Praktikum

Grundlagen der Elektrotechnik

Versuch:

Magnetischer Kreis

Versuchsanleitung

0. Allgemeines

Eine sinnvolle Teilnahme am Praktikum ist nur durch eine gute Vorbereitung auf dem jeweiligen Stoffgebiet möglich. Von den Teilnehmern wird daher eine intensive Beschäftigung mit der erforderlichen Theorie sowie mit der Aufgabenstellung bzw. ihrem Zweck vorausgesetzt.
Es gelten die allgemeinen Verhaltensvorschriften der Hochschule, insbesondere die

- Laborordnung des Fachbereiches Elektrotechnik

und die

- Arbeitsordnung für das Praktikum „Grundlagen der Elektrotechnik“.

1. Versuchsziel

Kennen lernen von Kenngrößen und Gesetzmäßigkeiten magnetischer Kreise bei Erregung mit Wechselstrom.

2. Grundlagen

2.1. Magnetische Feldgrößen

Jede Bewegung elektrischer Ladungsträger ist mit der Entstehung eines magnetischen Feldes verbunden. Dieses strombegleitende Magnetfeld kann durch die beiden vektoriellen physikalischen Größen **magnetische Flussdichte** (Induktion)

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x, y, z) \tag{1}$$

und **magnetische Feldstärke**

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(x, y, z) \tag{2}$$

beschrieben werden. Zur Veranschaulichung des Magnetfeldes dienen Feldlinien, die in jedem Punkt von den Flussdichtevektoren tangiert werden, und deren Dichte proportional zu B ist. Diese Feldlinien sind stets in sich geschlossen, was zu der Modellvorstellung eines so genannten quellenfreien Wirbelfeldes führt. Als **Magnetfluss** Φ definiert man

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} \tag{3}$$

Da das magnetische Feld quellen frei ist, gilt

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \Phi_{ges} = 0, \tag{4}$$

d.h., der gesamte eine geschlossene Hüllfläche durchsetzende Fluss ist Null. Integriert man längs eines geschlossenen Weges über die Feldstärke, so findet man, dass der Wert des Integrals gleich der Summe aller Ströme ist, die dieser Weg umfasst:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{s} = \sum_\nu I_\nu \quad . \tag{5}$$

Diese Beziehung heißt **Durchflutungsgesetz** des Magnetismus.

Auf Grund formaler Analogien zum stationären Strömungsfeld bezeichnet man die Summe der umfassten Ströme als magnetische Urspannung oder magnetomotorische Kraft Θ:

$$\Theta = \sum_{\nu} I_{\nu} \quad ; \tag{6}$$

das Linienintegral über die Feldstärke heißt **magnetischer Spannungsabfall** V:

$$V = \int_{s} \vec{H} d\vec{s} \quad . \tag{7}$$

Damit kann für das Durchflutungsgesetz auch

$$\sum_{\mu} V_{\mu} = \Theta \tag{8}$$

geschrieben werden.

Welcher Zusammenhang zwischen Feldstärke und Flussdichte besteht, hängt davon ab, in welchem Stoff sich das Feld ausbildet. Im Vakuum sind beide Größen exakt proportional zueinander:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \quad . \tag{9}$$

Der Proportionalitätsfaktor μ_0 wird als Induktionskonstante bezeichnet. Im stofferfüllten Raum gilt allgemein

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \qquad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad ; \tag{10}$$

μ_r heißt relative und μ absolute Permeabilität.

Für sehr viele Stoffe gilt praktisch μ_r=1 und damit μ=μ_0. Eine Ausnahme bilden so genannte Ferromagnetika (z. B. Eisen, Kobalt, Nickel), bei denen μ_r»1 gilt; weiterhin ist μ_r nicht mehr konstant, sondern selbst fe1dstärkeabhängig $(\mu = \mu(H))$. Darüber hinaus treten Hystereseeffekte auf: Erhöht man zunächst die Feldstärke H bis zu einem bestimmten Wert und reduziert sie dann wieder, so erhält man für die gleiche Feldstärke unterschiedliche Flussdichten B. Der funktionale Zusammenhang zwischen B und H (die so genannte Magnetisierungskurve) wird zur Hystereseschleife.

