieferen Verständnis mathematischer Zusammenhänge bei.

Lernstation 2: Auswahl von Inhalten

Die Methode des forschenden Unterrichts lässt sich mit GeoGebra in vielfältiger Weise in beiden Sekundarstufen einsetzen. Sie bietet sich besonders dann an, wenn Sie reale Problemstellungen zu Themen der Geometrie, Algebra oder Analysis behandeln möchten. Besonders als Einstieg in ein neues Thema kann diese Methode für Ihre Schülerinnen und Schüler sehr motivierend sein.

Forschender Unterricht zur Integralrechnung

Im Folgenden wird ein forschender Zugang zur Integralrechnung mit GeoGebra vorgestellt.

Unter- und Obersummen: Durch ein anwendungsbezogenes Beispiel erkennen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Problematik der Berechnung einer krummlinig begrenzten Fläche. Über die Möglichkeit der Darstellung von dynamischen Unter- und Obersummen mit Hilfe von GeoGebra sowohl für das Einstiegproblem als auch für andere Beispiele erkennen die Schülerinnen und Schüler weitgehend selbstständig die Hintergründe des Riemann-Integrals. Beispiel: Fläche eines Grundstücks am See (siehe Unterrichtsdokumentation)

Flächeninhaltsfunktion: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist ein zentrales Thema der Sekundarstufe II. Als Vorbereitung und Motivation für diesen wichtigen Zusammenhang können Ihre Schülerinnen und Schüler die Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x^n$ mit GeoGebra entdecken. Anknüpfend an die Überlegungen zu Unter- und Obersummen kommt auch hier wieder die Methode des forschenden Unterrichts zum Einsatz. Beispiel: Flächeninhaltsfunktionen (siehe Unterrichtsdokumentation)

Bildung von Arbeitsteams im Kollegium

Sowohl bei der Erstellung von Arbeitsblättern und Materialien mit offenen Fragestellungen, die einen experimentellen und entdeckenden Zugang zur Integralrechnung ermöglichen, als auch bei der Auswahl der Themeninhalte und der Auswahl des Einstiegs in die Integralrechnung (geometrisch oder analytisch), sind Gespräche und Diskussionen mit Kollegen meist anregend, bereichernd und sehr vorteilhaft.

Die unterschiedlichen Erfahrungen und Fertigkeiten der einzelnen Kolleginnen und Kollegen lassen Sie in der Regel schneller zu besseren Ergebnissen kommen. Sie sollten in ihrem Team auch die mit GeoGebra erstellten Aufgaben ausprobieren und durchspielen, um ganz sicher zu sein, dass sie sich zur Behandlung im Unterricht eignen. Nach dem Motto "gemeinsam sind wir stärker" können so bereits im Vorfeld Fehler vermieden werden.

Für die Arbeit mit diesem Lernpfad sollten Sie etwa vier Stunden veranschlagen.

Lernstation 3: Analyse der Voraussetzungen

Grundlegende Voraussetzungen für Sie

In diesem Lernpfad werden Sie GeoGebra verwenden. Die dazu nötigen Fertigkeiten werden Sie in dieser und der nächsten Lernstation erwerben. Ansonsten sind lediglich Grundkenntnisse im Umgang mit dem Computer erforderlich.

Grundlegende Voraussetzungen für Ihre Schüler

Die Oberfläche von GeoGebra ist auf die Verwendung durch Schülerinnen und Schüler ausgerichtet. Beispielweise lässt sich eine Funktion ganz einfach als $f(x) = x^2$ eingeben. Auch die Konstruktionswerkzeuge sind intuitiv mit der Maus zu bedienen, so dass bereits in der ersten Unterrichtsstunde mit der Arbeit mit GeoGebra begonnen werden kann.

Technische Voraussetzungen

Für die Arbeit mit diesem Lernpfad benötigen Sie die kostenlos verfügbare Software GeoGebra, die laufend verbessert und weiterentwickelt wird. Die aktuellste Version können Sie direkt von der GeoGebra Homepage (www.geogebra.at) unter "WebStart" starten. Unter "Download" erfahren Sie auch, wie Sie die Software in Ihrem Schulnetzwerk verwenden können.

Machen Sie sich zunächst ein wenig mit GeoGebra vertraut. Dazu finden Sie hier eine Kurzanleitung, die Ihnen die Software anhand von wenigen Beispielen vorstellt: GeoGebra Quickstart (siehe www.geogebra.at).

Virtueller Klassenraum

Unter Umständen ist es günstig, sich einen Zugang zu einem Virtuellen Klassenraum (www.lo-net.de) zu besorgen. Sie können dort Ihre vorbereiteten Dateien ablegen und für Ihre Schülerinnen und Schüler sowohl in der Schule als auch zu Hause zugänglich machen. Wenn Sie den Virtuellen Klassenraum nicht verwenden möchten, dann können Sie Ihre Dateien natürlich auch per E-Mail an Ihre Schülerinnen und Schüler versenden.

Lernstation 4: Steigerung der Medienkompetenz

Forschender Unterricht mit GeoGebra

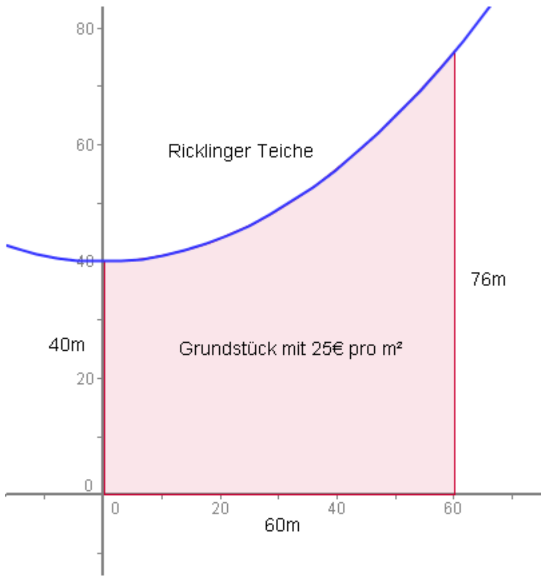
In Lernstation 2 wurden Ihnen zwei Beispiele für forschenden Unterricht zur Integralrechnung vorgestellt. Hier erfahren Sie, wie Sie die entsprechenden Materialien für Ihren Unterricht erstellen und wie Sie bzw. Ihre Schülerinnen und Schüler die Möglichkeiten von GeoGebra für die angegebenen mathematischen Experimente nützen können.

Präsentation der Problemstellung

GeoGebra lässt sich auch zur Veranschaulichung der Problemstellung selbst verwenden. Im Beispiel "Fläche eines Grundstücks am See" wurde dazu eine Grafik mit GeoGebra erstellt und mit dem Text der Problemstellung kombiniert. Hier wird erklärt, wie dies im Detail funktioniert.

Die Konstruktion erstellen

Sie können mit GeoGebra eine Abbildung erzeugen, indem Sie eine Konstruktion erstellen und diese danach als Bild exportieren. Wie dies für die hier zu sehende Abbildung funktioniert, wird nun genau beschrieben.



Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (pdf) durchgearbeitet haben, sollte die Erstellung dieser Konstruktion in GeoGebra kein Problem sein:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").

- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.

- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von 0 bis 80 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und "Zoom" bzw. Modus "Zeichenblatt verschieben")

Nun beginnen Sie die eigentliche Konstruktion, indem Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile schreiben und jeweils mit der Eingabetaste bestätigen.

- Definieren Sie zunächst die Funktion für das Seeufer:
  $f(x) = x^2/100 + 40$

- Geben Sie danach die Intervallgrenzen an:
  a = 0
  b = 60

- Lassen Sie sich das Integral von f im Intervall [a, b] anzeigen:
  F = Integral[f, a, b]

- Wählen Sie abschließend den Textmodus "T" und fügen die Beschriftungen ein.
  Tipp: den Funktionswert an der Stelle b müssen Sie übrigens nicht selbst berechnen. Geben Sie im Textdialog anstelle von *"76m"* einfach *f(b) + "m"* ein.

- Ziehen Sie im "Bewegen" Modus die Texte mit der Maus so, dass sie gut lesbar sind.

Abschließend können Sie Ihre Konstruktion noch verschönern, in dem Sie im Menü "Bearbeiten", "Eigenschaften" Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen. Blenden Sie hier auch die Beschriftung von F aus. Speichern Sie nun Ihre Konstruktion unter ab, z.B. als "integral_see_abbildung.ggb".

Das Zeichenblatt als Bild exportieren

Nun soll die erstellte Konstruktion als Bild exportiert werden.

- Verschieben Sie das Zeichenblatt so, dass Ihre Konstruktion links oben im GeoGebra Fenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt"). Verkleinern Sie nun das GeoGebra Fenster (durch Ziehen der rechten unteren Ecke), um Leerraum zu vermeiden.

- Wählen Sie jetzt im Menü "Datei", "Export" den Punkt "Zeichenblatt als Bild" und exportieren Sie das Zeichenblatt als "png" Grafik mit dem Namen *integral_see.eps*.

Das Bild in einen Text einfügen

Öffnen Sie nun ein Textverarbeitungsprogramm Ihrer Wahl (z.B. Microsoft Word) und schreiben dort den Text der Problemstellung. Fügen Sie dann die Grafik *integral_see.eps* an der gewünschten Stelle ein. In Word wählen Sie dazu im Menü *Einfügen* den Punkt *Grafik einfügen.*

Tipp: Vergrößern oder verkleinern Sie die eingefügte Grafik in Ihrem Textverarbeitungsprogramm nicht, da dies zu schlechter Bildqualität führen kann. Wenn Ihnen die Größe der eingefügten Grafik nicht gefällt, exportieren Sie die Abbildung erneut aus GeoGebra und wählen dabei im Export Dialog die gewünschten Werte für die Breite und Höhe des Bildes.

Experimente mit GeoGebra

Um bei den ersten Experimenten Ihrer Schülerinnen und Schüler Überforderungen zu vermeiden, können Sie ihnen vorgefertigte dynamische Konstruktionen als Dateien zur Verfügung stellen. Sobald Ihre Schülerinnen und Schüler erfahrener im Umgang mit GeoGebra sind, geben Sie nur mehr Teile der Konstruktion vor oder lassen sie die Experimente völlig eigenständig durchführen.

Für die Binnendifferenzierung im Unterricht können Sie vorgegebene Konstruktionen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad für die Experimente erstellen. Lassen Sie Ihre leistungsstarken Schülerinnen und Schüler nach Bearbeitung der Aufgaben ein eigenes Experiment mit GeoGebra erstellen und so das selbstständige Umgehen mit dem Programm erlernen.

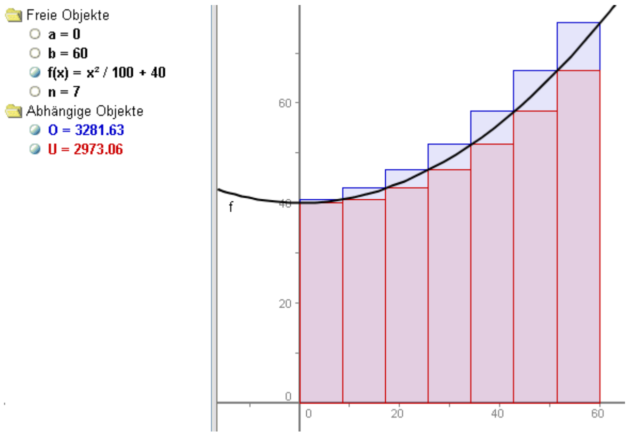
Hier wird nun erklärt, wie Sie die Konstruktionen für die Experimente der vorgestellten Beispiele selbst erstellen können. Durch begleitende Fragestellungen auf Arbeitsblättern geben Sie Impulse für die Experimente mit den dynamischen Konstruktionen. Um die Dateien für die Arbeitsblätter und Konstruktionen zur Verfügung zu stellen, können Sie beispielsweise einen virtuellen Klassenraum (www.lo-net.de) verwenden.

Unter- und Obersummen

Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte für die Erstellung einer dynamischen Konstruktion zu Unter- und Obersummen beschrieben.

Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (pdf) durchgearbeitet haben, sollte die Erstellung dieser Konstruktion in GeoGebra kein Problem sein:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.



- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von 0 bis 80 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und "Zoom" bzw. Modus "Zeichenblatt verschieben")

Nun beginnen Sie die eigentliche Konstruktion, indem Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile schreiben und jeweils mit der Eingabetaste bestätigen.

- Definieren Sie zunächst die Funktion (Seeufer):
  $f(x) = x^2/100 + 40$

- Geben Sie danach die Intervallgrenzen an:
  a = 0
  b = 60

- Legen Sie jetzt die anfängliche Feinheit Ihrer Intervallschachtelung fest:
  n = 7

- Klicken Sie mit der rechten Maustaste im Algebrafenster auf die Zahl n und geben unter "Eigenschaften" als Schrittweite 1 an.

Nun kommen die entscheidenden Befehle dieser Konstruktion:

- Definieren Sie die Obersumme:
  O = Obersumme[f, a, b, n]

- Definieren Sie die Untersumme:
  U = Untersumme[f, a, b, n]

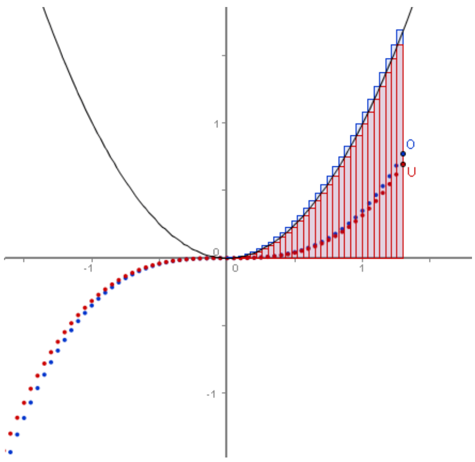
- Wählen Sie den "Bewegen" Modus und klicken Sie auf a, b oder n. Durch Drücken der Pfeiltasten verändern Sie deren Werte dynamisch.

Abschließend können Sie Ihre Konstruktion noch verschönern, in dem Sie im Menü "Bearbeiten", "Eigenschaften" Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen. Es empfiehlt sich die Beschriftungen von O und U auszublenden oder auf "Name & Wert" zu stellen.

Speichern Sie nun Ihre Konstruktion unter dem Namen *integral_see.ggb* ab. Diese Datei können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern später zusammen mit einem Arbeitsblatt für Experimente zur Verfügung stellen.

Flächeninhaltsfunktionen

Im Folgenden werden die wesentlichen Punkte für die Erstellung einer dynamischen Konstruktion zu Flächeninhaltsfunktionen beschrieben.



Wenn Sie *GeoGebra Quickstart* (pdf) durchgearbeitet haben, sollte die Erstellung dieser Konstruktion in GeoGebra kein Problem sein:

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, "Neu").
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü "Ansicht") anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.
- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von -5 bis 5 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und "Zoom" bzw. Modus "Zeichenblatt verschieben")

Nun beginnen Sie die eigentliche Konstruktion, indem Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile schreiben und jeweils mit der Eingabetaste bestätigen.

- Definieren Sie zunächst die Funktion:
  $f(x) = x^2$

- Geben Sie danach die Intervallgrenzen an:
  a = 0
  b = 2

- Legen Sie jetzt die anfängliche Feinheit Ihrer Intervallschachtelung fest:
  n = 30

- Klicken Sie mit der rechten Maustaste im Algebrafenster auf die Zahl n und geben unter "Eigenschaften" als Schrittweite 1 an.

Nun kommen die entscheidenden Befehle dieser Konstruktion:

- Definieren Sie die Unter- und Obersumme:
  os = Obersumme[f, a, b, n]
  us = Untersumme[f, a, b, n]

- Definieren Sie die Punkte auf den Flächeninhaltsfunktionen:
  O = (b, os)
  U = (b, us)

- Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf O bzw. U und wählen Sie *Spur an.*

- Wählen Sie den "Bewegen" Modus und klicken Sie b. Durch Drücken der Pfeiltasten verändern Sie den Wert von b dynamisch und erzeugen die Spuren der Flächeninhaltsfunktionen der Unter- und Obersummen.

- Mit *Strg + f* löschen Sie die Spuren.

Abschließend können Sie Ihre Konstruktion noch verschönern, in dem Sie im Menü "Bearbeiten", "Eigenschaften" Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen. Es empfiehlt sich die Beschriftungen von os und us auszublenden.

Speichern Sie nun Ihre Konstruktion unter dem Namen *integral_flaecheninhaltsfunktion.ggb* ab. Diese Datei können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern später zusammen mit einem Arbeitsblatt für Experimente zur Verfügung stellen.

Ergebnissicherung

Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler Ihre Überlegungen und Vermutungen zur Ergebnissicherung schriftlich notieren. Dazu können Sie die Arbeitsaufträge auf Papierbögen ausdrucken, die dann von Ihren Schülerinnen und Schülern mit Hilfe der dynamischen Konstruktionen ausgefüllt werden. Auf diese Art lässt sich GeoGebra auch zur Lernzielkontrolle und Leistungsbeurteilung verwenden.

Die Schülerinnen und Schüler können ihre Arbeitsergebnisse aber auch selbstständig kontrollieren. Wenn sie mit Hilfe von GeoGebra die Fläche bzw. das Integral haben bestimmen lassen, dann wird automatisch die Maßzahl der Fläche angegeben. Die Schülerinnen und Schüler können so ihre Vermutungen und Berechnungen kontrollieren und gegebenenfalls korrigieren.

Lernstation 5: Aufbau des Unterrichtskonzepts

Sie können nun daran gehen, Ihr frisch erworbenes Wissen in die Tat umzusetzen. Überlegen Sie, welche Themen in Ihrer aktuellen Unterrichtsplanung sich für einen forschenden, problemorientierten Unterricht eignen würden.

Präsentation

Verwenden Sie GeoGebra als "dynamische Overheadfolie", um die Problemstellung zu veranschaulichen oder Experimente mit der gesamten Klasse durchzuführen. Dazu benötigen Sie einen Laptop oder PC und einen Beamer im Unterrichtsraum. Auf diese Art können natürlich auch Ihre Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse mit Hilfe des Programms darstellen.

Experimente

Ihr Unterricht muss nicht unbedingt im Computerraum stattfinden. Es genügt schon ein PC mit GeoGebra, um in einer Gruppenarbeit oder einem Stationenbetrieb damit zu experimentieren. Auch für Hausübungen lässt sich das Programm problemlos einsetzen, da GeoGebra kostenlos verfügbar ist.

Integrale in GeoGebra

Neben den bereits vorgestellten Beispielen zur Integralrechnung können Ihnen die folgenden Hinweise als Anregung für einen Einsatz von GeoGebra in Ihrem Unterricht dienen.

Unbestimmtes Integral

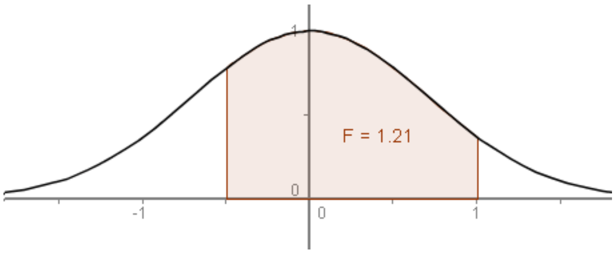
GeoGebra bietet auch einen Befehl *Integral[f]* für das unbestimmte Integral einer Funktion f. Bei Veränderung der Funktion f (z.B. Verschieben mit der Maus) wird das Integral ebenfalls dynamisch aktualisiert. Beispiel:

```
f(x) = sin(x)
F = Integral[f]
```

Ziehen Sie nun die Funktion f im *Bewegen* Modus mit der Maus.

Numerische Integration

Der Befehl *Integral[f, a, b]* funktioniert auch für Funktionen, deren Integral nicht analytisch bestimmt werden kann. In diesem Fall verwendet GeoGebra automatisch ein numerisches Integrationsverfahren (adaptives Gauss-Legendre Verfahren).



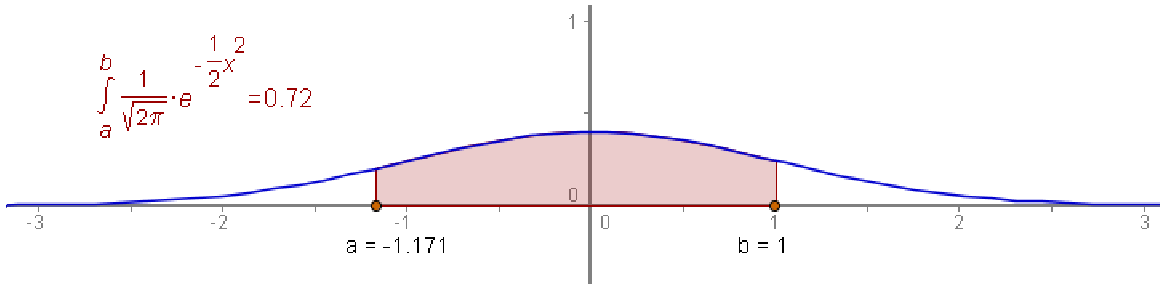
Beispiel:

```
a = -0.5
b = 1
f(x) = exp(-x^2)
F = Integral[f, a, b]
```

Damit ist es etwa auch möglich, die Gaußsche Glockenkurve (Stichwort: Normalverteilung) zu integrieren.

Exkurs: Formeln

Sie können in GeoGebra neben gewöhnlichen Texten auch Formeln schreiben und damit z.B. auch Integrale.



Solche Formeln können in GeoGebra Texten als LaTeX Formel eingegeben werden. LaTeX ist ein seit Jahrzehnten etablierter Standard zum Schreiben mathematischer Formeln. Für ein einfaches Integral erstellen Sie einen neuen Text (Modus "T") und geben Sie Folgendes ein: "\int_{a}^{b} f(x) dx"

Weitere einfache LaTeX Befehle sind "\frac{a}{b}" für einen Bruch und "\sqrt{2}" für eine Wurzel. Mehr über mathematische Formeln können Sie in der GeoGebra Hilfe (siehe LaTeX) erfahren.

Offene Arbeitsaufträge

Durch offene Fragestellungen in Ihren Arbeitsaufträgen geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, selbst mathematische Zusammenhänge zu entdecken. Versuchen Sie dabei Ihre Fragen so zu formulieren, dass individuelle Lösungswege möglich sind.

Dynamische Arbeitsblätter

Auf der GeoGebra Homepage finden Sie einige dynamische Arbeitsblätter mit offenen Fragestellungen. Solche Arbeitsblätter können von Ihren Schülerinnen und Schülern in einem Internet Browser verwendet werden. Wie Sie selbst solche dynamischen Arbeitsblätter erstellen können, erfahren Sie ausführlich im Lernpfad "Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra". Eine kurze Anleitung dazu finden Sie in der Datei "Dynamische Arbeitsblätter erstellen" (www.geogebra.at).

Lernstation 6: Durchführung im Unterricht

Tipps zur Durchführung des Unterrichts

Beobachten Sie Ihre Schülerinnen und Schüler während der Arbeitsphasen mit GeoGebra genau:

- Machen Sie sich Notizen über die Gruppenarbeit am Computer und die Bearbeitung der Aufgaben auf einem Arbeitsblatt.
- Achten Sie bei einer Gruppenarbeit darauf, dass sich alle Mitglieder einer Gruppe aktiv beteiligen können.

Holen Sie sich während der Unterrichtsreihe immer wieder Rückmeldungen von Ihren Schülerinnen und Schülern und beziehen Sie diese in Ihre laufende Unterrichtsplanung ein. Manchmal kommt es vor, dass ...

- die Begeisterung bei der Arbeit mit GeoGebra höher ist als erwartet und man noch weitere Beispiele bearbeiten lassen kann.
- die Schülerinnen und Schüler mit GeoGebra besser zurechtkommen als erwartet und sie mit Ihrem Unterrichtsplan schneller vorankommen als geplant.

GeoGebra für Ihre Schülerinnen und Schüler

Da GeoGebra kostenlos ist, können Ihre Schülerinnen und Schüler das Programm auch problemlos für mathematische Experimente zu Hause nutzen. Wer über einen Internet-Zugang verfügt, erhält die aktuellste Version direkt von der GeoGebra Homepage (www.geogebra.at). Für alle anderen Schülerinnen und Schüler können Sie die Datei geogebra_setup.exe auf CDs brennen und diese in der Klasse für die Installation zu Hause verleihen.

Lernstation 8: Weiterführende Planung

Mit GeoGebra weiterarbeiten

In diesem Lernpfad haben Sie dynamische Konstruktionen zur Integralrechnung erstellt und gesehen, wie vielfältig sich GeoGebra für einen forschend, problemorientierten Unterricht nutzen lässt. In weiteren Lernpfaden auf dieser Plattform können Sie die Anwendungsmöglichkeiten von GeoGebra für weiter Themen der Sekundarstufe kennen lernen.

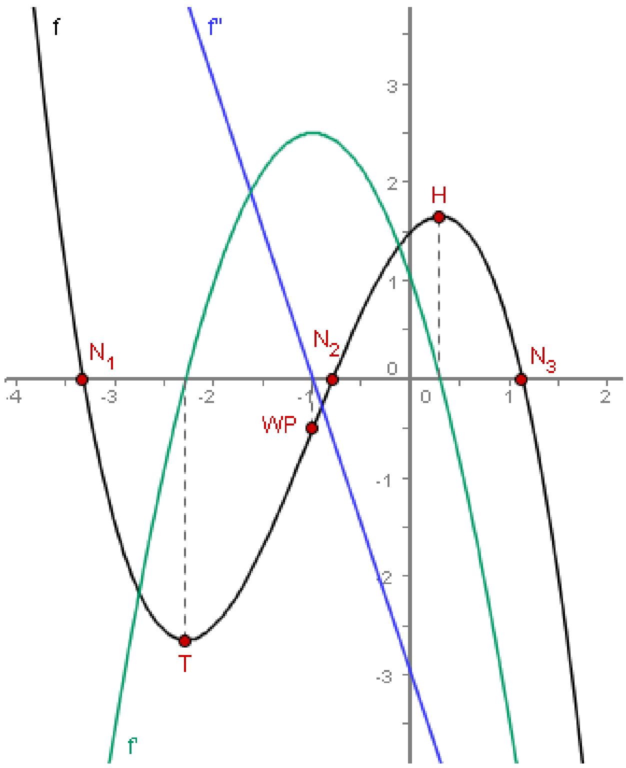
Besuchen Sie von Zeit zu Zeit auch die Homepage von GeoGebra (www.geogebra.at), um dort jeweils die aktuellste Version sowie weitere Beispiele und Informationen zu erhalten. Wenn Sie möchten, können Sie sich auch in die Mailinglist von GeoGebra eintragen, um via E-Mail über Neuigkeiten informiert zu werden.

Über Rückmeldungen zu diesem Lernpfad und Anregungen im Zusammenhang mit GeoGebra würden wir uns sehr freuen: Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at, schmidtpott@lehrer-online.de

9.4 Mittels Mind Mapping zur Kurvendiskussion

Markus Hohenwarter und Judith Preiner
Lernpfad für Intel Lehren für die Zukunft, September 2004
http://aufbaukurs.intel-lehren.de

In diesem Lernpfad erfahren Sie, wie Ihre Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der preisgekrönten dynamischen Unterrichtssoftware GeoGebra selbstständig Erkenntnisse über Polynomfunktionen gewinnen können, um diese danach in einem Mind Map klar zu strukturieren und übersichtlich darzustellen.



Die Methode des Mind Mappings bietet sich besonders für den Mathematikunterricht an, dessen Lerninhalte für die Schülerinnen und Schüler oftmals als ein undurchdringbares Netz aus Informationen erscheinen. Durch das Erstellen von Mind Maps lässt sich diese Fülle von Informationen besser strukturieren und übersichtlich gestalten, sodass auch schwächere Schülerinnen und Schüler mathematische Zusammenhänge einfacher erkennen und verstehen können.

Fach:	Mathematik
Thema der Einheit:	Mittels Mind Mapping zur Kurvendiskussion
Grundfragen:	Wie lassen sich mathematische Inhalte und Erkenntnisse sinnvoll strukturieren, um den Schülerinnen und Schülern den aktiven Umgang damit zu erleichtern?
Zielgruppe:	Sekundarstufe 2
Zeitrahmen:	ca. 3–4 Unterrichtsstunden
Hardware:	PC, Beamer
Software:	GeoGebra

Unterrichtsdokumentation

Mind Maps vervollständigen Gedankennetze und machen diese sichtbar. Durch ihre klare Struktur eignen sie sich besonders für den Mathematik-Unterricht, da sie den Schülerinnen und Schülern dabei helfen, Lerninhalte einzuordnen und mit dem bereits vorhandenen Wissen zu verknüpfen.

In diesem Lernpfad werden Sie erfahren, wie Ihre Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der dynamischen Software GeoGebra selbstständig Erkenntnisse über Polynomfunktionen gewinnen können, um diese danach in einem Mind Map klar zu strukturieren und übersichtlich darzustellen. Die folgende Unterrichtsdokumentation gibt Ihnen einen ersten Eindruck, wie dies konkret ablaufen könnte.

Kurvendiskussion einer Polynomfunktion 3. Grades

Nach der Einführung der Differentialrechnung können Ihre Schülerinnen und Schüler in dem nun folgenden Unterrichtsbeispiel selbstständig die Eigenschaften der charakteristischen Punkte einer Polynomfunktion (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) erarbeiten.

Problemstellungen

1. Welche charakteristischen Punkte benötigt man zum Zeichnen einer Polynomfunktion?

2. Welche Eigenschaften weisen diese Punkte auf und wie lassen sie sich explizit berechnen?

Lösungsstrategien für den Unterricht

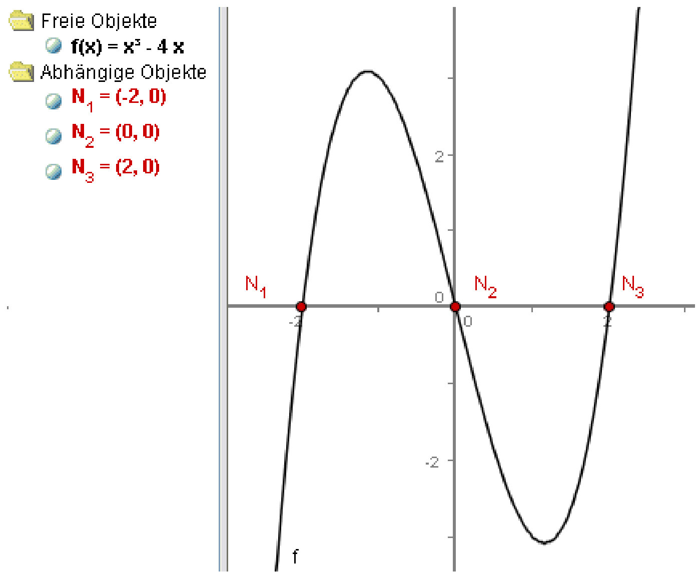
Um die erste der obigen Fragestellungen zu beantworten, zeigen Sie Ihren Schülerinnen und Schülern den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades (Beamer oder Overhead-Projektor) und diskutieren Sie gemeinsam, durch welche Punkte diese Funktion festgelegt ist. Benennen Sie die von den Schülerinnen und Schülern beschriebenen Punkte als "Nullstellen", "Extrempunkte" und "Wendepunkt", sodass Ihre Schülerinnen und Schüler diese Punkte mit den zugehörigen Begriffen verbinden können.

In Partnerarbeit sollen Ihre Schülerinnen und Schüler nun mit Hilfe der dynamischen Software GeoGebra versuchen, die zweite Fragestellung zu beantworten. Dazu untersuchen sie selbstständig die vorher diskutierten Punkte einer Polynomfunktion. Die angeführten Arbeitsaufträge sollen dabei Ihren Schülerinnen und Schülern als Motivation und Anregung dienen, um die charakteristischen Eigenschaften der oben genannten Punkte einer Polynomfunktion weitgehend selbstständig zu erarbeiten.

Nullstellen einer Polynomfunktion

1. Lasst GeoGebra den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ zeichnen.

2. Gebt nun den Befehl *Nullstelle[f]* ein. Er liefert alle Nullstellen der Polynomfunktion.



3. Welche charakteristische Eigenschaft haben die Nullstellen gemeinsam? Notiert eure Vermutungen im Heft.

4. Wie könnte man die Nullstellen berechnen? Überprüft eure Vermutungen rechnerisch und vergleicht die Ergebnisse mit denen des Computers.

5. Versucht, etwas über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion herauszufinden, indem ihr den Funktionsgraphen mit der Maus zieht. Gibt es eine größte / kleinste mögliche Anzahl? Notiert eure Vermutungen im Heft.

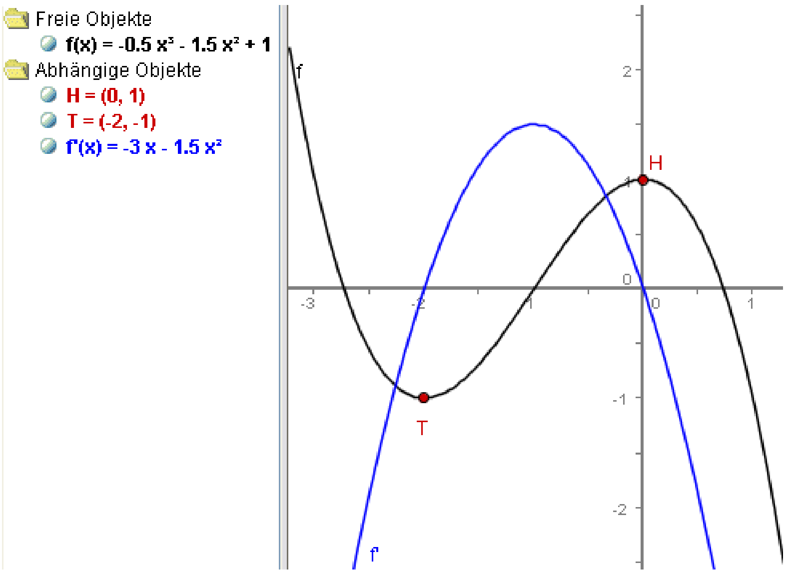
6. Ändert nun die Funktion $f(x)$ in (a) $f(x) = x^2 - 2$ und (b) $f(x) = 1/8x^4 - 1/2x^3 + 7/10x$. Stimmen eure Vermutungen von (5) auch hier?

7. Wie könnte ein Zusammenhang zwischen dem Grad der Funktion und der Anzahl der Nullstellen aussehen?

Extrempunkte einer Polynomfunktion

1. Gebt nun die Funktion $f(x) = -1/2x^3 - 3/2x^2 + 1$ in GeoGebra ein.

2. Lasst euch mit Hilfe des Befehls *Extremum[f]* die beiden Extrempunkte der Funktion anzeigen.



3. Skizziert die Funktion $f(x) = -1/2x^3 - 3/2x^2 + 1$ in eurem Heft und versucht, durch grafisches Differenzieren den Graphen der Ableitungsfunktion in dasselbe Koordinatensystem zu zeichnen.

4. Lasst nun auch den Computer diesen Funktionsgraphen zeichnen, indem ihr den Befehl *Ableitung[f]* eingebt. Stimmt der skizzierte Graph mit dem Funktionsgraphen von $f'(x)$ überein?

5. Könnt ihr mit Hilfe der Ableitungsfunktion herausfinden, welche charakteristischen Eigenschaften die beiden Extrempunkte besitzen? Zieht dazu den Funktionsgraphen von $f(x)$ mit der Maus und notiert eure Beobachtungen und Vermutungen im Heft.

6. Ändert nun die Funktion $f(x)$ in (a) $f(x) = x^2 - 2$ und (b) $f(x) = 1/8x^4 - 1/2x^3 + 7/10x$. Stimmen eure Vermutungen von (5) auch hier?

7. Könnt ihr einen Zusammenhang zwischen der 1. Ableitung und den Extrempunkten der Funktion finden? Versucht, diesen zu beschreiben.

8. Wie könnte man die Koordinaten der Extrempunkte berechnen?

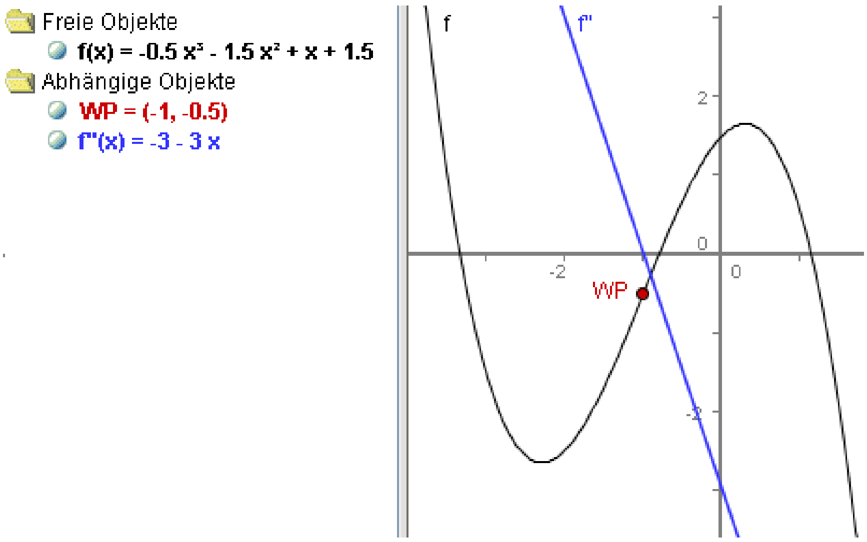
Verwendet dazu eure bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse und überprüft die Ergebnisse mit den von GeoGebra angegebenen Koordinaten der Extrempunkte.

Wendepunkte einer Polynomfunktion

1. Beginnt diesmal mit der Funktion $f(x) = -1/2x^3 - 3/2x^2 + x + 3/2$.

2. Lasst euch mit Hilfe des Befehls *Wendepunkt[f]* den Wendepunkt der Funktion anzeigen.

3. Gebt den Befehl Ableitung[f, 2] in die Eingabezeile ein. Er berechnet die 2. Ableitung der Funktion und zeichnet ihren Funktionsgraphen.



4. Versucht mit Hilfe der 2. Ableitung herauszufinden, welche charakteristische Eigenschaft ein Wendepunkt einer Polynomfunktion besitzt. Zieht dazu den Funktionsgraphen von $f(x)$ mit der Maus und notiert eure Beobachtungen im Heft.

5. Könnt ihr mit Hilfe dieser Informationen eine Vermutung formulieren, die einen Zusammenhang zwischen der 2. Ableitung und den Wendepunkten einer Funktion beschreibt?

6. Ändert die Funktion $f(x)$ in $f(x) = 1/8x^4 - 1/2x^3 + 7/10x$ und überprüft eure Vermutungen aus (5).

7. Wie könnte man die Koordinaten des Wendepunktes berechnen? Verwendet dazu eure bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse und vergleicht die Ergebnisse mit jenen von GeoGebra.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler alle drei Aufgabenbereiche bearbeitet haben, können die Ergebnisse in größeren Gruppen zu 4 bis 6 Personen verglichen und diskutiert werden. Dabei können unklare Ergebnisse weiterhin mit Hilfe von GeoGebra überprüft oder Vermutungen für die anderen Gruppenmitglieder veranschaulicht werden. Nach und nach können so immer größere Gruppen gebildet werden, innerhalb derer einzelne Vermutungen bestätigt oder widerlegt werden ("Lawinenprinzip").

Schließlich sollten die Ergebnisse in einer Klassendiskussion besprochen werden, bei der sich auch die Lehrerin oder der Lehrer beteiligt. So können Lösungen und Vermutungen genauer hinterfragt werden und die Schülerinnen und Schüler erhalten die Möglichkeit, ihre Lösungswege genau zu erklären.

Erstellen eines Mind Maps zur Strukturierung der gewonnenen Informationen

Die so erarbeiteten charakteristischen Eigenschaften der Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte einer Polynomfunktion können nun mit der gesamten Klassen in einem Mind Map strukturiert werden. Dabei erstellt die Lehrperson die Basisstruktur des Mind Maps nach den Vorgaben der Schülerinnen und Schüler an der Tafel, auf einer Overhead-Folie oder am Computer. Wichtig dabei ist, dass das Mind Map während seiner Entstehung immer wieder verändert und umstrukturiert werden kann, um neue Zweige und Umordnungen zu ermöglichen.

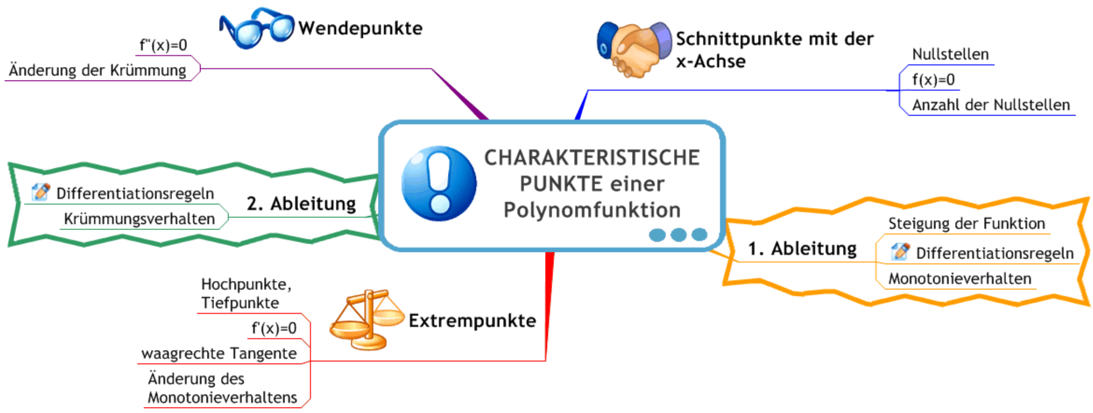
Anschließend sollten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit erhalten, dieses Grundgerüst des Mind Maps kreativ zu bearbeiten, sodass es jede Einzelne und jeden Einzelnen individuell anspricht und seine Inhalte möglichst lange im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler haften bleiben.

Lernstation 1: Einführung

Die Methode des Mind Mapping

Mind Maps dienen der Visualisierung und Strukturierung gesammelter Informationen. Sie sind in fast allen Bereichen des Lernens einsetzbar und helfen den Schülerinnen und Schülern, ihr neu erworbenes Wissen einzuordnen und mit dem bereits vorhandenen Wissen zu verknüpfen. Durch ihre überschaubare Struktur und die Möglichkeit der individuellen

Gestaltung ermöglichen Mind Maps eine neue Art des Lernens, des Wiederholens und der Zusammenfassung von Unterrichtsinhalten.



Ein Mind Map erstellen

Das Erstellen eines Mind Maps erfordert lediglich das Einhalten von einigen Grundregeln, die mit wenig Aufwand von der Lehrerin oder dem Lehrer erklärt und und von den Schülerinnen und Schülern relativ einfach umgesetzt werden können. Es bietet sich an, diese Grundregeln in Form eines Mind Maps zu gestalten und den Schülerinnen und Schülern als Handout auszuteilen, oder es in Form eines Plakats im Klassenraum aufzuhängen.

Grundregeln für das Erstellen eines Mind Maps

Ein Mind Map sollte auf glattem, unliniertem Papier gestaltet werden. Dieses sollte mindestens die Größe Din A4 haben und im Querformat verwendet werden.

1. Das Erstellen eines Mind Maps folgt einem klar strukturierten Aufbau, der immer eingehalten werden sollte. So steht das zentrale Thema in der Mitte und bildet den Ausgangspunkt für die dicken Hauptzweige, welche die Oberbegriffe des Themas tragen. Am freien Ende jedes Hauptzweiges entspringen dünnere Unterzweige, welche die Schlüsselwörter und Details des Themas enthalten.

2. Das zentrale Thema des Mind Maps steht in der Mitte des Blattes und wird durch Einrahmen deutlich als solches gekennzeichnet.

3. Nun sucht man Schlüsselwörter, die zu diesem zentralen Thema passen und notiert sie in einem eigenen Arbeitsschritt auf einem zusätzlichen Stück Papier. Dabei ist

es wichtig, auch Gedankenblitze und scheinbar unzusammenhängende Begriffe zu notieren, da sie später zu wertvollen Teilen des Mind Maps werden können.

4. Im nächsten Arbeitsschritt versucht man, Oberbegriffe zu finden um die Schlüsselworte in Gruppen einzuteilen. Dabei beginnt man immer rechts oben (sozusagen "auf 13 Uhr") und arbeitet im Uhrzeigersinn von innen nach außen. Konkret bedeutet das, man zeichnet einen dicken Hauptzweig, der aus dem zentralen Thema entspringt, und den Oberbegriff trägt. An das freie Ende dieses Zweiges hängt man nun für jedes zugehörige Schlüsselwort einen Unterzweig.

5. Nachdem die Basis für unser Mind Map gelegt wurde, sollte es nun auch so gestaltet werden, dass es für beide Gehirnhälften möglichst ansprechend ist. Dies erreicht man mit Hilfe von gut platzierten Symbolen, Bildern, Einrahmungen und Farben.

Mind Mapping sollte Spaß machen und die Kreativität fordern. Je "beeindruckender" ein Mind Map ist, desto länger bleibt es im Gedächtnis und seine Inhalte können aktiv verwendet werden.

Besonderheiten der Methode

Einige Besonderheiten des Mind Mappings sind

- die Verknüpfung von neu erworbenem und bereits vorhandenem Wissen
- die Visualisierung von Zusammenhängen
- die übersichtliche Darstellung komplizierter Gedankengänge

- die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht und zu Hause

Vor allem die Möglichkeit der Strukturierung von Lerninhalten sollte für den Mathematikunterricht hervorgehoben werden, da vielen Schülerinnen und Schülern der Überblick und das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen schwer fällt. Durch die Methode des Mind Mapping soll diesen Schülerinnen und Schülern der Umgang mit der Mathematik erleichtert und Ordnung in das "mathematische Chaos" gebracht werden.

Außerdem stellt diese Methode eine Lernhilfe dar, die sowohl zur Vorbereitung auf Prüfungen als auch zur Zusammenfassung und Wiederholung von Lerninhalten verwendet und von den Schülerinnen und Schülern eigenständig angewendet werden kann. Denn durch die logische und visuelle Vernetzung von Informationen werden beide Gehirnhälften angeregt, einerseits die rational denkende linke Hälfte und andererseits die ganzheitliche, intuitive rechte Hälfte. Dies fördert wiederum das vernetzte Denken und die "Kommunikation" zwischen den beiden Gehirnhälften.

Da ein Mind Map das nicht-lineare Denken, also das auf den ersten Blick chaotisch wirkende Sammeln von Informationen, ermöglicht, lassen sich auch Geistesblitze und scheinbar unzusammenhängende Gedankengänge in die Struktur einordnen und werden Teil eines zusammenhängenden Konzepts. Dies ermöglicht den Schülerinnen und Schülern experimentelles Lernen und trägt dazu bei, sie für das spielerische Erforschen der Mathematik zu motivieren.

Mind Mapping mit Hilfe digitaler Medien

Im Unterricht sollten Ihre Schülerinnen und Schüler so oft als möglich die Chance bekommen, Lerninhalte selbstständig und entdeckend zu erarbeiten. Für diese Art des Unterrichts eignet sich die dynamische Unterrichtssoftware GeoGebra sehr gut, da sie intuitiv zu bedienen ist und speziell für den Mathematikunterricht entwickelt wurde.

Da die Software GeoGebra kostenlos ist, lässt sie sich problemlos im Unterricht und zu Hause verwenden. Ihre Schülerinnen und Schüler können somit auch privat mit dem Programm arbeiten, was auch einer Computer unterstützten Hausaufgabe nichts mehr in den Weg stellt.

