L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes / par Pierre Boutroux,...

BOUTROUX, PIERRE.

L'idéal scientifique des mathématiques

Félix Alcan

Paris 1920

MARS 1961

L'IDÉAL SCIENTIFIQUE

DES MATHÉMATICIENS

L'IDÉAL SCIENTIFIQUE

DES

MATHÉMATICIENS

Dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes

PAR

PIERRE BOUTROUX

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

PARIS

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1920

L'IDÉAL SCIENTIFIQUE DES MATHÉMATICIENS

INTRODUCTION

L'HISTOIRE DES SCIENCES ET LES GRANDS COURANTS DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

Il est, en matière de science, un principe qui paraît admis, sinon par tous les philosophes, du moins par la grande majorité des savants : c'est qu'il ne faut pas confondre la science déjà faite avec la science qui se fait. En d'autres termes, on ne peut pas espérer déterminer les caractères essentiels de la connaissance scientifique si l'on ignore comment cette connaissance est acquise ; on ne peut pas juger les théories des savants si l'on ne s'est pas préalablement initié à l'inspiration qui les a suggérées, au mouvement de pensée qui a permis de les réaliser. Si ce principe est vrai de toutes les sciences, sans doute l'est-il surtout des Mathématiques pures : car celles-ci, n'étant, ni guidées par l'expérience, ni suscitées par les événements de la vie, dépendent plus que toute autre discipline de l'invention et des conceptions de leurs auteurs. Et c'est pourquoi l'on souhaiterait pouvoir répondre avec une parfaite précision aux questions suivantes : Quelle idée les mathématiciens se font-ils de leur science, quel dessein poursuivent-ils, quels sont les principes directeurs de leur activité, quel est le phare qui oriente leurs recherches ?

Mais ici se présente une première difficulté. Les questions que nous posons sont des questions de fait, concernant exclusivement la genèse et le développement de la science et qui doivent être résolues en dehors de tout système philosophique. Ce n'est donc ni chez les métaphysiciens de profession, ni dans les écrits métaphysiques des mathématiciens philosophes, que nous devons chercher les données qui nous permettront d'y répondre. Seuls les ouvriers spécialistes de la science, les techniciens purs, pourront nous fournir des indications qui soient sûrement indépendantes de toute idée préconçue. Or il se trouve que, sur les points qui nous préoccupent, les techniciens ont été, de tous temps, particulièrement sobres de renseignements. S'efforçant de nous présenter des théories complètement achevées, ils ont le plus souvent omis de retracer dans leurs écrits la marche de leur pensée; ils se sont contentés de présenter les conclusions de leurs recherches avec les démonstrations justificatives. C'est pourquoi, parmi les savants les plus illustres, parmi ceux dont les travaux ont exercé le plus d'influence, nombreux sont ceux dont les conceptions et les principes de recherche sont restés impénétrables à leurs successeurs ; on dirait que, comme les géomètres de certaines écoles antiques, ces grands créateurs ont voulu dérober au vulgaire le secret de leur pouvoir.

Le mystère, il est vrai, devrait se dissiper, lorsque, laissant de côté la science du passé, nous tournons notre attention vers nos contemporains. Nous les voyons, en effet, travailler, sous nos yeux, et nous avons la ressource de les interroger directement. Qu'on ne s'imagine pas, cependant, que nous sommes, pour cela, beaucoup plus avancés. Les questions indiquées plus haut ne sont pas, en effet, de celles auxquelles le mathématicien même le plus qualifié puisse répondre d'emblée. Il lui faut un grand effort d'abstraction et de réflexion pour les traiter d'une manière objective et pour les dégager de la masse des observations banales, ou au contraire trop spéciales, trop accidentelles, qui se présentent en foule à son esprit lorsqu'il cherche à analyser sa propre activité. D'ailleurs le véritable savant s'est à ce point fondu avec son œuvre qu'il lui est devenu impossible de s'en abstraire; et c'est pourquoi, lorsque nous voulons connaître ses vues sur la science, souvent il repousse notre prétention comme une sorte d'intrusion dans sa vie privée ; ou bien, s'il consent à nous faire des confidences, celles-ci relèvent parfois de l'autobiographie et de la psychologie intime plutôt qu'elles ne nous instruisent sur la direction et le développement des théories scientifiques.

Cette difficulté que nous éprouvons à nous renseigner sur la pensée profonde des hommes de science a souvent été remarquée et elle a, certes, quelque chose d'un peu troublant. Pourquoi les mathématiciens, en particulier, hésitent-ils tant à traduire eux-mêmes en formules générales leurs idées directrices? Serait-ce qu'ils se méfient de ces idées? Les regarderaient-ils comme une faiblesse, dont ils n'ont pas lieu de faire étalage? Ainsi que l'a fort justement fait remarquer M. Emile Picard (1), la plupart des savants de métier sont portés à redouter les dangers des vues philosophiques plutôt qu'à en reconnaître les avantages. A leurs yeux le philosophe est « l'homme qui excelle à voir les difficultés », et ils veulent à tout prix se préserver des doutes auxquels faisait allusion Jules Tannery lorsqu'il parlait un jour « de ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de philosophie » (2). Mais, si rien n'empêche en effet l'homme de science d'écarter de son champ d'études les discussions concernant l'origine et la nature des notions auxquelles il a affaire, s'il lui est permis de n'avoir pas d'opinion sur les controverses métaphysiques touchant le problème de la connaissance, on ne saurait conclure de là qu'il puisse se passer de tout principe, non pas précisément *philosophique*, et encore moins *extra-scientifique* mais, en tout cas, *extra-technique*.

Non seulement, en effet, comme nous le disions plus haut, il faut au savant — au mathématicien surtout — un dessein et des vues d'ordre général pour guider ses recherches. Mais il est clair que l'existence même du savant ou du moins son acti-

(1) Emile Picard, *La science moderne et son état actuel*, p. 31-32.
(2) E. Picard, *loc. cit.*

vité intellectuelle — cet effort désintéressé de toute une vie concentré sur les objets les plus immatériels, les plus éloignés des préoccupations courantes de l'humanité — exige un point d'appui, suppose un stimulant, qui ne peut être fourni que par les conceptions dont nous parlons. Comme le remarque encore M. Emile Picard, l'homme qui pratique les sciences a besoin, pour se soutenir, de certaines convictions ; il doit avoir, il a certainement, un *credo* scientifique (1).

Sans doute. Mais apparemment, le *credo* du savant est souvent un peu simpliste et il n'est pas aisé d'en déterminer exactement les fondements. Lorsque l'on cherche à l'analyser, on a l'impression que ce *credo* repose en définitive sur une sorte de foi mystique dans le progrès et les destinées de la science. Comme le grand conquérant, l'homme de science est tenté de croire à son étoile, — influence mystérieuse qui oriente vers un but commun la série éparse de ses recherches, l'ensemble en apparence désordonné de ses travaux. Sentant, d'autre part, mieux qu'aucun autre, qu'il est impossible de faire des travaux de valeur à moins d'être *doué*, il idéalise plus ou moins consciemment cette obscure notion de *don* jusqu'à en faire une sorte d'inspiration. Et voilà pourquoi il n'a que faire de règles objectives, de conceptions systématiques pour conduire et pour justifier son travail. Il se dirige d'instinct, en homme inspiré ; les découvertes surgissent

(1) Emile Picard, *loc. cit.*, p. 33 et suiv.

sousses pas sans qu'il sache comment ni pourquoi; car c'est souvent, dit-il, au moment où il s'y attend le moins, lorsqu'il a beaucoup peiné, erré, et qu'il se croit définitivement égaré, que brusquement la vérité se révèle à ses yeux. A ce compte, les progrès de la science ne pourraient s'expliquer que par un miracle perpétuellement renouvelé.

Sans doute les mathématiciens n'exprimeront-ils que rarement leur pensée par des affirmations aussi extrêmes. Ces croyances instinctives que nous cherchons à mettre en formules n'existent chez eux qu'à l'état de tendances ou de sentiments. Mais ne sont-ce pas souvent de tels sentiments, imparfaitement analysés, qui incitent l'homme à agir et qui entretiennent son effort ?

Quoi qu'il en soit, et quelque peu d'importance que l'on veuille attribuer à ces recoins de l'âme scientifique que nous avons présentés sous des traits un peu gros afin de les rendre plus apparents, un fait demeure acquis : c'est que, comme nous le disions tout à l'heure, il est presque impossible de déterminer par des enquêtes individuelles les conceptions qui président aux recherches scientifiques ; ces conceptions, devenues chez ceux qui s'en inspirent des principes d'action et de vie, sont mélangées de trop d'éléments personnels pour pouvoir être étudiées objectivement. Incidemment cette remarque nous explique une apparente contradiction que l'on peut relever dans l'attitude de certains savants. D'une part, ils se déclarent indifférents à toute théorie de la science, estimant que les vues philosophiques ne sauraient avoir aucune répercussion sur les travaux des techniciens. Et, d'autre part, ils se montrent si attachés à leurs propres idées sur la science qu'ils supportent avec peine de les voir mises en cause. C'est qu'en effet ces idées, auxquelles ils n'attribuent aucune valeur absolue, sont cependant les conditions indispensables de leur activité scientifique. Et ils ont peur qu'en les ébranlant on ne porte atteinte aux ressorts de leur énergie. Sentiment fort naturel et fort respectable, mais qui nous montre combien il est nécessaire d'être prudent lorsqu'on cherche à interpréter certains témoignages.

Qu'on se garde, cependant, d'attribuer aux observations qui précèdent un sens qu'elles ne comportent pas. Du fait qu'il est malaisé à l'auteur d'une œuvre scientifique d'analyser lui-même la genèse de ses idées, il serait absurde de conclure que le jugement du savant doit être récusé dans les discussions relatives aux principes de la science. Il faut reconnaître, au contraire, que la complexité et la subtilité mêmes des questions débattues exigent qu'elles soient traitées par les hommes qui ont étudié la science à fond et qui sont à même de la pratiquer personnellement. Mais le spécialiste, quand il entre dans le débat, doit soigneusement éviter d'être à la fois juge et partie, et il n'y parvient qu'à la condition de sortir momentanément de lui-même. Il sera suspect de partialité s'il se borne à décrire sa propre expérience ; il apportera, au contraire, un enseignement précieux si, à la lumière de cette expérience, il interprète les idées d'autres spécialistes, représentant divers aspects ou différentes phases de la pensée scientifique.

En d'autres termes, qu'il s'agisse de l'époque présente ou qu'il s'agisse du passé, il n'est, pour l'étude des problèmes que nous avons énoncés plus haut, qu'une seule méthode applicable, et cette méthode est la méthode historique. Puisque, sur les questions en litige, les témoignages individuels des savants sont presque toujours trop subjectifs, et en outre trop rares pour la période passée, il ne nous reste qu'à essayer de grouper ces témoignages, de manière à suppléer à l'insuffisance de chacun d'eux par la considération de l'ensemble et par la comparaison des uns et des autres. Ainsi c'est dans l'histoire des sciences, convenablement étudiée, que nous avons le plus de chances de découvrir les fondements et la direction de la pensée scientifique.

L'histoire des sciences ainsi entendue est à égale distance de l'observation psychologique individuelle et de la systématisation philosophique. Elle est donc la préface naturelle de la philosophie des sciences. Mais, restant placée dans le domaine objectif de l'œuvre scientifique, elle sera, croyons-nous, également instructive pour le pur homme de science et principalement pour celui qui cultive les sciences abstraites. En effet, si les créateurs de génie peuvent se fier, pour guider leurs recherches, à leur flair et à l'inspiration instinctive dont nous parlions tout à l'heure, il n'en est pas de même, tant s'en faut, de tous les modestes ouvriers qui apportent leur pierre à l'édifice scientifique. A ceux-là, — lorsque, dans leurs heures de répit, ils souhaiteront savoir où ils vont, se rendre compte du chemin déjà parcouru, s'expliquer le pourquoi du mouvement dans lequel ils sont entraînés, — l'histoire fournira peut-être les enseignements et les encouragements nécessaires.

Il convient cependant d'examiner d'un peu plus près quels devront être les préoccupations et les sujets d'étude de l'historien lorsqu'il se proposera de retracer l'évolution des sciences — et spécialement celle des mathématiques — dans le dessein que nous avons tenté de définir (1).

Sous le nom d'histoire des sciences on confond plusieurs groupes de recherches qui ont des caractères bien différents.

Ainsi l'on regarde comme des historiens les érudits qui interprètent les fragments des textes anciens susceptibles de nous renseigner sur les méthodes mathématiques des peuples orientaux ou des premiers géomètres grecs. Du point de vue auquel nous nous plaçons, cependant, les travaux de ces érudits sont en réalité préliminaires à la

(1) Dans une remarquable étude intitulée *La méthode dans la philosophie des mathématiques* (F. Alcan, 1911), M. Maximilien Winter préconise l'emploi d'une méthode, appelée par lui « méthode historico-critique », qui est analogue à celle que nous voudrions voir appliquer à l'histoire des sciences.

véritable histoire des sciences. Ils ont pour but de réunir les matériaux qui permettront — lorsque leur nombre sera sufisant — de reconstituer la physionomie et la filiation des théories dont la trace a été perdue.

Historien des sciences, également, est l'auteur qui cherche à mettre en lumière la série des doctrines et des hypothèses scientifiques auxquelles les savants ont été conduits dans le cours des siècles passés. L'histoire ainsi comprise est, en grande partie, l'histoire des erreurs humaines : pleine d'enseignements pour le philosophe et pour l'historien de la civilisation, elle ne pourra que rarement, semble-t-il, être utile à l'homme de science, sinon pour le mettre en garde contre certaines fautes de raisonnement ou certaines imprudences commises par ses devanciers.

Une autre conception, de l'histoire des sciences — extrêmement répandue aujourd'hui — assigne à celle-ci pour principal objet la recherche de la paternité des grandes découvertes. Cette recherche est en effet fort utile parce qu'elle nous aide à accomplir un devoir de justice : nous tenons avec raison à rendre à chacun son dû et nous voulons défendre notre patrimoine scientifique contre les prétentions injustifiées des historiens de certains pays qui s'appliquent à faire de la science un champ de rivalités nationales. Mais, cela dit, il faut reconnaître que l'exacte répartiton des découvertes entre leurs auteurs nous apporte peu de lumière sur la véritable origine de ces découvertes.

Que la résolution de l'équation du troisième degré soit due à Tartaglia ou à Cardan, que les premières équations de la géométrie analytique aient été formulées par Descartes, par Fermat ou par un troisième géomètre, que telle règle de calcul infinitésimal nous vienne de Newton, de Leibniz ou d'un Bernoulli, on ne saurait tirer de ces faits aucune conclusion utile. Plus curieux, sans doute, sont les rapprochements que l'on peut établir parfois entre des œuvres d'époques très différentes, et qui permettent de découvrir dans des écrits anciens et peu connus les germes de théories regardée jusqu'alors comme beaucoup plus récentes. C'est ainsi, par exemple, que l'on trouve chez Apollonius, chez Nicole Oresme (XIVe siècle), chez Marino Ghetaldi (XVIe siècle), certaines études qui nous font immédiatement penser à la géométrie cartésienne. Mais l'on doit se méfier des ressemblances de ce genre, lesquelles sont souvent de pure forme, c'est-à-dire ne portent que sur les manifestations de la pensée scientifique (énoncés de faits, formules ou théorèmes) et non point sur les tendances et l'action créatrice de cette pensée. Ce qui nous paraît, quant à nous, être vraiment intéressant dans l'histoire des sciences, ce n'est point de constater que tel ou tel fait a été rencontré ou pressenti à telle époque ; c'est de reconnaître comment ce fait est entré dans un système, quel courant de recherches a conduit à le regarder comme important, de quel mouvement de pensée il a lui-même été le point de départ. C'est en d'autres termes, l'évolution des conceptions scientifiques que nous souhaiterions connaître et comprendre. Or il n'est point de trouvaille historique qui brusquement puisse venir renverser ce qu'une longue série d'études nous a déjà appris sur cette évolution.

Nous appliquerons la même remarque à l'histoire des découvertes considérée spécialement du point de vue national. Le cas de légitime défense étant mis à part, cette histoire nous paraît peu instructive, pour autant du moins qu'elle se borne à cataloguer les inventions revendiquées par chacune des nations civilisées. Il y aurait, cependant, dans le domaine des sciences comme dans les autres, une histoire nationale à écrire, qui ne serait ni illusoire, ni sans portée. Mais ce serait une histoire d'un caractère élevé, qui laisserait de côté le détail technique des découvertes pour ne considérer que l'esprit. Ce qui constitue, en effet, l'individualité scientifique d'un peuple, ce n'est point le concours de circonstances qui lui a valu d'acquérir le premier telle ou telle connaissance, mais ce sont les méthodes de travail en usage chez ce peuple, les habitudes et les tendances des intelligences, le pouvoir de divination plus ou moins développé et orienté dans tel sens particulier, l'idéal enfin que poursuivent ses savants. Plusieurs études intéressantes ont été publiées au cours des dernières années sur la pensée scientifique française considérée à ce point de vue ; mais une histoire complète du développement de cette pensée nous fait encore défaut

Ce n'est point, toutefois, en s'attachant à une phalange particulière de savants, si brillante soit-elle, qu'il convient de commencer l'enquête générale dont nous avons plus haut indiqué l'objet. C'est en effet tout le cycle des productions scientifiques qu'il sera nécessaire de passer en revue si l'on veut dégager les conceptions fondamentales qui ont présidé à la constitution et au développement des sciences. On devra donc négliger provisoirement les diverses nuances et oppositions de détail dues aux personnalités différentes des hommes et des nations pour s'en tenir strictement aux grandes lignes. Sur quelles questions sera-t-on dès lors conduit à fixer spécialement son attention ?

Afin de pouvoir entrer dans quelques détails, nous limiterons dorénavant nos remarques aux sciences mathématiques, sans d'ailleurs perdre de vue que ce que nous dirons des Mathématiques sera vrai aussi probablement de la partie théorique des autres sciences.

L'histoire dont nous cherchons à esquisser le plan fera peu de cas, nous l'avons dit, des découvertes isolées, détachées de leur milieu : elle se proposera comme but principal d'étudier les grands courants de la pensée mathématique, en assignant à chaque fait la place qui lui revient, non pas dans la science telle qu'elle existe aujourd'hui, mais bien dans la science des savants qui ont spécialement étudié ce fait et qui lui ont attribué un rôle important.

Ainsi, le premier problème qui se posera à propos d'une découverte nouvelle consistera à rechercher comment cette découverte a été amenée et quelle est sa signification par rapport aux recherches auxquelles elle fait suite.

Voici, par exemple, le théorème de Pythagore : *dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.* Pour nous ce théorème est le point de départ d'une riche série d'autres propositions concernant les relations métriques auxquelles satisfont les divers éléments rectilignes d'un triangle rectangle, et, plus généralement, d'un triangle quelconque. Mais est-ce bien par cet aspect que le théorème dit « de Pythagore » a primitivement frappé l'attention des géomètres ? On a tout lieu de croire que, loin d'apparaître comme une acquisition avantageuse, ce théorème a tout d'abord été la source de graves difficultés et qu'il a marqué l'échec plutôt que l'éclosion d'une théorie. C'est en effet toute la doctrine vers laquelle tendaient les premiers Pythagoriciens — doctrine supposant une harmonie préétablie entre les propriétés des nombres entiers et les propriétés des figures géométriques — que le nouveau théorème jetait à bas : car il montrait que la considération d'une figure aussi simple que l'est un triangle rectangle isoscèle (dont le côté est pris pour unité) introduit immédiatement dans nos calculs une grandeur incommensurable, la *racine carrée de deux* (1).

(1) L'hypoténuse du triangle, dont la longueur est égale à $\sqrt{2}$.

Envisageons, d'autre part, les écrits de Cavalieri sur la géométrie des indivisibles. Si l'on faisait abstraction de leurs antécédents, on pourrait regarder ces écrits comme le point de départ d'une méthode de démonstration entièrement nouvelle, consistant à substituer au calcul algébrique des quantités finies un calcul relatif à des éléments infiniment petits (*différentielles*). Il n'en est rien, cependant ; car, en rapportant la géométrie de Cavalieri à ses origines, nous constatons qu'elle fait partie d'un ensemble de travaux qui procèdent directement d'Archimède, qui n'ont aucune prétention méthodologique, et dont les auteurs sont pleins de respect pour les formes classiques de la démonstration.

Plus encore que les antécédents des découvertes, il sera nécessaire d'en considérer les suites, c'est-à-dire d'étudier les conséquences immédiates qu'en ont tirées leurs auteurs ou les disciples de ceux-ci. C'est ainsi que l'on pourra deviner le but que se proposaient ces savants, et l'idéal vers lequel ils faisaient tendre la recherche scientifique.

Pascal un jour, par suite de circonstances plus ou moins fortuites, eut son attention attirée vers certains assemblages de nombres, qui, disposés sous forme de triangle (*triangle arithmétique de Pascal*), jouissent de propriétés remarquables. Il n'était pas le premier à remarquer ces propriétés, que déjà plusieurs auteurs avaient notées, et notamment Michel Stifel (XVIe siècle). Mais, tandis que ces auteurs n'avaient vu dans leur découverte qu'une nouvelle manifestation des vertus des nombres et le moyen de simplifier certains calculs, Pascal tire immédiatement de la sienne des conséquences d'un tout autre genre ; il l'applique en effet au calcul des probabilités et l'utilise pour certaines sommations de lignes géométriques qui conduisent directement à la notion d'intégration. Ainsi Pascal subit l'entraînement général qui porte les savants de son époque, à élargir le champ d'application des mathématiques, à établir de nouveaux ponts entre les provinces de cette science et à accroître de cette manière la puissance du calcul.

Dans le même ordre d'idées, n'est-il pas très intéressant de voir les mathématiciens de l'Inde et les grands novateurs occidentaux, comme Nicolas Chuquet (XV^{e} siècle), n'éprouver aucun embarras, et continuer à aller de l'avant, lorsqu'ils rencontrent les racines négatives des équations, tandis que, le plus habile manieur d'équations du XVI^{e} siècle — François Viète — s'obstine à maintenir des cloisons étanches entre les équations qui ont des racines de signes différents sous prétexte qu'elles correspondent, dans son système, à des problèmes géométriques distincts ? N'est-ce pas un symptôme frappant du point de vue du XIX^{e} siècle que la marche de la pensée d'Evariste Galois, faisant de l'impossibilité où nous sommes de résoudre les équations de degré supérieur à *quatre* le point de départ d'une théorie positive, dans laquelle on aborde l'étude des équations par un biais tout nouveau, la théorie des *groupes* ?

En même temps que l'on situera la découverte dans l'histoire de la pensée mathématique, on devra la confronter avec l'ensemble des découvertes de la même époque. Non seulement on relèvera attentivement les inventions voisines ou équivalentes qui souvent surgissent presque simultanément dans l'esprit de nombreux auteurs, afin de mesurer, *si l'on peut ainsi dire*, l'*intensité* du courant dans lequel sont entraînés ces savants, mais l'on rapprochera également les découvertes les plus distantes en apparence. Il arrive fréquemment, en effet, que plusieurs séries d'études, jugées sans lien entre elles par un observateur superficiel, et dont les auteurs même s'imaginent n'avoir entre eux aucun point de contact, procèdent cependant de préoccupations et de réflexions voisines ; la comparaison que nous établissons après coup entre ces études peut alors nous aider à retrouver l'orientation commune des spéculations qui leur ont donné naissance.

Considérons, par exemple, pendant la période post-cartésienne, les progrès de la géométrie analytique d'une part, et d'autre part le développement du calcul des séries institué par Newton et Leibniz. Œuvres indépendantes, pensera-t-on tout d'abord, dont l'une se rattache à la pensée de Descartes, tandis que l'autre, tournant le dos au passé, ouvre à la science des voies toutes nouvelles en posant les principes du calcul infinitésimal et de l'Analyse moderne. Pareille manière de voir ne résiste pas, cependant, à un examen attentif. Si, en effet, l'on regarde de près les deux groupes de travaux dont nous venons de parler, on constate qu'ils ne s'opposent nullement l'un à l'autre et qu'ils constituent en réalité deux expressions différentes d'une même préoccupation, d'un même besoin de la pensée mathématique du XVII^e siècle. C'est la notion générale de fonction qui se dégage peu à peu des théories où elle était enveloppée, et qui cherche à se manifester extérieurement, à se projeter sous figure de courbes géométriques, sous forme d'équations, ou suivant des combinaisons plus compliquées telles que les développements en séries infinies.

Un rapprochement non moins instructif pourrait être fait entre diverses séries de recherches contemporaines qui sont fort éloignées les unes des autres par la nature de leurs objets, mais qui pourtant dérivent d'une inspiration commune. Ainsi, entre la théorie moderne des fonctions et l'étude des axiomes de la géométrie, il n'y a pas de lien apparent. Cependant les deux études tirent leur origine d'une même tendance de la pensée mathématique actuelle : souci de classification, volonté de pousser le plus avant possible la résolution, la dissection des notions complexes.

Bien entendu, tout en poursuivant l'étude historique objective des théories scientifiques, on recueillera soigneusement, chemin faisant, toutes les indications que laissent échapper les auteurs sur leurs préoccupations durables ou passagères, sur leurs espoirs, sur leurs doutes, sur les règles de travail auxquelles ils s'assujettissent.

Il y a eu de tout temps, parmi les savants, des esprits généralisateurs qui se sont plu à regarder loin devant eux et à se représenter l'avenir de la science. Tel fut Descartes, tel fut Leibniz, tel Galois, et d'autres aussi qui, sans être des savants de premier plan, peuvent néanmoins refléter avec exactitude les vues et les aspirations de leur époque. Tous ces penseurs seront particulièrement intéressants à écouter. Il existe, par contre, une catégorie de savants qui semblent avoir une méfiance instinctive contre toute généralisation anticipée et qui trouvent plus d'intérêt à ciseler des œuvres limitées, mais parfaites, qu'à ébaucher de vastes théories et à construire des hypothèses. Tels ont été Fermat, Gauss, Hermite. Ceux-là sont peu communicatifs, mais il est quelquefois possible de les deviner en partie. Ainsi l'on peut être assuré que ces hommes, épris de perfection, choisissent avec un soin particulier les problèmes auxquels ils s'attachent. Peut-être donc qu'en examinant attentivement la liste de ces problèmes, en la comparant avec les objets d'étude d'autres mathématiciens du même temps, on pourra jusqu'à un certain point retrouver le fil de leur pensée. Ainsi, un point pris sur une courbe ne nous apprend rien sur cette courbe ; mais une pluralité de points situés sur un faisceau de courbes parallèles, permettront, s'ils ne sont pas tous exactement au même niveau, de déterminer approximativement la forme et l'orientation du faisceau.

D'une manière générale, il sera toujours fort intéressant de savoir dans quelles circonstances et à quelle occasion les problèmes marquants de la science se sont présentés à l'esprit du chercheur. On regardera donc toujours comment ces problèmes sont introduits dans les écrits où ils sont étudiés, et par quels arguments leur utilité et leur intérêt sont expliqués. On prêtera également attention aux disputes, aux controverses, aux rivalités entre savants qui ont fait naître, précisément, tant de questions nouvelles, et qui sont si propres à éclairer certaines faces importantes de la pensée scientifique. Ainsi, en Grèce, l'opposition des théoriciens et des praticiens nous fournit une donnée fondamentale sur l'idéal de la science hellénique. Les discussions qui ont eu lieu sur le calcul des probabilités, sur les relations des Mathématiques et de la Mécanique, sur l'infini et le continu, nous apportent de même des renseignements précieux sur la science moderne.

La méthode que nous proposons d'appliquer à l'étude historique des théories mathématiques ne saurait, — on en peut juger par l'esquisse qui précède, — être regardée comme nouvelle : elle est, au contraire, fort répandue de nos jours dans tous les domaines où pénètre l'historien : c'est la méthode critique ou philosophique, et l'histoire telle que nous l'avons décrite rentre évidemment dans l'ensemble d'études auquel on donne le nom d'« histoire philosophique des sciences ».

Il ne faut pourtant pas conclure de là que les questions énumérées plus haut soient naturellement liées aux problèmes philosophiques avec lesquels elles se rencontrent dans l'esprit de nombreux penseurs. Les conceptions sur la science que nous voudrions voir dégagées par l'historien ont sans doute le plus souvent suggéré des conceptions philosophiques, soit à leurs auteurs mêmes, soit à ceux qui les ont regardées du dehors. Mais, comme nous l'avons déjà observé plus haut, il n'y a point interdépendance, il n'y a même pas parallélisme des unes et des autres. L'histoire que nous avons en vue est exclusivement tournée vers la science et reste indifférente aux doctrines métaphysiques.

Pour justifier cette assertion, il n'est pas nécessaire de procéder à une longue étude. Nous avons en effet la bonne fortune de posséder, pour ce qui regarde la définition des problèmes historico-philosophiques, une base d'appréciation extrêmement sûre et complète dans le bel ouvrage qu'a publié récemment M. Léon Brunschvicg sur *les étapes de la philosophie mathémathique* (1).

M. Brunschvicg s'est attaché à montrer comment l'histoire des théories mathématiques permet d'expliquer l'évolution des doctrines philosophiques auxquelles ces théories ont donné lieu. Il y a, pense-t-il, corrélation constante entre les deux ordres de spéculation, chaque progrès technique important se traduisant immédiatement par un

(1) L. Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912.

nouveau mouvement philosophique. Or il arrive qu'en lisant l'exposé de M. Brunschvicg nous sommes, sur presque tous les problèmes qui y sont soulevés, pleinement d'accord avec l'auteur, dont les arguments nous convainquent ; et néanmoins nous constatons que la courbe d'évolution tracée par M. Brunschvicg diffère notablement, quant au dessin général, de celle qu'il aurait obtenue s'il s'était placé au point de vue du pur homme de science.

La ligne qui marque les étapes de la philosophie mathématique offre un nombre considérable de sinuosités et même de discontinuités brusques que M. Brunschvicg met très fortement en relief. Ainsi, à peine le platonisme a-t-il donné, pour la première fois une explication complète — ou du moins jugée telle — de la connaissance et de la vérité mathématiques, que *déjà se présente* une coupure, un rebroussement de la courbe : le courant de la spéculation philosophique sur la science s'arrête soudainement, pour repartir avec Aristote dans une nouvelle direction qui l'écarte des mathémathiques ; et il faut attendre jusqu'au XVII^e siècle pour voir la philosophie reprendre l'orientation que lui avait imprimée Platon. Après les Cartésiens — Descartes, Malebranche, Spinoza — nouvelle coupure et non moins profonde : l'analyse infinitésimale relègue au second plan l'algèbre et la géométrie cartésiennes, et de ce grand événement mathématique résulte une révolution complète de la philosophie à base scientifique. Au cours de la période contemporaine, pareillement, nous rencontrons de remarquables discontinuités. M. Brunschvicg nous fait voir en effet comment l'arithmétisme de Renouvier et le nominalisme de Helmholtz d'une part, le mouvement dit « logistique » d'autre part, la doctrine intuitioniste en troisième lieu, se font naturellement suite en s'opposant, et répondent aux différents aspects d'une science qui évolue. Jamais, peut-être, la philosophie mathématique n'a suivi une ligne aussi anguleuse que durant les vingt dernières années.

Allons-nous retrouver le même rythme, la même suite d'oscillations, dans le chemin parcouru par la pensée scientifique pure, dégagée de toute préoccupation philosophique ? Nous ne le croyons pas. Au contraire, il nous semble que les oppositions les plus importantes pour le philosophe disparaissent parfois presque complètement aux yeux de l'homme de science.

Ainsi, par exemple, une rapide revue de l'œuvre mathématique des Grecs nous amènera plus loin à conclure qu'il est impossible de tracer des coupures dans l'histoire de cette œuvre, et qu'on ne saurait y distinguer des théories ou des méthodes procèdant de conceptions divergentes. Comme Paul Tannery et Gaston Milhaud, nous croyons à l'unité de physionomie de la science grecque.

Pareillement, l'étude attentive du mouvement mathématique du XVII^e siècle nous conduira à abandonner l'opinion — assez répandue — d'après laquelle la création du calcul infinitésimal aurait constitué une révolution scientifique. Il nous apparaîtra que, malgré les différences qui les séparent en tant que philosophes, Descartes et Leibniz, hommes de science, sont mus par des aspirations et des conceptions assez semblables ; ils appartiennent à la même famille mathématique.

Enfin, si nous observons les milieux scientifiques contemporains, où trouvons-nous trace de ces divisions et de ces discordes qui agitent le camp des philosophes spéculant sur les principes de la science ? Interrogeons l'un quelconque des mathématiciens vivants : il nous dira que, si les discussions philosophiques de notre temps ont intéressé le monde savant, elles n'ont jamais fait dévier, ni influencé en aucune manière, le cours de ses conceptions. Partisans de l'arithmétisme, de la logistique ou de l'intuitionisme, se retrouvent aussitôt d'accord lorsqu'il sagit d'effectuer ou d'interpréter une recherche technique.

Ces exemples suffisent à montrer comment une légère différence de point de vue peut transformer profondément les résultats d'une enquête sur l'histoire des théories scientifiques. La reconstitution historique faite par M. Brunschvicg est non seulement distincte de celle que nous avions en vue dans les pages précédentes, mais elle conduit, sur plusieurs points importants, à des résultats opposés.

Les raisons de cette divergence ne sont peut-être pas difficiles à deviner. N'est-ce point l'inéluctable opposition de la science qui se fait et de la science déjà faite qui, ici encore, se manifeste ? Le savant professionnel aura toujours en vue la première : c'est elle qui remplit sa vie, qui est l'objet continuel de son activité. Le philosophe, au contraire, voulant asseoir un système, sera — quel que soit d'ailleurs son dessein — nécessairement attiré vers ce qu'il y a de solide et d'indiscutable dans les théories scientifiques, c'est-à-dire vers les résultats acquis.

Ne parlons pas ici de Kant et d'Auguste Comte qui, comme le rappelle M. Brunschvicg, ont pris pour point de départ de leurs réflexions une science déjà arriérée, des théories mathématiques déjà dépassées à leur époque. Mais croit-on que les philosophes les mieux instruits du mouvement scientifique de leur temps opèrent avec une méthode très différente ? Sans doute ils savent avec exactitude à quel point est parvenu ce mouvement, mais connaissent-ils suffisamment la tangente qui en détermine la direction ? Et le savant de profession lui-même, lorsqu'il veut philosopher, ne suspend-il pas, pour un temps, le cours de sa pensée, ne fixe-t-il pas provisoirement celle-ci, afin de faire sur elle un effort de réflexion ? De là résulte que, dans la science telle qu'elle apparaît au travers de la philosophie, les valeurs, les traits saillants des différentes théories, ne sont pas les mêmes que dans la science vécue par le savant.

Ce n'est pas que le problème de *l'invention* et de la création mathématique n'ait été maintes fois et finement étudié. Mais, dans les termes où le pose d'ordinaire le philosophe, ce problème ne paraît pas avoir de lien direct avec la question que nous voulons poser : celle de l'évolution des idées des savants sur la science ; et, d'ailleurs, le problème de l'invention n'a jamais été spécialement considéré — on ne voit pas comment il aurait pu l'être — du point de vue proprement historique. Ainsi M. Brunschvicg laisse de côté l'histoire lorsqu'il conclut ses réflexions personnelles sur les racines de la vérité mathématique en donnant comme fondement à celle-ci l'activité même de l'esprit, le mouvement, l'élan d'une intelligence continuellement en progrès. Nous resterons au contraire, sur le terrain historique et scientifique si, fixant notre regard sur la réalisation de l'œuvre mathématique, nous nous demandons comment et dans quelles conditions les savants des divers âges sont parvenus à orienter les progrès de cette activité intellectuelle dont parle justement M. Brunschvicg.

Ces remarques étaient nécessaires pour bien montrer quels seront le point de vue, les caractères et le domaine propre de l'histoire des sciences, appliquée aux problèmes que nous avons indiqués.

Mais dira-t-on, l'histoire ainsi comprise, la possèdons-nous déjà, a-t-elle été écrite en tout ou en partie ? Il ne paraît pas, à vrai dire, qu'aucune tentative ait été faite pour isoler systématiquement les questions qui intéressent cette histoire. Nous trouvons cependant dans les travaux des savants, des historiens et des philosophes suffisamment d'indications pour pouvoir nous rendre compte de ses grandes lignes.

Lorsqu'en effet, faisant volontairement abstraction de toutes les nuances et différences qui nous paraissent secondaires, nous suivons à travers les âges, les conceptions directrices des mathématiciens, nous voyons se dessiner une courbe d'évolution dont la figure générale est extrêmement simple. Trois grandes divisions, seulement, ressortent dans cette vue d'ensemble, trois grandes vagues dont le soulèvement principal se produit aux trois époques les plus marquantes de l'histoire des mathématiques : la grande époque de la science hellénique, la fin du XVIIe siècle, l'époque contemporaine.

Ainsi nous serons tout d'abord amenés à nous demander quels sont les caractères par où se sont distingués ces trois mouvements de pensée.

En ce qui concerne les deux premières époques il suffira, pour les caractériser d'interpréter des faits historiques connus ; travail qui serait relativement aisé si ces faits ne se trouvaient être trop rares pour la période antique et exceptionnellement abondants pour le XVIIe siècle, en sorte que, dans un cas, nous sommes obligés de suppléer par des inductions à l'insuffisance des textes, et dans l'autre, d'opérer un choix d'une nature assez délicate.

Quand nous en viendrons, par contre, à la période contemporaine, notre embarras sera plus grand ; car les historiens, ne disposant pas d'un recul suffisant, ne sont pas encore parvenus à définir avec précision et à classer impartialement les multiples courants et les tendances diverses qui agitent et divisent les milieux mathématiques de notre époque.

Mais, si l'histoire des idées scientifiques les plus récentes est, à bien des égards, la plus incertaine, n'est-ce pas, en revanche, celle dont l'étude est susceptible de rendre le plus de services à l'homme de science, si elle peut, comme nous le croyons, l'éclairer sur son propre rôle et l'aider à diriger le cours de ses recherches ?

C'est pourquoi, quelque imparfaite que soit actuellement cette histoire, nous ne devons pas hésiter à formuler, sans plus attendre, les jugements qu'elle nous suggère et à dégager les leçons qu'elle nous paraîtra comporter (1).

(1) Dans un ouvrage intitulé *Les Principes de l'Analyse mathématique, exposé historique et critique* (2 vol., Hermann éditeur, 1914 et 1919) j'ai cherché à donner un aperçu des principales théories qui constituent les fondements des Mathématiques pures et j'ai groupé et classé ces théories de manière à mettre en évidence les trois phases de la pensée mathématique dont il va être question dans les pages suivantes. Ayant ainsi donné ailleurs une sorte d'illustration technique de la théorie historique que je me propose de soutenir, je me dispenserai cette fois d'entrer dans des longs développements mathématiques. — Quelques parties des chapitres qui forment le présent ouvrage ont déjà figuré dans des articles publiés, de 1902 à 1914, dans la Revue de *Métaphysique et de Morale* et dans la *Rivista di Scienza (Scientia).*

CHAPITRE PREMIER

LA CONCEPTION HELLÉNIQUE DES MATHÉMATIQUES (1)

La part qui revient aux peuples de l'Orient dans la formation de la science mathématique a été diversement appréciée par les historiens du XIX^{e} siècle. La tradition que nous a léguée l'antiquité n'admettait point que la science grecque eût rien emprunté à ces peuples. Et, jusqu'au milieu du siècle dernier, la critique orientaliste moderne était trop peu avancée dans son œuvre de reconstruction pour pouvoir rien opposer à cette tradition. Lorsque, cependant, l'on commença à mieux connaître la fréquence et l'importance des relations qui existèrent dans tous les domaines entre la Grèce et l'Orient, lorsque l'on put reconstituer quelques-uns des problèmes — déjà très compliqués — que savaient résoudre les mathématiciens de la Chaldée, de l'Egypte, de l'Inde et peut-être de la Chine, on fut tenté de revenir sur l'opinion généralement admise. On s'avisa que, volontairement ou non, les savants grecs avaient fort bien pu exagérer le mérite des

(1) Dans ce chapitre, nous avons spécialement mis à profit les études de Paul Tannery, G. Milhaud, Zeuthen, L. Brunschvicg.

inventions qu'ils s'attribuaient (1). Cette suspicion, à son tour, fut renversée par les progrès ultérieurs de l'histoire. Depuis Paul Tannery notamment, le caractère franchement original de la mathématique grecque ne paraît plus devoir être mis en doute. Ira-t-on pourtant jusqu'à admettre que celle-ci soit pour ainsi dire sortie du néant, et qu'elle ne doive rien aux méthodes de mesure et de calcul qu'enseignaient les arithméticiens et les géomètres orientaux ? Paul Tannery (2) et Gaston Milhaud (3) n'étaient pas éloignés, il y a quelque vingt ans, de penser ainsi. Mais d'autres critiques, partant du principe que « rien ne sort de rien », contestent cette manière de voir et se refusent à croire au « miracle grec » (4). M. Léon Brunschvicg (5), d'autre part, — raisonnant ici en philosophe plutôt qu'en historien — voudrait réhabiliter l'œuvre des calculateurs égyptiens, à laquelle, dit-il, les créateurs de la mathématique grecque ont refusé le nom de science parce qu'ils liaient l'idée d'arithmétique au réalisme pythagoricien, mais où déjà, pourtant, l'on peut discerner tous les ressorts

(1) G. Milhaud. *Leçons sur les origines de la science grecque*, 1893, p. 69 et suiv. *Nouvelles études sur la pensée scientifique*, 1911, p. 41 et suiv. (F. Alcan).

(2) Cf. A. Rivaud. *Paul Tannery, historien de la science grecque*, apud. *Rev. de métaphysique*, mars 1913, p, 184.

(3) Cf. notamment, Milhaud. *Leçons sur les origines de la science grecque*, 1893. Dans ses *Nouvelles études sur la pensée scientifique*, publiées en 1911, Gaston Milhaud, tenant compte de travaux récents sur la géométrie hindoue, a légèrement atténué la thèse qu'il soutenait en 1893.

(4) Cf. E. Picard. *La science moderne et son état actuel*, p. 4. — Cf. également, un article de E. Karpinski, *Origines et développement de l'algèbre*, apud *Scientia*, Bologne, 1919, 8.

(5) Cf. L. Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*, Chapitre II.

intellectuels qui caractériseront plus tard la découverte mathématique.

Quelque opinion que l'on ait sur les mérites et l'intérêt de la science orientale (1), on ne pourra point contester, cependant, qu'envisagée du point de vue auquel nous voulons nous placer, l'histoire de la pensée mathématique ne saurait commencer avant l'époque des grandes découvertes helléniques. Les Egyptiens ont connu des faits mathématiques ; ils ont su manier des formules et raisonner sur des figures géométriques ; mais, poursuivant, autant que nous en pouvons juger actuellement, des fins utilitaires et pratiques, ils ne paraissent pas avoir eu une conception distincte de la science théorique, un idéal scientifique. Or peu nous importent les problèmes qui ont suscité, les sources d'où sont sortis, les grands courants de la spéculation mathématique : ces courants ne nous intéressent qu'à partir du moment où ils ont une direction, une orientation systématiques.

Si la question des influences étrangères subies par la science grecque se trouve ainsi — pour le moment — écartée du champ de notre étude, nous rencontrons en revanche certaines difficultés lorsque nous cherchons à retracer la filiation des conceptions mathématiques fondamentales à l'intérieur même du monde hellénique.

Si nous considérons, en effet, la matière de la Mathématique grecque, nous sommes tout d'abord confondus par l'extraordinaire diversité des questions qui y figurent. C'est ainsi qu'à côté des œuvres entièrement achevées des grands arithméticiens et géomètres grecs, nous

(1) Nous ne parlons pas ici de la grande école algébriste de l'Inde, qui a indubitablement exercé une influence sur l'évolution de la pensée mathématique, mais dont l'œuvre est probablement postérieure à l'épanouissement de la science grecque (voir *infra*, chapitre II).

trouvons, dans le recueil de Diophante le principe d'une théorie des nombres, chez Apollonius l'idée première d'une géométrie analytique, chez Archimède la conception déjà très nette du calcul des infiniment petits, et chez Euclide l'application presque parfaite d'une méthode de présentation de la géométrie qui est devenue l'une des bases essentielles de l'édifice mathématique moderne. Comment donc discerner des caractères communs dans une production aussi variée ?

Étant donné, toutefois, le but que nous nous proposons dans cet ouvrage, nous ne devons pas placer sur la même ligne toutes les acquisitions de la science grecque, ni chercher, non plus, à les classer d'après l'avenir plus ou moins brillant qui leur était réservé. Ce que nous voudrions mettre en lumière, ce sont les idées maîtresses, ce sont les principes intellectuels, qui ont présidé à la naissance de la Mathématique pure. Or, ces principes ne sont évidemment pas aussi diversifiés que les collections de faits positifs dont ils ont provoqué la découverte, et il doit être possible de les grouper autour d'un petit nombre d'idées centrales. C'est ce que nous allons tenter de faire dans le présent chapitre.