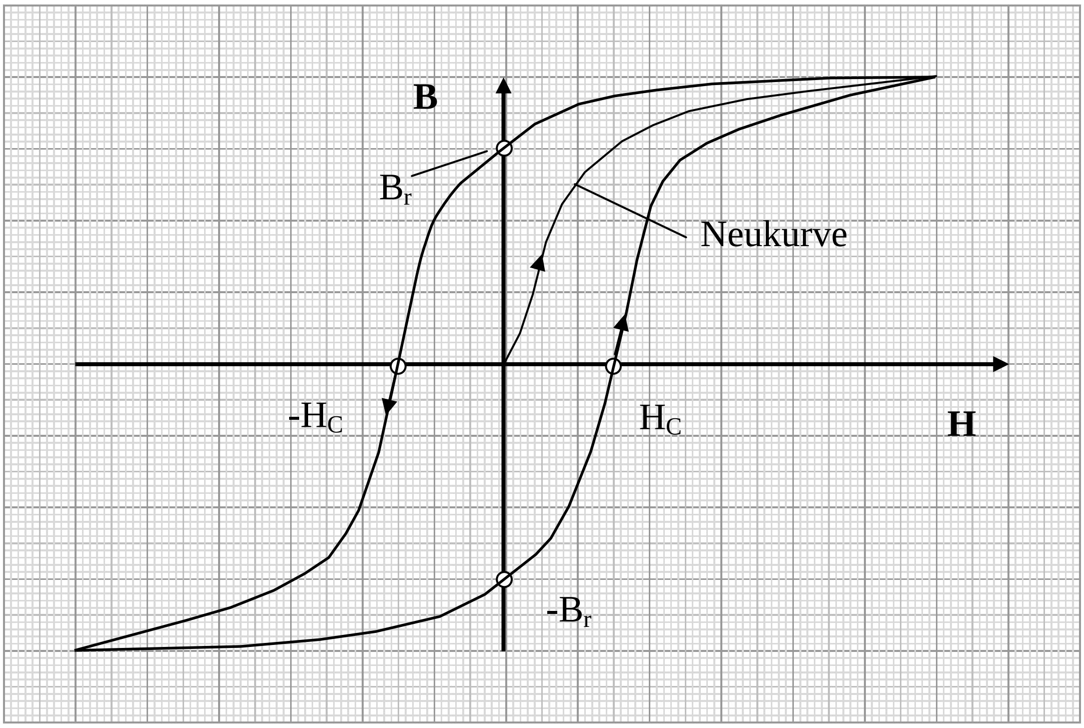


Abb. 1:Hystereseschleife (B_r Remanenzinduktion; H_C Koerzitivkraft)

2.2. Magnetische Kreise

In technischen Anordnungen, die magnetische Effekte nutzen, wird der Verlauf des Flusses Φ gewöhnlich durch Einsatz ferromagnetischer Stoffe gezielt beeinflusst. Teile aus ferromagnetischem Material haben somit die gleiche Funktion wie Leiter für das stationäre Strömungsfeld. Da weiterhin die Feld beschreibenden Gleichungen für beide Feldarten sehr ähnlich sind, kann die Berechnung magnetischer Kreise formal weitgehend analog zur Berechnung von Stromkreisen erfolgen. So lässt sich aus dem Durchflutungsgesetz der Maschensatz des magnetischen Kreises herleiten, aus dem Satz von der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes (Gleichung (4)) der Knotensatz. Aus Gleichung (10) folgt das Ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises, wobei

$$\frac{V}{\Phi} = R_m \qquad (11)$$

den so genannten magnetischen Widerstand definiert. Für den Fall des homogenen Feldes kann R_m mit Hilfe der Bemessungsgleichung

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l}{A} \qquad (12)$$

l = Weglänge;
A = vom Fluss senkrecht durchsetzter Querschnitt;

berechnet werden.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die bestehende Analogie zwischen Stromkreis und Magnetkreis:

Verwendete Symbole:

$\sum\limits_{O}$ ... Summation über geschlossenen Weg (Masche)

$\frac{\bullet}{\uparrow}$ $\frac{\bullet}{\downarrow}$ ... zum Knoten hin bzw. vom Knoten weg gerichtet