Die auf diese Art gewonnenen Erkenntnisse können anschließend in einem Mind Map strukturiert und übersichtlich gestaltet werden. Dabei sollte auch die Kreativität der Schülerinnen und Schüler nicht zu kurz kommen, denn je beeindruckender ein Mind Map ist, desto länger kann man sich an seine Inhalte erinnern.

Mind Maps lassen sich mit Hilfe der Software MindManager auch am Computer erstellen. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass man das Mind Map beliebig oft verändern und ergänzen kann. Durch den Einsatz von Farben und Symbolen kann das Mind Map auch kreativ gestaltet werden, verliert durch die vorgefertigten Bilder jedoch etwas von seinem individuellen Charakter.

Reflexionsaufgabe

Diskutieren sie nach der Teambildung mit ihren Teammitgliedern über die Methode des Mind Mappings und ihren Einsatz im Mathematikunterricht. Die folgenden Fragestellungen sollen dabei lediglich Anregungen darstellen.

- Welche weiteren Anwendungsmöglichkeiten des Mind Mappings können Sie sich für Mathematikunterricht vorstellen?
- Halten Sie eine gute Strukturierung der Lerninhalte für sinnvoll?
- Lässt sich durch die Anwendung des Mind Mappings die Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler fördern oder ihr Lernverhalten positiv beeinflussen?
- Stellt das Mind Mapping für Sie eine effektive Methode dar, um das mathematische Wissen einer ganzen Klasse für den Unterricht zu einem übersichtlichen Konzept zusammenzufügen?

Lernstation 2: Auswahl von Inhalten

Mind Mapping im Unterricht

Viele Lerninhalte eignen sich für den Einsatz von Mind Mapping im Mathematikunterricht. Dabei können die Schülerinnen und Schüler besonders von dieser Methode profitieren, wenn es sich um aufbauende Inhalte handelt, welche in unterschiedlichen Schulstufen behandelt werden. Dazu zählen zum Beispiel

- Vierecke (charakteristische Eigenschaften, Flächeninhalt, Umfang,...)
- Zahlenmengen und deren Erweiterung (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen,...)
- Variablen und deren Handhabung in Gleichungen (lineare und quadratische Gleichungen, Gleichung in einer oder mehreren Variablen, Lösung von Gleichungssystemen,...)
- Begriff der Funktion (Definition, Arten von Funktionen, Funktionsgraphen, Differentiation und Integration von Funktionen,...)

Suchen Sie nun in Ihrem Lehrplan nach weiteren Inhalten, die sich für die Methode des Mind Mapping eigenen.

Konkrete Anwendung im Unterricht

Wie man einen derartigen Unterrichtsinhalt mit Hilfe digitaler Medien für den Unterricht aufbereiten kann, soll das folgende Beispiel zum Thema "Untersuchen einer Polynomfunktion" zeigen. Dabei können Ihre Schülerinnen und Schüler eigenständig die charakteristischen Eigenschaften der Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte einer Polynomfunktion erarbeiten.

Anschließend werden die Ergebnisse innerhalb des Klassenverbandes mit Hilfe der Lehrerin oder des Lehrers ergänzt und zu einem Mind Map zusammengefügt. Beispiel (siehe Unterrichtsdokumentation):

- Eigenschaften der Nullstellen einer Polynomfunktion
- Eigenschaften der Extrempunkte einer Polynomfunktion
- Eigenschaften der Wendepunkte einer Polynomfunktion

Neue Medien im Mathematik-Unterricht

Die Verwendung neuer Medien im Mathematikunterricht lässt sich bei vielen Lerninhalten verwirklichen. Ihr erfolgreicher Einsatz hängt meist nur von den kreativen Ideen der Lehrerin oder des Lehrers ab. Mit Hilfe der dynamischen Software GeoGebra können Sie für Ihre Schülerinnen und Schüler ein Umfeld erzeugen, in dem

- sie entdeckend und eigenständig lernen können.
- mathematische Zusammenhänge einfach visualisiert werden können.
- sich Ihre Schülerinnen und Schüler zwar die Rechenwege selbst überlegen müssen, die oft zeitaufwändige Rechenleistung jedoch Zeit sparend vom Computer erledigt wird.
- Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse von Aufgabenstellungen selbstständig mit Hilfe des Computers überprüfen können und nicht mehr auf die Korrektur durch die Lehrperson oder das Vergleichen mit Klassenkameraden angewiesen sind.

Ein Beispiel für den Einsatz von GeoGebra im Unterricht haben Sie bereits in der Unterrichtsdokumentation dieses Lernpfades kennen gelernt. In Lernstation 4 finden Sie auch eine genaue Anleitung, wie Sie die in der Unterrichtsdokumentation gezeigten Konstruktionen selbst erstellen und somit auch in Ihrem Unterricht einsetzen können.

Bildung von Arbeitsteams

Welche Vorteile bringt eine Teambildung innerhalb des Lehrerkollegiums? Diese Frage haben sich die meisten Lehrerinnen und Lehrer während ihres Berufslebens sicher schon gestellt. Die meisten sind der Meinung, auch ohne Teamarbeit, die oft sehr viele Probleme mit sich bringt, gut durch den Schulalltag zu kommen.

Doch die Bildung von Arbeitsteams bringt nicht nur für die Lehrerinnen und Lehrer zahlreiche Vorteile, sondern auch Ihre Schülerinnen und Schüler profitieren davon. Denn in Schulen, in denen sich jede Lehrperson als "Einzelkämpfer" das Arbeitsleben unnötig erschwert, sind auch die Schülerinnen und Schüler mit vielen verschiedenen Unterrichtsstilen und Unterrichtsmethoden konfrontiert. Was einerseits Abwechslung in den Schulalltag bringt, verhindert andererseits jedoch den effektiven Einsatz neuer Methoden.

Vorteile der Teambildung für Lehrerinnen und Lehrer

An der Tatsache, dass der Erfahrungsaustausch zwischen Kollegen für den Einzelnen sehr hilfreich sein kann, zweifeln sicher die Wenigsten. Dass man jedoch bei der Umsetzung dieses Vorhabens oft auf Probleme stößt, haben wohl viele schon am eigenen Leib erfahren.

Dieses Phänomen kann man auch innerhalb von Schülergruppen beobachten, die zwar bereitwillig auf eine Zusammenarbeit eingehen, deren Produktivität oft aber an Schwierigkeiten scheitert, die relativ einfach zu umgehen wären. Seien dies nun eine schlechte Zeitplanung, Differenzen zwischen den Erwartungen und Zielen der einzelnen Gruppenmitglieder oder mangelnde Kooperationsbereitschaft, die oft auf dem Motto "TEAM = Toll Ein Anderer Macht's" basiert.

Derartige Schwierigkeiten beruhen aber oft auf Missverständnissen, die relativ einfach bereinigt werden könnten. Dazu müssten sich die Gruppenmitglieder lediglich auf einige Regeln der Zusammenarbeit einigen. Nehmen Sie die folgenden Vorschläge als Denkanstöße um eine effiziente Teamarbeit zu gewährleisten und überlegen Sie, durch welche Maßnahmen dieses Ziel sonst noch erreicht werden könnte.

- Jedes Teammitglied sollte sich am Beginn der Zusammenarbeit über seine eigenen Erwartungen und Ziele im Klaren sein.

- Teilen Sie diese Erkenntnisse ihren Kollegen mit und versuchen Sie, eine gemeinsame Zielsetzung für die Teamarbeit zu finden.

- Legen Sie gemeinsam einige Maßstäbe und Grundregeln für die Zusammenarbeit und das Erstellen der gemeinsamen Unterrichtsmaterialien fest.

- Erstellen Sie einen realistischen Zeitplan und planen Sie auch immer wieder kurze Treffen ein, bei denen Zwischenergebnisse präsentiert werden können.

- Verteilen Sie die Arbeit auf alle Teammitglieder und setzen Sie Fristen innerhalb derer Ergebnisse vorliegen müssen.

Derartige Verhaltensregeln könne die Erfolgsquote einer Teamarbeit sichtlich erhöhen. Denn ohne die Befürchtungen, die Arbeit zum Großteil alleine machen zu müssen und sich nicht auf die anderen Teammitglieder verlassen zu können, wird sich jeder von Ihnen viel lieber auf eine Zusammenarbeit mit Kolleginnen und Kollegen einlassen.

Mit diesem Wissen sollten wir als Lehrerinnen und Lehrer in der Lage sein, eine produktive Teamarbeit zu organisieren, durchzuführen und uns damit den Unterrichtsalltag zu erleichtern. Denn der Austausch von unterschiedlichen Erfahrungen mit dem Einsatz neuer Unterrichtsinhalte, -methoden und -materialien und deren Annahme durch die Schülerinnen und Schüler kann für die Einzelne oder den Einzelnen sehr hilfreich sein. Außerdem kann jeder etwas zum erfolgreichen Umsetzen einer neuen Idee beitragen, sei es nun mit dem Einbringen persönlicher Interessen und Engagement oder mit kreativen Denkanstößen, fachlichen Ratschlägen und Fähigkeiten im Umgang mit neuen Medien.

Lernstation 3: Analyse der Voraussetzungen

Grundlegende Voraussetzungen für Sie

In diesem Lernpfad werden Sie mit der kostenlosen dynamischen Unterrichtssoftware GeoGebra arbeiten. Um dieses Programm im Mathematikunterricht zu verwenden, benötigen Sie lediglich einige grundlegende Kenntnisse im Umgang mit dem Computer.

Damit Sie sich mit GeoGebra ein wenig vertraut machen können, gibt es GeoGebra Quickstart (www.geogebra.at), eine Kurzanleitung, welche die grundlegenden Funktionen der Software anhand von Beispielen erklärt.

Um die Methode des Mind Mappings im Unterricht anwenden zu können, sollten Sie sich mit den Grundregeln zum Erstellen eines Mind Maps vertraut machen (siehe Lernstation 1). Je besser Sie diese Methode, ihre Vorteile und Anwendungsmöglichkeiten kennen, desto einfacher wird es für Sie sein, sie auch Ihren Schülerinnen und Schülern zu vermitteln.

Grundlegende Voraussetzungen für Ihre Schülerinnen und Schüler

Damit Ihre Schülerinnen und Schüler GeoGebra im Unterricht verwenden können, benötigen sie keine besonderen Vorkenntnisse. Da das Programm speziell für den Unterricht entwickelt wurde, ist seine Bedienung sehr intuitiv. Ihre Schülerinnen und Schüler können mit Ihrer Unterstützung von der ersten Unterrichtsstunde an mit GeoGebra arbeiten.

Um die Methode des Mind Mappings erfolgreich zum Strukturieren mathematischer Lerninhalte anwenden zu können, sollten Ihre Schülerinnen und Schüler die Grundregeln zum Erstellen eines Mind Maps kennen lernen. Außerdem sollten sie daran gewöhnt sein, Arbeitsaufträge eigenständig, mit einem Partner oder in Kleingruppen auszuführen und die Ergebnisse aufzubereiten bzw. zu präsentieren.

Technische Voraussetzungen

Um mit diesem Lernpfad arbeiten zu können, benötigen Sie die kostenlos verfügbare Unterrichtssoftware GeoGebra. Da das Programm laufend verbessert und weiterentwickelt wird, finden Sie die jeweils aktuellste Version auf www.geogebra.at. Dort können Sie das Programm direkt unter "WebStart" starten oder unter "Download" erfahren, wie sie GeoGebra in Ihrem Schulnetzwerk installieren können.

Für das Erstellen eines Mind Maps mit Hilfe des Computers können Sie beispielsweise die Software MindManager (Testversion auf www.mindjet.com/de) oder die kostenlose Software FreeMind (http://freemind.sourceforge.net) verwenden.

Organisatorische Rahmenbedingungen

Um digitale Medien im Mathematikunterricht einsetzen zu können, benötigen Sie einen PC oder Laptop und im Idealfall auch einen Beamer im Klassenraum. Mit dieser Ausstattung können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern durch GeoGebra Einblicke in eine dynamische Welt der Mathematik ermöglichen.

Versuchen Sie nun, die organisatorischen Rahmenbedingungen für Ihre Schule zu ergänzen und gegebenenfalls zu modifizieren. Mit etwas Einfallsreichtum und Flexibilität lassen sich oft gravierende Verbesserungen der Unterrichtssituation erzielen, sei es zum Beispiel durch den Tausch von Unterrichtsstunden- und -räumen oder die Veränderung der bestehenden Sitzordnung ("Lerninseln" anstatt der üblichen Reihen).

Lernstation 4: Steigerung der Medienkompetenz

Didaktischen Anregungen für Ihren Unterricht...

Um Ihren Schülerinnen und Schülern das selbstständige Erarbeiten mathematischer Lerninhalte mit GeoGebra zu erleichtern, sollten Sie auch Fragestellungen folgender Art berücksichtigen. Vielleicht können Ihnen die zusätzlichen Anregungen bei der Beantwortung der Fragen helfen.

Welche Sozialform ist für den Mathematikunterricht mit digitalen Medien am besten geeignet?

Bei der Untersuchung von mathematischen Inhalten ermöglicht Partnerarbeit eine individuelle Lerngeschwindigkeit der einzelnen Schülerinnen und Schüler. Dabei können sie sich gegenseitig Hilfestellung geben und so größere Lernerfolge erzielen.

Wie können Ihre Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse ihrer Arbeit kontrollieren?

Mit Hilfe von GeoGebra können Rechenergebnisse nachgeprüft und die Gestalt eines Funktionsgraphen kontrolliert werden, ohne einen Dritten zu Rate ziehen zu müssen. Eine derartige Selbstkontrolle ermöglicht ein individuelles Lerntempo ohne Stress und Zeitdruck. Denn Aufgaben, die während des Unterrichts nicht fertig gestellt werden konnten, können auch problemlos zu Hause mit GeoGebra überprüft werden.

Wie kann ich meinen Schülerinnen und Schülern einen übersichtlicheren Zugang zu einem neuen Themengebiet ermöglichen?

Eine gute Strukturierung mathematischer Inhalte erleichtert Ihren Schülerinnen und Schülern den Umgang mit der Mathematik, das Lösen mathematischer Aufgabenstellungen und auch die Zuordnung eines Lerninhalts zu einem größeren Themenbereich. Deshalb bietet es sich an, die Methode des Mind Mappings im Unterricht anzusprechen und sie den Schülerinnen und Schülern als Werkzeug zu präsentieren, mit dessen Hilfe man scheinbar unübersichtliche Mengen von Lerninhalten gut strukturiert aufbereiten kann.

Versuchen Sie nun mit Ihren Teammitgliedern ähnliche Fragestellungen zu entwerfen, die Ihren Schülerinnen und Schülern das selbstständige Erarbeiten von mathematischen Zusammenhängen erleichtern könnten.

. . . und wie Ihre Schülerinnen und Schülern davon profitieren können.

Durch das selbstständige Arbeiten mit GeoGebra erhalten Ihre Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, auf einfache Art und Weise mathematische Zusammenhänge zu untersuchen und zu verstehen. Durch das Bearbeiten offener Fragestellungen wird ihre "Forschung" zwar in eine erwünschte Richtung gelenkt, jedoch wird das Auffinden unkonventioneller Lösungswege und neuer Erkenntnisse dadurch nicht eingeschränkt. So können die Schülerinnen und Schüler ganz "eigene" mathematische Erfahrungen sammeln und die Mathematik für sich neu entdecken.

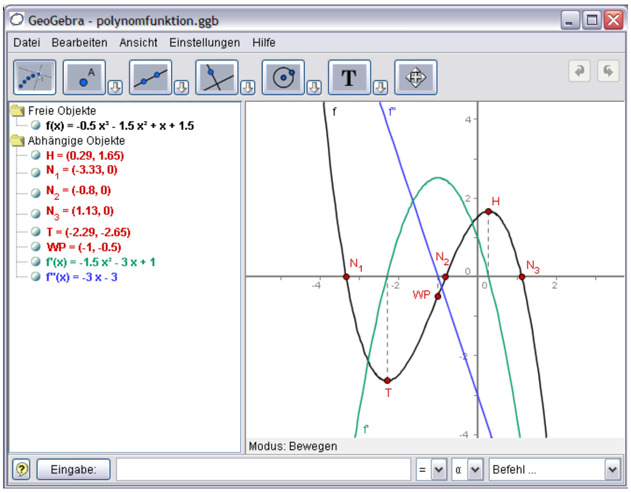
Die Methode des Mind Mappings kann das Lernverhalten Ihrer Schülerinnen und Schüler positiv beeinflussen, da sie lernen, Informationen und Lerninhalte sinnvoll zu strukturieren und für den eigenen Gebrauch aufzuarbeiten. So trägt Mind Mapping dazu bei, kreative Arbeitsmethoden zu fördern und das selbstständige Aneignen von Wissen zu erleichtern.

Durch das gemeinsame Erstellen eines Mind Maps im Klassenverband können Ihre Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ein neu eingeführtes Thema nicht gänzlich unbekannt ist und zum Teil auf bereits vorhandenem Wissen basiert. Dabei können sich alle Mitglieder der Klasse einbringen und zum Unterrichtsgeschehen beitragen.

Mind Maps können auch dazu verwendet werden, mathematische Lerninhalte früherer Schulstufen zu wiederholen, zu strukturieren und miteinander zu verknüpfen, was die Vernetzung des Gehirns fördert. Durch das Einhalten der Grundregeln beim Erstellen des Mind Maps werden komplizierte Zusammenhänge visualisiert ohne dass Ihre Schülerinnen und Schüler den Überblick über das Thema verlieren. So lässt sich der logische Aufbau mathematischer Lerninhalte besser verstehen und verliert seinen für viele Schülerinnen und Schüler oft erschreckenden Umfang und seine Komplexität.

GeoGebra im Unterricht

In Lernstation 2 haben Sie bereits erfahren, wie man GeoGebra zum Untersuchen einer Polynomfunktion im Unterricht einsetzen kann.



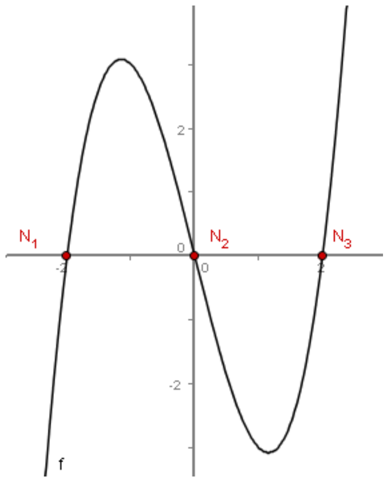
Anhand dieses Beispiels können Sie nun auch einige Erfahrungen im Umgang mit der Software sammeln. Die folgenden detaillierten Konstruktionsanleitungen sollen Ihnen dabei helfen. Die hier beschriebenen Konstruktionen finden Sie auch in den Dateien zur Kurvendiskussion (zip).

Nullstellen einer Polynomfunktion

Es folgt nun eine Anleitung zur Konstruktion der Nullstellen einer Polynomfunktion.

Machen Sie sich zunächst mit GeoGebra vertraut, indem Sie GeoGebra Quickstart durcharbeiten. Anschließend dürfte das Erstellen dieser Konstruktion kein Problem mehr darstellen.

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, *Neu*).
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü *Ansicht*) anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.
- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von -3 bis 3 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und *Zoom* bzw. Modus *Zeichenblatt verschieben*)



Die eigentliche Konstruktion erstellen Sie nun folgendermaßen:

- Schreiben Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile unterhalb des Algebra- und Geometriefensters und bestätigen Sie mit der Eingabetaste.

- Definieren Sie die Polynomfunktion 3. Grades:
  $f(x) = x^3 - 4x$

- Verwenden Sie den vordefinierten Befehl Nullstelle[f] um alle Nullstellen der Funktion anzeigen zu lassen. Dabei werden die Punkte automatisch mit A, B und C beschriftet.

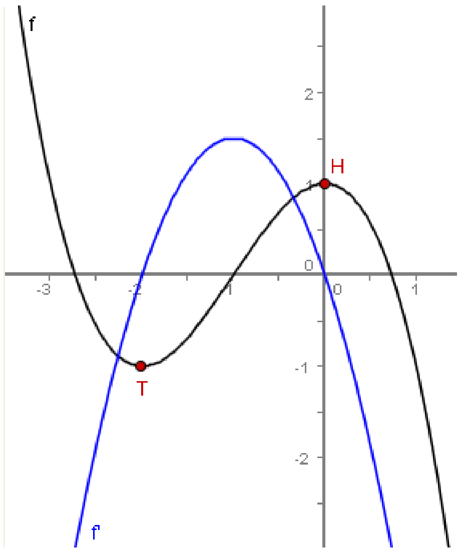
- **Tipp:** Um die Schnittpunkte mit der x-Achse wie in obiger Grafik mit N_1, N_2 und N_3 zu beschriften, gehen Sie folgendermaßen vor:
  Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen der Punkte (Algebra- oder Geometriefenster)
  Wählen Sie im erscheinenden Menü *Umbenennen*
  Tippen Sie den neuen Namen des Punktes (z. B.: N_1) in die erscheinende Eingabezeile und bestätigen Sie mit der Eingabetaste oder klicken Sie auf OK.

- Bearbeiten Sie Ihre Konstruktion nun auch nach ästhetischen Gesichtspunkten, indem Sie im Menü *Bearbeiten*, *Eigenschaften* die Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen.

- Speichern Sie Ihre Funktion ab, z. B. als polynomfunktion_nullstellen.ggb

Extrempunkte einer Polynomfunktion

Es folgt nun eine Anleitung zur Konstruktion der Extrempunkte einer Polynomfunktion.



Machen Sie sich zunächst mit GeoGebra vertraut, indem Sie GeoGebra Quickstart durcharbeiten. Anschließend dürfte das Erstellen dieser Konstruktion kein Problem mehr darstellen.

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, *Neu*).
- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü *Ansicht*) anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.
- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von -3.5 bis 1.5 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und *Zoom* bzw. Modus *Zeichenblatt verschieben*)

Die eigentliche Konstruktion erstellen Sie nun folgendermaßen:

- Schreiben Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile unterhalb des Algebra- und Geometriefensters und bestätigen Sie mit der Eingabetaste.
- Definieren Sie die Polynomfunktion 3. Grades:
  $f(x) = -1/2x^3 - 3/2x^2 + 1$
- Verwenden Sie den vordefinierten Befehl *Extremum[f]* um die Extrempunkte der Funktion anzeigen zu lassen. Dabei werden die Punkte automatisch mit A und B beschriftet.
- **Tipp:** Um die Extrempunkte wie in obiger Grafik mit T und H zu beschriften, gehen Sie folgendermaßen vor:

Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen der Punkte (Algebra- oder Geometriefenster)
Wählen Sie im erscheinenden Menü Umbenennen
Tippen Sie den neuen Namen des Punktes (z. B.: T) in die erscheinende Eingabezeile und bestätigen Sie mit der Eingabetaste oder klicken Sie auf OK.

- Lassen Sie GeoGebra die 1. Ableitung der Funktion $f(x)$ durch den Befehl Ableitung[f] berechnen und ihren Graphen zeichnen
- Bearbeiten Sie Ihre Konstruktion nun auch nach ästhetischen Gesichtspunkten, indem Sie im Menü *Bearbeiten, Eigenschaften* die Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen.
- Speichern Sie Ihre Funktion ab, z. B. als polynomfunktion_extrempunkte.ggb

Exportieren Sie Ihre Konstruktion nun als Bild, indem Sie folgende Arbeitsschritte durchführen.

- Verschieben Sie das Zeichenblatt von GeoGebra so, dass Ihre Konstruktion links oben im Geometriefenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt").
- Um Leerraum zu vermeiden, sollten Sie nun das Geometriefenster durch Ziehen der rechten unteren Ecke verkleinern.
- Wählen Sie jetzt im Menü *Datei*, *Export* den Punkt *Zeichenblatt als Bild* und exportieren Sie das Zeichenblatt als *png* Grafik mit dem Namen *extrempunkte.eps.*

Nun können Sie die Grafik *extrempunkte.eps* mit Hilfe eines Textverarbeitungsprogramms Ihrer Wahl (z.B. Microsoft Word) in Ihren Text einfügen. In Word wählen Sie dazu im Menü *Einfügen* den Punkt *Grafik einfügen.*

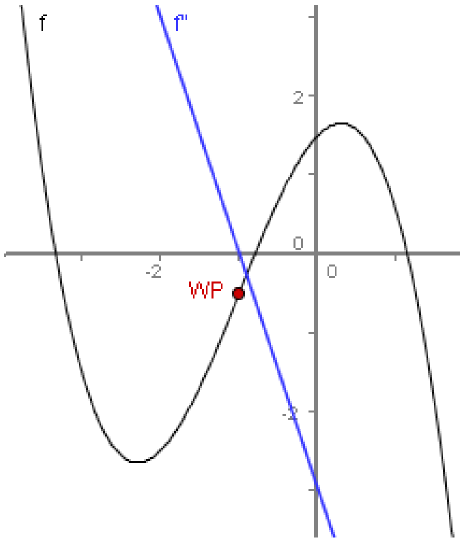
Tipp: Das Vergrößern oder Verkleinern der eingefügten Grafik in Ihrem Textverarbeitungsprogramm kann zu schlechter Bildqualität führen. Wenn Ihnen die Größe der eingefügten Grafik nicht gefällt, exportieren Sie die Abbildung erneut aus GeoGebra und wählen dabei im Export Dialog die gewünschten Werte für die Breite und Höhe des Bildes.

Wendepunkte einer Polynomfunktion

Es folgt nun eine Anleitung zur Konstruktion der Wendepunkte einer Polynomfunktion.

Machen Sie sich zunächst mit GeoGebra vertraut, indem Sie GeoGebra Quickstart durcharbeiten. Anschließend dürfte das Erstellen dieser Konstruktion kein Problem mehr darstellen.

- Beginnen Sie eine neue Konstruktion (Menü Datei, *Neu*).



- Lassen Sie sich zunächst die Achsen und das Algebrafenster (Menü *Ansicht*) anzeigen, falls diese gerade nicht sichtbar sind.

- Wählen Sie den Bildausschnitt des Zeichenblattes so, dass Sie auf den Achsen etwa die Werte von -3 bis 1 sehen können (rechter Mausklick auf Zeichenblatt und *Zoom* bzw. Modus *Zeichenblatt verschieben*)

Die eigentliche Konstruktion erstellen Sie nun folgendermaßen:

- Schreiben Sie die folgenden Anweisungen in die Eingabezeile unterhalb des Algebra- und Geometriefensters und bestätigen Sie mit der Eingabetaste.

- Definieren Sie die Polynomfunktion 3. Grades:
  $f(x) = -1/2x^3 - 3/2x^2 + x + 1$

- Verwenden Sie den vordefinierten Befehl Wendepunkt[f] um den Wendepunkt der Funktion anzeigen zu lassen. Dabei wird der Punkt automatisch mit A beschriftet.

- **Tipp:** Um den Wendepunkt wie in obiger Graik mit WP zu beschriften, gehen Sie folgendermaßen vor:
  Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf den Punkt A (Algebra- oder Geometriefenster)
  Wählen Sie im erscheinenden Menü Umbenennen
  Tippen Sie den neuen Namen WP des Punktes in die erscheinende Eingabezeile und bestätigen Sie mit der Eingabetaste oder klicken Sie auf OK.

- Lassen Sie GeoGebra die 2. Ableitung der Funktion f(x) mit Hilfe des Befehls Ableitung[f, 2] berechnen und zeichnen.
- Bearbeiten Sie Ihre Konstruktion nun auch nach ästhetischen Gesichtspunkten, indem Sie im Menü Bearbeiten, Eigenschaften die Farbe, Linienart, usw. der Objekte anpassen.
- Speichern Sie Ihre Funktion ab, z. B. als polynomfunktion_wendepunkt.ggb

Exportieren Sie Ihre Konstruktion nun als Bild, indem Sie folgende Arbeitsschritte durchführen.

- Verschieben Sie das Zeichenblatt von GeoGebra so, dass Ihre Konstruktion links oben im Geometriefenster erscheint (Modus "Verschiebe Zeichenblatt").
- Um Leerraum zu vermeiden, sollten Sie nun das Geometriefenster durch Ziehen der rechten unteren Ecke verkleinern.
- Wählen Sie jetzt im Menü *Datei*, *Export* den Punkt *Zeichenblatt als Bild* und exportieren Sie das Zeichenblatt als *png* Grafik mit dem Namen *wendepunkt.eps.*

Nun können Sie die Grafik *wendepunkt.eps* mit Hilfe eines Textverarbeitungsprogramms Ihrer Wahl (z.B. Microsoft Word) in Ihren Text einfügen. In Word wählen Sie dazu im Menü *Einfügen* den Punkt *Grafik einfügen.*

Tipp: Das Vergrößern oder Verkleinern der eingefügten Grafik in Ihrem Textverarbeitungsprogramm kann zu schlechter Bildqualität führen. Wenn Ihnen die Größe der eingefügten Grafik nicht gefällt, exportieren Sie die Abbildung erneut aus GeoGebra und wählen dabei im Export Dialog die gewünschten Werte für die Breite und Höhe des Bildes.

Lernstation 5: Vorbereitung des Unterrichts

Unterrichtsplanung

Um Ihren Unterricht mit digitalen Medien stressfrei durchführen zu können, sollten Sie sich im Zuge der Unterrichtsvorbereitung mit einigen methodischen, didaktischen und inhaltlichen Überlegungen auseinandersetzen. Diese könnten in etwa folgendermaßen aussehen.

Die Verwendung von GeoGebra im Unterricht

Überlegen Sie sich vor dem Unterricht, welche Befehle Sie für die Bedienung der Software GeoGebra voraussichtlich benötigen werden. Im Unterrichtsbeispiel *Untersuchen von Polynomfunktionen* werden folgende Befehle verwendet

- Definieren einer Polynomfunktion f(x) (Eingabezeile)
- Ableitung[f] (berechnet die 1. Ableitung der Funktion f(x) und zeichnet ihren Graphen)
- Ableitung[f, 2] (berechnet die 2. Ableitung der Funktion f(x) und zeichnet ihren Graphen)
- Nullstelle[f] (berechnet und zeichnet alle Nullstellen der Polynomfunktion f(x))
- Extremum[f] (berechnet und zeichnet alle Extrempunkte der Funktion f(x))
- Wendepunkt[f] (berechnet und zeichnet alle Wendepunkte der Funktion f(x))

Versetzen Sie sich auch in die Situation Ihrer Schülerinnen und Schüler und überlegen Sie sich, welche Schwierigkeiten im Umgang mit dem Computer auftauchen und wie Sie diese umgehen könnten (Anzeigen der Koordinatenachsen, Vergrößern eines Bildausschnitts, Fehler bei der Eingabe von Funktionen,...).

Planen Sie genügend Zeit für das Untersuchen der mathematischen Inhalte ein. Ihre Schülerinnen und Schüler sollen stressfrei und ohne Druck an den offenen Arbeitsanregungen arbeiten könne. Falls die Unterrichtszeit nicht dafür ausreicht und die Möglichkeiten des Stundentauschs mit Kolleginnen und Kollegen bereits ausgeschöpft wurden, können Ihre Schülerinnen und Schüler auch zu Hause mit GeoGebra weiterarbeiten, da die Software kostenlos und für jeden verfügbar ist.

Mind Mapping im Unterricht

Damit Sie die Methode des Mind Mappings mit Ihren Schülerinnen und Schülern im Unterricht durchführen können, sollte Sie selber an den Umgang mit Mind Maps gewöhnt sein. Das heißt, sie sollten die grundlegenden Regeln zum Erstellen eines Mind Maps kennen, damit Sie sich ganz auf dessen mathematischen Inhalt konzentrieren können.

Dabei sollten Sie sich vor dem Unterricht jene Begriffe notieren, die für den inhaltlichen Aufbau des Mind Maps wichtig sind und auf jeden Fall integriert werden sollten. So können Sie flexibel auf die Vorschläge und Beiträge Ihrer Schülerinnen und Schüler eingehen und wichtige Begriffe, die nicht genannt wurden, selber hinzufügen ohne einen davon zu vergessen.

Unterrichtsmaterialien

Um Ihren Schülerinnen und Schülern das selbstständige Untersuchen von mathematischen Lerninhalten zu ermöglichen, sollten Sie die dazu nötigen Fragestellungen und Arbeitsanweisungen möglichst offen formulieren. Damit vermeiden Sie, den Lösungsweg der Aufgaben zu sehr einzuschränken und ermöglichen den Schülerinnen und Schülern das eigenständige Arbeiten und Finden von eigenen Lösungen.

Diese Arbeitsanregungen können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern in Form eines Handouts austeilen oder als Datei zur Verfügung stellen. Wie Sie ein derartiges Arbeitsblatt erstellen können, haben Sie bereits in Lernstation 4 erfahren.

Zusätzlich bietet GeoGebra die Möglichkeit, dynamische Arbeitsblätter zu erstellen, die von Ihren Schülerinnen und Schülern in einem Internet Browser bearbeitet werden können. Der Vorteil dieser Methode ist, dass die verwendeten Grafiken von Ihren Schülerinnen und Schülern dynamisch verändert werden können und somit ein entdeckendes Lernen ermöglichen. Einige Beispiele dynamischer Arbeitsblätter finden Sie auf der GeoGebra Hompage unter "Beispiele".

Wie Sie derartige dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra selbst erstellen können, erfahren Sie entweder in der Kurzanleitung "Dynamische Arbeitsblätter erstellen" (siehe www.geogebra.at) oder detaillierter im Lernpfad: Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra.

Um Ihre Schülerinnen und Schüler mit dem Erstellen eines Mind Maps vertraut zu machen, können Sie ebenfalls verschiedenartige Materialien verwenden, hier nur einige Vorschläge:

- Erklären Sie Ihren Schülerinnen und Schülern die Grundregeln zum Erstellen eines Mind Maps anhand eines vorbereiteten Beispiels (Overhead-Folie, Computer mit Beamer als "dynamische" Folie).

- Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler die Technik des Mind Mappings ausprobieren, indem Sie das leere Grundgerüst eines Mind Maps mit den vorgegebenen Begriffen eines bekannten mathematischen Themas ausfüllen. Anschließend erhalten sie den Auftrag, das Mind Map zu ergänzen und kreativ zu gestalten. Vergleichen Sie die unterschiedlichen Ergebnisse und diskutieren Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern über die Ursachen dieser Unterschiede.

Werten Sie diese Vorschläge wieder als Anregungen und diskutieren Sie mit Ihren Teammitgliedern über das Erstellen von Unterrichtsmaterialien, die Ihren Schülerinnen und Schülern das eigenständige Arbeiten erleichtern können.

Berücksichtigen Sie dabei auch, wie man die Unterrichtsmaterialien innerhalb eines Teams erstellen kann (Verteilung der Arbeitsbereiche nach Interessen und individuellen Fähigkeiten,...).

Lernstation 6: Durchführung im Unterricht

Wie kann GeoGebra im Unterricht eingesetzt werden?

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, wie sie GeoGebra im Unterricht einsetzen können. Hier einige Tipps:

- Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler mit einer von Ihnen vorgegebenen Datei beginnen. Das spart Zeit und die Schülerinnen und Schüler können sich ganz auf das eigentliche Problem, das Untersuchen einer Polynomfunktion, konzentrieren. Andererseits benötigen Ihre Schülerinnen und Schüler so auch kein Vorwissen über die Bedienung von GeoGebra, wie die Eingabe von Funktionen, denn die meisten Arbeitsanweisungen lassen sich ohnehin mit Hilfe der Maus ausführen.

- Lassen Sie einfache Konstruktionen von Ihren Schülerinnen und Schülern erstellen. Durch die vielen vordefinierten Befehle wie Nullstelle[f], Extremum[f] und Wendepunkt[f] können Ihre Schülerinnen und Schüler die charakteristischen Punkte einer Polynomfunktion im Black-Box-Prinzip von GeoGebra anzeigen lassen und lernen, die Punkte bewusst mit den richtigen Namen zu verbinden.

- Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler selbst wählen, ob Sie die Konstruktionen selber erstellen oder mit der vorgefertigten Datei arbeiten wollen (Differenzierung innerhalb der Klasse).

Wie können Sie Ihren Schülerinnen und Schülern beim selbstständigen Erarbeiten mathematischer Lerninhalte helfen?

- Beobachten Sie Ihre Schülerinnen und Schüler während sie mit GeoGebra arbeiten. Notieren Sie sich auftretende Schwierigkeiten, die mit der Bedienung des Programms oder den Arbeitsaufträgen zusammenhängen, damit sie bei zukünftigen ähnlichen Lernsituationen vermieden werden können.

- Beobachten Sie die Zusammenarbeit zwischen Ihren Schülerinnen und Schülern bei der Partnerarbeit. Wurde die Aufteilung der Klasse in Zweiergruppen von der Lehrerin oder dem Lehrer beeinflusst oder war sie den Schülerinnen und Schülern überlassen? Arbeiten die so gebildeten Zweierteams effektiv oder gibt es Probleme, die durch eine Umgruppierung gelöst werden könnten? Kann die oder der Einzelne von diesem Teamwork profitieren?

- Vermeiden Sie es, den Schülerinnen und Schülern während der selbstständigen Arbeitsphase Ratschläge zu erteilen. Sie übernehmen bei dieser Art des Unterrichts nur dann die Rolle eines Beraters, wenn Ihre Hilfe von den Schülerinnen und Schülern aktiv angefordert wird.

Diskutieren Sie mit Ihren Teammitgliedern über derartige Unterrichtssituationen und versuchen Sie, noch weitere Beobachtungsaufträge zu formulieren.

GeoGebra für Ihre Schülerinnen und Schüler

Ihre Schülerinnen und Schüler können die Software GeoGebra auch zu Hause nützen, da das Programm kostenlos und somit für jeden zugänglich ist.

Falls Ihre Schülerinnen und Schüler über einen Internet-Zugang verfügen, erhalten sie die jeweils aktuellste Version von GeoGebra direkt auf www.geogebra.at unter *Download*. Für alle anderen Schülerinnen und Schüler können Sie die Datei geogebra_setup.exe auf CDs brennen und diese in der Klasse für die Installation zu Hause verleihen.

Lernstation 8: Weiterführende Planung

Vertiefung der Methode des Mind Mappings

Da Ihre Schülerinnen und Schüler nun die Methode des Mind Mappings kennen gelernt haben, sollten sie auch die Möglichkeit erhalten, sie effektiv für das eigene Lernverhalten zu nutzen. Sprechen Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern über die Vorteile und die Einsatzmöglichkeiten von Mind Maps und weisen Sie auch auf die Anwendung der Methode in Bezug auf andere Unterrichtsfächer hin.

Durch das eigenständige Strukturieren und Gliedern von Lerninhalten mit Hilfe von Mind Maps können verschiedenste Themengebiete überschaubarer gemacht werden, was auch zur Vorbereitungen auf Klassenarbeiten und Prüfungen dienen kann. Mind Maps sind kognitive Werkzeuge und sollten als solche auch benutzt werden, um den alltäglichen Lernprozess einfacher, interessanter und übersichtlicher zu gestalten.

Mit GeoGebra weiterarbeiten

In diesem Lernpfad haben Sie erfahren, wie einfach Sie GeoGebra im Unterricht zum Thema Polynomfunktionen einsetzen können.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten von GeoGebra im Mathematikunterricht zeigen weitere Lernpfade dieser Plattform. Besuchen Sie von Zeit zu Zeit auch die Homepage von GeoGebra (www.geogebra.at), um dort jeweils die aktuellste Version sowie weitere Beispiele und Informationen zu erhalten.

Um via E-mail über Neuigkeiten bezüglich der Weiterentwicklung von GeoGebra informiert zu werden, können Sie sich auch in die Mailinglist von GeoGebra eintragen.

Teil III

Mathematische und informatische Hintergründe

Kapitel 10

Weiterentwicklung von GeoGebra

In diesem und dem folgenden Kapitel werden einige Aspekte der Weiterentwicklung und Implementierung der Software GeoGebra im Zuge dieses Dissertationsprojektes besprochen. Damit wird die Umsetzung des 2. Zieles des Projekts dokumentiert:

1. Ziel: Implementierung interaktiver Unterrichtsmaterialien
2. Ziel: Weiterentwicklung der Software GeoGebra
3. Ziel: Publikation von Unterrichtsmaterialien auf e-Learning Plattformen im Internet
4. Ziel: Formative Evaluation der Software GeoGebra

10.1 Versionsgeschichte von GeoGebra

Seit Beginn des Dissertationsprojektes sind mehrere neue Versionen von GeoGebra entstanden. Hier ist eine kurze Versionsgeschichte mit den jeweils wichtigsten Veränderungen zu finden. Eine detaillierte Auflistung aller Neuerungen finden Sie auf www.geogebra.at unter 'Zukunft'.

10.1.1 Version 2.0 (9.1.2004)

Mit GeoGebra 2.0 werden Funktionen der Form $f : x \mapsto f(x)$ als eigenständiger Objekttyp eingeführt. Gleichzeitig wird das Computeralgebrasystem JSCL[1] eingebaut, welches unter anderem das Differenzieren und Integrieren von Funktionen erlaubt.

- Funktionen in x (Plotten)

[1] siehe http://jscl-meditor.sourceforge.net

- Ableitungen (Differenzieren)
- Unbestimmtes Integral
- Verschieben einer Funktion $f(x)$
- Tangente an $f(x)$ in $x = a$
- Hyperbolische Funktionen (cosh, sinh, tanh, acosh, asinh, atanh)
- Koordinatenfunktionen x(), y()

10.1.2 Version 2.1 (27.1.2004)

GeoGebra 2.1 bringt die erste Übersetzung neben Englisch: Liliana Saidon aus Argentinien übersetzt die Software ins Spanische. Beeinflusst vom Lehrerfortbildungsprojekt Intel 'Lehren für die Zukunft' (vgl. S. 133) wird ein Export von Java-Applets realisiert: die *dynamischen Arbeitsblätter*[2] von GeoGebra sind geboren.

- GeoGebra spricht Spanisch
- Export dynamischer Arbeitsblätter als Webseite
- Export des Konstruktionsprotokolls als Webseite (wahlweise mit Bild der Konstruktion)
- Ausblenden des Algebra Fensters
- Verschieben der Beschriftungen
- Griechische Buchstaben

10.1.3 Version 2.2 (22.3.2004)

In GeoGebra 2.2 ist es endlich möglich, Punkte auf Linien zu setzen. Vielecke werden als eigener Objekttyp implementiert, und Punkte können Spuren hinterlassen.

- Vielecke und Flächen
- Punkt auf Gerade, Strecke, Kegelschnitt oder Funktion
- Spur eines Objekts

[2] vgl. dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra, S. 137

- Füllen von Objekten (z.B. Kreis, Vieleck)
- Darstellung von Winkeln auf dem Zeichenblatt
- Vorschau für Konstruktionsmodi (Strecke, Vektor, Gerade, Kreis, Vieleck)

10.1.4 Version 2.3 (17.5.2004)

Neben zahlreichen Verbesserungen an der Benutzeroberfläche von GeoGebra ist hier der Befehl zur Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion die wichtigste Neuerung.

- Bestimmtes Integral als Fläche (Befehl Integral[])
- Steigungsdreieck (Befehl Steigung[])
- Fixieren von freien Objekten
- Beschriftung am Zeichenblatt: Name, Name & Wert, nur Wert
- Punktfang an Koordinatengitter
- Indizes in Namen (z.B. A_1 oder s_{AB})

10.1.5 Version 2.4 (13.9.2004)

Die Befehle zur *dynamischen Analysis* erweitern die Möglichkeiten von GeoGebra ganz wesentlich. Durch die Implementierung der Nullstellenberechnung können auch die Schnittoperationen auf Funktionen ausgeweitet werden. Das *Umdefinieren* von Objekten ermöglicht die nachträgliche Veränderung von abhängigen Objekten. Die neuen dynamischen Texte im Geometriefenster können sogar LaTeX Formeln enthalten.

- Dynamische Analysis: Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Unter- und Obersummen, Taylorpolynome
- Neue Schnittoperationen: Schnitt von Funktionen, Funktionen-Geraden
- Verschachteln von Befehlen
- Umdefinieren von Objekten: Änderung von abhängigen Objekten
- Dynamische Texte, LaTeX Formeln
- Übersichtliche Symbolleiste mit Menüs

10.1.6 Version 2.5 (28.3.2005)

Freie Zahlen und Winkel können jetzt auch im Geometriefenster mittels Schiebereglern verändert werden. Bilder, Kreis- und Ellipsenbögen kommen als neue Objektarten hinzu. Die Orstlinie eines Punktes, der von einem anderen auf einer Kurve liegenden Punkt abhängt, wird nun auch - im Unterschied zur Spur - automatisch und dynamisch erzeugt. Unterschiedliche Achsenskalierungen sind vor allem im Zusammenhang mit Funktionen sehr wichtig. Neu ist auch das maßstabsgetreue Drucken und Exportieren des Zeichenblattes. Außerdem sind gleich mehrere neue Sprachen hinzugekommen.

- Schieberegler für Zahlen und Winkel
- Bilder
- Halbkreise, Bögen und Sektoren
- Ortslinien
- unterschiedliche Achsenskalierung
- Abbildungen (verschieben, drehen, spiegeln, zentrisch strecken) auch für Vielecke und sogar für Bilder
- Drucken und Exportieren des Zeichenblattes in wahrer Größe (cm) und beliebigem Maßstab

10.1.7 Version 2.6 (2.9.2005)

Die wichtigsten Neuerungen dieser Version betreffen den automatischen Ablauf des Konstruktionsprotokolls sowie das JavaScript Interface für GeoGebra Applets.

- Navigationsleiste zum schrittweisen Durchblättern und ‘Abspielen’ der Konstruktion
- Haltepunkte im Konstruktionsprotokoll
- JavaScript Interface für GeoGebra Applets

10.2 Internationalisierung

GeoGebra 2.6 ist in den Sprachen Chinesisch, Dänisch, Deutsch, Englisch, Französisch, Holländisch, Italienisch, Katalanisch, Kroatisch, Ungarisch, Österreichisch, Portugiesisch, Slowenisch und Spanisch verfügbar. Für die viele dieser Sprachen liegt auch eine Übersetzung der GeoGebra Hilfe vor, wobei auch derzeit an weiteren gearbeitet wird.

Alle Übersetzungen werden von engagierten Lehrern und Wissenschaftlern kostenlos erstellt. Dabei sind alle Übersetzer von sich aus via E-Mail an mich herangetreten und haben ihr Interesse an einer GeoGebra-Version in ihrer jeweiligen Sprache angeboten. Im Folgenden wird kurz erklärt, wie die Übersetzung von GeoGebra funktioniert. Dabei sind mehrere Teile zu unterscheiden:[3]

- Graphical User Interface (GUI): die Benutzeroberfläche von GeoGebra
- GeoGebra Hilfe: das Handbuch zu GeoGebra
- GeoGebra Quickstart: eine Kurzeinführung zu GeoGebra
- GeoGebra Website: der Internetauftritt von GeoGebra

10.2.1 Graphical User Interface

Der erste und wichtigste Schritt bei der Übersetzung von GeoGebra betrifft die Benutzeroberfläche. Diese ist relativ schnell und einfach durchzuführen, da nur Listen von Begriffen und Phrasen zu übersetzen sind. Dazu werden sogenannte *Java Properties*-Dateien mit Schlüssel-Wert Paaren verwendet: jedem Schlüsselbegriff wird dabei seine Übersetzung zugeordnet. Zwei Paare aus der englischen Properties-Datei *plain.properties* sind:

```
LineBisector = Line bisector
Size = Size
```

Ausgehend von der englischen Properties-Datei werden die jeweiligen Werte (rechts vom '=' Zeichen) übersetzt. Die deutsche Übersetzung befindet sich in einer Datei namens *plain_de.properties* ('de' ist der ISO 639-1 Sprachencode für Deutsch), wobei sich die beiden Dateien *plain.properties* und *plain_de.properties* hierarchisch verhalten: zunächst werden alle Paare aus der englischen Sprachdatei geladen, danach jene aus der deutschen, wobei bereits bestehende Zuordnungen überschrieben werden. Wenn es also in der deutschen Properties-Datei für einen Schlüssel aus *plain.properties* keine Übersetzung gibt, so bleibt die englischsprachige Zuordnung aktiv. Im folgenden Beispiel werden beide oben angegebenen Schlüssel-Wert Paare durch deutsche Übersetzungen ersetzt:

```
LineBisector = Mittelsenkrechte
Size = Gr\u00f6\u00dfe
```

Wir sehen hier auch, dass die deutschen Buchstaben 'ö' und 'ß' im Wort 'Größe' als hexadezimale Unicode-Literale der Form `\uxxxx` geschrieben wurden. Mit Hilfe dieser Notation können alle Unicode Zeichen verwendet werden. In diesem Beispiel wäre dies nicht nötig

[3] vgl. www.geogebra.at/source/translation

gewesen, da in Properties-Dateien die Verwendung aller ISO-8859-1 Zeichen und damit auch von 'ö' und 'ß' erlaubt ist.