I. — La science contemplative.

Nous avons rappelé d'un mot, tout à l'heure, l'opposition fondamentale qui paraît séparer la conception hellénique de la science et le point de vue des peuples orientaux. Les arithméticiens et les géomètres de l'Orient ont été dirigés par des considérations utilitaires, et c'est là, selon Platon, une raison suffisante pour leur refuser le nom d'*amis de la science*. Pythagore, au contraire « remonta aux principes supérieurs et étudia les problèmes abstraitement et par l'intelligence pure », et c'est pourquoi il fut, d'après Eudème (1), le créateur de la Géométrie (c'est-à-dire des Mathématiques pures), dont il fit un enseignement libéral. Ainsi, le premier trait distinctif de la mathématique grecque serait, d'après ses auteurs, son caractère strictement spéculatif : elle entend raisonner sur des notions pures, sur des essences idéales sans jamais s'abaisser à la considération des objets sensibles.

Quel est le sens de ces assertions, et que faut-il entendre par les mots : « essences mathématiques idéales » ? Une bonne partie de la métaphysique grecque a été construite précisément en vue de l'expliquer. Cependant, il est probable que l'explication n'est venue qu'après coup, et l'on doit, par conséquent, admettre qu'elle n'était pas une condition indispensable du développement de la pensée mathématique hellénique. En fait, le savant grec avait à un tel degré l'intuition instinctive du caractère propre des notions mathématiques que point n'était besoin d'un système métaphysique pour arrêter sa conviction. Il lui a suffi, semble-t-il, d'examiner les techniques arithmétiques et géométriques de l'Orient pour faire, du même coup, deux découvertes : que, d'une part, ces techniques ne sont pas des sciences rationnelles, mais qu'une science, d'autre part, se cache derrière elles. Et il a compris que, même en conservant la manière égyptienne de mesurer et de calculer, on pouvait, sur les mêmes figures, avec les mêmes mots, dire des choses toutes différentes.

Plus précisément, s'il est possible de regarder les expressions numériques et les figures géométriques

(1) Proclus. *Commentaires*, édit. Teubner, p. 65. C. Milhaud, *Les philosophes géomètres de la Grèce*, p. 79.

comme les objets d'une science rigoureuse et purement rationnelle, c'est à la condition de ne voir en elles qu'une forme extérieure et accidentelle; et, quand nous analysons ces expressions et figures, ce n'est pas en réalité sur elles que portent nos raisonnements mais bien sur les notions idéales, éternelles, dont elles sont la couverture. Voilà ce que doit comprendre tout homme qui a étudié les rudiments de la géométrie. « Aucun de ceux — dit Platon (1) que l'on peut considérer comme le porte-parole des géomètres du v^e siècle, — aucun de ceux qui ont la moindre teinture en géométrie, ne nous contestera que le but de cette science n'a absolument aucun rapport avec le langage que tiennent ceux qui la traitent. — Comment cela ? — Leur langage est fort plaisant quoiqu'ils ne puissent s'empêcher d'en user. Ils parlent de quarrer, de prolonger, d'ajouter, et ainsi du reste, comme s'ils opéraient réellement et que toutes leurs démonstrations tendissent à la pratique; tandis que cette science n'a tout entière d'autre objet que la connaissance. — Cela est vrai. — Conviens encore d'une chose. — De quoi ? — Qu'elle a pour objet la connaissance de ce qui est toujours et non de ce qui naît et périt. — Je n'ai pas de peine à en convenir; car la Géométrie a pour objet la connaissance de ce qui est toujours. — Par conséquent, elle attire l'âme vers la vérité, elle forme en elle l'esprit philosophique, en l'obligeant à porter en haut ses regards, au lieu de les abaisser, comme on le fait sur les choses d'ici-bas. — Rien n'est plus certain. »

L'Arithmétique, comme la Géométrie, a « la vertu d'élever l'âme en l'obligeant à raisonner sur les nombres

(1) *République*, VII. Ce passage de la *République*, capital pour l'intelligence de la Mathématique platonicienne, a été fréquemment cité et commenté par Gaston Milhaud dans ses leçons sur la science grecque.

tels qu'ils sont en eux-mêmes, sans jamais souffrir que ses calculs roulent sur des nombres visibles ou palpables ». Ainsi, la science n'a nullement pour rôle, comme le pourraient croire des ignorants, de servir aux marchands et aux négociants pour les ventes et pour les achats, mais bien de faciliter à l'âme la route qui doit la conduire de la sphère des choses périssables à la contemplation de la vérité (1).

Quels sont exactement les objets qu'étudie la Science ainsi conçue, quels problèmes se pose-t-elle, et de quelle manière résout-elle ces problèmes ?

Il est moins facile qu'on ne pourrait le supposer de répondre d'une manière précise à ces trois questions.

Si les Grecs, en effet, ont étudié avec prédilection le problème philosophique de la connaissance, par contre ils ne nous ont donné nulle part le plan de leur Science, ils ne nous ont légué aucun programme d'ensemble, indiquant la composition de l'édifice mathématique tel qu'ils le comprenaient et tel qu'ils se proposaient de le réaliser. Nous possédons, il est vrai, un bon nombre de leurs traités techniques. Mais ceux-ci ne mettent en évidence que l'un des aspects — et non, peut-être, le plus essentiel — de la conception hellénique de la science. On sait, en effet, que les Platoniciens établissaient une séparation profonde entre le « discours » et l' « intelligence », entre la science écrite, qui est un exposé didactique de vérités déjà connues, et la *conception* des vérités scientifiques, produit direct de notre faculté d'intuition s'exerçant sur le monde des notions idéales. — Cherchons cependant à dégager les caractères principaux de l'œuvre mathématique des Hellènes, considérée

(1) Cf. *République*, VII.

du point de vue de son objet et antérieurement au discours.

***

Nous venons de voir que les objets véritables des spéculations arithmétiques et géométriques sont, d'après Platon, les « idées » de nombre (entier) et de figure géométrique. Ce qu'il faut entendre par nombre entier, cela se comprend de soi, malgré l'impossibilité où nous sommes de donner de cette notion une *définition* logique satisfaisante. Mais le concept de figure géométrique demande, par contre, à être précisé et délimité.

Reconnaissons d'abord, avec Platon, que ce que nous appelons improprement une « figure » est, en réalité, une entité qui n'a nullement besoin, pour exister, d'être effectivement « figurée ». Les triangles sur lesquels raisonne le géomètre ne sont point ceux que nos sens nous font percevoir. Il n'y a pas, en effet, de triangle matériel qui soit rigoureusement un triangle (c'est-à-dire qui n'ait point d'épaisseur, qui soit parfaitement plan, dont les côtés soient vraiment rectilignes, etc.). Ainsi, lors même que nous nous aidons d'une image physique pour démontrer une propriété du triangle, nous ne devons voir dans cette image qu'un secours accessoire, un mode d'expression analogue à celui que nous offrent les signes de l'écriture : le triangle dont nous voulons, en réalité, parler, est celui qui existe dans notre esprit, et non celui qui est dessiné sur le sable ou sur le papyrus.

Mais, si ce n'est pas en le *figurant* sous une forme concrète, comment parviendrons-nous à objectiver les notions géométriques, à les placer, en quelque façon, devant les yeux de notre esprit, pour en étudier la compréhension exacte et en découvrir les propriétés? Par quel moyen, d'autre part, nous assurerons-nous que tel être géométrique, dont certains raisonnements nous font entrevoir l'existence possible, existe réellement ?

Il fallait, pour donner des bases solides, à la géométrie, trouver un critère précis permettant de discerner et de circonscrire les notions qu'il est légitime de faire entrer dans cette science. Une autre raison, d'ailleurs, rendait nécessaire l'adoption d'un tel critère. On en avait besoin pour canaliser le flot trop abondant de nos intuitions. En proclamant, en effet, le caractère purement intellectuel de la Science, on se heurtait immédiatement à un écueil : si vraiment le développement de la recherche scientifique n'a d'autres bornes que celles de notre puissance d'invention, la mathématique, alors, au lieu de former un édifice harmonieux et bien ordonné, ne va-t-elle pas se disperser, projeter des pousses en tous sens, et s'égarer dans l'arbitraire ? Il y a là, pour le savant qui réfléchit, une difficulté troublante. Le mathématicien a conçu à l'avance une Science idéale, aux contours bien tracés, et voilà qu'à peine au travail il a l'impression que son esprit déborde de tous côtés hors de ces contours. C'est pourquoi les Grecs se sont trouvés conduits à limiter volontairement le champ de leurs explorations mathématiques. Ils l'ont fait d'une manière ingénieuse, sans doute, mais beaucoup trop étroite au gré des géomètres modernes.

Le critère généralement utilisé par les Grecs pour distinguer les notions qui seront admises en géométrie leur fut fournit par la théorie de la *construction*. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler les grandes lignes de cette théorie, où nous trouvons une excellente illustration des principes qui dirigeaient la pensée mathématique de la Grèce.

Qu'est-ce que la construction géométrique ? Il est à peine besoin de faire observer que cette opération n'a rien de commun avec la construction concrète telle que la pratiquaient les arpenteurs de l'Orient. C'est une opération rationnelle, qui doit permettre d'établir et de vérifier l'*existence* théorique de figures sur lesquelles on raisonne (1). Pour atteindre ce but, le moyen le plus simple consiste évidemment à construire effectivement la figure, ou plutôt à définir un procédé théorique qui *permettrait* de la construire si l'on savait parfaitement dessiner.

Nous admettrons comme un fait d'intuition que nous savons, en toutes circonstances, tracer une droite indéfinie dont sont donnés deux points, et une circonférence dont on connait le centre et un point (ou, si l'on veut, le centre et le rayon). Cela revient à dire, pour parler un langage matériel, que nous savons en

(1) Dans les traités didactiques de géométrie, cette notion de l' « existence » des figures prend une signification technique extrêmement précise. Toute figure nouvelle doit, en effet, être introduite par une *définition*, c'est-à-dire par l'énoncé des propriétés spécifiques dont elle jouit. Or une telle définition n'est évidemment légitime que si les propriétés assignées à la nouvelle figure sont compatibles entre elles, peuvent exister simultanément. S'il en était autrement, la figure introduite par la définition serait une impossibilité logique ; elle n' « existerait pas ». Ainsi, par exemple, si je proposais d'appeler « triangle birectangle » un triangle dont deux angles sont droits, je définirais une figure inexistante, car, étant donné que les *trois* angles d'un triangle quelconque ont pour somme deux droits, il est impossible que *deux* de ces angles soient respectivement égaux à un droit. Il suit nécessairement de là que toute définition doit être complétée par une discussion, établissant l'existence de la chose définie, c'est-à-dire la compatibilité des différentes propositions contenues dans la définition. Toutefois cette interprétation logique du problème de l' « existence » ne peut-être donnée que lorsque l'on se réfère à l'appareil démonstratif de la Science, dont pour le moment nous nous efforçons de faire abstraction.

tout cas faire usage de la *règle* et du *compas*. Partant de là, nous posons en principe que l'existence d'une figure plane sera prouvée (et sera prouvée seulement) si l'on établit qu'il serait possible de construire cette figure en effectuant une série de tracés de droites ou de cercles dont deux points, ou le centre et un point, sont connus. C'est le principe qu'énoncent les traités classiques de géométrie lorsqu'ils enseignent que « l'on réserve le nom de constructions géométriques aux constructions effectuées avec la règle et le compas ».

S'il faut en croire Plutarque (1), cette conception de la « construction » aurait été déjà expressément formulée par Platon, et ce géomètre aurait fait grief à l'école d'Eudoxe d'employer, pour la résolution des problèmes, des instruments et des dispositifs mécaniques autres que la règle et le compas. Quoi qu'il en soit, toutes les constructions *planes* qui sont spécifiées dans les énoncés des propositions d'Euclide, ou qui interviennent dans la démonstration de ces propositions, sont des constructions s'effectuant « par la droite et le cercle ».

Mais les constructions ainsi définies ne valent que pour la géométrie plane. Quelle seront dans l'espace à trois dimensions les opérations susceptibles de jouer le même rôle fondamental ? Ici apparait une difficulté : en effet une construction faite dans l'espace à trois dimensions ne peut pas être figurée à l'aide du dessin, représentée par une « figure géométrique » ; sommes-nous alors en droit d'ériger semblable construction en preuve de l'existence de la chose construite ? Cette difficulté explique la répugnance que paraissent avoir eue longtemps les géomètres grecs pour l'étude de la stéréométrie ou géométrie à trois dimensions (2).

(1) Cf. P. Tannery. *La géométrie grecque*, p. 79.

(2) L'ignorance où nous sommes — écrit Platon (*Lois*, VII) —

Pour sortir d'embarras, le plus simple eût été — puisqu'aussi bien tous les dessins sont des projections — de faire une étude systématique de la *projection* : on aurait ainsi appris à remplacer une construction stéréométrique quelconque par une construction strictement équivalente effectuée dans le plan.

Mais la méthode des projections n'a été constituée, sous le nom de *Géométrie descriptive*, qu'au début du XIXe siècle. Les géomètres anciens, qui ne disposaient pas de cet instrument, se trouvèrent donc réduits à admettre *a priori* la légitimité de constructions correspondant dans l'espace aux constructions faites sur le plan avec la règle et le compas : construction d'un plan, construction d'une droite ou d'un cercle de l'espace, et aussi construction des corps ronds, *cylindre*, *cône*, *sphère* (1), qui sont engendrés respectivement par la révolution d'un rectangle, d'un triangle, d'un cercle, autour d'un axe rectiligne.

Observons ici que, du même coup, la géométrie plane se trouvait indirectement enrichie d'un chapitre nouveau. En effet, en coupant par un plan la surface d'un cône ou cylindre, nous pouvons obtenir une série de courbes planes remarquables — les sections coniques — qu'il ne nous aurait pas été possible de construire par la droite et le cercle si nous étions restés dans le plan.

par rapport à la mesure des corps suivant leur longueur, largeur et profondeur, convient moins à des hommes qu'à de stupides animaux ; « j'en ai rougi non seulement pour moi-même, mais pour tous les Grecs ». La protestation de Platon porta ses fruits, car du vivant même du philosophe, les bases de la stéréométie furent enfin solidement établies grâce aux travaux d'Archytas et d'Eudoxe.

(1) Les Grecs étudièrent aussi, occasionnellement, quelques autres figures solides telle que le *tore* (cf. l'étude citée dans la note suivante).

Ainsi se trouvait ouvert aux géomètres, un vaste champ d'investigations, comprenant probablement les régions de la science qui offrent la plus riche moisson de beaux théorèmes, mais dont les frontières, assurément, étaient extrêmement artificielles. Ne peut-on concevoir, en effet, de nombreuses courbes géométriques planes, autres que le cercle et les sections coniques, qui ne sont pas moins susceptibles d'être l'objet d'une étude spéculative rigoureuse ? Les géomètres grecs eux-mêmes connaissaient bien plusieurs de ces courbes, auxquelles ils avaient été conduits par la recherche des *lieux géométriques* (1).

On sait que l'on appelle « lieu géométrique » l'ensemble des points du plan ou de l'espace qui jouissent d'une propriété commune. En géométrie plane, le lieu géométrique peut être une droite, un cercle ou une section conique, mais ce peut-être aussi une autre courbe, qui se trouve alors définie par la propriété même dont jouit l'ensemble de ses points. C'est ainsi qu'au v^e^ ou iv^e^ siècle av. J.-C., Hippias définit la courbe appelée *quadratrice*. Au iii^e^ ou ii^e^ siècle, Nicomède définit la *conchoïde* et Dioclès la *cissoïde*. L'allure générale de ces courbes était facile à déterminer ; mais pouvait-on, cependant, regarder leur définition comme complète ? Pouvaient-elles légitimement prendre place dans la Géométrie ? Comme s'ils craignaient de porter atteinte à la pureté de cette dernière, les Grecs hésitent à ouvrir aux courbes nouvelles la porte du sanctuaire, et ils préfèrent les placer en marge de la Science. Ces courbes seront pour eux, d'ordinaires des τόποι γραμμικοί, ou *lieux*

(1) Cf. P. Tannery. *Pour l'histoire de lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, apud *Mémoires scientifiques*,, édit Heiberg-Zeuthen, tome II.

mécaniques (littéralement : lieux définis par un dessin ou tracé mécanique) (1), et non des *courbes géométriques*.

C'est ici qu'apparaît clairement l'insuffisance et la fragilité du point de vue grec, fragilité qu'a fort bien fait ressortir Descartes dans une page célèbre de sa *Géométrie* : « Les anciens — dit Descartes (2) — ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de la géométrie, ... les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent être qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres qu'on n'y emploie quelque ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont pas, outre cela, distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car, de dire que ç'eût à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudrait rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus compliqués que la règle et le compas, ne peuvent être si justes : car il faudrait pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la Géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchent les autres. Je ne dirai pas aussi que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu aug-

l'été

(1) C'est ainsi que Nicomède avait, paraît-il, imaginé un appareil permettant de décrire la conchoïde mécaniquement.

(2) *La Géométrie*, livre II : *De la nature des lignes courbes.*

menter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite et décrire un cercle, d'un centre donné, qui passât par un point donné : car ils n'ont point fait de scrupule de supposer, outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est point besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mûes l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres ... »

Cependant Descartes lui-même n'a pas su tirer toutes les conséquences des remarques qu'il formulait. Il s'est arrêté en chemin : car, s'il introduit dans la *Géométrie* la conchoïde et la cissoïde, il continue par contre à en exclure la spirale et la quadratrice, et ne s'élève pas à la notion générale de *courbe* telle que la conçoit la science moderne.

Nous nous sommes étendus un peu longuement sur la théorie de la construction. C'est qu'en effet, ramenée à son origine historique, cette théorie se trouve être particulièrement instructive. Elle nous montre très nettement comment, dès son point de départ, — lorsqu'il opère le triage des éléments sur lesquels il fera porter ses spéculations, — le géomètre grec s'impose à lui-même une limitation qui ne peut être justifiée par aucune raison sérieuse sinon par le désir d'obtenir une science simple et bien ordonnée. Nous allons voir se préciser ce caractère arbitraire de la Mathématique grecque si, laissant désormais de côté les notions élémentaires (matière des raisonnements du savant), nous examinons la nature des problèmes que celui-ci s'attache à résoudre.

***

Étant entendu que l'arithméticien doit spéculer sur les nombres entiers, et le géomètre sur les droites, les cercles et les autres lignes et corps reçus en géométrie, quelles sont, parmi toutes les questions auxquelles peuvent donner lieu ces objets, parmi toutes les combinaisons que l'on en peut former, celles qui ont attiré spécialement la curiosité du savant grec et qu'il a choisi d'étudier ?

C'est ici, surtout, que nous nous trouvons manquer de bases positives d'appréciation et que nous sommes obligés de deviner ce qui ne nous a pas été expressément indiqué. Sans doute, il est facile d'ouvrir les traités grecs que nous possédons et de dresser la liste des théorèmes qui y sont exposés. Mais, parmi ces théorèmes, il en est évidemment un grand nombre qui n'ont été recueillis qu'à titre d'intermédiaires, en vue de faciliter la démonstration de théorèmes plus importants ; d'autres, probablement, ont été rencontrés par hasard, sans qu'on les cherchât, et ne jouent dans la Science que le rôle de hors-d'œuvre ; enfin beaucoup de théorèmes doivent leur origine à l'émulation, aux rivalités des géomètres, qui cherchent à s'étonner les uns les autres et à faire valoir leur savoir-faire. A quelles conclusions pourrait nous conduire, dans ces conditions, la simple énumération des matières contenues dans quelques traités ? La question que nous nous posons est d'un tout autre ordre : nous voudrions savoir, non pas, généralement, quels problèmes ont été résolus par les Grecs, mais quels sont ceux dont la résolution devait leur sembler spécialement désirable et qui marquent le but de leurs efforts.

La question ainsi formulée serait assez embarrassante si on voulait la traiter en détail en dressant explicitement une liste de problèmes fondamentaux. Mais, considérée d'un point de vue d'ensemble, elle ne paraît comporter qu'une seule réponse : les Grecs ont recherché et cultivé en Mathématiques ce qui est *simple*, ce qui est *beau*, ce qui est *harmonieux* (1).

Il convient, toutefois, de préciser le sens que nous attachons ici à ces mots.

C'est aujourd'hui presqu'un lieu commun de comparer aux jouissances artistiques les satisfactions, les enthousiasmes, que procure si souvent à ses adeptes la science mathématique désintéressée. Il s'en faut cependant que tous ceux qui nous parlent du caractère esthétique des Mathématiques attachent le même sens à cette expression. Pour beaucoup de savants modernes, ainsi que nous le verrons plus loin, ce qui, dans les théories mathématiques, doit surtout exciter l'admiration, c'est l'élégance de la démonstration, c'est l'imprévu de certaines méthodes, ce sont les heureux concours de circonstance qui permettent de ramener à des termes relativement simples tels problèmes en apparence inextricables. Voilà, dit-on souvent, un « beau travail mathématique », indiquant par là qu'autant ou plus que la valeur intrinsèque des questions étudiées, on entend louer l'ingéniosité et la brillante victoire de l'auteur. Tout autre, évidemment, est l'esthétique mathématique des Grecs ; car la beauté, pour le penseur grec, ne peut résider que dans les idées et non dans ce que l'homme ajoute aux idées ; selon lui, une belle propriété d'un

(1) Cf. G. Milhaud. *La Géométrie grecque œuvre du génie grec*, apud *Etudes sur la pensée scientifique*, 1906, p. 40 et suiv.

nombre ou d'une figure ne devra son mérite qu'à elle-même et non aux circonstances, souvent remarquables, dans lesquelles elle se révèle à nous, ou à l'intérêt de la poursuite qui permet d'en prendre possession.

« *Dix* — déclarait Speusippe (1) — *dix* est parfait, et c'est à juste titre, et conformément à la nature que les Hellènes se sont, sans préméditation aucune, rencontrés avec tous les hommes de tous les pays pour compter suivant ce nombre ; aussi possède-t-il plusieurs propriétés qui conviennent à une telle perfection (2). » — La perfection serait donc, d'après les Grecs, une qualité intrinsèque des idées, que l'on peut reconnaître à l'abondance des propriétés qui en découlent. S'il en est ainsi, il sera évidemment naturel de faire des propriétés des idées mathématiques les plus parfaites l'objet ultime de nos spéculations.

Plus encore que les nombres isolés tels que *dix*, certains groupements de nombres présentent un grand caractère de beauté. Il y a, dans le monde des nombres, comme dans celui des sons, certaines harmonies, certains accords qui s'imposent à notre attention : tels sont les rapports de proportionnalité, les différentes sortes de *médiétés* (3), les relations existant entre certains nombres et

(1) Cité, d'après les *Théologoumènes* de Jamblique, par Paul Tannery, *Pour l'histoire de la science Hellène*, p. 386.

(2) En effet, le nombre *dix* renferme autant de nombres pairs que de nombres impairs (cinq), il renferme autant de nombres premiers (1, 2, 3, 5, 7) que de nombres non-premiers (4, 6, 8, 9, 10), il est égal à la somme des quatre premiers nombres ($10 = 1 + 2 + 3 + 4$), et il a bien d'autres propriétés dont Speusippe fait l'énumération.

(3) Théon de Smyrne distinguait dix sortes de médiétés pouvant avoir lieu entre trois nombres a, b, m. Les trois principales sont la *médiété arithmétique* (qui a lieu lorsque $a - m = m - b$), la *médiété géométrique* (qui a lieu lorsque $m^2 = a \times b$), la *médiété harmonique* (qui a lieu lorsque $2 \times a \times b = m \times (a + b)$).

leurs diviseurs (relations qui conduisent à la définition des ~~(1)~~, *nombres parfaits*), l'affinité des *nombres amis* (2).

Si l'on rapproche d'autre part le monde des nombres arithmétiques de celui des figures géométriques on voit se manifester entre les deux mondes d'intimes et bien remarquables correspondances. Représentant les nombres, à la manière pythagoricienne, par des files de points, on constate, par exemple, que la somme de n nombres consécutifs commençant par 1 est un *triangle*, que la somme de n nombres impairs consécutifs commençant par 1 est un carré, que la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de raison 3, commençant par 1, est un *pentagone* ; et ainsi de suite. L'Arithmétique et la Géométrie — ainsi que d'ailleurs la Musique et l'Astronomie — s'entrelacent merveilleusement ; et, en se proposant comme but l'étude de leurs relations, le savant est sûr d'être sur la piste de précieuses découvertes. La foi robuste qu'avaient les géomètres pythagoriciens dans l'harmonieuse unité de la science — signe certain de sa perfection — ne saurait être mieux prouvée que par la stupeur où ils étaient plongés lorsque cette unité se trouvait remise en question. Ainsi la constatation de l'existence de longueurs incommensurables dans les figures les plus simples leur révéla une discordance insoupçonnée entre les notions de nombre et de grandeur géométrique. Or, s'il faut en croire un

(1) Un nombre *parfait* est un nombre égal à la somme de ses diviseurs ; ainsi $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

(2) Deux nombres *amis* sont deux nombres dont chacun égale la somme des diviseurs de l'autre ; ainsi 220 et 284, car

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142,$$
$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

scholie ancien (1), une légende symbolique rapportait que l'auteur de la théorie des incommensurables fut englouti dans un naufrage. C'est ainsi que le ciel punit celui qui avait « exprimé l'inexprimable, représenté l'infigurable, dévoilé ce qui eût dû rester toujours caché. »

La préoccupation esthétique pourrait, croyons-nous, être retrouvée derrière toutes les découvertes de la science grecque; mais elle s'est manifestée d'une manière, particulièrement sensible dans le domaine de la géométrie qualitative pure, géométrie qui étudie la forme des figures indépendemment de toute considération de grandeur ou de nombre; et c'est là que nous apercevrons le mieux l'influence restrictive et limitative que cette préoccupation devait nécessairement exercer dans le développement de la science.

Entre les différents types de figures auxquels peuvent donner naissance les lignes ou corps géométriques élémentaires, les Grecs établissent une hiérarchie, certains types de figures étant regardés par eux comme plus beaux que d'autres. De là résulte une hiérarchie correspondante des différentes parties de la Géométrie, car l'étude d'un type de figure est d'autant plus désirable que ce type est plus relevé. C'est ainsi que les Platoniciens sont amenés à placer au faîte de la Géométrie, comme étant le couronnement de cette science et le but vers lequel doivent converger nos recherches, une théorie qui nous parait aujourd'hui extrêmement spéciale et qui, en tout cas, ne pouvait conduire qu'à une impasse : la théorie des polyèdres réguliers.

Dans un passage bien connu du *Timée*, en un langage obscur et énigmatique, Platon a proclamé l'éclatante

(1) Cf. Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2e éd. t. I, p. 171.

beauté de ces corps et prétendu expliquer par eux la genèse de l'univers. Dieu, dit Platon (1), lorsqu'il tira les choses de l'agitation et du pêle-mêle où elles étaient, leur donna la plus grande perfection possible. Il composa donc les éléments, feu, terre, eau, air, au moyen des quatre corps géométriques les plus parfaits : tétraèdre régulier, octaèdre régulier, icosaèdre régulier, cube (2). « Il nous faut exposer — poursuit-il, comment sont nés ces quatre beaux corps, comment ils diffèrent entre eux, et peuvent, en se dissolvant, s'engendrer réciproquement. Et alors nous n'accorderons à personne qu'on puisse jamais voir des corps plus beaux que ceux-là, dont chacun appartienne à un genre à part. Il me faut donc mettre tous mes soins à constituer harmonieusement ces quatre genres de corps excellents en beauté (3) ».

Sans doute ne faut-il pas prendre à la lettre la cosmogonie du *Timée*; mais le choix même des images dont se sert ici Platon nous permet de nous rendre compte de la direction qu'il voulait imprimer à la spéculation géométrique.

***

Etant admis que le but de l'activité mathématique est l'étude des nombres et des figures, ou des groupes de nombres et de figures, dont la beauté est reconnue ou pressentie, étant entendu que, pour produire une œuvre

(1) Timée. *Œuvres de Platon*, trad. Cousin, t. XII, p. 160 et suiv.

(2) Polyèdre compris respectivement sous 4,8 et 20 triangles équilatéraux égaux et sous 6 carrés égaux.

(3) Il y a un cinquième polyèdre régulier, le dodécaèdre (figure comprise sous 12 pentagones équilatéraux égaux). Il restait, dit Platon (*Timée*), une cinquième combinaison : Dieu s'en servit pour tracer le plan de l'univers.

de mérite, le mathématicien doit toujours rechercher ce qui lui paraît simple et harmonieux, on devine facilement dans quel esprit et d'après quels principes ce savant accomplira son travail de recherche.

Le géomètre grec, en règle générale, ne vise pas à la difficulté. Il n'entre pas dans son dessein de se tourmenter l'esprit, d'user de ruses et de détours pour parvenir à la connaissance de faits peu accessibles, dont la complication même est un signe d'impureté. La découverte, telle qu'il la conçoit, doit s'accomplir sans effort. Non pas, bien entendu, que le savant grec se croie maître de sa spéculation et considère le moins du monde les Mathématiques comme une création de son esprit. Mais il résulte de ses conceptions que seules méritent d'être étudiées les propriétés des nombres et des figures qui se révèlent à nous facilement.

C'est donc très justement que l'intuition, par laquelle nous atteignons les vérités mathématiques, est souvent comparée à une vision de l'intelligence. Pour découvrir les assemblages d'idées qui doivent faire l'objet de notre science, il suffit à notre esprit de *regarder*. Si nous n'apercevons pas du premier coup tous les caractères et toutes les propriétés de ces assemblages, c'est parce que nous ne sommes pas habitués à contempler directement des idées. Nous sommes semblables à un homme que l'on extrairait brusquement d'un antre souterrain où il aurait été longtemps retenu captif ; « la lumière lui blessera les yeux, et l'éblouissement qu'elle lui causera l'empêchera de discerner les objets »(1). Et, s'il nous arrive parfois de commettre des erreurs, c'est parce que, n'ayant pas suffisamment exercé notre faculté d'intuition, nous avons notre vision obscurcie par certains préjugés. Ainsi

(1) Platon. *République*, VII.

l'esclave ignorant que Platon met en scène dans le *Ménon* (1) n'avait qu'à regarder en lui-même pour trouver la solution du problème que lui posait Socrate (construire un carré double du carré dont le côté a pour longueur deux pieds) ; mais il commence par se tromper parce qu'allant trop vite, et n'ayant pas l'habitude de réfléchir, il s'imagine « savoir ce qu'il ne sait pas et répond avec confiance comme s'il le savait ». Cependant, guidé discrètement par Socrate, ce même esclave arrive peu à peu, sans effort, sans heurt, sans à-coup, à résoudre correctement le problème posé.

Nous rapportons ici le témoignage de Platon sans en tirer aucune conclusion métaphysique. Nous n'avons pas à exposer la théorie de la réminiscence, ni à examiner en quel sens il est permis de dire que les idées mathématiques préexistent dans notre âme à l'action de l'intelligence. Nous cherchons uniquement à définir l'attitude scientifique du géomètre du v^e^ siècle et sa conception de la découverte. Et il nous apparaît que cette conception peut se résumer dans la conclusion suivante : le savant ne crée pas le fait ; il n'a pas, par contre, à se faire violence pour le conquérir ; il se borne à le constater et à l'enregistrer.

Platon a souvent comparé à une chasse la recherche des idées, et la recherche mathématique en particulier. La comparaison est, en effet, fort juste, à condition toutefois que l'on précise bien quel est le genre de chasse dont on veut parler. C'est ce que Platon fait voir dans le *Théétète* (2). Il y a, dit-il, deux sortes de chasse. Supposons que nous soyons propriétaires d'un colombier. Pour tirer parti de ce colombier, il faudra

(1) *Ménon*, Œuvres de Platon, trad. Cousin, t. VI, p. 173 et suiv.
(2) *Théétète*, Œuvres de Platon, trad. Cousin, t. II, p. 202.

d'abord le garnir; et ceci exige une première chasse. Après quoi on pourra dire que nous *possédons* des colombes, mais non pas que nous les *avons*; car si, à un moment quelconque, nous voulons disposer de ces oiseaux, il faudra nous livrer à une deuxième chasse qui consiste à mettre la main sur les colombes déjà présentes dans le colombier. C'est à ce dernier genre de chasse — le plus fructueux et le moins pénible — que la poursuite des vérités mathématiques serait surtout comparable d'après Platon. Un oiselier qui capture dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs, voilà sous quelle image nous devons nous représenter le mathématicien idéal.

II. — Les différents aspects de la Mathématique grecque.

Nous avons, dans les pages qui précèdent, tenté de définir les caractères fondamentaux de la science hellénique en déterminant l'*objet* que poursuit cette science. Ce sont les conceptions qui orientent l'invention des notions et théorèmes que nous avons cherché à mettre en lumière et dont nous avons trouvé une expression particulièrement saisissante dans certaines formules platoniciennes. Avions-nous le droit, cependant, d'isoler ainsi une face de la Science et d'en négliger les autres côtés, — le côté logique, en particulier ? Les Grecs, comme chacun sait, on poussé très loin l'étude du raisonnement déductif. Ce sont eux qui ont enseigné au monde le mécanisme de la démonstration mathématique. Et le principal mérite du traité d'Euclide, — qui est de tous les ouvrages mathématiques grecs celui qui a exercé l'influence la plus durable, — consiste à présenter la géométrie sous la forme d'un système dialectique rigoureux, où l'enchaînement des propositions est réalisé d'une manière impeccable. Ne sont-ce point là des faits dont il faut tenir compte, et, en les reléguant momentanément dans l'ombre, n'avons-nous point défini d'une manière trop étroite l'idéal de la science grecque? Ou, plutôt, cet idéal est-il bien unique? A côté de la tendance qu'ont eu certains grands géomètres à faire dépendre la valeur de la science de la perfection de son objet, et à s'effacer devant celui-ci, ne peut-on pas discerner également, en Grèce, une tendance opposée, qui portait les savants à estimer surtout, dans la science, les qualités de l'appareil démonstratif?

Il n'est certes pas niable que le goût de la logique et de la dialectique ne soit un des traits distinctifs de la race hellénique. Déjà apparent dans les manifestations les plus anciennes de la pensée grecque, il fut fortifié par les sophistes aussi bien que par les géomètres de l'Académie, contemporains ou continuateurs de Platon. Aristote, enfin, fit passer la logique au premier plan des préoccupations des savants de son temps et, en établissant un parallélisme systématique entre l'ordre logique et l'ordre de l'existence, il porta un coup redoutable à la doctrine métaphysique sur laquelle Platon fondait l'opposition de la connaissance contemplative et de la science didactique. Sans doute, Aristote ne fut pas un mathématicien; mais il y a une incontestable parenté intellectuelle entre la logique du Lycée et la géométrie d'Euclide (1). C'est une inspiration commune qui se manifeste dans l'une et dans l'autre, et qui donne à l'édifice de la géométrie pure son ossature définitive.

Afin de préciser la discussion qui va suivre, rappelons

(1) Cf. L. Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*, chap. VI.

en quelques mots quels sont les caractères essentiels de cette ossature logique.

Le principe qui détermine le plan de l'édifice est qu'aucun fait mathématique ne doit être admis sans démonstration, à l'exception toutefois d'un petit nombre de données premières, posées *à priori* et une fois pour toutes au début de la science et servant de fondations à l'édifice tout entier. Les données premières sont, d'une part, les *définitions*, qui formulent les concepts fondamentaux de la géométrie, et, d'autre part, les *hypothèses*, parmi lesquelles il y a lieu de distinguer les *postulats* ou *demandes* et les *axiomes* ou *notions communes*; les postulats affirment *a priori* que certaines constructions sont possibles, les axiomes que certaines propriétés essentielles appartiennent aux grandeurs ou aux figures les plus simples.

Partant des données premières, le géomètre cherche à obtenir, par voie de déduction logique, une série de propositions. L'enchaînement de ces propositions est réglé de telle sorte que les vérités nécessaires pour la démonstration de chacune d'elles se trouvent en totalité dans les propositions antérieures. Les propositions, elles-mêmes, seront, d'autre part, distinguées et classées d'après leur nature. Il y a le *théorème* ou proposition principale, — le *lemme*, proposition d'importance secondaire destinée à faciliter la démonstration d'un théorème à venir, — le *corollaire*, proposition exprimant une conséquence directe d'un théorème que l'on vient d'établir.

Comment parviendra-t-on, cependant, à *démontrer* ces diverses propositions ? On pourrait supposer que cette dernière question, ayant trait à l'invention, n'est plus du ressort de la logique. Ce serait une erreur : car les logiciens grecs ont fixé dans tous leurs détails et minutieusement codifié les méthodes de démonstration qu'il convient d'employer.

Le plus souvent, l'étude d'un nouveau chapitre de la géométrie commencera par donner lieu à un certain nombre *problèmes*. Les Grecs ont donc étudié de très près les règles qui régissent les problèmes, ainsi qu'on peut s'en rendre compte en lisant les *Eléments* d'Euclide. Le problème-type se compose de huit parties (1) : la *protase*, ou énoncé, indiquant les *données* du problème, et ce qui est demandé ; l'*ecthèse*, ou répétition de l'énoncé rapporté à une figure particulière ; l'*apagoge*, qui transforme le problème proposé en un autre plus simple ; la *résolution*, qui montre que les *données* du problème proposé permettent de résoudre le problème plus simple ; la *division*, ou énoncé des conditions moyennant lesquelles le problème est possible ; la *construction*, qui complète l'ecthèse en définissant les diverses lignes accessoires qu'il est nécessaires de considérer pour faire la démonstration ; la *démonstration* proprement dite, qui déduit de la construction la figure demandée ; la *conclusion*, qui affirme que cette figure satisfait bien aux conditions requises. — D'ailleurs le problème-type comporte un grand nombre de variantes, ou formes particulières de problèmes, auxquelles doivent être appliqués des modes de démonstration différents : *analyse pure* (poristique ou zététique) (2), *synthèse pure*, *démonstration par l'absurde*, etc.

(1) Cf. Zeuthen. *Histoires de mathematiques dans l'antiquité*, trad. J. Mascart, p. 72 et suiv.

(2) Par le mot « analyse » les Grecs désignent d'ordinaire un procédé de raisonnement qui fournit, non pas la solution d'un problème, mais la démonstration d'une solution. C'est l'analyse que Viète, au XVIe siècle, a qualifiée de *poristique*. Les Grecs ont également pratiqué l'analyse que Viète appelle *zététique* et qui a pour

Ainsi enfermée dans un cadre rigide, tenue en laisse dans toutes ses démarches, la science, telle que l'avaient conçue les premiers géomètres grecs, et qui paraissait ne dépendre que du libre jeu de l'intuition, ne va-t-elle pas changer profondément de caractère ? On pourrait le croire à première vue, surtout si l'on envisage la pensée scientifique dans ses rapports avec la philosophie. Il est incontestable, en effet, qu'avec M. Brunschvicg (1), il faut voir dans l'avènement de l'aristotélisme, suivant la chute du platonisme, un changement de front complet et, sous certains rapports, un arrêt de la spéculation philosophique à base scientifique. N'est-il pas alors naturel d'admettre qu'à cette révolution philosophique a pu correspondre une coupure dans l'évolution de la science ? Et n'y a-t-il pas lieu d'établir une distinction radicale entre deux périodes successivement traversées par cette dernière, la période pythagoricienne et platonicienne, la période euclidienne et post-euclidienne ?

Quelque séduisante que soit cette manière de voir, il ne nous parait pas qu'elle soit justifiée par l'histoire. L'unité de l'œuvre mathématique des Grecs a été, croyons-nous, démontrée par Paul Tannery (2) lorsqu'il a reconnu que presque toutes les voies importantes où s'engagèrent les mathématiciens postérieurs à Aristote leur avaient été ouvertes au temps de Pythagore, de

objet la recherche proprement dite de la solution d'un problème. Cf. les Notions historiques de Paul Tannery, apud Jules Tannery, *Notions de mathématiques*, p. 327 et suiv.

(1) L. Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 71 et suiv.

(2) Voir notamment P. Tannery. la *Géométrie grecque*, p. 5 et suiv. Cf. Rivaud. *Paul Tannery, historien de la science antique*, apud *Revue de métaphysique*, mars 1913. p. 183-184.

Platon et d'Eudoxe (1). Et, si l'on excepte quelques auteurs secondaires, comme Diophante — qui sont des calculateurs (2) autant que des théoriciens — on ne voit pas que ces savants, là même où ils ont innové, aient rompu avec les traditions et avec l'idéal de leurs prédécesseurs.

Le traité d'Euclide, on le sait, n'est pour une large part qu'une reproduction ou une adaptation d'ouvrages antérieurs, et le couronnement de ce traité, comme celui de la géométrie platonicienne, est la théorie des polyèdres réguliers, objet du livre XII des *Eléments*. « Euclide — écrit Proclus (3) — était Platonicien d'opinion ; aussi s'est-il proposé comme but final de ses Eléments la construction des figures appelées platoniciennes ».

Apollonius (IIIe siècle), auteur du *Traité des coniques*, fut à Alexandrie l'élève de l'école euclidienne et, comme tel, héritier, lui aussi, des traditions anciennes (4). Il

(1) L'école d'Eudoxe de Cnide, qui eut une très grande influence sur le développement des mathématiques, était, comme on sait, exactement contemporaine de celle de Platon et en relation étroite avec celle-ci.

(2) Cf. *infra*, p. 87.

(3) D'après Geminus, trad. Paul Tannery, apud *la Géométrie grecque*, p. 67.

(4) D'après l'un des récents commentateurs d'Apollonius, T.-L. Heath (*Apollonius of Perga*, Cambridge, 1896, p. 37 et suiv.), l'auteur du *Traité des coniques* adopte « la forme d'exposition, les conceptions et la terminologie » de l'école euclidienne. Les différents livres du traité d'Apollonius sont précédés de préfaces qui indiquent en quelques mots le but poursuivi par l'auteur et l'intérêt qu'il attribue aux théories dont il fait l'exposé (cf. Heath, *loc. cit.*, p. 18 et suiv.). Or on voit par ces préfaces qu'Apollonius entend être le continuateur direct des géomètres qui ont, avant lui, étudié les sections coniques. Les questions qu'il introduit sont celles que ses prédécesseurs ont « laissées de côté » ou qu'ils n'ont « touchées

fit, d'autre part, de nombreux emprunts à Archimède et trouva des modèles dans les travaux de Ménechme, disciple d'Eudoxe, et dans un traité d'Aristée, aujourd'hui perdu, qui date de la même époque. Son œuvre n'introduit dans la science aucun principe nouveau.

Incomparablement plus grande est l'originalité d'Archimède qui, dans ses recherches sur les hélices spirales, sur la statique et l'hydrostatique, et surtout sur l'évaluation des aires et volumes, a su créer des méthodes si ingénieuses et si délicates que pendant deux mille ans, aucun géomètre ne devait être capable de les développer. Mais comment pourrait-on faire d'Archimède un représentant de l'école « logique », un adversaire de la conception platonicienne de la science ?

S'il faut en croire la tradition, Archimède possédait au plus haut degré ce culte de la beauté mathématique que nous avons cherché à décrire plus haut. « Archimède — écrit Plutarque (1) — regardant la mécanique et, en général, tout ce qui naît du besoin comme des arts ignobles et de vils métiers, ne s'appliqua qu'aux sciences dont la beauté et l'excellence ne sont en rien mêlées avec la nécessité et dans lesquelles la démonstration dispute le prix à la beauté de la matière. Et il ne faut pas rejeter comme incroyable ce qu'on dit de lui, que, sans cesse enchanté par une sirène domestique, qui était

que superficiellement » ; elles se rapportent à des « propriétés fondamentales, traitées d'une manière plus complète et plus générale qu'elles ne le sont dans les écrits des autres auteurs » ; souvent elles sont simplement destinées à fournir « une base » ou une aide pour la solution de certains problèmes connus ; parfois aussi, outre qu'elles ont cette utilité, elles sont dignes de considération en raison des démonstrations auxquelles elles donnent lieu, « et il y a bien d'autres choses en mathématiques que nous retenons pour cette raison seulement ».

(1) *Vie de Marcellus.*

sa géométrie, il oubliait de boire et de manger, et négligeait tous les soins de son corps ... tant il était transporté hors de lui-même par le plaisir de cette étude et véritablement épris de la fureur des muses ».