Stromkreis	magnetischer Kreis
Maschensatz	
$\oint\limits_{s} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_q \quad \rightarrow \quad \sum\limits_{O} U_\mu = \sum\limits_{O} U_{q_\nu}$	$\oint\limits_{s} \vec{H} d\vec{s} = \Theta \quad \rightarrow \quad \sum\limits_{O} V_\mu = \sum\limits_{O} \Theta_\nu$
Knotensatz	
$\oint\limits_{A} \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum\limits_{\frac{\bullet}{\uparrow}} I_\mu = \sum\limits_{\frac{\bullet}{\downarrow}} I_\nu$	$\oint\limits_{A} \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum\limits_{\frac{\bullet}{\uparrow}} \Phi_\mu = \sum\limits_{\frac{\bullet}{\downarrow}} \Phi_\nu$
Ohmsches Gesetz	
$\vec{S} = \kappa \vec{E} \quad \rightarrow \quad I = \frac{1}{R} \cdot U$	$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{R_m} \cdot V$
Bemessungsgleichung	
$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{A}$	$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}$

Aus den angeführten Analogien folgt, dass die Berechnung magnetischer Kreise mit den für elektrische Netzwerke üblichen Verfahren erfolgen kann (Zweigstromanalyse, Knotenspannungsanalyse etc.).

2.3. Selbst- und Gegeninduktion

<u>Induktionsgesetz:</u>
Ist der ein Magnetfeld erzeugende Strom zeitlich veränderlich, so gilt dies auch für das Magnetfeld selbst. Bringt man eine Drahtschleife in dieses Feld, dann kann an ihr eine elektrische Spannung gemessen werden. In der Drahtschleife wird folglich eine Urspannung induziert, deren Größe durch

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (13)$$

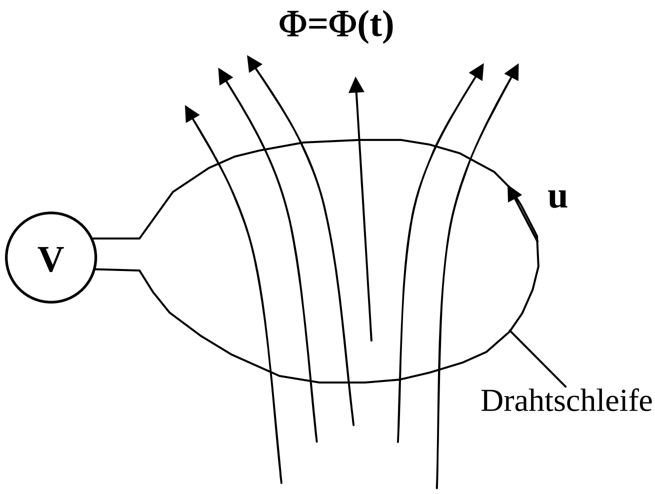


Abb. 2: Drahtschleife im zeitlich veränderlichen Magnetfeld

gegeben ist, wobei Φ den von der Schleife umfassten Fluss bezeichnet. Die Richtung von u wird so festgelegt, dass die Schleife, bezogen auf die Richtung des Flusses, im Sinne einer Rechtsschraube durchlaufen wird. Durchsetzt der Fluss nicht nur eine Schleife, sondern eine Spule mit w Windungen, so beträgt die induzierte Urspannung

$$u = -w\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(w\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \qquad \text{mit } \Psi = w\Phi \qquad (14)$$

da derselbe Fluss w-mal umfasst wird. Die Größe Ψ wird als verketteter Fluss bezeichnet.

Selbstinduktion:
Erzeugt ein Stromkreis einen zeitlich veränderlichen Magnetfluss, so induziert dieser Fluss in diesem Stromkreis eine Spannung, da auch der Stromkreis selbst den Fluss umfasst. An einer Spule hat dies einen Spannungsabfall von

$$u_{ind} = -u = w\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \tag{15}$$

zur Folge.