Die Unicode-Literale müssen von den Übersetzern übrigens nicht händisch eingegeben werden, da die Java Entwicklungsumgebung das Hilfsprogramm `native2ascii` umfasst, mit dem Dateien aus anderen Kodierungen in eine ISO-8859-1 Kodierung umgewandelt werden können. Die Übersetzer können also die Properties-Dateien in ihrer gebräulichen Zeichensatzkodierung übersetzen und konvertieren diese anschließend. Das Resultat der chinesischen Übersetzung obiger Schlüssel-Wert Paare aus der Datei *plain_zh.properties* sieht wie folgt aus:

```
LineBisector = \u4e2d\u5782\u7dda
Size = \u5927\u5c0f
```

Zusätzlich zur Unterscheidung nach Sprachen (wie 'de' oder 'zh') gibt es eine weitere mögliche Unterhierarchie nach Ländercodes. So gibt es etwa für Österreich eine eigene Datei *plain_de_AT.properties*, die beispielsweise den Begriff 'Mittelsenkrechte' durch 'Streckensymmetrale' ersetzt:

```
LineBisector = Streckensymmetrale
```

Die aktuelle Version aller Properties-Dateien von GeoGebra ist im Internet unter www.geogebra.at/source/translation/gui zu finden.

10.2.2 GeoGebra Hilfe

Das Handbuch zu GeoGebra basiert auf LaTeX Dateien in Englisch und Deutsch. Ausgehend von einer dieser beiden Versionen werden die LaTeX Dateien übersetzt, aus denen schließlich eine PDF Datei und eine HTML-Version (mit `latex2html`) entstehen.

Da alle Befehle von GeoGebra in die jeweilige Sprache übersetzt werden, ist es auch wichtig, eine Übersetzung für das Handbuch zu haben. Nachdem der Aufwand dafür aber ungleich höher ist als für die Übersetzung der Benutzeroberfläche, gibt es leider noch nicht zu allen Sprachversionen eine eigene GeoGebra Hilfe. Teilweise können aber Übersetzungen aus verwandten Sprachen als Ersatz dienen. Beispielsweise wird für die katalanische Version die spanische Hilfe verwendet.

Die deutsche GeoGebra Hilfe ist im Anhang dieser Arbeit (ab S. 277) abgedruckt. Unter www.geogebra.at/source/translation/help stehen die Quelldateien der GeoGebra Hilfe zur Verfügung. Die PDF und HTML Versionen finden sich auf www.geogebra.at unter 'Hilfe'.

10.2.3 GeoGebra Quickstart

Die Kurzanleitung zu GeoGebra umfasst derzeit sieben DIN A4 Seiten und liegt im MS Word Format vor. Die Übersetzer erhalten zusätzlich die für die Screenshots verwendeten Konstruktionsdateien, um Bildschirmfotos in ihrer Sprache anfertigen zu können.

Unter www.geogebra.at/source/translation/quickstart stehen die Quelldateien für GeoGebra Quickstart zur Verfügung. Die PDF Version findet sich auf www.geogebra.at unter 'Hilfe'.

10.2.4 GeoGebra Website

Die GeoGebra Website basiert derzeit auf dem Open Source Content Management System *Joomla*.[4] Die Übersetzung der Inhalte geschieht direkt über das Webinterface von Joomla mit Hilfe der Komponente *Joomfish*. Dabei melden sich die Übersetzer mit einem speziellen Benutzeraccount an und können einzelne Artikel der Webseiten direkt in ihrem Internet Browser mit einem einfachen Editor übersetzen. Falls zu einem Artikel keine Übersetzung existiert, wird sein Originalinhalt (üblicherweise in Englisch) angezeigt.

10.3 Softwarelizenz

GeoGebra ist eine Open Source Software unter der GNU General Public License[5] und damit kostenlos verfügbar. Der Hauptgrund dafür ist meine Überzeugung, dass Bildung und damit auch Bildungssoftware frei zugänglich sein soll.

```
Copyright (C) 2001-2005 Markus Hohenwarter
                        Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at
                        www.geogebra.at

This program is free software; you can redistribute it and/or modify
it under the terms of the GNU General Public License as published by
the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or
(at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful,
but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
GNU General Public License for more details.
```

[4]siehe www.joomla.org
[5]siehe www.gnu.org/licenses

Der Quellcode von GeoGebra ist unter www.geogebra.at/source/program zu finden. Für die Zukunft ist geplant, weitere Softwareentwickler einzubinden und ein Projekt bei http://sourceforge.net zu starten. Im Folgenden ist der Beginn der Preamble der General Public License, Version 2 (Juni 1991), im Englischen Original abgedruckt.

> The licenses for most software are designed to take away your freedom to share and change it. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change free software–to make sure the software is free for all its users. This General Public License applies to most of the Free Software Foundation's software and to any other program whose authors commit to using it. (Some other Free Software Foundation software is covered by the GNU Library General Public License instead.) You can apply it to your programs, too.
>
> When we speak of free software, we are referring to freedom, not price. Our General Public Licenses are designed to make sure that you have the freedom to distribute copies of free software (and charge for this service if you wish), that you receive source code or can get it if you want it, that you can change the software or use pieces of it in new free programs; and that you know you can do these things.
>
> To protect your rights, we need to make restrictions that forbid anyone to deny you these rights or to ask you to surrender the rights. These restrictions translate to certain responsibilities for you if you distribute copies of the software, or if you modify it.
>
> For example, if you distribute copies of such a program, whether gratis or for a fee, you must give the recipients all the rights that you have. You must make sure that they, too, receive or can get the source code. And you must show them these terms so they know their rights.
>
> We protect your rights with two steps: (1) copyright the software, and (2) offer you this license which gives you legal permission to copy, distribute and/or modify the software.
>
> Also, for each author's protection and ours, we want to make certain that everyone understands that there is no warranty for this free software. If the software is modified by someone else and passed on, we want its recipients to know that what they have is not the original, so that any problems introduced by others will not reflect on the original authors' reputations.

Kapitel 11

Implementierungsdetails

Dieses Kapitel beschreibt einige ausgewählte Aspekte der Implementierung von GeoGebra. Der in der Programmiersprache *Java* geschriebene Quellcode umfasst inzwischen 70000 Zeilen (Stand Dezember 2005). Davon entfallen etwa 15000 Zeilen auf das Computeralgebrasystem JSCL[1], und 55000 Zeilen habe ich selbst verfasst, was ausgedruckt in etwa 1800 DIN-A4 Seiten entsprechen würde. Aufgrund des Umfangs des Quellcodes und wegen des didaktischen Schwerpunkts dieses Dissertationsprojekts kann in diesem Kapitel nur kurz auf einige interessante Aspekte hinter den Kulissen der Software eingegangen werden.

11.1 Funktionen und dynamische Analysis

11.1.1 Symbolisches Differenzieren und Integrieren

Seit Version 2.0 kennt GeoGebra Funktionen der Form $f : x \mapsto f(x)$ als eigenen Objekttyp. Intern werden diese als binäre arithmetische Bäume mit einer speziellen numerischen Variable x behandelt. Um auch das Differenzieren und Integrieren solcher Funktionen zu ermöglichen, wurde das Open Source Computeralgebrasystem JSCL (Java Symbolic Computing Library)[2] eingebaut. Die Koppelung von GeoGebra und JSCL ist dabei bewusst lose gehalten. Konkret bedeutet dies, dass GeoGebra nicht direkt Objekte von JSCL verwendet, sondern nur über Zeichenketten (Strings) mit der Library kommunziert. Um beispielsweise die Funktion $f(x) = ax^2$ abzuleiten, wird diese zunächst in JSCL Syntax als `a*x^2` dargestellt. Danach sendet der GeoGebra-Kernel den Befehl `d(a*x^2,x)` als Zeichenkette an JSCL und lässt diesen auswerten. JSCL liefert dafür das Ergebnis `2*a*x`, welches vom GeoGebra-Parser wieder als Zeichenkette eingelesen wird. Die Ableitung ist schließlich das Funktionsobjekt $f'(x) = 2ax$ im GeoGebra-Kernel.

[1] siehe http://jscl-meditor.sourceforge.net
[2] siehe http://jscl-meditor.sourceforge.net

Durch diese lose Koppelung von GeoGebra und JSCL ist es problemlos möglich, neue Versionen von JSCL in GeoGebra zu integrieren, solange die JSCL-Syntax abwärtskompatibel bleibt. Beim eventuellen Umstieg auf eine andere symbolische Library müsste die obige Vorgangsweise nur an deren spezifische Syntax angepasst werden. Das vorgestellte Beispiel zeigt zudem, dass GeoGebra mit Hilfe von JSCL tatsächlich symbolisch differenziert (bzw. integriert). Intern wird für die Ableitung $f(x) = ax^2$ der Term $f'(x) = 2ax$ verwendet. Nachdem GeoGebra keine unbelegten Variablen zulässt, hat der reelle Parameter a jedoch immer auch einen konkreten Wert. Dadurch ist es möglich, die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitung $f'(x)$ sowohl im Algebrafenster (aktuelle Funktionsgleichung) als auch im Geometriefenster (aktueller Funktionsgraph) darzustellen.

Aus Gründen der Effizienz werden alle symbolischen Ableitungen und Integrale einer Funktion gespeichert, sodass ein Aufruf von JSCL jeweils nur einmal nötig ist. Dies ist zum Beispiel für die effiziente Berechnung des bestimmten Integrals mittels Stammfunktion wichtig (siehe nächster Abschnitt).

11.1.2 Bestimmtes Integral

GeoGebra bietet einen Befehl `Integral[Funktion f, Zahl a, Zahl b]` zur Berechnung des bestimmten Integrals einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Dahinter verbirgt sich ein zweistufiger Ansatz: Zuerst wird versucht, die gegebene Funktion $f(x)$ symbolisch zu integrieren und so eine Stammfunktion $F(x)$ zu erhalten. Gelingt dies, so wird der Wert des bestimmten Integrals als $F(b) - F(a)$ berechnet.

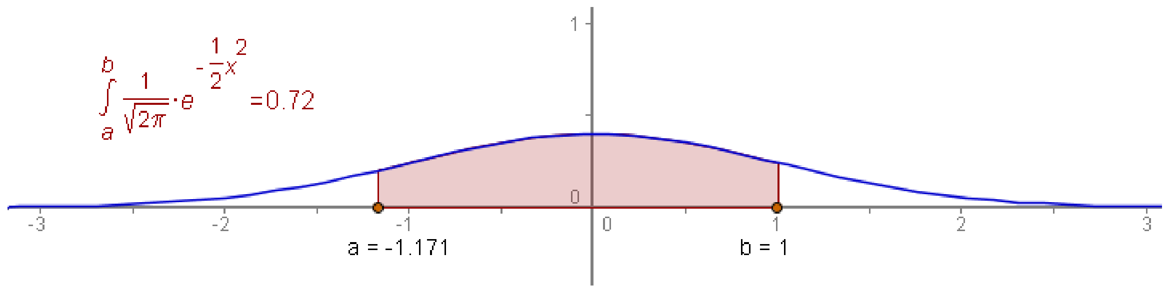


Abbildung 11.1: Numerische Integration der Normalverteilungsfunktion

Falls die symbolische Bestimmung einer Stammfunktion mittels JSCL fehlschlägt, wird ein numerisches Integrationsverfahren eingesetzt. Konkret verwende ich hier ein adaptives Gauß-Legendre Verfahren (vgl. [109, S. 152ff]). Dabei werden die Ergebnisse zweier Gauß-Legendre Quadraturen für 5 bzw. 7 Punkte im Intervall $[a, b]$ verglichen. Ist die Differenz beider Ergebnisse größer als ein vorgegebener Fehler, so wird dieselbe Vorgangsweise für die Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ wiederholt. Wenn dieses adaptive Bisektionsverfahren vor einer bestimmten maximalen Anzahl von Iterationsschritten terminiert, wird die Summe der Ergebnisse aller untersuchter Teilintervalle als numerische Näherung für das bestimmte Integral zurückgegeben. Andernfalls liefert GeoGebra als Ergebnis *undefiniert*.

11.1.3 Nullstellen, Extrema, Wendepunkte

Um auch Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben mit GeoGebra behandeln zu können, wurde ein Befehl zur Nullstellenberechnung von Funktionen eingebaut. Darauf basieren auch die Algorithmen zur Berechnung von Schnittpunkten zwischen Funktionen sowie Funktionen und Geraden.

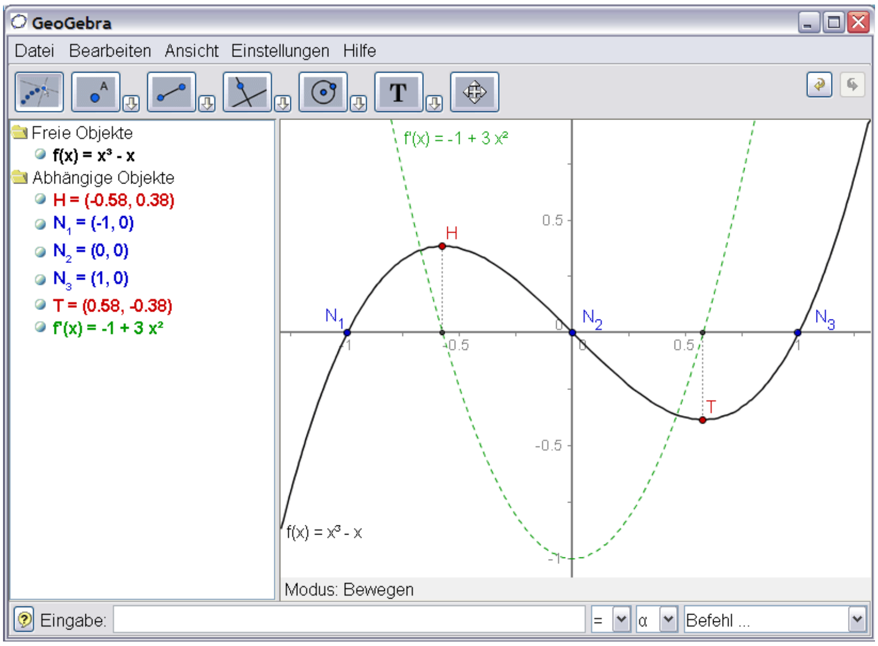


Abbildung 11.2: Nullstellen und Extrema einer kubischen Polynomfunktion

Nullstellen einer Polynomfunktion

GeoGebra unterscheidet bei Funktionen zwischen Polynomfunktionen und Nicht-Polynomfunktionen. Für eine Polynomfunktion $f(x)$ liefert der Befehl `Nullstelle[f]` alle ihre Nullstellen. Im Folgenden wird beschrieben, wie dies in GeoGebra erreicht wird.

1. Zunächst wird die Funktion $f(x)$ in ihre bestehenden Faktoren $f(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ zerlegt, wobei es möglicherweise nur einen Faktor gibt. Danach wird mit Hilfe des JSCL-Befehls `expand()` versucht, jeden dieser Faktoren $f_i(x)$ auf eine klammerfreie

Form zu bringen, und überprüft, ob dieser eine Polynomfunktion ist. Dabei gibt es zwei Varianten:

(a) Das Expandieren des Faktors $f_i(x)$ wird symbolisch versucht.

(b) Wenn (a) nicht möglich ist, dann werden vor dem Aufruf von `expand()` alle Parameter in $f_i(x)$ durch ihre aktuellen Werte ersetzt.

Falls einer der Faktoren $f_i(x)$ keine Polynomfunktion ist, war $f(x)$ keine Polynomfunktion und der Algorithmus bricht ab. Andernfalls erhalten wir so eine Liste $L = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ mit den ausmultiplizierten Faktoren der Polynomfunktion $f(x)$.

2. Jetzt können die Nullstellen aller Faktoren berechnet werden.

(a) Zunächst werden für jeden Faktor $f_i(x)$ von L alle seine Nullstellen bestimmt und zu einer Liste N aller Nullstellen von $f(x)$ hinzugefügt.

(b) Abschließend wird N aufsteigend sortiert, und mehrfache Nullstellen werden entfernt.

Die Liste N enthält nun alle Nullstellen von $f(x)$ in aufsteigender Reihenfolge.

Das folgende Beispiel zeigt, warum der Fall (1b) nötig ist: Seien $a = 2$ und $f(x) = (x-3)^a$.

Fall (1a): die Funktion $f(x)$ hat nur einen Faktor, nämlich $(x - 3)^a$. Dieser kann nicht symbolisch ausmultipliziert werden.

Fall (1b): Für $a = 2$ hat die Funktion $f(x)$ den Faktor $(x - 3)^2$. Da die positive Hochzahl bei der Nullstellenberechnung weggelassen werden kann, muss der Faktor nicht ausmultipliziert werden, sonder wird zu $x - 3$ vereinfacht.

Zu klären ist noch die Frage, wie GeoGebra für eine ausmultiplizierte Polynomfunktion $f_i(x)$ alle Nullstellen berechnet. Hierbei wird nach dem Grad der Polynomfunktion unterschieden. Für die Nullstellensuche quadratischer und kubischer Polynomfunktionen kommen numerische Formeln zum Einsatz (vgl. [54, S. 173ff] und [109, S. 152ff]). Für Polynomfunktionen höheren Grades wird Laguerres Methode (vgl. [109, S. 376ff]) verwendet. Bei diesem auf komplexer Arithmetik basierenden Ansatz wird zunächst eine komplexe Nullstelle numerisch bestimmt. Danach werden iterativ durch Polynomdivision alle weiteren komplexen Nullstellen berechnet. Die derart gefundenen Nullstellen können große numerische Fehler aufweisen, weshalb in einem abschließenden Schritt ein *root polishing* Verfahren mittels Newton-Raphson Iteration (vgl. [109, S. 366ff]) angewandt wird, um alle reellen Nullstellen der Polynomfunktion zu finden.

Die Berechnung der Extrema und Wendepunkte einer Polynomfunktion (vgl. Abbildung 11.2) basiert ebenfalls auf der oben beschriebenen Nullstellensuche, wobei hier ihre erste bzw. zweite Ableitung untersucht und zusätzlich noch unerwünschte Spezialfälle wie z.B. Sattelpunkte ausgesondert werden.

Auch die Bestimmung von Schnittpunkten (Befehl `Schneide[]`) zweier Polynomfunktionen bzw. einer Polynomfunktion und einer Geraden wird auf die Nullstellenberechnung zurückgeführt. Hierbei werden intern zunächst die entsprechenden Differenzfunktionen ermittelt.

Nullstellensuche über Näherungsverfahren

Für reelle Funktionen der Form $f : x \mapsto f(x)$, die keine Polynomfunktionen sind, verwendet GeoGebra numerische Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen. Der Befehl `Nullstelle[`Funktion f, Zahl a`]` sucht eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ für den Startwert $x_0 = a$ mit Hilfe einer Newton-Rhapson Iteration (vgl. [109, S. 366ff]). Der Aufruf von `Nullstelle[`Funktion f, Zahl a, Zahl b`]` veranlasst die Ausführung eines *Regula Falsi* Algorithmus (vgl. [109, S. 358ff]) zur Suche nach einer Nullstelle im Intervall $[a, b]$.

Auch für die Berechnung von Schnittpunkten von Nicht-Polynomfunktionen wird auf eine Newton-Rhapson Näherung zurückgegriffen. Wenn man im Modus *Schneide zwei Objekte* auf die Stelle eines entsprechenden Schnittpunkts klickt, so wird diese als Startwert für die näherungsweise Nullstellensuche der Differenzfunktion verwendet.

11.1.4 Unter- und Obersummen

GeoGebra bietet eigene Befehle zur Darstellung und Berechnung von Unter- und Obersummen des Riemann-Integrals. Neben der Funktion $f(x)$ sind dabei ein Intervall $[a, b]$ und die Anzahl n der äquidistanten Unterteilungen dieses Intervalls anzugeben. Im Algebrafenster wird der Wert der entsprechenden Unter- bzw. Obersumme angegeben, während im Geometriefenster die dazugehörenden Rechtecke zu sehen sind (vgl. Abbildung 11.3).

Um die Unter- bzw. Obersumme berechnen zu können, muss in jedem der n gleich großen Teilintervalle von $[a, b]$ das absolute Minimum bzw. Maximum ermittelt werden. GeoGebra verwendet hierzu folgendes heuristische Verfahren zur Suche des globalen Minimus in einem Intervall:

1. Zunächst werden für einige Stellen $x_1, \ldots, x_m$ aus dem betrachteten Intervall die Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ berechnet. Dabei wird gleichzeitig jene Stelle x_i ermittelt, die den kleinsten aller aufgetretenen Funktionswerte hat, wo also $f(x_i) = \min(f(x_1), \ldots, f(x_m))$ gilt.

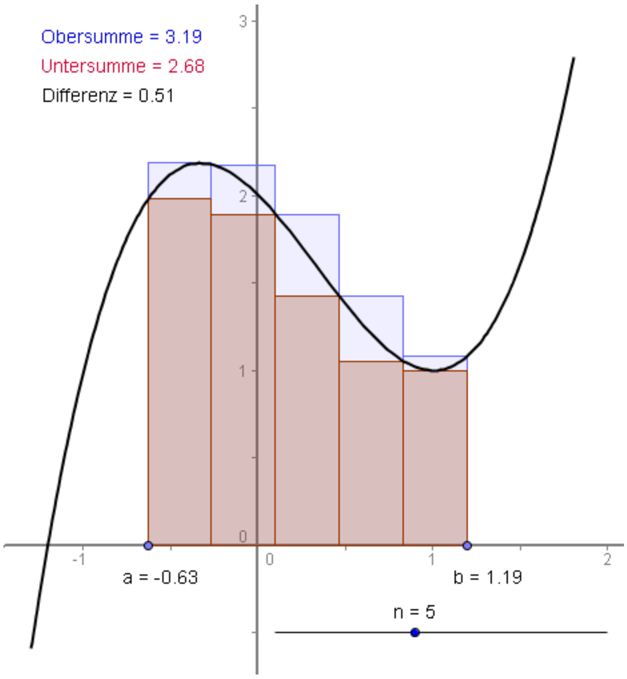


Abbildung 11.3: Unter- und Obersumme im Geometriefenster

2. Nun wird nach einem (lokalen) Minimum in der Nähe von x_i gesucht. Hierbei kommt Brents Methode (vgl. [109, S. 406ff]), ein inverses parabolisches Interpolationsverfahren, für das Intervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ zur Anwendung.

Der erste Schritt ist deshalb notwendig, weil Brents Methode im Fall mehrerer lokaler Minima im betrachteten Intervall möglicherweise gegen das falsche konvergiert. Durch die Vorauswahl eines kleineren Intervalls im ersten Schritt wird die Wahrscheinlichkeit größer, tatsächlich das globale Minimum einer (stetigen) Funktion zu finden.

Für die Untersumme wird in jedem der n Teilintervalle von $[a, b]$ mit Hilfe der eben vorgestellten Vorgangsweise das globale Minimum gesucht. Bei der Berechnung der Obersumme werden die globalen Maxima auf dieselbe Art gefunden, wobei hier allerdings $-f(x)$ zu betrachten ist.

11.2 Ortslinien und Punkte auf Kurven

In GeoGebra kann ein Punkt auf eine Gerade, eine Strecke, einen Strahl, einen Kegelschnitt, einen Kegelschnittsbogen oder einen Funktionsgraphen gesetzt werden. Für alle diese Kurven werden neben ihren Gleichungen intern auch Parameterdarstellungen verwaltet. Eine Gerade g durch den Punkte A mit Richtung v hat dabei intern die Parameterdarstellung $g : X = A + tv$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bei einer Strecke bzw. einem Strahl wird der Parameter t auf das Intervall $[0, 1]$ bzw. $[0, \infty)$ eingeschränkt. Bei den Kegelschnitten hat jeder Typ seine eigene Parameterdarstellung relativ zum Koordinatensystem seiner Eigenvektoren: Ein Kreis wird mittels $(r \cos t, r \sin t)$ und eine Ellipse als $(a \cos t, b \sin t)$ mit $t \in [0, 2pi)$ dargestellt. Hyperbeln haben in GeoGebra die Parameterdarstellung $(a \cosh t, b \sinh t)$ bzw. $(a \cosh t, -b \sinh t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ für den rechten bzw. linken Ast. Eine Parabel wird als $(pt^2/2, pt)$ mit $t \in \mathbb{R}$ repräsentiert. Die uneigentlichen Kegelschnitte sind entweder trivial (Punkt und leere Menge) oder werden wie Geraden behandelt. Für Funktionsgraphen wird die Parameterdarstellung $(t, f(t))$ mit $t \in \mathbb{R}$ verwendet.

Einem Punkt P auf einer Kurve k wird in GeoGebra nun ein konkreter Parameterwert t_P in Bezug auf die Parameterdarstellung von k zugeordnet. Die Berechnung von t_P ist sowohl bei der Erzeugung als auch bei der Veränderung von P - etwa durch Ziehen mit der Maus - nötig. In beiden Fällen läuft sie gleich ab: GeoGebra erhält eine ‘Wunschposition’ für P, etwa indem eine bestimmte Stelle auf der Kurve angeklickt oder der Punkt P mit der Maus gezogen wurde. Nun wird ein Punkt auf k in der Nähe der Wunschposition berechnet (z.B. der Lotfußpunkt auf eine Gerade). Bei Kegelschnitten wird die Wunschposition übrigens zunächst in das Koordinatensystem der Eigenvektoren transformiert. Damit bekommt man die neue Position von P auf k und kann den zugehörigen Parameterwert t_P berechnen.

Wenn sich andererseits die Kurve k selbst verändert, werden die Koordinaten von P durch Einsetzen von t_P in die aktualisierte Parameterdarstellung ale $P = k(t_P)$ einfach neu berechnet. Bei Kegelschnitten ist dies natürlich nur dann möglich, wenn sich der Typ des Kegelschnitts nicht geändert hat. Andernfalls wird für den neuen Kegelschnittstyp die alte Position von P als Wunschposition verwendet und der Parameter t_P wie oben beschrieben neu berechnet.

Betrachten wir nun einen Punkt Q, der von einem Punkt P auf einer Kurve k abhängt. Unter der *Ortslinie* von Q versteht man die Menge aller Positionen, die Q einnimmt, wenn P die Kurve k durchläuft. Der Befehl `Ortslinie[Q, P]` liefert diese Ortslinie in GeoGebra als numerisch berechneten Linienzug (vgl. Abbildung 11.4). Dabei wird intern der Punkt P durch Veränderung seines Parameters t_P automatisch entlang seiner Kurve k bewegt, um die Positionen von Q zu erhalten. Wichtig ist hierbei vor allem eine adaptive Parameterveränderung, um den Punkt P auch entlang unendlich langer Kurven (z.B. Geraden oder Hyperbeln) wandern lassen zu können. Die Geschwindigkeit des Parameters t_P hängt

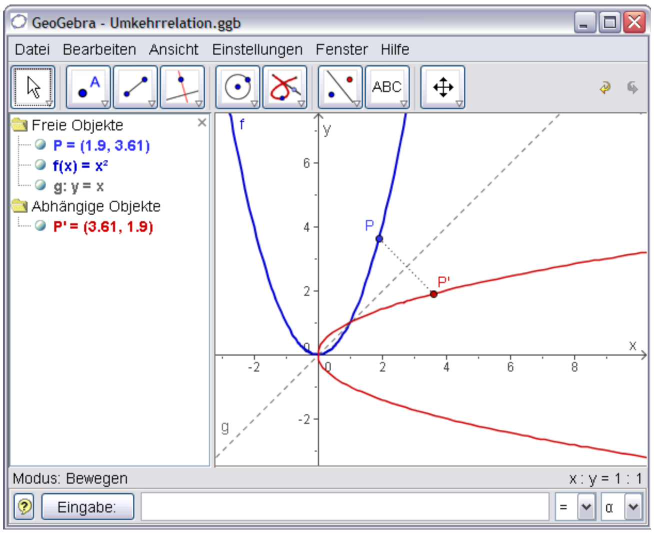


Abbildung 11.4: Umkehrrelation zu $f(x) = x^2$ als Ortslinie des gespiegelten Punktes P' abhängig von P

dabei einerseits vom Abstand der letzten beiden Postionen von Q und andererseits vom Bildschirmausschnitt des Koordinatensystems ab.

11.3 Umdefinieren

GeoGebra unterscheidet zwischen *freien* und *abhängigen* Objekten. Alle freien Objekte können direkt - etwa durch Ziehen mit der Maus - verändert werden. Bei jeder Veränderung eines freien Objekts werden alle davon abhängigen Objekte aktualisiert. Dies macht GeoGebra zu einer *dynamischen* Mathematik Software.

Bei der Erstellung von Konstruktion kommt oftmals der Wunsch auf, auch abhängige Objekte nachträglich verändern zu können. Dies ist mit Hilfe der Option *Umdefinieren* möglich, die mittels rechtem Mausklick ausgewählt werden kann. Hierbei kann beispielsweise die als `g = Gerade[A, B]` definierte Gerade in die Strecke `g = Strecke[B, C]` umdefiniert werden. Bereits dieses einfache Beispiel zeigt, dass es sich hierbei um eine sehr mächtige Möglichkeit zur Veränderung einer Konstruktion handelt. Prinzipiell kann auf diese Weise ein bestehendes Objekt durch ein beliebiges neues Objekt ersetzt werden.

Im Folgenden wird grob beschrieben, wie das Umdefinieren von Objekten in GeoGebra implementiert ist. Das Objekt *oldObject* wird im Folgenden durch das Objekt *newObject* ersetzt.

1. Es wird überprüft, ob das Umdefinieren zu einer Zirkeldefinition führen würde. Falls ja, ist diese Neudefinition nicht möglich.

2. GeoGebra verwaltet eine Liste der Konstruktionsschritte, das sogenannte Konstruktionsprotokoll. Die Reihenfolge der Einträge im Konstruktionsprotokoll muss möglicherweise verändert werden: dazu werden nun alle Objekte, von denen *newObject* abhängt, im Konstruktionsprotokoll vor *oldObject* verschoben.

3. Jetzt wird *oldObject* durch *newObject* ersetzt und überprüft, ob die neu erzeugte Konstruktion gültig ist. Andernfalls ist die Neudefinition nicht möglich.

Eine wichtige Anwendung des Umdefinierens ist etwa das nachträgliche Setzen eines freien Punktes auf eine Linie. Dazu wird etwa der Punkt $A = (3, 2)$ durch Umdefinieren in `A = Punkt[g]` auf die Gerade g gesetzt. Umgekehrt kann ein Punkt A auf der Geraden g durch Umdefinieren in z.B. `A = (1,4)` wieder von dieser gelöst werden.

11.4 Kontinuität

In einem dynamischen Geometriesystem gibt es in gewissen Situationen mehrere Möglichkeiten, wie nach einer Veränderung der Konstruktion eine Neuberechnung erfolgen kann. Ein typisches Beispiel dafür ist der Schnitt eines Kreises mit einer Geraden. Nach einer geringfügigen Veränderung der Position der Geraden oder des Kreises müssen die beiden Schnittpunkte neu berechnet werden. Die Frage ist nur: welchem Schnittpunkt soll welches der beiden neu berechneten Koordinatenpaare zugeordnet werden? Offensichtlich gibt es zwei Möglichkeiten, wobei wir uns für eine entscheiden müssen. Eine von beiden führt zu ‘springenden’ Schnittpunkten, bei der anderen verändern sich die Punkte im Vergleich zur alten Position ‘kontinuierlich’.

Das Problem dieser Entscheidung ist ein Beispiel für das sogenannte *Kontinuitätsproblem* (vgl. [54, S. 163]). GeoGebra verwendet zur Behandlung solcher Situationen eine heuristische *Nähe-Beziehung* (vgl. [54, S. 163] und [93, S. 92]), d.h. es wird versucht, die neu berechneten Schnittpunkte möglichst ‘nahe’ bei ihrer alten Position zu behalten.

Im Zuge dieses Dissertationsprojekts wurde die Nähe-Beziehung für Schnittpunktsberechnungen verfeinert, sodass weitere wichtige Spezialfälle besser behandelt werden. In den ersten Versionen von GeoGebra wurden die möglichen Permutationen (z.B. der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte) nach ihrer Abstandssumme sortiert, um die ‘beste’ Wahl für die Zuordnung der neuen zu den alten Schnittpunkten zu treffen (vgl. [54, S. 168]). Durch diese Summation der Abstände geht jedoch Information verloren und es können leicht ‘springende’ Schnittpunkte auftreten, insbesondere wenn sich die einzelnen Abstände stark unterscheiden. Daher wurde die Wahl der besten Permutation auf die im Folgenden beschriebene Art verändert.

Seien $P_1, \ldots, P_n$ die alten, $D_1, \ldots, D_n$ die zuletzt definierten und $Q_1, \ldots, Q_n$ die neu berechneten Schnittpunkte zweier Kegelschnitte bzw. einer Geraden und eines Kegelschnitts.

Möglicherweise sind nicht alle alten Schnittpunkte P_i in $\mathbb{R}^2$ definiert. Daher werden auch ihre letzten definierten Positionen D_i gespeichert. Falls P_i definiert ist, gilt also $D_i = P_i$. Seien weiters $age_i \in \mathbb{N}_0$ das Alter eines Punktes D_i, also die Anzahl von Neuberechnungen seit P_i nicht mehr definiert war, und $meanDist_i \in \mathbb{R}_0^+$ der durchschnittliche Abstand zwischen aufeinander folgenden Positionen der Vergangenheit von P_i. Damit definieren wir nun den Abstand $dist_{i,j}$ von D_i und Q_j als

$$dist_{i,j} := (D_i - Q_j)^2 + age_i + meanDist_i.$$

1. Zunächst wird eine Liste $L = \{(i, j, dist_{i,j}) | i, j \in \{1, \ldots, n\}; dist_{i,j} \in \mathbb{R}_0^+\}$ erzeugt und nach den Abständen $dist_{i,j}$ aufsteigend sortiert.

2. Nun wird das erste Element $(i_1, j_1, dist_{i_1,j_1})$ von L betrachtet. Der Abstand $dist_{i_1,j_1}$ zwischen dem alten Schnittpunkt D_{i_1} und dem neu berechneten Schnittpunkt Q_{j_1} ist minimal. Es wird daher $P_{i_1} = Q_{j_1}$ gesetzt. Falls P_{i_1} definiert ist, wird auch $D_{i_1} = P_{i_1}$ gesetzt, ansonsten age_i um eins erhöht.

3. Der neu berechnete Schnittpunkt Q_{j_1} wurde vorhin dem Schnittpunkt P_{i_1} zugeordnet. Daher werden alle Tupel (a, b, c) mit $a = i_1$ oder $b = j_1$ nicht mehr benötigt und aus L gelöscht.

4. Falls L leer ist, wurden alle Schnittpunkte gesetzt und der Algorithmus endet. Andernfalls wird bei Schritt 2 fortgefahren.

Auf diese Weise ist sichergestellt, dass sehr nahe liegende alte und neue Schnittpunkte einander zugeordnet werden.

Ein Problem beim Ansatz der Nähe-Beziehung sind Singularitäten: wenn also z.B. die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 einer Geraden und eines Kreises zusammenfallen. Mit Hilfe der Nähe-Beziehung kann nach einer solchen Singularität nicht entschieden werden, welche Permutation besser ist, da ja $P_1 = P_2$ war. GeoGebra begegnet diesem Problem auf zwei Arten. Einerseits werden im Fall einer Singularität die Punkte D_i nicht durch P_i überschrieben, wodurch die Nähe-Beziehung für die Situation unmittelbar vor der Singularität zur Anwendung kommt. Andererseits hat GeoGebra durch die Variable $meanDist_i$ noch weitere Informationen über die Vergangenheit von P_i, wodurch ein sehr wichtiger Spezialfall gut gelöst werden kann, nämlich Fixpunkte.

Betrachten wir dazu als Beispiel die Konstruktion eines Ellipsenzirkels. Zunächst wird dabei ein Punkt Q auf einen Kreis k_1 um den Koordinatenursprung gesetzt. Nun wird ein weiterer Kreis k_2 mit Mittelpunkt Q durch den Ursprung gezogen. Als Nächstes schneidet man k_2 mit der x-Achse und erhält so zwei Schnittpunkte A und B, wobei A im Ursprung liegen soll. Abschließend teilt man die Strecke $\overline{BQ}$ - man nehme beispielsweise den Mittelpunkt - und erhält so einen Punkt C auf $\overline{BQ}$. Wie sieht die Ortslinie von C aus, wenn Q entlang des Kreises k_1 wandert?

In den Abbildungen 11.5 und 11.6 wurde diese Ortslinie mit GeoGebra und zum Vergleich mit der dynamischen Geometrie Software *Geonext*[3] konstruiert. In GeoGebra erscheint als Ortslinie eine Ellipse während in Geonext ein Halbkreis und eine halbe Ellipse gezeichnet werden.

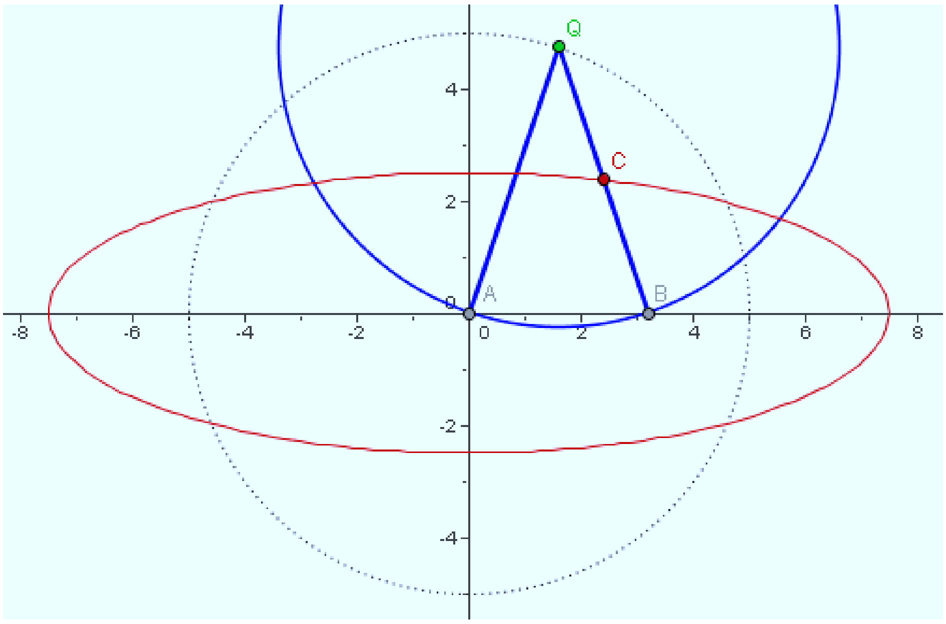


Abbildung 11.5: Ellipsenzirkel in GeoGebra

Wie kommt es zu diesem merkwürdigen Resultat in Geonext? Wenn der Punkt Q auf k_1 vom 1. in den 2. oder vom 4. in den 3. Quadranten wandert, werden in Geonext die Schnittpunkte A und B vertauscht, da in diesem Programm - wie in fast allen dynamischen Geometrie Systemen - keine Vorkehrungen zur Behandlung des Kontinuitätsproblems getroffen werden. Intern unterscheidet Geonext die Schnittpunkte einfach nur nach dem Vorzeichen einer quadratischen Lösungsformel, was in diesem Fall zu einem unerwünschten Ergebnis führt.

In GeoGebra funktioniert die Konstruktion des Ellipsenzirkels zuverlässig, da mit dem Ansatz der Nähe-Beziehung gearbeitet wird, wobei die durchschnittliche Veränderung der Schnittpunkte ($meanDist$) berücksichtigt wird. Diese ist für den Punkt A stets 0, während sie für den Punkt B immer größer als 0 ist. Dadurch erkennt GeoGebra, dass A ein Fixpunkt ist, und lässt B durch die Singularität hindurch wandern. Zusätzlich werden übrigens schnelle Mausbewegungen intern durch Zwischenschritte quasi-kontinuierlich gemacht, wodurch auch bei wildem Ziehen mit der Maus die Nähe-Beziehung zuverlässig arbeiten kann.

[3] siehe www.geonext.de

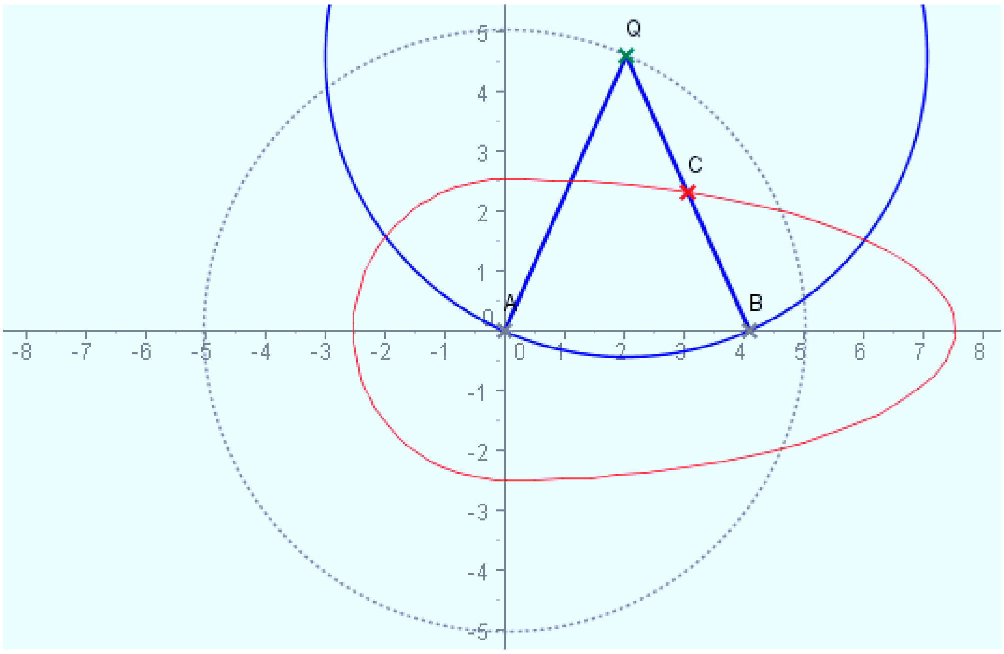


Abbildung 11.6: Ellipsenzirkel in Geonext

Weitere Beispiele zum Kontinuitätsproblem werden in [54] vorgestellt. In [93] ist eine Lösung des Kontinuitätsproblems mittels komplexer projektiver Geometrie zu finden.

11.5 Bilder, Dynamische Texte und LaTeX Formeln

GeoGebra ermöglicht auch die Verwendung von Bildern und Texten. Beide Objekttypen werden über einen eigenen Modus mit der Maus an einer bestimmten Stelle im Geometriefenster eingefügt.

Texte können an einen Punkt gebunden werden, sodass ihre Position relativ zu diesem Punkt bleibt. Durch Verkettung von statischen Zeichenketten mit Objekten werden sogenannte *dynamische Texte* erzeugt. So zeigt etwa der dynamische Text `"Strecke a= " + a` immer die aktuelle Länge einer Strecke a an, wenn diese verändert wird. Mittels LaTeX Schreibweise können sogar Formeln in Konstruktionen eingebunden werden. Dazu wurde das Paket *HotEqn*[4] in GeoGebra eingebunden. Ein Beispiel für einen dynamischen Text mit LaTeX Formel ist in Abbildung 11.1 auf S. 208 zu sehen.

Bilder können in GeoGebra in den Hintergrund gelegt, gespiegelt, gedreht oder gestreckt werden. Durch Festlegen von bis zu drei der vier Eckpunkte eines Bildes kann es zudem in

[4] siehe http://www.atp.rub.de/VCLab/software/HotEqn/HotEqn.html

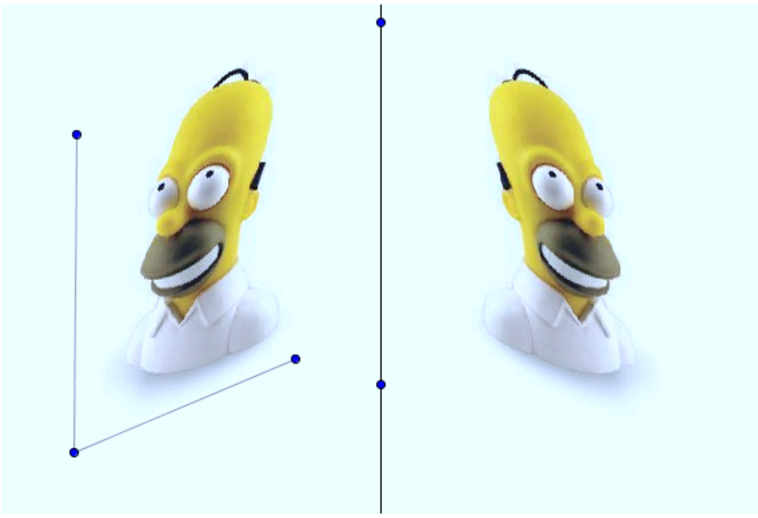


Abbildung 11.7: Lineare Transformation und Spiegelung eines Bildes

Größe und Lage verändert und sogar durch eine lineare Abbildung transformiert werden (siehe Abbildung 11.7).

11.6 GeoGebra Applets und JavaScript

Mit GeoGebra können Konstruktionen als sogenannte *dynamische Arbeitsblätter* (vgl. S. 137) exportiert werden. Dabei handelt es sich um HTML Seiten, in die GeoGebra als Java Applet integriert wird. Diese Applets lassen sich von außen via JavaScript ansprechen. Fortgeschrittene Benutzer können so den Interaktivitätsgrad der dynamischen Arbeitsblätter erhöhen und beispielsweise Übungen erstellen, bei denen Angaben automatisch erstellt und Ergebnisse anschließend überprüft werden.

In Abbildung 11.8 ist ein Beispiel für eine interaktive Übung zur Bruchrechnung[5] zu sehen. Durch Klicken auf die Schaltfläche ‘Neue Aufgabe erzeugen’ werden neue Brüche vorgegeben, die dann mit Hilfe der Schieberegler in den beiden GeoGebra Applets dargestellt werden sollen. Ein Klick auf ‘Zeichnung prüfen’ liefert eine automatische Rückmeldung in einem Textfenster, ob die Einstellungen richtig sind. In dieser Übung kann sogar der Punktestand in einer Highscore Liste gespeichert werden.