Archimède, d'ailleurs, dans des préfaces d'un ton sobre et modeste, se complait à rattacher ses travaux à ceux des géomètres antérieurs. Sa manière ordinaire, fait observer T. L. Heath (1), consiste à déclarer tout uniment quelles sont les découvertes dues à ses prédécesseurs qui lui ont suggéré l'idée d'étendre leurs recherches dans telle ou telle direction. Comme les Platoniciens, il étudie des propriétés qui, dit-il, « appartiennent *essentiellement* (sont inhérentes) aux figures dont il est question, mais qui n'avaient pas été remarquées par ceux qui ont cultivé la géométrie avant lui » (2).

Archimède distingue nettement de la démonstration logique le contenu objectif des théorèmes, indiquant à plusieurs reprises que ce contenu lui est révélé avant qu'il en ait une connaissance raisonnée. Son idée est manifestement que, pour faire une découverte, on doit partir d'un fait, et chercher ensuite à démontrer ce fait : souvent alors on constatera que le fait est plus évident que l'on ne pensait (3) ; parfois, au contraire, on s'apercevra qu'on était parti d'une hypothèse fausse (4). Il est vrai qu'Archimède nous a laissé un *Traité de la*

(1) Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, p. 40.

(2) *De la sphère et du cylindre*, *Œuvres d'Archimède*, trad. Peyrard, Paris, 1807, p. 2.

(3) Cf. *le traité des hélices*, *Œuvres*, trad. Peyrard, p. 215 : « Car combien y a-t-il de théorèmes en geométrie qui paraissent d'abord ne présenter aucun moyen d'être démontrés et qui dans la suite deviennent évidents ».

(4) *Ibid.* p. 216.

Méthode (1), où contrairement à la conception platonicienne de la découverte intuitive, il oppose nettement l'ordre de l'invention à l'ordre rationnel des vérités mathématiques. Mais ce traité conclut à la nécessité de reprendre sous la forme classique ou « géométrique » les résultats obtenus par des procédés indirects (2), ce qui montre que les méthodes introduites par Archimède dans la technique mathématique ne doivent pas, dans sa pensée, modifier le fond de la science. Quelles sont, au surplus, ces méthodes ? On y remarque des traits fort originaux, notamment l'appel fait à des considérations mécaniques pour résoudre des problèmes de mesure géométrique (c'est la principale innovation apportée par le *Traité de la Méthode* (3). Cependant les procédés les plus féconds parmi ceux qu'emploie Archimède dérivent directement d'un mode de raisonnement qui à son époque était loin d'être nouveau : le *calcul par exhaustion* ou *méthode d'exhaustion*. On sait que la méthode d'exhaustion, qui remplaçait pour les Grecs les méthodes modernes du passage à la limite et du développement en série, remonte sans doute aux Pythagoriciens et fut appliquée au v^e^ siècle au problème de la mesure du cercle ; elle fut définitivement constituée par Eudoxe et ses disciples. Or, si ces géomètres, remarquant la puissance et l'élégance de la nouvelle méthode, y attachèrent un grand prix et en étudièrent de très près le mécanisme, ils ne pouvaient y voir cependant qu'un moyen accessoire.

(1) Ce traité, récemment retrouvé, a été publié en 1907 (traduction française dans la *Revue générale des sciences*, novembre et décembre 1907).

(2) Cf. le début du traité de la *Quadrature de la Parabole*. (Œuvres, trad. Peyrard, p. 318-19).

(3) Cf. Milhaud : le traité de la méthode d'Archimède, apud *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*, p. 135 et suiv.

Comme la théorie arithmétique des grandeurs irrationnelles, le calcul par exhaustion a servi tout d'abord à donner une base logique à certaines notions intuitives. Archimède en fit en outre — et c'est par là, surtout, qu'il devance son temps et se rapproche des modernes — un instrument de découverte, une méthode d'invention, permettant non seulement de consolider, mais aussi de faire progresser la science. Mais on ne saurait conclure de là qu'il ait voulu modifier le plan, changer l'idéal de cette dernière.

Convenons donc qu'il est impossible de découvrir une solution de continuité (1) dans l'histoire de la pensée mathématique grecque. Seulement il y a, nous l'avons dit, deux moments bien distincts dans l'œuvre scientifique, le moment de la *conception*, et le moment de la *démonstration*, et les savants des diverses écoles attachent plus ou moins d'importance à l'un ou à l'autre de ces moments.

Les Pythagoriciens tenaient pour le premier moment. Il n'est pas certain, d'ailleurs, qu'ils aient, dès l'origine, enseigné les Mathématiques sous forme didactique. Primitivement les propriétés des nombres et des figures étaient peut-être regardées par eux comme autant de secrets que les initiés se transmettaient les uns aux autres, plutôt que comme des objets de démonstration.

Platon fait également prédominer le point de vue de l'intuition et il a longuement insisté sur les raisons qui nous empêchent de construire la science par voie de synthèse logique. Une telle construction supposerait en effet que l'on pût décomposer toutes les notions mathématiques en éléments simples. Or on n'y peut pas par-

(1) Les mathématiciens postérieurs au temps d'Archimède et d'Apollonius ont été surtout des compilateurs et on ne saurait leur attribuer des principes de recherche originaux.

venir, car les notions mathématiques les plus importantes ne sont pas des totaux composés de parties. Il en est de ces notions comme des syllabes, qui n'admettent point comme *parties* les éléments (les lettres) dont elles sont formées. Les syllabes sont des *touts*, et qui dit « tout » ne dit point « total » ; c'est pourquoi Socrate (1) nous oblige à convenir que « la syllabe est une et indivisible aussi bien que l'élément », d'où il suit « qu'elle ne sera pas plus susceptible de définition, ni plus connaissable que lui ; car la même cause produira les mêmes effets en eux ». La même conclusion, exactement, s'applique aux notions fondamentales de la géométrie telles que l'idée du triangle : cette idée, n'étant pas un composé, a, tout autant que les notions plus simples (telles que celle de ligne droite), les caractères d'un élément irréductible révélé à notre esprit par une intuition directe. Ainsi, dans le *Timée*, les triangles sont les éléments initiaux auxquels Platon ramène la construction des polyèdres réguliers, et il ajoute (2) : « Quant aux principes supérieurs, qui sont ceux des triangles, Dieu les connaît, et un petit nombre d'hommes aimés de lui ».

Platon se prononce donc de la façon la plus catégorique contre toute tentative d'absorption des mathématique par la logique. Et cependant, loin de se désintéresser de cette dernière, il fut au contraire l'un des premiers à systématiser les règles de la démonstration rigoureuse, et c'est lui, s'il faut en croire la tradition (3), qui enseigna le premier le mécanisme de l' « analyse » et de la « synthèse ». Platon affirme d'ailleurs en termes formels que la science mathématique doit se présenter

(1) *Théétète, Œuvres de Platon*, trad. Cousin, t. II, p. 225.
(2) *Timée, Œuvres de Platon*, trad. Cousin, t. XII, p. 161.
(3) Cette tradition a été rapportée par Diogène Laërce et Proclus ; cf. P. Tannery, *la Géométrie grecque*, p. 111.

sous la forme d'une « chaîne ininterrompue de propositions » (1).

A l'inverse de Pythagore et de Platon, les pures logiciens se préoccupent avant tout de l'ossature et de l'appareil didactique de la science. Mais ils ne sont pas nécessairement en désaccord avec ces penseurs sur l'origine des notions mathématiques. L'une des questions le plus fréquemment débattues entre théoriciens de la science était celle de l'importance relative des théorèmes et des problèmes. Les Platoniciens, comme Speusippe (2), Amphinome, Geminus, accordaient le premier rang au théorème, « pensant — dit Proclus (3) — que ce terme convient mieux que celui de problème aux sciences théorétiques et surtout traitant des choses éternelles; car, pour de telles choses, il n'y a pas de génération, il n'y a donc pas de place pour le problème où il s'agit d'engendrer et de faire quelque chose comme si elle n'était pas auparavant ». D'autres savants, au contraire, comme Carpos le mécanicien, soutiennent les problèmes, faisant remarquer notamment que c'est par eux « que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier ». Désaccord profond, en apparence, mais qui tient, comme l'explique Proclus, à la différence des points de vue. Il suffit de distinguer entre la science idéale et la science didactique pour que Géminus et Carpos aient raison tous les deux, « car, si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Géminus l'accorde aux théorèmes ». — C'est ainsi que les enseigne-

(1) *République VI, fin.*
(2) Speusippe (neveu de Platon) et Amphinome vivaient au IVe siècle, Geminus au Ier siècle av. J.-C.
(3) Cf. P. Tannery. *La Géometrie grecque*, p. 146.

ments de l'école intuitioniste et de l'école logique étaient faciles à concilier.

En résumé, l'étude des différents aspects de la mathématique grecque ne nous paraît point infirmer les jugements que nous avons portés plus haut sur les tendances générales de cette science. L'esquisse que nous avons tracée ne doit pas être modifiée. Seulement, cette esquisse ne nous faisait connaître que la science idéale, et elle comporte une contre-partie.

Aussi bien la conception intuitioniste de la science était-elle impuissante à expliquer à elle seule la genèse, et la possibilité même, de notre mathématique. La science intuitive telle que nous la présente Platon ne pourrait être réalisée que par un entendement doué d'une puissance de compréhension infinie. Pour un tel entendement, la science ne se déroulerait pas comme pour nous en une longue suite de théorèmes. Du point de vue de la raison, en effet, il n'est point vrai qu'une proposition en précède ou en justifie une autre ; toutes sont également primitives et évidentes par elles-mêmes. Mais la science humaine, imparfaite par nature, ne peut saisir que l'une après l'autre les propriétés des figures géométriques ; elle est donc obligée d'assigner un ordre à ces propriétés, et de suivre, pour les atteindre, une voie indirecte et sinueuse. C'est pour nous guider dans ces détours difficiles que la méthode euclidienne de démonstration sera d'un secours, non seulement précieux, mais nécessaire. On rapporte, écrit Proclus, que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la Géométrie de route plus courte que celle des *Eléments* : il eut cette réponse : « Il n'y a pas en géométrie de chemin fait pour les rois ».

Du point de vue des intuitionistes, sans doute, la méthode logique ne devrait jouer dans la science qu'un rôle auxiliaire. Mais les Grecs, ont vite pris goût à cette méthode pour elle-même, et ils en ont fait l'un de leurs objets d'étude préférés. C'est là le fait remarquable qui domine l'histoire de la science hellénique. De la nécessité où est l'homme d'exposer l'une après l'autre les vérités géométriques au lieu de les embrasser toutes d'un même coup d'œil, les géomètres ont tiré le principe d'un système scientifique qui est, en lui-même, l'un des plus beaux monuments de la pensée scientifique.

Ce système a trouvé dans les *Eléments* d'Euclide son expression la plus complète. Or, pour comprendre exactement la signification de cet ouvrage, il importe de se bien rendre compte du double objet qu'il poursuit.

« Le terme d'*Eléments* — dit Paul Tannery (1) d'après Proclus — s'applique proprement à ces théorèmes qui, dans toute la géométrie, sont primordiaux et principes de conséquences, qui s'appliquent partout et fournissent les démonstrations de relations en grand nombre. » Ainsi les *Eléments* d'Euclide jouent à la fois le rôle de fin et le rôle de moyen : *fin* puisqu'ils sont destinés à faire connaître les théorèmes essentiels — les plus beaux — de la géométrie : *moyen* (2), parce que les solutions toutes préparées qu'ils nous offrent sont les instruments avec lesquels nous pourrons effectuer la démonstration de nouveaux théorèmes. Souci de la beauté de l'objet et souci de la beauté de la démonstration viennent ici se réunir dans une même œuvre et se prêtent une aide mutuelle.

(1) *La Géométrie grecque*, p. 150. — De nombreux « Eléments » avaient été composés en Grèce avant ceux d'Euclide, notamment les Eléments d'Hippocrate de Chios (vers 400 av. J.-C.) aujourd'hui perdus.

(2) Ce second rôle était également rempli par un ouvrage annexe, les *Data*, qui servait de complément aux Eléments.

Tel est le résultat que la géométrie euclidienne s'est proposée d'atteindre. Et sans doute a-t-elle été bien près de réussir puisqu'elle est réstée pendant deux mille ans la bible mathématique de l'humanité. Néanmoins son insuffissance finit par être reconnue et les géomètres la délaissèrent pour s'engager dans des voies nouvelles. Quelle fut donc la raison principale de ce déclin ? Il est curieux de constater que c'est la perfection même et l'harmonie interne de cette œuvre qui en ont probablement causé la faiblesse et en ont déterminé la chute.

Il y a certes une grande élégance à vouloir, comme Euclide, satisfaire du même coup deux besoins différents de l'esprit mathématique. Mais quelle preuve avons-nous *a priori* que ce soit là chose possible ? La géométrie, en tant que *fin*, est l'héritière de la science pythagoricienne : elle cherche à noter les plus belles propriétés des figures les plus parfaites. Or sont-ce bien ces mêmes propriétés qui rendront le plus de service, en tant que *moyens*, pour la démonstration ? Il serait fort souhaitable qu'il en fût toujours ainsi. Malheureusement, cette coïncidence ne se produit pas. Et voilà pourquoi l'admirable unité que les Grecs avaient donnée à la science n'a pas pu être sauvegardée par les modernes. Pour passer des données d'un problème à la solution, il faut souvent recourir à des intermédiaires qui ne sont point dignes d'occuper eux-mêmes une place dans l'édifice de la science. Constructions artificielles, inharmonieuses, dépareillées, qui, souvent même, sont choquantes pour la raison et lui paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire, et qui vise seulement à accroître par tous les moyens possibles la puissance de la démonstration. Or, d'une technique de ce genre, le penseur hellénique ne voulait à aucun prix entendre parler. Il avait, nous l'avons dit, rompu tous les ponts entre la science spéculative et la science appliquée. Cette superbe intransigance, qui avait tout d'abord favorisé les études théoriques en les préservant de tout contact impur, se trouva en fin de compte être la cause qui en arrêta les progrès. Il convient, croyons-nous, d'insister sur ce point et de revenir, dans ce but, un peu en arrière ; nous nous mettrons ainsi en mesure d'expliquer en quoi les modernes se sont principalement séparés de la tradition grecque et quelles furent les conséquences de leurs innovations.

III. — L'étude mathématique des grandeurs

Tous, certes, ou presque tous, nous pensons aujourd'hui comme les Grecs que la science théorique est affaire de spéculation pure et qu'elle doit être cultivée pour elle-même, indépendamment de toute considération concrète ou utilitaire. Mais, les plus grands savants modernes estiment, d'autre part (1), qu'une fois parvenue à son terme le théorie doit pouvoir donner lieu à des applications pratiques et se justifier ainsi elle-même — après coup — en prouvant qu'elle n'est pas un vain jeu de notre esprit. Au contraire, il semble que les Grecs se soient complu à dresser une barrière infranchissable entre la science proprement dite, ou spéculative (2), et les mathématiques appliquées, comprenant l'art du cal-

(1) Cf. Emile Picard. *La Science moderne et son état actuel*, p. 9.

(2) Platon (*Le Politique*, 3), opposant la science de l'action (ou de commandement) à la science spéculative, dit de l'homme qui exerce la première : « Mais il ne doit pas, je pense, quand il a porté son jugement, considérer sa tâche comme finie et se retirer à l'exemple du calculateur ». Ce dernier, par contre, a terminé sa tâche lorsqu'il a étudié une théorie.

cul, ou *logistique*, et l'art des mesures géométriques, ou *géodésie*.

La logistique — dit un scholie ancien — n'a aucun rapport avec l'arithmétique parce qu'à l'inverse de celle-ci, elle traite des *dénombrables* et nom des *nombres*. « Elle (1) ne considère pas ce qui est réellement le nombre, mais suppose ce qui est un comme unité et ce qui est dénombrable comme nombre... Elle examine donc, d'une part, ce qu'Archimède a appelé le *problème des bœufs*, de l'autre, les nombres *mélites* et *phialites*, les uns sur des fioles, les autres sur des troupeaux (*ou pommes*)... » La logistique est ainsi l'héritière directe de la technique arithmétique de l'Egyptien Ahmes (auteur du plus ancien manuel de calcul connu) (2) où nous trouvons une « Règle pour calculer un champ » une « Règle pour calculer un fruitier rond » sans que l'auteur essaye de ramener à l'unité des calculs qui diffèrent seulement par la nature du problème concret auquel ils sont appliqués.

Ce qui est remarquable, c'est que, tout en la jugeant indigne d'occuper l'esprit du vrai savant, les Grecs ne semblent pas avoir condamné comme nous le ferions, cette méthode d'exposition. Un traité d'Arithmétique qui présenterait comme des règles distinctes une même *règle de trois* sous prétexte qu'elle est d'abord appliquée à un mélange de grains, et ensuite à un mélange de vins, serait jugé par nous détestable ; car, étant donné notre conception du rôle du calcul, nous ne pouvons accepter qu'une seule méthode d'enseignement : exposer la théo-

(1) Scholie sur le *Charmide* de Platon, apud P. Tannery, *La Géométrie grecque*, p. 48.

(2) Manuel composé entre 2000 et 1700 av. J., publié d'après le *Papyrus Rhind* du Musée britannique par Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Ægypten*, Leipzig, 1877.

rie d'abord, l'appliquer ensuite à des objets divers. Mais, si l'on admet avec les Grecs que le calcul appliqué ne doit pas être cultivé comme un fruit de la science théorique, mais bien comme un art ou une technique indépendante, il n'y a plus aucune raison pour lui interdire des procédés d'exposition qui, s'ils choquent le théoricien, sont susceptibles en revanche de présenter certains avantages pratiques. La logistique et la géodésie, opérant dans un domaine qui leur est propre, ne sauraient être assujetties aux mêmes règles que la Mathématique pure. Elles auront pleinement rempli leur rôle si par les moyens les plus commodes elles résolvent les problèmes concrets qui leur sont proposés.

Il est intéressant de constater que ce caractère de la science utilitaire se perpétua chez les calculateurs à travers tout le Moyen-Age. Au XV[e] et XVI[e] siècle encore, alors que la notion d'équation est latente dans tous les esprits, cette notion ne parvient pas à se dégager clairement parce que les algébristes s'obstinent à étudier séparément des problèmes qui, posés sous des formes différentes se résolvent cependant par des équations du même type. De là la multitude incroyable des problèmes que nous présentent, sous des noms pittoresques, les grands traités d'algèbre de la Renaissance, par exemple celui de Paciuolo (1) : « Problème des bœufs », « Problème des lapins », « Problème des sept vieilles femmes » etc.

Il n'en est pas moins vrai que c'est par la pratique constante de l'arithmétique appliquée, et par le souci qu'ils ont eu de perfectionner cet art en lui donnant le caractère d'une méthode générale, que les savants modernes furent conduits sur la voie qui devait aboutir à la

(1) Luca Paciuolo. *Summa de Arithmetica*, Venise, 1494.

création de l'algèbre. Les Grecs, au contraire, se fermèrent cette voie en séparant par une cloison étanche le domaine de la rigueur théorique et celui des calculs techniques.

Mais il y a plus : la Mathématique spéculative des Grecs ne se contentait pas de répudier le calcul des grandeurs concrètes : elle paraissait condamner également tout un ordre de calculs, fondamental à nos yeux, et qui pourtant a un caractère purement théorique : le calcul des grandeurs géométriques *abstraites*, considérées en dehors de toute représentation physique.

C'est là un fait qui a eu de graves conséquences historiques et qu'il importe dès lors de bien mettre en évidence.

Les premiers mathématiciens de la Grèce n'avaient pu manquer de découvrir la parenté si remarquable qui unit les propriétés des nombres et celles des figures. Nous avons vu que l'arithmétique de Pythagore est en grande partie fondée sur cette découverte. Représentant les nombres par des points alignés, Pythagore constate, par exemple, que le produit d'un nombre par lui-même est figuré par un carré, que la somme des premiers nombres impairs peut être figurée par un triangle, etc. Il est ainsi conduit à concevoir une Mathématique où l'arithmétique et la géométrie sont fondues l'une dans l'autre, et c'est là sans doute ce que veut exprimer la célèbre formule pythagoricienne lorsqu'elle affirme que « toutes les choses sont nombres ». Mais, à peine cette affirmation est-elle lancée que surgit tout à coup une grave difficulté, tenant à l'existence des longueurs incommensurables.

Le nombre, essence idéale, objet de l'arithmétique théorique, est d'abord exclusivement le nombre entier.

En utilisant la notion de *rapport numérique*, et définissant la fraction comme le rapport de deux nombres entiers, on étend sans grande peine le champ de l'arithmétique à l'ensemble du domaine que nous appelons aujourd'hui « domaine des nombres rationnels ». Mais là s'arrête la compréhension de l'idée de quantité arithmétique. Il n'existe aucun procédé permettant de définir par le calcul les quantités (dites « incommensurables avec l'unité » ou, en langage moderne, « irrationnelles ») qui ne sont pas des rapports de nombres entiers. Or qu'arrive-t-il ? Dès ses premiers pas, le géomètre qui a commencé à étudier les relations des figures avec les nombres, se trouve en présence de propriétés auxquelles il ne pourra appliquer sa méthode à moins de considérer de telles quantités « incommensurables ». Devant ce fait troublant, dont le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle fournit l'exemple le plus simple (1), les Pythagoriciens restent confondus. L'édifice de la science est ébranlé. Comment va-t-il être possible de le reformer?

Il semble que, si cette difficulté n'arrêta pas longtemps les progrès de la science, elle ne fut cependant jamais résolue par les Grecs d'une façon qui satisfît pleinement leur esprit.

Il n'y avait en réalité que deux manières d'écarter la difficulté sans rien abandonner des possibilités qui s'offraient à la science. Ou bien, il fallait élargir la notion de nombre de façon à établir une concordance absolue entre cette notion et celle de grandeur mesurable. Ou bien il fallait renoncer à l'unité que les Pythagoriciens avaient voulu faire régner dans la science, et instituer, à côté de l'arithmétique proprement dite, une étude *quantitative* des grandeurs géométriques.

(1) Voir plus haut, p. 42.

La première solution est celle qui fut finalement adoptée. En 1717, Chistian Wolf définit le nombre (1) : « ce qui est rapporté à une unité comme un segment de droite à un autre segment ». En d'autres termes, il ramène complètement la notion de quantité à celle de de longueur, faisant ainsi perdre au nombre entier la situation privilégiée qu'il avait occupée dans l'arithmétique classique. C'est là, on le comprend, une manière de voir que ne pouvaient pas admettre les mathématiciens grecs ; car l'arithmétique des nombres entiers, qui leur avait revélé la science et qui donne lieu aux théories les plus harmonieuses, devait toujours conserver une place à part dans leurs spéculations, comme étant l'étude qui nous rapproche le plus de l'idée pure du nombre.

La seconde solution ne soulevait pas les mêmes objections. Pourtant les Grecs de la grande époque n'ont cru pouvoir l'adopter qu'en partie, retenus, semble-t-il, par certains préjugés ou certains scrupules. Cherchons à bien discerner sur ce point la nuance exacte de la pensée hellénique, qui se trouve assez malaisée à définir en raison de la pauvreté du vocabulaire dont nous disposons.

On a fréquemment parlé du « calcul géométrique » de l' « algèbre géométrique », de la « géométrie calculante » des Grecs. Toutes ces expressions, croyons-nous, doivent être interprêtées avec une grande prudence si l'on veut éviter les confusions et les anachronismes auxquels on est exposé en pareille matière.

Nous avons aujourd'hui l'habitude de faire ressortir à

(1) *Elementa matheseos universæ*, Halle, 1717. Certains historiens pensent trouver déjà la notion générale de nombre chez Jordanus de Nemore (au 13e siècle). Newton, d'autre part s'exprime ainsi dans son *Arithmetica universalis* (1707) : *Per numerum abstractum quantitatis cujuvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus.*

l'algèbre l'ensemble des questions qui ont trait aux identités entre quantités ou combinaisons de quantités, et, plus particulièrement, la recherche des inconnues déterminées par de telles identités. Or il n'est pas douteux que nous trouvons dans la géométrie grecque plusieurs théories qui se rapportent à cet ordre de questions. Mais que sont exactement ces théories ?

La première en date est la géométrie des rectangles et autres surfaces polygonales et la théorie de l'*application*. La géométrie des rectangles met en évidence certaines relations quantitatives entre grandeurs équivalant aux identités fondamentales de notre algèbre. Ainsi, par exemple, à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ correspond une relation géométrique relative à la décomposition d'un rectangle donné en quatre parties au moyen de deux droites rectangulaires. — *Appliquer*, d'autre part, un rectangle à un segment donné, c'est, par définition, construire un rectangle ayant ce segment pour l'un de ses côtés, ou, plus généralement, dont l'un des côtés coïncide avec une partie du segment donné ou avec ledit segment prolongé d'une certaine longueur. Partant de cette définition, on peut se proposer de construire des rectangles qui soient appliqués à un segment donné et satisfassent à diverses conditions. De là une série de problèmes qui correspondent exactement aux principaux types d'équations du second degré. Ces problèmes et la théorie qui leur sert de base sont exposés tout au long dans les *Eléments* d'Euclide et on a lieu de croire qu'ils constituaient déjà un chapitre fondamental de la géométrie pythagoricienne.

A une époque postérieure, grâce aux travaux de l'école d'Eudoxe principalement, une théorie (1) des

(1) Euclide, dans les premiers livres des *Eléments*, se sert encore de la théorie de l'application pour résoudre les principaux problèmes

rapports géométriques fut édifiée, qui conduit à étudier sous une forme plus maniable certaines relations quantitatives : ces relations sont celles que nous tirons aujourd'hui du calcul algébrique des *proportions*.

Plus tard encore, le développement de la théorie des sections coniques fournit une nouvelle méthode pour l'étude des problèmes géométriques qui correspondent aux équations du deuxième ou troisième degré. Ainsi Apollonius ramène, par exemple, le problème de la duplication du cube (c'est-à-dire la résolution de l'équation $x^3 = 2a^3$) à la construction de l'intersection de deux paraboles.

Les diverses méthodes dont nous venons de parler permettaient, sans doute, aux savants helléniques de traiter géométriquement certaines des questions que nous résolvons aujourd'hui par l'algèbre, et voilà pourquoi on leur a donné le nom d' « algèbre géométrique des Grecs ». Mais, si cette dénomination nous donne une idée assez exacte du champ d'application des méthodes en question, elle en exprime très imparfaitement l'esprit et le point de vue. La théorie du rectangle, celle des rapports et celle des intersections de coniques sont en réalité des théories géométriques, fondées sur certaines propriétés des *figures*, et qui ne font intervenir la *quantité* que pour la résoudre immédiatement en *qualité*. Nulle part, dans ces théories, nous ne voyons apparaitre la conception proprement algébrique de la grandeur spatiale, l'idée que cette grandeur et le nombre arithmétique appartiennent au même ordre de notions, et se prêtent

quantitatifs de la géométrie plane, et il n'expose qu'ensuite la méthode des proportions. Certains historiens ont conclu de là que cette dernière méthode n'avait dû entrer dans l'usage courant que peu de temps avant l'époque à laquelle fut conçu le plan des *Eléments*.

aux mêmes calculs, se laissent combiner suivant les mêmes règles, purement quantitatives.

Considérons, par exemple, un *angle*. Un angle est une figure, mais c'est également une grandeur qui possède les principaux caractères des quantités numériques. Ainsi, deux angles peuvent être égaux ; étant donné deux angles inégaux, l'un est nécessairement plus grand que l'autre ; on peut faire la *somme* ou la *différence* de deux angles ; on peut *multiplier* un angle par un nombre, on peut partager un angle en deux, trois, ... parties égales, c'est-à-dire le *diviser* par 2, 3, etc... et ainsi de suite. Ces divers caractères d'ailleurs, nous pouvons les poser *a priori*, sans avoir besoin d'effectuer les diverses opérations dont ils expriment la possibilité. En d'autres termes, ils ne résultent pas, pour nous de constructions géométriques, mais ils rendent, au contraire, ces constructions inutiles, car ils nous font connaître que l'algèbre est applicable aux grandeurs dont il s'agit et que l'on peut, par conséquent, remplacer par des calculs numériques les opérations géométriques auxquelles elles donnent lieu. Voilà, du moins, comment ont raisonné plus ou moins consciemment les créateurs de l'algèbre moderne.

Tout autre est le point de vue auquel cherche à se placer le théoricien grec (à partir de l'époque platonicienne, tout au moins) lorsqu'il établit des relations quantitatives entre les figures. A aucun moment il ne fait abstraction de la forme de celles-ci et de leur situation dans l'espace. Mais il ramène toutes les questions à des problèmes de « construction ». S'agit-il, par exemple, de diviser un angle par 2 ? Il prendra sur les deux côtés de l'angle, à partir du sommet deux longueurs égales ; des extrémités de ces longueurs comme centres il décrira deux cercles de même rayon ; enfin il joindra le point d'intersection de ces cercles au sommet de l'angle ; c'est le résultat de cette construction géométrique (droite, appelée *bissectrice* de l'angle) qui seul lui permettra de donner un sens théorique rigoureux à la notion de division des angles.

Bien entendu, il serait absurde de prétendre que les géomètres grecs ont méconnu la portée des caractères « arithmétiques » qui rendent les grandeurs propres au calcul. Ils ont en effet constamment tiré parti de ces caractères dans leurs démonstrations. Mais ils ne les ont pas isolés et ils n'ont pas cru devoir étudier directement un ensemble de faits qui ne leur semblaient pouvoir prendre place légitimement ni dans l'Arithmétique, ni dans la Géométrie, et qui, par contre, avaient toujours joué un rôle prépondérant dans la Mathématique appliquée (1). Ainsi, le même scrupule, le même souci de pureté, qui déjà avait incité les théoriciens grecs à rejeter hors de la Science le calcul des grandeurs physiques, devait également rendre illégitime à leurs yeux l'application (pure et simple) du calcul aux grandeurs géométriques. Et voilà pourquoi il se sont détournés de cette mathématique amphibie, géométrique par son objet, mais arithmétique d'esprit et de méthode, qui a permis aux modernes de sceller définitivement l'union du nombre et de la figure.

Ces remarques étaient nécessaires afin d'expliquer, non seulement pourquoi les Grecs n'ont pas créé l'Algèbre (2), mais pourquoi la claire intelligence de cet art

(1) C'est ainsi que les méthodes exposées par Diophante, qui sont, parmi les méthodes grecques, celles qui se rapprochent le plus des procédés de notre algèbre, paraissent avoir été empruntées en grande partie à l'école des logisticiens.

(2) Dans une importante étude publiée depuis la rédaction du présent chapitre (*Sur l'origine de l'algèbre*, Kgl. Danske Videnska-

a été si lente à se dégager. C'est la tradition grecque qui longtemps a obscurci la vision des savants, en masquant l'identité de nature des opérations relatives aux nombres et de celles qui concernent les grandeurs, et en imposant pour l'étude de ces deux types d'opérations, l'usage d'une terminologie et de méthodes de raisonnement différentes.

C'est ainsi que Tartaglia, l'un des plus grands algébristes du XVIe siècle, reproche à un traducteur d'Euclide d'avoir indifféremment employé dans un même sens les mots *multiplicare* et *ducere*. Il faut, dit-il, distinguer entre ces deux mots : le premier se dira des nombres, tandis que *ducere* conviendra s'il s'agit de grandeurs géométriques. Pareillement, pour désigner l'opération de la division, on devra dire *partire* ou *misurare* suivant que l'on parlera de nombres et de grandeurs.

Cinquante ans plus tard, Viète considère encore la science des nombres et celle des grandeurs comme ayant

bern. Selskab, 1919), M. Zeuthen a développé les arguments qui le portent à attribuer aux Grecs une part prépondérante dans la création de l'algèbre. Les conclusions de M. Zeuthen ne sont pas, croyons-nous, en contradiction avec la thèse que nous soutenons ici. Pour M. Zeuthen, le mot « algèbre » désigne un certain ensemble de problèmes déterminés, tandis que nous l'employons ici, et dans les pages qui suivront, pour désigner, avant tout, un point de vue et une méthode. D'autre part, M. Zeuthen est conduit à situer les origines grecques de l'algèbre, non pas tant dans les œuvres théoriques des géomètres hellènes, que dans les calculs des logisticiens ; et il soutient que, si les travaux des calculateurs antérieurs à Platon nous étaient mieux connus, nous y trouverions sans doute beaucoup de règles et de procédés mathématiques dont nous attribuons à tort l'invention aux Arabes ou aux Hindous. M. Zeuthen a sans doute raison. Mais il reste vrai que, précisément parce qu'ils tournent le dos à la logistique, les mathématiciens théoriciens de la grande époque grecque adoptent un point de vue qui les éloigne de l'idéal algébrique.

des règles parallèles, mais distinctes. Et c'est Descartes qui, dans sa *Géométrie* de 1637, affirme le premier, sans restriction, l'identité de ces deux sciences.

« Et comme toute l'arithmétique, — dit Descartes (1) dans un langage précis et définitif, — n'est composée que de quatre opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire, en géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien, en ayant une que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou, enfin, trouver une ou deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible ».

C'est, comme on voit, en écartant délibérément les conceptions restrictives et les scrupules inhérents à la science grecque que les mathématiciens du 17ᵉ siècle se sont ouvert la voie du progrès. Et cette circonstance nous explique pourquoi Descartes s'exprimait en termes sévères sur le compte de l'œuvre mathématique des

(1) *La Géometrie*, liv. I.

Anciens, qu'il taxait d'insuffisance et de stérilité. Jugement injuste certainement : car, si la science grecque est insuffisante pour nous, elle se suffisait fort bien à elle-même, et, si elle est devenue stérile, ce ne fut qu'après une longue période de fécondité. Il est bien vrai, cependant, qu'elle portait en elle-même un germe de mort, et que l'étroitesse de son champ d'action, l'exclusivisme de son point de vue, le caractère esthétique de ses préoccupations, devaient fatalement l'arrêter un jour dans son développement. Quelles sont les conceptions ou les tendances qui furent les causes immédiates de cet arrêt et qui imprimèrent une direction nouvelle à la pensée mathématique ? C'est ce que nous devons maintenant nous demander.

CHAPITRE II

LA CONCEPTION SYNTHÉTISTE DES MATHÉMATIQUES

Dès le commencement de l'ère chrétienne, le grand courant intellectuel qui avait donné naissance à la Mathématique hellénique était parvenu au terme de son parcours. Sans doute cette Mathématique resta en honneur et continua à être cultivée pendant une longue suite de siècles, dans le monde antique d'abord, chez les Arabes et chez les Occidentaux ensuite. Mais son progrès s'était arrêté, et elle n'était plus guère que la matière inerte d'un enseignement d'école. Pour susciter un mouvement de pensée originale, il fallut un fait nouveau. Ce fait fut la création de l'algèbre moderne. Pour en bien comprendre la portée il convient d'examiner avec quelques détails dans quelles conditions est née l'algèbre, à quels besoins et à quelles tendances elle répondait, dans quels milieux et dans quel esprit elle se développa tout d'abord.

I. — Origines, objet et méthode de l'algèbre (1)

Un savant de Bagdad, Mohammed Ben Musa-Al-

(1) Une partie de ce paragraphe a été publiée dans la *Revue de Métaphysique* en mars 1913 et au t. I de nos *Principes de l'Analyse mathématique*, Hermann 1914.

Khwarizmy composa au IXe siècle un traité qui eut une fortune remarquable : l'*Al'djebr ou'al moukabalah*. Ce titre est le nom d'une technique ou méthode de calcul pratiquée par les Arabes. Deux opérations fondamentales, effectuées l'une et l'autre sur les sommes de nombres relatifs (1) la caractérisent ; la *djebr*, qui fait passer d'un membre d'une égalité dans l'autre tous les termes affectés (précédés) du signe —, de manière à ne laisser subsister dans chaque membre que des termes affectés du signe +, la *moukabalah* ou réduction des termes semblables.

L'al'djebr ou al moukabalah est devenue l'*algèbre* et le nom d'Al-Khwarizmy, transformé en *algorithme*, s'est perpétué comme nom commun. Ainsi, à défaut d'autres témoignages, les mots suffiraient à attester la participation de l'Orient à la formation du calcul algébrique.

Dans quelles circonstances, cependant, ce calcul est-il né, et quel était le but que lui assignaient ses adeptes? On sait que les Arabes avaient hérité des méthodes des calculateurs hindous. Ils ont, d'autre part, largement mis à profit les écrits mathématiques des Grecs. En fait, c'est la rencontre de deux traditions différentes qui a donné naissance au calcul algébrique arabe. Et lorsque plus tard en Occident (2), l'algèbre prit sa figure définitive, ce fut encore le rapprochement des méthodes orientales et des connaissances tirées de l'étude directe

(1) Nombres positifs ou négatifs.

(2) Dans la préface de son traité d'algèbre (*Liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno* 1202), Léonard de Pise, qui fut l'un des premiers à répandre les méthodes algébriques en Occident, nous avertit qu'il s'est instruit à la double école de l'Inde et de la Grèce. « Quare — dit il, amplectens strictius ipsum modum Indorum et attentius studens ex eo, ex proprio sensu quædam addens et quædam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometriæ artis apponens, summam ejus libri... componere laboravi ».

de la science antique qui lui donna un nouvel élan. Quelle part revient au juste dans l'œuvre des premiers algébristes à chacune de ces influences ?

Pour répondre à cette question, il convient d'en bien préciser le sens. Ce qui nous préoccupe, ce n'est pas de déterminer l'origine de telle ou telle notion ou démonstration particulière. C'est dans son ensemble que nous envisageons l'algèbre. Or d'où est venue l'inspiration créatrice, la conception originale, qui a donné naissance à la nouvelle science ? Peut-être pourrons-nous plus facilement nous en rendre compte, si, au préalable, nous cherchons à bien mettre en évidence, indépendamment de toute discussion historique, les caractères propres, les traits distinctifs, des théories algébriques.

L'algèbre se présente à nous comme une technique ayant pour objet le calcul et qui se flatte de nous procurer plusieurs avantages précieux. Grâce à la simplicité et à la fixité de ses procédés, elle prétend, en effet, opérer *rapidement*, *sûrement*, *mécaniquement*, *pertinemment*.

En premier lieu, l'Algèbre sera rapide. Elle se servira donc d'abréviations dans le langage et dans l'écriture. C'est ainsi que déjà Diophante d'Alexandrie employait des signes abrégés pour désigner les puissances, et que certains géomètres grecs représentaient par des lettres les grandeurs (1) ou nombres qui reviennent plusieurs fois dans un même calcul. Quant aux opérations — effectuées ou à effectuer — elles seront indiquées par des signes conventionnels (*signes opératoires*) : tels les

(1) Les Grecs faisaient usage de ce langage abrégé dans les démonstrations géométriques du type euclidien. Il fut introduit plus tard dans le calcul proprement dit (cf. notamment, Jordanus de Nemore, au XIIIe siècle).

signes =, +, —, ×, etc., de l'arithmétique élémentaire (1).

En second lieu, l'algèbre opérera à coup sûr parce qu'elle réduit les calculs à l'application de règles fixes et de formules données une fois pour toutes.

D'où viennent ces règles et ces formules? Ce sont les définitions mêmes des opérations arithmétiques fondamentales qui nous y conduiront.

Le calcul arithmétique n'est autre chose que la combinaison de certains nombres suivant des lois déterminées. Cependant, lorsque pratiquement nous avons à faire un calcul, nous oublions, dans notre hâte d'arriver au résultat, les nombres combinés et la façon dont ils sont associés : l'édifice n'est pas plus tôt construit que nous perdons de vue l'agencement des matériaux qui nous ont permis de l'obtenir; et, ainsi, la résolution d'un problème ne nous est d'aucun profit pour celle des problèmes suivants. En analysant cette faiblesse de l'arithmétique nous voyons comment il convient d'y remédier. Pourquoi ne ferions-nous pas, avant même de donner aux nombres sur lesquels nous opérons des valeurs déterminées, une étude formelle et *a priori* des différentes combinaisons qu'engendrent nos opérations? Nous savons que ces combinaisons sont susceptibles d'être obtenues de plusieurs manières. Il serait dès lors fort utile de savoir *à l'avance* quelle est, parmi les différentes formes d'une même combinaison, celle qui sera le plus facile à calculer. D'ailleurs telle forme avantageuse dans un problème le sera moins dans un autre. D'où l'intérêt d'une étude systématique déterminant les diverses *transformations* auxquelles se prêtent les combi-

(1) Ces signes n'ont été employés, pour la plupart, qu'à partir du XVe ou XVIe siècle.

naisons d'opérations. Il conviendra, en outre, de nous mettre en mesure d'effectuer à première demande les transformations utiles, en en définissant le mécanisme par des *formules* immédiatement applicables.

Les premiers principes de l'Arithmétique nous fournissent déjà, directement, de telles formules de transformation : celles, par exemple, qui expriment les propriétés des opérations fondamentales. Ainsi les égalités $a+b=b+a$, $a \times b = b \times a$, etc., définissent des transformations qui restent légitimes *quelles que soient les valeurs numériques figurées par les lettres* a, b, c [la combinaison $a + b$ est toujours équivalente à la combinaison $b+a$, la combinaison $a \times b$ à la combinaison $b \times a$, etc.]. En associant ces égalités nous obtiendrons de nouvelles transformations s'exprimant par autant de formules que l'on appelle « *formules algébriques* ».

Ces premières « formules » — premières en simplicité, non en date, car on n'éprouva point tout de suite le besoin de les écrire explicitement — ces premières formules mettent en évidence les caractères fondamentaux que nous retrouvons dans toutes les autres. Ainsi les formules de l'algèbre devront porter de préférence sur des symboles qualitativement indéterminés tels que les lettres de l'alphabet (1), et c'est ainsi qu'elles fourniront à l'avance des règles invariables, applicables à une infinité de questions : autant de valeurs différentes on donne aux lettres, autant l'on a de problèmes pour lesquels vaudra la même règle. Autre caractère fondamental : l'analogie que l'al-

(1) Voir, cependant, *infra*, p.88, note 3. Ce fut Viète qui, en établissant une distinction systématique entre la *logistica numerosa* (calcul numérique) et la *logistica speciosa* (calcul portant sur des lettres), constitua l'algèbre moderne en science autonome. [Cf. le *Cours mathématique* d'Herigone, t. II, 1635 où les deux algèbres sont appelées : *algèbre nombreuse* et *algèbre spécieuse*].

gèbre établit entre les nombres fournis par des problèmes différents est une analogie de structure. Imaginons, par exemple, que deux questions fassent intervenir chacune, une quantité définie comme produit d'une somme de deux nombres par le carré d'un troisième : l'algèbre notera cette ressemblance en écrivant les deux quantités sous la même forme : $(a + b) \times c^2$ ou $(a + b).c^2$, et elle ne se préoccupera pas de savoir si les *valeurs* des nombres a, b, c diffèrent d'une quantité à l'autre.

Les combinaisons et transformations de formules donnent lieu à un certain nombre de préceptes bien déterminés dont l'ensemble constitue l'*Algèbre*. L'Algèbre, en effet, est essentiellement une *Règle* (*Regula*, disaient les algébristes de la Renaissance, *Ars certis legibus et præceptis contenta*, dit un commentateur de Descartes (1).

Ajoutons que, comme nous l'avons dit plus haut, les règles de l'algèbre visent à devenir *mécaniques*, c'est-à-dire applicables par tous et toujours, sans intervention de l'intelligence. C'est pourquoi Descartes se croit autorisé à nous donner les préceptes de son algèbre sous formes de commandements, sans les expliquer, sans nous demander de refaire l'effort intellectuel qu'il a lui-même accompli une fois pour toutes et pour tous les hommes : « L'addition, dit-il (2), se fait par le signe + ... Comme pour ajouter a à b, j'écris $a + b$. La soustraction se fait par le signe —. Comme pour soustraire a de b, j'écris $b - a$, etc. ».

Il ne faut toutefois pas conclure de là que l'algèbre soit

(1) Erasme Bartholin dans son Epître Dédicatoire de l'édition latine de la *Géométrie* (cf. *infra*, p. 95).

(2) *Calcul de Monsieur Descartes*, *Œuv. de Descartes*, t. IX (voir plus bas, page 96). — Cf le *Cours mathématique* d'Herigone cité ci-dessus.

une règle aveugle ; c'est un art qui exige, chez celui qui l'exerce, de l'adresse et du savoir faire. En effet, parmi toutes les tranformations possibles d'une formule, l'algébriste doit choisir celle qui est appropriée au calcul qu'il entreprend (1), et il peut faire ce choix plus ou moins pertinemment. Pour résoudre une équation, dit l'Indien Bhaskara, « on *prépare adroitement* deux membres en équilibre, en ajoutant, retranchant, multipliant ou divisant » (2) : la règle n'en dit pas plus long : à l'algébriste de voir par lui-même comment il apprêtera son équation.