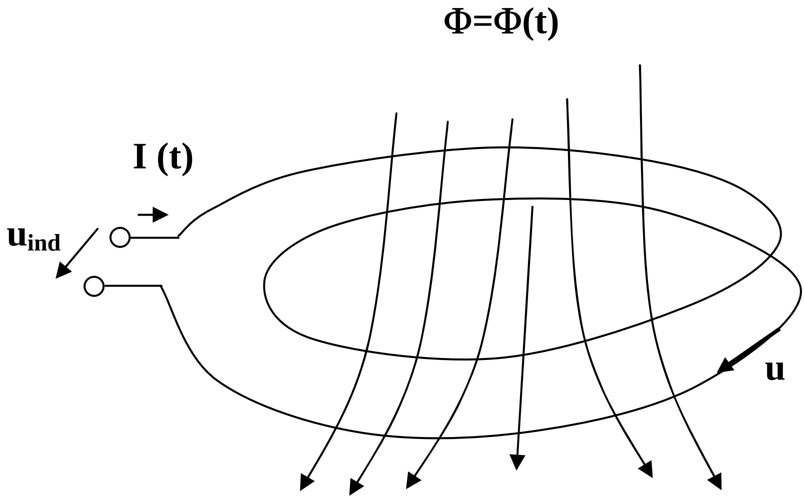


Abb. 3: Drahtschleife im zeitlich veränderlichen Magnetfeld

Gegeninduktion:
Durchsetzt der von einem Stromkreis erzeugte zeitlich veränderliche Magnetfluss Φ_{11} ganz oder teilweise einen zweiten Stromkreis, so wird auch dort eine Urspannung induziert. Wird der Teilfluss durch den zweiten Stromkreis mit Φ_{21} bezeichnet, gilt:

$$u = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -w_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}\ . \tag{16}$$

Bezüglich der Richtung von u gelten die Ausführungen zu Gleichung (13) sinngemäß. Zur Charakterisierung des Einflusses des ersten auf den zweiten Stromkreis dient der Flusskoppelfaktor k_l:

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}. \tag{17}$$

Vertauscht man beide Stromkreise, so ergeben sich analoge Verhältnisse; die induzierte Urspannung beträgt

$$u = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad , \tag{18}$$

und für den Flusskoppelfaktor k_2 gilt:

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}. \tag{19}$$

<u>Induktivität L:</u>
Als Induktivität L (auch Selbstinduktivität genannt) definiert man

$$L = \frac{\Psi}{I}. \tag{20}$$

Für den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Induktivität folgt aus (15) und (20) allgemein

$$-u = u_{ind} = \frac{d(LI)}{dt} = \left(\frac{dL}{dI} I + L\right)\frac{dI}{dt} \quad . \tag{21}$$

Für den Fall, dass zwischen Φ und I Proportionalität besteht, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$-u = u_{ind} = L\frac{dI}{dt} \quad . \tag{22}$$

Die Induktivität einer Spule mit w Windungen kann leicht berechnet werden, wenn R_m des zugehörigen magnetischen Kreises bekannt ist; wegen

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{wI}{R_m} \tag{23}$$

und (20) folgt für L:

$$L = \frac{w^2}{R_m}. \tag{24}$$

Gegeninduktivität M:
Analog zur Induktivität sind die Gegeninduktivitäten zwischen zwei Stromkreisen als

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad \text{und} \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \tag{25}$$

definiert. Betrachtet man zwei Spulen mit w_1 bzw. w_2 Windungen, so kann für (25) unter Verwendung der Flusskoppelfaktoren (17) und (19) auch

$$M_{12} = \frac{k_2 w_1 \Phi_{22}}{I_2} \quad \text{und} \quad M_{21} = \frac{k_1 w_2 \Phi_{11}}{I_1} \tag{26}$$

geschrieben werden. Für den Fall, dass die verketteten Flüsse Ψ_{12} und Ψ_{21} den Strömen I_2 und I_1 proportional sind (Linearität), gilt

$$M_{12} = M_{21} = M. \tag{27}$$

Damit und mit Gleichung (26) folgt für den Zusammenhang zwischen M, L_1 und L_2:

$$M = \sqrt{k_1 k_2} \cdot \sqrt{L_1 L_2} = k \cdot \sqrt{L_1 L_2}, \quad \text{d.h}$$
$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \tag{28}$$

Die Größe k heißt Koppelfaktor; als Streufaktor definiert man

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \tag{29}$$

Für die durch Gegeninduktivitäten induzierten Urspannungen gilt

$$-u_{12} = M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{und} \quad -u_{21} = M \frac{dI_1}{dt}. \tag{30}$$

2.4. Magnetische Kreise bei Erregung mit Wechselstrom

Werden magnetische Kreise mit sinusförmigen Wechselspannungen erregt, so hat auch der von der Erregerspule erzeugte Magnetfluss einen sinusförmigen Verlauf: Liegt an einer Spule mit w Windungen eine Spannung von

$$u(t) = \hat{u}\sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{31}$$

so erhält man für den Magnetfluss durch Lösen der Gleichung (15) für den Fluss

$$\Phi(t) = \hat{\Phi}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \tag{32}$$