Technisch bietet das GeoGebra Applet einige öffentliche Methoden an, die via JavaScript aus der HTML Seite heraus aufgerufen werden können. Mittels `setVisible('A',false)` wird beispielsweise ein Punkt A ausgeblendet und `evalCommand('g = Gerade[A, B]')` erzeugt eine neue Gerade g über einen Befehl für

[5] siehe http://www.realmath.de/Neues/Klasse6/bruchteil/brucherstellen.html

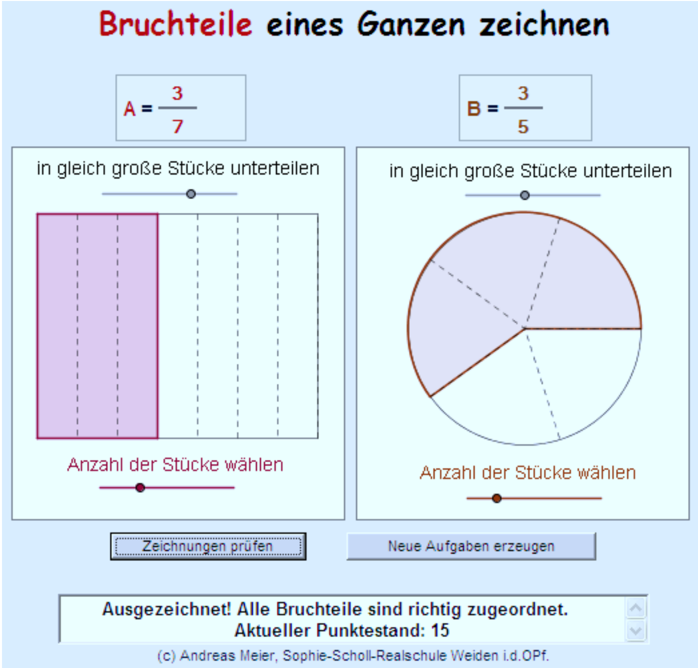


Abbildung 11.8: Interaktive Übung mittels GeoGebra und JavaScript

die Eingabezeile von GeoGebra. Alle Methoden zum JavaScript Interface für GeoGebra Applets sind im Internet dokumentiert.[6]

11.7 GeoGebra XML Format

Die Konstruktionen von GeoGebra werden in einem einfachen proprietären XML Dateiformat gespeichert. Auf diesem Format basieren übrigens auch die *Rückgängig* und *Wiederherstellen* Funktionen des Programms. Die Dokumentation zum XML Format ist ebenfalls im Internet zu finden.[7]

Die beim Speichern erzeugten Dateien von GeoGebra tragen die Dateinamenerweiterung *ggb*. Eine solche Datei ist ein im zip-Format komprimiertes Archiv, das eine XML Datei names *geogebra.xml* und alle in der Konstruktion verwendeten Bilder enthält.

[6] siehe http://www.geogebra.at/source/program/applet/geogebra_applet_javascript.html
[7] siehe http://www.geogebra.at/source/program/xml_format/

Teil IV

Evaluation

Kapitel 12

Evaluation

In diesem und den folgenden Kapiteln wird auf Rückmeldungen und Bewertungen zu GeoGebra durch Lehrer und Schüler eingegangen. Dieser Teil der Arbeit dokumentiert damit das Erreichen des 4. Zieles des Projekts:

1. Ziel: Implementierung interaktiver Unterrichtsmaterialien
2. Ziel: Weiterentwicklung der Software GeoGebra
3. Ziel: Publikation von Unterrichtsmaterialien auf e-Learning Plattformen im Internet
4. Ziel: Formative Evaluation der Software GeoGebra

Zunächst werden kurz die Ansätze der *formativen Evaluation* und des *Rapid Prototypings* vorgestellt sowie die Rolle des GeoGebra Benutzerforums erläutert.

12.1 Formative Evaluation und Rapid Prototyping

Unter *formativer Evaluation* versteht man eine Entwicklungsevaluation, die vor allem Rückmeldungen für die Verbesserung von Software oder Lernmaterialien liefern soll.

> Die formative Evaluation dient der Beurteilung und Verbesserung der konkreten Maßnahme. Insbesondere beim Einsatz von Prototyping erfolgt sie begleitend zur Entwicklung des Systems. Sie dient der Feststellung, ob das System effizient, also innerhalb des gewählten Ansatzes für den geplanten Zweck richtig gestaltet ist. Die Lösung kann dadurch schrittweise verbessert und Schwachstellen beseitigt werden. [11, S. 174]

GeoGebra wurde und wird nach dem Ansatz des *Rapid Prototyping* (vgl. [76, S. 169]) entwickelt. Dabei werden bereits Prototypen von neuen Versionen in der Praxis erprobt, um diese schrittweise verbessern zu können. Diese Methode ist eine Form der formativen Evaluation für die Softwareentwicklung. Durch ihre Anwendung reduziert sich zudem die Entwicklungszeit erheblich.

Der aktuell in Entwicklung befindliche Prototyp von GeoGebra kann jeweils als *GeoGebra Pre-Release*[1] direkt von der GeoGebra Homepage gestartet und verwendet werden. Die Rückmeldungen dazu führen zu sofortigen Fehlerkorrekturen in der Pre-Release sowie teilweise auch in der Version *GeoGebra WebStart*[2]. Sobald eine neue Version als 'stabil' eingestuft wird, erfolgt auch eine Aktualisierung der Download Version von GeoGebra[3].

12.2 GeoGebra Benutzerforum

Das *GeoGebra Benutzerforum*[4] wurde im März 2005 eröffnet und wurde von Anfang an massiv genützt. Es umfasst zwei Foren, die das Rapid Prototyping von GeoGebra unterstützen: die Bereiche *Fehlerberichte* sowie *Anregungen und Wünsche* .

Vor allem die Fehlerberichte im Forum ermöglichen ein schnelles Reagieren auf gefundene Probleme in der Software. Außerdem lässt sich durch die demokratische Struktur des Benutzerforums auch erheben, unter welchen Bedingungen ein Problem auftritt und ob andere Benutzer vielleicht schon einen Workaround gefunden haben.

Das Forum *Anregungen und Wünsche* ermöglicht es, die Anliegen der Benutzer nach der Häufigkeit ihrer Nennung zu gewichten. Es können auch kleine Umfragen zu bestimmten Wünschen durchgeführt werden, um eine Entscheidung zwischen sich möglicherweise widersprechenden Anregungen treffen zu können.

Insgesamt hat sich das Benutzerforum als fruchtbare Quelle für die Verbesserung und Weiterentwicklung von GeoGebra erwiesen. Sehr wichtig für den Erfolg des Benutzerforums ist aber seine kontinuierliche Betreuung. Nur wenn Fragen und Beiträge innerhalb weniger Stunden oder Tage beantwortet werden, ist es für Benutzer interessant, sich aktiv an den Diskussionen der Foren zu beteiligen. Während ich anfangs praktisch alle Anfragen selbst beantworten musste, beteiligen sich inzwischen (November 2005) auch zahlreiche andere Benutzer aktiv an der Beantwortung von Fragen und Beiträgen.

Um die Art und Weise der Rückmeldungen weiter zu professionalisieren, ist geplant, die beiden Rückmeldungsforen in Zukunft im Rahmen eines Sourceforge[5] Projektes zu betreiben. Dabei werden sogenannte *Tracker* für *Bugs* (Fehlerberichte) und *Feature Requests* (Anregungen und Wünsche) die Verwaltung und Strukturierung der Rückmeldungen vereinfachen.

[1] vgl. http://www.geogebra.at unter 'Zukunft'
[2] vgl. http://www.geogebra.at unter 'WebStart'
[3] vgl. http://www.geogebra.at unter 'Download'
[4] vgl. http://www.geogebra.at/forum, S. 124
[5] http://sourceforge.net

Kapitel 13

Fragebögen für Lehrer und Schüler

Am Ende des Schuljahres 2004/2005 wurde im Rahmen der formativen Evaluation dieses Dissertationsprojekts eine Befragung von Lehrern und Schülern zu GeoGebra durchgeführt. Dazu wurden Fragebögen über die GeoGebra Homepage online und anonym zur Verfügung gestellt. Zunächst werden die dabei verwendeten Fragebögen vorgestellt. Die Ergebnisse ihrer Auswertung sind in den folgenden Kapiteln zu finden.

Die Fragebögen wurden von Juni bis Juli 2005 über die Homepage von GeoGebra freigeschaltet. Die gesammelten Rückmeldungen beziehen sich damit auf den Stand am Ende des Schuljahres 2004/2005. Da GeoGebra ein relativ junges Projekt ist, war dieses Schuljahr für viele Lehrer das erste, in dem sie die Software in ihrem Unterricht eingesetzt haben. Zudem wurden sowohl das Benutzerforum (seit März 2005) und der Materialienpool GeoGebraWiki (seit Mai 2005) erst kurz vor Durchführung der Fragebogenuntersuchung gestartet. Die in den nachfolgenden Kapiteln vorgestellten Ergebnisse sind daher als ein erster Erfahrungsbericht zu sehen, dem in Zukunft weitere Untersuchungen zum Einsatz von GeoGebra im Unterricht folgen sollten. Nachdem die GeoGebra Homepage inzwischen mehr als 50000 Besucher pro Monat zählt (Stand November 2005), erscheint mir auch in Zukunft die Durchführung weiterer online Befragungen sinnvoll.

Für die Befragung wurden insgesamt vier verschiedene Fragebögen eingesetzt, jeweils ein Fragebogen für Lehrer und Schüler in deutscher und englischer Sprache. Die englischsprachigen Fragebögen stellen eine direkte Übersetzung ihrer deutschsprachigen Pendants dar, wobei einzelne Fragen weggelassen wurden (z.B. Schultyp und Bundesland in Österreich). Im Folgenden sind daher nur die Fragen der beiden deutschsprachigen Fragebögen abgedruckt.

13.1 Fragebogen für Lehrer

Der Lehrerfragebogen umfasst insgesamt 42 Fragen, die in vier Bereiche gegliedert sind:

1. Fragen zur Person
2. Fragen zu GeoGebra
3. GeoGebra im Unterricht
4. Bewertung von GeoGebra

Im Folgenden werden alle Fragen aufgelistet. Die Antwortmöglichkeiten werden jeweils nach einem Doppelpunkt angeführt. Bei einer Einfachauswahl kann aus einer Liste nur ein Eintrage gewählt werden, bei einer Mehrfachauswahl können es dagegen beliebig viele sein.

13.1.1 L1 Fragen zur Person

L1.1 Geschlecht: Einfachauswahl aus weiblich, männlich

L1.2 Alter: natürliche Zahl in Jahren

L1.3 Dienstjahre: natürliche Zahl in Jahren

L1.4 Land: Einfachauswahl aus einer Liste aller Staaten der Erde

L1.5 Bundesland (nur für Österreich): Einfachauswahl aus einer Liste der österr. Bundesländer

L1.6 Schultyp: Mehrfachauswahl aus folgender Liste: Volksschule/Grundschule, Hauptschule, AHS (Gymnasium, allgemeinbildende höhere Schule, mit Matura/Abitur), BHS (Berufsbildende höhere Schule, mit Matura/Abitur), BMS (Fachschule, berufsbildende Mittelschule, ohne Matura/Abitur), Gesamtschule (mit Matura/Abitur), Realschule (ohne Matura/Abitur), Polytechnische Schule, Berufsschule, Pädagogische Akademie, Fachhochschule, Universität, Erwachsenenbildung, Sonstige

L1.7 Fächer, die Sie unterrichten: Mehrfachauswahl aus folgender Liste: Mathematik, Informatik, Darstellende Geometrie, Geometrisches Zeichnen, Sonstige

13.1.2 L2 Fragen zu GeoGebra

L2.1 Woher kennen Sie GeoGebra? : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: Internet, Empfehlung, Fortbildung/Seminar, Zeitschrift, Sonstige

L2.2 Wie lange kennen Sie GeoGebra schon? : nichtnegative ganze Zahl in Monaten

L2.3 GeoGebra ist auf meinem privaten Comptuer verfügbar . . . : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: als lokal installiertes Programm, als GeoGebra WebStart

L2.4 Ich habe bereits Unterrichtsmaterialien zu GeoGebra aus dem Internet verwendet von . . . : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: GeoGebra Homepage, GeoGebraWiki (deutschsprachig), GeoGebraWiki International (andere Sprachen), Lehrer-Online, Intel 'Lehren für die Zukfunt' Plattform, Sonstige

L2.5 Wie gut schätzen Sie Ihre Bedienungskompetenz von Computern ein? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr gut, gut, mittel, gering, sehr gering

L2.6 Wie gut schätzen Sie Ihre Bedienungskompetenz von GeoGebra ein? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr gut, gut, mittel, gering, sehr gering

L2.7 Haben Sie das GeoGebra Benutzerforum schon verwendet? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, Beiträge gelesen und geschrieben; ja, Beiträge gelesen; nein

L2.8 Halten Sie das GeoGebra Benutzerforum für hilfreich? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr hilfreich, hilfreich, wenig hilfreich, nicht hilfreich, weiß nicht

L2.9 Wie beurteilen Sie die Dokumentation von GeoGebra (GeoGebra Quickstart, GeoGebra Hilfe, . . .)? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr gut, ausreichend, wenig ausreichend, nicht ausreichend, weiß nicht

L2.10 Haben Sie den Materialienpool GeoGebraWiki schon verwendet? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, Beiträge gelesen und geschrieben; ja, Beiträge gelesen; nein

L2.11 Halten Sie das GeoGebraWiki für hilfreich? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr hilfreich, hilfreich, wenig hilfreich, nicht hilfreich, weiß nicht

13.1.3 L3 GeoGebra im Unterricht

L3.1 Wie häufig verwenden Sie GeoGebra für Ihre Unterrichtsvorbereitung? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr oft, oft, gelegentlich, kaum, nie

L3.2 Ich setze GeoGebra in meiner Unterrichtsvorbereitung ein für . . . : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: meine eigenen Überlegungen bei der Unterrichtsvorbereitung, die Erstellung von Konstruktionen (.ggb Dateien), die Erstellung von Bildern (Schreenshots, .png oder .eps Dateien), die Erstellung dynamischer Arbeitsblätter (.html Dateien), Sonstige

L3.3 Wie oft stehen Ihnen und Ihren SchülerInnen in der Schule Computer für den Unterricht zur Verfügung? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr oft, oft, gelegentlich, kaum, nie

L3.4 In welcher Form steht Ihnen und Ihren SchülerInnen GeoGebra in der Schule zur Verfügung? : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: als lokal installiertes Programm, als GeoGebra WebStart

L3.5 Wie häufig setzen Sie GeoGebra oder damit erstellte Materialien in Ihrem Unterricht ein? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr oft, oft, gelegentlich, kaum, nie

L3.6 In welchen Schulstufen haben Sie GeoGebra bereits in Ihrem Unterricht eingesetzt? : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: Volksschule/Grundschule, 5. Schulstufe, 6. Schulstufe, 7. Schulstufe, 8. Schulstufe, 9. Schulstufe, 10. Schulstufe, 11. Schulstufe, 12. Schulstufe, 13. Schulstufe, Universität/Fachhochschule/Akademie, Erwachsenenbildung

L3.7 Bei welchen Themen haben Sie GeoGebra im Unterricht eingesetzt? : offene Frage mit großem Textfeld zur Beantwortung

L3.8 In welcher Form haben Sie GeoGebra bereits in Ihrem Unterricht eingesetzt? : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: SchülerInnen arbeiten selbstständig mit GeoGebra, dynamische Arbeitsblätter (.html Dateien) für meine SchülerInnen, (teilweise) vorgefertige Konstruktionen (.ggb Dateien) für meine SchülerInnen, andere mit GeoGebra erstellte Materialien (z.B. Overhead Folien, Arbeitsblätter, . . .), Vortrag der Lehrperson mit Computer und Projektor, Sonstige

L3.9 Verwenden Ihre SchülerInnen GeoGebra zu Hause? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, nein, weiß nicht

L3.10 Haben Sie bereits Hausübungen (Deutschland: Schularbeiten) mit GeoGebra gegeben? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, nein

L3.11 Haben Sie bereits Schularbeiten (Deutschland: Klassenarbeiten) mit GeoGebra gegeben? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, nein

13.1.4 L4 Bewertung von GeoGebra

Die Fragen L4.1 bis L4.12 haben alle dieselben Antwortmöglichkeiten mit Einfachauswahl: stimme völlig zu, stimme eher zu, stimme eher nicht zu, stimme nicht zu, weiß nicht.

L4.1 GeoGebra ist für meine SchülerInnen einfach zu bedienen.

L4.2 Der Einsatz von GeoGebra hat das Interesse meiner SchülerInnen am Unterricht gesteigert.

L4.3 Mit GeoGebra haben meine SchülerInnen die Unterrichtsinhalte besser verstanden.

L4.4 Mit GeoGebra konnten meine SchülerInnen selbstständig mathematische Zusammenhänge entdecken.

L4.5 Mit den Arbeitsergebnissen der einzelnen SchülerInnen bin ich zufrieden.

L4.6 Die Arbeit mit GeoGebra hat den SchülerInnen Spaß gemacht.

L4.7 GeoGebra ist gut für den Einsatz in meinem Unterricht geeignet.

L4.8 Die Bedienung von GeoGebra war für mich einfach zu erlernen.

L4.9 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich.

L4.10 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist ansprechend.

L4.11 Ich möchte GeoGebra in Zukunft weiterhin für meinen Unterricht verwenden.

L4.12 Ich bin an einer Weiterentwicklung von GeoGebra interessiert.

L4.13 Was ich sonst noch zu GeoGebra sagen möchte. : offene Frage mit großem Textfeld

13.2 Fragebogen für Schüler

Der Schülerfragebogen umfasst 25 Fragen, die in vier Bereiche gegliedert sind:

1. Fragen zur Person

2. Fragen zu GeoGebra

3. GeoGebra im Unterricht

4. Bewertung von GeoGebra

Im Folgenden finden sich die Fragestellungen an die Schüler. Wie beim Lehrerfragebogen sind die Antwortmöglichkeiten jeweils nach einem Doppelpunkt angeführt.

13.2.1 S1 Fragen zur Person

S1.1 Geschlecht: Einfachauswahl aus weiblich, männlich

S1.2 Alter: natürliche Zahl in Jahren

S1.3 Schultyp: Mehrfachauswahl aus folgender Liste: Volksschule/Grundschule, Hauptschule, AHS (Gymnasium, allgemeinbildende höhere Schule, mit Matura/Abitur), BHS (Berufsbildende höhere Schule, mit Matura/Abitur), BMS (Fachschule, berufsbildende Mittelschule, ohne Matura/Abitur), Gesamtschule (mit Matura/Abitur), Realschule (ohne Matura/Abitur), Polytechnische Schule, Berufsschule, Pädagogische Akademie, Fachhochschule, Universität, Erwachsenenbildung, Sonstige

S1.4 Schulstufe: Einfachauswahl aus folgender Liste: Volksschule/Grundschule, 5. Schulstufe, 6. Schulstufe, 7. Schulstufe, 8. Schulstufe, 9. Schulstufe, 10. Schulstufe, 11. Schulstufe, 12. Schulstufe, 13. Schulstufe, Universität/Fachhochschule/Akademie, Erwachsenenbildung

S1.5 Land: Einfachauswahl aus einer Liste aller Staaten der Erde

S1.6 Bundesland (nur für Österreich): Einfachauswahl aus einer Liste der österr. Bundesländer

S1.7 Wie gern magst du das Fach Mathematik? : Einfachauswahl aus der folgenden Liste: sehr gern, gern, mittel, weniger gern, nicht gern

13.2.2 S2 Fragen zu GeoGebra

S2.1 Wie lange kennst du GeoGebra schon? : nichtnegative ganze Zahl in Monaten

S2.2 Wie gut kennst du dich mit der Bedienung von Computern aus? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr gut, gut, mittel, wenig, sehr wenig

S2.3 Wie gut kennst du dich mit der Bedienung von GeoGebra aus? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr gut, gut, mittel, wenig, sehr wenig

13.2.3 S3 GeoGebra im Unterricht

S3.1 Wie häufig arbeitest du im Unterricht mit GeoGebra? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr oft, oft, gelegentlich, kaum, nie

S3.2 Wie oft verwendest du GeoGebra zu Hause? : Einfachauswahl aus folgender Liste: sehr oft, oft, gelegentlich, kaum, nie

S3.3 In welcher Form hast du GeoGebra im Unterricht schon verwendet? : Mehrfachauswahl aus folgender Liste: selbstständiges Arbeiten mit GeoGebra, dynamische Arbeitsblätter (interaktive Webseiten, .html Dateien), (teilweise) vorgefertige Konstruktionen (.ggb Dateien) von meiner Lehrerin / meinem Lehrer, andere mit GeoGebra erstellte Materialien (z.B. Arbeitsblätter auf Papier), Sonstige

S3.4 Hast du GeoGebra bereits bei Schularbeiten (Deutschland: Klassenarbeiten) oder Prüfungen verwenden können? : Einfachauswahl aus folgender Liste: ja, nein

13.2.4 S4 Bewertung von GeoGebra

Die Fragen L4.1 bis L4.8 haben alle dieselben Antwortmöglichkeiten mit Einfachauswahl: stimme völlig zu, stimme eher zu, stimme eher nicht zu, stimme nicht zu, weiß nicht.

S4.1 GeoGebra ist einfach zu bedienen.

S4.2 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich.

S4.3 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra gefällt mir.

S4.4 Der Einsatz von GeoGebra hat den Unterricht interessanter gemacht.

S4.5 Mit GeoGebra verstehe ich Mathe besser.

S4.6 Mit GeoGebra konnte ich selbst mathematische Zusammenhänge entdecken.

S4.7 Der Unterricht mit GeoGebra macht mir Spaß.

S4.8 Ich möchte auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten.

S4.9 Was gefällt dir an der Arbeit mit GeoGebra? : offene Frage mit großem Textfeld

S4.10 Was gefällt dir nicht an der Arbeit mit GeoGebra? : offene Frage mit großem Textfeld

S4.11 Was ich sonst noch zu GeoGebra sagen möchte. : offene Frage mit großem Textfeld

Kapitel 14

Ergebnisse der Lehrerbefragung

In diesem Kapitel wird auf die Rückmeldungen der Lehrer im Zuge der Fragebogenuntersuchung eingegangen.

Insgesamt 202 Lehrer haben den Fragebogen ausgefüllt, davon 137 die deutschsprachige und 65 die englischsprachige Version. Es werden im Folgenden ausgewählte Ergebnisse vorgestellt, wobei in Klammern auf die entsprechende Frage im Lehrerfragebogen, z.B. (L3.2), verwiesen wird. Die Standardabweichung wird jeweils mit σ bezeichnet.

14.1 L1 Fragen zur Person

Die beteiligten Lehrer sind zu 20% weiblich und zu 80% männlich (L1.1). Ihr Durchschnittsalter beträgt 44 Jahre ($\sigma = 10$, L1.2) und sie sind im Schnitt seit 19 Jahren im Schuldienst ($\sigma = 11$, L1.3). Die Lehrer kommen zu 36% aus Deutschland, zu 27% aus Österreich, zu 16% aus Frankreich und zu 5% aus der Schweiz (L1.4). Dass auch Lehrer aus Dänemark, Kroatien, Belgien, Spanien, Mexiko, Luxemburg, Canada, den USA, Türkei, Marokko, Jordanien, Dominikanische Republik und Chile Rückmeldungen gegeben haben, zeugt von der weiten Verbreitung von GeoGebra auf der ganzen Welt.

Der Großteil dieser Lehrer ist an Schulen mit Matura/Abitur zu finden (83%), während im Bereich der Haupt- und Realschulen (13%) noch großes Potential für einen verbreiteteren Einsatz von GeoGebra besteht (L1.6). Dieses Ergebnis ist wohl vor allem dadurch zu erklären, dass fast alle bisherigen Lehrerfortbildungen auf den Gymnasialbereich abzielten. Neben Mathematik (L1.7) unterrichten viele der deutschprachigen GeoGebra Benutzer auch Informatik (51%), Physik (32%) und Geometrisches Zeichnen bzw. Darstellende Geometrie (24%).

14.2 L2 Fragen zu GeoGebra

Die meisten Lehrer kennen GeoGebra (L2.1) aus dem Internet (65%). Sehr erfreulich ist hier auch der hohe Anteil an Empfehlungen mit 29%. Dahinter folgen Fortbildungen (27%) und deutlich abgeschlagen Publikationen in didaktischen Zeitschriften (4%). Durchschnittlich kennen die Lehrer GeoGebra seit 10 Monaten ($\sigma = 8$), was auch zeigt, wie jung dieses Projekt noch ist (L2.2).

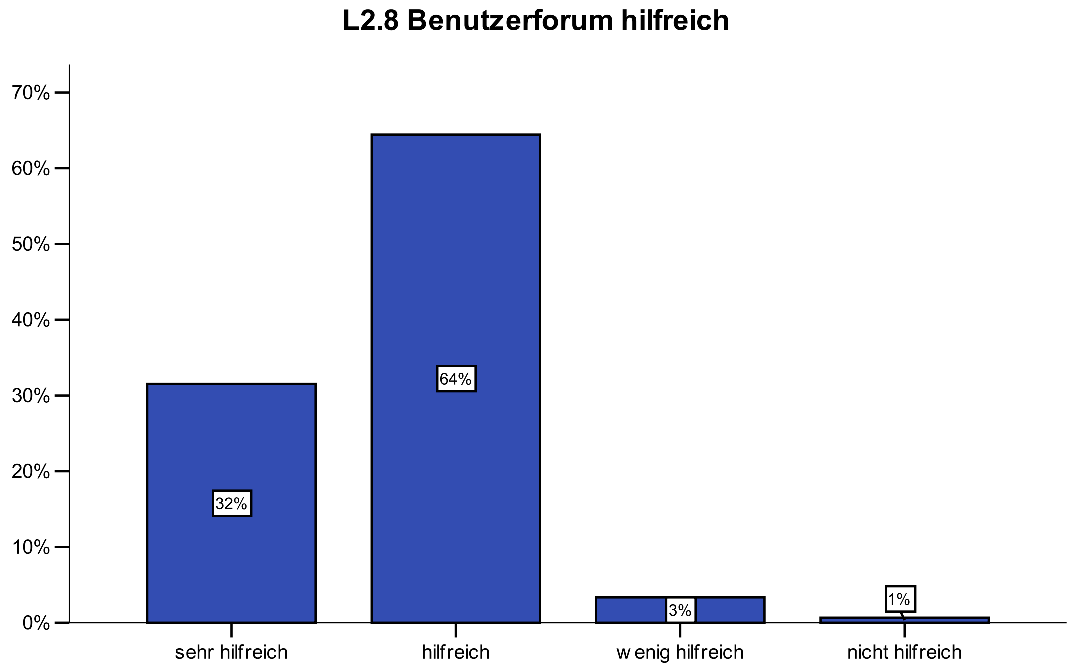
Für den privaten Computer zu Hause (L2.3) wird eine lokale Installation (86%) von GeoGebra bevorzugt. Immerhin 41% verwenden zu Hause GeoGebra WebStart, um laufend automatische Updates zu erhalten.

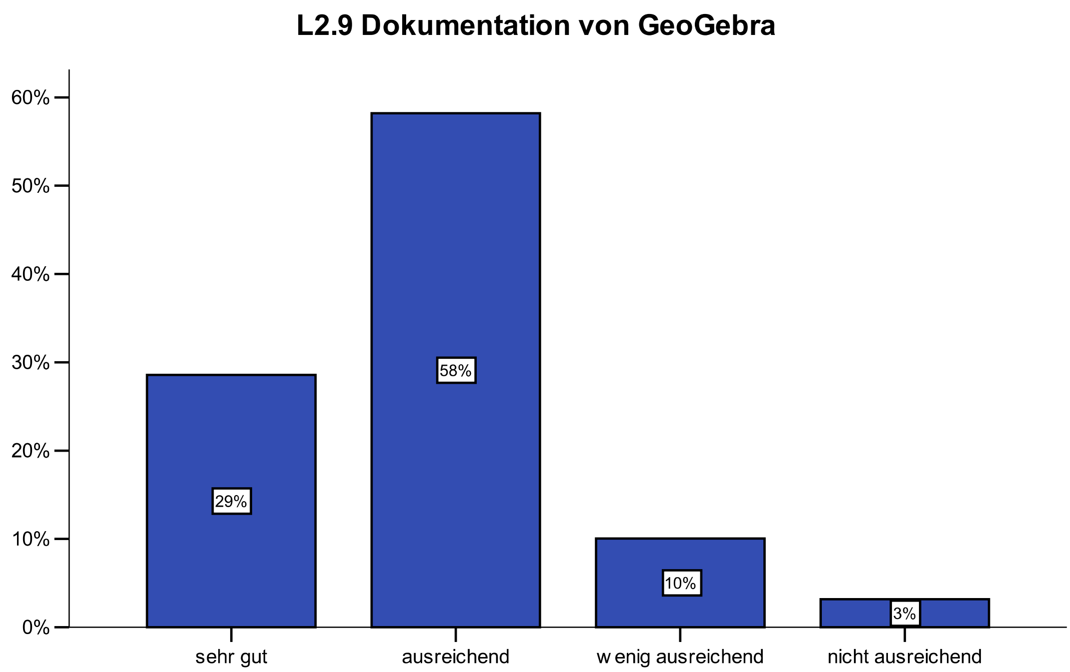
Die folgenden Ergebnisse zum Materialienpool GeoGebraWiki und zum Benutzerforum müssen insofern relativiert werden, da das GeoGebraWiki erst ein Monat und das Benutzerforum erst zwei Monate vor Beginn der Fragebogenuntersuchung gestartet hatten. Daher konnten beide Plattformen noch nicht so bekannt sein wie etwa die Unterrichtsbeispiele auf der GeoGebra Homepage selbst. Die Bewertung der beiden neuen Bereiche ist aber natürlich sehr interessant.

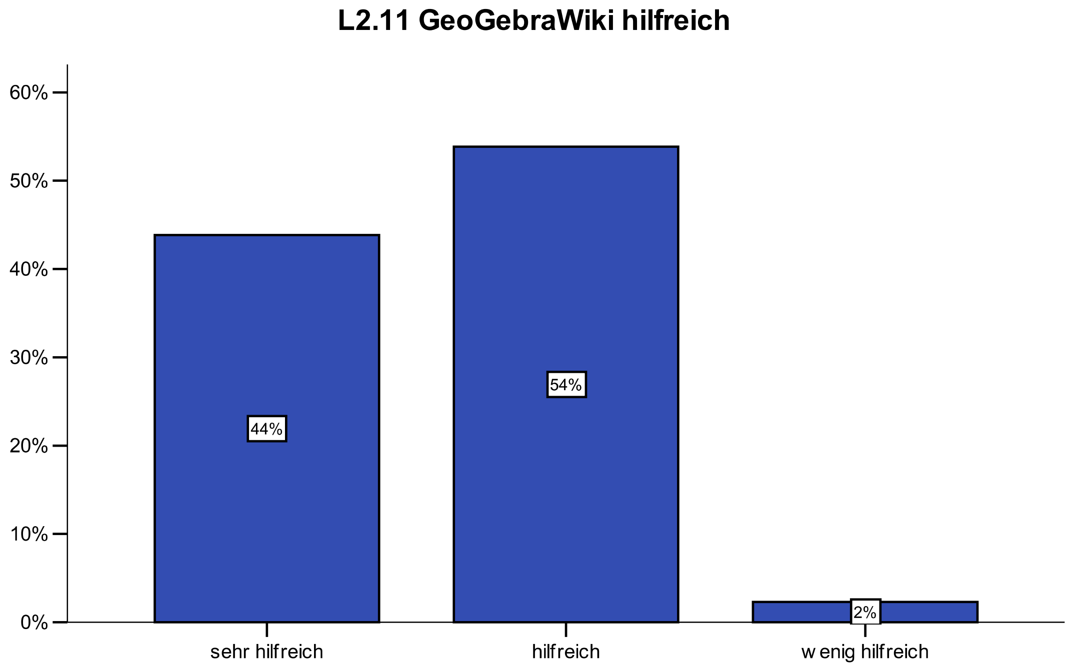
Bei der Verwendung von Unterrichtsmaterialien zu GeoGebra aus dem Internet (L2.4) haben 59% bereits auf Beispiele der GeoGebra Homepage zurückgegriffen. Das erst kurz zuvor eingerichtete GeoGebraWiki wurde auch bereits von 24% der Lehrer genutzt. Unter den deutschsprachigen Lehrern kannten auch 23% die GeoGebra Unterrichtseinheiten auf Lehrer-Online und 7% die GeoGebra Lernpfade der Intel 'Lehren für die Zukunft' Plattform.

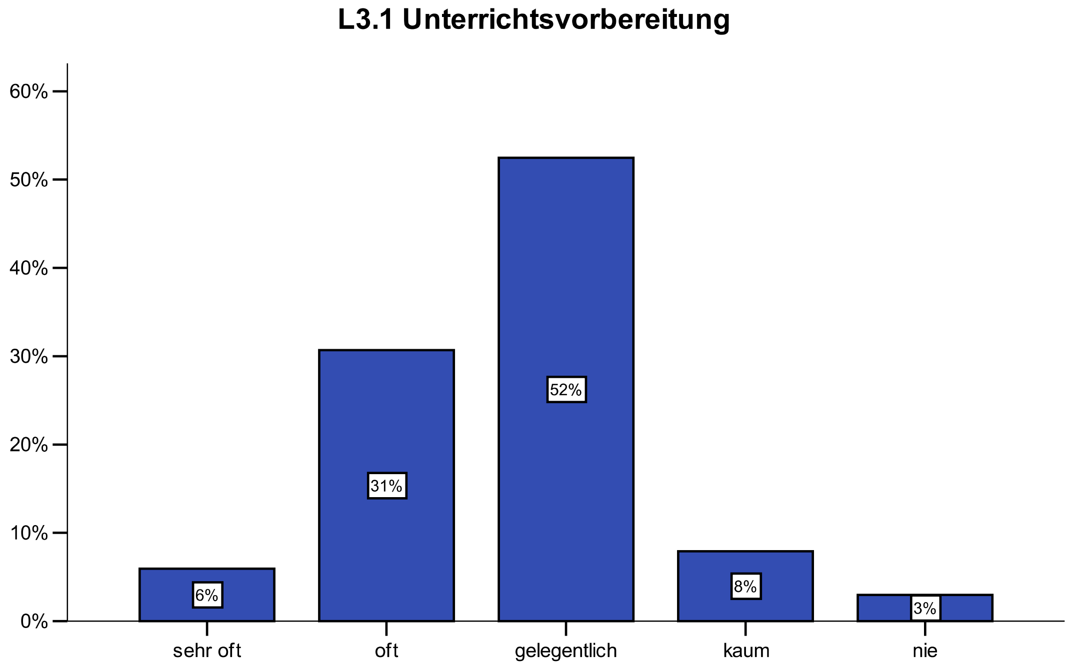
Obwohl das Benutzerforum erst kurze Zeit zur Verfügung gestanden war, hatten es schon 67% der befragten Lehrer genutzt (L2.7): 48% haben Beiträge gelesen und 19% darüber hinaus auch selbst Beiträge geschrieben. Das Ergebnis der Bewertung des Benutzerforums ist im Diagramm L2.8 zu sehen: 96% halten das Benutzerforum für eine hilfreiche Einrichtung. Die Dokumentation rund um GeoGebra halten 87% für sehr gut oder ausreichend (siehe Diagramm L2.9). Das Benutzerforum bietet hier eine Möglichkeit, um eventuelle Informationslücken zu schließen.

Der Materialienpool GeoGebraWiki war zum Zeitpunkt der Fragebogenuntersuchung gerade erst einen Monat alt, daher hatten ihn erst 52% der befragten Lehrer genutzt (L2.10): 44% haben Beiträge gelesen und 8% auch selbst Beiträge geschrieben. Die Bewertung des GeoGebraWiki könnte jedoch kaum positiver sein: 98% jener Lehrer, die das GeoGebraWiki bereits besucht haben, halten es für hilfreich (siehe Diagramm L2.11).


L2.8 Benutzerforum hilfreich
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
32%
64%
3%
1%
sehr hilfreich
hilfreich
w enig hilfreich
nicht hilfreich


L2.9 Dokumentation von GeoGebra
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
29%
58%
10%
3%
sehr gut
ausreichend
w enig ausreichend
nicht ausreichend


L2.11 GeoGebraWiki hilfreich
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
44%
54%
2%
sehr hilfreich
hilfreich
w enig hilfreich

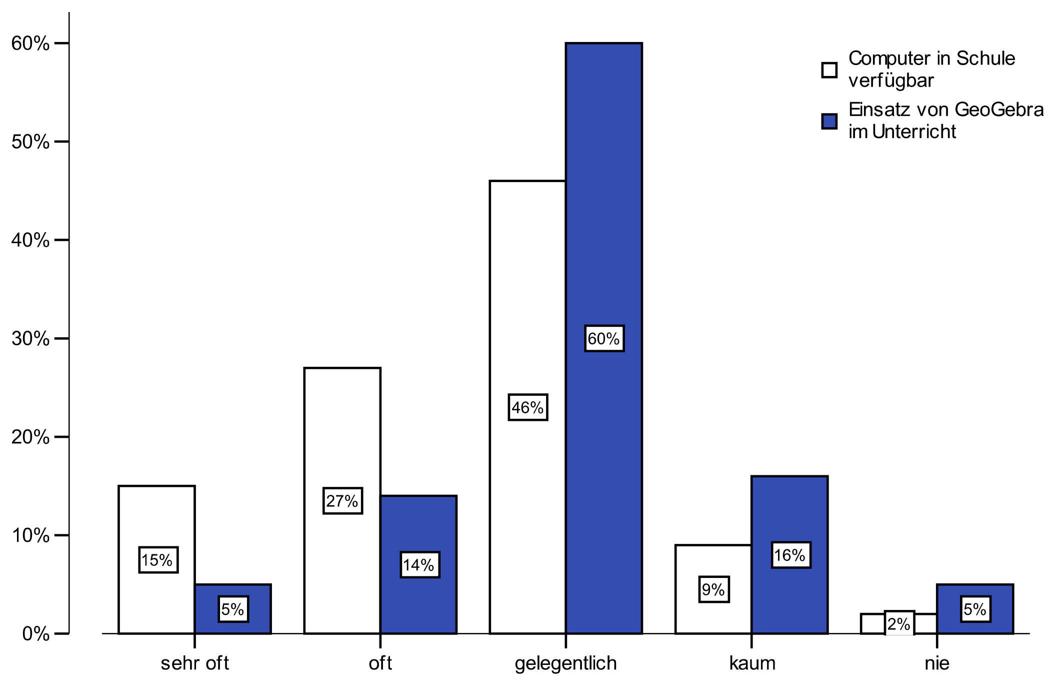

L3.1 Unterrichtsvorbereitung
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
6%
31%
52%
8%
3%
sehr oft
oft
gelegentlich
kaum
nie

14.3 L3 GeoGebra im Unterricht

GeoGebra wird von den befragten Lehrern erfreulich oft verwendet. Für ihre Unterrichtsvorbereitung setzen 89% der Lehrer die Software zumindest gelegentlich ein (siehe Diagramm L3.1). Dabei erstellen 76% dynamische Konstruktionen (L3.2), 61% statische Abbildungen und 45% dynamische Arbeitsblätter. Viele Lehrer verwenden das Werkzeug auch für ihre eigenen Überlegungen (59%).

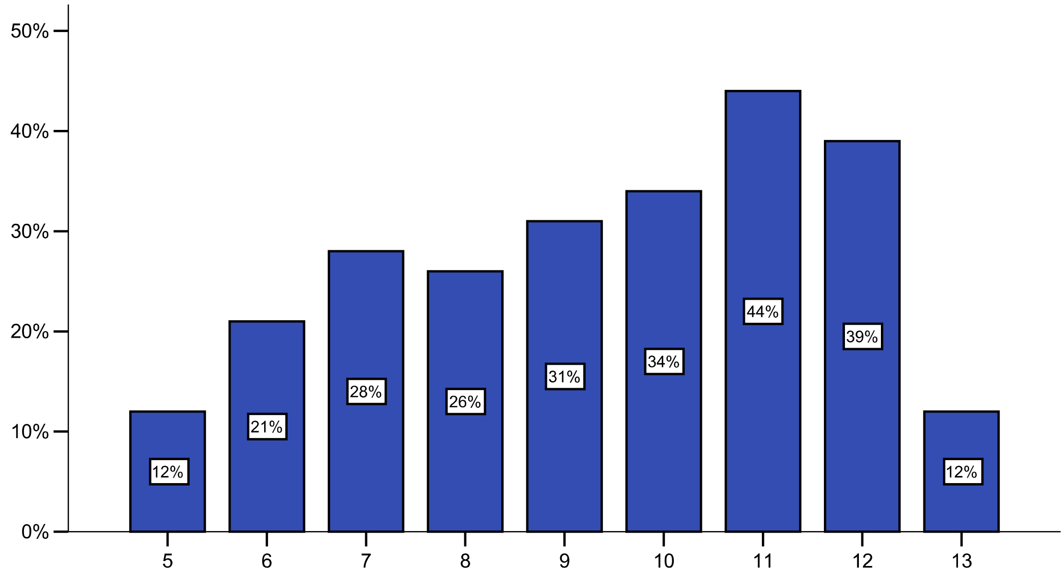
Bei der Frage nach dem Einsatz von GeoGebra im Unterricht selbst (L3.5) ist natürlich die Verfügbarkeit von Computern in der Schule für den Unterrichtseinsatz (L3.3) zu berücksichtigen. Daher sind in Diagramm L3.3/L3.5 beide Ergebnisse gemeinsam dargestellt: 88% der Lehrer können zumindest gelegentlich Computer in ihren Unterricht einsetzen. Immerhin 79% verwenden GeoGebra oder damit erstellte Materialien gelegentlich oder öfter im Unterricht. Der Zusammenhang zwischen der Verfügbarkeit von Computern und dem Einsatz von GeoGebra im Unterricht ist übrigens signifikant (Korrelationskoeffizient nach Spearman $\rho = 0.333$, Sig. (2-seitig): 0.01).

L3.3 Compter in Schule verfügbar / L3.5 Einsatz von GeoGebra im Unterricht



GeoGebra WebStart wird vor allem deshalb zur Verfügung gestellt, damit das Programm in Schulen ohne lokale Installation aus dem Internet gestartet werden kann. Interessanterweise steht die Software aber schon 64% der befragten Lehrer als lokal installiertes Programm zur Verfügung und nur 36% müssen in der Schule auf GeoGebra WebStart zurückgreifen (L3.4). Aufgrund dieser Zahlen erscheint es sinnvoll, vorerst beide Formen der Verteilung von GeoGebra (Download-Version und WebStart-Version) weiter zur Verfügung zu stellen.

L3.6 Einsatz von GeoGebra nach Schulstufen



In welchen Schulstufen haben Sie GeoGebra bereits in Ihrem Unterricht eingesetzt? (L3.6) Das Ergebnis der deutschsprachigen Lehrer auf diese Frage findet sich in Diagramm L3.6. Offensichtlich wird GeoGebra vor allem in höheren Klassen eingesetzt, wobei die Spitze in der 11. Schulstufe (44%) auffällt. Diese ist wahrscheinlich durch die zahlreichen Unterrichtsmaterialien aus dem Bereich der Analysis zu erklären, die im Internet veröffentlicht wurden (siehe Teil II *Unterrichtsmaterialien und Anwendungen* dieser Arbeit). In der Sekundarstufe I wird GeoGebra vorwiegend als dynamische Geometrie Software verwendet (vgl. L3.7, S. 239), was die leichte Spitze in der 7. Schulstufe erkären dürfte. Insgesamt ist es sehr erfreulich, dass GeoGebra tatsächlich in allen Jahrgängen beider Sekundarstufen eingesetzt wird.

Frage L3.7 untersuchte, bei welchen Themen GeoGebra im Unterricht eingesetzt wird. Von 137 Lehrern, die den deutschsprachigen Fragebogen ausgefüllt haben, haben 119 Rückmeldungen auf diese offene Frage gegeben. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle gemeinsam mit der Anzahl ihrer Nennungen zusammengefasst.

Themenbereich	Nennungen
Elementargeometrie	98
Funktionen und Gleichungen	75
Analysis	69
Analytische Geometrie und Vektorrechnung	51
Physik	17
Weiteres	8

Im Bereich der Elementargeometrie wurden die Themen Dreiecksgeometrie (Konstruktionen, merkwürdige Punkte) (27), elementare geometrische Konstruktionen (Kreis, Gerade, Normale, Parallele) (27), geometrische Abbildungen (7), Pythagoras (6), Körper (Würfel, Quader, Netzbilder) (5), Vierecke (5) und Winkel (Winkelsumme, Peripheriewinkelsatz) (5) genannt. Die restlichen Angaben entfielen auf die Bereiche Koordinatensystem, Kongruenz, Vielecke, Thaleskreis, Strahlensatz, Ähnlichkeit und geometrisches Beweisen. Interessant ist, dass GeoGebra als reines 2D Programm in kleinerem Umfang auch für die räumliche Geometrie eingesetzt wird (siehe 'Körper').

Unter Funktionen und Gleichungen wurden Funktionen (funktionale Zusammenhänge, Funktionsgraphen) (20), Trigonometrie (Einheitskreis, trigonometrische Funktionen) (19), quadratische Funktionen bzw. Parabel (17) und lineare Funktionen (9) subsummiert. Außerdem sind noch lineare Gleichungssysteme, Exponentialfunktion, Bewegungsaufgaben, Potenzfunktionen, Kurvenscharen und Parameteruntersuchungen angeführt worden.

Der Bereich Analysis umfasst die Themen Differentialrechnung (Ableitung, Extremwertaufgaben, Kurvendiskussion) (36) und Integralrechnung (Ober- und Untersumme) (25). Hierunter fallen auch Näherungsverfahren, Rotationskörper, Grenzwerte, Stetigkeit, Taylorreihen, Vektoranalysis sowie der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung.

Die Analytische Geometrie und Vektorrechnung umfasst Vektoren (19), Kegelschnitte (außer Kreis) (12), Koordinatengeometrie (8) und Kreis (Kreisgleichung, Kreis und Geraden) (8). Weiters sind noch Geraden (insbesondere Parameterdarstellung) genannt worden.

In der Physik wurden Wellen (Schwebung, Schwingungen), Hangabtriebskraft, schiefe Ebene, Relativitätstheorie, Bewegungslehre, Gravitation, Massenträgheitsmoment, Zeiger- und Liniendiagramme, Fadenstrahlrohr, Braunsche Röhre, Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld, Massenspektrograph, Fourieranalyse und Astronomie mit GeoGebra behandelt.

Hinter ‘Weiteres’ verbergen sich schließlich noch Ortslinien (Zykloiden), Stochastik (Normalverteilung), Finanzmathematik, lineare Optimierung und fraktale Geometrie.

Insgesamt wurde GeoGebra von den befragten deutschsprachigen Lehrern am häufigsten für folgende Themen eingesetzt:

Einzelthema	Nennungen
Differentialrechnung	36
Dreicksgeometrie	27
Elementare geometrische Konstruktionen	27
Integralrechnung	25
Funktionen	20
Trigonometrie	19
Vektoren	19
quadratische Funktionen	17
Kegelschnitte	12

Diese Ergebnisse stimmen auch gut mit dem Einsatz von GeoGebra in den verschiedenen Schulstufen überein (vgl. Diagramm L3.6): Die Differentialrechnung wird üblicherweise in der 11. Schulstufe behandelt, die Elementargeometrie hat ihren Schwerpunkt in den Schulstufen 6 bis 8. Die weiteren oft genannten Themen wie Integralrechnung, Funktionen, Trigonometrie, Vektoren und Kegelschnitte gehören alle zum Stoff ab der 9. Schulstufe und erklären somit den vermehrten Einsatz von GeoGebra in den höheren Schulstufen. Diese Analyse zeigt ganz deutlich, dass vor allem die Möglichkeiten von GeoGebra im Bereich der dynamischen Funktionen und Analysis (Funktionen, Differential- und Integralrechnung) sehr gut angenommen werden.