Nous comprenons maintenant quelles sont les conditions auxquelles il faut satisfaire pour être un habile algébriste. Il faut savoir oublier la signification des éléments combinés pour ne plus faire attention qu'au mécanisme de la combinaison. Il faut considérer les formules comme des assemblages, que l'on retourne en tous sens, que l'on compose de toutes les manières — par la *djebr*, par la *moukabalah* ou d'autres procédés — afin de faire apparaître de nouvelles combinaisons intéressantes. L'algébriste jongle avec les formules ; il les triture, il les *pulvérise,* suivant l'heureuse expression employée par Brahmagoupta pour désigner une méthode fondamentale de son algèbre : « celui qui connaîtra « l'usage de la méthode pulvérisatrice, des chiffres, des « quantités négatives et positives, de l'élimination du « terme moyen [*transformation utilisée dans la théorie des « équations*], des symboles et expressions [algébriques],

(1) *Excogitanda ab artifice* — dit Viète (*De recognitione æquationum* ap. *Opera Mathem.*. Leyde, 1646, p. 92) — *et tentanda, quae suo fini magis inservire conjiciet figmenta.*

(2) Cité par Rodet, *Journal asiatique*, t. XI, 1878, p. 17.

« celui-là, dit Brahmagoupta, deviendra un maître parmi les savants (1) ».

Ces remarques nous explique l'histoire des origines de l'algèbre,

Les savants grecs ne pouvaient pas être de bons algébristes : ils prétendaient, en effet, saisir par l'intuition, voir d'une vue intellectuelle directe, des êtres mathématiques aussi réels ou plus réels que les objets sensibles; comment, dès lors, auraient-ils pu oublier ces êtres parfaits, et faire table rase de la réalité pour opérer sur des symboles ? Sans doute les géomètres grecs possédaient-ils les principaux éléments dont devaient se servir les modernes pour constituer l'algèbre. Ils avaient inventé des méthodes de construction géométrique qui équivalaient à peu près à celle de notre calcul algébrique élémentaire. Mais ils n'avaient pas voulu reconnaître le parti qu'on peut tirer de ces méthodes lorsqu'on en généralise et qu'on en systématise l'emploi. Les véritables promoteurs de l'algèbre furent, en Grèce, ces logisticiens ou calculeurs, que Platon mettait au ban de la science, et l'une des principales innovations de l'Alexandrin Diophante — en qui l'on veut voir le premier algébriste — consista simplement à appeler *arithmétique* ce que l'on prenait avant lui pour de la logistique. « Il a, dit Paul Tannery (2), intitulé son ouvrage *Arithmetica* alors que la matière en avait été jusqu'à lui considérée comme appartenant à la logistique. Cette innovation est plus qu'une simple affaire de mots ; elle révèle le sentiment très juste que la matière dont il s'agit appartient à

(1) Colebrooke (*Algebra from the sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara*, 1817, p. 325).

(2) *La Géométrie grecque*, 1888, p. 50.

la science abstraite et primordiale et non pas à une science appliquée et concrète ».

Au rebours des savants grecs, les Hindous furent avant tout des calculateurs (1). Esprits pratiques, ils ne se préoccupaient point de rendre leurs théories rigoureuses et belles. Il n'y a pas, dans leurs traités, de théorie scientifique à proprement parler, mais seulement des règles, formulées en vers le plus souvent, et sans démonstration. — « Dis-moi (2), chère et belle Lilavati — ainsi s'exprime Bhaskara — toi qui as les yeux comme ceux du faon, dis-moi quel est le résultat de la multiplication, etc. ». Et la réponse suit. Baskara nous donne, sur ce ton, un ensemble de règles, qui constituent « une facile méthode de calcul, charmante par son élégance, claire, concise, douce, correcte, agréable à apprendre ». — Un recueil de recettes et de formules, voilà ce qu'est la science pour les Hindous. C'est pourquoi ils furent d'habiles algébristes (3).

(1) La science hindoue subit-elle indirectement des influences grecques ? C'est là une question obscure que nous ne saurions trancher; il est fort possible que l'on ait eu aux Indes quelques échos des travaux de Diophante. L'algèbre dont nous nous occupons ici est celle qui se developpa dans l'Inde pendant l'ère chrétienne et dont les trois principaux représentants sont Aryabhata (5e siècle), Brahmagoupta (7e siècle), Bhaskara (12e siècle).

(2) Colebrooke, *op. cit.* (*supra*, p. 87, note 1), p. 6. Le traité intitulé *Lilavati* (*La charmante*) est dédié à une femme à laquelle Bhaskara s'adresse.

(3) L'algèbre des Hindous n'est point une algèbre spécieuse au sens de Viète (*supra*, p. 84, note 1 : nous voulons dire que dans cette algèbre les nombres ne sont point systématiquement remplacés par des lettres. Ce caractère de la science hindoue, est souligné par les historiens des mathématiques qui veulent voir dans l'emploi des symboles littéraux une condition essentielle de l'algèbre [cf. Nesselmann. *Gesh. d. Algebra d. Griechen*, *passim* : voir aussi Heath, *Diophantus of Alexandria* (Cambridge), 1910, p. 49]. Nous croyons cependant

Lorsqu'au début de la Renaissance, les tendances pratiques s'allièrent à de solides études scientifiques, l'algèbre prit définitivement son essor (1). Cependant bien des algébristes des XV[e] et XVI[e] siècles se trouvent gênés par les habitudes d'esprit qu'ils tiennent de la tradition grecque. C'est le cas de François Viète, à qui l'algèbre doit tant par ailleurs. Les tours de passe-passe des algébristes hindous eussent été pour Viète des non-sens, car il ne pouvait pas raisonner sur les grandeurs sans se les représenter. Il se croit donc obligé de distinguer, et de traiter l'un après l'autre, une longue suite de problèmes qui ne diffèrent que par leur interprétation concrète et ne feraient qu'un pour un algébriste moderne.

En somme, aux premiers temps de l'algèbre, ceux qui ont réussi dans cette science sont ceux qui n'avaient pas de scrupules théoriques. Il fallait en être dépourvu, par exemple, pour se permettre d'opérer sur des quantités inconnues exactement comme si elles étaient connues. Or c'est là l'une des caractéristiques et, pour beaucoup de savants, la caractéristique principale de l'algèbre.

Avec l'assistance de Dieu — ainsi débute l'algèbre d'Omar Al Khayyam (2) — et avec son concours pré-

que l'absence des formules littérales n'empêche pas la science hindoue de manifester à un haut degré les tendances par lesquelles nous avons défini plus haut l'esprit algébriste. Aussi bien ne faudrait-il pas exagérer l'importance des services rendus par les lettres dans le calcul. On peut fort bien établir les formules générales de l'algèbre lors même qu'on remplace les lettres par des nombres ordinaires, à condition que l'on ne fasse état, à aucun moment de la démonstration, des valeurs particulières de ces nombres. C'est ainsi que procède encore Pascal au XVII[e] siècle.

(1) Voir plus bas page 93 et suivantes.

(2) L'*Algèbre d'Omar Alkhayyami*, traduct. Wœpcke, Berlin, 1851, p. 5 (XII[e] siècle).

cieux, je dis : « l'algèbre est un art scientifique. Son « objet, ce sont le nombre absolu et les grandeurs mesu- « rables, étant inconnus mais rapportés à quelque chose « de connu, de manière à pouvoir être déterminés ; les « choses connues sont des quantités ou des rapports « individuellement déterminés ainsi qu'on le reconnaît « en les examinant attentivement ; ce qu'on cherche « dans cet art, ce sont les relations qui joignent les don- « nées du problème à l'[inconnue], qui de la manière « susdite forme l'objet de l'algèbre (1) ».

Supposons, par exemple, que l'on sache que le nombre 2, moins le triple d'une quantité inconnue, égale cette même quantité, plus le nombre $\frac{3}{4}$: nous désignerons la quantité inconnue par la lettre x, et nous écrirons l'égalité (*équation*) $2 - 3 \,.\, x = x + \frac{3}{4}$. Ajoutons, de part et d'autre du signe $=$, une même quantité $3 \,.\, x - \frac{3}{4}$: nous obtenons $4 \,.\, x = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, d'où, en divisant par 4, la valeur de x ; $x = \frac{5}{16}$.

Pour atteindre ce résultat, le géomètre ou le pur arithméticien prendra des voies détournées ; comment pourrait-il, en effet, introduire de but en blanc dans ses raisonnements la soustraction ou la division par 4 d'une quantité qui n'est pas connue ? Au regard de l'intuition une semblable opération n'a pas de sens. L'algébriste, lui, ne s'embarrasse pas pour si peu, et il parvient instantanément à la solution du problème.

(1) L'algèbre — dit plus rapidement Hérigone (*Cours mathématique*, t II, 1634) — est l'art de trouver la grandeur inconnue en la prenant comme si elle était connue et trouvant l'égalité entre elle et les longueurs données.

— « Il est d'habitude, chez les algébristes, ajoute « Khayyam, de nommer dans leur art l'inconnue qu'on « se propose de déterminer : *chose* ». — Cette habitude se conserva longtemps. L'algèbre fut la *Règle de la chose* et il y eut en Allemagne une école d'algébristes que l'on appela *Cossistes*. En latin, l'inconnue était souvent désignée par le mot « *radix* » et son carré par le mot « *census* ». Ainsi, dans les relations où figurent l'inconnue et son carré, on distingue trois sortes de nombres : *radix*, *census*, *numeri simplices* (nombres ordinaires, connus). Quelle différence d'espèce y a-t-il entre ces nombres ? C'est là une question que l'algébriste conséquent avec lui-même ne se posera pas. La distinction des connues et des inconnues — de même que celle des déterminées et des indéterminées, des fixes et des variables — est essentielle à qui se préoccupe d'interpréter, par la géométrie ou d'une autre manière, les résultats de l'algèbre. Mais à l'algébriste proprement dit, nous ne saurions trop le répéter, la nature des symboles qu'il manie doit rester indifférente.

C'est faute d'avoir adopté franchement cette attitude que les algébristes furent longtemps retardés dans leur marche en avant. L'histoire du symbolisme algébrique nous en fournit la preuve. On s'habitua facilement à représenter les indéterminées ou les variables par des lettres (les lettres tenant ainsi la place de nombres dont on ne connaît pas la valeur). Mais n'était-ce pas pécher contre le bon-sens que de figurer par des lettres les quantités dont on pouvait écrire directement la valeur numérique ? Viète eut le grand mérite de comprendre le grand avantage que présente, en ce cas encore, l'usage des signes littéraux (1). En effet, en ne déterminant pas

(1) Pendant longtemps, cependant, on n'osa figurer par des lettres que les nombres positifs qui seuls représentent de véritables gran-

tout de suite les valeurs des *quantités connues*, on obtient des *formules* qui sont applicables quelles que soient les valeurs (déterminées) que l'on donne ultérieurement à ces quantités dans tel ou tel problème particulier.

En résumé, plus le mécanisme combinatoire qu'est l'algèbre saura s'abstraire de la réalité, plus il étendra sa portée et son champ d'application. Une méthode universelle, une clef de toutes les sciences, voilà ce que, depuis le temps de Raimond Lulle (13ᵉ siècle), toute une génération de philosophes rêvait de constituer. Et, si ces philosophes on été pour la plupart de médiocres mathématiciens, ils n'en sont pas moins guidés par le principe même d'où procède l'algèbre. N'est-il pas bien significatif que l'on ait souvent donné à cette science le nom même de la méthode pour laquelle s'enthousiasma Raimond Lulle ? L'Algèbre c'est la « méthode par excellence », c'est le « grand art », *ars magna*, l'« art entre les arts », *artium ars*.

II. — L'algèbre cartésienne.

En cherchant à mettre en évidence les tendances propres à l'algèbre, nous avons devancé le cours de l'histoire. Ces tendances, en effet ne se manifestèrent complètement et ne furent érigées en principes de recherche que lorsque l'algèbre fut sortie de la période des tâtonnements. Pour nous rendre un compte exact des vues et des intentions des fondateurs du calcul algébrique, il nous faut étudier de plus près les difficultés

deurs. Les Cartésiens (Hudde, *De reductione æquationum*, 1657) furent les premiers à désigner indifféremment par des symboles littéraux non affectés de signes (tels que a, b, c, ..., x, ...) des nombres pouvant être à volonté positifs ou négatifs.

qu'eut à surmonter ce calcul pour s'affranchir de la géométrie et pour devenir une science autonome.

Nous avons dit que l'algèbre fut primitivement une simple méthode de calcul pratique, qui, d'après les idées des géomètres grecs, ne méritait point le nom de science. Il y a plus. Les procédés de l'algèbre primitive reposaient sur certaines définitions incomplètes et sur certaines conceptions simplistes qui soulevaient de graves difficultés logiques. C'est pourquoi l'algèbre se développa tout d'abord chez les peuples de l'Orient, artisans et ingénieurs, mais dépourvus de scrupules théoriques.

Après le Moyen-Age, cependant, et spécialement la fin de la Renaissance, le calcul algébrique change de caractère. Les savants du 16e siècle (1) sont, comme les Orientaux, utilitaires et pratiques, mais ils ont une connaissance approfondie de la géométrie grecque et ils constatent que cette géométrie est, avec l'arithmétique proprement dite, la seule science dont les principes soient rigoureusement établis. C'est pourquoi ils estiment que, dans la mesure où les règles de l'algèbre sortent du cadre de l'arithmétique, ces règles doivent être rattachées aux théorèmes de la géométrie, seules susceptibles de fournir les bases d'une véritable science des grandeurs. Dans cette pensée, ils se reportent à cet ensemble de théories géométriques auquel certains historiens ont donné le nom d'« algèbre géométrique des Grecs » et que nous

(1) Citons notamment Luca Paciuolo, qui, après avoir exposé au point de vue abstrait les règles du calcul algébrique, consacre un chapitre de son traité (*Summa de Arithmetica*, Venise 1494) à la démonstration géométrique de ces règles, — Viète, qui composa notamment un important ouvrage sur la construction des racines des équations du second degré (*Francisci Vietæ Effectionum geometricarum canonica recensio*, 1593), — Marino Ghetaldi de Raguse (1567-1626).

avons brièvement caratérisé à la fin de notre chapitre I.

Ce retour à l'antiquité était sans doute nécessaire pour consolider les principes de l'algèbre naissante, mais il présentait pourtant des inconvénients. En particulier, les constructions géométriques des anciens étaient liées, comme nous l'avons vu, à des procédés de démonstration compliqués ; l'emploi systématique de ces constructions aurait donc fait perdre au calcul algébrique les avantages principaux que l'on attendait d'elle, la *brièveté*, et la *commodité*. Et c'est pourquoi, — volontiers ~~électriques,~~ — les savants de la Renaissance, tantôt se donnent beaucoup de peine pour déduire rigoureusement les règles de l'algèbre des théories géométriques classiques, tantôt reviennent à l'improviste à la méthode orientale, qui consiste à poser ces règles sans les justifier ou, simplement, à traiter les quantités algébriques comme des nombres arithmétiques sans chercher aucunement à légitimer cette assimilation. Ainsi ont procédé en maintes circonstances, Viète, Albert Girard, Stevin, Hérigone.

La figuration géométrique, pourtant, était bien propre à fournir à l'Algèbre la base théorique qui lui faisait défaut. Mais il fallait, pour cela, que le principe en fût réformé. Cette réforme nécessaire fut accomplie par Descartes (1).

Tâchons de bien saisir, sur la question qui nous occupe, la pensée du grand philosophe ; cette pensée en effet n'a pas toujours été exactement comprise, sans doute parce qu'elle a été exposée en plusieurs fois, dans des ouvrages écrits à des points de vue différents, sans

(1) Cf. le *Descartes* de Louis Liard, (F. Alcan, Paris, 1882), liv. II, notre étude sur l'*Imagination et les Mathématiques selon* Descartes, 1900, et les *Étapes de la philosophie mathématique* de L. Brunschvicg, chap. VII et VIII.

doute aussi parce qu'elle est d'un caractère subtil et devance, sur plusieurs points, les progrès techniques de la science.

On a souvent discuté sur la relation de l'Algèbre à la Géométrie dans l'œuvre de Descartes, — question d'autant plus naturelle que Descartes nous enseigne les règles de son algèbre dans un traité intitulé « Géométrie ». Sans reprendre ici cette discussion, disons que, en dépit de certaines apparences, l'opinion la plus généralement répandue sur le compte de la géométrie cartésienne ne paraît pas avoir été infirmée par les études récentes des historiens. Bien que le traité de 1637 contienne autant ou plus d'algèbre que de géométrie, et ait pour conclusion une théorie des équations, la géométrie cartésienne n'est nullement, dans la pensée de son auteur, une introduction à l'algèbre, mais au contraire une application de l'algèbre à la géométrie. En d'autres termes, l'algèbre, selon Descartes, précède logiquement les autres branches des Mathématiques, et elle n'est aucunement conditionnée par la nature des problèmes auxquels on l'applique.

Qu'est-ce donc que la méthode algébrique, envisagée en dehors de ses applications? Le cartésien Erasme Bartholin nous l'explique dans la Préface qu'il a écrite pour l'édition latine de la *Géométrie* (1). « Dans les commencements — dit-il — il a été utile et nécessaire de donner des auxiliaires à notre faculté de spéculation pure : c'est pourquoi les géomètres ont eu recours aux figures, les arithméticiens aux signes numériques, d'autres à d'autres procédés. Mais de tels procédés paraissent peu

(1) *Geometria à Renato Descartes*, 2e éd., t. I. Amsterdam, 1659, p. 4.

dignes des grands génies et de ceux qui aspirent au nom de savant ». Le grand génie fut Descartes, qui a vu le premier, ajoute Bartholin, que l'on peut raisonner sur des quantités purement abstraites en les représentant par des lettres de l'alphabet. Effectivement Descartes nous a laissé l'ébauche d'un traité d'algèbre pure (connu sous le nom de *Calcul* (1) *de Monsieur Descartes*) qu'il présente comme une Introduction à sa *Géométrie* et où il s'efforce de traiter l'algèbre abstraitement sans recourir à la figuration géométrique. Il procède, — autant qu'on en peut juger d'après cet écrit incomplet — par voie de définitions verbales, c'est-à-dire qu'il se borne à poser les règles de l'algèbre sans chercher à les étayer par des démonstrations ou par des considérations intuitives. C'était là une méthode d'exposition que les prédécesseurs de Descartes avaient, nous l'avons dit, déjà employée. Mais, dans les ouvrages éclectiques de la Renaissance, cette méthode était le plus souvent mélangée à d'autres; il est difficile de dire quelle valeur lui était attribuée. Descartes, au contraire, semble apercevoir le principe qui est appliqué de nos jours dans la méthode des « définitions conventionnelles ». Considérons les signes algébriques a, b, c, ..., sans rien préjuger sur ce qu'ils représentent. On remarque qu'on peut définir conventionnellement une certaine combinaison, formée avec ces signes, que nous appelons *addition*, une autre que nous appelons *soustraction*, et ainsi de suite, — cela en satisfaisant simplement aux deux conditions suivantes : 1° qu'il n'y ait entre les définitions ainsi données aucune contradiction logique; 2° que, lorsque les éléments

(1) Le *Calcul de M. Descartes*, déjà cité plus haut, p. 85. Cet opuscule, retrouvé à Hanovre en 1895 par M. H. Adam, est probablement de 1638. On ignore si Descartes l'a écrit lui-même ou s'il l'a fait écrire sous sa direction.

combinés se trouvent être des nombres arithmétiques ou des rapports géométriques, il y ait coïncidence entre les opérations résultant de ces définitions et les opérations de même nom considérées en Arithmétique ou en Géométrie.

Cependant les conditions qui régissent et légitiment l'emploi de la méthode des définitions conventionnelles (1) n'avaient pas été étudiées d'assez près par Descartes pour qu'il pût se fier exclusivement à cette méthode. Le *Calcul de M. Descartes* n'est en somme qu'un mémento, où n'apparaît qu'un seul aspect de l'algèbre cartésienne. Pour se faire de celle-ci une idée complète, il la faut étudier dans le livre II de la *Géométrie* et dans les traités complémentaires ajoutés à cet ouvrage par les commentateurs de Descartes (2). Or il résulte manifestement de ces écrits que Descartes, pour établir et exposer en détail les principes de son algèbre, ne croyait pas pouvoir se passer — en fait — de la figuration géométrique.

Cela admis, quelle portée au juste, quelle signification, faut-il attribuer à la figuration ainsi employée ? Si nous comprenons exactement son point de vue, Descartes, en

(1) Le type de la définition conventionnelle est la définition du nombre qu'a donnée Christian Wolf en 1717 et que nous avons rapportée plus haut (page 72) : *Quidquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam numerus dicitur.* En fait ce ne peut être qu'au moyen d'une série de conventions que l'on élargit progressivement la notion du nombre susceptible d'être représenté par un signe algébrique : nombre entier, — puis rationnel, — puis irrationnel défini par une opération arithmétique (comme $\sqrt{2}$), — puis rapport (ou mesure de longueurs ou de grandeurs de même espèce) — puis nombre relatif (positif ou négatif). — plus tard, nombre imaginaire. — Descartes évite, en algèbre, de se servir du mot *nombre*, employant de préférence le mot *quantité*.

(2) Traités publiés dans l'édition latine de la *Géométrie*

recourant à la géométrie, cherchait seulement à donner un support à l'intuition algébrique pure, à fixer le raisonnement déductif, à soulager l'entendement, qui, théoriquement, pourrait se passer de la collaboration de l'imagination et des sens, mais qui ne doit négliger aucun des secours dont il dispose (1). Ainsi, pensait-il, l'algébriste doit se servir d'images, mais pour que celles-ci remplissent convenablement leur missions, il importe qu'elles soient aussi réduites, aussi simples que possible (2).

Or, précisément, Descartes était en mesure de proposer un mode de figuration de quantités algébriques qui répondait bien à ces desiderata et d'où les considérations géométriques se trouvaient presque complètement éliminées.

Descartes part de cette remarque que le résultat de tout calcul effectué sur des quantités représentées par des grandeurs rectilignes peut être lui-même figuré par une grandeur rectiligne (*ligne simple*, disent les Cartésiens). C'est là le fait capital dont la constatation a permis de débarrasser le calcul des grandeurs des entraves que lui avaient imposées les Grecs. Dans la géométrie grecque, en effet, un produit de grandeurs d'une certaine espèce, se présentait le plus souvent comme une grandeur d'une autre espèce, circonstance qui contribuait plus que toute autre à limiter le champ d'application du calcul géométrique. Du point de vue de Descartes, au contraire, le produit est, comme chacun des facteurs, un segment

(1) Sollus intellectus equidem percipiendæ veritatis est capax; qui tamen juvandus est ab imaginatione, sensu et memoria, ne quid forte quod in nostra industria positum est omittamus (*Regulæ ad directionem ingenii*, XII).

(2) Compendiosæ figuræ quæ modo sufficiant ad cavendum lapsum; quo breviores, eo commodiores existunt (*Regulæ*, XII).

rectiligne. « Et il est à remarquer, dit-il, que par a^2 ou b^3, ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que, pour me servir des noms usités en algèbre, je les nomme des carrés ou des cubes » (1).

Sans doute les propositions géométriques sur lesquelles s'appuie Descartes pour justifier sa manière de voir ont un caractère banal, et bien d'autres que lui les ont mises à profit. Mais il en a tiré un principe qu'il est le premier à énoncer dans toute sa généralité : savoir, qu'il y a parallélisme absolu entre la notion de quantité algébrique et celle de longueur rectiligne ; par conséquent, pour faire de l'algèbre une science à la fois solide et simple, logiquement inattaquable et commode dans la pratique, il suffira de décider que les lettres de l'algèbre représenteront toujours — exclusivement — des longueurs rectilignes (2).

Toutefois, cette convention, comme le fait remarquer un commentateur de Descartes (3), n'a de raison d'être qu'en tant qu'elle nous permet de donner à l'algèbre un fondement solide et qu'elle en rend l'étude plus facile ; car l'algèbre, encore une fois, ne doit pas être regardée comme une science objective au même titre que l'Arith-

(1) *La Géométrie*, liv. I, *Œuvres*, édit. Adam-Tannery, t. VI, p. 171.

(2) Cf. Schooten, dans ses *Principia Matheseos* (édit. latine de la *Géométrie*, t. II, p. 1 et suiv.) : « Attamen quia tum phantasiæ, tum sensibus ipsis nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit quam rectæ lineæ, quæque relationes et proportiones quæ inter omnes alias res inveniuntur exprimere valent, præstat per prædictas litteras solummodo lineas rectas concipere ».

(3) Florimond de Beaune, dans ses *Notæ breves* (édit. latine de la Géométrie, t. I, p. 107) : « Optimum vero est, ad stabilienda hujus scientiæ præcepta et ad cognitionem ejus assequendam, ut generaliter rationes hasce in lineis consideremus, etc.

métique ou la Géométrie grecques; on n'a pas le droit de la définir par sa matière. Par conséquent, le fait que les algébristes utilisent des notions géométriques ne doit rien changer à l'idée que nous nous sommes faite plus haut de l'Algèbre pure. Celle-ci est une technique de calcul, vide de contenu par elle-même. C'est une *méthode*. C'est même la méthode mathématique par excellence, qui n'est qu'une application particulière, une spécialisation de la Méthode générale dont Descartes se dit l'inventeur.

Ici se pose une question historique dont nous ne saurions nous désintéresser parce qu'elle met en cause le jugement que Descartes portait, au fond de lui-même, sur la valeur des Mathématiques. Quels rapports le système cartésien établissait-il au juste entre la science mathématique et la science générale de l'univers à laquelle devait nous conduire l'emploi de la Méthode ?

Nul doute que l'application de l'algèbre à la géométrie ne représentât pour Descartes le type parfait de la théorie scientifique. Mais, d'autre part, Descartes n'admettait point que toutes les sciences fussent réductibles aux Mathématiques. Quiconque, a-t-il dit (1), examinera attentivement ma pensée, s'apercevra que j'ai en vue une Science autre que les Mathématiques et dont celles-ci sont l'enveloppe plutôt qu'elles n'en font partie. Encore moins Descartes eût-il cru possible de ramener tous les problèmes de la Science à des problèmes quantitatifs et, par conséquent, de les traiter par l'algèbre (2). Sans doute, lorsqu'il entreprend d'expliquer les lois de l'univers en termes d'étendue et de mouvement, il fait

(1) *Regulæ*, IV.

(2) Cf. Brunschvicg. *Les Etapes de la philosophie mathématique*, p. 107 et suiv.

de la géométrie et de la mécanique la base de toutes nos connaissances scientifiques; mais (1) la géométrie dont il veut ici parler ne paraît pas s'être confondue dans sa pensée avec celle, beaucoup plus spéciale, — consistant, à peu près exclusivement dans l'étude des courbes qualifiées « géométriques », — qu'il a cherché à exposer en langage algèbrique dans son traité de 1637. En d'autres termes, la *Mathématique universelle*, c'est-à-dire la Science universelle, que Descartes entreprit de constituer, était ou devait être une explication mécanique de l'univers; mais ce n'était point une algèbre.

Faut-il conclure de là qu'il y a solution de continuité entre les différentes parties de l'œuvre scientifique de Descartes ? Et doit-on effectivement distinguer dans cette œuvre deux géométries indépendantes l'une de l'autre ? M. Brunschvicg incline à le penser (2), et l'un des arguments qu'il invoque est le suivant : cette manière de voir lui permet d'expliquer le détachement singulier avec lequel Descartes a parlé de sa « *Géométrie* » et le dédain qu'il protesse le plus souvent pour les études mathématiques. La *Géométrie*, a-t-on dit souvent, ne fut qu'un épisode dans la carrière philosophique de Descartes. Et, en effet, au lendemain même de la publication de ce traité, Descartes écrit à Mersenne (3) : « N'attendez plus rien de moi en Géométrie; car vous savez qu'il y a longtemps que je proteste de ne m'y vouloir plus

(1) Dans une lettre à Mersenne écrite le 27 juillet 1638, Descartes oppose ces deux géométries : la seconde est la « géométrie abstraite », la première est « une autre sorte de géométrie qui se propose pour questions l'explication des phénomènes de la nature ». (*Œuvres de Descartes*, édit. Adam-Tannery, t. II. 268).

(2) Brunschvicg, *loc. cit.* p. 124.

(3) Lettre à Mersenne, 12 septembre 1638, *Œuv. de Descartes*, t. II, p. 361.

exercer ». Il a résolu de quitter « la recherche des questions qui ne servent qu'à exercer l'esprit (1) ». En 1638, il y a déjà plus de quinze ans qu'il fait profession de « négliger la géométrie » (2). Et c'est tout juste si quelques années plus tard il ne renie pas son traité de 1637, indiquant que, s'il avait à le refaire, il le composerait autrement.

Sans méconnaître l'importance de ces déclarations, il importe d'en bien préciser la signification.

Descartes estime peu la pure Mathématique, non seulement celle de ses prédécesseurs, mais aussi celle qu'il a cultivée lui-même. Ce point paraît bien acquis. Mais une distinction s'impose, pourtant, entre la méthode et l'objet de la science. Nulle part, croyons-nous, Descartes ne met en doute la puissance et la portée de la méthode des mathématiques. Son dédain ne vise que l'objet auquel cette méthode est appliquée, et il nous en a lui-même indiqué clairement les raisons.

L'objet des mathématiques est sans valeur parce qu'il n'est d'aucune utilité dans l'étude de la nature. Ceux qui le cultivent sont des chercheurs oisifs (3), adonnés à un vain jeu de l'esprit. Trouverons-nous, du moins, dans la spéculation mathématique, l'occasion d'exercer nos facultés inventives et la satisfaction de déployer les ressources de notre ingéniosité et de triompher de difficultés subtiles ? Non, car, grâce à la méthode algébrique, la Mathématique devient une science mécanique, qu'il est désormais à la portée du premier venu de conduire à bien — C'est pourquoi — nous reviendrons tout à l'heure sur ce point — Descartes ne poursuit pas

(1) Lettre à Mersenne, 27 juillet 1638, *ibid.*, t. II. p. 268.

(2) Lettre à Mersenne, 31 mars 1638, *ibid.*, t. II. p. 95.

(3) « Insania problemata ... quibus logistæ vel Geometræ otiosi ludere consueverunt » (*Regulæ*, IV).

lui-même l'œuvre ébauchée dans sa *Géométrie*. Il se contente de nous donner quelques indications sommaires — « Au reste — dit-il au Livre III de son traité (1) — j'ai omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit à cause qu'elles m'ont paru si faciles pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli ». Et, parlant, au début de l'ouvrage (2), des mathématiques en général : « je n'y remarque rien de si difficile que ceux qui sont un peu versés en la géométrie commune et en algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver ».

On comprend, dès lors, que Descartes n'ait pas fait lui-même grand cas de sa *Géométrie*. Il ne voulait surtout pas laisser croire que la géométrie algébrique pût être, dans sa pensée, une branche essentielle de la *Mathématique universelle*, laquelle devait avoir pour objet l'explication de l'univers, Pourtant, il ne va pas jusqu'à dire que cette géométrie ne fasse pas partie de la science générale : il déclare seulement que l'étude des figures ne peut servir à rien tant qu'on ne l'aura pas complétée par l'étude des mouvements.

Mais cette dernière étude, comment se fera-t-elle ? Rien ne nous autorise à croire que Descartes ait considéré la méthode de la mécanique comme devant être radicalement distincte de celle de la géométrie des courbes. En maints passages, il affirme au contraire l'unité de la Méthode. Il pense, d'ailleurs, que la Méthode générale nous est précisément révélée par l'étude des mathématiques ; mais — dit-il (3), « ne l'ayant point assujettie [*cette méthode*] à aucune matière particulière,

(1) *Œuvres*, édit. Adam-Tannery, t. VI, p. 464.
(2) *Ibid.* p. 374.
(3) *Discours de la méthode*, I.

je me promettais de l'appliquer aussi utilement aux difficultés des autres sciences que j'avais fait à celle de l'algèbre [*entendons* : l'algèbre appliquée à la géométrie] ». Aussi bien est-il évident, que Descartes ne pouvait manquer d'apercevoir les services qu'était susceptible de rendre le calcul algébrique dans l'étude de la mécanique.

Concluons donc que si l'activité mathématique de Descartes n'a été, en effet, qu'un épisode de sa carrière, il n'en est pas de même de son admiration pour la méthode algébrique. La méthode algébrique, et, par conséquent, l'algèbre même, — puisque l'algèbre pure, considérée en dehors de ces applications, se réduit à une méthode — auraient certainement joué un rôle capital dans l'élaboration de la *Mathématique universelle cartésienne*, si jamais celle-ci avait vu le jour.

Revenons maintenant aux conséquences qui résultèrent de l'emploi de la nouvelle méthode dans le domaine spécial des Mathématiques. Au point de vue historique, ces conséquences furent considérables. Jusqu'au milieu du XVII[e] siècle, en effet, la démonstration euclidienne n'avait pas cessé d'être considérée comme le comme le type parfait et intangible du raisonnement mathématique. Les algébristes les plus convaincus n'avaient point songé un seul instant à détrôner l'œuvre d'Euclide, mais seulement à l'enrichir d'une technique nouvelle. Au contraire, Descartes met à nu la faiblesse de la Mathématique grecque et il prétend apporter une conception toute nouvelle de la science. Cette conception est une conception synthétiste. En effet l'algèbre, telle que la comprend Descartes, est essentiellement une méthode de *combinaison*. Son rôle consiste à associer des éléments simples, de façon à en former progressivement des composés dont la structure soit de plus en plus compliquée.

Cette conception du rôle de l'algèbre est parfaitement conforme, remarquons-le, aux vues qui inspiraient les algébristes du Moyen-Age et de la Renaissance que nous avons, plus haut, rapprochés de Raimond Lulle. Mais ce qui était, chez ces précurseurs, un rêve à demi fantaisiste, est devenu, avec Descartes, une réalité. Dans la *Géométrie* de 1637, Descartes systématise le point de vue des créateurs de l'algèbre, et, avec un remarquable pouvoir de divination, il aperçoit l'avenir qui est promis à la science si elle s'engage dans les voies qu'il lui indique.

Dans la *Géométrie*, qu'il présente comme un échantillon de sa Méthode, Descartes s'est proposé de montrer comment par le moyen de l'algèbre il est possible de résoudre les problèmes relatifs aux grandeurs et aux figures en suivant une voie sûre et régulière et « en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés (1).

La sûreté, la régularité de la méthode, voilà donc ce qui doit distinguer la science moderne de la géométrie ancienne, ce champ clos où les virtuoses de la démonstration pouvaient seuls se mouvoir et accomplir leurs prouesses. Descartes se propose expressément de rompre avec la tradition grecque, et c'est par là qu'il diffère profondément de Fermat.

C'est un fait sur lequel certains historiens modernes ont insisté que Fermat pratiquait pour son compte la méthode cartésienne des coordonnées et qu'il l'avait exposé dans un traité didactique antérieur de plusieurs

(1) *Discours de la Méthode*, II.

années à la *Géométrie* : le *Ad locos planos et solidos Isagoge* (1). Le procédé consiste (2) à définir une courbe par une relation entre les coordonnées de ses points rapportés à deux axes rectangulaires ou obliques ; après quoi l'on cherche à ramener l'étude de la courbe à l'étude de la relation algébrique. Dans ce procédé, Fermat découvre des possibilités jusqu'alors insoupçonnées ; mais le principe n'en est pas nouveau, car on le trouve déjà chez Apollonius, qui s'en sert — dans un cas restreint, il est vrai — pour étudier les propriétés des sections coniques. Prenant pour axe des abscisses un diamètre d'une conique, pour axe des ordonnées la parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre menée à une de ses extrémités, Apollonius raisonne sur « l'équation » de la courbe qui s'écrit en langage moderne :

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad \text{dans le cas de l'ellipse ;}$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad \text{dans le cas de l'hyperbole ;}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{dans le cas de la parabole.}$$

Telle est la méthode de démonstration, que Fermat, restituteur d'Apollonius (3), reprend et précise dans son Isagoge et qu'il applique à la recherche générale des lieux géométriques.

(1) *Œuvres de Fermat*, édit. Tannery-Henry, t. I, p. 91. Ce traité ne fut publié qu'après la mort de Fermat, en 1679.

(2) On sait que cette méthode, ou, plus exactement, la méthode inverse, consistant à figurer par une courbe la variation d'une quantité variable, avait déjà été appliquée dans l'étude de certains problèmes par Nicole Oresme, évêque de Lisieux, dans son *Tractatus de latitudinibus formarum* (1380).

(3) Fermat a laissé un écrit intitulé : *Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti.*

En exécutant ce travail, il est exact que Fermat ouvre la voie à la géométrie analytique. Cependant il ne prétend pas déconsidérer la géométrie antique dont il se dit l'héritier ; il croit à un progrès continu de la science ; si cette découverte, — dit-il après avoir exposé sa méthode, — « eût précédé notre restitution déjà ancienne « des deux livres des *Lieux plans*, les construcrions des « théorèmes et lieux eussent été rendues beaucoup plus « élégantes ; cependant nous ne regrettons pas cette pro- « duction... ; il est important pour l'esprit de pouvoir « contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit « et le développement spontané de l'art (1) (artem sese « ipsam promoventem) ».

Si l'on y réfléchit, d'ailleurs, on reconnaîtra qu'il n'y a dans la méthode des coordonnées aucune difficulté mathématique : les théorèmes les plus élémentaires de la géométrie y sont seuls supposés Aussi ne peut-on pas considérer comme une découverte le fait d'avoir déterminé la forme de l'équation d'une droite, d'un cercle ou d'une section conique. La découverte — si découverte il y a — consiste à prévoir et à montrer que l'usage systématique des coordonnées met en œuvre une méthode d'une puissance et d'une universalité jusqu'alors inconnues en mathématiques ; que cette méthode dispense de toutes celles qui ont été imaginées auparavant

(1) *Ad locos planos et solidos Isagoge*, trad. Paul Tannery, *Œuvr. de Fermat*, t. III, p. 96. Signalons également ce passage de la préface du traité qui indique bien que Fermat n'a d'autre prétention que de « généraliser » les résultats obtenus par les géomètres anciens : *De Locis*, écrit Fermat, *quam plurima scripisse veteres haud dubium. Testis Pappus initio libri septimi, qui Apollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed, aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio ; illud auguramur eo quod locos quam plurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit. Scientam igitur hanc propriæ et peculiari analysi subjicimus ut deinceps generalis ad locos via pateat.*

et qu'elle les supplantera en effet; que, par l'intermédiaire de la notion de fonction, elle va révolutionner et régénérer toutes les sciences qui sont en relation avec l'espace et le temps.

Pour Fermat, comme pour ses prédécesseurs, les questions relatives aux figures sont des questions de géométrie : si l'algèbre y intervient, ce n'est qu'à titre d'adjuvant et par procuration. Avec Descartes, c'est l'algèbre qui passe au premier plan : l'algèbre, avec tous ses caractères spécifiques que nous avons fait ressortir plus haut.

Nous avons dit que l'algèbre n'est pas un recueil de résultats, mais bien une méthode de combinaison et de construction. Appliquée à l'étude des figures, cette méthode permettra de reconstruire de toutes pièces la géométrie en faisant table rase des connaissances que nous a léguées l'antiquité. Nous l'édifierons sur un plan nouveau, mieux ordonné et beaucoup plus vaste que l'ancien. Car, après avoir dit, par exemple : « les droites sont les figures définies par les équations polynomales du premier dergé en x et y (de la forme $ax + by + c = 0$); les sections coniques sont les courbes définies par les équations polynomales du second degré en x et y (de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$), rien ne nous empêchera d'ajouter : « j'appelle courbes du 3e ordre les courbes définies par les équations polynomales du 3e degré en x et y, courbes du 4e ordre les courbes définies par les équations polynomales du 4e degré en x et y, ...; et des équations de ces courbes je vais déduire leurs propriétés, ainsi que je l'ai fait pour les sections coniques. » Ainsi, par le simple jeu du mécanisme algébrique, nous faisons surgir un monde géométrique illimité que ne nous eût jamais révélé l'intuition directe de la figure.

En rapprochant ces vues techniques de la théorie de la connaissance exposée dans les *Regulæ*, nous sommes amenés à préciser comme il suit l'idée qu'un Cartésien doit se faire des théories mathématiques.

Les vérités mathématiques sont des faits intuitifs : sur ce point, Descartes, quant à lui (1) est presque d'accord avec les anciens. Toutefois, — et c'est là ce que les Grecs ont méconnu — il est avantageux pour étudier ces faits de suivre une voie détournée (autre que celle de l'intuition). On ne doit pas essayer de les pénétrer d'emblée ; mais, en partant d'éléments simples combinés suivant les règles de l'algèbre, on essayera de les *reconstruire*. Ainsi, aux touts perçus par l'intuition, l'on substituera des composés dont la structure et tous les éléments nous sont exactement connus. Dès lors la science, au lieu d'être, comme le croyaient les anciens, une contemplation d'objets idéaux, se présentera comme une construction de l'esprit. La tâche essentielle du savant ne consistera plus à apporter une nombreuse ou belle collection de résultats, mais bien à mettre sur pied de bons instruments de combinaison, à constituer une méthode puissante et efficace.

Descartes estimait qu'une fois posés les principes de la « géométrie analytique », les conséquences devaient se dérouler naturellement par voie de transformation et de combinaison algébrique. La construction effective des formules était, dans sa pensée, comme nous l'avons dit déjà, simple affaire de métier, ne réclamant de notre part aucun effort d'invention. C'était là, certes, un jugement un peu hâtif : car les progrès de la géométrie, rendus solidaires de ceux de l'algèbre, devaient désormais

(1) Voir chapitre premier.

attendre ces derniers, et de graves difficultés techniques restaient à vaincre que Descartes n'avait fait qu'effleurer. Aussi arriva-t-il que Newton dut se référer encore à Apollonius lorsqu'il eut besoin d'approfondir l'étude des sections coniques : il crut nécessaire d'y chercher des secours que la géométrie cartésienne ne paraissait pas en état de lui fournir.

Mais, cette réserve faite, il nous faut constater que la méthode de Descartes répondit bien aux espérances de son auteur et que très vite elle accrut son rendement dans des proportions absolument inconnues auparavant. Une ère nouvelle s'ouvre alors en mathématiques, que M. Zeuthen compare fort justement à l'ère de la grande industrie dans le monde moderne. C'est l'usine succédant au métier. Les résultats obtenus sont si nombreux que la difficulté n'est point de les découvrir, mais bien de faire un choix entre eux et de les classer. La recherche mathématique est devenue, à la lettre, un travail de manufacture.

Voilà ce que, derrière le contenu objectif de l'ouvrage, nous devons surtout remarquer dans la *Géométrie*. Descartes a eu l'idée très nette que l'emploi des méthodes qu'il proposait devait amener la rénovation complète de la science mathématique. Et, c'est ce qui est arrivé en effet. Descartes a été bon prophète. Il a deviné mieux qu'aucun autre les destinées de la synthèse algébrique. C'est pourquoi, bien qu'il n'ait pas laissé un très gros bagage de découvertes techniques, son nom doit rester le premier parmi ceux des algébristes du XVII^e siècle.

III. — La synthèse infinitésimale.

Lorsque nous abordons l'étude des conceptions mathématiques qui se développèrent pendant la seconde moitié du XVII[e] siècle, nous nous trouvons tout d'abord en présence d'un problème historique assez délicat.

Au moment même où la méthode cartésienne commence à être universellement adoptée et à manifester toute sa fécondité, un évènement capital se produit qui a pour effet de la reléguer temporairement dans l'ombre : nous voulons parler de la création du calcul infinitésimal. Le rôle considérable que joua immédiatement ce calcul dans toutes les parties des mathématiques le fit bientôt regarder comme la base fondamentale et l'instrument par excellence de la Mathématique pure, si bien que les chaires d'université où cette Mathématique était enseignée furent baptisées, et sont encore appelées aujourd'hui en France et en Angleterre, chaires de *calcul infinitésimal* ou chaire de *calcul différentiel et intégral*. D'ailleurs les difficultés philosophiques auxquelles semblait donner lieu la notion d'infini, le mystère qui l'enveloppait en apparence, incitaient naturellement les analystes à considérer le nouveau calcul comme radicalement différent de l'ancien. On crut donc de bonne foi que l'on était entré dans une ère nouvelle et que les découvertes de Newton et de Leibniz avaient révolutionné la science mathématique.

Du point de vue auquel nous nous plaçons dans cet ouvrage, les faits ne sauraient pourtant apparaître sous ce jour. Sans doute le calcul infinitésimal soulevait certaines questions délicates. Mais il ne contenait rien qui fût contraire aux principes de l'algèbre finie. Si d'ailleurs l'on examine en détail l'enchainement historique des théories de l'Analyse, on constate que, loin de s'opposer l'une à l'autre, la méthode cartésienne et la méthode newtonienne ou leibnitienne ont été, dans ces théories, constamment associées. Descartes, en somme, s'était contenté de tracer un programme ; il avait ouvert une voie aux mathématiques ; or il suffisait de parcourir cette voie pour aboutir tout droit aux procédés de calcul qui se développèrent à la fin du XVII^e siècle.