Damit auch der Strom durch die Erregerspule sinusförmig verläuft, muss der magnetische Widerstand des Kreises konstant sein. Ist diese Bedingung erfüllt, dann kann zur Ermittlung der Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung an Induktivitäten und Gegeninduktivitäten die symbolische Methode (siehe Anleitung "Schwingkreise") verwendet werden. Für die in einer Induktivität induzierte Urspannung folgt damit aus Gleichung (22)

$$-\underline{u} = \underline{u}_{ind} = j\omega LI \tag{33}$$

und für Gegeninduktivitäten aus Gleichung (30)

$$-\underline{u}_{12} = j\omega MI_2 \quad , \quad -\underline{u}_{21} = j\omega MI_1 \quad . \tag{34}$$

Da magnetische Kreise in der Regel Ferromagnetika enthalten, stellt die Annahme konstanter magnetischer Widerstände eine Idealisierung dar, deren Zulässigkeit im konkreten Einzelfall zu prüfen ist. Weiterhin ist zu beachten, dass bei ferromagnetischen Stoffen Wirbelstrom- und Hystereseverluste auftreten, die bewirken, dass nicht der gesamte eine Spule durchfließende Strom zur magnetischen Durchflutung beiträgt.

3. Vorbereitungsaufgaben

3.1. Gegeben ist nachstehende Wertetabelle eines ferromagnetischen Kernmaterials für Auf- und Entmagnetisierung.

Aufmagnetisierung (H steigt):

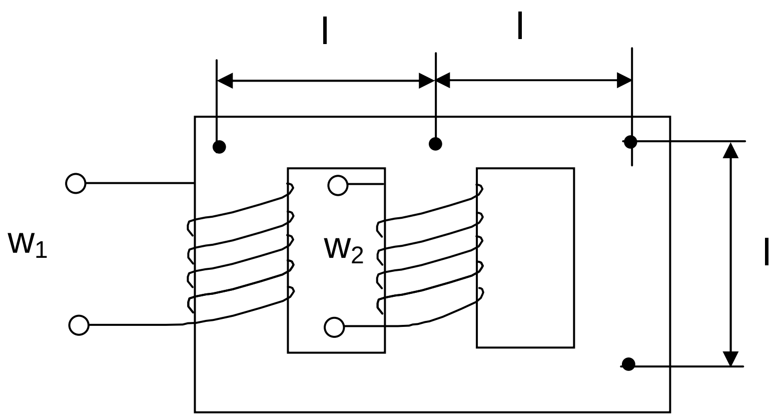
H/Acm^{-1}	-25	-15	-5	0	2,5	5	7,5	10	15	25	35
B/Vsm^{-2}	-1,1	-1.05	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1,05	1,1

Entmagnetisierung (H fällt):

H/Acm^{-1}	25	15	5	0	-2,5	-5	-7,5	-10	-15	-25	-35
B/Vsm^{-2}	1,1	1,05	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1,05	-1,1

a) Konstruieren Sie daraus die Kennlinie $\Phi = f(\Theta)$ bei einer Eisenlänge I_{Fe}= 20cm und einem Querschnitt $A=1cm^2$!
b) Zeichnen Sie in dieses Diagramm die Kennlinie für den magnetischen Widerstand $R_{m\,L}$ eines in den Werkstoff eingebrachten Luftspaltes $l_L=1{,}256mm$ ($A=1cm^2$)!
c) Konstruieren Sie die Kennlinie $\Phi=f(\Theta)$für den Eisenkern mit Luftspalt (Scherung der Magnetisierungskurve)!

3.2. Zeigen Sie für nebenstehenden Magnetkreis, dass $M_{12}=M_{21}$ gilt, wenn μ=const. vorausgesetzt wird!
(Der Querschnitt A des Eisenkerns ist überall gleich groß.)



4. Messaufgaben

4.1. Messen Sie für den aus Spule und Kern mit U-I-Schnitt bestehenden magnetischen Grundkreis die Zusammenhänge I=f(U) und Φ=f(U)

a) ohne Luftspalt und

b) mit Luftspalt l_L=2 mm.

Ermitteln Sie aus den aufgenommenen Kennlinien die Funktionen Φ = f(I) und

L=f(I) und stellen Sie diese graphisch dar!