In Frage L3.8 wurden die deutschsprachigen Lehrer danach gefragt, in welcher Form sie GeoGebra in Ihrem Unterricht verwendet haben. Hier zeigt sich, dass der Einsatz von GeoGebra zu einem hohen Anteil an Schülertätigkeit im Unterricht führt: der Punkt ‘SchülerInnen arbeiten selbstständig mit GeoGebra’ wurde noch vor dem Lehrervortrag mit GeoGebra am öftesten genannt.

Form des Unterrichtseinsatzes	Anteil
SchülerInnen arbeiten selbstständig mit GeoGebra	62%
Vortrag der Lehrperson mit Computer und Projektor	59%
dynamische Arbeitsblätter (.html)	38%
andere mit GeoGebra erstellte Materialien	38%
vorgefertigte Konstruktionen (.ggb)	27%

Da GeoGebra kostenlos verfügbar ist, können die Schüler das Programm auch problemlos zu Hause einsetzen. Auf die Frage, ob ihre Schüler GeoGebra zu Hause verwenden (L3.9), antworteten 41% der Lehrer mit ja, 17% mit nein und 42% wussten es nicht. Nachdem nur 25% der Lehrer ihren Schülern bereits Hausübungen (Deutschland: Schularbeiten) mit GeoGebra gegeben hatten (L3.10), dürften doch einige Schüler GeoGebra freiwillig zu Hause verwenden. Die Angaben der Schüler zu dieser Frage werden im nächsten Kapitel vorgestellt (siehe S3.2, S. 252).

Bei Schularbeiten (Deutschland: Klassenarbeiten) wird GeoGebra derzeit nur von 10% der befragten Lehrer eingesetzt (L3.11).

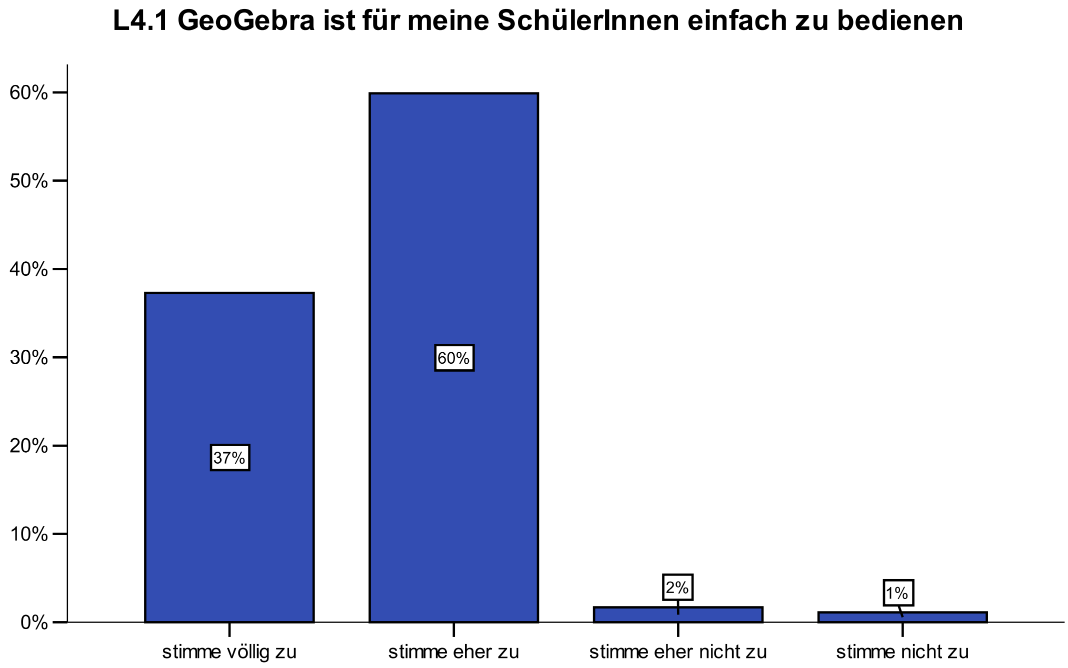
14.4 L4 Bewertung von GeoGebra

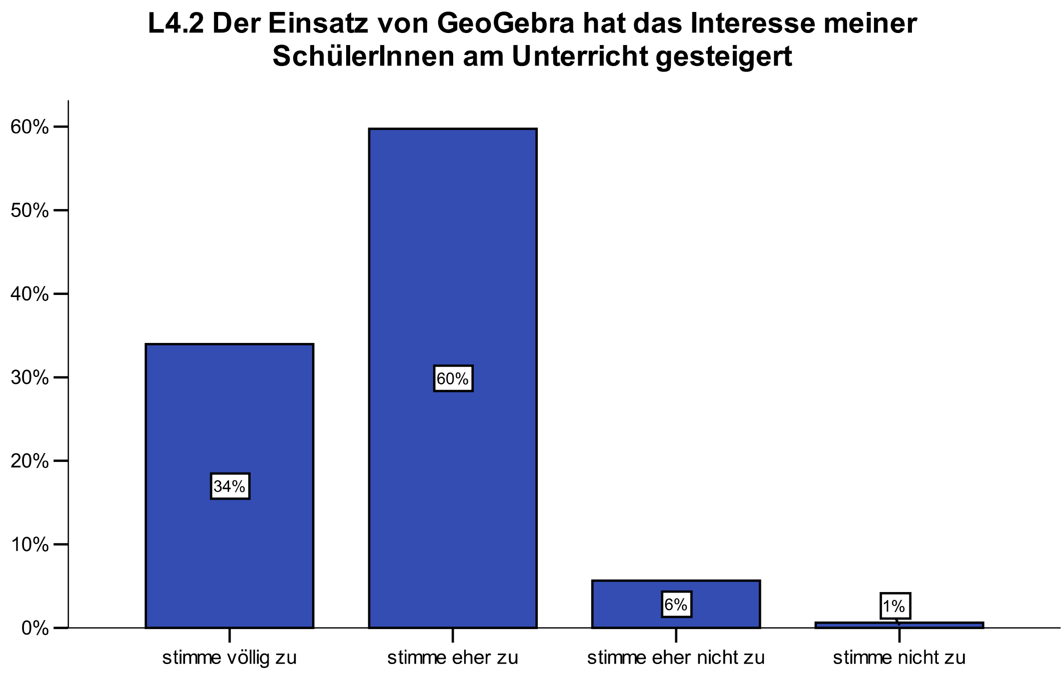
Kommen wir nun zu den Meinungen der Lehrer über GeoGebra und dessen Einsatz im Unterricht. Hierzu wurde der Grad der Zustimmung zu zwölf Aussagen mit den Abstufungen 'stimme völlig zu', 'stimme eher zu', 'stimme eher nicht zu', 'stimme nicht zu' und 'weiß nicht' erhoben. Die Antwort 'weiß nicht' wurde bei der Auswertung als fehlend eingestuft.

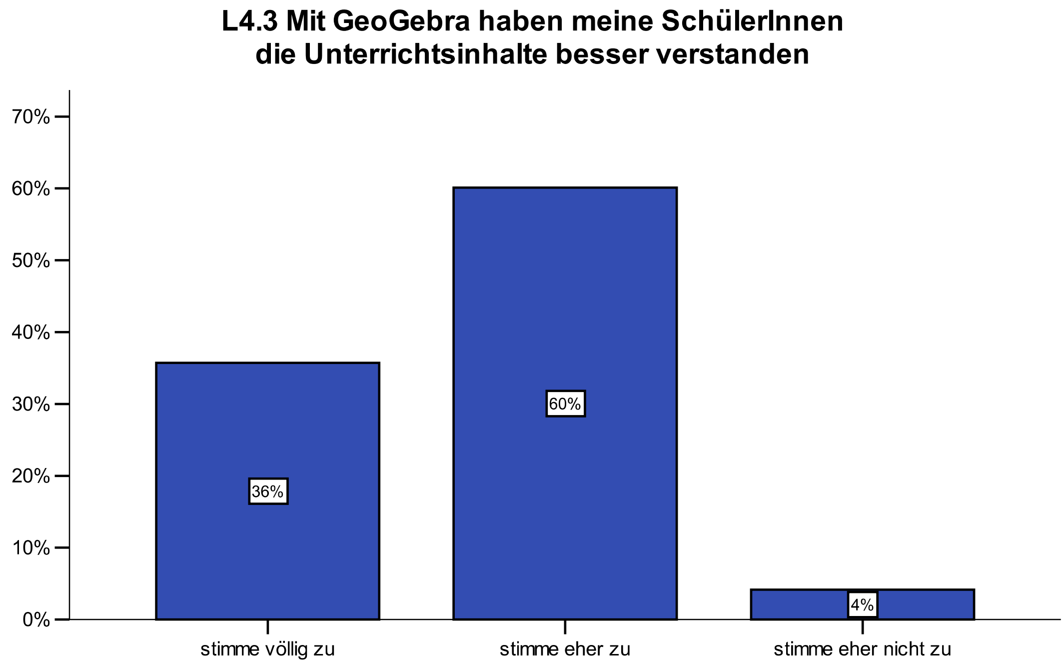
Die Aussagen L4.1 bis L4.6 beziehen sich auf die Meinung der Lehrer über Ihre Schüler in Bezug auf GeoGebra. In der folgenden Tabelle ist der Anteil der Zustimmung ('stimme völlig zu' und 'stimme eher zu') zu diesen Aussagen zusammengefasst. Details sind in den nachfolgenden Diagrammen zu finden.

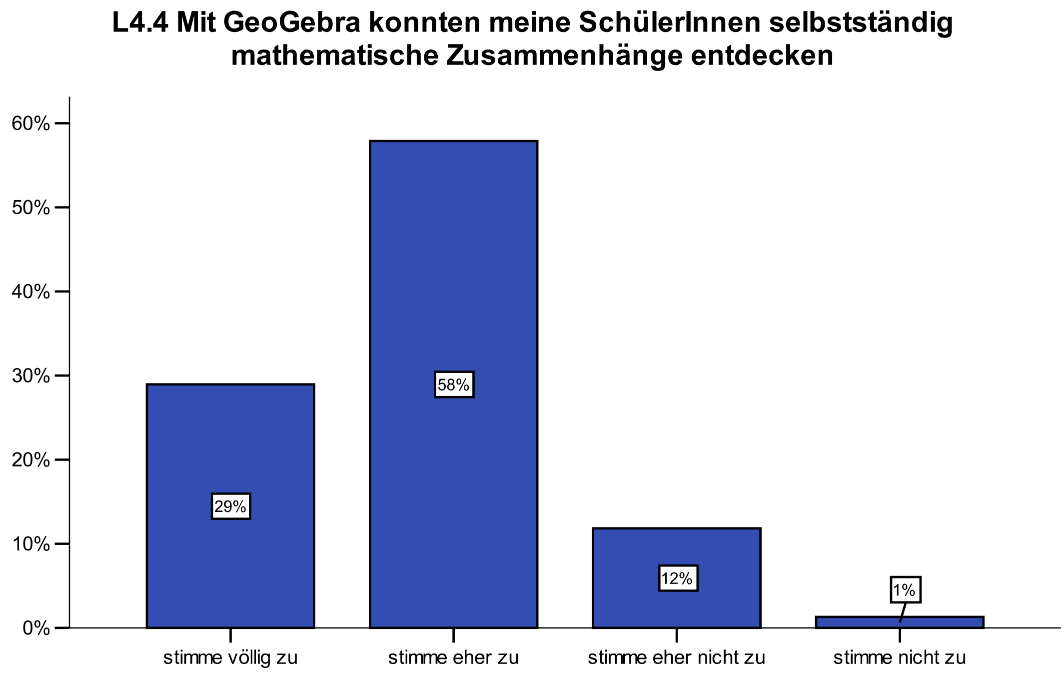
Nr.	Aussage	Zustimmung
L4.1	GeoGebra ist für meine SchülerInnen einfach zu bedienen.	97.2%
L4.2	Der Einsatz von GeoGebra hat das Interesse meiner SchülerInnen am Unterricht gesteigert.	93.7%
L4.3	Mit GeoGebra haben meine SchülerInnen die Unterrichtsinhalte besser verstanden.	95.8%
L4.4	Mit GeoGebra konnten meine SchülerInnen selbstständig mathematische Zusammenhänge entdecken.	86.8%
L4.5	Mit den Arbeitsergebnissen der einzelnen SchülerInnen bin ich zufrieden.	85.8%
L4.6	Die Arbeit mit GeoGebra hat den SchülerInnen Spaß gemacht.	97.4%

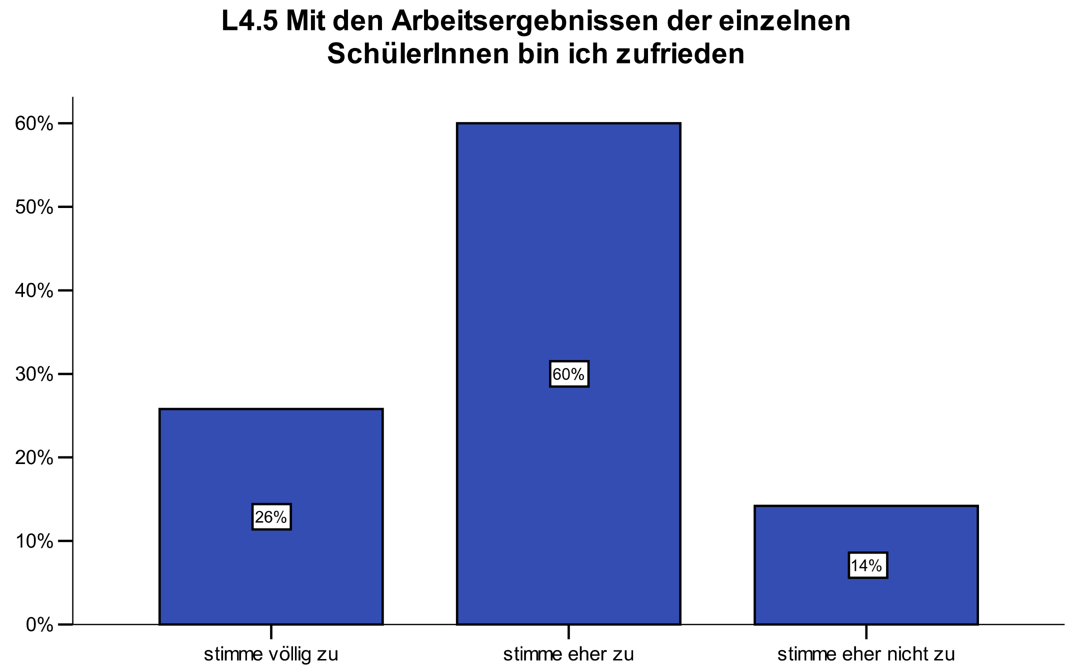
Die Erfahrungen der Lehrer mit GeoGebra in ihrem Unterricht sind offensichtlich durchwegs sehr positiv. Erfreulicherweise findet der Satz 'Die Arbeit mit GeoGebra hat den SchülerInnen Spaß gemacht.' sogar die größte Zustimmung (97%). Ob die Schüler das auch so sehen, wird im nächsten Kapitel geklärt.

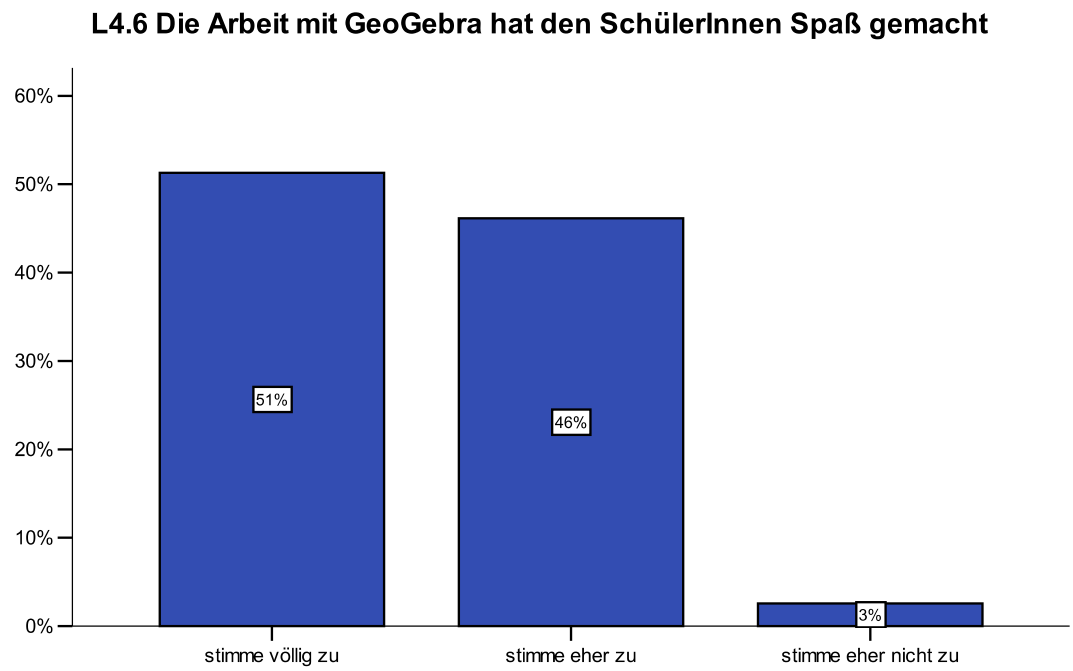

L4.1 GeoGebra ist für meine SchülerInnen einfach zu bedienen
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
37%
60%
2%
1%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


L4.2 Der Einsatz von GeoGebra hat das Interesse meiner SchülerInnen am Unterricht gesteigert
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
34%
60%
6%
1%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


L4.3 Mit GeoGebra haben meine SchülerInnen
die Unterrichtsinhalte besser verstanden
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
36%
60%
4%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu


L4.4 Mit GeoGebra konnten meine SchülerInnen selbstständig
mathematische Zusammenhänge entdecken
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
29%
58%
12%
1%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

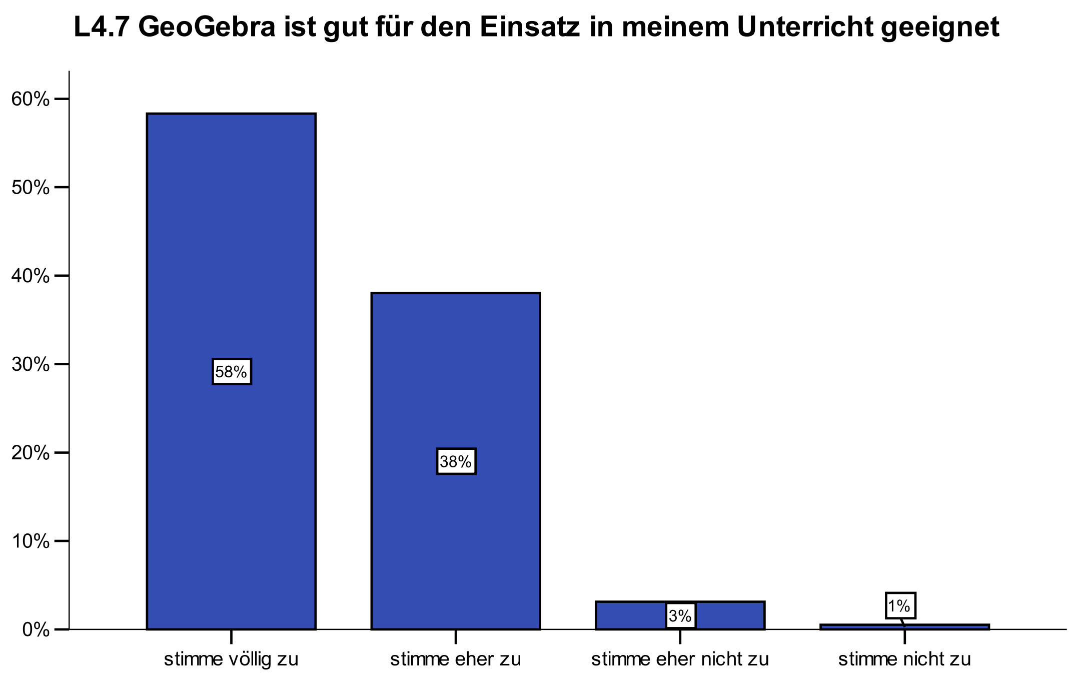

L4.5 Mit den Arbeitsergebnissen der einzelnen
SchülerInnen bin ich zufrieden
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
26%
60%
14%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu

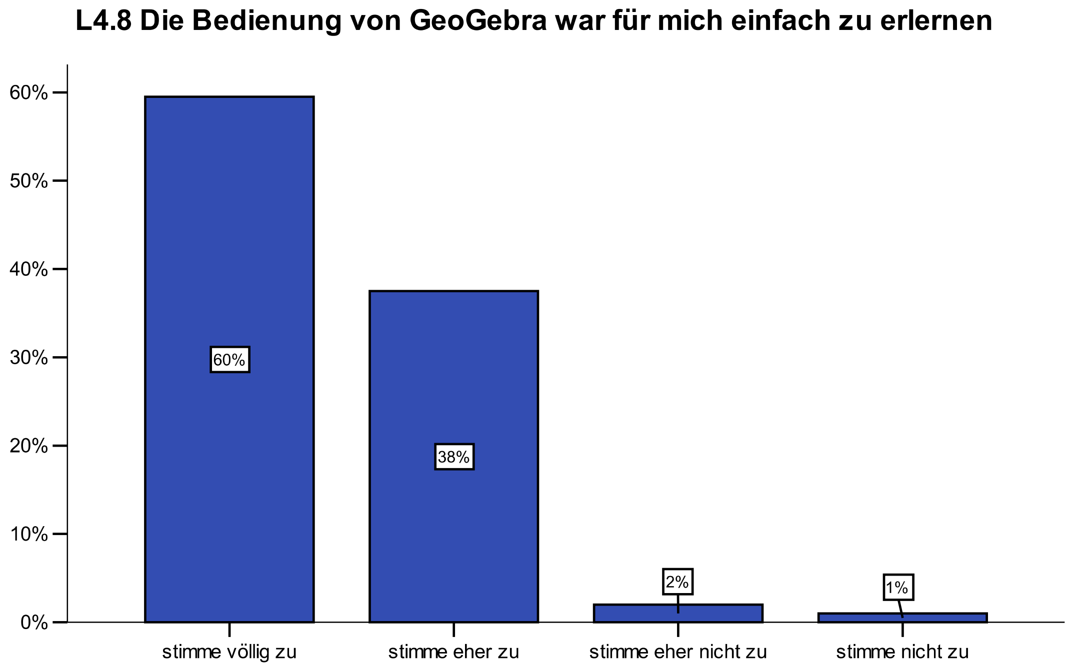

L4.6 Die Arbeit mit GeoGebra hat den SchülerInnen Spaß gemacht
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
51%
46%
3%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu

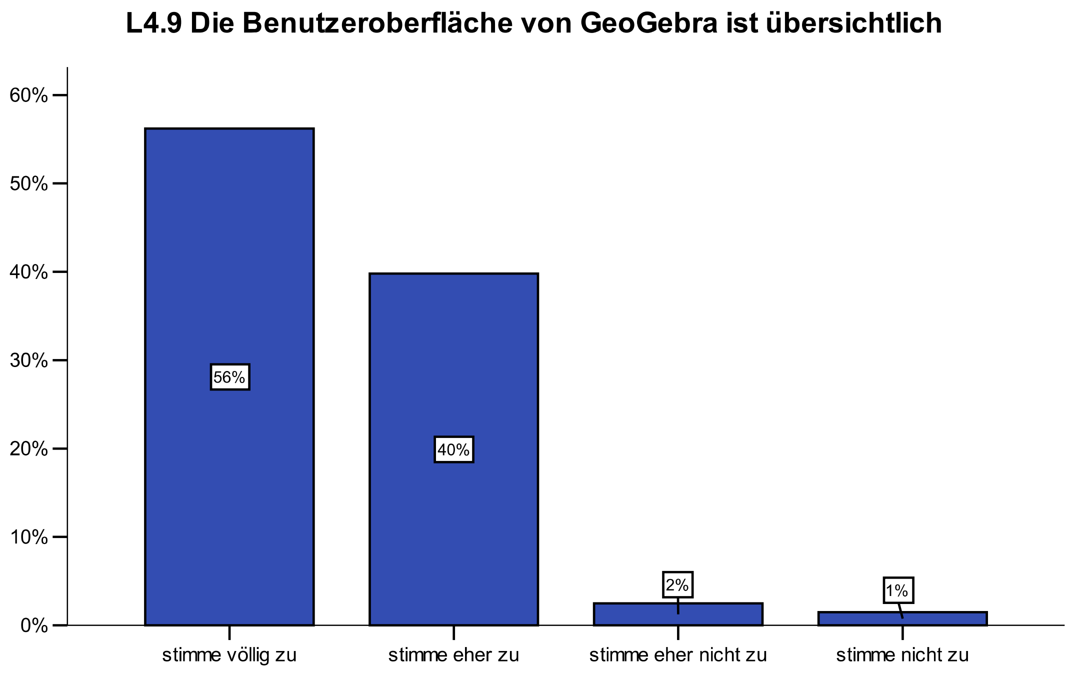
Die Aussagen L4.7 bis L4.12 beziehen sich auf die Meinung der Lehrer über GeoGebra selbst. In der folgenden Tabelle ist der Anteil der Zustimmung ('stimme völlig zu' und 'stimme eher zu') zu diesen Aussagen zusammengefasst. Details sind wieder in den nachfolgenden Diagrammen zu finden.

Nr.	Aussage	Zustimmung
L4.7	GeoGebra ist gut für den Einsatz in meinem Unterricht geeignet.	96.4%
L4.8	Die Bedienung von GeoGebra war für mich einfach zu erlernen.	97%
L4.9	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich.	96%
L4.10	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist ansprechend.	97%
L4.11	Ich möchte GeoGebra in Zukunft weiterhin für meinen Unterricht verwenden.	99%
L4.12	Ich bin an einer Weiterentwicklung von GeoGebra interessiert.	99.5%

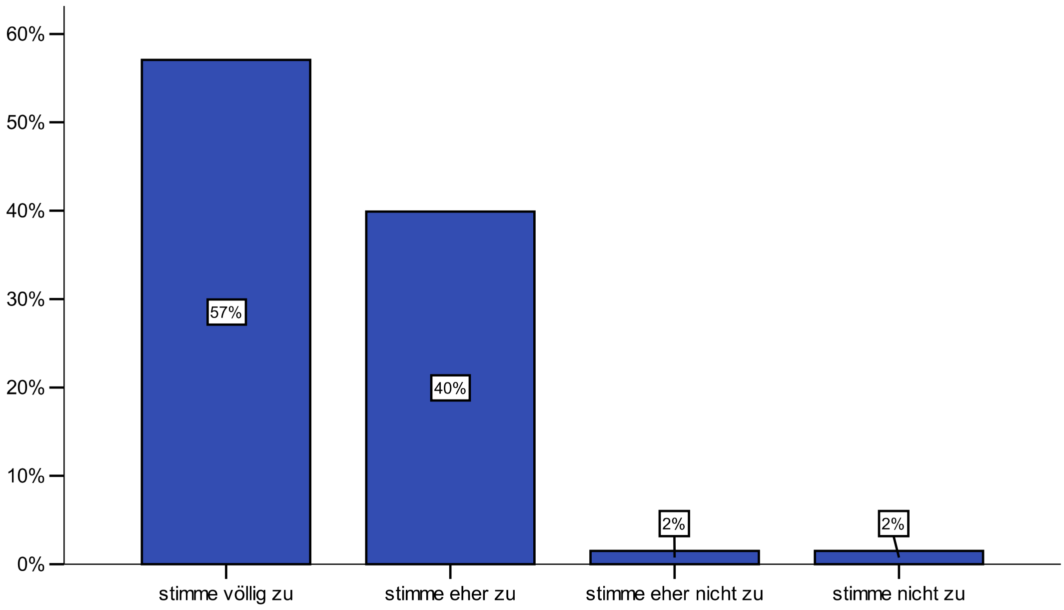
Die Meinungen der Lehrer zu GeoGebra selbst sind ebenfalls äußerst positiv. GeoGebra wird als für ihren Unterricht gut geeignetes Werkzeug gesehen, dessen Benutzeroberfläche übersichtlich und einfach zu bedienen ist. Erfreulich ist auch, dass praktisch alle befragten Lehrer auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten möchten.



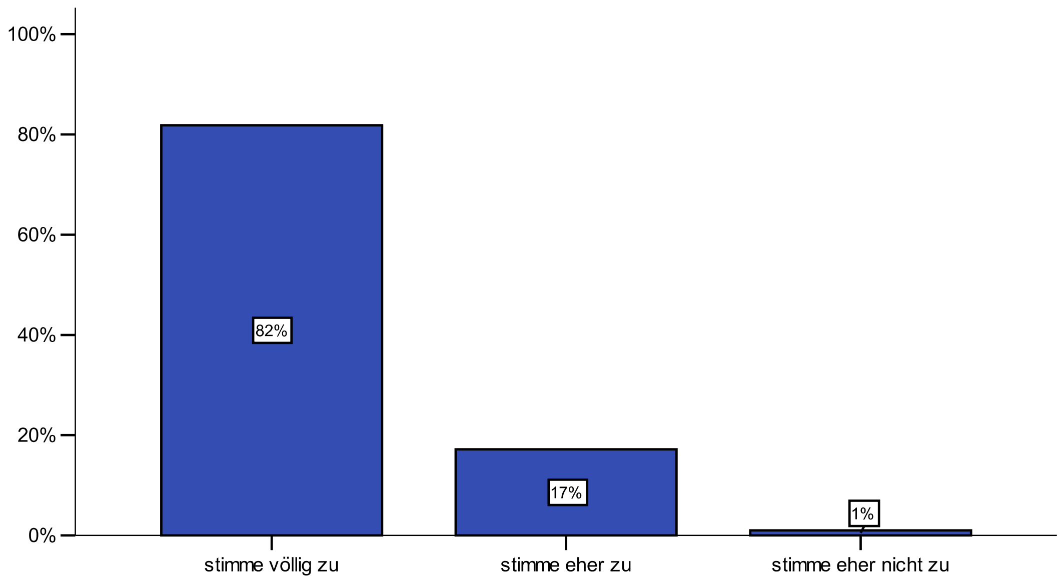

L4.8 Die Bedienung von GeoGebra war für mich einfach zu erlernen
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
60%
38%
2%
1%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

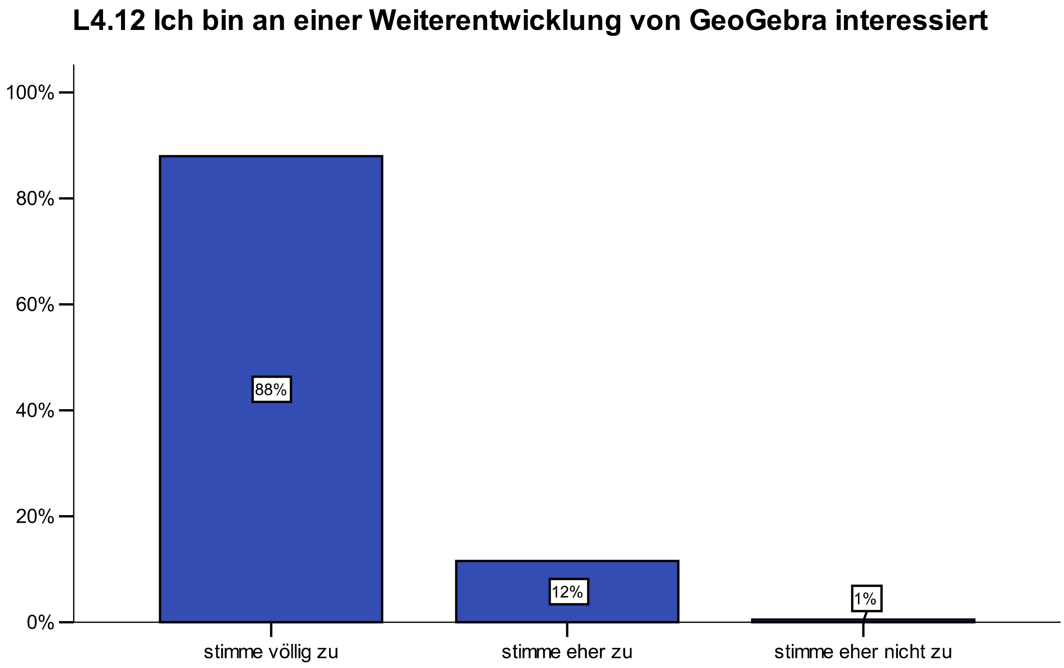

L4.9 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
56%
40%
2%
1%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

L4.10 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist ansprechend



L4.11 Ich möchte GeoGebra in Zukunft weiterhin für meinen Unterricht verwenden





14.5 Lehrerkommentare

Abschließend werden hier die Rückmeldungen der Lehrer zum letzten Punkt des Fragebogens ‘Was ich sonst noch zu GeoGebra sagen möchte’ besprochen. Von den 202 befragten Lehrern haben 102 hier einen Kommentar zu GeoGebra abgegeben.

Die bei weitem häufigste Art der Rückmeldung (39 mal) war generelles Lob, Dank oder Gratulation zu GeoGebra. Stellvertretend sei hier ein typisches Zitat angeführt:

> I find this software the best of its kind, comparing it with other ones I have used for years, like Cabri and Sketchpad. Congratulations.

Weiters wurde hervorgehoben, wie wichtig es ist, dass GeoGebra kostenlos verfügbar ist (7 mal). Einzelne positive Rückmeldungen kamen zur einfachen Bedienbarkeit und Übersichtlichkeit von GeoGebra, zum hohen Entwicklungstempo, zum Export dynamischer Arbeitsblätter und GeoGebra WebStart.

Negative Rückmeldungen gab es lediglich zwei: GeoGebra sei zu langsam bei umfangreichen Konstruktionen, und die geogebra.jar Datei (für dynamische Arbeitsblätter) sei zu groß. Beides sind technische Optimierungsfragen, die natürlich im Zuge der Weiterentwicklung von GeoGebra berücksichtigt werden.

Interessant ist folgende Anmerkung, die auch stellvertretend für andere ähnliche Anmerkungen zeigt, dass zum Zeitpunkt der Fragebogenuntersuchung viele Lehrer erst begonnen haben, mit GeoGebra zu arbeiten:

> Ich selbst nutze GeoGebra seit etwa 6 Monaten; meine Schüler seit etwa 3 Monaten. Die unter 3.7 [Anm. 'Bei welchen Themen haben Sie GeoGebra im Unterricht eingesetzt?'] angegebenen Inhalte sind deshalb noch nicht voll aussagekräftig, da ich das Programm auch weiterhin (und verstärkt) einsetzen möchte.

Viele Kommentare der Lehrer bezogen sich auch auf Anregungen für zukünftige Versionen von GeoGebra. Praktisch alle hier rückgemeldeten Wünsche waren bereits aus dem Benutzerforum (vgl. http://www.geogebra.at/forum) bekannt. Konkret wurden vor allem Makros (13 mal), automatische Animationen (4 mal) und die Verbesserung der Hilfefunktionen (4 mal) angeregt. Diese Wünsche sind bereits für zukünftige Versionen von GeoGebra fest eingeplant.

Ein weiterer häufiger Wunsch ist eine Erweiterung von GeoGebra auf die Raumgeometrie (8 mal). GeoGebra 3D wäre auch aus meiner Sicht eine reizvolle Idee, die aber wohl nur in einem völlig neuen Projekt realisierbar sein wird.

Abschließend lassen sich die Lehrermeinungen am besten mit folgendem Zitat zusammenfassen:

> Thank you for your work. This software is completly fantastic. I do not use Cabri anymore since I know GeoGebra, even if some features like macros are missing.

Kapitel 15

Ergebnisse der Schülerbefragung

Hauptzielgruppe dieser Fragebogenuntersuchung waren Lehrer, da diese mit einem online Fragebogen über die GeoGebra Homepage direkt erreichbar sind. Nachdem wahrscheinlich nur wenige Schüler zu den Besuchern der Homepage zählen, wurden diese nur indirekt über ihre Lehrer erreicht.

Leider ist die Anzahl der von Schülern ausgefüllten Fragebögen mit 99 im Vergleich zu jener der Lehrer (202) relativ klein. Weil nur 8 englischsprachige Schülerfragebögen einlangten, wurde die Auswertung auf 84 deutschprachige Schüler der Schulstufen 5–13 beschränkt. Aufgrund dieser kleinen Stichprobe sind die folgenden Ergebnisse mit Vorsicht zu interpretieren. Vor allem im Bereich *S4 Bewertung von GeoGebra* sollte die Schülersicht aber nicht außer Acht gelassen werden.

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse vorgestellt, wobei in Klammern auf die entsprechende Frage im Schülerfragebogen, z.B. (S3.2), verwiesen wird. Die Standardabweichung wird mit σ bezeichnet.

15.1 S1 Fragen zur Person

Die befragten deutschsprachigen Schüler sind zu 37% weiblich und 63% männlich (S1.1). Ihr Durchschnittsalter beträgt 14.6 Jahre ($\sigma = 2.2$, S1.2). Die Schüler kommen zu 57% aus Österreich, zu 26% aus Deutschland, zu 16% aus Luxemburg und ein Schüler kommt aus der Schweiz (S1.5). Sie besuchen fast ausschließlich Schulen mit Matura/Abitur (97%) und zwei Schüler gehen in eine Realschule (S1.3).

Aufgrund der kleinen Stichprobe (N = 84) ist auch die Verteilung der einzelnen Schulstufen sehr unausgewogen. Die Anteile der befragten Schüler in der Unterstufe (Schulstufen 5–8) mit 44% und in der Oberstufe (Schulstufen 9–13) mit 56% sind jedoch annähernd ausgeglichen (S1.4). 63% der befragten Schüler geben an, dass sie Mathematik gern oder sehr gern mögen (S1.6).

15.2 S2 Fragen zu GeoGebra

Die Schüler kennen GeoGebra (S2.1) im Durchschnitt seit 8.5 Monaten ($\sigma = 6.3$), also seit etwa einem Schuljahr. 88% geben an, sich gut oder sehr gut mit Computern auszukennen (S2.2), bei GeoGebra sind es im Vergleich dazu 61% (S2.3).

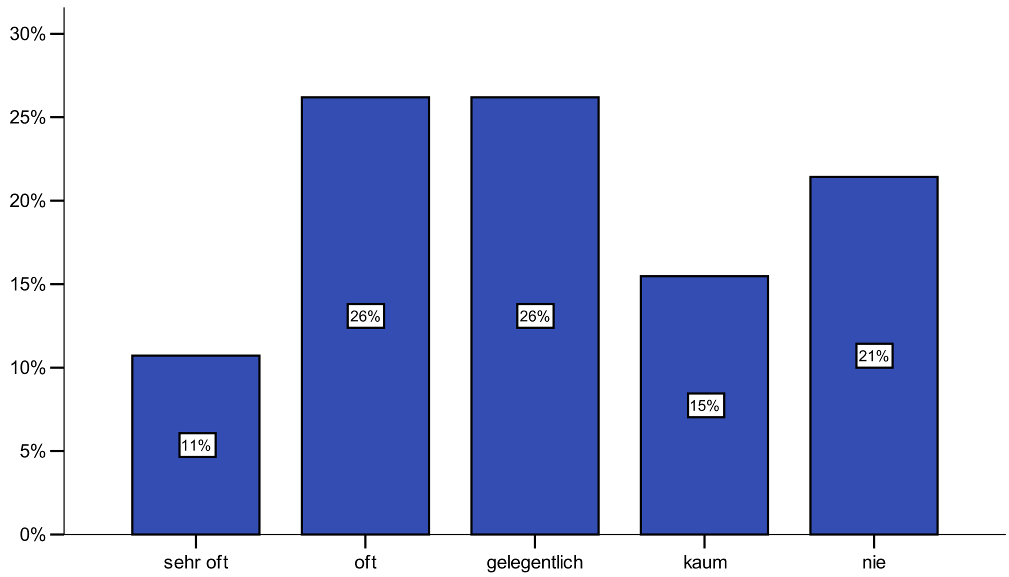
15.3 S3 GeoGebra im Unterricht

In welcher Form haben die Schüler GeoGebra im Unterricht schon verwendet (S3.3)? Die Antworten der befragten Schüler sind in der folgenden Tabelle zu sehen. Erfreulich ist hierbei, dass die Schüler in sehr großem Ausmaß (77%) selbstständig mit GeoGebra im Unterricht arbeiten dürfen.

Form der Verwendung im Unterricht	Anteil
selbstständiges Arbeiten mit GeoGebra	77%
vorgefertigte Konstruktionen (.ggb)	30%
dynamische Arbeitsblätter (.html)	17%
andere mit GeoGebra erstellte Materialien (z.B. Arbeitsblätter auf Papier)	13%

Da GeoGebra kostenlos verfügbar ist, können Schüler die Software auch problemlos zu Hause verwenden. Immerhin 63% der Schüler geben an, dass sie dies zumindest gelegentlich tun (siehe Diagramm S3.2). Bei Prüfungen und Schularbeiten (Deutschland: Klassenarbeiten) haben erst 15% der Schüler GeoGebra verwenden können (S3.4).

S3.2 Schüler verwenden GeoGebra zu Hause



15.4 S4 Bewertung von GeoGebra

Im Folgenden werden die Meinungen der Schüler über GeoGebra vorgestellt. Im Fragebogen wurde dazu der Grad der Zustimmung zu acht Aussagen erhoben. Die Antwort ‘weiß nicht’ wurde bei der Auswertung als fehlend eingestuft. In der folgenden Tabelle ist der Anteil der Zustimmung (’stimme völlig zu’ und ‘stimme eher zu’) zu diesen Aussagen zusammengefasst. Details sind in den nachfolgenden Diagrammen zu finden.

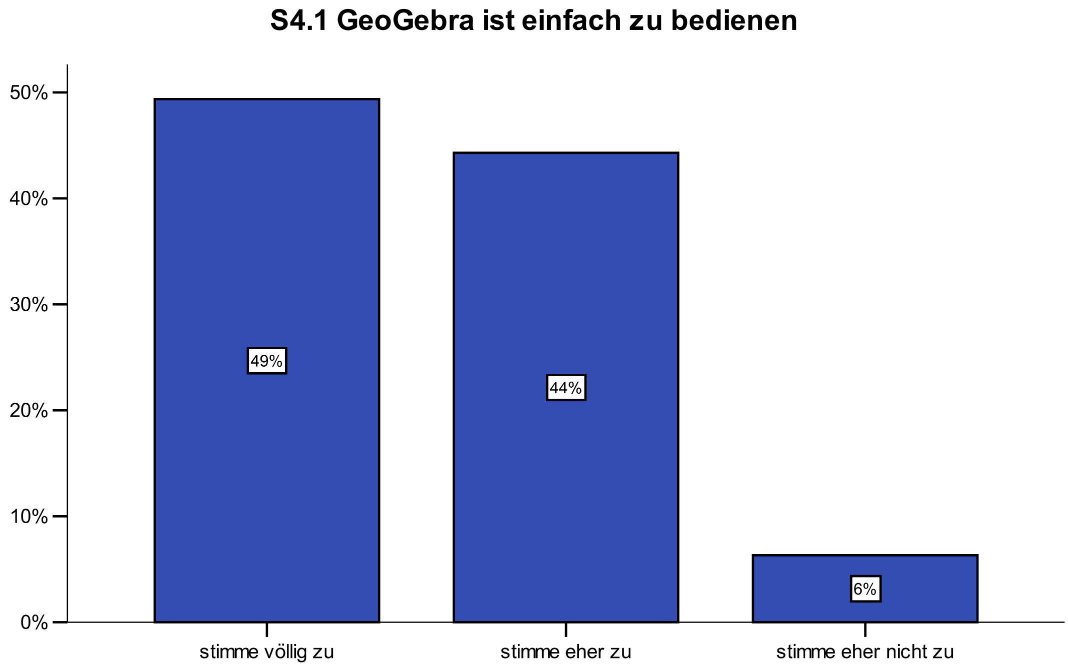
Nr.	Aussage	Zustimmung
S4.1	GeoGebra ist einfach zu bedienen.	93.7%
S4.2	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich.	88.9%
S4.3	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra gefällt mir.	81.5%
S4.4	Der Einsatz von GeoGebra hat den Unterricht interessanter gemacht.	86.5%
S4.5	Mit GeoGebra verstehe ich Mathe besser.	68.1%
S4.6	Mit GeoGebra konnte ich selbst mathematische Zusammenhänge entdecken.	68.5%
S4.7	Der Unterricht mit GeoGebra macht mir Spaß.	79.7%
S4.8	Ich möchte auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten.	87%

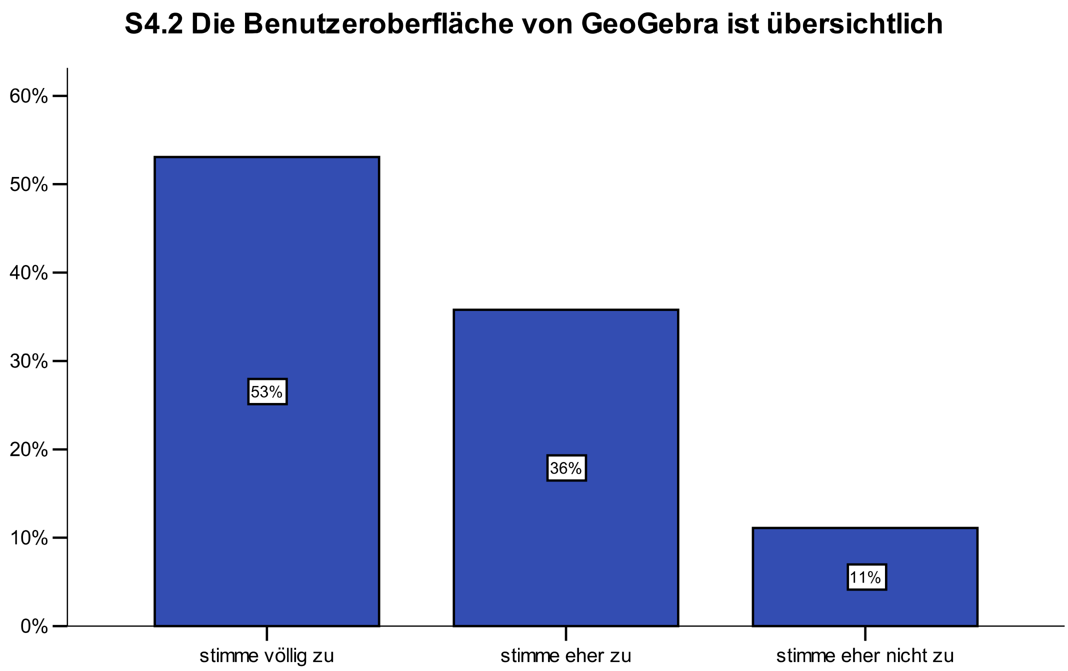
Die Meinungen der Schüler zu GeoGebra sind durchwegs positiv. Sehr viele finden, dass GeoGebra einfach zu bedienen ist und eine übersichtliche Oberfläche hat. Davon, dass sie mit GeoGebra Mathe besser verstehen und damit selbst Zusammenhänge entdecken können, sind etwas weniger überzeugt - doch auch hier liegt die Zustimmung jeweils bei über 68%. Sehr erfreulich ist schließlich noch, dass 87% der Schüler auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten möchten.