C'est, comme on sait, le Père Jésuite Bonaventure Cavalieri, professeur au gymnase de Bologne, qui osa le premier affirmer la légitimité du calcul des infiniment petits, en publiant en 1635 sa *Géométrie des Indivisibles* (1). Entendons par là : la Géométrie qui a pour objet de construire le continu avec les *indivisibles*, ou *éléments infiniment petits*. Le point de vue de l'auteur, la hardiesse de son langage ne pouvaient manquer d'attirer l'attention. Effectivement, de vives discussions s'engagèrent bientôt autour du livre de Cavalieri. Elles se poursuivirent à l'occasion des travaux de Wallis, de Leibniz, de Newton, et restèrent à l'ordre du jour jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. De plus en plus, cependant, ces discussions s'écartèrent des problèmes techniques pour mettre aux prises des idées purement philosophiques. Ainsi que le remarquait déjà Cavalieri (2), c'est lorsqu'ils quittent le terrain géométrique que les savants cessent de s'entendre sur la question de l'infini.

La principale innovation de Cavalieri consiste à introduire, non seulement une terminologie, mais certains procédés d'exposition, qui choquaient les algébristes épris des traditions et de rigueur logique. Aux critiques que lui adressaient ces algébristes, cependant,

(1) *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologne, 1635.

(2) *Exercitationes geometricæ sex*, 1647, p. 241 : « In his enim jurgiis et disputationibus potius philosophicis quam geometricis, mihi fere semper ægrotanti nequaquam quod superest tempus inaniter terendum esse censeo ». — Cf. Brunschvicg, *les Etapes de la philosophie mathématique*, p. 187.

Cavalieri était à même de répondre facilement. Il pouvait observer que les géomètres auxquels ses travaux l'apparentaient — Képler notamment (1) — en avaient usé beaucoup plus librement que lui-même avec la logique. Ceux-ci, en effet, dans leurs calculs relatifs aux aires et aux volumes, s'étaient le plus souvent bornés à imiter les méthodes d'Archimède, mais en supprimant les détours et en négligeant les précautions qui avaient permis au grand géomètre grec de justifier sa manière de faire. C'est que les savants en question appartenaient à cette école de la Renaissance qui faisait bon marché de la signification objective des calculs pourvu que ceux-ci fussent féconds en résultats utiles. Et, se plaçant au même point de vue, Cavalieri pouvait estimer à bon droit que ses procédés de calcul devaient être, pour le chercheur en quête d'inventions nouvelles, particulièrement commodes et subjectifs.

En somme l'histoire du calcul des indivisibles fut celle de toutes les théories algébriques. La surprise que causa ce calcul et les objections qu'il souleva tiennent à la façon dont il fut d'abord présenté. Mais, dès que les principes dont il procède eurent été épurés et étudiés à la lumière de la géométrie grecque, il entra tout naturellement dans le giron de la science classique. Ce fut Cavalieri lui-même qui commença le travail de mise au point. Ma méthode, dit-il en substance (2), n'oblige nullement à considérer les surfaces ou corps géométriques comme effectivement *composés* de figures ayant

(1) Dans la *Nova Stereometria Doliorum Vinariorium, accessit Stereometriæ archimedeæ supplementum*, Linz, 1615.

(2) Quoad continui compositionem, manifestum est ex præostensis ad ipsum ex indivisibilibus componendum nos minime cogi; solum enim continua (*les corps*) sequi indivisibilium proportionem, et e converso, probare intentui fuit.

un moins grand nombre de dimensions : elle n'a d'autre objet que d'établir des égalités entre des rapports d'aires ou de volume et des rapports de longueurs ; or ces égalités conservent leur sens et leur valeur quelque opinion que l'on ait sur la composition du continu.

En termes plus précis, Pascal, dans ses *Lettres* (1) *de Dettonville* (1658), mit en lumière les raisons pour lesquelles il ne saurait y avoir désaccord entre le calcul infinitésimal et la géométrie classique et il conclut : « Tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'user de ce langage des indivisibles... » C'est d'une façon analogue qu'Archimède (2), on se le rappelle, signalait la possibilité de démontrer à la manière géométrique les résultats qu'il avait obtenus par la méthode mécanique.

Les remarques par lesquelles Cavalieri et Pascal défendent le calcul des infiniment petits s'appliquent plus spécialement au calcul dit *intégral*. Quant au calcul *différentiel*, il est comme on sait, intimement lié au problème connu sous le nom de « problème des tangentes ». Le rapport des accroissements infiniment petits (ou différentiels) de deux variables x et y dépendant l'une de l'autre, est une quantité en général finie, calculable par les méthodes de l'algèbre élémentaire (c'est la *dérivée* de y par rapport à x), et cette quantité est égale au coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe. Ainsi les problèmes relatifs aux différentielles s'expriment immédiatement en termes finis, et ont, de plus, une signification géométrique précise.

(1) *Œuv. complètes de Pascal*, 1914, t. VIII, p. 352.
(2) Voir chapitre premier.

C'est ce qui apparaît clairement si l'on se reporte à l'histoire des découvertes mathématiques du XVII^{e} siècle. Dès 1636, en effet, Fermat imagine pour la construction des tangentes une méthode où intervient la considération du maximum ou minimum, et par conséquent de la dérivée d'une fonction (1), mais qui ne nous oblige point à raisonner sur des infiniment petits. Peu après, Roberval propose à son tour une solution mécanique du même problème, où il fait appel à la notion de vitesse, algébriquement équivalente à celle de dérivée (2). On voit donc que le calcul des dérivées (quantités finies) a précédé historiquement le calcul des différentielles (quantités infinitésimales) dont Leibniz et Newton furent les promoteurs. Et l'origine de ce calcul se trouve être un problème de géométrie qui est en relation directe avec les théories cartésiennes fondamentales ayant trait à la représentation des fonctions algébriques par des courbes, ou inversement, à la définition des courbes par des fonctions (3).

(1) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, *Œuv. de Fermat*, édit. Tannery Henry, t. I, p. 133 et suiv.

(2) *Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes*, publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, 1730 p. 25 et suiv.

(3) Ce problème est celui du *triangle caractéristique*, étudié par Leibniz. Le triangle caractéristique est un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la corde infiniment petite joignant deux points M, M' très voisins sur une même courbe et dont les cathètes (côtés de l'angle droit) sont parallèles à deux axes de coordonnées rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical. La *tangente* de l'angle que fait l'hypoténuse MM' avec la cathète horizontale est égale au rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses des points M et M'. Lorsque d'autre part, M et M' tendent à se confondre sur la courbe, cette tangente d'angle tend vers le *coefficient angulaire* de la tangente géométrique menée au point M à la courbe. Barrow,

On pourra, il est vrai, faire valoir, à l'encontre du rapprochement que nous cherchons à établir, l'attitude de Descartes lui-même, qui n'a point reconnu l'intérêt de la méthode de Fermat et qui l'a critiquée au contraire dans les termes les plus vifs. Mais ce fut là, de la part de Descartes, l'un de ces accès d'humeur dont on ne saurait tirer aucune conséquence sérieuse. Toujours mal disposé envers les géomètres qui n'étaient pas de son école, Descartes, chose curieuse, semblait redoubler de sévérité à leur égard dans les moments où ils se rapprochaient le plus de son point de vue. Il avait d'ailleurs, pour voir d'un mauvais œil la démonstration de Fermat, une raison que M. Brunschvicg a fort bien mise en lumière. En effet, Fermat, fidèle à ses habitudes de prudence et à sa prédilection pour les cas particuliers minutieusement traités, n'avait appliqué sa méthode qu'au cas de la parabole et n'avait point cherché à lui donner une forme générale. Ainsi l'on ne voyait pas immédiatement que cette méthode fût valable dans le cas d'une courbe quelconque et qu'elle pût être exprimée en termes de géométrie analytique. C'est pourquoi Descartes la repoussa. Il suffisait, cependant, d'apercevoir qu'il y a identité entre la dérivée d'une fonction (telle qu'elle apparaît dans le calcul des *maxima*) et le coefficient angulaire de la courbe correspondante, pour constater que la méthode de Fermat s'adaptait parfaitement aux principes de la géométrie cartésienne et qu'elle en était même une conséquence naturelle.

En résumé, pas plus dans le calcul des « *différentielles* » que dans le problème de l' « *intégration* », nous ne

maître de Newton, avait, dans ses *Lectiones Geometricæ* (1669-70), traité des questions analogues, que nous résolvons aujourd'hui à l'aide des dérivées, et qui se ramenaient alors à la détermination géométrique des tangentes à une courbe donnée.

voyons intervenir un principe nouveau dont on puisse dire qu'il a révolutionné le cours de la Science. Mais la Mathématique inaugurée par Newton et Leibniz n'était point limitée à ces deux calculs : la partie la plus remarquable et la plus féconde de cette nouvelle mathématique était incontestablement la *théorie des développements en séries*, qui a rendu possible l'étude générale des fonctions. Or, quels sont les caractères propres de cette théorie ? Dans quel esprit, pour quelles fins, a-t-elle été créée ?

Pour comprendre comment est né le calcul des séries, remontons un instant au point de départ de l'algèbre.

L'algèbre, nous l'avons vu, est l'art de combiner des signes littéraux (représentant des grandeurs) au moyen d'opérations connues. En principe ces opérations peuvent être quelconques et arbitrairement définies : toutefois les premiers algébristes ne connaissaient d'autres opérations que celle de l'arithmétique, c'est-à-dire l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation à une puissance entière et l'extraction d'une racine d'ordre entier. En combinant ces opérations d'une manière quelconque, et les faisant porter sur une ou plusieurs quantités variables et sur des nombres fixes, on obtient une grande variété de « *fonctions* » d'une ou plusieurs variables. D'ailleurs on peut accroître le nombre de ces fonctions en utilisant la notion de relation implicite : soit $F(x, y)$ une fonction déjà connue (définie au moyen d'une combinaison d'opérations connues) de x et y : la relation $F(x, y) = 0$ peut être considérée comme définissant y en *fonction* implicite de x. Par ce détour, les algébristes obtiennent une riche famille de fonctions d'une variable, d'allures très diverses, que l'on appelle aujourd'hui « fonctions algébriques ». Quelque vaste, cependant, que soit cette famille, on constate bien vite qu'elle ne comprend pas la totalité des relations quantitatives entre grandeurs variables que les mathématiciens peuvent se proposer d'étudier. Déjà dans la science du XVII^e^ siècle, il existait tout un ensemble de calculs irréductibles, en partie au moins, aux opérations fondamentales de l'arithmétique : nous voulons parler des calculs où interviennent des *lignes trigonométriques* et des *logarithmes* (1). Ces calculs doivent le plus souvent être effectués au moyen de *tables*, ce qui les distingue radicalement des calculs ordinaires de l'algèbre. La question suivante se pose dès lors : dans quelle mesure les expressions $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, etc. (appelées aujourd'hui *transcendantes*) peuvent-elles et doivent-elles être assimilées aux fonctions algébriques ?

Cette question, aussi ancienne en somme que le calcul trigonométrique, se précisa et s'imposa à la discussion dans les premières années du XVIII^e^ siècle. Si, en effet, il pouvait être permis auparavant de regarder comme étranger l'un à l'autre, et de séparer par une cloison étanche, le domaine des calculs algébriques et celui de la trigonométrie, pareille attitude devenait insoutenable le jour où, par la théorie des dérivées, des liens directs se trouvèrent établis entre les deux domaines. On reconnut, par exemple que la fonction *arc sin x* doit être considérée comme la fonction primitive (2) de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; de même $\frac{1}{x}$ a pour fonction primitive $\log x$. Il

(1) Le calcul trigonométrique était déjà en usage chez les astronomes alexandrins. Il fut développé par les Arabes. Viète consacra à ce calcul un important ouvrage. Les bases du calcul des logarithmes furent posées dans l'ouvrage de Néper, publié à Edinburgh en 1614 : *Mirifici logarithmorum canonis recensio.*

(2) C'est-à-dire que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la dérivée de arc sin x.

y avait là une apparente anomalie qu'il était indispensable d'expliquer.

Aussi bien suffisait-il d'un peu de réflexion pour s'apercevoir que la difficulté rencontrée n'était pas nouvelle et que c'était, au fond, celle-là même qui avait tant occupé et troublé les géomètres grecs. La confrontation des fonctions algébriques et des fonctions non algébriques (*fonctions transcendantes*) soulève un problème de tous points comparable à celui qu'a posé, à son apparition, la théorie des nombres irrationnels. Or comment a-t-on résolu ce dernier problème ? En ayant recours aux méthodes du calcul approché, plus précisément en faisant appel à l'idée *d'approximation arbitrairement grande* ou de *convergence*. C'est cette idée qui est à la base du raisonnement par exhaustion tel que nous le trouvons dans les traités d'Euclide et d'Archimède. Chez les modernes, Viète a appliqué une méthode semblable (1) pour définir certains nombres par des expressions arithmétiques : ainsi il représente le nombre π par l'expression $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}}}$ ....., où une infinité de radicaux sont superposés (si l'on calcule cette expression, arrêtée successivement à son 2^{me}, 3^{me}, ..$n^{ème}$ radical, on a une valeur de π « de plus en plus approchée »). Vers la même époque, Bombelli de Bologne définissait des expressions convergentes d'un autre type (2) (1579) et, en 1655, Wallis, dans son *Arithmetica infinitorum*, faisait le premier une étude systématique des séries aritmétiques et autres expressions convergentes qui permettent de représenter des nombres irrationnels quel-

(1) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593.

(2) Expressions analogues à celles que nous appelons aujourd'hui *fractions continues*.

conques. Ainsi la voie que devaient suivre les fondateurs de la théorie des fonctions se trouvait ouverte. Pour surmonter une difficulté analogue à celle qu'avaient rencontrée les arithméticiens, ils n'avaient qu'à employer des procédés semblables.

De même, en effet qu'il est possible de représenter un nombre irrationnel par une expression arithmétique convergente, de même il est possible de représenter, avec une approximation arbitrairement grande, des fonctions telles que e^x, $\log x$, $\sin x$, par des expressions algébriques convergentes où entre une variable x. C'est ainsi qu'en 1668, Mercator (1), pour étudier les logarithmes népériens, utilisa la formule suivante ;

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots..$$

où le second membre est, pour toute valeur de x inférieure à 1, une série convergente.

Ce mode de définition des fonctions fut précisé et généralisé par Newton. Newton découvrit en effet, la forme du développement du binome $(1+x)^m$ pour une valeur quelconque (positive ou négative, rationnelle ou irrationnelle de l'exposant) (2) ; il obtint, d'autre part, le développement de la fonction *arc tang x*

$$\textit{arc tang}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots..$$

et de même celui de *arc sin x* : enfin, en trouvant le moyen d'*inverser* une série, Newton passa de ces développements, et de celui du logarithme, aux développe-

(1) *Logarithmotechnia sive Methodus constituendi logarithmos*, Londres, 1668.

(2) Exemple : $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, *ou* $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots..$

ments des fonctions e^x, sin x, tang x, etc. Par l'effet de ces découvertes la puissance de la méthode algébrique se trouva accrue dans des proportions que les plus hardis novateurs eussent été incapables de soupçonner avant la fin du XVII^e siècle. Au lieu de rester limitée, en effet — comme il semblait à première vue qu'elle dût l'être — à un champ restreint et fermé, celui des « fonctions algébriques », l'algèbre désormais, pouvait viser à étudier des relations fonctionnelles absolument quelconques : il suffisait qu'elle renonçât à en écrire la formule algébrique complète et se contentât d'en calculer une expression approchée, avec une « approximation arbitrairement grande ».

Telle est la constatation à laquelle conduisaient les travaux de Newton et qui devait exercer une influence prépondérante sur la marche de la science. N'est-ce point alors, demandera-t-on, que se produit cette brusque rupture avec le passé, qui aurait résulté, s'il faut en croire certains historiens, de la création du calcul infinitésimal ?

Newton, quant à lui, ne paraît pas avoir eu le sentiment qu'il allait changer la figure des mathématiques. Non seulement il adopta et mit à profit l'algèbre cartésienne ; mais respectueux de la tradition, il se référa également aux méthodes des géomètres grecs comme si ses propres méthodes eussent été la suite naturelle de celles-ci. Visiblement, d'ailleurs, Newton avait de la répugnance pour les notations et les vocables nouveaux que se plaisent à multiplier certains auteurs. Avant tout soucieux de précision et d'objectivité, le géomètre anglais se méfiait des généralisations trop hâtives. Tout autre était le tempérament de Leibniz, qui étudia en même temps que Newton (et tout d'abord indépendamment de lui) le problème de la définition des fonctions. Leibniz était, comme Descartes, un homme à système, un homme qui voyait grand. Aussi la portée lointaine des développements convergents ne pouvait-elle lui échapper. Il n'hésite pas à déclarer qu'une science nouvelle vient de voir le jour, et il tire argument de ce fait pour déprécier les études de son précurseur français (1). J'ai montré — écrit-il — combien la géométrie de M. Descartes est bornée. « Les problèmes les plus importants ne dépendent point des équations auxquelles se réduit toute la géométrie de M. Descartes ». « Je ne pouvais m'empêcher de rire quand je voyais qu'il [*Malebranche*] croit l'algèbre la plus grande et la plus sublime des sciences. » L'algèbre, en effet, c'est-à-dire la science cartésienne, diffère de la science leibnitienne (dont la méthode essentielle est la méthode du développement en série) (2) comme « l'analyse » de la « synthèse » (3).

La sévérité de ces jugements ne tire pas en elle-même à conséquence, et elle est naturelle de la part d'un novateur et d'un esprit tourné vers l'avenir plutôt que vers le passé. Mais la différence de nature que Leibniz croit discerner entre la méthode algébrique et la science synthétique serait, si elle était réelle, un fait objectif d'une importance capitale, qui effectivement nous obligerait à tracer une coupure dans l'histoire de la science aux environs de l'année 1680. L'assertion de Leibniz demande toutefois à être examinée de près en raison de

(1) Cf. Brunschvicg, *Les Etapes de la philosophie mathematique*, p. 133.

(2) « L'opération synthétique la plus générale — dit Couturat d'après Leibniz — consiste dans la formation d'une série au moyen d'une table ou d'une loi de formation connue » (L. Couturat, *La logique de Leibniz*, p. 270, F. Alcan).

(3) Cf. L. Couturat, *loc. cit.* p. 297.

l'équivoque qui n'a cessé de planer, depuis l'antiquité, sur la signification de ces deux mots si commodes, mais si obscurs, « analyse » et « synthèse ». Pour éviter de nous égarer, à notre tour, dans des confusions verbales, il convient ici d'ouvrir une parenthèse et d'indiquer, avec précision, dans quelle acception les savants du XVIIe siècle ont employé ces mots et quel sens nous voulons leur attacher nous-mêmes.

On sait que les Grecs distinguaient, en géométrie, plusieurs espèces d'*analyse*, qui constituaient des formes de démonstration ou des parties de raisonnements bien déterminées et très spéciales (1). Au XVIIe siècle, cependant, le mot « analyse » était d'ordinaire employé dans un sens beaucoup plus général. Consultons, par exemple, le *Cours mathématique* d'Hérigone (1635) ou le *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam (1691). Nous y voyons qu'*analyse*, ou *resolution*, est devenue synonyme de « méthode d'invention », tandis que la *synthèse* ou *composition* — étant ce qui s'oppose à l'analyse — est la « méthode de doctrine » ou « d'exposition ». Tel était du temps de Descartes, la signification correcte des mots *analyse* et *synthèse*, et c'est dans cette acception qu'il les prend le plus souvent. Ainsi Descartes nous dit dans un passage souvent cité, que les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de la synthèse dans leurs écrits, « non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais parce qu'ils en faisaient tant d'état qu'ils la réservaient pour eux seuls comme un secret d'importance » (2). En d'autres termes, la découverte était, pour les an-

(1) Voir plus haut, chapitre premier.

(2) *Réponses aux secondes objections faites contre les Méditations*, *Œuvres*, éd. Adam-Tannery, t. IX p. 121-122.

ciens comme pour les modernes, un travail d'analyse. Seulement — comme l'explique Ozanam dans son *Dictionnaire* — les anciens effectuaient l'analyse par la géométrie (1) tandis que les modernes l'opèrent par l'algèbre, et c'est pourquoi une association d'idée toute naturelle conduisit certains auteurs à regarder les termes *analyse* et *algèbre* comme strictement équivalents.

Vers la fin du XVII^e siècle, cette dernière acception du mot *analyse* était devenue courante. Newton, en particulier, la fit sienne et c'est ainsi qu'à l'arithmétique vulgaire, où le calcul se fait avec des nombres, il oppose l'*Analyse*, où le calcul se fait avec des lettres, c'est-à-dire l'Algèbre. Et lorsqu'il crée le calcul infinitésimal et le calcul des séries, il se borne (croit-il) à prolonger l'Algèbre, il institue une Algèbre ou « Analyse » perfectionnée : Quidquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id est possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiet ». De là le nom d'*Analyse infinitésimale*, consacré définitivement par Euler (2), qui s'est transmis jusqu'à nous, et qui signifie historiquement : *Algèbre de l'infini*.

Si le langage de Newton est, sur le point qui nous occupe, d'une clarté parfaite, il n'en est pas de même de celui de Leibniz, et de là vient que nous éprouvons une certaine difficulté à saisir exactement la pensée de ce dernier. L'une de ses idées favorites est que le nouveau calcul doit être regardé comme une *synthèse*, une *combinatoire* (*combinatoria*). Mais pourquoi, dans certains écrits, oppose-t-il radicalement la synthèse ainsi entendue à la mathématique cartésienne, et comment est-il

(1) Dans le *Discours sur la méthode*, Descartes emploie l'expression « Analyse des anciens » dans le sens de « géométrie ».
(2) Dans son *Introductio in Analysin infinitorum*, 1748.

conduit à établir cette sorte de proportion que nous indiquions tout à l'heure : « la synthèse (ou la combinatoire) est à l'analyse ce que l'algèbre est au calcul de l'infini » ? On s'explique d'autant moins cette manière de voir qu'un bon nombre d'assertions de Leibniz paraissent la contredire. Il lui arrive d'appeler l'algèbre élémentaire une « synthèse » (1) ou de déclarer que les fondements de l'algèbre se trouvent dans la combinatoire (2). Un jour il nous déclare que la méthode des anciens était la synthèse et que l'on n'a pas réussi à changer cette méthode en analyse (3), et, ce jour-là, il prend manifestement « analyse » dans le sens pur et simple de « méthode d'invention » comme il le fait quand il écrit à Tschirnhaus (4). « Il s'en faut beaucoup que [*Malebranche*] ait pénétré bien avant dans l'analyse et généralement dans l'art d'inventer ». Mais ailleurs c'est la combinatoire qui devient le véritable art d'inventer. Ainsi (5) la pensée de Leibniz paraît avoir oscillé entre des conceptions différentes (6).

Pourtant, entre tous ses contemporains, c'est Leibniz qui a vu juste lorsqu'il a reconnu que sa méthode mathématique présentait tous les caractères d'une synthèse.

(1) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, éd. Couturat p. 558 : Algebra qua scilicet cognitum pro cognito sumimus, est synthesis quædam...

(2) *Ibid.* p. 560 : Imo ipsa fundamenta Algebræ per Combinatoriam sunt constituta.

(3) *Projet d'un art d'inventer*; *Ibid.* p. 181.

(4) *Briefwechsel mit Mathematikern*, éd. Gerhard, t. I, 1899. p. 465. Cf. Brunschvicg, *loc. cit.* p. 132.

(5) On sait que l'on relève des oscillations semblables dans les appréciations émises par Leibniz sur les rapports de la logique et des mathématiques.

(6) Cf. L. Couturat, *La logique de Leibniz*, 1901, p. 295.

Cette méthode est, en effet, un calcul, donc une combinaison de signes : elle consiste à partir d'éléments simples pour les assembler et en former des composés de plus en plus compliqués (1). Mais il en était exactement de même de l'algèbre cartésienne, et si Descartes avait fait usage du mot « synthèse » dans le sens que lui a donné Leibniz, nul doute qu'il n'eût reconnu lui-même le caractère synthétique de sa méthode. Descartes eût fait, il est vrai, cette restriction que la synthèse doit toujours être précédée d'une analyse. Avant de combiner les éléments ou « idées » simples, il faut, comme nous l'avons vu, commencer par les dégager (2). Mais, cette opération préliminaire une fois accomplie — et Descartes la croyait terminée pour l'algèbre — la science se réduira à un travail de combinaison mécanique, elle deviendra purement synthétique (3).

Ainsi il nous apparait que l'opposition établie par Leibniz entre son œuvre et celle de Descartes réside en partie dans les mots. Ces deux œuvres, en réalité pro-

(1) Methodus vero synthetica est cum a simplicioribus notionibus progredimur ad composita. Cf. L. Couturat, *loc. cit.* p. 179.

(2) Cf. *infra*, chapitre III.

(3) Observons que, s'il est difficile de déterminer la signification mathématique exacte des termes *analyse* et *synthèse*, ces mots sont encore plus ambigus lorsqu'ils sont pris dans leur acception métaphysique. Ainsi, dans ses *Réponses aux secondes Objections faites contre les Méditations* (*Œuv.*, éd. Adam-Tannery, t. IX, p. 121-122), Descartes déclare que « l'analyse fait voir comment les effets dépendent des causes », tandis que « la synthèse examine les causes par leurs effets ». Mais il se reprend aussitôt pour dire de la synthèse : « bien que la preuve qu'elle contient soit souvent aussi des effets par les causes ». Leibniz, d'autre part, s'exprime aussi, dans un fragment qu'a publié L. Couturat (*Opusc. et fragm. inéd. de Leibniz* p. 513) : « Methodus combinatoria est a causis ad effectus, seu a mediis ad finem, seu a re ad rei usum. Analytica ab effectu ad causam, a fine ad media ».

cèdent d'une même conception — la conception synthétiste de la science. Quels sont donc exactement les caractères qui les distinguent l'une de l'autre ?

C'est ici qu'il faut se garder de confondre les vues philosophiques des deux penseurs avec leurs idées proprement mathématiques. Sur la nature et l'objectivité des notions scientifiques, sur les principes du mécanisme et de la physique, sur les conditions de la connaissance mathématique et sur le rôle de l'intuition (nous reviendrons plus loin sur ce dernier point), Descartes et Leibniz ont des doctrines différentes. Mais ces doctrines — qui dépassent infiniment le champ où se meut la Mathématique du XVII[e] siècle et même celle de notre temps — n'ont point exercé d'influence directe sur la construction de leurs systèmes algébriques. Ces systèmes se distinguent surtout par cette circonstance que l'un effectue sur des combinaisons infinies ce que l'autre fait sur le fini. Or, est-ce là, du point de vue technique, une différence essentielle ?

Comme l'algèbre cartésienne, celle de Leibniz s'appuie sur la représentation géométrique des fonctions par rapport à des axes de coordonnées (1) ; l'une et l'autre pratiquent les mêmes opérations et ramènent l'étude des problèmes à la résolution de certaines équations ; l'une et l'autre procèdent en combinant des signes algébriques et ont par conséquent pour base un système d'écriture symbolique. Ce dernier caractère de l'algebre a surtout

(1) Leibniz a signalé lui-même l'influence qu'avait exercée sur son esprit la lecture de la *Géométrie* de Descartes (en même temps que la lecture de Pascal) au moment où son attention fut portée sur le ***triangle caracteristique*** relatif à la tangente a une courbe (Voir plus haut, p. 115).

été mis en évidence par Leibniz, qui, dans sa jeunesse, avait conçu le plan de généraliser le symbolisme mathématique jusqu'à en faire une *caractéristique universelle*; mais Leibniz, en cela, ne faisait que suivre la voie où conduisaient directement les conceptions cartésiennes.

On peut, il est vrai, opposer l'algèbre du fini et celle de l'infini en soutenant que cette dernière est liée à une conception en quelque sorte dynamiste des Mathématiques; elle étudie — dira-t-on — des notions qui n'existent qu'en puissance et non actuellement; elle repose sur cette idée que l'aboutissement d'un processus indéfini, le résultat d'une opération qui n'est jamais achevée, peut-être regardé comme une réalité mathématique. Nous dirons plus loin en quel sens ces remarques nous paraissent fondées (1). Nous croyons cependant que pour les créateurs de la théorie des *séries*, elles n'ont d'autre valeur que celle d'un rapprochement. Le calcul des séries n'est pas — au point de vue technique — d'une autre nature que le calcul algébrique élémentaire; seulement il ne nous conduit pas directement au but parce qu'il ne nous donne ce que nous cherchons que d'une manière approchée. Or l'idée d'approximation — presque aussi vieille, nous l'avons rappelé, que la géométrie et l'arithmétique grecques — n'a rien à voir avec le dynamisme. A moins, toutefois, que l'on ne veuille admettre que l'existence du fait mathématique obtenu par approximation est le résultat de cette approximation même. Mais c'est là une vue que Leibniz lui-même n'eût pas adoptée et qui, d'ailleurs, est d'ordre purement métaphysique. Le problème de l'existence des notions de l'Analyse — et spécialement des *fonctions* — ne pou-

(1) *Infra*, chapitre III.

vait se poser en ces termes à la fin du XVII[e] siècle, puisque les fonctions étudiées se rattachaient directement à des questions mécaniques concrètes. Au surplus, il est probable qu'aucun mathématicien ne s'est jamais laissé inspirer, dans ses recherches techniques, par une idée semblable.

En résumé, c'est Newton qui était dans le vrai — croyons-nous — lorsqu'il a vu dans l'algèbre (analyse) de l'infini telle qu'on la concevait à son époque (c'est-à-dire en tant que méthode de calcul) une suite de l'algèbre du fini. Euler, au XVIII[e] siècle, a adopté le même point de vue. Et Lagrange, dans sa *Théorie des fonctions analytiques,* affirme d'une manière très nette que l'Analyse n'est qu'une généralisation de l'algèbre élémentaire. « On appelle, dit-il (1), fonction d'une ou plusieurs quantités toute *expression* de *calcul* dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque. Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. » « Les (2) fonctions représentent les différentes *opérations* qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche et elles ne sont, proprement que le dernier résultat de ce calcul. »

En d'autres termes, l'Analyse est un calcul comme l'algèbre, et la fonction — qu'elle soit algébrique ou transcendante — est le résultat d'une combinaison d'opérations. « La principale différence des fonctions — a

(1) *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1798, p. 1-2.

(2) *Leçons sur le calcul des fonctions*, 1806, apud *Journ. de l'Ec. polytechn.* 12[e] cahier, p. 4.

écrit Euler (1) — consiste dans la combinaison de la variable et des quantités constantes qui la composent. » Et, précise-t-il, le calcul des fonctions transcendantes se distingue du calcul algébrique parce qu'il répète une infinité de fois les combinaisons de ce dernier. »

(1) *Introductio in Analysin infinitorum*, 1748. Préface.

CHAPITRE III

L'APOGÉE ET LE DÉCLIN DE LA CONCEPTION SYNTHÉTISTE

I. — La synthèse algébrico-logique.

Nous avons cherché à déterminer, au début du chapitre qui précède, les caractères propres à la méthode algébrique. Nous avons indiqué ensuite comment cette méthode s'est développée au xvii^e siècle, dans le domaine du fini d'abord, puis dans celui de l'infini. Après Descartes, après Newton et Leibniz, l'algèbre avait définitivement affirmé sa puissance et pendant un siècle et demi nous la voyons régner en maîtresse absolue sur la science mathématique tout entière.

Au xviii^e siècle, sans doute, les problèmes de la mécanique et de la physique mathématique commencent à occuper une place importante dans les études des savants. Mais c'est par l'algèbre que ces problèmes sont traités, et l'algèbre, clef de nos connaissances les plus précieuses, continue à être regardée comme la science par excellence. Voici, par exemple, comment Laplace définit, dans son *Système du monde* (1), le rôle que les mathématiciens de son

(1) *Exposition du système du monde*, 1799, liv. V, chap. V. C'est en parlant de Newton que Laplace est conduit à ces réflexions.

siècle attribuaient à la méthode algébrique : « L'analyse algébrique — dit-il — nous fait bientôt oublier l'objet principal [*de nos recherches*] pour nous occuper de combinaisons abstraites, et ce n'est qu'à la fin qu'elle nous y ramène. Mais, en s'abandonnant aux opérations de l'analyse, on est conduit par la généralité de cette méthode et l'inestimable avantage de transformer les raisonnements en procédés mécaniques à des résultats souvent inaccessibles à la synthèse [*géométrique*]. Telle est la fécondité de l'Analyse qu'il suffit de traduire dans cette langue universelle les vérités particulières pour voir sortir de leurs seules expressions une foule de vérités nouvelles et inattendues. Aucune langue n'est autant susceptible de l'élégance qui nait d'une longue suite d'expressions enchaînées les unes aux autres et découlant toutes d'une même idée fondamentale. Aussi les géomètres de ce siècle, convaincus de sa supériorité, se sont principalement appliqués à étendre son domaine et à reculer ses bornes ».

A cela près que Laplace appelle « analyse » ce que nous avons appelé « synthèse, on reconnait, dans cette description du rôle de l'algèbre au XVIII^e^ siècle, les traits distinctifs que nous avons déjà relevés dans l'algèbre primitive : emploi de procédés mécaniques, institution d'une langue symbolique universelle, progrès indéfini réalisé en formant des expressions de plus en plus compliquées, qui se laissent déduire les unes des autres comme une chaine que l'on déroule.

Les résultats obtenus par les algébristes du XVIII^e^ siècle étaient bien propres à justifier la robuste confiance qu'avaient ces savants en l'excellence de leur méthode. L'algèbre élémentaire — sortie de la période des tâtonnements — avait clairement reconnu l'étendue exacte de son pouvoir, et avait fixé ses procédés. Le calcul des dérivées et des intégrales, le calcul des séries, avaient été codifiés et formaient désormais un ensemble aussi bien ordonné et aussi précis que l'algèbre proprement dite. La géométrie cartésienne, en perfectionnant de plus en plus son mécanisme, avait décidément supplanté les méthodes grecques de démonstration. La mécanique s'était constituée en science analytique en prenant modèle sur la géométrie.

Là même où les calculs algébriques paraissaient devoir céder le pas à d'autres procédés, c'étaient encore l'esprit et le point de vue de l'algèbre qui dirigeaient la pensée des mathématiciens. Nous pouvons nous en rendre compte en considérant l'histoire de la géométrie, laquelle se trouve être à ce point de vue particulièrement instructive.

On sait que, malgré le triomphe de la méthode cartésienne, une réaction se produisit, chez certains mathématiciens contre la réduction — poussée trop loin à leur gré — de la géométrie à l'algèbre. Pour instituer en géométrie une méthode de découverte plus rapide et plus puissante que celle des Grecs, il n'était ni nécessaire ni avantageux — pensaient ces savants — de toujours avoir recours au calcul ; des considérations purement géométriques pouvaient conduire, plus directement que l'algèbre, à des résultats aussi remarquables. Déjà au XVII[e] siècle, Desargues avait conçu une méthode — fondée sur la transformation des figures par projection — qui lui avait permis de fonder (1) une théorie générale des sections coniques ayant un caractère géométrique. Pascal, dans ses premières études sur les coniques (2),

(1) Principalement dans le *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*, 1639.

(2) Etudes inachevées qui conduisirent Pascal aux théorèmes exposés dans son *Essai pour les coniques*, 1640.

avait appliqué la même méthode et ses travaux attirèrent tout spécialement — trente ans plus tard — l'attention de Leibniz. « Souvent — dit Leibniz dans son *Projet d'un art d'inventer* — les géomètres peuvent démontrer en peu de mots ce qui est fort long par la voie du calcul ;.. la voie de l'algèbre est assurée, mais elle n'est pas la meilleure » (1).

Cependant, les succès remportés par l'algèbre cartésienne eurent pour effet de reléguer provisoirement dans l'ombre et de faire délaisser pendant près d'un siècle les méthodes non-algébriques. Et c'est pourquoi la théorie inaugurée par Desargues et Pascal ne fut reprise et développée qu'au commencement du XIXe siècle, — à la suite des travaux de Gaspard Monge, créateur de la géométrie descriptive. Dans son célèbre *Traité des propriétés projectives des figures* (2), Poncelet, élève de Monge, fait ressortir l'infériorité des méthodes géométriques classiquées par rapport à la méthode algébrique. « Tandis — écrit-il — que la géométrie analytique offre, par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent... tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est sans bornes, l'autre procède au hasard ; sa marche dépend tout à fait de la sagacité de celui qui l'emploie et ses résultats sont presque toujours bornés à l'état particulier de la figure que l'on considère ». Poncelet se propose de remédier à « ce défaut de généralité et d'extension de la géométrie ordinaire » et de créer une méthode de géométrie pure qui puisse rivaliser avec l'« Analyse géométrique ». Cette méthode est

(1) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, éd. Couturat, p. 181.
(2) Traité composé en grande partie pendant la campagne de Russie et publié en 1822.

principalement fondée sur deux principes déjà pressentis par Monge, le principe de *continuité* et le principe de *projection*.

On comprendra la nature et la portée de ces deux principes en voyant en quels termes Poncelet nous donne la définition générale du premier. « Considérons — dit-il — (1) une figure quelconque, dans une position générale, et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système (constitué par la figure aux termes de sa définition) ; supposons que, d'après ces données, on ait trouvé une ou plusieurs relations ou propriétés, soit métriques, soit descriptives, appartenant à la figure. N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier la figure primitive par degrès insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations trouvées pour le premier système demeureront applicables aux états successifs de ce système ? »

A lire ces considérations on devine sans peine ce qu'est devenue la géométrie préconisée par Poncelet. C'était, au fond, une algèbre déguisée. En effet, Poncelet et ses continuateurs font totalement abstraction de la « figure » en géométrie pour ne considérer que des lois, des conditions, des liaisons ; sous le nom de *continuité*, ils introduisent les notions de *variable* et de *fonction* ; enfin l'application de leurs principes les conduit à placer à la base de l'édifice géométrique une étude générale des tranformations des figures, qui est en somme l'étude de certaines fonctions. Aussi n'est-il pas surprenant que la

(1) *Loc. cit.* p. 28.

nouvelle géométrie — développée (en Allemagne notamment) sous le nom de *géométrie synthétique* pendant la première moitié du XIX^e siècle — ait finalement trouvé avantage à s'exprimer dans la langue du calcul et soit devenue aussi algébrique que la géométrie cartésienne.

Mais, ce qu'il est intéressant de remarquer, c'est que, sous sa forme primitive, et alors même qu'elle restait purement géométrique, la méthode de Desargues, de Monge et de Poncelet, méthode de synthèse, de combinaison et de généralisation, méthode à marche régulière où rien (selon Poncelet) ne devait plus être laissé au hasard, était au fond la méthode même de l'algèbre, appliquée à un objet autre que le calcul.

Aussi bien était-il évident *a priori* que le champ d'application de la méthode synthétique pratiquée par les algébristes dépassait infiniment le cadre du calcul classique. Les procédés que l'on avait employés pour combiner les opérations de l'arithmétique devaient permettre de combiner et d'étudier semblablement, soit des déplacements ou des transformations géométriques, soit même des composés ou des groupements d'autre nature, formés avec les éléments les plus divers. C'est ce que Leibniz avait bien pressenti lorsque, dans sa jeunesse, il rêvait de constituer une *Combinatoire* générale, c'est-à-dire une science qui, au moyen d'un symbolisme opératoire approprié (*caractéristique universelle*), étudierait l'ensemble des combinaisons auxquelles peuvent donner lieu les quantités, les figures, et, en général, toutes les notions mathématiques ou logiques. Cette science, « dont ce que nous appelons l'Algèbre ou l'Analyse n'est qu'une branche fort petite » (1) ne serait limitée dans

(1) *De la méthode de l'universalité*, apud *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, p. 98.

son pouvoir de construction arbitraire, que par la nécessité d'obéir aux règles de la logique formelle. Pour la distinguer du calcul spécial auquel le nom de *combinatoire* est resté attaché, on pourrait la nommer « *synthèse algébrico-logique* ».

Quelles sont, dans le domaine des Mathématiques, les applications possibles de la synthèse algébrico-logique ? Elles sont fort nombreuses et on les rencontre au seuil même du calcul algébrique moderne.

On peut dire (1) que l'algèbre élémentaire est l'étude de certaines combinaisons formées avec des nombres arithmétiques tels que 1, 2, 3, ... et avec des lettres représentant des nombres relatifs (positifs ou négatifs), nombres et lettres étant reliés par certains signes opératoires déterminés, tels que +, —, × (ce dernier souvent sous-entendu) ou par les signes *log*, *sin*, *cos*, etc., qui indiquent une correspondance fonctionnelle rigoureusement définie. Cela étant, nous sommes naturellement portés à imaginer de nouveaux groupements de nombres — nombres arithmétiques ou nombres représentés par des lettres —, et à créer des symboles inédits pour désigner ces groupements dans l'écriture algébrique. En usant de cette faculté, nous pouvons obtenir de nouvelles *expressions*, qui donneront matière à des calculs variés.

L'algèbre s'est ainsi enrichie, depuis le XVII^e siècle, de deux sortes d'expressions. Les unes ne sont nouvelles que par la forme qui leur est donnée : ces expressions pourraient être définies au moyen des algorithmes de l'algèbre élémentaire, mais il est avantageux d'adopter, pour les représenter, un symbolisme nouveau, permettant d'abréger l'écriture et révélant le secret de leur composition. Les expressions de la seconde sorte, ou bien

(1) Cf. *supra*, page 119.

sont de pures fictions introduites pour des raisons de commodité, ou du moins représentant des grandeurs et combinaisons de grandeurs sur lesquelles l'algèbre classique n'aurait pas de prise.

Comme exemple d'expression de la première sorte, nous pouvons citer le *déterminant* (1), dont Leibniz (2) avait déjà entrevu la définition, et qui fut introduit en algèbre par Gabriel Cramer en 1750 (3). Il n'y a, dans le déterminant, d'autre élément nouveau qu'un certain symbolisme particulièrement heureux. Ce symbolisme ne rend pas seulement les calculs faciles et rapides ; il permet aussi de deviner, avant que les calculs soient achevés, certains caractères intéressants des résultats. La raison en est que le symbole du déterminant met et maintient en évidence la composition des nombres qu'il sert à représenter. De même que l'algèbre élémentaire n'effectue pas, d'ordinaire, les opérations simples (additions, multiplications ou divisions), afin d'avoir à sa disposition des expressions immédiatement démontables (4), de même la théorie des déterminants a affaire à certains groupements remarquables d'opérations simples qu'il vaut mieux ne pas résoudre en leurs parties, parce que c'est la structure de ces groupements qui nous

(1) Rappelons que le déterminant du second ordre $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est défini comme étant égal à $ad - bc$; le déterminant du troisième ordre $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}$ est défini comme étant égal à

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

(2) Cf une lettre de Leibniz à l'Hospital (*Acta Eruditorum*, Leipzig, 1700).

(3) Dans l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, Genève, 1750.

(4) Cf. *supra*, chap. II, § 1.

intéresse, et non les résultats des opérations qui y entrent. Le symbolisme qu'introduit la théorie a été construit en conséquence. Il nous permet de traiter les déterminants, tels que $\begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix}$, comme autant de blocs ou d'éléments unitaires, sur lesquels on calcule suivant certaines règles déterminées.

Quant aux expressions de la seconde sorte, et qui correspondent à des notions étrangères à l'algèbre élémentaire, elles se rencontrent principalement dans la théorie des quantités imaginaires. Pour obtenir cette théorie, on introduit, comme on sait, un symbole i dont le carré est par définition égal à — 1 et auquel on convient, d'ailleurs, d'appliquer, sans modification, toutes les règles de calcul auxquelles sont soumis les signes littéraux ordinaires de l'algèbre. Combinant, alors, le symbole i avec des nombres ou des quantités algébriques quelconques, on obtient des expressions, qui ne représentent aucune grandeur ni aucun résultat d'opérations réelles, mais qui ont — formellement — une structure analogue à celle des véritables expressions algébriques.

On sait après quelles hésitations les mathématiciens se décidèrent à reconnaître la légitimité du calcul ainsi défini. Bien que l'utilité de ce calcul fût apparue dès le XVe siècle (1) et que certains novateurs, notamment Albert Girard, en 1629 (2), n'eussent pas craint d'en faire un usage un peu imprudent pour leur temps, la notion d'imaginaire continua pendant longtemps à étonner les mathématiciens (qui ne s'attendaient pas à la trouver si féconde) et à inquiéter les philosophes. Il suffit, cependant, de rapporter l'algèbre imaginaire à sa véritable ori-

(1) Par exemple, à Nicolas Chuquet et à Luca Paciuolo.
(2) *Invention nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam, 1629.

gine pour que le mystère dont elle fut tout d'abord enveloppée, et le caractère révolutionnaire que certains lui ont attribué, s'évanouissent entièrement. Le calcul dit « imaginaire » est une application directe de la méthode synthétique algébrico-logique et il est, de plus, une condition indispensable du succès de cette méthode dans le domaine même de l'algèbre élémentaire.