Ermitteln und stellen Sie für den Fall a) die Funktionen

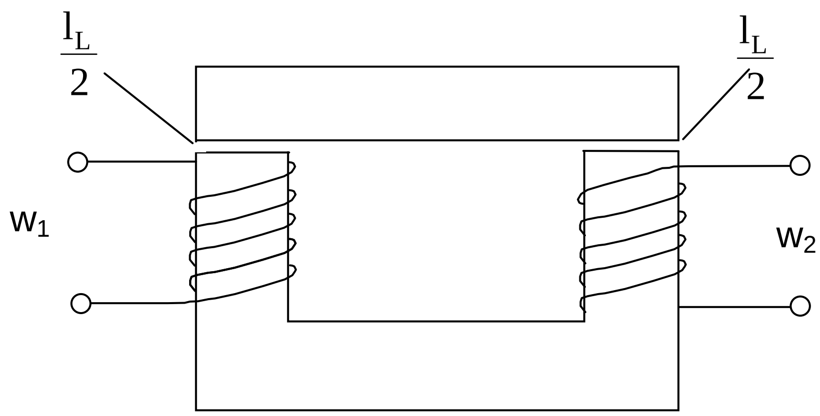
B=f(H) und μ_{rel}=f(H) dar!

4.2. Messen Sie für den Magnetkreis nach Aufgabe 4.1. den Zusammenhang zwischen Magnetfluss Φ, und der Windungszahl w der Erregerspule für I=const. (graph. Darstellung)!

4.3. Bestimmen Sie für die dargestellte Anordnung (Kern mit U-I-Schnitt, Luftspalt l_L zwei Erregerspulen mit w_1 und w_2 die Induktivitäten L für

- die Spule mit w_1,
- die Spule mit w_2,
- gleichsinnige und
- gegensinnige Reihenschaltung

der beiden Spulen mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen. Berechnen Sie aus diesen Werten die Gegeninduktivität M und den Kopplungsfaktor k zwischen beiden Spulen!



4.4. Bestimmen Sie für den abgebildeten verzweigten Magnetkreis (Kern mit E-I-Schnitt. Luftspalte $\ell_{L1...3}$, zwei Erregerspulen mit w_1 und w_2) den Magnetfluss Φ, durch den Außenschenkel 3 bei Erregung

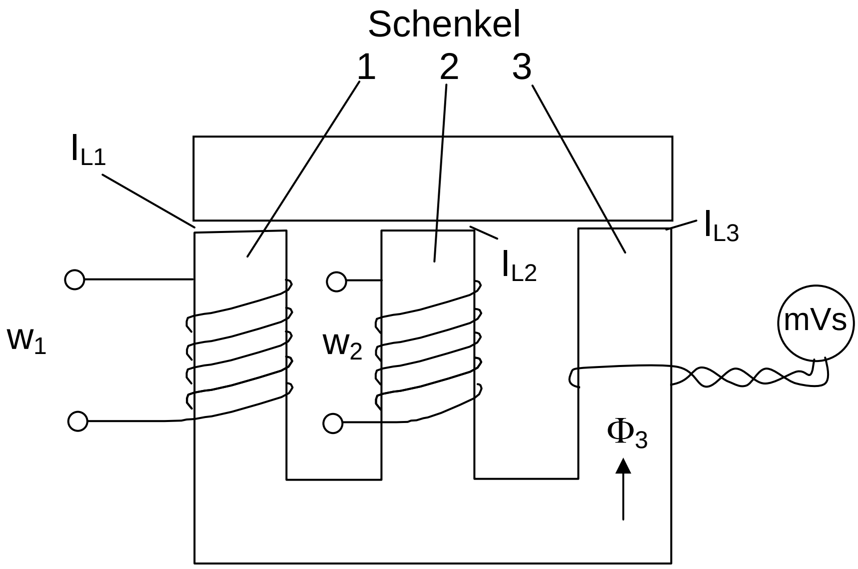
- nur von Spule 1 und

- nur von Spule 2 mit jeweils dem gleichen Strom I.

Errechnen Sie mit den zuvor ermittelten Messwerten den zu erwartenden Fluss
bei gleichzeitiger

- gleichsinniger und
- gegensinniger

Erregung beider Spulen!
Überprüfen Sie die Ergebnisse experimentell!
Wiederholen Sie die Messungen für $\ell_{L1..3} = 0$!



4.5. Bestimmen Sie für die Anordnung nach 4.4. (ohne Luftspalt) die Flusskoppelfaktoren k_1 und k_2 zwischen den Schenkeln 1 und 2 und errechnen Sie daraus den Koppelfaktor k.

4.6. Bestimmen Sie für die Anordnung nach 4.4. (ohne Luftspalt) mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen die Induktivitäten L_1 und L_2 der beiden Spulen sowie die Gegeninduktivitäten M_{12} und M_{21} und berechnen Sie daraus k! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 4.5.!