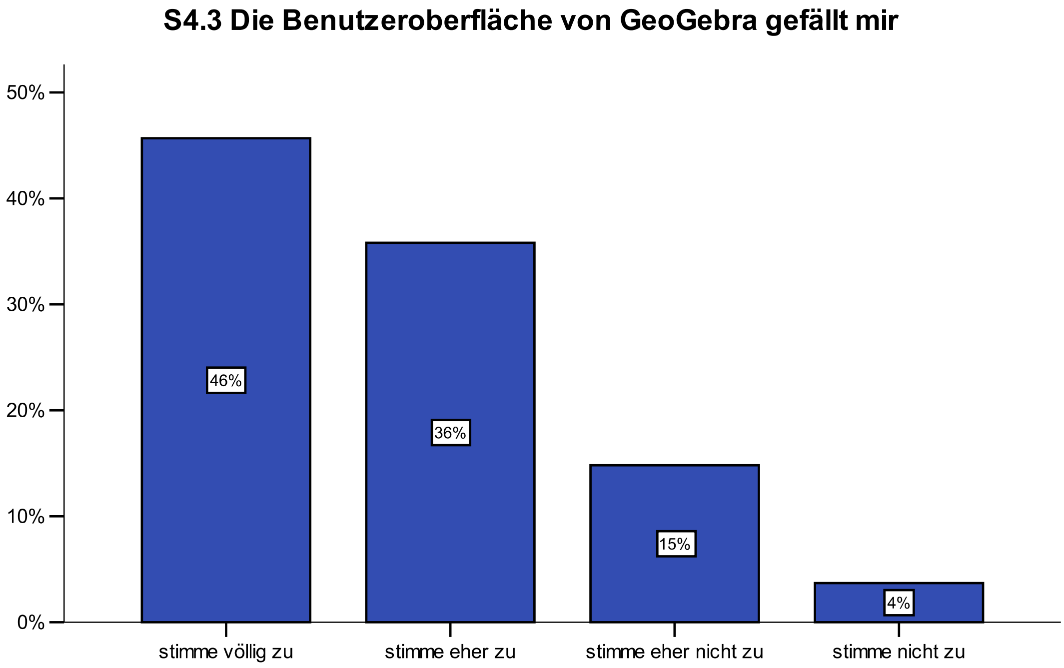
Auch bei der Steigerung des Interesses (S4.4) und dem Spaß am Unterricht (S4.7) liegen die Zustimmungsraten sehr hoch. Interessanterweise gibt es bei diesen beiden Aussagen signifikante Mittelwertunterschiede (0.01-Niveau) zwischen Schülern der Unterstufe (5.–8. Schulstufe) und jenen der Oberstufe (9.–13. Schulstufe). Der Grad der Zustimmung ist bei den jüngeren Schülern signifikant höher als bei den älteren:

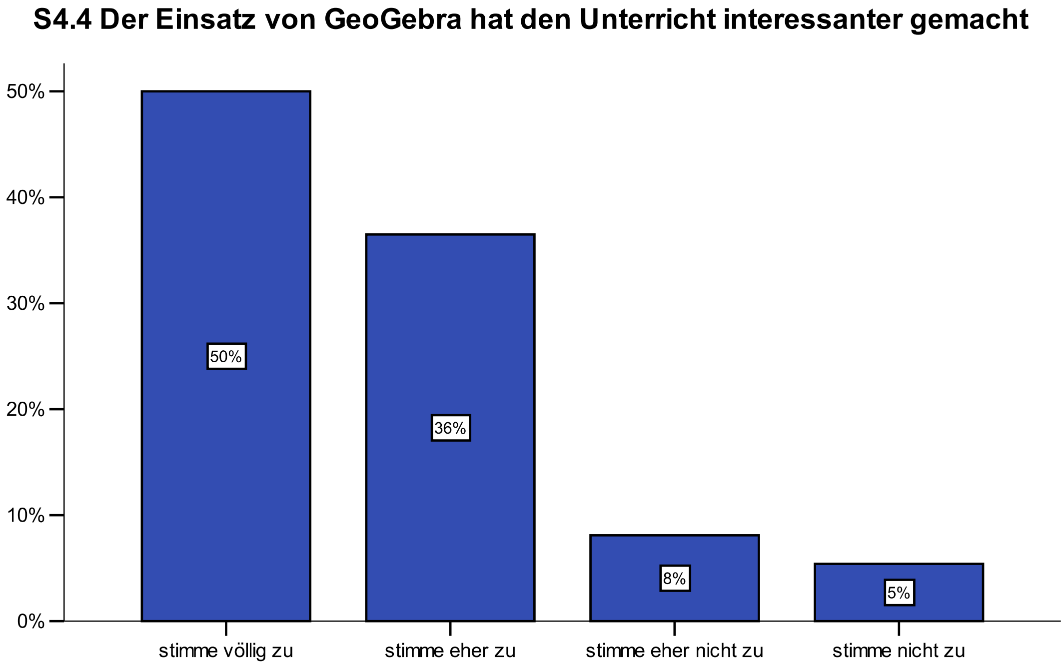
Nr.	Aussage	Zust. Unterstufe	Zust. Oberstufe
S4.4	Unterricht interessanter	97.1%	76.9%
S4.7	Unterricht macht mir Spaß	91.7%	68.4%

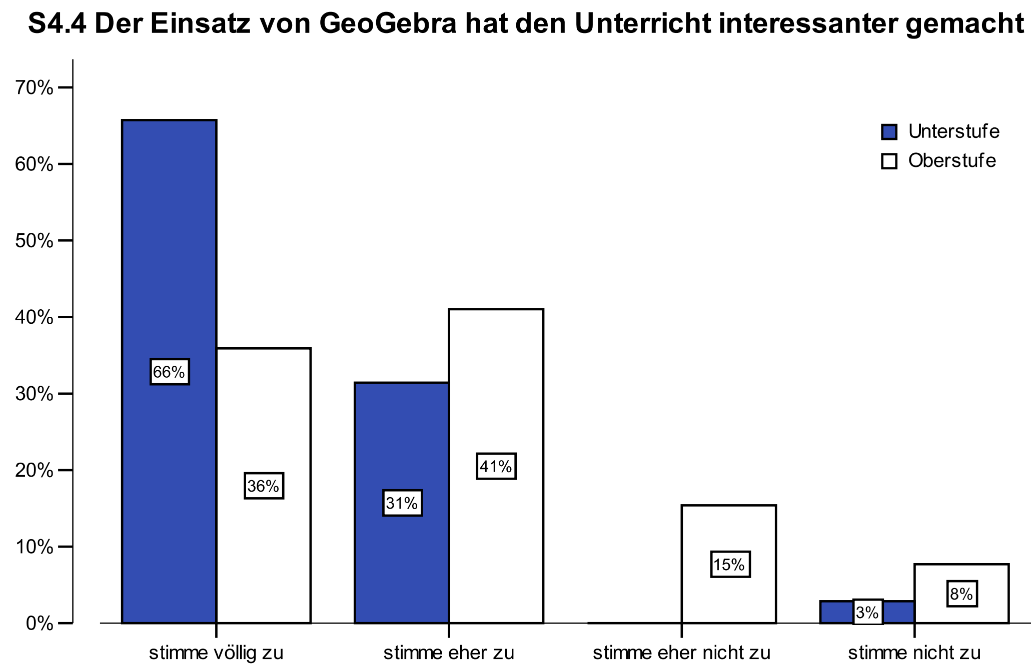
Möglicherweise liegt das daran, dass die jüngeren Schüler grundsätzlich begeisterungsfähiger sind als jene in höheren Klassen. Die genauen Verteilungen der beiden Gruppen finden sich in den Diagrammen zu S4.4 und S4.7.

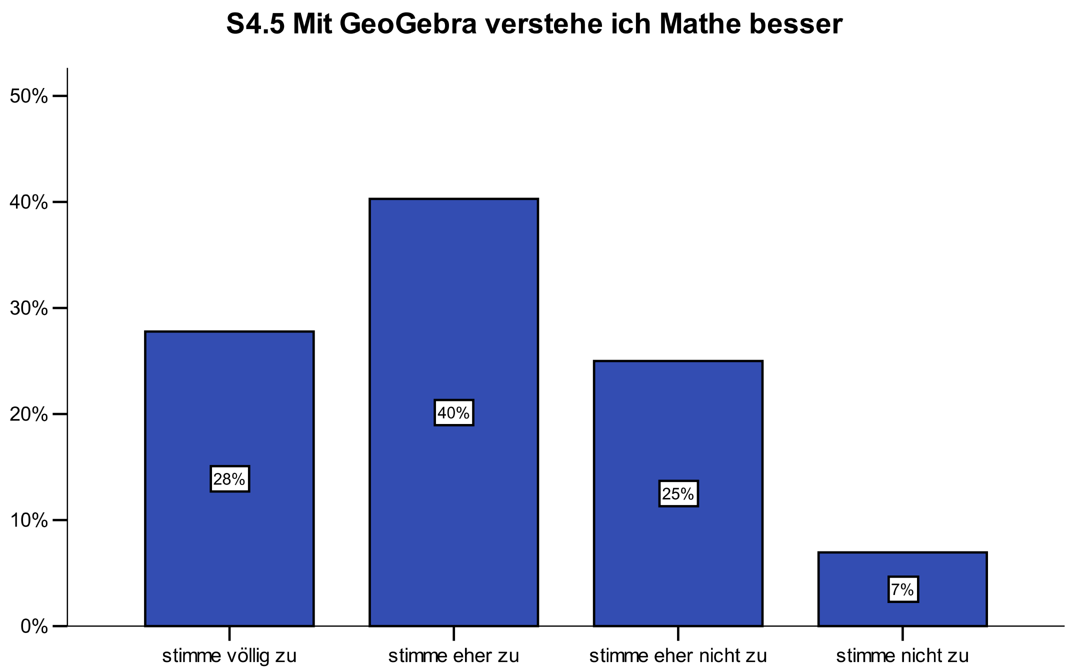

S4.1 GeoGebra ist einfach zu bedienen
50%
40%
30%
20%
10%
0%
49%
44%
6%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu

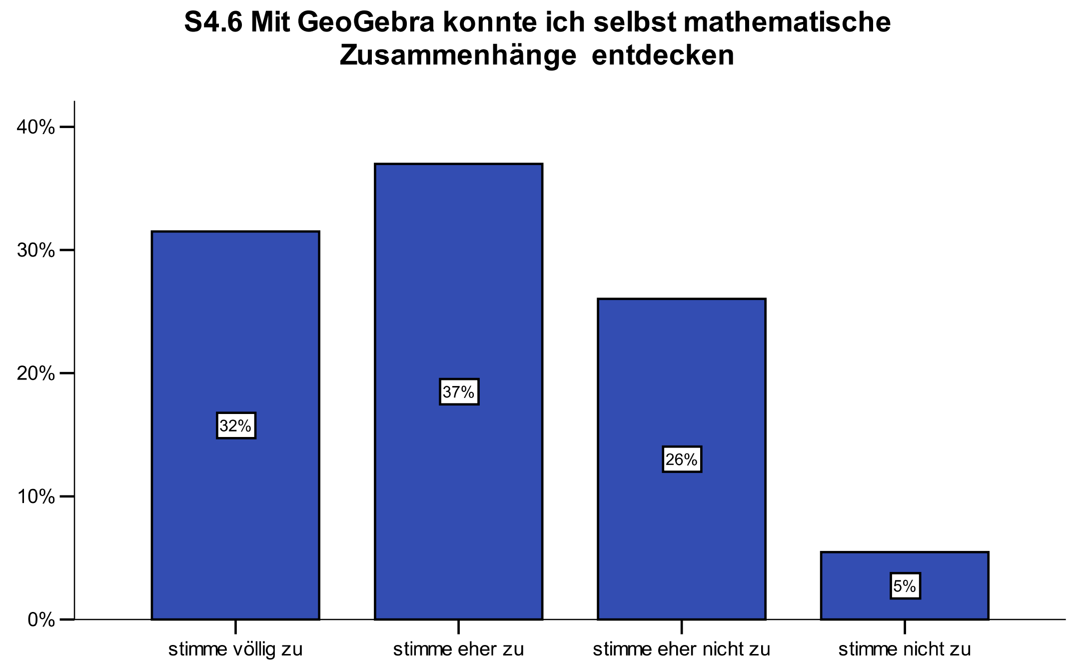

S4.2 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
53%
36%
11%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu

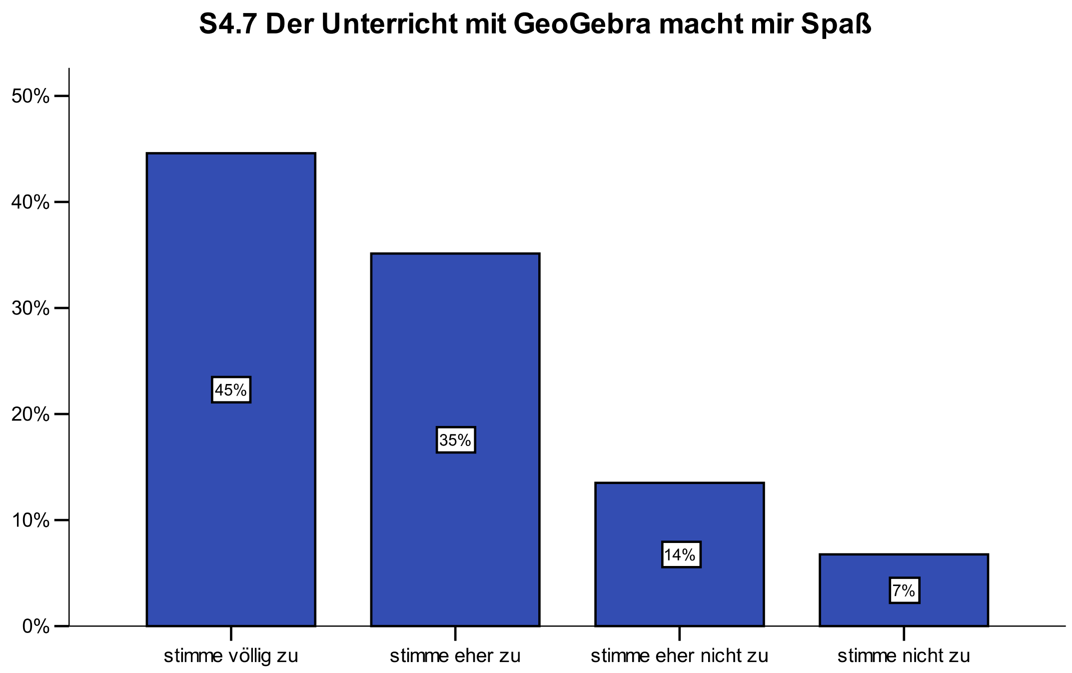

S4.3 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra gefällt mir
50%
40%
30%
20%
10%
0%
46%
36%
15%
4%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

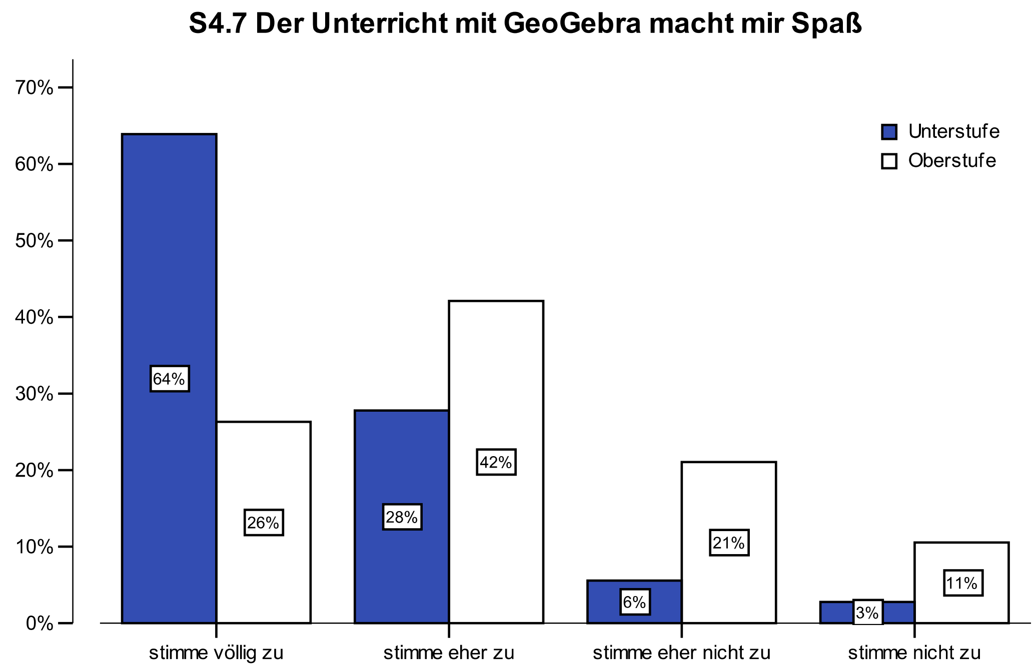

S4.4 Der Einsatz von GeoGebra hat den Unterricht interessanter gemacht
50%
40%
30%
20%
10%
0%
50%
36%
8%
5%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

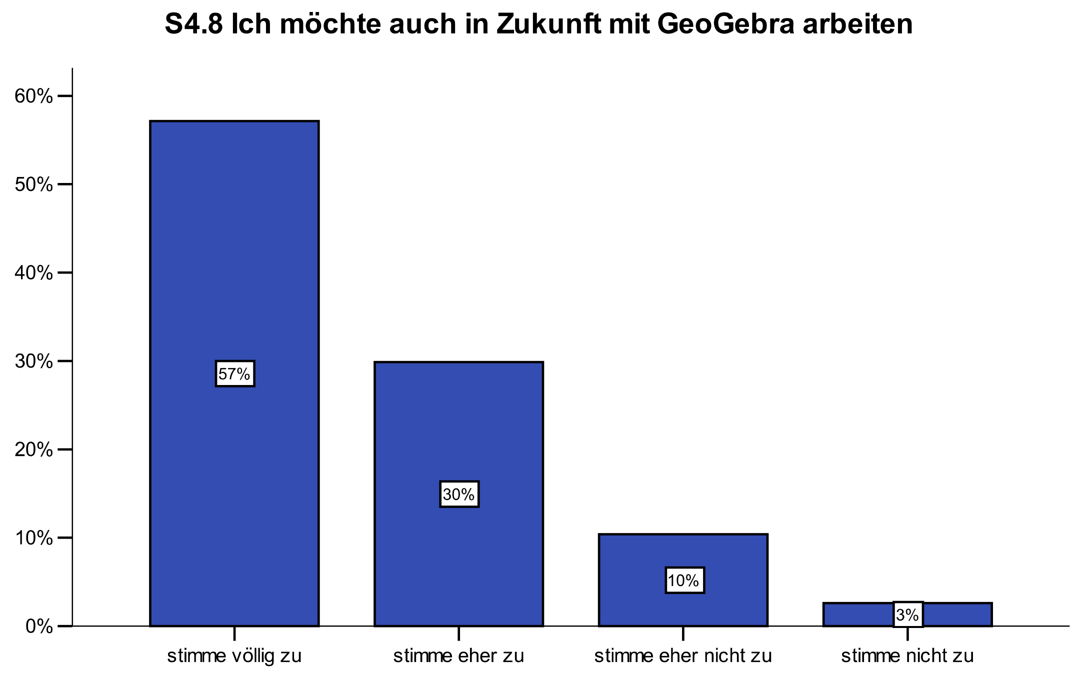

S4.4 Der Einsatz von GeoGebra hat den Unterricht interessanter gemacht
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Unterstufe
Oberstufe
66%
36%
31%
41%
15%
3%
8%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


S4.5 Mit GeoGebra verstehe ich Mathe besser
50%
40%
30%
20%
10%
0%
28%
40%
25%
7%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


S4.6 Mit GeoGebra konnte ich selbst mathematische Zusammenhänge entdecken
40%
30%
20%
10%
0%
32%
37%
26%
5%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


S4.7 Der Unterricht mit GeoGebra macht mir Spaß
50%
40%
30%
20%
10%
0%
45%
35%
14%
7%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


S4.7 Der Unterricht mit GeoGebra macht mir Spaß
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Unterstufe
Oberstufe
64%
26%
28%
42%
6%
21%
3%
11%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


S4.8 Ich möchte auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
57%
30%
10%
3%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

15.5 Schülerkommentare

Abschließend werden hier die Rückmeldungen der 84 deutschsprachigen Schüler zu den drei offenen Fragen S4.9 'Was gefällt dir an der Arbeit mit GeoGebra?', S4.10 'Was gefällt dir nicht an der Arbeit mit GeoGebra' und S4.11 'Was ich sonst noch zu GeoGebra sagen möchte' besprochen.

S4.9 Was gefällt dir an der Arbeit mit GeoGebra?

Viele Schüler finden, dass GeoGebra einfach zu bedienen (14 mal) und übersichtlich (10 mal) ist. Sie haben Spaß an der Arbeit mit dem Programm (10 mal) und schätzen die Möglichkeit, dass man schnell saubere Konstruktionen anfertigen kann und nicht selber mit der Hand zeichnen muss (10 mal). Die Schüler denken, dass sie mit GeoGebra Mathe leichter, schneller bzw. besser verstehen (8 mal). Generell arbeiten sie gerne am Computer oder im Informatiksaal (7 mal). Auch die Möglichkeit, selbstständig Zusammenhänge herauszufinden, gefällt ihnen (6 mal). Mehrfach wurde auch die Anschaulichkeit (4 mal) von GeoGebra genannt und auf die Vielseitigkeit von GeoGebra hingewiesen:

> Mir gefällt, dass es nicht so schwierig zu bedienen ist und trotzdem viele Funktionen hat.
>
> Viele Programmfunktionen. Früher musste ich mehrere Programme verwenden (Derive, WinFunc, Euklid).

S4.10 Was gefällt dir nicht an der Arbeit mit GeoGebra?

Einige Schüler finden die Arbeit mit GeoGebra kompliziert (6 mal), wobei nicht ganz klar ist, ob dies an GeoGebra oder an der Mathematik liegt:

> Es gibt zu viele Formeln, die man kennen muss und zu kompliziert sind.

Mehrmals wurden auch Anfangsschwierigkeiten bei der Bedienung von GeoGebra genannt (6 mal):

> Manchmal habe ich Schwierigkeiten das Geforderte in diesem Programm zufriedenstellend darzustellen, da ich nicht weiß, wie ich manches eintippen soll.
>
> Hatte anfangs noch ein paar Probleme mit der Bedienung, weil alles noch neu war, aber jetzt läuft's besser ... (liegt wahrscheinlich eh an mir).

Zwei Schüler haben Angst vor dem 'Verlust der händischen Mathematik-Kentnisse', wobei einer noch den Beisatz 'jedoch eher am Lehrkörper liegend ... ' hinzufügte.

S4.11 Was ich sonst noch zu GeoGebra sagen möchte

Mit großem Abstand ist hier generelles Lob für GeoGebra zu finden (20 mal), wobei 'voll cool' die prägnanteste Formulierung war. Ansonsten sind vor allem Wiederholungen von S4.9 und S4.10 und einzelne Anregungen für zukünftige Versionen genannt worden. Ein Schüler fasst seine Meinung zu GeoGebra wie folgt zusammen:

> Wenn man sich ernsthaft mit diesem Programm auseinandersetzt, hilft es einem echt im Matheunterricht gut mitzukommen.

Kapitel 16

Vergleich von Lehrer- und Schülerergebnissen

In diesem Kapitel sollen nun einige Ergebnisse der Lehrer- und Schülerbefragung verglichen werden. Die Fragen des Schülerfragebogen sind im Wesentlichen eine Teilmenge der Fragen an die Lehrer mit leicht veränderten Formulierungen, wodurch direkte Vergleiche möglich werden.

16.1 GeoGebra im Unterricht und zu Hause

Schülerselbsttätigkeit

Die Lehrer haben angegeben, dass ihre Schüler in großem Ausmaß (62%) selbstständig mit GeoGebra im Unterricht arbeiten dürfen (vgl. Tabelle zu L3.8, S. 240). Dieses Ergebnis deckt sich mit den Aussagen der Schüler, von denen bereits 77% selbstständig mit GeoGebra im Unterricht gearbeitet haben (vgl. Tabelle zu L3.3, S. 252).

Der Einsatz von GeoGebra geht also mit einer hohen Schülerselbsttätigkeit im Unterricht einher. Diese Art der Arbeit gefällt den Schülern und macht ihnen auch Spaß (vgl. Kommentare zu S4.9, S. 259).

GeoGebra zu Hause

Eine interessante Frage ist, in wie weit Schüler das kostenlose Programm GeoGebra auch zu Hause verwenden. Immerhin 63% der Schüler geben an, dass sie dies zumindest gelegentlich tun (vgl. S3.2, S. 252). Nachdem nur 25% der Lehrer bereits Hausübungen mit GeoGebra gegeben haben (vgl. L3.10, S. 241), verwenden also viele Schüler die Software freiwillig auch zu Hause.

Ein Schüler meint dazu (vgl. S4.11, S. 260):

> Wenn man sich ernsthaft mit diesem Programm auseinandersetzt, hilft es einem echt im Matheunterricht gut mitzukommen.

GeoGebra bei Prüfungen

Bei Schularbeiten (Deutschland: Klassenarbeiten) und Prüfungen wird GeoGebra erst von etwa 10% der Klassen eingesetzt. Auch hier stimmen die Angaben von Lehrern und Schülern gut überein (vgl. L3.11, S. 241 und S3.4, S. 252).

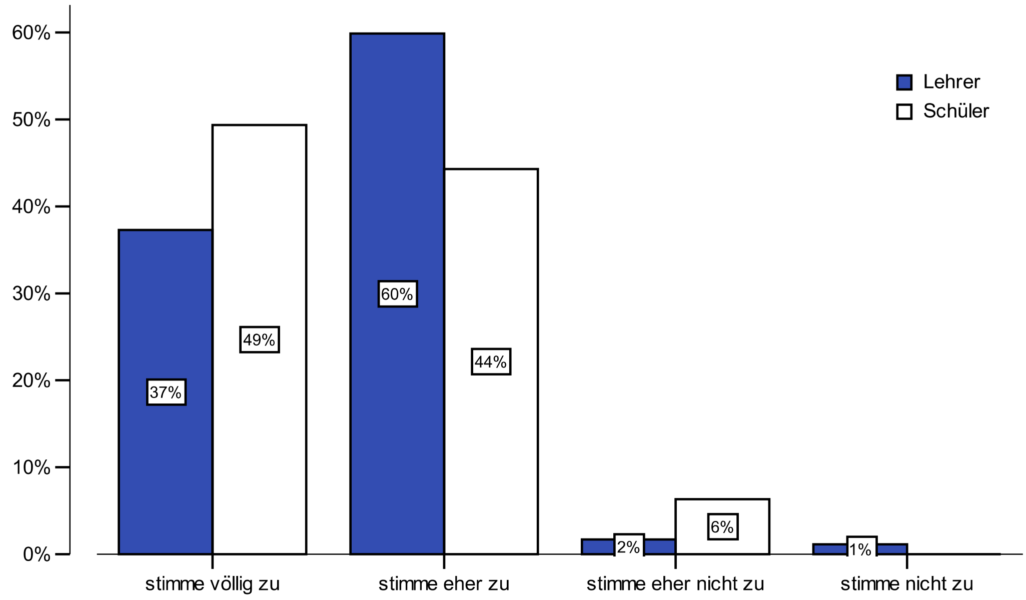
16.2 Bewertung von GeoGebra

Die folgende Tabelle stellt die Zustimmungsraten beider Gruppen zu den angegebenen Aussagen überblickshaft dar.

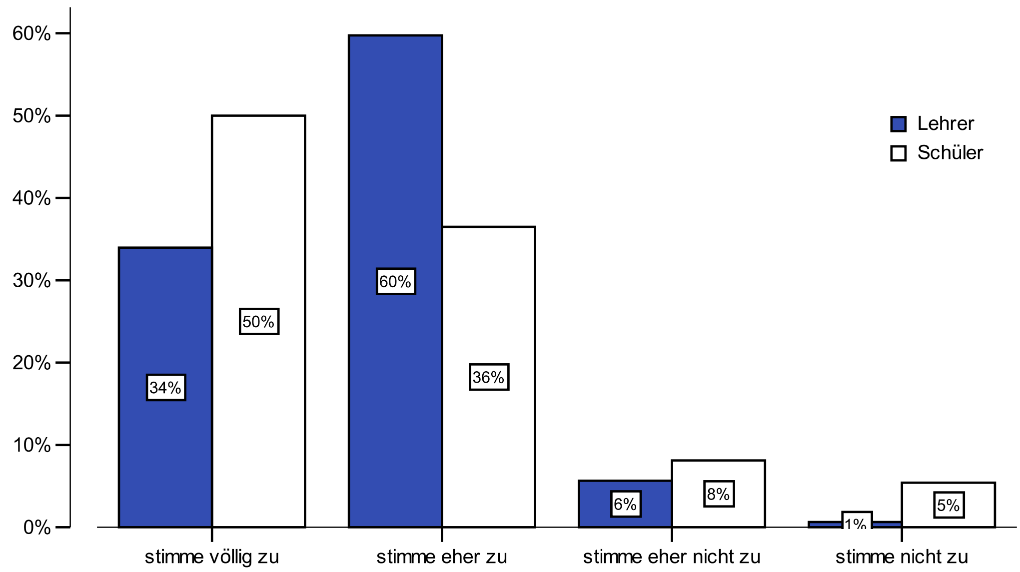
Nr.	Aussage	Zust. Lehrer	Zust. Schüler
L4.1/S4.1	GeoGebra ist für Schüler einfach zu bedienen.	97.2%	93.7%
L4.2/S4.4	Der Einsatz von GeoGebra steigert das Interesse der Schüler am Unterricht	93.7%	86.5%
L4.3/S4.5	Mit GeoGebra verstehen die Schüler die Unterrichtsinhalte besser.	95.8%	68.1%
L4.4/S4.6	Mit GeoGebra können Schüler selbstständig mathematische Zusammenhänge entdecken.	86.8%	68.5%
L4.6/S4.7	Schüler haben Spaß an der Arbeit mit GeoGebra.	97.4%	79.7%
L4.9/S4.4	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich.	96%	88.9%
L4.10/S4.3	Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist ansprechend.	97%	81.5%
L4.11/S4.8	Ich möchte auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten.	99%	87%

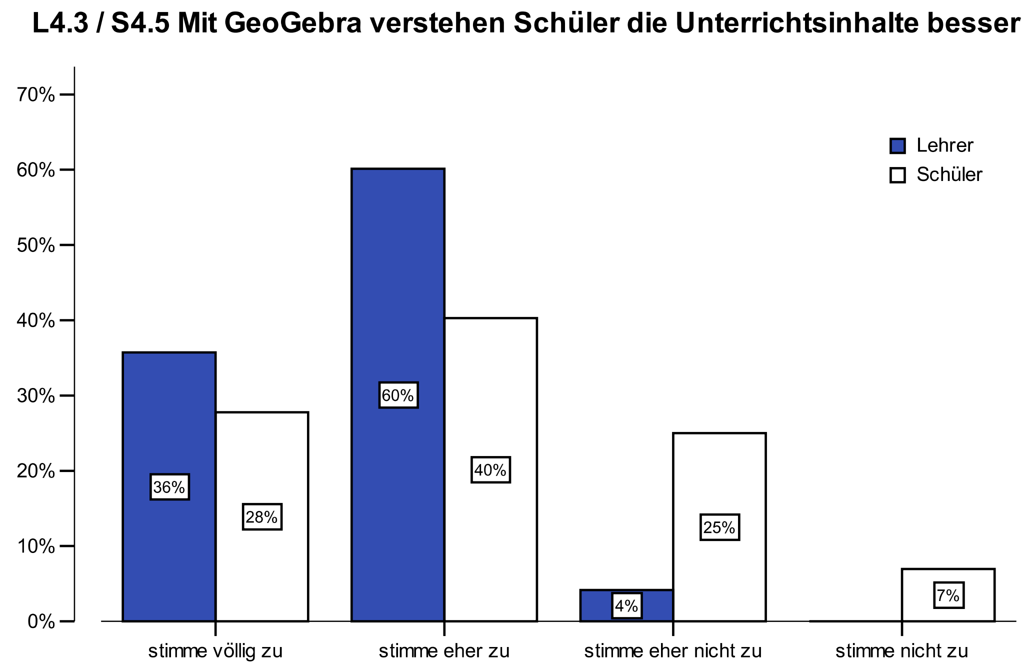
Insgesamt fällt die Bewertung von GeoGebra sowohl von Lehrern als auch Schülern sehr positiv aus. Für jede der angeführten Aussagen gibt es zumindest 68% Zustimmung in beiden Gruppen. Die Zustimmungsraten der Lehrer sind in allen Fällen höher als jene der Schüler. Signifikante Mittelwertunterschiede (auf dem 0.01-Niveau) gibt es aber nur bei L4.3, L4.6, L4.10 und L4.11.

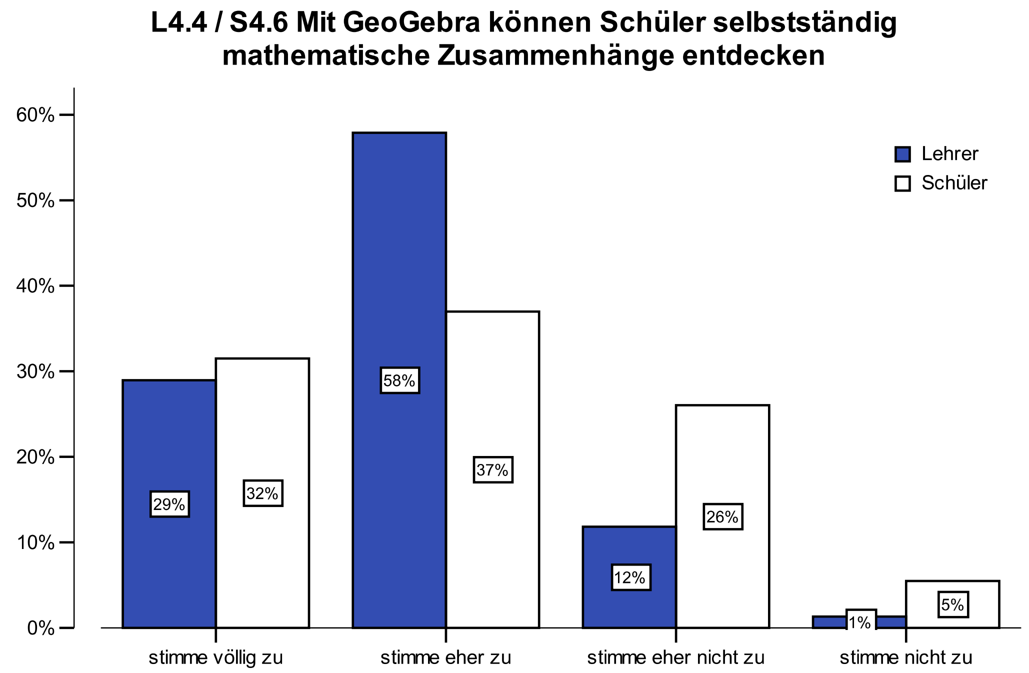
L4.1 / S4.1 GeoGebra ist für Schüler einfach zu bedienen



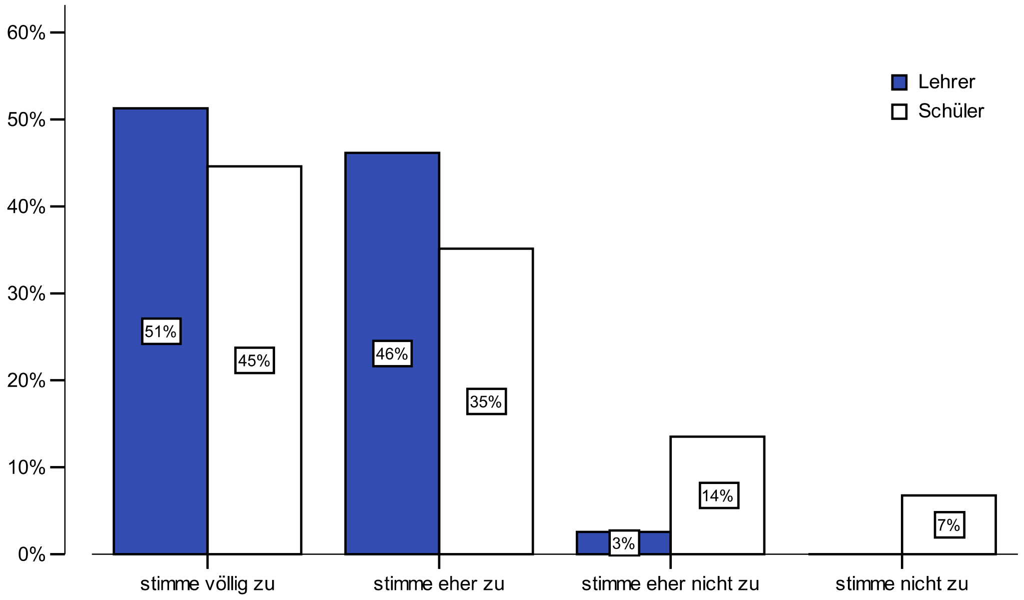
L4.2 / S4.4 Der Einsatz von GeoGebra steigert das Interesse der Schüler am Unterricht



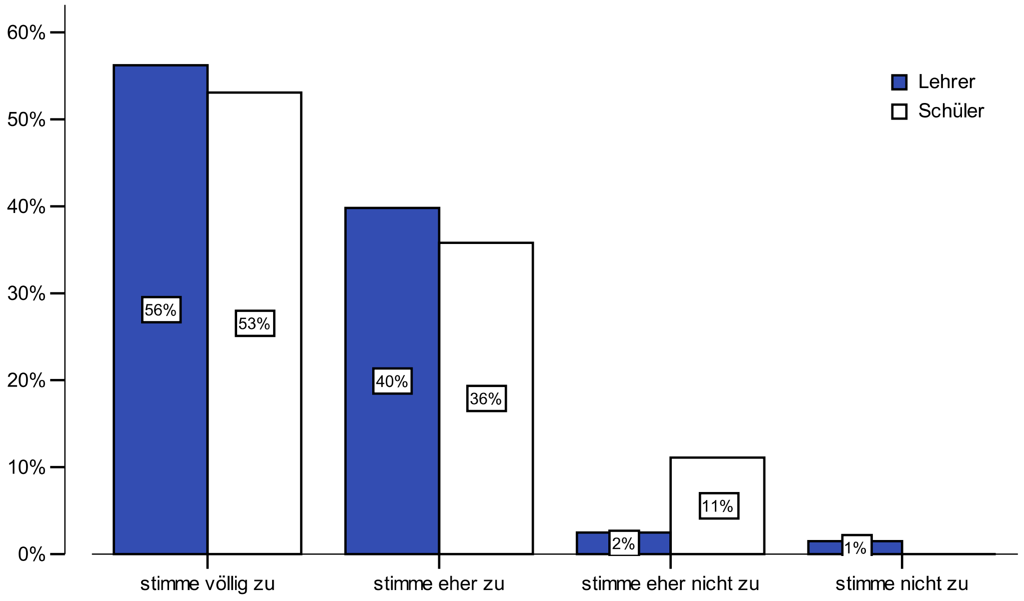

L4.3 / S4.5 Mit GeoGebra verstehen Schüler die Unterrichtsinhalte besser
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Lehrer
Schüler
36%
28%
60%
40%
4%
25%
7%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

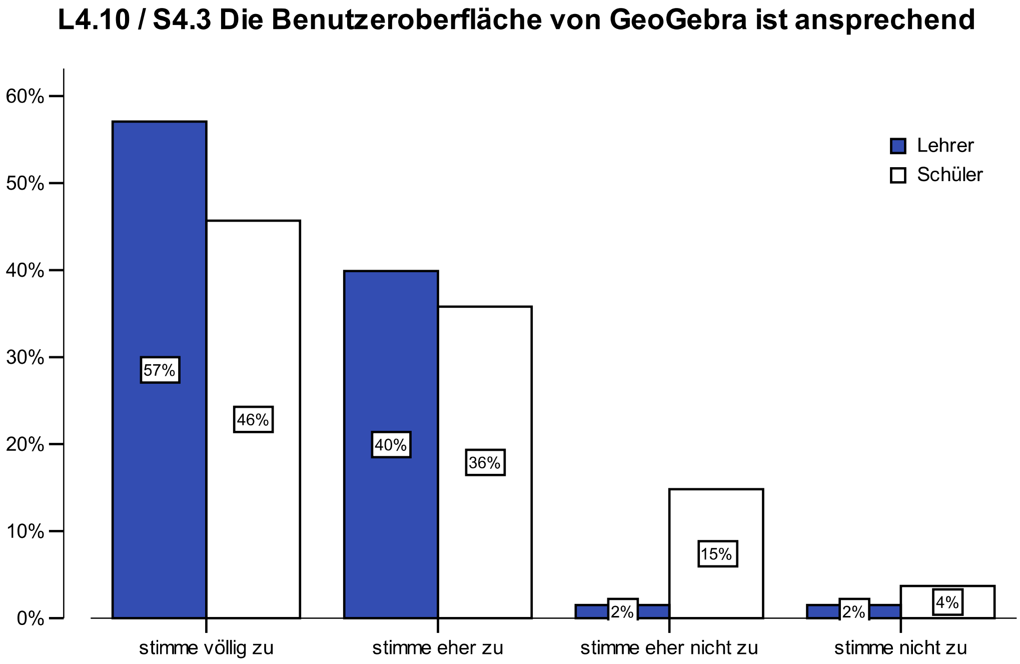

L4.4 / S4.6 Mit GeoGebra können Schüler selbstständig mathematische Zusammenhänge entdecken
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Lehrer
Schüler
29%
32%
58%
37%
12%
26%
1%
5%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

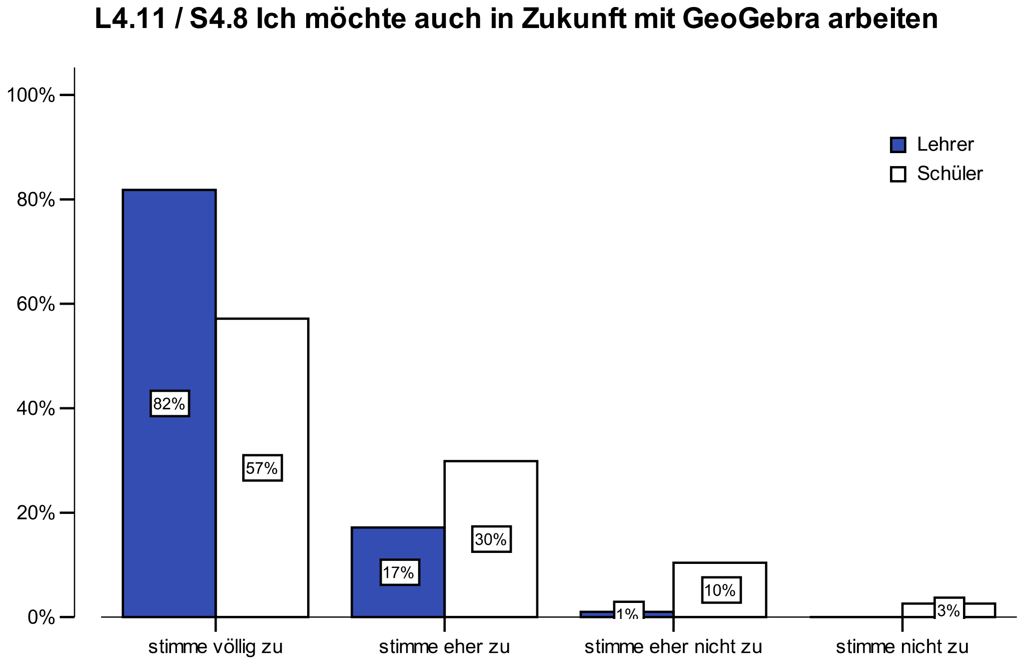
L4.6 / S4.7 Schüler haben Spaß an der Arbeit mit GeoGebra



L4.9 / S4.2 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist übersichtlich




L4.10 / S4.3 Die Benutzeroberfläche von GeoGebra ist ansprechend
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Lehrer
Schüler
57%
46%
40%
36%
2%
15%
2%
4%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu


L4.11 / S4.8 Ich möchte auch in Zukunft mit GeoGebra arbeiten
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Lehrer
Schüler
82%
57%
17%
30%
1%
10%
3%
stimme völlig zu
stimme eher zu
stimme eher nicht zu
stimme nicht zu

16.3 Zusammenfassung

Die Fragebogenuntersuchung hat gezeigt, dass GeoGebra im deutschsprachigen Raum derzeit vor allem an höheren Schulen mit Maturaabschluss verwendet wird. Sie kommt in allen Jahrgängen ab der 5. Schulstufe bis zur Matura zum Einsatz. Neben dem Bereich der Elementargeometrie hat GeoGebra vor allem bei den Themen Funktionen und Gleichungen, Analysis sowie analytische Geometrie einen festen Platz in den Klassenzimmern. Diese Vielseitigkeit erklärt, warum das Programm in der Oberstufe stärker als in der Unterstufe zum Einsatz kommt. Praktisch alle befragten Lehrer sehen GeoGebra als ein für ihren Unterricht gut geeignetes Werkzeug. Ein kleiner Teil von ihnen führt auch schon Prüfungen und Schularbeiten damit durch.

Schüler wie Lehrer finden, dass die Benutzeroberfläche von GeoGebra übersichtlich und einfach zu bedienen ist. Sie denken, dass der Einsatz von GeoGebra den Unterricht interessanter macht und den Schülern das Verstehen der Inhalte erleichtert. Der Unterricht mit GeoGebra geht zudem mit einem hohen Anteil an Schülerselbsttätigkeit einher und fast alle Befragten möchten auch in Zukunft mit dem Programm arbeiten. Sehr wichtig erscheint mir auch das folgende Ergebnis: Vier von fünf Schülern haben Spaß an der Arbeit mit GeoGebra (in der Unterstufe sogar über 90%).

Kurzresumée: die Lehrer sind von GeoGebra begeistert und die Schüler arbeiten sehr gerne mit der Software. Dies drückt sich in folgenden Aussagen deutlich aus.

> Meine Schüler und auch ich sind sehr begeistert von GeoGebra und einige von ihnen verwenden es freiwillig auch zu Hause und haben bereits freiwillig Hausübung damit kontrolliert. Dankeschön für dieses Programm! (Lehrer)

> Wenn man Sachen nicht kapiert, dann kann man einfach eine Konstruktion machen und dadurch ist es leichter. (Schülerin, 6. Schulstufe)

> Es ist einfach zu bedienen und macht einfach Spaß. (Schüler, 12. Schulstufe)

Teil V

Zusammenfassung

Kapitel 17

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass alle angestrebten Ziele dieses Dissertationsprojektes erreicht werden konnten: die Implementierung interaktiver Unterrichtsmaterialien (vgl. Teile I und II), die Weiterentwicklung der Software GeoGebra (vgl. Teil III), die Publikation von Unterrichtsmaterialien auf e-Learning Plattformen im Internet (vgl. Teil II), sowie die formative Evaluation der Software (vgl. Teil IV).