En effet, nous avons vu que l'un des traits essentiels de la méthode algébrique est le caractère formel et mécanique du travail de combinaison auquel elle donne lieu. Le mathématicien, lorsqu'il opère sur les nombres et signes algébriques, fait abstraction de la signification de ces signes pour ne s'intéresser qu'à leur assemblement. Or, ce faisant, il se heurte à un écueil : il se trouve amené, en effet, à former des expressions — celles où entrent des racines carrées — qui n'ont pas toujours un sens réel (1); sans que rien soit changé à la composition et au mécanisme des opérations qui les définissent, ces expressions tantôt représentent de véritables grandeurs, tantôt n'en représentent point. Il s'ensuit que l'algébriste doit choisir entre deux partis : ou bien il s'astreindra à traduire en langage arithmétique ou géométrique la série entière de ses calculs afin d'être sûr que ceux-ci ne cessent jamais d'avoir un sens, — et alors il perd tout le bénéfice de la méthode algébrique et en violera le principe fondamental; ou bien il se résignera à raisonner sur des formules qui eussent été des non-sens pour le géomètre grec.

Entre ces deux partis, le mathématicien de l'école synthétiste ne saurait hésiter. Il opte pour le second et entre dans la voie du calcul imaginaire. Or qu'arrive-

(1) La racine carrée ne représente une grandeur réelle que si la quantité sous le radical est positive ou nulle.

t-il ? Si l'on convient que les signes littéraux de l'algèbre tels que a, b, c, ... x, y, ... représentent tous sans exception des *nombres complexes* (1) de la forme $\alpha + \beta i$, où α et β sont des nombres réels, positifs ou négatifs, et i un symbole auquel on donne pour carré -1, il se trouve que toutes les combinaisons algébriques formées avec ces signes représentent elles-mêmes des nombres de la forme $\alpha + \beta i$. Ainsi, lorsqu'on effectue sur les nombres $\alpha + \beta i$ des opérations quelconques, on ne sort jamais du système de ces nombres. En d'autres termes, il suffit d'adjoindre aux quantités algébriques ordinaires, le seul nombre fictif i, pour que tous les calculs de l'algèbre deviennent légitimes dans tous les cas, et pour que l'on puisse par conséquent effectuer sans réserve toutes les combinaisons algébriques imaginables en faisant totalement abstraction des objets — réels ou fictifs — que représentent celles-ci.

Voilà, exactement, ce qu'il y a au fond de l'algèbre imaginaire : aucune notion mystérieuse, mais simplement une propriété générale des composés qui résultent de la combinaison formelle des opérations algébriques.

Nous n'avons envisagé ci-dessus que des expressions (ou combinaisons de signes) isolées. Or l'algébriste a souvent l'occasion d'étudier simultanément plusieurs expressions différentes, associées suivant certaines règles. Comment pourra-t-il utiliser à cet effet la méthode algébrico-logique ?

Une « expression algébrique » exprime, comme on sait, une correspondance fonctionnelle établie entre

(1) Imaginaires, en général du moins. Dans le cas particulier où $\beta = 0$, le nombre $\alpha + \beta i$ devient réel.

quantités variables ; mais on peut aussi la regarder comme l'indication d'une opération. Soit, par exemple, $f(x, y, z)$ l'expression d'une fonction des quantités x, y, z. Posant $u = f(x, y, z)$, nous dirons que le nombre *u est le résultat d'une opération* (1) effectuée sur les nombres (indéterminés) x, y, z. Cette « opération » qui peut être, mais qui peut aussi ne pas être, une combinaison d'opérations arithmétiques élémentaires, est entièrement définie, quant à ses effets, lorsque la fonction f est connue. Ainsi nous pourrons regarder une fonction quelconque comme définissant un mécanisme opératoire.

Grâce à cette extension du sens primitif du mot « opération », il sera possible de formuler très simplement les questions relatives aux combinaisons formées d'expressions algébriques. Il s'agit de déterminer l'effet de plusieurs mécanismes opératoires, dont les actions se groupent et se combinent de telles manières qu'on voudra. Pour faire cette étude, l'algébriste considère les *opérations* comme des unités, comme des éléments simples, et il fait abstraction de leur structure, de même que, en étudiant les *expressions*, il a fait abstraction de la valeur numérique des lettres assemblées. Et ainsi s'ouvre un nouveau chapitre de la science combinatoire : l'algèbre des opérations, qui a ses définitions, ses notations, ses formules propres.

La branche la plus importante de cette algèbre est la *théorie des substitutions* et des *groupes de substitutions*, théorie dont l'exposé systématique fut fait au XIXᵉ siècle par Serret et par Jordan, mais dont les bases étaient déjà

(1) Au lieu du mot *opération*, on emploie aussi le mot *transformation*.

posées à la fin du 18e siècle (1). Appelons substitution et désignons par une lettre telle que (S), (T), ... l'opération consistant à changer une quantité (indéterminée) x en $f(x)$ [$f(x)$ étant une certaine fonction de x]. Autant de fonctions $f(x)$, autant de substitutions. Or on peut considérer la substitution obtenue en opérant successivement une substitution (S), puis une substitution (T) comme constituant le *produit* de ces deux substitutions. D'une manière analogue, on peut définir les *puissances* positives ou négatives d'une substitution. On envisage, d'autre part, certains ensembles remarquables de substitutions que l'on appelle *groupes*. L'étude de ces groupes et l'ensemble des calculs auxquels ils donnent lieu, forme une algèbre spéciale que l'on peut rendre entièrement indépendante de la définition quantitative des substitutions par des fonctions, et qui a été utilisée avec grand profit dans des ordres de recherches extrêmement variés.

Arrêterons-nous là notre revue des applications mathématiques de la synthèse algébrico-logique ? Les grandeurs et les opérations sont-elles les seuls éléments mathématiques que l'on puisse grouper et combiner ? Non, certes. Il est autre chose qui est continuellement objet de combinaison dans le système des mathématiques, comme d'ailleurs dans toutes les sciences fondées sur le raisonnement : c'est la proposition, — la proposition logique, — soit que celle-ci formule une définition, soit qu'elle énonce un axiome ou un théorème. Toute notion secondaire nouvelle est obtenue par combinaison des notions premières fournies par les définitions. Tout

(1) La notion de groupe fut mise à profit par Cauchy dans les premières année du XIXe siècle. C'est sur elle que reposent, d'autre part, les travaux de Galois (1811-1832) relatifs aux racines des équation algébriques.

théorème nouveau est démontré par combinaison des axiomes et des théorèmes déjà acquis. L'édifice mathématique construit à l'époque d'Euclide, — agrandi depuis lors, et flanqué de nouvelles annexes — se présente en somme à nous comme le résultat d'une vaste synthèse logique effectuée sur des propositions.

Qu'est-ce qui nous empêche dès lors d'appliquer à cette synthèse une méthode analogue à celle de l'algèbre ? Partant des propositions les plus simples, nous en étudierons *a priori* les combinaisons en faisant abstraction de leur contenu ; nous comparerons ces combinaisons, nous apprendrons à reconnaître dans quels cas elles sont équivalentes, dans quels cas elles sont compatibles (1) ou incompatibles, nous les *transformerons* les unes dans les autres.

La science des propositions ainsi étendue a permis de consolider et de perfectionner sur de nombreux points l'édifice euclidien. C'est grâce à elle que l'on a pu surmonter — ou à peu près — les difficultés relatives aux définitions ou axiomes, qui si longtemps embarrassèrent les géomètres.

Le but à atteindre est le suivant : construire l'édifice mathématique en partant de postulats aussi simples et, surtout, aussi peu nombreux que possibles. Or, lorsque nous établissons la suite des théorèmes, il se trouve qu'en fait nous nous appuyons à maintes reprises sur des vérités indémontrées qui sont de nature intuitive. Ces vérités sont-elles des conséquences logiques des postulats simples dont la liste est donnée au début de la science (en ce cas elles sont démontrables et il convient

(1) Ou, plus généralement, dans quel cas une proposition quelconque est ou non compatible avec un groupe donné de propositions simultanées, c'est-à-dire vraies en même temps.

d'en formuler la démonstration), ou sont-elles *indépendantes* de ces postulats (auquel cas elles constituent des postulats nouveaux que l'on doit ajouter à la liste)?

Telle est la délicate question que l'étude logique des combinaisons de postulats a permis d'approfondir au cours du XIXᵉ siècle, spécialement pour ce qui regarde la géométrie. En la résolvant, on n'a pas seulement mis en évidence les différentes formes qu'il est possible de donner au système de la géométrie classique : mais on a reconnu en même temps la possibilité de construire un grand nombre d'autres géométries, qui ne satisfont pas aux mêmes postulats que la nôtre, mais qui sont, au regard de la logique, tout aussi légitimes.

Ces résultats apparaissent clairement dans l'un des ouvrages les plus importants qui aient été consacrés à la question des postulats géométriques, les *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert (1).

Hilbert énonce et classe les axiomes de la géométrie d'une manière nouvelle en les répartissant entre cinq groupes. Il montre ensuite comment sur chacun de ces cinq groupes d'axiomes, et sur leurs combinaisons, on peut fonder une série de géométries hiérarchiquement organisées. Notre géométrie classique est celle qui satisfait à la totalité des axiomes énoncés; pour chacune des autres (que l'on nomme *géométrie partielle*), une partie seulement de ces axiomes seront vérifiés.

Ainsi se trouvent définitivement élucidées, en particulier, les questions qu'avait fait naître, à son apparition, la « géométrie non-euclidienne. »

On sait que pendant des siècles les géomètres s'étaient en vain appliqués à *démontrer* logiquement la proposition qui fait l'objet du cinquième Postulat d'Euclide :

(1) 1899; 3ᵉ éd. 1909.

« Si deux droites d'un plan forment avec une troisième droite de ce plan, et du même côté de celle-ci, deux angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droites, ces deux droites, prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits » (ce qui revient à dire — si l'on tient compte des autres postulats et axiomes — que « par un point extérieur à une droite donnée on peut mener une seule parallèle à cette droite »). Or, non seulement, les efforts des géomètres n'avaient pas abouti, mais Saccheri (1) avait établi (vers 1730) — sans d'ailleurs se rendre bien compte de la conclusion qui résultait de ses recherches — qu'à supposer rejeté le cinquième Postulat, on pouvait néanmoins déduire des autres hypothèses euclidiennes une longue suite de théorèmes rigoureusement enchaînés et exempts de toute contradiction. Tel est le fait dont, vers 1830, Lobatscheffsky et Bolyai (2) prouvèrent sans contestation possible la réalité, et qui leur permit de fonder une nouvelle géométrie dans laquelle on peut mener par un point plusieurs parallèles à une même droite. Voilà qui bouleversait, semble-t-il, toutes les idées reçues en géométrie. Pourtant les deux novateurs, en considérant qu'une science construite suivant les règles de la construction logique est nécessairement légitime, ne faisaient que tirer les conséquences naturelles de la théorie synthétiste des mathématiques. Ils avaient créé la première et la plus simple des *géométries partielles*. Riemann, en 1854, en créa une seconde (3)

(1) Dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Milan, 1733.

(2) Lobattscheffsky dans un mémoire présenté à l'université de Kazan en 1826, Bolyai dans un ouvrage publié en 1832.

(3) Il en exposa les principes dans sa thèse de l'université de Göttingen : *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen.*

en rayant des axiomes de la géométrie, non seulement le cinquième postulat d'Euclide, mais aussi certains axiomes relatifs aux lignes droites (dans la géométrie de Riemann, les lignes droites ne sont pas indéfiniment prolongeables et se coupent toutes entre elles, en sorte qu'il n'existe pas de droites parallèles) (1).

Après avoir déterminé les relations logiques qui lient les postulats et la géométrie et étudié les différentes combinaisons que l'on en peut former, il était naturel de soumettre à une investigation analogue les notions premières, objets des définitions de la science mathématique, et notamment les notions fondamentales de nombre, de grandeur et de quantité.

La difficulté que l'on éprouve à donner une définition arithmétique satisfaisante des nombres irrationnels et des opérations relatives à ces nombres avait été, nous l'avons rappelé, l'une des pierres d'achoppement de la mathématique hellénique. Aussi les modernes ont-ils dû chercher de nouveaux moyens de surmonter cette difficulté. Leurs efforts ont principalement tendu à dégager, sous une forme aussi simple que possible, les postulats grâce auxquels on peut déduire la notion de nombre irrationnel de celle de nombre entier. Certains d'entre eux espéraient ainsi réaliser cette unification des mathématiques, que l'on a parfois appelée « arithmétisation de l'analyse », et qui permettrait de faire découler toutes les

(1) Comme exemple remarquable de « géométrie partielle », citons également la géométrie *non archimédienne* qui a fait l'objet d'études intéressantes. Cette géométrie écarte le postulat dit « d'Archimède » d'après lequel étant donné deux grandeurs de même espèce, il existe toujours deux multiples de la plus petite telle que la plus grande soit comprise entre ces deux multiples.

théories algébriques de l'arithmétique des nombres entiers.

On sait que la tentative faite en ce sens par certains analystes a donné naissance à une doctine philosophique (soutenue par Renouvier) dans laquelle le nombre est considéré comme la réalité primordiale sur laquelle repose l'édifice mathématique. La conception qui inspire cette doctrine est toutefois restée étrangère aux principaux mathématiciens qui ont fait une étude technique des bases de l'arithmétique (notamment Weierstrass, Cantor, Kronecker, Méray, Jules Tannery). Si certains d'entre eux ont un culte pour le nombre entier, ils ne lui attribuent pas de vertu spéciale. Ils se bornent à appliquer à la notion générale du nombre les méthodes de construction algébrico-logiques. Aussi bien la définition la plus parfaite du nombre irrationnel (celle qui présuppose le moins de postulats) fait-elle dépendre principalement celui-ci d'une notion assez différente de celle du nombre entier, et plus générale : la notion de *classe*. Si (1), l'ensemble total des nombres rationnels est partagé en deux classes telles que tout nombre de la première classe soit inférieur à tout nombre de la seconde classe, et tout nombre de la seconde classe supérieur à tout nombre de la première, et telles, d'autre part, qu'il n'y ait dans la première classe aucun nombre plus grand que tous les autres et dans la seconde classe aucun nombre plus petit que tous les autres, — alors le couple des deux classes constitue un élément de raisonnement que l'on appelle « *nombre irrationnel* ». En partant de cette définition on peut construire un calcul des *couples de*

(1) C'est là à peu près la définition donnée par Dedekind dans son ouvrage fondamental : *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Brunswick, 1872.

classes qui est l'équivalent exact du calcul des quantités algébriques.

C'est à l'aide de la même notion de classe que certains logiciens modernes ont essayé d'expliquer les propriétés caractéristiques, non seulement du nombre irrationnel, mais du nombre entier lui-même. Ils ont institué à cet effet une logique des classes, ou étude des relations entre classes d'éléments quelconques, qui fait pendant à la logique des propositions dont nous avons parlé plus haut. Nous n'insisterons pas toutefois sur cette nouvelle logique, dont l'utilité pour les mathématiciens paraît contestable (du moins tant que l'on n'y introduit pas la notion d'infini) (1). En fait toutes les tentatives (2) effectuées pour ramener la notion de nombre entier à des notions plus simples n'ont pas permis d'éviter les pétitions de principe ou présentent des lacunes indéniables. Elles n'ont donc pas exercé d'influence appréciable sur les progrès de la pensée mathématique.

La logique des classes finies, cependant, n'est point dépourvue d'intérêt pour le mathématicien parce qu'elle a donné l'occasion d'appliquer à un ensemble de notions extra-mathématiques (3) (les notion de classes logiques, de sous-classes, de classes équivalentes, etc.) les prin-

(1) La logique des classes infinies intervient dans la théorie connue sous le nom de « théorie des ensembles ».

(2) Nous faisons ici allusion, non seulement aux tentatives de Bertrand Russell et d'autres logiciens contemporains, mais aussi à celle de Hilbert, exposée dans deux appendices ajoutés à la 3e édition des *Grundlagen der Geometrie*: *Ueber den Zahlegriff*, *Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*. — Cf. H. Poincaré, *Science et méthode*, chap. IV.

(3) Principalement, les notions que M. M. Winter appelle *grammatico-logiques* (*La méthode dans la phil. des mathém.*, passim).

cipes de combinaison, et même l'écriture symbolique, dont l'usage était autrefois réservée à l'algèbre classique. Ainsi, après de nombreux tâtonnements, les logiciens sont finalement parvenus à constituer une véritable « algèbre de la logique », qui procède du même esprit et emploie les mêmes procédés que l'algèbre mathématique. Dans le cadre de cette nouvelle algèbre entrent, avec la logique des *classes*, la logique des *propositions* et aussi la logique dite « *des relations* », qui étudie les combinaisons de relations logiques quelconques, exactement comme le mathématicien étudie les combinaisons des relations fonctionnelles.

L'algèbre logique ainsi conçue a, ou du moins s'efforce d'avoir, une portée très générale. Si elle réussissait à dépasser le stade élémentaire où elle est actuellement confinée, elle deviendrait à la lettre, suivant la formule de Leibniz, *caractéristique universelle*. Grâce à l'algèbre logique, en effet, on n'a plus, comme le dit Couturat (1), à faire attention au contenu réel des idées et des propositions; il suffit de les combiner et de les transformer suivant des règles algébriques ». Ce serait — si c'était possible — le triomphe du mécanisme intellectuel, la réalisation du rêve de Raimond Lulle.

Malheureusement la science universelle n'a jamais existé jusqu'ici, qu'à l'état de projet. Descartes — on l'a vu — avait prétendu l'instituer, mais il n'a réalisé qu'une faible partie de son programme. Leibniz, bien qu'il eût une idée plus nette du caractère et de la forme symbolique qu'il voulait donner à cette science, renonça lui aussi à son plan et s'adonna, dans le domaine mathématique, à des recherches plus immédiatement utiles. Quant aux logiciens contemporains, leurs travaux ont

(1) *La logique de Leibniz*, p. 101.

clarifié, sans doute, les principes de l'algèbre logique, et lui ont permis de prendre décidément place au rang des sciences exactes; mais le champ d'application de leurs méthodes est resté, malgré leurs efforts, extrêmement limité.

Quoi que l'on pense, cependant, de l'algèbre logique, on doit admettre que l'essor remarquable pris par cette science dans les dernières années du XIXe siècle est un fait historique important. Il faut y voir la dernière manifestation, l'aboutissement tardif, du grand mouvement de pensée qui, préparé par les premiers algébristes, affermi par Descartes, s'est développé avec ampleur au cours du XVIIIe siècle et a transformé peu à peu la physionomie de la science mathématique.

Après avoir passé en revue les principales théories auxquelles le mouvement dont nous parlons a donné naissance, nous sommes à même de discerner plus nettement qu'auparavant les vues générales et les tendances intellectuelles dont ces théories sont connexes.

Quelle est — en somme — la conception de la science mathématique que la pratique de la méthode algébrico-logique et la confiance en l'omnipotence de cette méthode devaient naturellement suggérer aux mathématiciens?

A la base de cette conception se trouve, comme nous le savions déjà, l'idée que la Mathématique parfaite serait une science synthétique et mécanique dont les calculs s'effectueraient, pour ainsi dire, automatiquement. Sur cette idée fondamentale viennent, cependant, s'en greffer deux nouvelles, que nous ne trouvons pas encore chez Descartes et chez Leibniz, mais qui sont conformes à l'orientation générale donnée par ces savants à la pensée mathémathique : savoir, d'une part que les théories mathématiques sont une création libre de l'esprit humain ; d'autre part, que ces théories jouent, dans la science générale, le rôle de simples intermédiaires, qu'elles sont seulement des instruments de démonstration fabriqués par le savant pour atteindre certaines fins.

Nous voyons comment ces vues achèvent de ruiner la conception classique de la science.

Pour ceux qui les adoptent, en effet, la Mathématique cesse d'être une science objective et les notions qu'elle étudie n'ont plus de valeur par elles-mêmes. Désormais on ne doit plus voir dans l'algèbre ou dans la démonstration géométrique qu'une méthode qui réussit. Les propriétés mathématiques ne sont ni vraies, ni fausses, ni belles ou intéressantes ; elles sont seulement conformes aux définitions et aux axiomes, aux *hypothèses* d'où elles résultent. Ces hypothèses sont d'ailleurs conventionnelles, et, lors même qu'elles choqueraient le sens commun, elles n'en seraient pas moins légitimes si elles n'impliquent aucune contradiction logique. Quant à leur opportunité on ne peut l'apprécier que d'après deux critères : l'utilité et la commodité de la science que l'on fonde sur eux. En modifiant définitions et axiomes, nous pourrions construire une infinité de sciences différentes : tout naturellement, parmi ces sciences, nous choisirons celle qui est le plus conforme à nos habitudes d'esprit et à nos besoins.

Il s'en faut, bien entendu, que tous les mathématiciens qui pratiquent la méthode synthétique en tirent des conclusions aussi absolues. La conception que nous venons d'exposer n'existe, chez la plupart d'entre eux, qu'à l'état latent. C'est bien elle qui les inspire cependant, et c'est en elle qu'ils trouvent leur justification, lorsqu'ils construisent de nouveaux systèmes qui ont un caractère de plus en plus artificiel et fictif.

II. — Les limites de la logique (1).

La théorie de la science mathématique que nous venons d'esquisser ne fut formulée d'une manière complète que dans les dernières années du XIXe siècle. Elle le fut principalement par les soins ou sous l'influence des logiciens qui eurent le mérite de discerner nettement les principes de la méthode algébrique et qui n'hésitèrent pas à accepter toutes les conséquences découlant de ces principes. La plus remarquable des conséquences ainsi admises était que la méthode mathématique, en se rapprochant de l'idéal vers lequel la faisait tendre l'école algébrico-synthétiste, perdait du même coup coup sa spécificité. Se réduisant à l'application mécanique de certains procédés de combinaison logique, la Mathématique cessait d'être une science distincte pour se fondre dans une logique générale, une sorte de *panlogique* (2), ayant pour objet l'étude des diverses relations que l'on peut établir formellement entre des concepts abstraits. Et les adeptes de cette panlogique pouvaient soutenir avec apparence de raison que l'étude de leur science devait précéder et primer celle des mathématiques puisqu'elle permettrait de découvrir, sous une forme générale, les lois des combinaisons dont les mathématiciens ne considèrent que des cas particuliers.

(1) Une partie de ce paragraphe a fait l'objet d'une communication présentée au 2e congrès international de philsophie, Genève, 1904. Discussion : *Rev. de métaph.*, juillet, 1905.

(2) En égard à l'écriture symbolique dont cette logique fait généralement usage, Louis Couturat et quelques autres logiciens lui ont donné le nom de « *logistique* ».

Lorsque cette doctrine s'affirma cependant, et dévoila toute son ambition, elle fut aussitôt vivement combattue par la plupart des hommes de science. On peut penser que ceux-ci furent défavorablement impressionnés en entendant les logiciens se déclarer prêts à les supplanter. Mais la répulsion que leur inspira la doctrine panlogique tenait — on ne tarda pas à s'en apercevoir — à des causes plus profondes. Non seulement cette doctrine était trop absolue, mais elle ne venait pas à son heure, elle se présentait trop tard. En effet, les conceptions d'ordre mathématique qui en avaient été le point de départ, et qui dominaient le monde savant au XVIIIe siècle, avaient cessé depuis lors de diriger les progrès de la science. Si les mathématiciens ne les avaient pas encore ouvertement reniées, on pouvait reconnaître à des signes certains qu'ils ne croyaient plus en leur vertu. Les premiers, ils avaient entrepris l'épuration logique des principes de la science, les premiers, ils avaient eu l'idée de l'algèbre universelle; mais, à l'époque où cette idée semblait devoir porter tous ses fruits, ils l'avaient, quant à eux, déjà abandonnée.

Que s'était-il donc passé ? Nous pouvons facilement nous en rendre compte si nous observons l'évolution subie par la Mathématique pure au cours de la période moderne.

Le trait le plus frappant de l'histoire des mathématiques entre 1640 et 1780 est sans doute, la rapidité et la facilité avec laquelle se développaient alors et se multipliaient les théories. Comme l'avait très justement remarqué Descartes, le travail mathématique, n'exigeant plus d'effort d'invention, avait pris un caractère mécanique, automatique. Pour réaliser des progrès, le mathématicien de ce temps n'avait qu'à suivre une voie tracée à l'avance, en allant du simple au composé, et du composé au plus composé ; sa tâche consistait essentiellement — suivant une expression qui a été longtemps en faveur dans la langue scientifique — à *généraliser*, c'est-à-dire à appliquer dans un champ de plus en plus large des procédés déjà éprouvés. Or, après cent cinquante années d'une fécondité extraordinaire, la puissance des méthodes suivies commença visiblement à s'épuiser (1). Le rendement de la machine algébrique diminua d'une manière inquiétante. Les résultats nouveaux qu'elle permettait d'obtenir étaient, en effet, d'un médiocre intérêt et ne paraissaient pas susceptibles d'applications utiles. Par contre, certains problèmes que la mécanique, la physique, et aussi des considérations purement théoriques, posaient au mathématicien, ne pouvaient être traités algébriquement qu'au prix de grandes difficultés ou même n'offraient aucune prise au calculateur. Il semblait en vérité que l'on fût arrivé au terme du développement de l'algèbre, au faite de l'édifice dont Descartes et Leibniz avaient posé les bases. De là un sentiment de malaise et d'inquiétude qui s'empara des mathématiciens à la fin du XVIII^e siècle et dont nous trouvons l'expression dans un rapport rédigé par Delambre en 1810. Exposant (2) au nom de l'Académie des Sciences l'état de la science mathématique, Delambre écrit : « Il serait difficile et peut-être téméraire d'analyser les chances que l'avenir offre à l'avancement des

(1) Ce n'est qu'au cours du XIX^e siècle, comme nous l'avons vu, que furent développées ou définitivement mises au point certaines des applications les plus importantes de la méthode algébrico-logique. Néanmoins l'insuffisance de cette méthode pour atteindre certaines fins ou progresser dans certaines directions était apparue dès la fin du siècle précédent aux analystes clairvoyants.

(2) *Rapport historique sur les progrès des Sciences Mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel*, Paris, 1810.

mathématiques; dans presque toutes les parties, on est arrêté par des difficultés insurmontables; des perfectionnements de détail semblent la seule chose qui reste à faire. Toute ces difficultés semblent annoncer que la puissance de notre analyse est à peu près épuisée, comme celle de l'algèbre ordinaire l'était par rapport à la géométrie transcendante au temps de Leibniz et de Newton, et qu'il faudrait des combinaisons qui ouvrent un champ nouveau au calcul des transcendantes et à la résolution des équations qui les contiennent ».

On voit par cette dernière phrase que Delambre reste fidèle à la conception synthétiste; il admet que c'est en construisant de nouvelles « combinaisons » algébriques que l'on parviendra à enrichir la science. Et, pour préciser son idée, Delambre signale les intégrales définies — étudiées par Euler — comme pouvant donner matière à de telles combinaisons. En fait, c'est en adoptant un point de vue différent que l'Analyse mathématique a réalisé au XIX^e^ siècle des progrès remarquables. Mais, pour l'instant, nous ne voulons retenir qu'une chose du rapport de Delambre. Nous y voyons que les théories mathématiques ont cessé, dès l'an 1800, de se dérouler ou de se développer mécaniquement. Pour progresser le mathématicien a besoin de trouver un nouveau fil conducteur; il lui faut, contrairement à ce que prévoyait Descartes, faire un effort d'inventeur, accomplir un travail de découverte qui n'a point un caractère synthétique et où les méthodes logiques et algébriques ne lui seront que d'un faible secours.

Cherchons à déterminer d'une manière plus précise les causes qui limitent le pouvoir de ces deux méthodes, — méthode logique et méthode algébrique — en nous attachant tout d'abord à la première, considérée sous sa forme la plus générale.

Si l'on voulait faire une étude approfondie des rapports de la Mathématique et de la Logique, il faudrait commencer par définir rigoureusement ce que l'on entend par ces deux mots. Or, ce n'est pas là chose aisée et c'est pourquoi la question qui nous préoccupe a donné lieu, si souvent, à des malentendus.

Comment obtenir, en effet, une définition générale des Mathématiques? Pour y parvenir, on devrait, semble-t-il, rapprocher toutes les théories qui relèvent de cette science, et chercher à en dégager les caractères communs. Mais, outre que l'on se mettra difficilement d'accord sur l'importance relative des divers caractères observés, qui ne voit qu'une définition ainsi donnée *a posteriori* sera presque certainement trop étroite ? Sous le nom de Mathématique, en effet, nous comprenons non seulement toutes les théories déjà construites par les mathématiciens mais aussi toutes celles qu'ils étudieront dans l'avenir. Et, pour le savant moderne en quête de découvertes nouvelles, la question principale est précisément de savoir comment on pourra s'écarter des routes déjà frayées sans cependant détourner la Mathématique de sa destination finale.

La plupart des penseurs qui ont étudié les fondements de l'Analyse définissent cette science par son objet. Parce que l'Analyse opère d'ordinaire sur des quantités algébriques continues, et parce que la notion de quantité continue paraît équivalente à celle de grandeur géométrique, on dira, par exemple, que l'Analyse est la science des relations spatiales. Louis Couturat semblablement — se fondant sur les tentatives effectuées par certains logiciens anglais pour ramener la notion de nombre irrationnel (quantité algébrique) à la notion *d'ordre* — définissait la Mathématique, en 1904, comme « la science formelle des relations d'ordre ». Et il écrivait (1) : Il semble donc que l'objet essentiel *et même unique* de la Mathématique pure, soit non plus l'idée de nombre, mais l'idée d'ordre ».

Cependant, pour déterminer les caractères spécifiques de « l'Analyse » suffit-il vraiment d'indiquer la genèse des notions premières sur lesquelles raisonne cette science? Nous avons le droit d'en douter, car les théories relatives à la définition des quantités continues, par exemple, ne sont, à proprement parler, qu'une introduction aux mathématiques pures. Sans doute, il est question en Analyse de variables qui passent par des séries de valeurs ; mais ces variables ne jouent un rôle qu'en tant que l'on pose à leur sujet certains problèmes d'une nature spéciale. Or, ces problèmes, croit-on les caractériser suffisamment en se bornant à affirmer qu'ils mettent en évidence des « relations spatiales » ? Ou espère-t-on les définir tous en disant qu'ils se rattachent à la notion d'ordre? Il suffit de regarder les théories les plus notoires de l'Analyse moderne pour y descerner un grand nombre de problèmes qui font intervenir d'autres notions et pour comprendre en même temps pourquoi les définitions auxquelles nous faisons allusion sont fatalement condamnées à être imparfaites. Ainsi que nous l'expliquerons plus loin, en effet, les problèmes dont s'occupe aujourd'hui l'Analyse sont en partie indéterminés. La forme qu'ils prennent dans nos théories a un caractère variable et provisoire. On ne voit donc pas comment il serait possible de les embrasser dans une définition limitative arrêtée une fois pour toutes.

Mais, renonçant pour l'instant à définir d'emblée la Mathématique, voyons s'il ne serait pas possible d'aborder par l'autre bout la question qui nous intéresse. En

(1) *Les principes des Mathématiques*, apud *Revue de Métaphysique*, juillet 1904, p. 675.

partant de la Logique, ne pourrons-nous pas établir entre celle-ci et les théories de l'Analyse un lien de dépendance et de subordination.

Sans entrer ici dans une discussion détaillée du rôle de la Logique, nous devons noter entre les points de vue adoptés par divers philosophes contemporains une différence fondamentale. Les uns voient dans la Logique une science déterminée ayant des postulats distincts et un rôle propre. Les autres ne croient pas que la Logique puisse être ainsi isolée, et ils l'identifient plus ou moins avec la forme de toutes les sciences. C'est manifestement la première de ces doctrines qu'adoptaient vers l'année 1900 les partisans convaincus des nouvelles théories logiques. Ainsi M. Itelson, au Congrès de philosophie (1) de 1904, proclamait l'indépendance de la logique et la définissait *Wissenschaft der Gegenstände überhaupt*. Nous observons dans les *Principes des mathématiques* (2) de Bertrand Russell une tendance analogue. Pour Russell, sans doute, la Logique n'est pas une science spéciale, puisqu'elle comprend, par exemple, toutes les Mathématiques; mais c'est une science fixe et définie; c'est une science qui roule sur des constantes logiques absolument déterminées et immuables (3), dont le nombre est limité et constant. En ce sens, la logique est une science particulière. — Mais, d'autre part, Couturat paraît prendre le mot *Logique* dans une acception beaucoup plus générale et vague lorsqu'il écrit (4) : « De ce

(1) Cf. le compte-rendu du IIe Congrès de philosophie, *Revue de Métaphysique*, novembre 1904, p. 1037 et suiv.

(2) *The Principles of Mathematics*, Cambridge, 1900.

(3) Which deals with logical constants absolutely definite (*loc. cit.* p. 6 et suiv.). M. Russell a modifié depuis lors sa théorie des constantes logiques, mais il en a conservé le principe.

(4) Voir *Revue de Métaphysique*, novembre 1904, p. 1046-55.

qu'une relation appartient par sa compréhension à tel ou tel ordre de connaissances, il ne faut pas conclure qu'elle ne relève pas en même temps de la Logique par sa forme », ou encore : « La logistique est invincible, car, selon l'ingénieuse remarque de M. Itelson, pour combattre la Logique il faut encore faire de la logique ».

Certes, si par opération logique on entend une opération quelconque de l'esprit, alors il est clair que toutes les sciences rentreront dans la Logique. Mais Couturat soutient une thèse plus précise lorsqu'il entreprend d'expliquer la genèse des postulats mathématiques : ce n'est point d'une logique quelconque mais du calcul logique moderne ou logistique et, plus précisément, de la logique des relations, qu'il fait dériver ces postulats. Que faut-il penser de cette manière de voir ?

Si la logistique est une science distincte, elle a des postulats distincts qui ne sont pas ceux des Mathématiques. On prétendra peut-être que ces derniers sont un cas particulier des postulats logiques. Mais alors il faudra expliquer comment est obtenu ce cas particulier. Une particularisation est nécessairement un choix : or l'opération qui consiste à choisir, est, croyons-nous, absolument étrangère au calcul logique.

Supposons, au contraire, que la logistique ne soit pas une science distincte, et considérons-la en tant que forme de la science mathématique. Par là même nous reconnaissons qu'elle ne suffit pas à elle-même et que le point de départ de ses déductions doit être cherché en dehors d'elle. Ce point de départ, ce sera un ensemble de notions et de postulats, que le logicien transformera, soit pour en tirer des propositions conséquentes, soit pour les ramener à des notions et à des postulats plus simples. Où donc ira-t-il chercher sa provision de données initiales ?

Ici, peut-être, on voudra nous répondre qu'en ce qui concerne les Mathématiques la question est sans importanceé; étant donné, dira-t-on, que les postulats mathématiques sont arbitraires, aucune règle ne régit le choix que nous en faisons, et le travail scientifique ne commence pour le savant que lorsqu'il en vient à l'élaboration de ces postulats.

A priori, cette thèse ne soulève aucune objection et elle est conforme à la conception de l'Algèbre et de l'Analyse qui prévalut pendant le XVIII^e siècle. Mais, du jour où l'on s'aperçut que l'application pure et simple de la méthode synthétique ne permettait plus de réaliser de nouveaux progrès, on devait reconnaître que, par delà la logique, la question du *choix* des notions des postulats et des théories joue en réalité un rôle fondamental, peut-être le rôle principal, dans la découverte mathématique. Ainsi nous avons dit plus haut comment David Hilbert effectua une reconstruction logique de la géométrie en la faisant reposer sur cinq groupes d'axiomes. Dans l'œuvre ainsi réalisée par le géomètre de Göttingen, où résidait la principale difficulté, où l'effort d'invention a-t-il dû particulièrement s'exercer ? Le travail de synthèse, logique et mécanique, auquel Hilbert a dû se livrer une fois les axiomes énoncés et interprétés était relativement aisé. Mais discerner sans en oublier aucune, formuler sans pétition de principe, et dans les termes les plus simples, les propositions cachées de notre géométrie, — classer, d'autre part, et ordonner ces propositions de manière à mettre en lumière leurs connexions et à découvrir du même coup les différentes géométies partielles que l'on peut former avec elles, — là était le problème délicat, la difficulté fondamentale dont Hilbert a triomphé. Et c'est en accomplissant ce travail de discernement et de choix, avec un flair et une science particulièrement heureux, que Hilbert, a fait œuvre, non seulement de logicien, mais de mathématicien.

Louis Couturat ne reconnait pas la distinction que nous établissons ici. « Tout l'effort des logisticiens, dit-il (1), porte sur le choix des définitions et des postulats. Et s'il est vrai que la découverte mathématique consiste dans un choix de postulats, c'est aussi en cela que consiste la découverte logique. » L'œuvre des logisticiens, précise Couturat, « consiste dans un double travail de réduction : réduction des notions premières, par la définition ; réduction des propositions à des propositions premières, par la déduction logique formelle ».

Peut-être, en effet, est-il permis de dire dans certains cas que les découvertes logiques consistent dans un choix de postulats ; mais, alors, le mot *choix* n'a plus exactement le même sens que tout à l'heure. Le travail de réduction logique peut être brièvement esquissé comme il suit : On se donnera un système S de notions et de postulats, et, par déduction ou combinaison logique, on transformera ce système en un système équivalent S', formé de notions et postulats moins nombreux ou plus simples, que l'on conviendra d'adopter comme définitions. Ici, le choix s'effectue entre un certain nombre de systèmes S' équivalents à S et exactement déterminés ; et l'hésitation n'est pas possible, puisque, de deux systèmes S', on voit immédiatement lequel est le plus simple ou comprend le moindre nombre de postulats. Le travail qu'accomplissent les logiciens lorsqu'ils effectuent la « réduction des postulats », c'est en somme, suivant la conception de l'école de Peano, la décompo

(1) *Revue de Métaphysique*, novembre 1904, art. cité p. 1047, note.

sition des postulats en leurs éléments (1). Or, pareille décomposition est manifestement impossible lorsqu'il s'agit de la formation des postulats mathématiques.

Les postulats primordiaux des mathématiques ne comportent point d'éléments. On peut en général les décomposer d'une infinité de manières, en se plaçant à une infinité de points de vue différents, et parmi toutes les décompositions possibles nous n'avons à première vue aucune raison de choisir l'une plutôt que l'autre. Chercher laquelle est la plus « simple » est le plus souvent une question dépourvue de sens. Et, d'ailleurs, ce qui importe au savant lorsqu'il cherche à fixer le point de départ d'une théorie, ce n'est pas que ce point de départ soit simple, mais qu'il soit fécond. Or, par quelle opération logique pourrait-on reconnaître à l'avance qu'un système de postulats nous conduira à des découvertes utiles, nous fera pénétrer au cœur de la réalité mathématique ?

En fait, il n'existe pas de théorie algébrique ou géométrique, fondée sur un système donné de postulats, qui permette d'atteindre pleinement ce but, et c'est pourquoi les conceptions de mathématiciens doivent être constamment revisées, modifiées, enrichies. Ces conceptions sont essentiellement indéterminées, et c'est par ce caractère qu'elles s'opposent aux conceptions des logiciens ; car ces dernières, ne s'attachant qu'aux relations et au groupement des choses, supposent nécessairement des éléments fixes combinables ou décomposables, c'est-à-dire des notions rigoureusement déterminées en compréhension et en extension, qui puissent se prêter à des opérations mécaniques. Voilà pourquoi, sans prétendre donner une définition complète et définitive de la Mathématique et de la Logique, nous pouvons en

(1) Cf. *Formulaire des Mathematiques*, t. IV, Turin, 1903, p. 253.

tous cas affirmer que la première n'est pas emfermée dans la seconde. Nous allons nous en rendre compte d'une manière plus précise en examinant, à titre d'exemple, l'une des notions les plus importantes de l'Analyse moderne : la notion de *fonction*.

A en croire les auteurs qui veulent faire de l'Analyse mathématique un chapitre de la logique, la correspondance entre quantités variables étudiée par les mathématiciens sous le nom de *fonction* ne serait qu'un cas particulier de la relation logique telle que la considèrent Peano, Russell et les « logisticiens » contemporains. Or, ceux qui examinent de près la notion de fonction ne sauraient, croyons-nous, souscrire à cette conclusion.

La définition logique de la relation est, simplement, la définition d'un symbole. Nous convenons, par exemple, d'écrire xRy pour exprimer que la relation R existe entre x et y. Partant de là, nous énonçons une série d'axiomes tels que (1) « toute relation a sa converse » (ce qui veut dire que la relation xRy entraîne une relation de la forme xR'y), ou encore « s'il y a une relation entre x et y et une autre entre y et z, il y a entre x et z une troisième relation qui est uniformément déterminée par les deux premières ». Puis de la combinaison de ces axiomes nous tirons un système de propositions ou théorèmes, auquel on a donné le nom de « logique des relations ».

Mais, dans le système ainsi obtenu, que signifient au juste les lettres x, y, z ? Si ces lettres désignent des éléments déterminés ou arbitrairement choisis dans des collections définies, les axiomes et les propositions de la

(1) Cf. Couturat. *Les principes des Mathématiques*, apud *Revue de Métaphysique*, Janvier 1904, p. 40-41.

logique des relations auront un sens parfaitement clair. Mais il n'en est plus de même quand on veut leur faire représenter des nombres variables ? Lorsqu'on applique, par exemple, à deux variables mathématiques l'axiome « toute relation a sa converse », cet axiome devient un postulat qui, dans l'Algèbre la plus générale, se trouverait en défaut : il peut arriver en effet que, tandis qu'à toute valeur de x correspond une valeur de y, certaines valeurs de y n'aient aucun correspondant, ou bien qu'elles en aient une infinité, indéterminés dans le champ de la variable x. Pareillement, le second axiome énoncé plus haut ne sera pas toujours vrai en mathématiques. Ainsi donc, si l'on veut passer de la théorie connue sous le nom de « logique des relations » à la théorie des fonctions mathématiques les plus générales, on sera obligé de modifier l'un après l'autre les axiomes d'où l'on part. La seconde théorie ne saurait-elle donc être présentée comme une application, mais tout au plus comme une extension de la première.

Mais serrons la question de plus près. Une fonction d'une variable établit une correspondance entre une infinité de couples de valeurs, x et y, u et v, etc. Peut-on exprimer ce fait en disant que les valeurs u et v sont liées par la *même relation* (1) que x et y ? Du point de vue logique, une pareille affirmation ne peut être légitime que si on la regarde comme un postulat. Qu'entend-on en effet par le mot *même* ? Lorsque l'on passe du couple (x, y) au couple (u, v), qu'est-ce qui reste le même ? Si je dis, par exemple, qu'en géométrie analytique il y a une même relation entre les nombres 0 et 1, $+1$ et $e = 2{,}718..$, $-\infty$ et 0, j'énonce une proposition, ou dépourvue de sens, ou purement arbitraire, à

(1) Cf. Couturat, *Revue de Métaphysique*, janvier, 1904, p. 39.

moins que je ne sache déjà que les points ayant ces pour nombres abscisses et ordonnées sont sur une même courbe, celle de la fonction exponentielle.

Pour parer à cet inconvénient, Peano introduisit naguère — à côté du symbole *f* correspondant à la notion générale de relation fonctionnelle — un nouveau symbole, F, qui, dans son *Formulaire* (1), s'appelle « fonction définie » et qui est « l'ensemble d'une fonction *f* et de la classe des valeurs prises par la variable indépendante ». Moyennant cette définition, il espérait que l'on pourrait établir par voie logique les propriétés des fonctions mathématiques (2).

La définition des relations F est, en effet, logiquement, satisfaisante ; mais elle ne nous donne qu'une représentation fragmentaire des fonctions mathématiques, puisqu'elle ne les considère que pour certaines classes de valeurs de la variable. Il est vrai que l'on pourrait étendre infiniment cette classe de valeurs, et définir alors la fonction, ainsi que le propose Couturat, « par la totalité de son extension, c'est-à-dire par *tous* les comptes de valeurs des variables qui le vérifient (3) ». Mais cette vue soulève de graves objections. En admettant, en effet, que l'on puisse considérer comme légitime au point de vue de la pure logique une définition dans l'énoncé de laquelle entrent une infinité de conditions, encore devra-t-on s'assurer que ces conditions sont réalisables. Or c'est précisément une question discutée par les mathématiciens de savoir ce qu'on est en

(1) Voir plus haut, p. 163, note 1.

(2) Le symbole F ainsi défini par M. Peano a été défini différemment, d'une part par M. Burali-Forti qui le déduit des classes de couples d'objets, d'autre part par M. Russell qui l'a déduit de sa théorie des « relations entre deux objets ».

(3) *Revue de Métaphysique*, novembre 1904, art. cité, p. 1050.

droit d'appeler la totalité de l'extension d'une fonction. Pour ne citer qu'un exemple, rappelons qu'une même série de fonctions rationnelles, convergeant dans différentes régions du plan, peut représenter des fonctions différentes absolument quelconques. Aussi les géomètres ne sont-ils pas d'accord sur la détermination des conditions sous lesquelles une même série de fonctions rationnelles pourra être considérée comme représentant une même fonction de tout le plan. C'est à ce problème que l'on est ramené lorsqu'on cherche quel peut être le *prolongement* d'une fonction au delà d'une ligne singulière fermée. Il ne s'agit pas d'autre chose que de déterminer l'extension totale de la fonction.

Il semble donc que, loin de pouvoir être posée de prime abord, l'extension d'une fonction soit au contraire l'un des objets que nous poursuivons. C'est l'une des tâches qui incombent à l'analyste, que de conclure de l'extension partielle d'une fonction à son extension totale. Or, précisément, il se trouve que le *prolongement* d'une fonction ne constitue pas, en lui-même, un problème déterminé. On ne peut le résoudre qu'en particularisant la question, c'est-à-dire en imposant à l'idée générale de fonction telles ou telles conditions restrictives qu'il est nécessaire de dégager.

De quelque manière que nous abordions la notion de fonction nous nous trouverons toujours ramenés à la conclusion formulée plus haut. La notion de fonction est avant tout, pour le mathématicien, un indéfini, un indéterminé. L'idée que nous en avons est plus riche et plus pleine que toutes les définitions ou expressions que nous pouvons donner ou construire. Par conséquent une théorie logique des fonctions, quelque parfaite soit-elle, — c'est-à-dire avec quelque soin qu'en aient été choisis les postulats et quelque loin qu'en soient déroulées les conséquences — ne pourra jamais satisfaire la curiosité et les aspirations du mathématicien. Pour acquérir sur les fonctions des connaissances neuves et fécondes, il est indispensable de retoucher sans cesse les définitions et les principes sur lesquels on opère. En d'autres termes, les progrès les plus importants que réalisent les mathématiciens sont obtenus, non en perfectionnant la forme, mais en modifiant le fond de la théorie. Ces progrès ne sauraient être regardés comme étant d'ordre logique.

Dans la discussion qui précède, nous nous sommes attachés aux postulats des théories parce que c'est à l'occasion de ces postulats que l'insuffisance des méthodes logiques apparaît le plus clairement. Mais les remarques que nous avons faites trouvent à s'appliquer, non seulement au point de départ, mais d'un bout à l'autre de l'œuvre mathématique.

Les systèmes ou théories que construisent les mathématiciens présentent toujours, en effet, certains caractères bien déterminés qui ont été mis en évidence par les géomètres grecs et qui tiennent à la forme logique de ces sytèmes. Ils se présentent sous l'aspect d'une chaîne de propositions; nous voulons dire qu'ils sont constitués par une suite de propositions, déduites méthodiquement les unes des autres, et se succédant dès lors dans un certain ordre que nous dictent les nécessités de la démonstration. La préséance ainsi établie entre un un ensemble de propriétés — par exemple, les propriétés du cercle ou de l'ellipse — est fondamentale au point de vue logique : parmi ces propriétés, en effet, il en est qui sont plus rapprochées que d'autres des définitions et des postulats, et qui doivent par suite être classées les premières; il en est au contraire qui sont complexes et manifestement dérivées.

Pourtant cette notion d'ordre, sur laquelle sont fondées nos méthodes de démonstrations, s'impose-t-elle d'une façon absolue à l'esprit du mathématicien ? C'est ce que nous ne saurions admettre. Lorsque, en effet, une fois une théorie édifiée, nous l'envisageons dans son ensemble, lorsque nous cherchons à embrasser cette théorie d'un seul coup d'œil, à en comprendre le sens général et la portée, nous constatons que non seulement l'ordre des propositions nous devient indifférent, mais qu'il prend un caractère tout à fait artificiel.

Soit, par exemple, une ellipse. Cette courbe jouit de différentes propriétés : elle est la projection du cercle sur un plan ; elle est le lieu géométrique des points équidistants d'un cercle et d'un point pris à l'intérieur, le lieu des points dont les distances à deux points fixes ont une somme constante, et ainsi de suite. Parmi ces propriétés y en a-t-il une qui soit primordiale, qui doive nécessairement être énoncée la première ? Rien ne nous l'indique. En fait, les géomètres peuvent choisir arbitrairement celle qu'ils préfèrent pour définir l'ellipse, et en déduire successivement toutes les autres. Nous sommes par conséquent obligés d'admettre que le classement des propositions dans la théorie de l'ellipse a une valeur toute relative. Entre les diverses propriétés de l'ellipse, il n'y a pas d'ordre de préséance qui puisse se justifier a priori. Considérées d'un point de vue absolu, ces propriétés sont simultanées et non successives.

Quelle conclusion tirer de ces remarques ? Celle même à laquelle déjà nous avions abouti plus haut : à savoir qu'en enfermant les vérités mathématiques dans un moule de forme rigide et rigoureusement définie, la logique restreint d'une manière artificielle et fortuite le champ de la spéculation mathématique. De même que, pour mettre sur pied une théorie, il nous faut limiter par un choix initial les principes que nous plaçons à la base, de même, pour poursuivre la théorie, nous devons renoncer à l'embrasser tout de suite dans son entier; nous y distinguons donc des parties que nous étudions séparément, des étapes que nous parcourons successivement. Toutefois, si nous opérons ainsi, c'est toujours en vertu d'un acte volontaire dont nous avons parfaitement conscience. Pour donner aux théories mathématiques une structure solide, nous avons décidé de leur donner la forme de systèmes logiques; mais, constatant que ces systèmes sont artificiels et peuvent d'ailleurs être diversifiés à l'infini, nous comprenons qu'ils ne constituent ni toute la Mathématique, ni le principal de cette science. Derrière la forme logique il y a autre chose. La pensée mathématique ne se borne pas à déduire et à construire; et, tout en rendant hommage à l'œuvre accomplie par les logiciens du XIXe siècle, on est en droit de dire, avec M. Winter (1) : « La logique est fondée, l'ère des difficultés scientifiques commence ».

III. — Les limites de l'Algèbre.

La conception d'après laquelle la Mathématique se réduisait à un système de combinaisons logiques est, nous l'avons vu, une suite naturelle des succès remportés par la méthode algébrique. Or, cette conception, lorsqu'elle fut précisée et exposée au grand jour, ne se trouva plus conforme à l'orientation qu'avait prise l'Analyse au cours du XIXe siècle. Celle-ci, pour les raisons

(1) M. Winter. *La méthode dans la philosophie des Mathématiques*, p. 72.

que nous avons indiquées, paraissait s'écarter désormais du point de vue synthétique. C'est dire — si l'on admet notre définition de l'algèbre — que non seulement elle se séparait de la logique, mais qu'elle s'éloignait également de l'idéal algébrique et que ses progrès cessaient d'être solidaires de ceux de la science du calcul. Si les faits mathématiques ne peuvent plus être envisagés comme les résultats de constructions synthétiques, l'algèbre doit être impuissante à nous les révéler.

Cette diminution du rôle et de la portée de l'algèbre s'est-elle ouvertement manifestée dans les théories mathématiques écloses au XIXe siècle ? A-t-elle été reconnue et admise par les mathématiciens contemporains ? Pour nous éclairer à ce sujet, nous ne saurions mieux faire que de considérer, à titre d'exemple, la théorie mathématique des fonctions qui occupe une place centrale dans l'œuvre des analystes du XIXe siècle (1). En nous reportant à l'origine de cette théorie, en considérant les étapes qu'elle a successivement franchies, nous serons à même d'apprécier les difficultés qu'y a rencontrées l'algèbre et nous comprendrons les conséquences historiques qui résultent de ces difficultés.

Nous avons déjà indiqué dans un chapitre précédent (2) comment l'idée mathématique (3) de la fonction était née de la pratique des opérations algébriques ; nous

(1) Cf. Vito Volterra : « Je n'ai pas hésité en 1900, au Congrès des Mathématiciens de Paris, à appeler le XIXe siècle le siècle de la théorie des fonctions » (apud *Henri Poincaré*, Alcan, 1914, p. 14).

(2) Chapitre II.

(3) Remontant aux origines historiques de l'étude mathématique des fonctions, nous laissons de côté dorénavant les théories purement logiques des relations fonctionnelles, que l'on a essayé de construire à la fin du XIXe siecle.

avons dit aussi dans quelles conditions, grâce à la création du calcul des séries de puissances, cette idée avait acquis, vers la fin du XVII^e^ siècle, une extension que n'avaient pas prévue les premiers algébristes. Ainsi fut constituée, peu à peu, une théorie générale qui comprenait toutes les fonctions susceptibles d'être étudiées par les méthodes de l'algèbre (1). Ces fonctions sont aisées à caractériser. Ce sont (pour nous borner au cas d'une seule variable) celles qui peuvent être définies comme sommes de *séries de Taylor* (2), ou séries de la forme

$$(\Gamma)\ a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

procédant suivant les puissances de la différence $(x - x_0)$, et dans lesquelle x est la variable (dont dépend la fonction) et x_0 une valeur particulière *fixe* prise par cette variable.

Quelque considérable que fût l'extension ainsi donnée à la notion de fonction, cette extension pouvait-elle, cependant, satisfaire pleinement les mathématiciens ?

On le crut, tout d'abord; mais vers la fin du XVIII^e^ siècle, il devint manifeste que la théorie des fonctions ne saurait indéfiniment rester enfermée dans le cadre que lui imposait la méthode des séries de puissances. Les problèmes posés par la physique devaient, en effet, nécessairement la faire déborder de ce cadre en obligeant les mathématiciens à étudier des fonctions discontinues

(1) (Le calcul des séries était, dans la pensée de ses auteurs, un prolongement de l'algèbre élémentaire). Cf. *supra*, chapitre II.

(2) Ces séries sont, au fond, celles mêmes dont faisaient usage Newton et Leibniz. La forme sous laquelle elles sont aujourd'hui employées a été indiquée par Brook Taylor dans la *Methodus incrementorum directa et inversa*, publiée à Londres en 1715.

non développables en séries de Taylor (1). Il y a plus. Du point de vue même des mathématiques pures, une extension nouvelle de la notion de fonction apparaissait nécessaire. On constatait, en effet, qu'il existe des expressions algébriques (2) dépendant d'une variable x — par conséquent, des fonctions définies en termes purement mathématiques — qui ne sont pas développables en séries de Taylor : c'est le cas notamment pour les séries convergentes de sinus et de cosinus connues sous le nom de « séries de Fourier » (3). Ayant reconnu ce fait, on fut tout d'abord amené à préciser la terminologie jusqu'alors en usage. Sous le nom de *fonctions analytiques*, on continua d'étudier les fonctions développables en en séries de Taylor ; mais on se réserva de donner une suite à la théorie de ces fonctions en abordant plus tard les fonctions non-analytiques.

Et, aussi bien, même dans le domaine restreint des *fonctions analytiques*, l'insuffisance de la méthode fondée sur les séries ne devait pas tarder à se faire sentir.

Le postulat de cette méthode, est, en effet, que, si l'on veut bien se contenter d'une approximation déterminée à l'avance, on est en droit de remplacer, dans tous les calculs, les séries par des polynomes. Or, supposons que cette condition soit remplie, pour une certaine série, lorsque l'on donne à la variable x certaines valeurs particulières, par exemple des valeurs voisines de zéro.

(1) L'étude systématique des fonctions de cette nature fut inaugurée par Fourier dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

(2) Au sens le plus large du mot « algébrique » ; lorsque ces expressions sont transcendantes, on les appelle d'ordinaire « expressions analytiques ».

(3) Ces séries introduites par Fourier dans l'ouvrage cité ci-dessus avaient déjà été considérées dans des cas particuliers, à partir de 1748, par Euler, Clairaut, Lagrange.

Nous ne savons pas si pour les grandes valeurs de x la condition sera encore satisfaite. Nous savons même pertinemment qu'elle ne le sera pas en général : la réduction d'une série de la forme (T) à un polynome n'est le plus souvent légitime que pour un ensemble limité de valeurs de x, ensemble que l'on appelle « domaine de convergence de la série ».

Allons-nous en conclure que la fonction mathématique n'est définie, logiquement, que dans le même domaine limité ? Contre une pareille conclusion, l'instinct du mathématicien proteste. Quand je dis : *y est fonction de x*, mon esprit ne voit pas du tout la combinaison compliquée d'opérations et de symboles qui s'écrit : $y = a_0 + a_1x + \ldots$; il se représente une loi de correspondance entre x et y, qui, en général, n'a point de raison de s'évanouir lorsque x devient plus grand que 1 ou que 2. Si ma formule se dérobe à ce moment, c'est qu'elle est imparfaite : il faut la remplacer par une autre.

Et c'est ainsi, en effet, que procède l'analyste. En combinant les nombres a_0, a_1,.... [coefficients de la série (T)], il réussit à calculer une nouvelle série (T_1), qui coïncide avec la première là où toutes deux sont définies, mais qui est convergente pour de nouvelles valeurs de la variable. Et ainsi, de proche en proche, il obtient, pour une valeur quelconque de x, la valeur de la fonction y primitivement représentée par (T). Le mot « fonction » n'est plus alors synonyme du mot « série » mais signifie : *ensemble de séries se déduisant mécaniquement les unes des autres.*

Ainsi, il est théoriquement possible de *construire* une fonction analytique dans tout son domaine d'existence. Malheureusement, la construction ne pourra être effectivement réalisée qu'au prix de calculs d'une complexité inextricable, qui ne sauraient trouver place dans une théorie générale. Ces calculs sont l'affaire du praticien. Le théoricien, quant à lui, fera tout son possible pour les éviter, cherchant à prévoir à l'avance les résultats auxquels on serait conduit si on avait la patience de les mener à bout.

Examinons d'ailleurs d'un peu plus près la théorie du prolongement analytique. Il est exact qu'elle nous fournit un moyen d'étudier une fonction analytique quelconque; mais elle ne nous fournit ce moyen, si l'on peut dire, qu'en puissance; car, pour représenter complètement y, il faudrait former *une infinité* de séries convergentes. Or cette circonstance nous met en présence de problèmes d'un ordre nouveau. Comme à l'époque où Newton abordait l'étude des fonctions transcendantes, mais dans des conditions plus délicates, et cette fois inéluctables, la marche régulière de l'analyse se trouve arrêtée.

Jusqu'ici, nous avons fort bien su ce que nous étudiions : c'étaient des expressions algébriques combinaisons de symboles représentant des fonctions soit exactement, soit avec une approximation déterminée, écrites explicitement sur le papier ou au tableau noir. Or voici que maintenant, nous voulons raisonner sur des fonctions que nous ne sommes pas capables d'« écrire » au tableau. Nous n'en avons qu'un succédané, qu'il faudra tout à l'heure remplacer par un second, puis par un troisième, et ainsi de suite indéfiniment. C'est pourquoi un mathématicien ne considérera pas comme connue la fonction $y(x)$ si son savoir se borne à un moyen de calculer de proche en proche les coefficients des séries (T). Son esprit ne sera satisfait que s'il connaît des propriétés de cette fonction qui soient complètes en elles-mêmes et qu'on puisse embrasser d'un seul coup d'œil. Savoir, par exemple, que la fonction y ne prend jamais plusieurs valeurs distinctes pour une même valeur de x; ou qu'elle reste finie pour toute valeur (finie) de x; ou qu'elle se reproduit périodiquement lorsque x parcourt une certaine série d'intervalles; ou qu'elle est constamment liée par une relation simple avec d'autres fonctions connues : voilà ce qui intéresse l'analyste, voilà ce qu'il attend *comme résultat* de ses recherches. Pour atteindre ce but, le mathématicien, sans doute, continuera à se servir de l'algèbre. Il construira et combinera des séries. Mais nous voyons que, désormais, cet appareil de calcul n'est plus le principal objet de son attention. Plutôt que comme une fin, nous devons le considérer comme un instrument, comme un moyen de raisonner sur des correspondances fonctionnelles qui ne sont point écrites, mais que notre esprit devine derrière les formules.

Nous pouvons d'ailleurs pousser plus loin ces remarques. Il suffit d'analyser la définition initiale que l'on donne de la fonction quand on se place au point de vue du calcul des séries — c'est-à-dire au point de vue de la construction algébrique — pour reconnaître combien ce point de vue est artificiel.

Comment en effet procède l'algébriste ?

Aux fonctions définies par l'algèbre élémentaire, ou fonctions algébriques, il nous demande d'adjoindre une infinité de fonctions nouvelles définies sous la forme :

$$(S) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

(nous supposons ici pour simplifier, que la valeur x_0 envisagée tout à l'heure est égale à o). Or cette définition est-elle suffisante, ou, plus exactement, dans quel cas le sera-t-elle ?

Manifestement, l'expression (S) n'offre un sens que si nous savons calculer de proche en proche les coefficients $a_0, a_1, a_2 \ldots$, et, pour cela il est nécessaire : 1° que la valeur de chaque coefficient a_i dépende uniquement de la valeur d'un *nombre fini* de quantités, A_1, $A_2 \ldots$, A_p (ainsi que de l'indice i, qui est un nombre entier) ; 2° que chacun des coefficients a_i soit une fonction connue de $A_1, \ldots A_p$ et i.

Or nous imaginons que nous ne connaissions encore que les fonctions algébriques. Les coefficients a_i devront donc être des fonctions algébriques de A_1, etc. ; et ainsi se trouvera définie en toute rigueur une famille de fonctions transcendantes que nous pouvons appeler *transcendantes de la première classe.*

Cette classe de transcendantes comprend, à vrai dire, les fonctions les plus usuelles de l'Analyse. Cependant notre faculté de conception la dépasse infiniment. Nous constatons immédiatement que nous pouvons construire une seconde classe de transcendantes, définies elles aussi par la série (S), mais pour lesquelles chaque coefficient a_i sera une fonction transcendante de la première classe des quantités $A_1, \ldots A_p$ (et de i). Et rien ne nous empêchera de continuer indéfiniment. De proche en proche nous définirons un ensemble infini de classes de fonctions de plus en plus compliquées. Réussirons-nous, cependant, à épuiser par ce moyen le groupe des fonctions qui sont représentables sous la forme (S) ? Non ; car nous pouvons toujours imaginer une définition du nombre a_i, assurant la convergence de la série S, et telle, cependant, que a_i ne soit pas une fonction connue d'un nombre fini de quantités. Sans doute, en poursuivant notre construction, nous obtiendrions des expressions s'approchant de plus en plus des fonctions qui sont réfractaires à nos formules, mais jamais ces fonctions elles-mêmes. Les correspondances qu'elles représentent ne sont algébriques qu'en puissance.

Telle est la conclusion qui, à la suite des travaux de Lagrange et des grands analystes de son époque, s'imposait naturellement à l'esprit. Evidemment, il ne serait pas défendu, si nous y trouvions avantage, de donner au mot *Analyse* un sens plus étroit, de restreindre volontairement notre conception de cette science, et de limiter son rôle à l'étude des transformations successives d'égalités déterminées. Par exemple, nous définirions, suivant le procédé indiqué plus haut, une suite de classes de fonctions représentables par des séries (S), et nous rejetterions de parti pris toute fonction étrangère à ces diverses classes, de même que Descartes excluait de la géométrie les courbes qu'il appelait mécaniques.

La construction d'une telle Analyse est possible, quoique laborieuse, et nous en trouvons les bases dans les travaux de Kronecker continués et interprétés par MM. J. Drach et E. Borel. Le point de vue de ces analystes, en arithmétique par exemple, « peut être caractérisé par le fait que l'on ne fait jamais intervenir dans chaque question qu'*un nombre limité de nombres entiers* au moyen desquels tous les éléments de la question sont explicitement définis... Certains esprits verront là une lacune ; d'autres penseront, au contraire que, pratiquement, tout nombre, pour être connu effectivement, doit pouvoir *être caractérisé par un nombre fini de mots*, et, par suite, doit trouver sa place dans le système de M. Drach, convenablement complété (1) ». La méthode employée consiste à découper dans l'Analyse ordinaire un système fermé, dit *système logique*, tel que toute opération faite sur des éléments appartenant à ce système

(1) Emile Borel. *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, apud *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1904.

conduise à une solution s'exprimant par des éléments du même système. — Ne sommes-nous pas en droit, dans l'Analyse ainsi entendue, de regarder la fonction comme une notion entièrement définie en termes algébriques?

Quelque séduisante que soit l'analyse de Kronecker et Drach, il ne faut pas oublier, qu'elle est loin d'avoir été constituée dans toutes ses parties, et qu'en tout cas on s'est passé d'elle jusqu'à ces années dernières. Les théories auxquelles travaillent actuellement les analystes ne sont rien moins que « fermées », et l'on ne saurait par conséquent prétendre qu'en dehors « des systèmes logiques » il n'y a point d'enchaînement logique possible.

Ainsi le principe adopté par MM. Borel et Drach n'est pas pour l'Analyse une condition d'existence. Il exprime seulement la tendance qui porte cette science à prendre la forme d'un édifice logique. Et, pour revenir à la fonction, il est manifeste que cette notion est parfaitement claire et réelle aux yeux du mathématicien alors même que l'on n'impose aux coefficients a_1, a_2,.. de la série (S) aucune des restrictions dont nous avons parlé. Mais, s'il en est ainsi, nous retombons fatalement dans la difficulté logique que nous avions voulu éviter en particularisant ces coefficients. Nous voyons en effet que, définir une fonction — c'est-à-dire une correspondance entre variables — par une série de Taylor, c'est, en somme, définir une correspondance entre un nombre entier n et un autre nombre a_n qui sera par hypothèse le coefficient de x^n dans la série considérée. Et cette nouvelle correspondance, nous ne pouvons à moins de commettre une pétition de principe, la représenter à son tour par un développement en série; nous ne savons absolument pas en quoi elle consiste, ni s'il est possible de la considérer comme une résultante de correspondances plus simples. Elle a un caractère extra-algébrique.

Ainsi, à quelques détours que nous ayons recours, pour perfectionner la définition algébrique de la fonction, nous aboutissons toujours à la même constatation. Notre définition reste incomplète, et inadéquate à l'idée que l'Analyse moderne se fait de la fonction. La puissance de spéculation du mathématicien dépasse le pouvoir constructeur de la synthèse algébrique.

CHAPITRE IV

LE POINT DE VUE DE L'ANALYSE MODERNE

I. — L'évolution de l'Analyse mathématique au XIXe siècle

En suivant le développement de la pensée mathématique depuis l'antiquité grecque jusqu'au seuil de la période contemporaine, nous avons vu prédominer (1) successivement deux points de vue, deux tendances différentes.

Le savant se borne d'abord à constater. Il regarde autour de lui, non point — disait Platon — avec ses yeux, dont la vue est grossière et limitée aux objets sensibles, mais avec cette faculté de vision intellectuelle que possède l'entendement, et qui lui permet d'appréhender les vérités mathématiques essentielles. Ainsi sont perçues les propriétés harmonieuses du monde des nombres et

(1) Il va sans dire que les tendances que nous cherchons à opposer coexistent toujours, à quelque degré, dans les périodes de grande activité mathématique, non seulement chez des savants d'écoles différentes, mais souvent chez un même individu. Lors donc que nous distinguons ces tendances dans le *temps*, nous voulons simplement dire que telle ou telle d'entre elles est prépondérante à un moment donné et caractérise l'idéal scientifique d'une époque.

du monde des figures, celles aussi des grandeurs mesurables, chez lesquelles s'opère la synthèse de la quantité et de la figure, la réunion de l'arithmétique et de la géométrie.

Avec la diffusion de l'algèbre, cependant, une révolution s'accomplit. De contemplative qu'elle était, la science se fait constructrice. Il en résulte une méthode et un point de vue entièrement nouveaux.

Composer, à partir d'éléments simples, des assemblages de plus en plus complexes et bâtir ainsi de toutes pièces, par sa propre industrie, l'édifice de la science, telle apparaît désormais la tâche du mathématicien. La faculté créatrice du savant se trouve à tel point exaltée, dans cette période nouvelle, que, de moyen qu'elle était, elle se transforme bientôt en but. Laissant aux praticiens le soin d'interpréter et d'utiliser ses théories, le mathématicien de l'école algébriste attache moins de prix aux théories construites et aux résultats acquis qu'à la méthode par laquelle il y parvient. Son but principal n'est pas de connaître des faits nouveaux, mais d'accroître sa puissance créatrice et ses ressources de constructeur en perfectionnant de plus en plus ses procédés.

Cependant, les progrès mêmes de la mathématique algébrique ne pouvait manquer de faire surgir certaines difficultés et d'amener une réaction. Avant même que cette mathématique eût achevé de développer ses méthodes et d'asseoir sur des bases logiques rigoureuses l'édifice de la science (ce qui fut, en gros, l'œuvre de la première moitié de XIXe siècle), un léger malaise, puis des tendances nouvelles se manifestèrent, dont nous avons cherché tout à l'heure à déterminer les causes.

En creusant la conception algébriste des mathématiques, en pénétrant aussi avant que possible dans son principe, nous étions arrivés à la formule suivante : la

Mathématique idéale se réduirait à une synthèse algébrico-logique, cette synthèse se faisant suivant les règles du jeu, lesquelles sont arbitraires. Or, à cette formule, pour diverses raisons indiquées plus haut, les mathématiciens de la fin du XIXe siècle ne pouvaient plus souscrire.

Il est bien évident tout d'abord que le mathématicien ne saurait construire dans le vide. Il importe que ses théories soient applicables à la géométrie et à la physique. Or, les besoins de ces sciences obligent le savant à étudier des relations mathématiques qui ne se réduisent pas à des combinaisons algébriques. Il y a plus. A l'intérieur même de l' « Analyse mathématique », nous ne pouvons réaliser des progrès et aller au fond des notions que nous étudions qu'en nous échappant plus ou moins du cadre de l'algèbre. Ajoutons que pour justifier et hiérarchiser les théories, pour discuter les hypothèses sur lesquelles elles sont fondées, pour les perfectionner et les enrichir, nous devons nécessairement faire entrer en jeu d'autres opérations de l'esprit que la pure et simple combinaison logique.

Nous nous y trouvons d'autant plus obligés que notre faculté de combinaison triomphe davantage. Sentant, en effet, la possibilité de construire des sciences fictives infiniment variées reposant sur des définitions et des postulats arbitraires, nous nous trouvons paralysés par l'excès même de notre puissance. Nous comprenons qu'un choix est nécessaire entre les innombrables constructions que nous pouvons réaliser. Et ainsi des deux parties dont se compose ordinairement l'œuvre du mathématicien — sélection des idées et démonstration, — la première prend de nouveau une importance prépondérente par rapport à la seconde.

Telles sont les remarques auxquelles aboutit l'étude que nous avons faite dans les pages précédentes. Mais, de ces remarques, nous n'avons tiré jusqu'ici qu'une conclusion négative : elles nous ont montré que la conception synthétiste des Mathématiques devait être abandonnée. Pour savoir si cette conception a été remplacée par une autre, si de nouvelles idées directrices, de nouveaux principes de recherches se sont développés dans l'esprit des savants, il nous faut examiner de plus près la physionomie actuelle de la science mathématique.

Ce qui nous frappe tout d'abord lorsque nous comparons la Mathématique de notre temps à celle des époques antérieures, c'est l'extraordinaire diversité et l'aspect imprévu des voies et des détours où cette science s'est engagée, c'est le désordre apparent dans lequel elle exécute ses marches et contre-marches, ce sont ses manœuvres et changements de front continuels. La belle unité qu'Euclide avait donnée à la géométrie et que Descartes voulait conférer à l'algèbre paraît irrémédiablement perdue. Et ce que l'observateur du mouvement scientifique est aujourd'hui le plus tenté d'admirer dans l'œuvre d'un mathématicien, ce n'est ni l'harmonie des résultats, ni la sûreté et la simplicité de la méthode, mais plutôt l'ingéniosité, la souplesse, que l'auteur doit à tout instant déployer pour atteindre ses fins.

Considérons par exemple la théorie des équations algébriques de degré n :

$$(1) \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + ax + a_0 = 0.$$

Le problème fondamental que posent ces équations est celui qui a trait à leur résolution. Or on sait qu'au début de la période moderne ce problème se trouvait engagé dans une impasse. Tous les efforts faits par les algébristes pour résoudre les équations de degré supérieur à 4 avaient piteusement échoué. Insuccès dont on pouvait s'étonner lorsqu'on croyait à la toute puissance de l'algèbre, mais que les modernes expliquent facilement. Qu'est-ce en effet que « résoudre une équation », au sens de l'algèbre élémentaire? C'est, par définition, trouver l'expression algébrique des racines en fonction des coefficients de l'équation. Or est-il certain que l'on puisse effectuer sur les coefficients d'une équation quelconque une combinaison d'opérations algébriques qui fournisse les racines de l'équation (1)? A priori il n'y a évidemment aucune raison pour qu'il en soit ainsi, et de ce qu'une chance heureuse se présente pour les équations des quatre premiers degrés, nous ne saurions conclure que cette chance nous favorisera jusqu'au bout. Et, de fait, la proposition suivante, pressentie par Gauss, a été démontrée en toute rigueur par le mathématicien norvégien Abel (2) : L'équation générale du cinquième degré

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

étant donnée, il n'est pas possible d'exprimer les racines de cette équation en fonction algébrique des coefficients.

Cette proposition d'Abel tranchait définitivement une question longtemps débattue. A-t-elle clos, cependant, comme on aurait pu s'y attendre, le chapitre de la science qui traite de la résolution des équations? Ce fut le con-

(1) C'est ce que fait observer Leibniz à son ami Tschirnhaus, qui faisait des efforts désespérés pour *transformer* les équations générales du cinquième et du sixième degré en équations susceptibles d'être résolues

(2) *Détermination de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* (1826) (Œuv. d'Abel, éd. Sylow-Lie, t. I, p. 66).

traire qui arriva. A peine la proposition en question était-elle établie que la théorie des équations, grâce aux travaux d'Evariste Galois (1) et d'Abel lui-même, rebondissait dans des directions nouvelles et prenait une importance plus grande que jamais. Il avait suffi, pour lui imprimer cet élan, de modifier l'énoncé du problème posé, et d'attaquer de biais la difficulté que l'on ne pouvait aborder de front. Au lieu de chercher une expression algébrique des racines des équations, on s'efforça d'isoler certaines familles ou classes d'équations telles que les racines des équations d'une même classe s'expriment par des formules algébriques en fonction les unes des autres : ainsi toutes les équations d'une classe seraient — si l'on en résolvait une — résolues en même temps, fait d'où le mathématicien tire des conséquences plus intéressantes et plus utiles que celles auxquelles pourrait conduire le calcul effectif des valeurs des racines. Adoptant un point de vue un peu différent, on peut également se demander quels sont les nombres qu'il faudrait *adjoindre* aux nombres « *ordinaires* » (nombres rationnels et nombres calculables par radicaux) pour que les racines de l'équation puissent être exprimées, par des formules algébriques, au moyen des nombres *ordinaires* et nombres *adjoints*. De la forme, assez imprévue, ainsi donnée au problème des équations, nait une théorie extrêmement féconde.

(1) Le mémoire fondamental de Galois (mort à vingt ans en 1832) ne fut publié qu'en 1846 dans le *Journal de Liouville* : « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux ». Les voies qui conduisaient aux découvertes de Galois avaient été préparées par Lagrange, Abel, Cauchy. Ces découvertes furent continuées d'autre part par les travaux d'Hermite, Jordan, Klein et de nombreux autres analystes. Cf. M. Winter, la *Méthode dans la Philosophie des Mathématiques*, p. 146 et suiv.

L'étude du problème de l'intégration nous suggère des remarques semblables.

On sait que le calcul des intégrales définies

$$y = \int_0^x \sqrt{a_n x^n + \dots + a_0}\, dx\,; \quad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_n x^n + \dots + a_0}}$$

portant sur la racine carrée d'un polynome en x, ne peut être effectué en algèbre élémentaire que si les polynomes sont de degré 1 ou 2 (n égal à 1 ou à 2). Si n est plus grand que 2, ce calcul devient aussi impossible que l'est la résolution d'une équation algébrique du cinquième degré. Ayant reconnu cette impossibilité, va-t-on renoncer à étudier plus longtemps les intégrales y et z dans lesquelles n a la valeur 3 ? Nullement, car on découvre une voie détournée qui permet de pénétrer au cœur de leurs propriétés. Lorsque z est égal à l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}},$$

x est inversement une certaine fonction de z, que j'appelle $p(z)$. Or on constate que cette fonction est facile à construire et jouit de propriétés extrêmement remarquables. Elle appartient à la famille des « fonctions elliptiques », qui est apparentée à celle des fonctions trigonométriques, mais est beaucoup plus générale. Dès lors, plus de difficulté. Au lieu de s'attaquer directement à l'intégrale qui donne la valeur de z, on l'étudiera indirectement en analysant les propriétés de la fonction $p(z)$. — On constate d'autre part, que l'intégrale définie

$$y = \int_0^x \sqrt{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a} \, dx$$

se trouve être une fonction (fonction elliptique) de z, qui peut être regardée comme connue lorsqu'on connaît $p(z)$; plus généralement, la théorie des « fonctions elliptiques » permet d'étudier les intégrales de toutes les fonctions de x qui sont des expressions rationnelles par rapport à x et à la racine carrée d'un polynome en x du troisième ou du quatrième degré (1).

Lorsque, dans les intégrales y et z ci-dessus, le degré n est supérieur à 4, la méthode des fonctions elliptiques nous refuse ses services. Nous nous trouvons avoir dépassé les limites de son champ d'action. Qu'à cela ne tienne ; nous prendrons une autre route, plus détournée encore. Nous ramènerons l'étude des intégrales y et z non plus à la considération d'une fonction d'une variable $p(z)$, mais à l'étude simultanée de plusieurs fonctions de plusieurs variables, fonctions d'un type remarquable dites *fonctions abéliennes.*

Si maintenant, laissant le chapitre des intégrales définies, nous passons à celui des équations différentielles — l'un des plus importants de l'Analyse moderne — nous verrons se multiplier et se diversifier de plus en plus les méthodes de recherche.

On a étudié avec succès certains types d'équations différentielles, appartenant à la famille des équations linéaires, mais on est dans cet ordre d'idées, parvenu, à un point au-delà duquel il semble que l'on ne puisse plus progresser. Que fait-on ? On va chercher dans une partie des mathématiques fort éloignée des équations différentielles un nouvel instrument de calcul : la fonc-

(1) Intégrales de la force $\int_0^x R(x, u)\,dx$, où R est une fonction rationnelle des deux quantités x et u et où $u = \sqrt{P(x)}$, P étant polynome en x du 3e ou 4e degré.

tion *automorphe, fuchscienne ou kleinéenne* (1), dont la définition repose sur la théorie des groupes de substitutions, et qui généralise une fonction particulière rencontrée dans un problème relatif aux fonctions elliptiques.

Dans la théorie des équations différentielles non-linéaires, des difficultés plus grandes encore paraissent rendre tout progrès impossible ; car si l'on met à part un petit nombre d'équations immédiatement intégrables, on n'aperçoit chez les autres aucune propriété qui appartienne à un type connu. Mais, dans cette forêt vierge, voici qu'une piste se présente inopinément. On constate qu'il y a une étroite corrélation entre les divers caractères spécifiques des équations différentielles et la nature de leurs points singuliers. De cette idée M. Painlevé tire le principe d'une classification des équations différentielles qui le conduit à de remarquables découvertes.

Ces exemples, choisis entre beaucoup d'autres, seront sans doute suffisants pour faire ressortir la variété des points de vue qui caractérisent la Mathématique contemporaine. Plus nous regarderons celle-ci, plus nous serons frappés de l'abondance des ressources dont elle dispose. Mais nous constaterons en même temps que cette richesse a pour conséquence un certain manque d'ordre et de cohérence. Les théories semblent mal délimitées et proportionnées ; elles s'entre-croisent, chevauchent les unes sur les autres ; elles sont introduites *ex abrupto* sans raison apparente, puis abandonnées, puis reprises

(1) L'existence de ces fonctions fut démontrée par Henri Poincaré en 1881. — Poincaré étudia dans une série de mémoires, les propriétés dont elles jouissent et les applications qu'on en peut faire à l'étude des équations différentielles linéaires.

sans que l'on saisisse les principes qui président à leur formation et à leur enchaînement.

De là résulte, d'une part, que le plan de l'édifice mathématique n'apparaît pas clairement. D'autre part les règles qui régissent le travail de recherches, les méthodes qui permettent à la science de se développer, semblent être de plus contingentes et incertaines.

C'est ici le lieu de rappeler les réflexions, bien souvent citées, qu'inspirait à Galois, vers 1830 (1), l'expérience de sa brève et brillante carrière mathématique : « De toutes les connaissances, on sait que l'analyse pure est la plus immatérielle, le plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la mieux ordonnée. Mais c'est erreur... Tout cela étonnera fort les gens du monde, qui, en général, ont pris le mot Mathématique pour synonyme de régulier. Toutefois, là comme ailleurs, la science est l'œuvre de l'esprit humain, qui est plutôt destiné à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques... pourrait les déduire régulièrement et comme machinalement de quelques principes combinés par des méthodes uniformes... Mais il n'en est pas ainsi ; si la tâche du savant est plus pénible, et partant plus belle, la marche de la science est moins régulière : la science progresse par une série de combinaisons où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la

(1) *Manuscrits et papiers inédits de Galois*, publiés par J. Tannery. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906, p. 259-60.

science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à chacun d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent ; quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés ».

La méthode de recherche que décrit ici Galois, c'est, on le voit, la méthode expérimentale. Pour triompher des obstacles qui barrent la route de la logique, l'analyste a recours, en somme, aux procédés et aux artifices du physicien ou du naturaliste.

Si le mathématicien se trouve ainsi obligé de tâtonner et d'user d'expédients variés pour conduire ses recherches, du moins sait-il avec toute la précision désirable ce qu'il cherche et ce qu'il veut faire ?

La conception synthétiste de la science devait — nous l'avons vu — conduire à cette idée que les théories mathématiques peuvent être construites arbitrairement, pourvu qu'elles obéissent à certaines règles formelles et conventionnelles. Usant de sa liberté, le mathématicien a naturellement commencé par étudier les théories faciles, c'est-à-dire celles auxquelles le langage de l'algèbre s'adaptait exactement. Mais, puisque ces théories ne nous suffisent pas, comment nous y prendrons-nous et dans quel sens nous dirigerons-nous pour les dépasser ?

On dira peut-être que le mathématicien sera guidé dans sa marche par la préoccupation d'aboutir à des résultats intéressants et féconds. En mathématique comme en physique, c'est le succès qui justifiera la recherche et qui la déterminera à la façon d'une cause finale. Mais qu'est-ce au juste que le succès ? Car il est clair que si nous restons dans le domaine de l'Analyse pure, le succès ne peut plus se manifester comme en physique par une plus ou moins grande conformité de la théorie avec les données de l'expérience.

En fait, le mathématicien ne connaît aucun principe, aucun critère objectif qui lui permette de décider si une théorie vaut ou non la peine qu'il dépense pour a construire. Force lui est, pour diriger son activité, de s'en rapporter à son flair, de s'abandonner à son inspiration espérant qu'elle lui suggérera des aperçus nouveaux. « Ce qu'il faut — écrit Emile Borel (1) sans pouvoir préciser davantage — c'est une idée heureuse, c'est l'introduction de telle notion qui permettra de grouper des faits connus et ensuite d'en découvrir de nouveaux... L'invention proprement dite, l'invention vraiment féconde consiste, en mathématiques comme dans les autres sciences, dans la découverte d'un point de vue nouveau pour classer et interpréter les faits. »

On voit que la tâche du mathématicien est loin d'être clairement tracée et l'on comprend l'embarras où l'inventeur, fréquemment, paraît se trouver. Si les observations que nous avons présentées sont justes, on pourrait chercher à expliquer cet embarras par deux causes différentes, et à première vue opposées. Le mathématicien moderne est pris au dépourvu parce qu'il dispose d'une puissance créatrice trop étendue : pouvant construire une infinité de théories, pouvant s'orienter dans une infinité de directions, il ne sait laquelle choisir. Mais il est embarrassé également parce que les notions et les propriétés qu'il étudie résistent à ses efforts, ne se plient qu'imparfaitement à sa volonté; on sent que ses notions

(1) Logique et intuition en Mathématiques, *Revue de Métaphysique*, mai 1907, p. 281.

ne sont pas entièrement son fait ; il ne peut plus, comme l'algébriste du XVIIIe siècle, regarder la science comme étant le résultat pur et simple de ses constructions.

Cette dernière remarque met en lumière un caractère général, un trait nettement accusé de l'œuvre mathématique contemporaine, qui fixe bien la physionomie de cette œuvre par rapport aux spéculations des anciens géomètres et des algébristes.

Entre la conception grecque des Mathématiques et la conception contraire des algébristes synthétistes il y avait, remarquons-le, une ressemblance. L'une et l'autre supposent une sorte d'harmonie préétablie entre le but et la méthode de la science mathématique, entre les objets que poursuit cette science et les procédés qui lui permettent d'atteindre ces objets.

Ainsi, dans la géométrie euclidienne, — c'est un point sur lequel nous avons insisté (1) — les mêmes propriétés qui sont recherchées en tant que fins comme belles et harmonieuses, jouent également le rôle d'intermédiaires conduisant à des propriétés plus lointaines ; tout théorème est à la fois un objet et un instrument de recherche.

Pareillement, dans la science algébrique parfaite, les objets étudiés, étant uniquement des composés ou des assemblages d'éléments, ne contiennent ni plus ni moins que les éléments eux-mêmes, et la fin que l'on poursuit se trouve par conséquent déterminée par les moyens que l'on met en œuvre. — Ainsi, par exemple, après avoir étudié algébriquement les courbes du second degré (ou sections coniques), Descartes nous invite à nous élever progressivement à des courbes de plus en plus « composées » (de degré de plus en plus élevé). Le

(1) Voir plus haut, chapitre premier.

problème ainsi posé est moulé sur la forme dans laquelle s'opère la composition algébrique. On se propose d'étudier, entre toutes les courbes, celles qui correspondent à des équations polynomales et on les envisage dans l'ordre même suivant lequel les équations correspondantes procèdent les unes des autres. — Semblablement, lorsque l'on définit la fonction analytique transcendante comme la somme d'une série convergente, on vise à constituer une théorie où objet et instrument de démonstration se fondront l'un dans l'autre, puisque l'on donne comme but au calcul des séries l'étude des propriétés mêmes de ces expressions.

Si nous nous tournons maintenant vers la science contemporaine, que voyons-nous ? L'harmonie dont nous venons de parler a presque complètement disparu. Lorsqu'on nous propose un problème, il nous est impossible de prévoir quels sont les procédés — le plus souvent très indirects — qui permettront de le résoudre. Inversement, quelque rompu qu'il soit au mécanisme de son art, le mathématicien ne voit pas toujours clairement quels sont les problèmes auxquels il doit appliquer cet art. De là vient qu'aujourd'hui ce n'est pas nécessairement le même homme qui est, en mathématiques, un inventeur original et un habile technicien ; les qualites qui font de l'un un novateur perspicace, apte à la découverte, et de l'autre un maître de la démonstration, ont cessé, semble-t-il, d'être les mêmes.

En d'autres termes, un dualisme se manifeste au sein des Mathématiques pures. L'appareil démonstratif, d'une part, doit satisfaire à certaines conditions déterminées, et il possède certains caractères propres, qui sont eux-mêmes que nous avons mis en lumière dans les deux chapitres précédents (car, en ce qui concerne la démonstration, rien n'a été changé par les générations modernes à l'idéal de l'école algébriste et synthéthiste). Mais, d'autre part, les faits dont la Mathématique poursuit aujourd'hui l'étude paraissent dépendre de conditions autres que celles de la démonstration. Non seulement ces faits ne résultent pas des combinaisons algébriques, mais on dirait qu'ils sont, en quelque manière, réfractaires à l'algèbre et ne se laissent qu'imparfaitement enfermer dans les formules de celle-ci. Les progrès réalisés par l'Analyse semblent ne pouvoir être acquis qu'au prix d'une lutte dont la marche est incertaine et l'issue toujours douteuse.