Ein wichtiges Anliegen dieses Projektes war auch die Dissemination didaktischer und methodischer Ideen und Möglichkeiten im Zusammenhang mit dem Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht. Mit der Software GeoGebra und den erstellten Unterrichtsmaterialien konnte auch dieses Anliegen erfolgreich umgesetzt werden, wie das große Interesse an dem Projekt zeigt: 100.000 Downloads von GeoGebra allein 2005, derzeit täglich 2000 Besucher auf www.geogebra.at sowie die Verfügbarkeit von Software und Materialien in inzwischen fast zwanzig Sprachen.

Ich persönlich führe den großen Erfolg von GeoGebra im Wesentlichen auf zwei Umstände zurück: Erstens ist GeoGebra ein qualitativ hochwertiges Produkt,[1] das einfach zu bedienen und wegen der Verbindung von dynamischer Geometrie, Algebra und Analysis didaktisch innovativ ist. Zweitens sind sowohl die Software als auch die zahlreichen Materialien kostenlos verfügbar[2] und können damit von Schülern und Lehrern nicht nur in Schulen sondern auch zu Hause problemlos eingesetzt werden.

Für die Zukunft von GeoGebra gibt es zahlreiche Ideen und Anregungen. Um die Betreuung, Verbreitung und Weiterentwicklung von Unterrichtsmaterialien und Software auch in Zukunft gewährleisten zu können, wird ein Team von Entwicklern und engagierten Anwendern nötig sein. Überlegungen und Kontakte in diese Richtung gibt es bereits. In jedem Fall soll GeoGebra als Open Source Software weiterhin kostenlos verfügbar bleiben.

[1] vgl. die Bildungssoftware Preise auf www.geogebra.at unter 'Info'

[2] siehe www.geogebra.at bzw. www.geogebra.at/wiki

Kapitel 18

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei der Österreichischen Akademie der Wissenschaften bedanken, die durch ihre finanzielle Unterstützung in Form eines DOC Stipendiums dieses Projekt überhaupt erst in diesem Umfang ermöglicht hat.

Ich danke allen, die mir bei der Durchführung dieser Arbeit behilflich waren, insbesondere Christiane Allerstorfer, Christoph Huber und Maria Hartl für ihre Hilfe bei der Erstellung, Implementierung und Übersetzung der online Fragebögen sowie Rudolf Schürer für seine wertvollen Hilfestellungen bei mathematischen und technischen Fragen.

Weiters darf ich allen Übersetzern und engagierten Benutzern von GeoGebra für Ihre unentgeltliche Arbeit und die zahlreichen Rückmeldungen und Anregungen danken.

Ich danke allen Beteiligten des Projekts *Medienvielfalt im Mathematikunterricht*, dass ich mit so engagierten Menschen zusammenarbeiten darf.

Meinen Eltern und Geschwistern danke ich für ihr Verständnis, dass ich in den letzten Jahren öfter bei GeoGebra Fortbildungen als im Pinzgau war.

Meinen Freunden bin ich dankbar dafür, dass ich neben der Arbeit noch nicht ganz auf's Menschsein vergessen habe. Insbesondere danke ich Peter für die gemeinsamen Weißbiere und dem Dog für's Bellen.

Last but not least danke ich Judith dafür, dass sie noch immer nicht auf GeoGebra eifersüchtig ist und ich mich wegen ihr jedesmal wahnsinnig auf's Heimkommen freuen darf.

Teil VI

Anhang: GeoGebra Hilfe

Anhang A

Was ist GeoGebra?

GeoGebra ist eine Mathematiksoftware, die Geometrie, Algebra und Analysis verbindet. Sie wird von Markus Hohenwarter an der Universität Salzburg für den Einsatz im Unterricht an Schulen entwickelt.

Einerseits ist GeoGebra ein dynamisches Geometriepaket. Es können Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Strecken, Geraden, Kegelschnitten sowie Funktionen erstellt und danach dynamisch verändert werden.

Andererseits ist auch die direkte Eingabe von Gleichungen und Koordinaten möglich. GeoGebra erlaubt so auch das Rechnen mit Zahlen, Vektoren und Punkten, liefert Ableitungen und Integrale von Funktionen und bietet Befehle wie Nullstelle oder Extremum.

GeoGebra zeichnet die doppelte Sichtweise der Objekte aus: ein Ausdruck im Algebrafenster entspricht einem Objekt im Geometriefenster und umgekehrt.

Anhang B

Beispiele

Um einen kleinen Eindruck zu vermitteln, was man mit GeoGebra machen kann, werden hier einige Anwendungsbeispiele vorgestellt.

B.1 Dreieck mit Winkeln

- Wählen Sie dazu in der Symbolleiste zunächst den Modus *Neuer Punkt* (siehe C.2) in der Symbolleiste und klicken Sie auf drei beliebige Stellen am Zeichenblatt. Damit erzeugen Sie die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks.

- Wählen Sie jetzt den Modus *Vieleck* und klicken nacheinander auf die Punkte A, B, C und nochmals A, um das Dreieck P zu erstellen. Im Algebrafenster wird die Fläche des Dreiecks angezeigt.

- Die Winkel des Dreiecks erhalten Sie, indem Sie den Modus *Winkel* wählen und auf das Dreieck klicken.

Im Bewegen Modus können Sie nun die Eckpunkte verschieben. Wenn Sie das Algebrafenster und die Koordinatenachsen nicht benötigen, können Sie diese jederzeit im Menü *Ansicht* ausblenden.

B.2 Geradengleichung y = k x + d

Untersuchen wir die Bedeutung der Koeffizienten k und d in der Gleichung $y = kx + d$, indem wir verschiedene Werte für k und d einsetzen. Dazu geben Sie folgende Zeilen in die Eingabzeile am unteren Bildschirmrand ein (nach jeder Zeile ist die Eingabetaste zu drücken).

```
k = 1
d = 2
y = k x + d
```

Nun können Sie nachträglich k und d durch Eingabe im Algebrafenster (rechte Maustaste, Bearbeiten) oder in der Eingabezeile ändern:

```
k = 2
k = -3
d = 0
d = -1
```

Noch eleganter können Sie k und d mit Hilfe der Pfeiltasten (Animation, D.1.2) oder über Schieberegler (rechter Mausklick auf k oder d, Objekt anzeigen; siehe C.2.10) verändern.

In ähnlicher Art und Weise können Sie natürlich auch Kreis- oder Kegelschnittgleichungen ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$) untersuchen.

B.3 Schwerpunkt dreier Punkte A, B, C

Wir konsturieren zunächst den Schwerpunkt als Schnittpunkt zweier Schwerlinien. Dazu geben wir folgende Zeilen in die Eingabzeile am unteren Bildschirmrand ein (nach jeder Zeile ist die Eingabetaste zu drücken). Sie können diese Konstruktion natürlich auch mit der Maus mit Hilfe der Modi (siehe C.2) in der Symbolleiste erstellen.

```
A = (-2, 1)
B = (5, 0)
C = (0, 5)
M_a = Mittelpunkt[B, C]
M_b = Mittelpunkt[A, C]
sa = Gerade[A, M_a]
sb = Gerade[B, M_b]
S = Schneide[sa, sb]
```

Alternativ berechnen wir den Schwerpunkt direkt als

```
S_1 = (A + B + C) / 3
```

Vergleichen Sie nun die beiden Ergebnisse S und S_1, indem Sie im Modus *Beziehung* nacheinander auf S und S_1 im Algebrafenster klicken.

Überprüfen Sie, ob $S = S1$ auch für andere Lagen von A, B, C gilt. Dazu wählen Sie mit der Maus den Modus Bewegen (ganz links in der Symbolleiste) und verändern jeweils einen der Punkte durch Klicken und Ziehen.

B.4 Strecke AB im Verhältnis 7 : 3 teilen

Da man in GeoGebra mit Vektoren rechnen kann, ist dies sehr leicht zu bewerkstelligen.

```
A = (-2, 1)
B = (3, 3)
T = A + 7/10 (B - A)
```

Ein weitere Möglichkeit wäre etwa

```
A = (-2, 1)
B = (3, 3)
v = Vektor[A, B]
T = A + 7/10 v
```

In einem nächsten Schritt könnten Sie eine Zahl t einführen (etwa als Schieberegler, C.2.10) und den Punkt T in `T = A + t v` umdefinieren (siehe C.1.7). Bei Veränderung von t wandert T auf einer Geraden.

Diese Gerade können Sie sogar über ihre Parameterdarstellung (siehe D.2.3) eingeben:

```
g: X = T + s v
```

B.5 Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen

Zwei lineare Gleichungen in x und y kann man als Geradengleichungen interpretieren. Die algebraische Lösung dieses Gleichungssystems ist der geometrische Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

```
g : 3x + 4y = 12
h : y = 2x - 8
S = Schneide[g, h]
```

Sie können sowohl die Gleichungen ändern (rechter Mausklick, Bearbeiten) als auch die Geraden verschieben oder drehen (*Bewegen*, C.2.1; *Drehen*, C.2.1)

B.6 Tangente an eine Funktion in x

GeoGebra bietet einen Befehl für die Tangente an eine Funktion f(x) an der Stelle x=a.

```
a = 3
f(x) = 2 sin(x)
t = Tangente[a, f]
```

Durch Animation von a (siehe D.1.2) wandert die Tangente t entlang des Graphen von f. Eine andere Möglichkeit ohne den vordefinierten Befehl wäre etwa

```
a = 3
f(x) = 2 sin(x)
T = (a, f(a))
t : X = T + s (1, f'(a))
```

Hier erhalten wir zusätzlich den Punkt T auf dem Graphen von f. Die Tangente t wird in Parameterdarstellung angegeben. Sie können die Tangente in einem Punkt auf der Funktion übrigens auch geometrisch erzeugen:

- Wählen Sie dazu in der Symbolleiste den Modus *Neuer Punkt* (siehe C.2) und klicken an einer beliebigen Stelle auf den Funktionsgraphen von f.
- Wählen Sie nun den Modus *Tangenten* und klicken nacheinander auf die Funktion f und auf den eben erzeugten Punkt auf der Funktion. Dadurch wir die Tangente erstellt.

Wählen Sie jetzt den *Bewegen* Modus und ziehen Sie den Punkt auf der Funktion mit der Maus. Dabei wandert auch die Tangente dynamisch mit.

B.7 Kurvendiskussion

Mit GeoGebra können Sie Polynomfunktionen auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte untersuchen.

```
f(x) = x^3 - 3 x^2 + 1
N = Nullstelle[f]
E = Extremum[f]
W = Wendepunkt[f]
```

Im *Bewegen* Modus können Sie die Funktion f mit der Maus verschieben. Interessant sind in diesem Zusammenhang natürlich auch die ersten beiden Ableitungen.

```
Ableitung[f]
Ableitung[f, 2]
```

B.8 Integralrechnung

Zum Einstieg in die Integralrechnung bietet GeoGebra die Möglichkeit die Unter- und Obersumme einer Funktion als Rechtecke darzustellen.

```
f(x) = x^2/4 + 2
a = 0
b = 2
n = 5
U = Untersumme[f, a, b, n]
O = Obersumme[f, a, b, n]
```

Durch Animation von a, b oder n (Animation, D.1.2; Schieberegler, C.2.10) können Sie den Einfluss dieser Parameter dynamisch sichtbar machen. Als Schrittweite für n sollten Sie dabei 1 einstellen (rechter Mausklick auf n und *Eigenschaften*).

Das bestimmte Integral lässt sich wie folgt darstellen:

```
Integral[f, a, b]
```

Die Stammfunktion F erhalten Sie mit:

```
F = Integral[f]
```

Anhang C

Geometrische Eingabe

Hier wird erklärt, wie in GeoGebra mit der Maus Eingaben gemacht werden.

C.1 Allgemeines

Im Geometriefenster (rechts) werden Punkte, Vektoren, Strecken, Polygone, Funktionen, Geraden und Kegelschnitte grafisch dargestellt. Beim Bewegen der Maus über ein Objekt wird eine Beschreibung angezeigt. Das Geometriefenster nennen wir bisweilen auch *Zeichenblatt*.

Damit GeoGebra weiß, wie es auf Eingaben mit der Maus reagieren soll, gibt es verschiedene Modi (neuer Punkt, schneiden, Kreis durch drei Punkte, ...), die unter C.2 im Einzelnen erklärt werden.

Ein Doppelklick auf ein Objekt im Algebra Fenster öffnet seine Bearbeitungszeile.

C.1.1 Kontextmenü

Nach Klicken mit der rechten Maustaste auf ein Objekt erscheint ein Kontextmenü, in dem die Darstellungsart (Polar-, cartesische Koordinaten; implizite, explizite Gleichung, ...) gewählt werden kann. Hier sind auch Befehle wie Umbenennen , Bearbeiten oder Löschen zu finden.

Wählt man den Menüpunkt Eigenschaften, so erscheint ein Dialogfenster, in dem Farbe, Größe, Linienstärke, Linienart, Füllung, Schrittweite, usw. verändert werden können.

C.1.2 Anzeigen und Ausblenden

Geometrische Objekte können wahlweise angezeigt (gezeichnet) werden oder nicht. Dies kann über den Modus *Objekt anzeigen/ausblenden* (C.2.1) oder das Kontextmenü (C.1.1) verändert werden. Das Symbol links neben einem Objekt im Algebrafenster zeigt den aktuellen Zustand an.

C.1.3 Spur

Ein geometrisches Objekt (z.B. ein Punkt) kann eine Spur am Bildschirm hinterlassen, wenn es bewegt wird. Diese Spur können Sie im Kontextmenü (C.1.1) ein- und ausschalten.

Um alle Spuren wieder zu löschen, wählen Sie im Menü *Ansicht* den Punkt *Ansichten auffrischen*.

C.1.4 Vergrößern / Verkleinern

Nach Klicken mit der rechten Maustaste auf das Zeichenblatt erscheint ein Kontextmenü, in dem Sie die Ansicht vergrößern (zoom in) oder verkleinern (zoom out) können. Siehe auch die Modi *Vergrößern* (C.2.1) bzw. *Verkleinern* (C.2.1).

Zoom Fenster: ziehen Sie mit der rechten Maustaste ein Rechteck auf, um einen Bildausschnitt zu vergößern.

C.1.5 Achsenskalierung

Nach Klicken mit der rechten Maustaste auf das Zeichenblatt erscheint ein Kontextmenü, in dem Sie das Verhältnis der Skalierung von x-Achse zu y-Achse verändern können.

C.1.6 Konstruktionsprotokoll

Das interaktive Konstruktionsprotokoll (Menü *Ansicht*) ist eine Tabelle mit den einzelnen Konstruktionsschritten. Damit kann eine Konstruktion Schritt für Schritt wiederholt werden. Es ist sogar möglich, Konstruktionsschritte nachträglich einzufügen und ihre Reihenfolge zu verändern. Details zur Bedienung des Konstruktionsprotokolls finden Sie im *Hilfe* Menü des Konstruktionsprotokolls.

C.1.7 Umdefinieren

Ein Objekt kann über sein Kontextmenü (C.1.1) *umdefiniert* werden. Damit können Sie im Nachhinein Ihre Konstruktion ganz grundsätzlich verändern. Sie gelangen übrigens auch in den *Umdefinieren* Dialog, wenn Sie auf ein abhängiges Objekt doppelklicken.

Um beispielsweise den freien Punkt A nachträglich auf die Gerade g zu setzen, wählen Sie für den Punkt A *umdefinieren* und geben `Punkt[g]` ein. Umgekehrt können Sie den Punkt A wieder von der Gerade g lösen, indem Sie *umdefinieren* wählen und freie Koordinaten `(3,2)` angeben.

Ein anderes Beispiel ist die Umwandlung einer Geraden g durch die beiden Punkte A und B in eine Strecke: wählen Sie für g *umdefinieren* und geben Sie `Strecke[A, B]` ein.

Das Umdefinieren von Objekten stellt eine sehr vielseitige Möglichkeit dar, Konstruktionen nachträglich zu verändern. Beachten Sie, dass sich dadurch auch die Reihenfolge der Konstruktionsschritte im Konstruktionsprotokoll (C.1.6) verändern kann.

C.2 Modi

Die im folgenden beschriebenen Modi können über die Symbolleiste aktiviert werden. Durch Klicken auf den kleinen Pfeil rechts neben einem Symbol wird ein Menü mit weiteren Modi angezeigt.

Ein Objekt *markieren* bedeutet im Folgenden *mit der Maus anklicken*. In allen Konstruktions-Modi werden neue Punkte übrigens automatisch durch Klicken auf das Zeichenblatt erzeugt und gleichzeitig markiert.

C.2.1 Allgemeine Modi

Bewegen

Durch Klicken und Ziehen werden freie Objekte verschoben.

Ein Objekt kann im Bewegen Modus durch Klicken ausgewählt werden und dann mit

- der Entf-Taste gelöscht werden
- den Pfeiltasten verschoben werden (siehe D.1.2)

Mehrere Objekte werden durch Klicken mit gedrückter Strg-Taste ausgewählt.

Drehen um Punkt

Legen Sie zunächst den Drehpunkt fest, indem Sie auf einen Punkt klicken. Danach können Sie durch Klicken und Ziehen freie Objekte um diesen Punkt drehen.

Beziehung

Nach Markieren zweier Objekte a und b gibt ein Informationsfenster Auskunft über die Beziehung von a und b (D.3.1).

Verschiebe Zeichenblatt

Klicken auf eine beliebige Stelle des Zeichenblattes und anschließendes Ziehen verändert die Lage des Koordinatenursprungs.

Sie können das Zeichenblatt auch verschieben indem Sie es bei gedrückter Strg-Taste mit der Maus an einer beliebigen Stelle ziehen.

Vergrößern

Klicken auf eine beliebige Stelle des Zeichenblattes vergrößert die Ansicht (zoom in). Siehe auch C.1.4.

Verkleinern

Klicken auf eine beliebige Stelle des Zeichenblattes verkleinert die Ansicht (zoom out). Siehe auch C.1.4.

Objekt anzeigen / ausblenden

Klicken Sie auf ein Objekte, um es auszublenden bzw. wieder anzeigen zu lassen. Alle auszublendenden Objekte sind dabei als markiert unterlegt. Ihre Veränderungen werden aktiv, sobald Sie in einen anderen Modus wechseln.

Beschriftung anzeigen / ausblenden

Klicken auf ein Objekt zeigt seine Beschriftung an oder blendet sie aus.

Format übertragen

Mit diesem Modus können sie Eigenschaften wie Farbe, Größe, Linienart, usw. von einem Objekt auf mehrere andere übertragen.

Wählen Sie zunächst jenes Objekt, dessen Eigenschaften Sie auf andere übertragen möchten. Klicken Sie danach auf alle anderen Objekte, die diese Eigenschaften übernehmen sollen.

Objekt löschen

Klicken Sie auf ein Objekt, um es zu löschen.

C.2.2 Punkt

Neuer Punkt

Klicken auf das Zeichenblatt erzeugt einen neuen Punkt. Die Koordinaten des Punktes werden erst beim Loslassen der Maustaste festgelegt.

Durch Klicken auf eine Strecke, eine Gerade oder einen Kegelschnitt wird ein Punkt auf diesem Objekt erzeugt. Durch Klicken auf einen Schnittpunkt zweier Objekte wird dieser Schnittpunkt erzeugt.

Schneide zwei Objekte

Die Schnittpunkte zweier Objekte können auf zwei Arten erzeugt werden.

1. Durch Markieren der beiden Objekte: dabei werden nach Möglichkeit *alle* Schnittpunkte der beiden Objekte erzeugt.

2. Durch Klicken auf einen Schnittpunkt der beiden Objekte: dabei wird nur dieser eine Schnittpunkt erzeugt

Beim Schnitt von Strecken, Strahlen oder Bögen kann in den Eigenschaften (C.1.1) des betreffenden Objekts angegeben werden, ob *außerhalb liegende Schnittpunkte erlaubt* sind. Dadurch können auch Schnittpunkte angezeigt werden, die auf der Verlängerung des Objektes liegen. Die Verlängerung einer Strecke oder eines Strahls ist beispielsweise eine Gerade.

Mittelpunkt

Klicken auf ...

1. zwei Punkte liefert den Mittelpunkt dieser beiden Punkte.

2. eine Strecke liefert den Mittelpunkt dieser Strecke.

3. einen Kegelschnitt liefert den Mittelpunkt dieses Kegelschnitts.

C.2.3 Vektor

Vektor zwischen zwei Punkten

Markieren des Anfangs- und Endpunktes erzeugt den Verbindungsvektor.

Vektor von Punkt aus abtragen

Markieren eines Punktes A und eines Vektors v erzeugt einen Punkt B = A + v und den Verbindungsvektor von A und B.

C.2.4 Strecke

Strecke zwischen zwei Punkten

Markieren zweier Punkte A und B erzeugt die Strecke zwischen A und B. Im Algebrafenster wird die Länge dieser Strecke angezeigt.

Strecke mit fester Länge von Punkt aus

Klicken Sie auf einen Punkt A, von dem aus Sie die Strecke abtragen möchten. Danach erscheint ein Fenster, in dem Sie die gewünschte Länge a der Strecke angeben.

Als Ergebnis liefert dieser Modus eine Strecke der Länge a und den Endpunkt B dieser Strecke. Der Endpunkt B kann im *Bewegen* Modus um den Anfangspunkt A gedreht werden.

C.2.5 Strahl

Strahl durch zwei Punkte

Markieren zweier Punkte A und B erzeugt den Strahl mit Anfangspunkt A durch den Punkt B. Im Algebrafenster wird die Gleichung der entsprechenden Geraden angezeigt.

C.2.6 Vieleck

Vieleck

Marieren Sie mindestens drei Punkte und klicken Sie danach nochmals auf den ersten Punkt. Im Algebrafenster wird die Fläche dieses Vielecks angezeigt.

C.2.7 Gerade

Gerade durch zwei Punkte

Markieren zweier Punkte A und B erzeugt die Gerade durch A und B. Diese Gerade hat den Richtungsvektor AB = (B-A).

Parallele Gerade

Markieren einer Gerade g und eines Punktes A erzeugt eine zu g parallel Gerade durch den Punkt A. Die neue Gerade hat gleiche Richtung wie g.

Senkrechte Gerade

Markieren einer Gerade g und eines Punktes A erzeugt eine zu g senkrechte Gerade durch den Punkt A. Die Richtung der neuen Gerade entspricht dem Normalvektor (D.3.5) von g.

Streckensymmetrale

Markieren einer Strecke s oder zweier Punkte A und B erzeugt die Streckensymmetrale. Die Richtung der neuen Geraden entspricht dem Normalvektor (D.3.5) der Strecke s bzw. AB.

Winkelsymmetrale

Winkelsymmetralen können auf zwei Arten erzeugt werden.

1. Durch Markieren von drei Punkten A, B, C wird die Winkelsymmetrale des eingeschlossenen Winkels erzeugt. B ist hierbei der Scheitelpunkt.

2. Durch Markieren zweier Geraden werden beide Winkelsymmetralen dieser Geraden erzeugt.

Die Richtungsvektoren aller Winkelsymmetralen haben Länge 1.

Tangenten

Die Tangenten eines Kegelschnitts können auf zwei Arten erzeugt werden:

1. Durch Markieren eines Punktes A und eines Kegelschnitts c. Hier werden alle Tangenten durch A an c erzeugt.

2. Durch Markieren einer Geraden g und eines Kegelschnitts c. Hier werden alle Tangenten an c, die parallel zu g sind, erzeugt.

Durch Markieren eines Punktes A und einer Funktion f wird die Tangente an f in x=x(A) erzeugt.

Polare oder konjugierter Durchmesser

Dieser Modus erzeugt die Polare bzw. die konjugierte Durchmessergerade eines Kegelschnitts:

1. Durch Markieren eines Punktes und eines Kegelschnitts wird die Polare erzeugt.

2. Durch Markieren einer Geraden g bzw. eines Vektors v und eines Kegelschnitts c wird die konjugierte Durchmessergerade von g bzw. v zu c erzeugt.

C.2.8 Kegelschnitt

Kreis mit Mittelpunkt durch Punkt

Durch Markieren eines Punktes M und eines Punktes P wird ein Kreis mit Mittelpunkt M erzeugt, auf dem der Punkt P liegt. Dieser Kreis hat als Radius den Abstand von M und P.

Kreis mit Mittelpunkt und Radius

Nach Markieren des Mittelpunktes erscheint ein Fenster, in dem der Radius des Kreises eingegeben werden kann.

Kreis durch drei Punkte

Durch Markieren dreier Punkte A, B, C wird ein Kreis erzeugt, der durch diese drei Punkte geht. Dieser Kreis ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

Kegelschnitt durch 5 Punkte

Durch Markieren von fünf Punkten wird ein Kegelschnitt erzeugt, der durch diese Punkte geht. Wenn keine vier der fünf Punkte auf einer Geraden liegen, ist der Kegelschnitt (eindeutig) definiert.

C.2.9 Bogen und Sektor

Der algebraische Wert eines Bogens ist seine Länge, der Wert eines Sektors ist seine Fläche.

Halbkreis

Durch Markieren zweier Punkte A und B wird der Halbkreis über der Strecke AB erzeugt.

Kreisbogen zu Mittelpunkt durch zwei Punkte

Durch Markieren dreier Punkte M, A und B wird ein Kreisbogen mit Mittelpunkt M, Anfangspunkt A und Endpunkt B erzeugt. Der Punkt B muss dabei nicht auf dem Bogen liegen.

Kreissektor zu Mittelpunkt durch zwei Punkte

Durch Markieren dreier Punkte M, A und B wird ein Kreissektor mit Mittelpunkt M, Anfangspunkt A und Endpunkt B erzeugt.

Umkreisbogen durch drei Punkte

Durch Markieren dreier Punkte wird ein Kreisbogen durch diese Punkte erzeugt.

Umkreissektor durch drei Punkte

Durch Markieren dreier Punkte wird ein Kreissektor durch diese Punkte erzeugt.

C.2.10 Zahl und Winkel

Abstand

Dieser Modus liefert den Abstand ...

1. zweier Punkte
2. zweier Geraden
3. eines Punktes von einer Geraden

Schieberegler

Klicken Sie auf eine freie Stelle des Zeichenblattes, um dort einen Schieberegler für eine Zahl oder einen Winkel zu erzeugen. Im erscheinenden Dialog können Sie das Intervall [min, max] der Zahl bzw. des Winkels sowie die Breite des Schiebereglers (in Pixel) angeben.

Ein Schieberegler ist in GeoGebra einfach die grafische Darstellung einer freien Zahl bzw. eines freien Winkels. Sie können daher jede freie Zahl bzw. jeden freien Winkel auch nachträglich als Schieberegler auf dem Zeichenblatt sichtbar machen. Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf die Zahl bzw. den Winkel im Algebrafenster und wählen Sie *Objekt anzeigen*.

Die Position eines Schiebereglers kann absolut am Bildschirm oder relativ zum Koordinatensystem gewählt werden (siehe Eigenschaften der entsprechenden Zahl bzw. des Winkels, C.1.1).

Winkel

Dieser Modus erzeugt ...

1. den Winkel zwischen drei Punkte
2. den Winkel zwischen zwei Strecken
3. den Winkel zwischen zwei Geraden
4. den Winkel zwischen zwei Vektoren
5. alle Innenwinkel eines Vielecks

Alle so erzeugten Winkel werden auf 180° beschränkt. Wenn Sie auch Winkel zwischen 180° und 360° zulassen möchten, wählen Sie in den Eigenschaften (C.1.1) des Winkels *überstumpfer Winkel möglich* (Österreich: *erhabener Winkel möglich*).

Winkel mit fester Größe

Nach Markieren zweier Punkte A und B erscheint ein Fenster, in dem Sie die Größe des Winkels angeben können. Als Ergebnis werden ein Punkt C und ein Winkel α erzeugt, wobei $\alpha = \angle(ABC)$.

C.2.11 Ortslinie

Ortslinie

Markieren Sie zunächst einen Punkt P, dessen Ortslinie gezeichnet werden soll. Klicken Sie danach auf einen Punkt Q, von dem P abhängt. Der Punkt Q muss auf einer Linie liegen.

Es entsteht die Ortslinie von P unter Bewegung von Q entlang seiner Linie.

C.2.12 Geometrische Abbildungen

Die folgenden geometrischen Abbildungen funktionieren für Punkte, Geraden, Kegelschnitte, Vielecke und für Bilder.

Spiegle Objekt an Punkt

Markieren Sie zunächst das zu spiegelnde Objekt. Klicken Sie danach auf den Punkt, an dem das Objekt gespiegelt werden soll.

Spiegle Objekt an Gerade

Markieren Sie zunächst das zu spiegelnde Objekt. Klicken Sie danach auf die Gerade, an der das Objekt gespiegelt werden soll.

Drehe Objekt um Punkt

Markieren Sie zunächst das zu drehende Objekt. Wählen Sie anschließend den Punkt, um den das Objekt gedreht werden soll. Danach erscheint ein Fenster, in dem Sie den Drehwinkel angeben können.

Verschiebe Objekt um Vektor

Markieren Sie zunächst das zu verschiebende Objekt. Wählen Sie anschließend den Vektor, um den das Objekt verschoben werden soll.

Strecke Objekt zentrisch von Punkt

Markieren Sie zunächst das zu streckende Objekt. Wählen Sie anschließend den Punkt, von dem aus das Objekt gestreckt werden soll. Danach erscheint ein Fenster, in dem Sie den Streckfaktor angeben können.

C.2.13 Texte

Text

Mit diesem Modus kann ein Text oder eine LaTeX Formel erstellt werden.

1. Durch Klicken auf eine freie Stelle des Zeichenblattes wird dort ein Text erzeugt.
2. Durch Klicken auf einen Punkt wird ein Text erzeugt, dessen Position relativ zu diesem Punkt ist.

Danach erscheint ein Dialogfeld, in dem Sie den Text eingeben können. Dabei ist es auch möglich, den Wert eines Objekts in den Text einzubauen und so einen dynamischen Text zu erzeugen.

Eingabe	Beschreibung
`''Das ist ein Text''`	einfacher Text
`''Punkt A = '' + A`	dynamischer Text mit dem Wert eines Punktes A
`''a = '' + a + ''cm''`	dynamischer Text mit dem Wert einer Strecke a

Die Position eines Textes kann absolut am Bildschirm oder relativ zum Koordinatensystem gewählt werden (siehe Eigenschaften des Textes, C.1.1).

LaTeX Formeln

Als Text können in GeoGebra auch Formeln geschrieben werden. Dazu setzt man das Häckchen für eine LaTeX-Formel im Dialogfeld des Text Modus und schreibt die Formel in LaTeX Syntax. Hier werden einige wichtige LaTeX Befehle für Formeln vorgestellt. Für weitere Informationen sehen Sie bitte in einer LaTeX Dokumentation nach.

LaTeX Eingabe	Ergebnis
`a \cdot b`	$a \cdot b$
`\frac{a}{b}`	$\frac{a}{b}$
`\sqrt{x}`	$\sqrt{x}$
`\sqrt[n]{x}`	$\sqrt[n]{x}$
`\vec{v}`	$\vec{v}$
`\overline{AB}`	$\overline{AB}$
`x^{2}`	x^{2}
`a_{1}`	a_{1}
`\sin\alpha + \cos\beta`	$\sin\alpha + \cos\beta$
`\int_{a}^{b} x dx`	$\int_{a}^{b} x dx$
`\sum_{i=1}^{n} i^2`	$\sum_{i=1}^{n} i^2$

C.2.14 Bilder

Bild einfügen

Mit diesem Modus kann ein Bild eingefügt werden.

1. Durch Klicken auf eine freie Stelle des Zeichenblattes wird die linke unter Ecke des Bildes festgelegt.

2. Durch Klicken auf einen Punkt wird dieser Punkt als linke untere Ecke des Bildes festgelegt.

Danach erscheint ein Öffnen-Dialog, in dem Sie die einzufügende Bilddatei auswählen können.

C.2.15 Eigenschaften von Bildern

Position

Die Position eines Bildes kann absolut am Bildschirm oder relativ zum Koordinatensystem gewählt werden (siehe Eigenschaften des Bildes, C.1.1). Letzteres wird durch die Angabe von bis zu drei Eckpunkten erreicht. Dadurch können Bilder sehr flexibel vergrößert, verkleinert, gedreht und sogar verzerrt werden.

- 1. Eckpunkt: er legt die Position des linken unteren Ecks des Bildes fest.
- 2. Eckpunkt (rechts unten): dieser Eckpunkt kann nur festgelegt werden, wenn auch der 1. Eckpunkt angegeben wurde. Er beeinflusst die Breite des Bildes.
- 4. Eckpunkt (links oben): dieser Eckpunkt kann nur festgelegt werden, wenn auch der 1. Eckpunkt angegeben wurde. Er beeinflusst die Höhe des Bildes.

Um diese Möglichkeit auszuprobieren, erstellen Sie am besten drei freie Punkte A, B und C. Legen Sie zunächst A als 1. und B als 2. Eckpunkt Ihres Bildes fest. Durch Ziehen der Punkte A und B im *Bewegen* Modus erkennen Sie deren Einfluss sehr einfach. Experimentieren Sie nun weiter, indem Sie A als 1. und C als 4. Eckpunkt verwenden. Abschließend setzen Sie alle drei Eckpunkte des Bildes, wodurch Sie es auch verzerren können.

Sie haben gesehen, dass Sie mit Hilfe der Eckpunkte sowohl die Größe als auch die Lage des Bildes festlegen können. Wenn Sie ein Bild an den Punkt A hängen möchten, dass 3 Einheiten breit und 4 Einheiten hoch sein soll, setzen Sie

- 1. Eckpunkt: A
- 2. Eckpunkt: A + (3,0)
- 3. Eckpunkt: A + (0,4)

Wenn Sie nun den Punkt A im *Bewegen* Modus verschieben, wandert das Bild mit dem Punkt mit und behält dabei die gewünschte Größe.

Siehe auch den Befehl *Eckpunkt* (D.3.13).

Hintergrundbild

Sie können ein Bild auch als *Hintergrundbild* verwenden (Eigenschaften des Bildes, C.1.1). Dadurch wird es hinter das Koordinatensystem gelegt und kann nicht mehr mit der Maus ausgewählt werden.

Um ein Hintergrundbild wieder in den Vordergrund zu holen, wählen Sie den Weg über das Menü *Bearbeiten*, *Eigenschaften*.

Transparenzeffekt

Sie können ein Bild durchsichtig machen, sodass dahinter liegende Bilder und die Koordinatenachsen sichtbar werden. Dazu können Sie die *Füllung* des Bildes in seinen Eigenschaften von 0% bis 100% einstellen.

Anhang D

Algebraische Eingabe

Hier wird erklärt, wie in GeoGebra mit der Tastatur Eingaben gemacht werden.

D.1 Allgemeines

Im Algebrafenster (links) werden die Werte, Koordinaten und Gleichungen von *freien* und *abhängigen* Objekten angezeigt. Freie Objekte hängen von keinen anderen Objekten ab und können direkt verändert werden.

Die Eingabe erfolgt in der Eingabezeile am unteren Bildschirmrand. Wie dies funktioniert ist in D.2 und D.3 erklärt.

D.1.1 Werte ändern

Freie Objekte können verändert werden, abhängige Objekte nicht. Um den Wert eines freien Objekts zu verändern, überschreiben Sie diesen einfach durch erneute Eingabe in der Eingabezeile (D.2).

Alternativ können Sie auch im Algebrafenster Änderungen vornehmen, indem Sie im Kontextmenü (C.1.1) Bearbeiten wählen.

D.1.2 Animation

Möchte man eine Zahl oder einen Winkel kontinuierlich verändern, gibt es dazu eine einfach Möglichkeit: Wählen Sie zunächst den Modus Bewegen (C.2.1). Markieren Sie die Zahl bzw. den Winkel im Algebrafenster und drücken anschließend die + oder - Taste.

Durch Gedrückt-Halten dieser Tasten lassen sich Animationen erzeugen. Hat ein Punkt beispielsweise die von einer Zahl k abhängigen Koordinaten `P=(2k, k)`, dann bewegt sich der Punkt bei kontinuierlicher Veränderung von k auf einer Geraden.

Mit Hilfe der Pfeiltasten lassen sich im Bewegen Modus alle freien Objekte verschieben. Die Schrittweite ist dabei unter Eigenschaften im Kontextmenü (C.1.1) veränderbar.

- Strg + Pfeiltaste ... 10 * Schrittweite

- Alt + Pfeiltaste ... 100 * Schrittweite

Für einen Punkt auf einer Linie können auch die Tasten + und - zur Bewegung entlang der Linie verwendet werden.

D.2 Direkte Eingabe

In GeoGebra können Zahlen, Winkel, Punkte, Vektoren, Geraden und alle Kegelschnitte behandelt werden. Hier wird erklärt, wie diese Objekte beispielsweise durch Koordinaten oder Gleichungen eingegeben werden können.

In Namen von Objekten können Sie auch Indizes verwenden: A_1 bzw. s_{AB} wird eingegeben als `A_1` bzw. `s_{AB}`.

D.2.1 Zahlen und Winkel

Zahlen und Winkel werden mit einem Punkt `.` als Kommatrennzeichen eingegeben.

Zahl r	`r = 5.32`

Winkel werden in Grad (°) oder Radiant (rad) angegeben. Für Angaben in Radiant ist die Konstante `pi` nützlich.

	Grad	Radiant
Winkel alpha	`alpha = 60°`	`alpha = pi / 3`

GeoGebra rechnet intern übrigens immer in Radiant. Das Symbol ° steht eigentlich für die multiplikative Konstante $\frac{\pi}{180}$ und rechnet Grad in Radiant um.

Schieberegler und Pfeiltasten

Freie Zahlen und Winkel können am Zeichenblatt als Schieberegler dargestellt werden (siehe C.2.10). Mit Hilfe der Pfeiltasten können Zahlen und Winkel im Algebrafenster verändert werden (siehe D.1.2).

Werte einschränken

Freie Zahlen und Winkel können auf ein Intervall [min, max] beschränkt werden (Eigenschaften, C.1.1). Dieses Intervall wird auch für die Darstellung als Schieberegler verwendet (siehe C.2.10).

Für einen abhängigen Winkel kann angegeben werden, ob er zu einem überstumpfen (erhabenen) Winkel werden darf (Eigenschaften, C.1.1).

D.2.2 Punkte und Vektoren

Punkte und Vektoren werden in cartesischen oder in Polarkoordinaten (D.2.1) eingegeben. Großbuchstaben kennzeichnen Punkte und Kleinbuchstaben Vektoren.

	cartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
Punkt P	`P = (1, 0)`	`P = (1; 0°)`
Vektor v	`v = (0, 5)`	`v = (5; 90°)`

D.2.3 Gerade

Geraden werden als Gleichung in x und y oder in Parameterdarstellung angegeben. In beiden Fällen können zuvor definierte Variablen (Zahlen, Punkte, Vektoren, . . .) verwendet werden. Der Name einer Geraden kann am Beginn gefolgt von einem Doppelpunkt angegeben werden.

	Gleichung	Parameterdarstellung
Gerade g	`g : 3x + 4y = 2`	`g : X = (-5, 5) + t (4, -3)`

Seien beispielsweise `k=2` und `d=-1` bereits definierte Zahlen. Dann kann eine Gerade auch als `g : y = k x + d` eingegeben werden.

xAchse und yAchse

Die beiden Achsen sind als Geraden über die Namen `xAchse` und `yAchse` in Befehlen verwendbar. Beispielsweise liefert `Senkrechte[A, xAchse]` die senkrechte Gerade zur x-Achse durch einen Punkt A.

D.2.4 Kegelschnitt

Kegelschnitte werden mittels einer quadratischen Gleichung in x und y angegeben. Dabei können zuvor definierte Variablen (Zahlen, Punkte, Vektoren, . . .) verwendet werden. Der Name eines Kegelschnitts kann am Beginn gefolgt von einem Doppelpunkt angegeben werden.

	Gleichung
Ellipse ell	ell : $9x^2 + 16y^2 = 144$
Hyperbel hyp	hyp : $9x^2 - 16y^2 = 144$
Parabel par	par : $y^2 = 4x$
Kreis k1	k1 : $x^2 + y^2 = 25$
Kreis k2	k2 : $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Seien beispielsweise `a=4` und `b=3` bereits definierte Zahlen. Dann kann eine Ellipse mit diesen Halbachsenlängen auch als ell : $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ eingegeben werden.

D.2.5 Funktion von x

Bei der Eingabe von Funktionen können Sie definierte Variablen (Zahlen, Punkte, Vektoren, ...) und andere Funktionen verwenden.

	Eingabe
Funktion f	f(x) = $3x^3 - x^2$
Funktion g	g(x) = $\tan(f(x))$
namenlose Funktion	$\sin(3x) + \tan(x)$

Welche internen Funktionen (sin, cos, tan, usw.) zur Verfügung stehen, erfahren Sie unter *arithmetische Operationen* (D.2.6).

Mit Hilfe von Befehlen erhalten Sie das Integral (D.3.11) und Ableitungen (D.3.11) einer Funktion. Für die Ableitung einer selbst definierten Funktion f(x) können Sie auch direkt `f'(x)`, `f''(x)`, ... verwenden:

$$\mathrm{f(x)} = 3x^3 - x^2$$
$$\mathrm{g(x)} = \cos(f'(x + 2))$$

Außerdem können Funktionen um einen Vektor verschoben (D.3.15) und eine freie Funktion mit der Maus bewegt werden.

Funktion auf Intervall einschränken

Um eine Funktion auf ein Intervall [a,b] einzuschränken, können Sie den Befehl `Funktion` verwenden (siehe D.3.11).

D.2.6 Arithmetische Operationen

Bei der Eingabe von Zahlen, Punktkoordinaten oder Gleichungen (D.2) können geklammerte arithmetische Ausdrücke mit Variablen verwendet werden. Dazu sind folgende Operationen verfügbar:

Operation	Eingabe
Addition	`+`
Subtraktion	`-`
Multiplikation, Skalarprodukt	`*` oder Leerzeichen
Division	`/`
Potenzieren	`^` oder ^{2}, ^{3}
Faktorielle	`!`
Gamma Funktion	`gamma( )`
Klammern	`( )`
x-Koordinate	`x( )`
y-Koordinate	`y( )`
Absolutbetrag	`abs( )`
Signum	`sgn( )`
Wurzel	`sqrt( )`
Exponentialfunktion	`exp( )`
Logarithmus (natürlicher)	`log( )`
Cosinus	`cos( )`
Sinus	`sin( )`
Tangens	`tan( )`
Arcus Cosinus	`acos( )`
Arcus Sinus	`asin( )`
Arcus Tangens	`atan( )`
Cosinus Hyperbolicus	`cosh( )`
Sinus Hyperbolicus	`sinh( )`
Tangens Hyperbolicus	`tanh( )`
Area Cosinus Hyperbolicus	`acosh( )`
Area Sinus Hyperbolicus	`asinh( )`
Area Tangens Hyperbolicus	`atanh( )`
Nächstkleinere ganze Zahl	`floor( )`
Nächstgrößere ganze Zahl	`ceil( )`
Runden	`round( )`

Der Mittelpunkt M zweier Punkte A und B könnte beispielsweise als `M=(A+B)/2` eingegeben werden. Die Länge eines Vektors v könnte mittels `l=sqrt(v*v)` bestimmt werden.

In GeoGebra kann also nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit Punkten und Vektoren gerechnet werden.

D.3 Befehle

Mit Hilfe von Befehlen können neue Objekte erzeugt oder bestehende verändert werden. Zum Beispiel entsteht beim Schneiden der Geraden g und h ein neuer Schnittpunkt: `Schneide[g, h]` (D.3.4).

Das Ergebnis eines Befehls kann benannt werden, indem man den Namen am Beginn gefolgt von einem `=` angibt. Im Beispiel `S = Schneide[g, h]` bekommt der Schnittpunkt der beiden Geraden also den Namen S.

In Namen von Objekten können Sie auch Indizes verwenden: A_1 bzw. s_{AB} wird eingegeben als `A_1` bzw. `s_AB`.

D.3.1 Allgemeine Befehle

Beziehung

`Beziehung[`Objekt a, Objekt b`]` zeigt ein Informationsfenster an, das Auskunft über die Beziehung von a und b gibt.

Mit diesem Befehl kann man beispielsweise herausfinden, ob zwei Objekte gleich sind, ob ein Punkt auf einer Geraden oder einem Kegelschnitt liegt, oder wie das Schnittverhalten einer Geraden und eines Kegelschnitts ist (Sekante, Passante, Tangente, Asymptote, ...).

Lösche

`Lösche[`Objekt`]` Löscht ein Objekt und alle davon abhängigen

D.3.2 Zahl

Länge

`Länge[`Vektor`]` Länge eines Vektors

`Länge[`Punkt A`]` Länge des Ortsvektors von A

Fläche

`Fläche[`Punkt, ..., Punkt`]` Fläche des durch die gegebenen Punkte definierten Vielecks

Abstand

`Abstand[`Punkt A, Punkt B`]` Abstand der Punkte A und B

`Abstand[`Punkt A, Gerade g`]` Normalabstand des Punktes A von der Geraden g

`Abstand[`Gerade g, Gerade h`]` Normalabstand de Geraden g und h. Für schneidende Geraden ist dieser Abstand 0. Diese Funktion ist also nur für parallele Geraden interessant.

Steigung

`Steigung[`Gerade`]` Steigung einer Geraden. Dieser Befehl zeichnet auch das Steigungsdreieck, welches in seiner Größe veränderbar ist (Eigenschaften, C.1.1).

Radius

`Radius[`Kreis`]` Radius eines Kreises

Parameter

`Parameter[`Parabel`]` Parameter einer Parabel (Abstand zwischen Leitlinie und Brennpunkt)

Hauptachsenlänge

`Hauptachsenlänge[`Kegelschnitt`]` Hauptachsenlänge eines Kegelschnitts

Nebenachsenlänge

`Nebenachsenlänge[`Kegelschnitt`]` Nebenachsenlänge eines Kegelschnitts

Exzentrizität

`Exzentrizität[`Kegelschnitt`]` Exzentrizität eines Kegelschnitts

Integral

`Integral[`Funktion f, Zahl a, Zahl b`]` Bestimmtes Integral von f(x) im Intervall [a, b]. Dieser Befehl zeichnet auch die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.

`Integral[`Funktion f, Funktion g, Zahl a, Zahl b`]` Bestimmtes Integral von f(x)-g(x) im Intervall [a, b]. Dieser Befehl zeichnet auch die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von f und g.

Siehe auch: unbestimmtes Integral, D.3.11.

Untersumme

`Untersumme[Funktion f, Zahl a, Zahl b, Zahl n]` Untersumme einer Funktion f im Intervall [a,b] mit n Rechtecken. Dieser Befehl zeichnet auch die Rechtecke der Untersumme.

Obersumme

`Obersumme[Funktion f, Zahl a, Zahl b, Zahl n]` Obersumme einer Funktion f im Intervall [a,b] mit n Rechtecken. Dieser Befehl zeichnet auch die Rechtecke der Obersumme.

D.3.3 Winkel

Winkel

`Winkel[Vektor, Vektor]` Winkel zwischen zwei Vektoren (zwischen 0 und 360°)

`Winkel[Gerade, Gerade]` Winkel zwischen den Richtungsvektoren zweier Geraden (zwischen 0 und 360°)

`Winkel[Punkt A, Punkt B, Punkt C]` Der von den Strecken BA und BC eingeschlossene Winkel (zwischen 0 und 360°). B ist der Scheitelpunkt.

`Winkel[Punkt A, Punkt B, Winkel alpha]` Winkel der Größe alpha ausgehend von B mit dem Scheitelpunkt A. Dabei wird auch der Punkt Drehe[B, A, a] erstellt.

`Winkel[Kegelschnitt]` Verdrehwinkel der Hauptachse (D.3.9) eines Kegelschnitts

`Winkel[Vektor v]` Winkel zwischen der x-Achse und dem Vektor v

`Winkel[Punkt A]` Winkel zwischen der x-Achse und dem Ortsvektor des Punktes A

`Winkel[Zahl]` Winkel zu einer Zahl (Ergebnis immer zwischen 0 und 2pi)

`Winkel[Vieleck]` Alle Innenwinkel des Vielecks

D.3.4 Punkt

Punkt

`Punkt[Gerade]` Punkt auf einer Geraden

`Punkt[Kegelschnitt]` Punkt auf einem Kegelschnitt (z.B. Kreis, Ellipse, Hyperbel)

`Punkt[Funktion]` Punkt auf einer Funktion

`Punkt`[Vektor] Punkt auf einem Vektor

`Punkt`[Punkt P, Vektor v] Punkt P + v

Mittelpunkt

`Mittelpunkt`[Punkt A, Punkt B] Mittelpunkt von A und B

`Mittelpunkt`[Strecke] Mittelpunkt einer Strecke

`Mittelpunkt`[Kegelschnitt] Mittelpunkt eines Kegelschnitts (z.B. Kreis, Ellipse, Hyperbel)

Brennpunkt

`Brennpunkt`[Kegelschnitt] (alle) Brennpunkte eines Kegelschnitts

Scheitel

`Scheitel`[Kegelschnitt] (alle) Scheitelpunkte eines Kegelschnitts

Schwerpunkt

`Schwerpunkt`[Vieleck] Schwerpunkt eines Vielecks

Schneide

`Schneide`[Gerade g, Gerade h] Schnittpunkt der Geraden g und h

`Schneide`[Gerade g, Kegelschnitt c] Schnittpunkte von g und c (höchstens 2)

`Schneide`[Gerade g, Kegelschnitt c, Zahl n] n-ter Schnittpunkt von g und c

`Schneide`[Kegelschnitt c, Kegelschnitt d] alle Schnittpunkte von c und d (höchstens 4)

`Schneide`[Kegelschnitt c, Kegelschnitt d, Zahl n] n-ter Schnittpunkt von c und d

`Schneide`[Polynom f, Polynom g] alle Schnittpunkte von f und g

`Schneide`[Polynom f, Polynom g, Zahl n] n-ter Schnittpunkt von f und g

`Schneide`[Polynom f, Gerade g] alle Schnittpunkte von f und g

`Schneide`[Polynom f, Gerade g, Zahl n] n-ter Schnittpunkt von f und g

`Schneide[`Funktion f, Funktion g, Punkt A`]` Schnittpunkt von f und g mit Startpunkt A (für Newton Methode)

`Schneide[`Funktion f, Gerade g, Punkt A`]` Schnittpunkt von f und g mit Startpunkt A (für Newton Methode)

Siehe auch: Modus *Schneide zwei Objekte*, C.2.2

Nullstelle

`Nullstelle[`Polynom f`]` alle Nullstellen des Polynoms f als Punkte

`Nullstelle[`Funktion f, Zahl a`]` eine Nullstelle der Funktion f mit Startwert a (Newton Methode)

`Nullstelle[`Funktion f, Zahl a, Zahl b`]` eine Nullstelle der Funktion f im Intervall [a, b] (regula falsi)

Extremum

`Extremum[`Polynom f`]` alle Extrema des Polynoms f als Punkte

Wendepunkt

`Wendepunkt[`Polynom f`]` alle Wendepunkte des Polynoms f

D.3.5 Vektor

Vektor

`Vektor[`Punkt A, Punkt B`]` Vektor von A nach B

`Vektor[`Punkt`]` Ortsvektor eines Punktes

Richtung

`Richtung[`Gerade`]` Richtungsvektor einer Geraden. Die Gerade $ax + by = c$ hat den Richtungsvektor $(b, -a)$.

Einheitsvektor

`Einheitsvektor[`Gerade`]` Richtungsvektor mit Länge 1 einer Geraden

`Einheitsvektor[`Vektor`]` Vektor mit Länge 1 sowie gleicher Richtung und Orientierung wie der angegebene Vektor

Normalvektor

`Normalvektor`[Gerade] Normalvektor einer Geraden. Die Gerade $ax + by = c$ hat den Normalvektor (a, b).

`Normalvektor`[Vektor] Normalvektor eines Vektors. Der Vektor (a, b) hat den Normalvektor $(-b, a)$.

Einheitsnormalvektor

`Einheitsnormalvektor`[Gerade] Normalvektor mit Länge 1 einer Geraden

`Einheitsnormalvektor`[Vektor] Normalvektor mit Länge 1 eines Vektors

D.3.6 Strecke

Strecke

`Strecke`[Punkt A, Punkt B] Strecke zwischen zwei Punkten A und B

`Strecke`[Punkt A, Zahl a] Strecke der Länge a ausgehen vom Punkt A. Dabei wird auch der Endpunkt der Strecke erzeugt.

D.3.7 Strahl

Strahl

`Strahl`[Punkt A, Punkt B] Strahl (Halbgerade) mit Anfangspunkt A durch B

`Strahl`[Punkt A, Vektor v] Strahl (Halbgerade) mit Anfangspunkt A und Richtung v

D.3.8 Vieleck

Vieleck

`Vieleck`[Punkt A, Punkt B, Punkt C, ...] Vieleck, das die gegebenen Punkte als Eckpunkte hat

D.3.9 Gerade

Gerade

`Gerade`[Punkt A, Punkt B] Gerade durch zwei Punkte A und B

`Gerade`[Punkt A, Gerade g] Gerade durch A parallel zu g

`Gerade`[Punkt A, Vektor v] Gerade durch A mit Richtung v

Senkrechte

`Senkrechte`[Punkt A, Gerade g] Gerade durch A senkrecht zu g

`Senkrechte`[Punkt A, Vektor v] Gerade durch A senkrecht zur Richtung v

Mittelsenkrechte

(Österreichisch: Streckensymmetrale)

`Mittelsenkrechte`[Punkt A, Punkt B] Mittelsenkrechte zur Strecke AB

`Mittelsenkrechte`[Strecke s] Mittelsenkrechte zur Strecke s

Streckensymmetrale

(Deutsch: Mittelsenkrechte)

`Streckensymmetrale`[Punkt A, Punkt B] Streckensymmetrale zur Strecke AB

`Streckensymmetrale`[Strecke s] Streckensymmetrale zur Strecke s

Winkelhalbierende

(Österreichisch: Winkelsymmetrale)

`Winkelhalbierende`[Punkt A, Punkt B, Punkt C] Winkelhalbierende zum Winkel(A, B, C). B ist der Scheitelpunkt des Winkels.

`Winkelhalbierende`[Gerade g, Gerade h] Beide Winkelhalbierenden zu g und h

Winkelsymmetrale

(Deutsch: Winkelhalbierende)

`Winkelsymmetrale`[Punkt A, Punkt B, Punkt C] Winkelsymmetrale zum Winkel(A, B, C). B ist der Scheitelpunkt des Winkels.

`Winkelsymmetrale`[Gerade g, Gerade h] Beide Winkelsymmetralen zu g und h

Tangente

`Tangente`[Punkt A, Kegelschnitt c] (alle) Tangenten durch A an c

`Tangente`[Gerade g, Kegelschnitt c] (alle) Tangenten parallel zu g an c

`Tangente`[Zahl a, Funktion f] Tangente an f(x) in x=a

`Tangente`[Punkt A, Funktion f] Tangente an f(x) in x=x(A)

Asymptote

`Asymptote`[Hyperbel c] beide Asymptoten einer Hyperbel

Leitlinie

`Leitlinie`[Parabel c] Leitlinie einer Parabel

Achsen

`Achsen`[Kegelschnitt c] Haupt- und Nebenachse eines Kegelschnitts

Hauptachse

`Hauptachse`[Kegelschnitt c] Hauptachse eines Kegelschnitts

Nebenachse

`Nebenachse`[Kegelschnitt c] Nebenachse eines Kegelschnitts

Polare

`Polare`[Punkt A, Kegelschnitt c] Polare von A bezüglich c

Durchmesser

`Durchmesser`[Gerade g , Kegelschnitt c] Durchmesser parallel zu g bezüglich c

`Durchmesser`[Vektor v, Kegelschnitt c] Durchmesser mit Richtung v bezüglich c

D.3.10 Kegelschnitt

Kreis

`Kreis[`Punkt M, Zahl r`]` Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r

`Kreis[`Punkt M, Strecke s`]` Kreis mit Mittelpunkt M und Radius = Länge[s]

`Kreis[`Punkt M, Punkt A`]` Kreis mit Mittelpunkt M durch den Punkt A

`Kreis[`Punkt A, Punkt B, Punkt C`]` Kreis durch die drei Punkte A, B, C

Ellipse

`Ellipse[`Punkt F, Punkt G, Zahl a`]` Ellipse mit Brennpunkten F, G und Hauptachsenlänge a. Es muss gelten: $2a >$ Abstand[F,G]

`Ellipse[`Punkt F, Punkt G, Strecke s`]` Ellipse mit Brennpunkten F, G und Hauptachsenlänge Länge[s]

Hyperbel

`Hyperbel[`Punkt F, Punkt G, Zahl a`]` Hyperbel mit Brennpunkten F, G und Hauptachsenlänge a. Es muss gelten: $0 < 2a <$ Abstand[F,G]

`Hyperbel[`Punkt F, Punkt G, Strecke s`]` Hyperbel mit Brennpunkten F, G und Hauptachsenlänge = Länge[s]

Parabel

`Parabel[`Punkt F, Gerade g`]` Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie g

Kegelschnitt

`Kegelschnitt[`Punkt A, Punkt B, Punkt C, Punkt D, Punkt E`]` Kegelschnitt durch fünf Punkte (keine vier liegen auf einer Geraden)

D.3.11 Funktion

Ableitung

`Ableitung[`Funktion f`]` Ableitung der Funktion f(x)

`Ableitung[`Funktion f, Zahl n`]` n-te Ableitung der Funktion f(x)

Integral

`Integral`[Funktion f] Unbestimmtes Integral der Funktion f(x)

Siehe auch: bestimmtes Integral, D.3.2.

Polynom

`Polynom`[Funktion f] liefert die ausmultiplizierte Polynomfunktion zu f.
Beispiel: *Polynom[*$(x-3)^2$*]* liefert $x^2 - 6x + 9$

TaylorPolynom

`TaylorPolynom`[Funktion f, Zahl a, Zahl n] Taylor Polynom der Funktion f um die Stelle x=a der Ordnung n

Funktion

`Funktion`[Funktion f, Zahl a, Zahl b] liefert eine Funktion, die im Intervall [a, b] gleich f und sonst undefiniert ist.

D.3.12 Bogen und Sektor

Der algebraische Wert eines Bogens ist seine Länge, der Wert eines Sektors ist seine Fläche.

Halbkreis

`Halbkreis`[Punkt A, Punkt B] Halbkreis über der Strecke AB

Kreisbogen

`Kreisbogen`[Punkt M, Punkt A, Punkt B] Kreisbogen mit Mittelpunkt M zwischen zwei Punkten A und B. Der Punkt B muss dabei nicht auf dem Kreis liegen.

Umkreisbogen

`Umkreisbogen`[Punkt, Punkt, Punkt] Kreisbogen durch drei Punkte

Bogen

`Bogen`[Kegelschnitt c, Punkt A, Punkt B] Kegelschnittbogen zwischen zwei Punkten A und B auf dem Kegelschnitt c (Kreis oder Ellipse)

`Bogen[Kegelschnitt c, Zahl t1, Zahl t2]` liefert einen Kegelschnittbogen zwischen zwei Parameterwerten t1 und t2, wobei intern folgende Parameterdarstellungen verwendet werden:

- Kreis: (r cos(t), r sin(t)), wobei r der Radius ist.
- Ellipse: (a cos(t), b sin(t)), wobei a und b die Längen der Haupt- und Nebenachse sind.

Kreissektor

`Kreissektor[Punkt M, Punkt A, Punkt B]` Kreissektor mit Mittelpunkt M zwischen zwei Punkten A und B. Der Punkt B muss dabei nicht auf dem Kreis liegen.

Umkreissektor

`Umkreissektor[Punkt, Punkt, Punkt]` Kreissektor durch drei Punkte

Sektor

`Sektor[Kegelschnitt c, Punkt A, Punkt B]` Kegelschnittsektor zwischen zwei Punkten A und B auf dem Kegelschnitt c (Kreis oder Ellipse)

`Sektor[Kegelschnitt c, Zahl t1, Zahl t2]` liefert einen Kegelschnittsektor (für Kreis oder Ellipse) zwischen zwei Parameterwerten t1 und t2, wobei intern folgende Parameterdarstellungen verwendet werden:

- Kreis: (r cos(t), r sin(t)), wobei r der Radius ist.
- Ellipse: (a cos(t), b sin(t)), wobei a und b die Längen der Haupt- und Nebenachse sind.

D.3.13 Bild

Eckpunkt

`Eckpunkt[Bild, Zahl n]` liefert den n-ten Eckpunkt des Bildes ($n = 1, \ldots, 4$).

D.3.14 Ortslinie

Ortslinie

`Ortslinie[Punkt P, Punkt Q]` liefert die Orstlinie des Punktes P in Abhängigkeit vom Punkt Q. Der Punkt Q muss dabei ein Punkt auf einer Linie sein.

D.3.15 Geometrische Abbildungen

Wenn einer der folgenden Befehle einer Variable zugewiesen wird, wird eine Kopie des bewegten Objekts erstellt. Der Befehl `Spiegle[A, g]` spiegelt den Punkt A an der Geraden g und verändert dabei den Punkt A. Der Aufruf `B = Spiegle[A, g]` erzeugt hingegen einen neuen Punkt B durch Spiegelung von A an der Geraden g. Hier bleibt A unverändert.

Verschiebe

`Verschiebe`[Punkt A, Vektor v] Verschiebt den Punkt A um den Vektor v

`Verschiebe`[Gerade g, Vektor v] Verschiebt die Gerade g um den Vektor v

`Verschiebe`[Kegelschnitt c, Vektor v] Verschiebt den Kegelschnitt c um den Vektor v

`Verschiebe`[Funktion f, Vektor v] Verschiebt die Funktion f um den Vektor v

`Verschiebe`[Vieleck P, Vektor v] Verschiebt das Vieleck P um den Vektor v. Dabei werden neue Eckpunkte und Seiten erstellt.

`Verschiebe`[Bild b, Vektor v] Verschiebt das Bild b um den Vektor v

`Verschiebe`[Vektor v, Punkt P] Verschiebt den Vektor v zum Punkt P

Drehe

`Drehe`[Punkt A, Winkel phi] Dreht den Punkt A um den Winkel phi um den Nullpunkt

`Drehe`[Vektor v, Winkel phi] Dreht den Vektor v um den Winkel phi

`Drehe`[Gerade g, Winkel phi] Dreht die Gerade g um den Winkel phi um den Nullpunkt

`Drehe`[Kegelschnitt c, Winkel phi] Dreht den Kegelschnitt c um den Winkel phi um den Nullpunkt

`Drehe`[Vieleck P, Winkel phi] Dreht das Vieleck P um den Winkel phi um den Nullpunkt. Dabei werden neue Eckpunkte und Seiten erstellt.

`Drehe`[Bild b, Winkel phi] Dreht das Bild b um den Winkel phi um den Nullpunkt

`Drehe`[Punkt A, Winkel phi, Punkt B] Dreht den Punkt A um den Winkel phi um den Punkt B

`Drehe`[Gerade g, Winkel phi, Punkt B] Dreht die Gerade g um den Winkel phi um den Punkt B

`Drehe[`Kegelschnitt c, Winkel phi, Punkt B`]` Dreht den Kegelschnitt c um den Winkel phi um den Punkt B

`Drehe[`Vieleck P, Winkel phi, Punkt B`]` Dreht das Vieleck P um den Winkel phi um den Punkt B. Dabei werden neue Eckpunkte und Seiten erstellt.

`Drehe[`Bild b, Winkel phi, Punkt B`]` Dreht das Bild b um den Winkel phi um den Punkt B

Spiegle

`Spiegle[`Punkt A, PunktB`]` Spiegelt den Punkt A am Punkt B

`Spiegle[`Gerade g, PunktB`]` Spiegelt die Gerade g am Punkt B

`Spiegle[`Kegelschnitt c, Punkt B`]` Spiegelt den Kegelschnitt c am Punkt B

`Spiegle[`Vieleck P, Punkt B`]` Spiegelt das Vieleck P am Punkt B. Dabei werden neue Eckpunkte und Seiten erstellt.

`Spiegle[`Bild b, Punkt B`]` Spiegelt das Bild b am Punkt B

`Spiegle[`Punkt A, Gerade h`]` Spiegelt den Punkt A an der Geraden h

`Spiegle[`Gerade g, Gerade h`]` Spiegelt die Gerade g an der Geraden h

`Spiegle[`Kegelschnitt c, Gerade h`]` Spiegelt den Kegelschnitt c an der Geraden h

`Spiegle[`Vieleck P, Gerade h`]` Spiegelt das Vieleck P an der Geraden h. Dabei werden neue Eckpunkte und Seiten erstellt.

`Spiegle[`Bild b, Gerade h`]` Spiegelt das Bild b an der Geraden h

StreckeZentrisch

`StreckeZentrisch[`Punkt A, Zahl f, Punkt S`]` Streckt den Punkt A vom Punkt S aus um den Faktor f

`StreckeZentrisch[`Gerade g, Zahl f, Punkt S`]` Streckt die Gerade g vom Punkt S aus um den Faktor f

`StreckeZentrisch[`Kegelschnitt c, Zahl f, Punkt S`]` Streckt den Kegelschnitt c vom Punkt S aus um den Faktor f

`StreckeZentrisch[`Vieleck P, Zahl f, Punkt S`]` Streckt das Vieleck P vom Punkt S aus um den Faktor f

`StreckeZentrisch[Bild b, Zahl f, Punkt S]` Streckt das Bild b vom Punkt S aus um den Faktor f

Anhang E

Drucken und Export

E.1 Drucken

E.1.1 Zeichenblatt

Im Menü *Datei*, *Druckvorschau* finden Sie den Punkt *Zeichenblatt*. Im erscheinenden Fenster können Sie Ihren Ausdruck beschriften (Titel, Autor, Datum) und den Maßstab der x-Achse in cm angeben.

Drücken Sie nach jeder Änderung die Eingabetaste, dann sehen Sie sofort die Änderung im Vorschaufenster.

E.1.2 Konstruktionsprotokoll

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Druckvorschau des Konstruktionsprotokolls aufzurufen:

- Im Menü *Datei*, *Export* finden Sie den Punkt *Druckvorschau*.
- Im Menü *Ansicht* öffnen Sie zunächst das *Konstruktionsprotokoll*. Dort finden Sie im Menü *Datei* den Punkt *Druckvorschau*.

Der zweite Weg ist der flexiblere, da Sie hier zunächst noch die Möglichkeit haben, bestimmte Spalten des Konstruktionsprotokolls ein- bzw. auszublenden (siehe Menü *Ansicht* des Konstruktionsprotokolls).

Im Druckvorschau-Fenster können Sie Titel, Autor sowie Datum angeben.

E.2 Zeichenblatt als Bild exportieren

Im Menü *Datei*, *Export* finden Sie den Punkt *Zeichenblatt als Bild*. Im erscheinenden Fenster können Sie angeben, in welchem Maßstab und mit welcher Auflösung (dpi) das

Bild exportiert werden soll. Die wahre Größe des Bildes in cm und Bildschirmpunkten (pixel) ist am unteren Rand des Dialogfensters zu sehen. Unter *Format* haben Sie die Wahl zwischen den folgenden beiden Grafikformaten:

PNG - Portable Network Graphics: Hierbei handelt es sich um ein Raster-Grafikformat. Je höher die Auflösung (dpi), desto höher die Qualität (300dpi reichen für die meisten Zwecke aus). PNG Grafiken sollten nachträglich weder vergrößert noch verkleinert werden, da sich dadurch in der Regel die Qualität verschlechtert.

Die Verwendung von PNG Grafiken empfiehlt sich für den Einsatz auf Webseiten (html) und mit Microsoft Word. Wenn Sie eine PNG Grafik in Word einfügen (Menü *Einfügen*, *Grafik aus Datei*), achten Sie darauf, dass die Größe des Bildes auf 100% eingestellt ist, da ansonsten der angegebene Maßstab verändert wird.

EPS - Encapsulated Postscript: Hierbei handelt es sich um ein Vektor-Grafikformat. EPS Grafiken können ohne Qualitätsverlust beliebig vergrößert und verkleinert werden. Die Verwendung von EPS Grafiken empfiehlt sich für den Einsatz mit Vektorgrafik-Programmen wie Corel Draw und professionellen Textverarbeitungssystemen wie LaTeX.

Die Auflösung einer EPS Grafik beträgt übrigens immer 72dpi, wobei dieser Wert nur für die Berechnung der wahren Größe des Bildes in cm verwendet wird und keinen Einfluss auf die Qualität hat.

Hinweis: der Transparenz-Effekt beim Füllen von Vielecken oder Kegelschnitten ist beim EPS Export nicht möglich. Objekte können hier nur zu 100% oder gar nicht gefüllt werden.

E.3 Zeichenblatt in Zwischenablage

Im Menü *Datei*, *Export* finden Sie den Punkt *Zeichenblatt in Zwischenablage*. Dabei wird ein Screenshot des Zeichenblattes als PNG Grafik in die Zwischenablage kopiert, sodass es in jedem anderen Programm eingefügt werden kann (z.B. in ein Microsoft Word Dokument).

Um Ihre Konstruktion maßstabsgetreue in ein anderes Programm zu übernehmen, verwenden Sie den Menüpunkt *Zeichenblatt als Bild exportieren* und fügen die so erzeugte Bilddatei im neuen Programm ein (in Word: im Menü *Einfügen*, *Grafik aus Datei*).

E.4 Konstruktionsprotokoll als Webseite

Es gibt zwei Möglichkeiten, das Fenster *Export Konstruktionsprotokoll* aufzurufen:

- Im Menü *Datei*, *Export* finden Sie den Punkt *Konstruktionsprotokoll als Webseite (html)*.
- Im Menü *Ansicht* öffnen Sie zunächst das *Konstruktionsprotokoll*. Dort finden Sie im Menü *Datei* den Punkt *Export als Webseite*.

Der zweite Weg ist der flexiblere, da Sie hier die Möglichkeit haben, bestimmte Spalten des Konstruktionsprotokolls ein- bzw. auszublenden (siehe Menü *Ansicht* des Konstruktionsprotokolls).

Im Export Fenster können Sie Titel, Autor sowie Datum angeben und auswählen, ob Sie ein Bild des Zeichenblattes und des Algebrafensters zusammen mit Ihrem Konstruktionsprotokoll exportieren möchten. Die exportierte HTML Datei können Sie mit jedem Internet Browser (z.B. Mozilla, Internet Explorer) betrachten und mit vielen Textverarbeitungsprogrammen (z.B. Frontpage, Word) nachträglich bearbeiten.

E.5 Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite

Im Menü *Datei*, *Export* finden Sie den Punkt *Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite (html)*.

Im Export Fenster können Sie Titel, Autor sowie Datum und einen Text oberhalb und unterhalb der dynamischen Konstruktion angeben (z.B. für eine Beschreibung der Konstruktion und Arbeitsaufträge). Die Konstruktion selbst kann entweder direkt in die Webseite eingebettet sein oder via Schaltfläche geöffnet werden.

Hinweis: wählen Sie die Werte für die Breite und Höhe einer dynamischen Konstruktion nicht zu groß, damit diese im Internet Browser gut sichtbar ist.

Beim Exportieren werden drei Dateien erstellt:

1. html Datei, z.B. *kreis.html* - diese Datei enthält das eigentliche Arbeitsblatt
2. ggb Datei, z.B. *kreis_worksheet.ggb* - diese Datei enthält Ihre GeoGebra Konstruktion
3. *geogebra.jar* - diese Datei enthält GeoGebra und macht Ihr Arbeitsblatt interaktiv

Alle drei Dateien - also z.B. *kreis.html*, *kreis_worksheet.ggb* und *geogebra.jar* - müssen sich im gleichen Ordner befinden, damit das Arbeitsblatt funktioniert. Sie können aber natürlich alle drei Dateien zusammen in einen beliebigen anderen Ordner kopieren.

Wichtiger Hinweis: Die exportierte HTML Datei - z.B. *kreis.html* - können Sie mit jedem Internet Browser (z.B. Mozilla, Netscape, Internet Explorer) verwenden. Damit die dynamische Konstruktion auch funktioniert, muss auf dem Rechner Java installiert sein. Java erhalten Sie kostenlos unter *http://www.java.com*. Wenn Sie das dynamische Arbeitsblatt in Ihrem Schulnetzwerk verwenden möchten, so bitten Sie Ihren Netzwerkadministrator, Java auf den Rechnern zu installieren.

Den Text des Arbeitsblattes können Sie übrigens in vielen Textverarbeitungsprogrammen (z.B. Frontpage, Word) nachträglich bearbeiten, indem Sie die exportierte HTML Datei öffnen.

Anhang F

Einstellungen

Unter dem Menüpunkt *Einstellungen* können einige globale Optionen verändert werden. Um Objekt-Einstellungen zu ändern, verwenden Sie bitte das Kontextmenü (C.1.1).

F.1 Punktfang

Punktfang an Koordinatengitter

F.2 Winkeleinheit

Legt fest, ob Winkel in Grad (°) oder Radiant (`rad`) angezeigt werden.

Die Eingabe der Winkel ist jedoch immer auf beide Arten (Grad und Radiant) möglich.

F.3 Kommastellen

Angezeigte Nachkommastellen einstellbar: $0, 1, \ldots, 5$

F.4 Punktdarstellung

Legt die Darstellung von Punkten als kleiner ausgefüllter Kreis oder als kleines Kreuz fest.

F.5 Grafik

Legt die Qualität der Grafikausgabe im Geometriefenster fest.

Auf langsamen Computern kann es passieren, dass die Grafikausgabe im Modus *Bewegen* ruckelt. In diesem Fall kann die Geschwindigkeit der Grafikausgabe durch Umschalten auf *Geringe Qualität* erhöht werden.

F.6 Schriftgröße

Legt die Größe der Schrift in Punkten (pt) fest.

F.7 Sprache

GeoGebra ist mehrsprachig. Hier kann jederzeit die Sprache verändert werden. Dies betrifft sämtliche Eingaben (auch Befehle) und Anzeigen.

F.8 Zeichenblatt

Öffnet den Dialog für die Einstellungen des Zeichenblattes (Achsen, Koordinatengitter, usw.).

Literaturverzeichnis

[1] Artigue, M. ; Lagrange, J.-B.: Pupils learning algebra with Derive - a didactic perspective. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 4 (1997), S. 105–112

[2] Aspetsberger, K. ; Fuchs, K. u. a.: *Das österreichische DERIVE Projekt*. Wien : Bundesministerium für Unterricht und Kunst, 1994

[3] Ausubel, D.P. ; Novak, J.D ; Hanesian, H.: *Psychologie des Unterrichts*. 2. Weinheim : Beltz, 1981

[4] Baumgartner, P. ; Payr, S.: Lernen mit Software. In: *Reihe Digitales Lernen* (1994)

[5] Baumgartner, P. ; Payr, S.: *Lernen mit Software. Reihe Digitales Lernen*. Innsbruck : Österreichischer StudienVerlag, 1994

[6] Beck, I. u. a.: Questioning the author: A year long classrom implementation to engage students in text. In: *Elementary School Journal* 96 (1996), S. 385–414

[7] Becker, G.: Die 'neuen' Medien im Unterricht. In: *Computer und Unterricht* (2000), Nr. 37, S. 11–13

[8] Beckmann, A.: Probleme beim Beweisenlernen - DGS als Lösung? In: *Zeichnung - Figur - Zugfigur*. Franzbecker, 2001, S. 21–30

[9] Bender, P.: Kritik der Logo-Philosophie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 8 (1987), S. 3–103

[10] Bender, P. ; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*. Bd. 12. hpt, 1985

[11] Blumstengel, A.: *Entwicklung hypermedialer Lernsysteme*. Wissenschaftlicher Verlag Berlin, 1998

[12] BMBWK: *Österreichischer Lehrplan für die HS / AHS Unterstufe*. http://www.bmbwk.gv.at, 11. Mai 2000

[13] BMBWK: *Österreichischer Lehrplan für die AHS Oberstufe.* http://www.bmbwk.gv.at, 8. Juli 2004

[14] BMUK: *Neue Techniken im Geometrischen Zeichnen.* Bd. III. 1991

[15] Borovcnik, M. ; Kautschitsch, H.: Technology in Mathematics Teaching. In: *Proceedings of ICTMT 5 in Klagenfurt 2001.* Wien : öbv & hpt, 2002

[16] Bruner, J.: The act of discovery. In: *Harvard Educational Review* (1961), Nr. 31, S. 21–32

[17] Bruner, J.: *Der Prozeß der Erziehung.* 2. Berlin : Pädagogischer Verlag Schwann, 1972

[18] Buchberger, B. ; Jebelean, T.: Teaching of Mathematics using Theorema. In: *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* (1999), Nr. 6, S. 25–50

[19] Clark, R. ; Mayer, R.E.: *e-Learning and the Science of Instruction.* San Francisco : Pfeiffer, 2002

[20] Clark, R.E.: Media will never influcence learning. In: *Educational Technology Research and Development* 2 (1994), Nr. 42, S. 21–30

[21] Davenport, J.H.: Computer algebra - past, present and future. In: *Euromath Bulletin* 1 (1994), Nr. 2, S. 25–44

[22] Dewey, J.: *Interest and effort in education.* Cambridge, MA : Houghton Mifflin, 1913

[23] Dienes, Z.P.: *Methodik der modernen Mathematik.* Freiburg, 1970

[24] Dillon, A. ; Gabbard, R.: Hypermedia as an educational technology: A review of the quantitative research lieterature on learner comprehension, control, and style. In: *Educational Psychology* (1998), Nr. 81, S. 240–246

[25] Dörfler, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik* Bd. 21. Wien : hpt, 1991, S. 51–75

[26] Duval, R.: Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: Hitt (Hrsg.) ; Santos (Hrsg.): *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Bd. 1, 1999, S. 3–26

[27] EBBINGHAUS, H.: *Über das Gechächtnis. Untersuchungen zur experimentellen Psychologie*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1971. – Nachdruck der Ausgabe von 1885

[28] EDELMANN, W.: *Lernpsychologie*. 6. Weinheim : Beltz, 2000

[29] ELSCHENBROICH, H.-J.: Dynamische Geometrieprogramme: Tod des Beweisens oder Entwicklung einer neuen Beweiskultur? In: *MNU* 8 (1997), Nr. 50

[30] ELSCHENBROICH, H.-J.: Visuelles Beweisen - Neue Möglichkeiten durch Dynamische Geometrie Software. In: *BzMU 1999* (1999), S. 157–160

[31] ELSCHENBROICH, H.-J.: Lehren und Lernen mit interaktiven Arbeitsblättern. Dynamik als Unterrichtsprinzip. In: HERGET (Hrsg.) ; SOMMER (Hrsg.): *Lernen im Mathematikunterricht*. Hildesheim : Franzbecker, 2001, S. 31–39

[32] ELSCHENBROICH, H.-J.: Funktionen dynamisch entdecken. In: BENDER (Hrsg.) ; HERGET (Hrsg.) ; WEIGAND (Hrsg.) ; WETH (Hrsg.): *Lehr und Lernprogramme für den Mathematikunterricht*. Hildesheim : Franzbecker, 2003

[33] FOLEY, J.D. u. a.: *Computer graphics: principles and practice*. 2. Addison-Wesley, 1990

[34] FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. 1. Stuttgart : Klett, 1973

[35] FREYTAG, K.: Präformales Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1993), S. 136–139

[36] FUCHS, K.: Computer im Geometrisch-Zeichenunterricht - Integrieren statt Ersetzen. In: *Informationsblätter für Darstellende Geometrie* 1 (1990), S. 1–4

[37] FUCHS, K.: Computeralgebrasysteme im Unterricht - Einige konkrete Beispiele. In: *Didaktik der Mathematik* 3 (1995), S. 228–238

[38] FUCHS, K.: Conic sections escape R^2. In: *DERIVE News Letter* (1995), Nr. 19, S. 5–13

[39] FUCHS, K:: Computer im Mathematikunterricht - Erfahrungen und Gedanken. In: *Didaktikhefte der ÖMG* (1997), Nr. 26, S. 21–35

[40] FUCHS, K.: *Computeralgebra — Neue Perspektiven im Mathematikunterricht*. Universität Salzburg, 1998

[41] Fuchs, K. ; Hohenwarter, M.: Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra. In: *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching*. Pecs, Hungary, 2005, S. 128–133

[42] Fuchs, K. ; Vasarhelyi, E.: Algebra und Geometrie - Zwei gleichwertige Partner. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (1998), S. 623–626

[43] Führer, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Braunschweig - Wiesbaden : Vieweg, 1997

[44] Glenberg, A.M. ; Sanocki, T. ; Epstein, W. ; Morris, C.: Enhancing calibration of comprehension. In: *Journal of Experimental Psychology* (1987), Nr. 12, S. 119–136

[45] Goldenberg, P. ; Lewis, P. ; O'Keefe, J.: Dynamic representation and the development of an understanding of function. In: Harel, E. (Hrsg.): *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* Bd. 25. Washington : Mathematical Association of America, 1991

[46] Gutzmer, A.: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran. In: Gutzmer, A. (Hrsg.): *Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*. Leipzig : Teubner, 1908, S. 93–114. – Nachdruck in: Der Mathematikunterricht 26 (1980), Heft 6, S. 53–62

[47] Hall, W.E. ; Cushing, J.R.: The relative value of three methods of presenting learning material. In: *Journal of Psychology* (1947), Nr. 24, S. 57–62

[48] Hefendehl-Hebeker, L.: Perspektiven für einen künfigten Mathematikunterricht. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (1999), Nr. 4, S. 133–137

[49] Hefendehl-Hebeker, L. ; Hussmann, S.: Beweisen - Argumentieren. In: Leuders, T. (Hrsg.): *Mathematik Didaktik*. Berlin : Cornelsen, 2003, S. 93–106

[50] Hegarty, M. u. a.: Diagrams in the comprehension of scientific texts. In: Barr, R. (Hrsg.) u. a.: *Handbook of reading research* Bd. 2. Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates, 1996, S. 641–668

[51] Heugl, H. ; Klinger, W. ; Lechner, J.: *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen*. Bonn : Addison-Wesley, 1996

[52] Hischer, H. (Hrsg.): *Mathematikunterricht und Computer - neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen?* Hildesheim : Franzbecker, 1994

[53] HISCHER, H.: *Mathematikunterricht und Neue Medien.* 2. Hildesheim, Berlin : Franzbecker, 2003

[54] HOHENWARTER, M.: *GeoGebra — ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*, Universität Salzburg, Diplomarbeit, 2002

[55] HOHENWARTER, M.: GeoGebra — dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. In: *Der Mathematikunterricht* 4 (2003), S. 33–40

[56] HOHENWARTER, M.: Geometrie und Algebra Seite an Seite. In: *Noeo Wissenschaftsmagazin* 2 (2003), S. 43

[57] HOHENWARTER, M.: *Dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra.* Lernpfad zu Intel Lehren für die Zukunft, 2004. – http://aufbaukurs.intel-lehren.de

[58] HOHENWARTER, M.: Dynamische Mathematik mit GeoGebra. In: *Praxis der Mathematik* 6 (2004), S. 293–295

[59] HOHENWARTER, M.: GeoGebra: Dynamische Geometrie, Algebra und Analysis für die Schule. In: *Computeralgebra-Rundbrief* 2 (2004), Nr. 35, S. 16–20

[60] HOHENWARTER, M.: *Geometrie und Algebra - Seite an Seite.* Lernpfad zu Intel Lehren für die Zukunft, 2004. – http://aufbaukurs.intel-lehren.de

[61] HOHENWARTER, M.: *Steigung und Ableitung einer Funktion mit GeoGebra.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2004. – http://www.lehrer-online.de

[62] HOHENWARTER, M.: Bidirektionale Verbindung von dynamischer Geometrie und Algebra in GeoGebra. In: *erscheint im Tagungsband des GDM Arbeitskreises für Mathematikunterricht und Informatik.* Soest, 2005

[63] HOHENWARTER, M.: *Dynamische Mathematik mit GeoGebra 2.5.* Rezension bei Lehrer Online, 2005. – http://www.lehrer-online.de/url/geogebra

[64] HOHENWARTER, M. ; PREINER, Judith: *Mittels Mindmapping zur Kurvendiskussion.* Lernpfad zu Intel Lehren für die Zukunft, 2004. – http://aufbaukurs.intel-lehren.de

[65] HOHENWARTER, M. ; SCHMIDTPOTT, S.: *Einführung der trigonometrischen Funktionen.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2004. – http://www.lehrer-online.de

[66] HOHENWARTER, M. ; SCHMIDTPOTT, S.: *Integrale - forschend entdeckt.* Lernpfad zu Intel Lehren für die Zukunft, 2004. – http://aufbaukurs.intel-lehren.de

[67] HOHENWARTER, M. ; SCHMIDTPOTT, S.: *Integrale mit GeoGebra.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2004. – http://www.lehrer-online.de

[68] Hohenwarter, M. ; Schmidtpott, S.: *Besondere Linien im Dreieck.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2005. – http://www.lehrer-online.de

[69] Hohenwarter, M. ; Schmidtpott, S.: *Einführung der Exponentialfunktionen.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2005. – http://www.lehrer-online.de

[70] Hohenwarter, M. ; Schmidtpott, S.: *Spiegeln und Strecken.* Unterrichtseinheit bei Lehrer Online, 2005. – http://www.lehrer-online.de

[71] Hohenwarter, Markus: Komplexe Zahlen zum Anfassen. In: *TI-Nachrichten* 2 (1998), S. 16–17

[72] Holzinger, A.: Multimedia Literacy. In: *CD-Austria* (2001), Nr. 12

[73] Hölzl, R.: Dynamische Geometrie-Software als integraler Bestandteil des Lern- und Lehrarrangements. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 2 (2000), Nr. 21, S. 79–100

[74] Hussman, S.: *Mathematik entdecken und erforschen.* Berlin : Cornelsen, 2003

[75] ISB: *Bayerische Lehrpläne für das Gymnasium (G8).* http://www.isb.bayern.de, 1. August 2004

[76] Issing, L.: Instruktions-Design für Multimedia. In: Issing, L. (Hrsg.) ; Klimsa, P. (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia und Internet.* 3. Weinheim : Beltz, 2002, Kapitel 11, S. 151–176

[77] Issing, L. (Hrsg.) ; Klimsa, P. (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia und Internet.* 3. Weinheim : Beltz, 2002

[78] Jonassen, D.H.: Objectivism versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm? In: *Educational Technology Research & Development* 3 (1991), Nr. 39, S. 5–14

[79] Jonassen, D.H.: What are Cognitive Tools? In: *Cognitive Tools for Learning.* Springer, 1992, S. 1–6

[80] Kadunz, G.: *Visualisierung - Die Verwendung von Bildern beim Lernen von Mathematik.* München - Wien : Profil, 2003

[81] Kadunz, G. ; Kautschitsch, H.: Entwicklung und Evaluation einer Computer-Mikrowelt im Geometrie-Unterricht. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (1992), Nr. 24(5), S. 178–182

[82] Kautschitsch, H.: Computerunterstützte Geometrie als ein altersgemäßes Übungsfeld zur Erreichung formaler Qualifikationen. In: Kautschitsch, H. (Hrsg.) ; Metzler, W. (Hrsg.): *Anschauliche und Experimentelle Mathematik II* Bd. 22. Wien : hpt, 1994, S. 189–198

[83] Kautschitsch, H.: E-I-S-Bilder durch experimentelle Mathematik und 'neue' Medien. In: *Conference on Technology in Mathematics*. Koblenz, 1998. – CD-ROM

[84] Kautschitsch, H.: Reaktivierung funktionalen Denkens durch computerunterstützte experimentelle Mathematik. In: Kadunz, G. (Hrsg.): *Mathematische Bildung und neue Technologien*. Stuttgart : Teubner, 1998, S. 175–182

[85] Kautschitsch, H.: DGS-unterstütztes Vermuten und Beweisen. In: *Zeichnung - Figur - Zugfigur*. Franzbecker, 2001, S. 113–122

[86] Kerres, M.: Mediendidaktische Analyse digitaler Medien im Unterricht. In: *Computer und Unterricht* (2000), Nr. 37, S. 26–28

[87] Klemenz, H.: *3D-Geometer — ein interaktives Programm für computerunterstützte Raumgeometrie mit dem Macintosh*. Schweiz : Wetzikon, 1994

[88] Klimsa, P. (Hrsg.): *Neue Medien und Weiterbildung: Anwendung und Nutzung in Lernprozessen der Weiterbildung*. Weinheim : Deutscher Studien Verlag, 1993

[89] Klimsa, P.: Multimedianutzung aus psychologischer und didaktischer Sicht. In: Issing, L. (Hrsg.) ; Klimsa, P. (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia und Internet*. 3. Weinheim : Beltz, 2002, Kapitel 1, S. 5–17

[90] Knuth, D.E.: *The art of computer programming: Seminumerical Algorithms*. Bd. 2. 3. Addison-Wesley, 1998

[91] Koecher, M. ; Krieg, A.: *Ebene Geometrie*. 2. Berlin - Heidelberg - New York : Springer-Verlag, 2000

[92] Kommers, P.A.M. ; Grabinger, S. ; Dunlap, J.C.: *Hypermedia Learning Environments: Instructional Design and Integration*. 6. Hillsdale : Lawrence Erlbaum, 1996

[93] Kortenkamp, U.: *Foundations of Dynamic Geometry*, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Diss., 1999

[94] Krauthausen, P.: *Einführung in die Mathematikdidaktik*. München : Spektrum, 2004

[95] Krüger, K. (Hrsg.): *Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.* Berlin : Logos, 1999

[96] Kuehnel, J.: *Neubau des Rechenunterrichts.* Bd. 1. Leipzig, 1925

[97] Laborde, C.: Dynamic geometry environment as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. In: *Educational Studies in Mathematics* (2000), Nr. 44, S. 151–161

[98] Laborde, C. ; Laborde, J.-M.: The Case of Cabri-géomètre: learning geometry in a computer-based environment. In: *Integrating Information Technology into Education.* London : Chapman & Hall, 1995, S. 95–106

[99] Laborde, J.-M. ; Strässer, R.: Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 5 (1990), S. 171–177

[100] Leuders, T. (Hrsg.): *Mathematik Didaktik.* Berlin : Cornelsen, 2003

[101] Malle, G.: Funktionen untersuchen - ein durchgängiges Thema. In: *Mathematik Lehren* (2000), Nr. 103, S. 4–7

[102] Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik Lehren* (2000), Nr. 103, S. 8–11

[103] Mayer, R.E.: *Multimedia Learning.* Cambridge University Press, 2001

[104] Mayring, P.: *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* 4. Weinheim : Beltz, 1999

[105] Moreno, R. ; Mayer, R.E.: Multimedia-supported metaphors for meaning making in mathematics. In: *Cognition and Instruction* 17 (1994), S. 215–248

[106] Moreno, R. ; Mayer, R.E.: Engaging students in active learning: The case for personlized multimedia messages. In: *Journal of Educational Psychology* 94 (2000), S. 156–163

[107] Noss, C.: *Windows on Mathematical Meanings. Learning Cultures and Computers.* Dortrecht : Kluwer, 1996

[108] Piaget, J.: *Theorien und Methoden der modernen Erziehung.* Frankfurt : Fischer, 1974

[109] Press, W.H. u. a.: *Numerical Recipes in C++.* 2. Cambridge University Press, 2002

[110] Reichel, H.-C.: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. In: *Wissenschaftliche Nachrichten* (1995), Nr. 99, S. 20–25

[111] Reichel, H.-C. u. a.: *Lehrbuch der Mathematik*. Bd. 1–8. Wien : hpt, 1999

[112] Richter-Gebert, J. ; Kortenkamp, U.: Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 3/4 (2000), S. 303–324

[113] Schneider, E.: Veränderungen der Lern- und Unterrichtskultur im computerunterstützten Mathematikunterricht. In: *Integrativer Unterricht in Mathematik*. Salzburg : Abakus, 1997

[114] Schöning, U.: *Theoretische Informatik - kurzgefaßt*. 2. Heidelberg - Berlin - Oxford : Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1995

[115] Schumann, H.: *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer*. Stuttgart : Teubner und Metzler, 1991. – www.mathe-schumann.de

[116] Schumann, H.: Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: *Mathematik in der Schule* 10 (1998), Nr. 36, S. 562–569

[117] Schumann, H.: Methodenvariation mittels Dynamischer Geometrie - exemplarisch. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (1999), Nr. 4, S. 121–131

[118] Schumann, H.: Methoden der dynamischen Geometrie - eine Zusammenfassung. In: *BUS, Zeitschrift für Computernutzung an Schulen* 1 (2001), Nr. 43, S. 54–59

[119] Schumann, H. ; Green, D.: New protocols for solving geometric calculation problems incorporating dynamic geometry and computer algebra software. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 31 (2000), Nr. 3, S. 319–339

[120] Schweiger, F.: Rationale Punkte auf Kurven. In: *Wissenschaftliche Nachrichten* (1991), Nr. 87, S. 23–27

[121] Schweiger, F.: Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 2/3 (1992), S. 199–214

[122] Steinberg, E.R.: Cognition and learner control: A literatur review, 1977-1988. In: *Journal of Computer-Based Instruction* 4 (1989), Nr. 16, S. 117–121

[123] Strässer, R.: Cabri-géomètre: Does a Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? In: *International Journal for Computers in Mathematics Learning* 3 (2001), Nr. 6, S. 319–333

[124] Strässer, R.: Research on Dynamic Geometry Software (DGS) - an introduction. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 3 (2002), Nr. 34, S. 65

[125] Sweller, J. u. a.: Cognitive load and selective attention as factors in the structuring of technical material. In: *Journal of Experimental Psychology: General* 119 (1990), S. 176–192

[126] Tulodziecki, G. (Hrsg.) u. a.: *Neue Medien in den Schulen: Projekte-Konzepte-Kompetenzen*. Gütersloh : Verlag Bertelsmann Stiftung, 1996

[127] Vollrath, H.-J.: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg, Berlin : Spektrum, 2001

[128] Vollrath, H.J.: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1989), S. 3–37

[129] Weidenmann, B. (Hrsg.) u. a.: *Pädagogische Psychologie*. Weinheim : Beltz, 1993

[130] Weigand, H.-G.: *Computer im Mathematikunterricht*. Heidelberg, Berlin : Spektrum, 2002

[131] Weinert, F.E.: Selbstgesteuertes Lernen als Voraussetzung, Methode und Ziel des Unterrichts. In: *Unterrichtswissenschaften* (1982), Nr. 10, S. 99–110

[132] Weth, Th.: Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware. In: Hischer, H. (Hrsg.): *Wieviel Termunformung braucht der Mensch?* Hildesheim, 1993, S. 106–110

[133] Winroth, H.: *Dynamic Projective Geometry*, Stockholms Universitet, Diss., 1999

[134] Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig - Wiesbaden : Vieweg, 1988

[135] Wittmann, E.C.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Braunschweig - Wiesbaden : Vieweg, 1981

[136] Wittmann, E.C. ; Müller, G.N.: *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Bd. 1. Stuttgart : Klett, 1990

[137] Young, J.D.: The effect of self-regulated learning strategies on performance in learner controlled computer-based instruction. In: *Educational Technology Research and Development* 44 (1996), S. 137–166

[138] Zimbardo, P. ; Gerrig, R.: *Psychologie*. 7. Springer, 1999