II. — L'objectivité des faits mathématiques.

Pour expliquer le caractère et les tendances des Mathématiques contemporaines, nous avons été amenés à employer certaines expressions, dont nous nous étions déjà servis lorsque nous considérions les Mathématiques grecques, mais qu'en étudiant la période algébrique de la science, nous avions le plus possible évitées. Nous avons parlé de *notions* ou *d'objets mathématiques*, de *faits mathématiques*. Expressions commodes, mais ambiguës. Ne doit-on leur attribuer qu'une valeur métaphorique, ou peut-on, au contraire, en se plaçant au point de vue de la science actuelle, leur donner une signification précise et positive ?

Quoi que l'on pense de cette question, il est un point qui, en tout cas, nous paraît acquis. C'est que, s'il y a sous les formules et les déductions mathématiques des notions objectives, ces notions ne sont pas d'origine empirique. On remarquera que nous n'avons fait aucune allusion, dans le cours de cet ouvrage, aux doctrines qui, pour des motifs et avec des arguments divers, ont cherché à fonder le système des Mathématiques sur des données expérimentales. C'est qu'en effet, si ces doctrines ont joué un rôle capital dans le développement des idées philosophiques, elles ne paraissent pas avoir influencé d'une manière appréciable la pensée des mathématiciens. Les fondateurs de la science grecque étaient aussi éloignés que possible de l'empirisme. Descartes, Leibniz, y étaient également opposés. Les purs algébristes, d'autre part, devaient, s'ils restaient fidèles aux principes de leur art, se désintéresser de la nature des éléments qu'ils combinaient, en sorte qu'ils n'avaient pas à prendre parti entre l'empirisme et les doctrines contraires. Lorsqu'enfin, vers la fin du XIX[e] siècle, certains mathématiciens à tendances philosophiques cherchèrent à traiter d'un point de vue scientifique rigoureux la question de l'origine des notions mathématiques, ce fut pour réfuter — définitivement semble-t-il — la doctrine des empiristes.

Nous n'avons pas besoin de reproduire ici les arguments que l'on a fait valoir contre cette doctrine, arguments auxquels les mathématiciens de notre temps ont presque unanimement adhéré. On les trouvera exposés notamment dans les ouvrages philosophiques d'Henri Poincaré. Nous considérerons donc comme admis que les notions mathématiques ne sont pas empruntées au monde sensible où elles ne se trouvent jamais qu'imparfaitement réalisées ; elles ne sont pas non plus un produit de l'abstraction, car elles sont exemptes de tous les caractères sensibles dont est formée notre perception des objets réels ; enfin les propositions des mathématiques ne sauraient être regardées comme objectives au sens empirique du mot, car aucune expérience physique ne pourra jamais démontrer la vérité ou la fausseté de leurs postulats.

Sans doute ne faut-il pas conclure de là que notre science mathématique soit indépendante de l'expérience. D'après Henri Poincaré, au contraire, la plupart de nos théories seraient, en dernière analyse, déterminées par des considérations d'origine expérimentale. Mais ce n'est pas en raison d'une nécessité fondamentale, c'est uniquement pour des motifs accidentels qu'il en est ainsi. Afin d'obtenir une Mathématique qui soit applicable à l'étude de la physique et qui soit d'accord, d'autre part, avec les conditions ordinaires de la connaissance humaine, nous devons, entre une infinité de systèmes de postulats théoriquement possibles, choisir ceux-ci et non pas ceux-là, et notre choix est guidé par l'expérience de nos sens ; mais ce n'est pas ce choix qui saurait conférer aux postulats et aux notions de notre science un caractère d'objectivité.

On voit comment, de cette théorie de la science, certains penseurs ont pu glisser vers la doctrine néo-nominaliste qu'a développée, il y a vingt ans, dans une série d'articles remarquables, M. Edouard Le Roy (1). M. Le Roy s'est défendu d'être nominaliste, et cette qualification ne convient pas, en effet, à sa philosophie ; mais il ne saurait s'étonner qu'on l'ait appliquée à sa conception des sciences mathématiques et physiques. Suivant une formule de Le Roy qu'a longuement discutée Henri Poincaré (2), *le savant crée le fait.* « Les faits dit-il ailleurs (3), sont taillés par l'esprit dans la matière amorphe du Donné ». « La (4) science [*rationnelle*] n'a pas

(1) Henri Poincaré s'est prononcé, quant à lui, en termes catégoriques contre la doctrine néo-nominaliste.

(2) *Science et Philosophie,* apud *Revue de Métaphysique,* 1899 et 1900.

(3) *Revue de Métaphysique,* 1899, p. 517.

(4) *Ibid.* p. 559.

pour objet d'atteindre je ne sais quelle nécessité extérieure qui se cacherait toute constituée dans le réel ; sa mission est de fabriquer la vérité même qu'elle recherche ». En ce qui concerne, spécialement, le fait mathématique, il est (1) une « résultante inévitable des postulats antérieurement admis dans le discours ; il revêt une apparence d'extériorité quand les postulats qui le déterminent ne ne sont pas explicitement dégagés ». « Ce qu'il y a au fond d'un fait mathématique, c'est l'activité régulière de l'esprit autant que celui-ci travaille à l'établissement du discours ».

Prise à la lettre, cette thèse serait, sous une forme particulièrement explicite et catégorique, celle même qui résulte de la conception algébrico synthétique de la science à laquelle nous nous sommes attachés plus haut. Il n'y a dans les raisonnements des savants, il n'y a dans les faits sur lesquels portent ces raisonnements, qu'une combinaison artificielle d'éléments façonnés par notre esprit. La science est entièrement l'œuvre de l'homme, ce qui permet de donner de la genèse des théories une explication pragmatique beaucoup plus absolue que celle dont Henri Poincaré s'était fait l'interprète. Le fait scientifique — écrit M. Le Roy (2) — « n'est pas la réalité telle qu'elle apparaîtrait à une intuition immédiate, mais une adaptation du réel aux intérêts de la pratique et aux exigences de la vie sociale ».

Doctrine parfaitement cohérente, et d'où l'on tire une définition très nette de la science dont se contenteront de nombreux savants. Mais le sort de cette doctrine est lié, si nous ne nous trompons pas, à celui des conceptions et des vues scientifiques dont nous avons, dans un pré-

(1) *Revue de Métaphysique*, 1900, p. 45.
(2) Art. cit., *Revue de Métaphysique*, 1899, p. 379.

cédent chapitre, constaté l'insuffisance. Les raisons qui nous ont fait renoncer plus haut à considérer la Mathématique comme un vaste système algébrico-logique doivent également nous empêcher d'y voir une construction conventionnelle, une simple création de l'esprit humain. La doctrine nominaliste ne saurait expliquer ni le caractère indéterminé, la nature insondable des notions mathématiques, ni l'impression d'inachèvement, d'impuissance à atteindre leur but que nous donnent les théories, ni plus généralement, le défaut d'harmonie, l'opposition que nous avons relevée entre l'objet des recherches du mathématicien et les méthodes dont il fait usage.

Il est vrai que, sinon précisément le nominalisme, du moins la doctrine pragmatiste, fournit une explication facile du rôle capital que joue le *choix* dans l'édification des théories mathématiques ; c'est, dira-t-on, grâce à une série de choix successifs entre plusieurs constructions possibles que nous obtiendrons une science adaptée à nos besoins pratiques. Mais, si l'on se reporte à ce que nous avons dit plus haut des conditions dans lesquelles s'exerce le choix du mathématicien, on constate que cette explication ne saurait suffire dans tous les cas. Le choix intervient, non seulement dans la détermination des définitions et des postulats, mais aussi, et surtout, dans les théories les plus dérivées et les plus élevées des Mathématiques (qui sont celles où la route à suivre est la plus incertaine). Or, si l'on peut penser que les postulats — celui d'Euclide par exemple — sont choisis dans l'intention de constituer une science commode et pratique, on ne saurait soutenir la même thèse à propos de théories qui n'auront peut-être jamais aucune relation avec les faits expérimentaux. Il n'est pas de mathématicien qui ne soit fermement convaincu qu'une théorie abstraite a une valeur par elle-même, en dehors des applications auxquelles elle peut donner lieu. Comment, dès lors, faire dépendre cette valeur, et la discrimination qui nous permet de l'apercevoir, de considérations utilitaires ?

Si, d'ailleurs, la Mathématique s'adapte à peu près exactement aux conditions expérimentales, ce n'est point en vertu de ses propriétés intrinsèques, mais par suite de circonstances contingentes. Il se trouve qu'une science relativement simple permet d'expliquer les phénomènes de la nature. C'est là une chance heureuse qui aurait pu fort bien ne pas se présenter. C'est ainsi que, si le système solaire, au lieu d'être isolé, se trouvait voisin d'étoiles grosses et nombreuses, dont l'attraction sur notre monde viendrait s'ajouter à celle du soleil, l'étude du mouvement de la terre au moyen des équations de la mécanique rationnelle deviendrait pratiquement impossible.

Aussi bien, lorsqu'ils soutiennent que notre science est « commode » et « adaptée à nos besoins », ce n'est point peut-être l'accord de cette science avec l'expérience que les pragmatistes nominalistes ont principalement en vue, mais plutôt le fait qu'elle est conforme à la nature de notre esprit et bien adaptée aux conditions dans lesquelles s'exerce notre activité intellectuelle. — En ce cas, la thèse pragmatiste nous paraît-on démentie par les conclusions auxquelles nous sommes parvenus plus haut. Nous reconnaissons que le mathématicien vise à constituer une science qui soit, au sens indiqué, aussi « commode » que possible ; mais nous constatons également qu'il n'y parvient pas, ou, plus exactement, que, malgré sa puissance et sa richesse, la mathématique commode ne saurait nous suffire. La méthode mathématique la mieux adaptée à nos besoins intellectuels est en effet, sans nul doute, celle de l'Algèbre. Or il y a, croyons-nous, antinomie entre les exigences de cette méthode et certaines spéculations qui s'imposent à l'esprit du mathématicien.

Ainsi nous sommes amenés à attacher une importance de plus en plus grande à ce conflit, intérieur à la science mathématique, que nous avons cherché plus haut à mettre en évidence, — conflit que les mathématiciens professionnels auront peut-être quelque peine à expliquer, mais dont ils ont, en maintes occasions, un sentiment très net et très vif.

Or, circonstance remarquable, si au lieu de nous attacher aux vues de M. Le Roy sur les théories mathématiques, nous envisageons l'ensemble de sa doctrine, nous y trouvons l'indication d'un conflit analogue. M. Le Roy admet, lui aussi, que l'esprit humain n'agit pas librement, mais qu'il est contraint dans ses créations, qu'il est obligé de tenir compte de nécessités qui lui sont étrangères. Il pense, comme nous, qu'il y a un désaccord irréductible entre la matière et l'instrument de notre connaissance. Mais M. Le Roy place autrement que nous la coupure qui divise le domaine de la connaissance discursive de celui des données objectives. Pour M. Le Roy, la science toute entière appartient au premier domaine, et le philosophe seul a le privilège d'entrer en contact avec la réalité, avec le donné primitif. Sans doute « il y a dans les faits un résidu mystérieux d'objectivité (1) ». Sans doute, si la connaissance humaine est par un certain côté « construction », elle est, par un autre, découpage, « morcelage » d'une matière étrangère. Mais la science, « occupée seulement du morcelage caractéristique de son point de vue », ne considère pas cette matière. C'est à la critique philoso-

(1) Art. cit., *Revue de Métaphysique*, 1899, p. 518.

phique qu'il appartient de la dégager. Or, lorsque nous observons de près les conditions dans lesquelles travaillent les mathématiciens modernes, nous sommes conduits, semble-t-il, à une conclusion différente. En effet, cette lutte de l'esprit avec une matière rebelle, que décrit M. Le Roy après M. Bergson, elle se manifeste, non seulement dans l'exercice de la connaissance philosophique, mais au sein même des mathématiques pures. Il en est de la distinction posée par M. Le Roy comme de la séparation que l'opinion commune — en simplifiant outre-mesure l'idée de Pascal — a coutume d'établir entre l'esprit de finesse et l'esprit géométrique. La séparation existe incontestablement, mais elle n'est pas entre la science mathématique et un autre domaine; elle est entre deux aspects de notre pensée qui se rencontrent dans presque tous nos actes intellectuels; en mathématiques déjà, comme on l'a bien souvent fait observer, l'esprit de finesse joue un rôle considérable. Semblablement, certains mathématiciens ne pensent pas qu'il y ait entre la pensée mathématique et la pensée vivante ou philosophique une différence aussi radicale que ne l'ont dit M. Bergson ou certains disciples de M. Bergson. C'est en ce sens qu'il faut interpréter les doutes ou malentendus qu'a fait naitre dans l'esprit de certains analystes, la théorie de la science proposée par l' « *Evolution créatrice* (1) ».

Pour approfondir les notions mathématiques, comme pour étudier les problèmes de la vie, il faut que l'esprit « se violente » ; il faut qu'il fasse, bon gré mal gré, entrer dans un moule, qui n'est pas fait pour la recevoir,

(1) Cf. E. Borel. L'évolution de l'intelligence géométrique, apud *Revue de Métaphysique*, 1907, p. 747 et suiv. Discussion : *Revue de Métaphysique*, 1908, p. 28 et p. 246.

une réalité réfractaire. Afin de rendre compte de cette résistance opposée par la matière mathématique à la volonté du savant, nous sommes obligés de supposer l'existence de *faits mathématiques* indépendants de la construction scientifique; nous sommes forcés d'attribuer une objectivité véritable aux notions mathématiques : objectivité que nous appellerons *intrinsèque* pour indiquer qu'elle ne se confond pas avec l'objectivité relative à la connaissance expérimentale.

Quel sens métaphysique convient-il d'attribuer, en Mathématique pure, à ce mot « objectivité », ainsi qu'aux termes *réalité, matière, existence* ? C'est là une question à laquelle le mathématicien n'est pas tenu de répondre lui-même. Il se borne à exprimer — dans les termes qui lui paraissent répondre le mieux à l'état de la science mathématique — le résultat des constatations et des réflexions auxquelles le conduit l'exercice de cette science.

Essayons donc de dégager, en résumant et groupant des remarques déjà faites, les caractères mathématiques des faits et notions étudiés par les géomètres et par les analystes de notre époque.

Le fait mathématique est indépendant du vêtement logique ou algébrique sous lequel nous cherchons à le représenter : en effet l'idée que nous en avons est plus riche et plus pleine que toutes les définitions que nous en pouvons donner, que toutes les formes ou combinaisons de signes ou de propositions par lesquelles il nous est possible de l'exprimer. L'expression d'un fait mathématique est arbitraire, conventionnelle. Par contre, le fait lui-même, c'est-à-dire la vérité qu'il contient, s'impose à notre esprit en dehors de toute convention. Ainsi l'on ne pourrait pas rendre compte du développement des théories mathématiques si l'on voulait voir dans les formules algébriques et dans les combinaisons logiques les objets mêmes dont le mathématicien poursuit l'étude. Au contraire tous les caractères de ces théories s'expliquent aisément si l'on admet que l'algèbre et les propositions logiques ne sont que le langage dans lequel on *traduit* un ensemble de notions et de faits objectifs.

Les algébristes et les logiciens ont raison de regarder la Mathématique comme un système algébrico-logique. C'est en effet sous cette forme que se présentent les théories déjà acquises, et c'est sous cette forme également qu'on s'efforce d'exprimer les faits nouveaux que l'on veut incorporer dans la science. Prenons et démontons une partie quelconque de l'édifice mathématique : nous n'y trouverons rien qu'un système de définitions et de postulats, énoncés dans la langue de la logique et de l'algèbre et associés suivant les règles de ces deux arts.

Mais si nous cherchons à discerner les raisons qui, dans le travail de recherche, ont déterminé le choix du mathématicien, — si, faisant, autant que possible, abstraction de la forme de l'exposition et de l'appareil de la démonstration, nous envisageons en eux-mêmes, comparons les uns aux autres, regardons sous toutes leurs faces, les résultats auxquels aboutissent les théories, les objets vers lesquels elles sont dirigées, — nous observons alors que les caractères les plus frappants de ces objets, les mérites que les mathématiciens semblent rechercher en eux, n'ont presque rien de commun avec les qualités formelles de la théorie algébrico-logique.

Quelles sont, en effet, les qualités auxquelles se reconnaît la beauté et la solidité d'une *théorie*? Elles résident, d'une part, dans la simplicité et la précision — la compréhension bien déterminée — des définitions et des postulats, d'autre part dans l'enchaînement rigoureux et la bonne ordonnance des déductions et des constructions. Or, nous l'avons vu, les faits mathématiques sont en eux-mêmes totalement indifférents à l'ordre dans lequel on les obtient; on ne saurait, d'autre part, sans les appauvrir, fixer exactement leur compréhension; et il serait évidemment déraisonnable de faire dépendre leur valeur d'une simplicité qui, peut-être, n'existe que par rapport à nous et aux habitudes de notre intelligence.

Il n'y a rien là qui puisse nous surprendre si nous admettons la conception qui assimile la théorie à une traduction. De même que les diverses langues parlées sur la terre ont chacune leur caractère et leur génie propre, et ne supportent pas la traduction littérale, de même on ne saurait s'étonner que les faits mathématiques ne puissent être qu'imparfaitement rendus dans le langage algébrico-logique. Ce langage a ses exigences, et il a ses élégances. Mais, de ce qu'on a tenu compte des unes et des autres, on ne saurait conclure qu'il exprime exactement ce que nous voulons lui faire dire. D'autres exigences doivent, en effet, être satisfaites, qui tiennent aux caractères des faits exprimés.

Cherchons, cependant, à nous rendre un compte plus précis de la nature de ces faits, des conditions dans lesquelles ils déterminent l'orientation de la recherche mathématique, de la façon dont nous pouvons les aborder et en prendre possession. Nous allons ici encore essayer de nous éclairer en considérant quelques cas particuliers.

Nous nous sommes efforcés de montrer plus haut que la notion de *fonction mathématique* ne se ramène ni à celle de combinaison quantitative, ni aux principes logiques élémentaires. Qu'y-a-t-il donc, en réalité, au fond de cette notion ? Peut-être pourrons-nous nous en faire une idée si nous remontons à l'origine première du concept de fonction, si nous envisageons ce concept tel qu'il se présente primitivement à notre esprit, avant toute élaboration algébrique et logique.

Concevoir une fonction d'une variable — une correspondance entre deux variables mathématiques, — c'est, en définitive, admettre qu'entre deux termes variant simultanément il existe une relation toujours identique à elle-même ; c'est postuler que, sous le changement apparent de l'antécédent et du conséquent, il y a quelque chose de constant. Or, ce postulat, nous le connaissons bien. C'est celui qui préside, du haut en bas de l'échelle, à toutes les sciences physiques et naturelles. C'est le concept général de *loi*.

Aussi bien les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions mathématiques ne sont-elles pas, à peu près, du même ordre que celles dont doivent triompher les physiciens ? Étant donnée une relation conçue a priori, par exemple l'action réciproque de deux molécules électrisées placées dans un certain diélectrique, le physicien cherche à la traduire par une relation quantitative. Il en est de même en Analyse : nous avons avant tout travail la conception de la fonction $y(x)$, c'est-à-dire une intuition de la loi mathématique d'après laquelle, lorsque nous choisissons une valeur arbitraire de x, une certaine valeur de y se trouve par là même désignée ; puis nous nous efforçons d'obtenir des égalités exprimant le moins mal possible cette étrange solidarité des deux variables x et y.

La correspondance mathématique n'est pas une conséquence des opérations algébriques ; elle est l'objet même qui les détermine. Derrière cet échafaudage de symboles que nous superposons indéfiniment les uns aux autres, — comme ferait un habile jongleur se plaisant à accumuler les difficultés dans ses exercices, — il y a des lois, unes et indécomposables, dont la formule adéquate nous échappe, mais que nous pressentons cependant, et que nous nous ingénions à traduire dans notre langage algébrico-logique. Celui qui ne regarderait que l'échafaudage s'imaginerait peut-être que les mathématiques ne sont en effet autre chose qu'un édifice adroitement construit, dont les parties s'emboîtent bien les unes dans les autres. Mais, ce serait oublier que, pour diriger tant d'efforts, il faut un but vers lequel ils convergent, un modèle qu'ils tendent à réaliser.

Le problème le plus général dont s'occupe l'Analyse mathématique se laisserait donc, croyons-nous, définir ainsi : Étant donnée l'idée générale de loi mathématique que nous trouvons dans notre entendement, déterminer les diverses formes algébriques concrètes que nous sommes en mesure de lui donner. En approfondissant cette question, nous découvrons d'abord que la notion générale de relation fonctionnelle comporte des déterminations particulières remarquables ; la fonction peut rester ou ne pas rester finie, être continue ou discontinue, avoir une dérivée ou n'en point avoir. Nous nous limitons provisoirement aux fonctions continues ayant une dérivée, et nous poursuivons notre analyse. Déplaçant dans un plan la variable indépendante x, nous observons que la fonction $y(x)$ perdra généralement ses propriétés de continuité dans certaines régions du plan : ces régions pourront être des points, ou des lignes, ou des surfaces ; d'où résulte une particularisation de plus en plus grande de la notion initiale de fonction : autrement dit, une classification des fonctions. Quelle est, alors, la représentation analytique des diverses familles de fonctions ? Quelle connexion ont-elles avec d'autres fonctions plus simples ? Quels sont les signes distinctifs auxquels nous saurons les reconnaître ? Autant de problèmes que les analystes doivent résoudre. De ces problèmes, quelques-uns ont reçu leur solution, d'autres l'attendent encore ; mais ceux-là même sont posés d'une façon nécessaire, objectivement : nous ne devons, ni ne pouvons les éluder.

Transportons-nous — pour rendre notre conclusion plus claire en l'appliquant à un cas plus simple et plus spécial — sur le terrain de la géométrie. Qu'est-ce, à proprement parler, qu'une courbe géométrique, une ellipse par exemple ?

Sous le mot « ellipse » ne doit-on voir qu'un renvoi à une définition donnée en termes logiques, telle que la suivante : « on appelle ellipse la courbe lieu des points dont les distances à deux points fixes appelés foyers ont une somme constante » ? Cette manière de voir n'est pas acceptable, car une définition quelconque de l'ellipse n'est, évidemment, que l'énoncé d'une propriété particulière de la courbe, arbitrairement choisie entre une infinité d'autres ; or, nous l'avons dit déjà, c'est l'ensemble des propriétés de l'ellipse, et non pas seulement l'une d'elles, qui constitue un être mathématique.

Pour une raison semblable nous ne saurions identifier la notion d'ellipse avec celle de l' « équation de la courbe ». — Essaierons-nous alors de caractériser l'ellipse par sa figure, en la regardant, par exemple, comme un ensemble de points, qui sont juxtaposés dans certaines conditions ? Mais présenter l'ellipse comme un composé de points est évidemment une vue artificielle. Non : une ellipse est un tout qui ne comporte pas de parties ; c'est une sorte de monade leibnizienne. Cette monade est grosse des propriétés de l'ellipse ; je veux dire que ces propriétés — alors même qu'elles n'ont pas été explicitement formulées (et elles ne sauraient l'être puisqu'elles sont en nombre infini)— sont contenues dans la notion d'ellipse. Notre tâche consiste alors à disséquer le tout qui nous est offert afin de faire apparaître les éléments qui rendent le mieux compte de l'allure et des caractères de la courbe. C'est ainsi que l'analyse ou décomposition de l'arc en ses éléments nous conduit à caractériser la courbe par sa tangente ou par sa « courbure » en un point quelconque. Dans le même esprit nous sillonnons l'aire de l'ellipse par des droites parallèles aux axes de symétrie, ou par des droites issues du centre et par des arcs de cercles, et de la longueur de ces sillons nous déduisons la grandeur de l'aire courbe et de ses parties. Tantôt nous considérons l'ellipse comme l'intersection d'un cône et d'un plan, tantôt comme la projection orthogonale d'un cercle, tantôt comme le lieu des points jouissant de telle ou telle propriété. Infiniment nombreux sont les biais par où l'on peut aborder l'étude de l'ellipse. « Mais nous sommes, comme le dit Platon (1), dans une situation critique, où c'est une nécessité pour nous de tourner les objets de tous côtés pour en sonder la vérité ».

Les caractères que nous sommes ainsi conduits à attribuer aux faits mathématiques nous expliquent les difficultés contre lesquelles se débat le savant qui cherche à les connaître. Il lui faut conquérir une matière rebelle et imposer à cette matière une forme qui ne lui convient pas. De là les tâtonnements, les hésitations, les artifices dont nous avons parlé plus haut, et qui ne sont que les péripéties de l'investissement ou de l'assaut, par lesquels on réduit des notions à première vue impre-

(1) *Théétète.*

nables. Quels sont d'ailleurs les moyens mis en œuvre dans ce combat ? On ne saurait évidemment prendre possession des notions importantes qu'au prix de certains sacrifices. Pour faire entrer la réalité mathématique dans le moule algébrico-logique, il faut la découper, la morceler, il faut se résigner à ne la pénétrer que partiellement et sous un certain angle, quitte à la réattaquer ensuite d'un autre côté. De là la variabilité, l'indétermination, l'aspect toujours provisoire, des théories. Pour analyser complètement un fait mathématique, il faudrait l'étudier d'une infinité de points de vue différents, multiplier sans limite le nombre des combinaisons algébrico-logiques dont on se sert. La science — disait M. Painlevé de la Mécanique au premier Congrès international de philosophie (2) — est une méthode convergente, qui, par approximations successives, tend vers la réalité.

On voit combien le point de vue du savant qui comprend ainsi sa mission s'éloigne du point de vue synthétiste des logiciens et des algébristes.

Sans doute, le travail du mathématicien aboutit toujours à une synthèse ; néanmoins, la synthèse est désormais reléguée au second plan dans l'ordre des préoccupations du savant. Ce qui est aujourd'hui regardé comme essentiel dans le travail de découverte, c'est l'*analyse*, ainsi que nous le disions en commençant ce chapitre, — mais l'analyse entendue dans un sens nouveau. Après avoir été depuis le XVI[e] ou le XV[e] siècle — du moins, après avoir été surtout — un constructeur, un généralisateur, le mathématicien est devenu une sorte de scrutateur, qui analyse, à la manière d'un chimiste, une matière étrangère, infiniment complexe. C'est aussi, si l'on veut, un explorateur, qui tâche de s'orienter dans

(2) Cf, *Revue de Métaphysique*, 1900, p. 588.

un continent inconnu, et qui cherche à en découvrir les richesses, les régions « intéressantes », sans d'ailleurs savoir à l'avance de quel côté il doit au juste diriger ses recherches pour atteindre son but.

Ainsi, au cours du XIXe siècle, le jugement du mathématicien à l'égard des différentes parties de la science paraît s'être renversé. Ce qui naguère l'intéressait le plus, c'était la démonstration, c'étaient les procédés et le succès du calcul ; les résultats et les combinaisons obtenues pouvant évidemment diverger en tous sens et être multipliés à l'infini, on n'avait pas lieu d'attacher un grand prix à leur énumération ; l'unité que poursuivait la science ne pouvait être qu'une unité de méthode. Aujourd'hui, au contraire, c'est le résultat qui compte et qui donne à l'œuvre son unité ; les artifices de la démonstratio ne sont que les travaux d'art sans lesquels, parce que nous ne savons pas voler, nous serions hors d'état de franchir les accidents de terrain qui se trouvent sur notre chemin.

Mais, dira-t-on, cette conception de la science mathématique ne peut pas être regardée comme nouvelle. C'est, ou peu s'en faut, celle de Platon et des géomètres contemplatifs de la Grèce. Le renversement de l'attitude des savants n'aurait-il donc eu pour effet que de les ramener aux doctrines de l'antiquité ?

En cherchant à définir ci-dessus les caractères que les modernes attribuent aux faits mathématiques, nous nous sommes abstenus de faire des rapprochements historiques qui pouvaient donner lieu à des malentendus. Cependant les conclusions auxquelles nous parvenons, les arguments que nous avons développés, le langage même dont nous nous sommes servis dans les pages qui précèdent, suggèrent naturellement un tel rapprochement. Nous en sommes venus à soutenir que les vérités mathématiques sont des faits objectifs, indépendants de nous, et que nous découvrons et analysons en quelque sorte du dehors. Or c'est là une idée essentiellement grecque. Nous inclinons d'autre part à ne voir dans la démonstration que l'instrument et non la fin de la science. Ainsi faisaient les géomètres hellènes.

Pourtant il y a, entre nos conceptions et celles des penseurs grecs, une différence fondamentale que nous avons déjà mise en lumière dans le premier paragraphe du présent chapitre.

Pour les Grecs, la science mathématique est avant tout une et harmonieuse. La dualité que nous y voyons aujourd'hui, l'opposition de la matière et de la forme sur laquelle repose notre idée de l'objectivité, ne pouvaient être admises par les anciens. Et le système d'Euclide, nous l'avons vu, tend précisément à faire ressortir l'accord qui règne entre les vérités poursuivies par le mathématicien et les moyens employés pour atteindre ces vérités. Ainsi, selon les Grecs, les notions mathématiques que nous étudions sont les images fidèles des idées qu'elles représentent. Ce qui est le plus parfait pour nous est en même temps le plus parfait en soi. De là la spontanéité, la facilité, la passivité, de la contemplation telle que la conçoit la science antique : « intelligibilité et *étonnante facilité de progrès*, voilà — dit G. Milhaud (1) — les caractères miraculeusement associés par la Mathématique grâce à l'*idée* que seule et toute pure veut manier le géomètre ». De là aussi cette croyance que pour orienter ses travaux dans la bonne voie, le mathématicien n'a qu'à rechercher ce qui est simple et ce qui est « beau ».

Chez les modernes, au contraire, — qui ne croient

(1) G. Milhaud. *Les Philosophes Géomètres de la Grèce*, p. 7.

plus à une harmonie préétablie entre la matière et la forme des théories — le travail de la pensée mathématique prend un caractère tout différent. Le but est de saisir, de forcer un objet qui nous résiste. Ainsi, l'on ne cherchera pas à faire une œuvre « belle », mais seulement à parvenir au résultat voulu, en employant pour cela les moyens et les artifices les plus variés. La recherche scientifique ne sera par conséquent plus une contemplation passive, mais bien une industrie active, utilisant tous les procédés que les progrès des méthodes algébriques et logiques viennent mettre à notre disposition.

III. — La doctrine intuitioniste.

Nous venons de voir comment l'examen des théories mathématiques contemporaines nous conduit à attribuer à ces théories un certain caractère d'objectivité. Cette manière de voir résulte-t-elle seulement d'un raisonnement indirect que fait le mathématicien lorsqu'il réfléchit sur son œuvre ? N'est-ce qu'une hypothèse imaginée après coup afin de rendre compte des difficultés rencontrées par l'Analyse moderne ? Ou pouvons-nous, au contraire, dans une certaine mesure tout au moins, constater d'emblée, vérifier directement, l'opposition qui paraît se manifester entre le fond et la forme des théories ?

C'est là une question que le technicien, comme nous l'avons dit, peut fort bien se passer de résoudre. Néanmoins il n'est pas sans intérêt de chercher à connaître son sentiment à cet égard. Or il semble qu'un grand nombre de savants croient en effet avoir directement conscience de l'opposition dont nous avons parlé et qu'ils pensent même pouvoir réaliser jusqu'à un certain point la séparation des deux éléments qui constituent la théorie.

En pourrait-il d'ailleurs être autrement si l'on admet qu'une théorie mathématique est comparable à une construction, ou plutôt à la reconstruction, suivant la forme d'un moule donné, d'un ensemble de faits objectifs ? Car comment pareille reconstruction serait-elle possible si l'on n'avait à l'avance une certaine notion, un certain sens, des objets auxquels elle se rapporte ? Sans doute cette connaissance de l'objet pourra être extrêmement vague et indistincte ; elle ne se précisera qu'au cours de notre travail et à mesure qu'avancera la construction : si, cependant, elle ne préexistait pas à un certain degré, si faible soit-il, l'opération synthétique à laquelle se livre le mathématicien serait apparemment inexplicable.

Mais il y a plus. C'est un fait d'expérience pour le mathématicien que constamment, au cours de ses recherches, certaines idées, certaines vérités viennent frapper son esprit avant qu'il n'ait procédé aux déductions et aux synthèses qui lui permettront d'en avoir une connaissance raisonnée. Bien souvent une sorte de pressentiment lui permet de deviner des résultats auxquels la chaîne de ses démonstrations ne le conduira que longtemps après ; et, quoique dépourvue de précision et de justification logique, cette vision immédiate des idées est souvent plus étendue et plus pénétrante, plus féconde en suggestions, que ne l'est la théorie la plus accomplie.

Telles sont les raisons qui conduisent certains mathématiciens modernes à admettre, comme jadis les Platoniciens, que les notions mathématiques peuvent être atteintes de deux manières : par intuition et par raisonnement. L'intuition précède la démonstration, et c'est elle qui inspire et dirige nos travaux en nous montrant confusément quels sont les faits, quelles sont les propriétés, qui peuvent et doivent être l'objet de nos études. Seule, par contre, la connaissance démonstrative nous permet de faire entrer ces faits dans des théories scientifiques, puisque sans elle aucune déduction, aucune construction logique, donc aucune théorie n'est légitime ni même possible.

Avant d'aller plus loin, levons une équivoque à laquelle peut donner lieu le mot *intuition*. Certains mathématiciens, préoccupés d'opposer à la présentation abstraite du raisonnement mathématique celle qui utilise le secours de l'imagination, ont affirmé la nécessité de faire appel à l'intuition dans l'enseignement de la science : c'est de l'intuition des sens que voulaient parler ces savants, de celle qui intervient lorsqu'on interprète par l'image ou par d'autres figurations concrètes les propositions théoriques de la science. Au contraire, l'opération de l'esprit que l'on oppose, sous le nom d'intuition, à la connaissance logique, n'a trait qu'à notre conception des notions, et non à la forme sous laquelle se les représente notre imagination. C'est une intuition pure ou suprasensible. Nous n'emploierons, quant à nous, le mot « intuition », que dans cette deuxième acception, dont l'usage paraît d'ailleurs se généraliser parmi les mathématiciens contemporains (1).

(1) Henri Poincaré, dans ses premiers écrits, employait de préférence le mot *intuition* dans le sens « d'intuition sensible » ; ainsi, a-t-il dit, Klein est un intuitif parce qu'il s'aide du geste pour penser ; il voit, il cherche à peindre. Hermite, au contraire, est du côté des logiciens avec Méray et Weierstrass. (Cf. *La valeur de la Science*, p. 27). Plus tard, par contre, Henri Poincaré réserva le nom d'intuition à l'intuition suprasensible, et il fut alors conduit à modifier sa classification primitive des mathématiciens ; il fit passer Hermite

Cette remarque faite, nous sommes obligés de reconnaître que la doctrine intuitioniste soulève des objections très graves. Si, comme nous le croyons, les règles de la synthèse algébrico-logique expriment les conditions mêmes de la connaissance scientifique, comment peut-il exister une sorte de connaissance avnt la lettre, dans laquelle ces règles ne sont pas respectées ? D'autre part, en prétendant que les notions mathématiques peuvent être perçues instinctivement, nous allons donner à penser, non seulement que ces notions sont indépendantes de nos raisonnements (là s'arrêtait la signification que nous avons donnée jusqu'ici au mot *objectivité*), mais qu'elles existent, individuellement pour ainsi dire, dans un monde d'idées pures : croyance dont la critique philosophique croit avoir fait justice et qui est, d'ailleurs, directement contraire à l'idée que nous nous sommes faite plus haut de la réalité mathématique.

A ces objections le mathématicien n'est pas tenu de répondre car elles sont dirigées contre des assertions qu'il n'entend pas prendre à son compte lorsque, se plaçant sur le terrain scientifique, il se déclare intuitioniste. Le mathématicien n'étudie pas le problème métaphysique de la connaissance et n'a pas, par conséquent, à expliquer comment il peut exister plusieurs manières de connaître. Encore moins est-il obligé de savoir quelle sorte

parmi les *intuitifs* comme étant l'un des savants qui ont le plus exercé cette faculté de vision intellectuelle directe que nous appelons « intuition » (Cf. *La logique de l'infini*, apud *Rivista di Scienza*, juillet 1912). — Nous avons nous-même cherché à réhabiliter le sens cartésien du mot *intuition* dans diverses études, notamment dans un article sur *l'Objectivité intrinsèque des Mathématiques* publié en 1903, (*Revue de métaphysique*). — Félix Klein a, à diverses reprises, établi une distinction entre l' « intuition naïve » et l' « intuition raffinée », distinction qui correspond jusqu'à un certain point à celle que nous faisons ici.

de réalité on peut attribuer aux notions idéales. Il ne préjuge la solution de cette question ni dans un sens ni dans l'autre. Mais il constate que, de toutes les doctrines proposées pour rendre compte de la genèse de la science, seule la doctrine intuitioniste permet d'expliquer tous les caractères et toutes les circonstances de la découverte mathématique. Pour le mathématicien, tout se passe comme si la doctrine intuitioniste était véritable.

Aussi bien n'est-ce pas par hasard que les principaux champions de cette doctrine ont été, de tous temps, les plus mathématiciens d'entre les philosophes. Chez Platon comme chez Descartes, la théorie de l'intuition est, pour une large part, une transposition métaphysique des vues suggérées à ces penseurs par leurs études mathématiques.

Nous avons déjà indiqué plus haut du rôle que joue l'intuition dans la conception platonicienne de la science. Les Grecs, sans doute, se faisaient de la spéculation mathématique une idée assez différente de la nôtre, puisque selon eux la prise de contact entre l'esprit et le fait scientifique s'accomplirait spontanément, sans effort, ce qui suppose entre les deux une sorte d'harmonie préétablie. Cependant Platon, entraîné par l'analyse philosophique au-delà de l'horizon qui limitait la science de son temps, aperçoit clairement les conséquences qui résultent de la doctrine intuitioniste. Pour qui va au bout de cette doctrine, la Mathématique — la nôtre, du moins — perdra le caractère de science parfaite que les premiers géomètres et arithméticiens de la Grèce étaient sans doute portés à lui attribuer : en effet, le système des mathématiques est fondé, par hypothèse, sur la connaissance discursive, laquelle est inférieure à la noésis. Ainsi le Platonisme, après avoir été conduit à la considération des *idées* par l'étude des figures mathématiques (1), est en fin de compte, obligé, d'établir une coupure entre ces deux ordres de principes. La véritable science des idées ne serait pas la Mathématique humaine ; ce serait une sorte de méta-mathématique dont la méthode serait purement intuitive (2). Cette dernière conséquence, cependant, était trop contraire aux tendances des mathématiciens hellènes pour pouvoir s'imposer à leur esprit. Aussi la métaphysique platonicienne — privée lorsqu'elle approfondit la théorie des idées, du soutien que lui avait donné jusque là la science positive — s'obscurcit, s'égare, et tombe finalement dans la contradiction. C'est là un point que M. Brunschvicg a mis en lumière dans son récent ouvrage sur *Les étapes de la philosophie mathématique*. Mais M. Brunschvicg paraît penser que, pour échapper aux difficultés qui ont arrêté le Platonisme, il suffirait de ramener la philosophie à l'étude des principes rigoureusement déterminés de la science ; en ce cas, la dualité des nombres et des idées, — qu'en s'engageant dans une fausse voie on allait être obligé d'accentuer de plus en plus, — cesserait d'avoir une raison d'être. Nous ne saurions, quant à nous, souscrire à cette conclusion ; car pour n'être pas exactement celui qu'envisage Platon, le dualisme, dans la science mathématique, n'en est pas moins à nos yeux un fait positif, qu'il s'agit d'expliquer et non de supprimer.

Abandonnée pendant de longs siècles, la doctrine intuitioniste renaît et se modernise dans la philosophie de Descartes.

Circonstance remarquable, en effet, c'est chez Descartes, principal promoteur en son temps de la Mathématique

(1) Cf. Gaston Milhaud. *Les Philosophes Géomètres de la Grèce* passim.

(2) Cf. Chapitre premier, p. 64.

synthétique, que nous trouvons la théorie de la connaissance qui paraît s'adapter le moins mal aux conceptions scientifiques modernes.

« J'entends par intuition (1) — dit Descartes — non la croyance au témoignage des sens ou les jugements trompeurs de l'imagination, mais la conception d'un esprit sain et attentif, si facile et si distincte qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons ; ou bien, ce qui est la même chose, la conception ferme qui naît.. des seules lumières de la raison ». Précisant sa pensée dans la 5me *Méditation*, Descartes esquisse une théorie analogue à celle de la réminiscence, et il ajoute (2) : « Je trouve en moi une infinité d'idées de certaines choses qui ne peuvent pas être estimées un pur néant, quoique peut-être elles n'aient aucune existence hors de ma pensée, et qui ne sont point feintes par moi, bien qu'il soit en ma liberté de les penser ou de ne les penser pas, mais qui ont leurs vraies et immuables natures. Comme, par exemple, lorsque j'imagine un triangle, encore qu'il n'y ait peut-être en aucun lieu du monde hors de ma pensée une telle figure et qu'il n'y en ait jamais eu, il ne laisse pas néanmoins d'y avoir une certaine nature, ou forme, ou essence déterminée de cette figure, laquelle est immuable et éternelle, que je n'ai point inventée et qui ne dépend en aucune façon de mon esprit ».

C'est presque dans les mêmes termes que s'exprime l'un des plus profonds analystes du XIXe siècle, Charles Hermite, dans une note recueillie par G. Darboux (3) :

(1) *Regulæ ad directionem ingenii*, III, *Œuvr.* éd. Adam-Tannery, t. X, p. 368.

(2) *Œuvr*, t. IX, p. 51.

(3) G. Darboux, *La Vie et l'Œuvre de Charles Hermite*, apud *Revue du mois*, 10 janvier 1906, p. 46.

« Il existe, si je ne me trompe, tout un monde qui est l'ensemble des vérités mathématiques, dans lequel nous n'avons accès que par l'intelligence, comme existe le monde des réalités physiques, l'un et l'autre indépendants de nous, tous deux de création divine... ».

La connaissance intuitive est, pour Descartes, une sorte d'expérience, mais une expérience suprasensible, à laquelle notre imagination et nos sens n'ont aucune part. « L'esprit, dit-il (1), peut agir indépendamment du cerveau, car il est certain qu'il est de nul usage lorsqu'il s'agit de former un acte d'une pure intellection ». Les deux caractères essentiels de l'intuition sont, d'une part, qu'au lieu de décomposer la réalité en parties et la vérité en propositions (comme le fait la connaissance raisonnée), elle l'embrasse tout entière d'un seul coup d'œil (2), et, d'autre part, qu'elle est immédiate, instantanée, qu'elle agit hors du temps. Au contraire le raisonnement démonstratif, — que Descartes appelle généralement *déduction*, mais qui, en Mathématiques pures, se présentera le plus souvent sous la forme algébrique, c'est-à-dire synthétique — se déroule dans le temps et résulte d'un *mouvement* de l'imagination et de la pensée (3). Ainsi la démonstration introduit dans la vérité mathématique, un *ordre*, qui est factice et relatif: « les choses considérées suivant l'ordre que leur assigne

(1) *Réponses aux 5es objections*, Œuvres, t. VII, p. 358.

(2) « Pour ce qui est de l'intellection d'un chiliogone..., il est très certain que nous le concevons très clairement et tout à la fois, quoique nous ne le puissions pas clairement ainsi imaginer ». *Réponses aux 3es objections*, *Œuv.* t. VII, p. 385.

(3) « Continuo quodam motu imaginitionis » (*Regulæ* VII, *Œuv.* t. X p. 387).

notre pensée se présentent autrement que lorqu'on les envisage telles qu'elles existent en réalité » (1).

Mais qu'est-ce que ces « idées », ces « natures immuables et éternelles », dont nous avons l'intuition ? Pour en préciser la définition, Descartes doit s'élever au-dessus du domaine de la science, et là commencent pour lui les difficultés.

Descartes est conduit, d'après ses principes à attribuer aux « idées » une réalité, une existence individuelle. « Par la réalité objective d'une idée, dit-il, j'entends l'entité ou l'être de la chose représentée par cette idée, en tant que cette entité est dans l'idée » (2). D'autre part — et c'est ici que nous voyons réapparaître le point de vue synthétiste — il veut que les notions intuitives placées à la base de l'édifice scientifique soient des *nature. simples*, pouvant être objets de combinaisons. Mais quelles sont les notions simples ? Nous n'appellerons simples — disent les *Regulæ* — (3) que celles dont la connaissance est si claire et si distincte que l'esprit ne les puisse diviser en un plus grand nombre dont la connaissance soit encore plus distincte ». Définition très insuffisante et qui implique peut-être un cercle vicieux : aussi n'a-t-on jamais pu savoir combien le Cartésianisme admettait de natures simples. Les *Regulæ* n'en signalent qu'un petit nombre, telles que *figure, étendue, mouvement* (4), mais indiquent qu'il y en a d'autres. D'autre part, Descartes paraît admettre que le triangle,

(1) Aliter spectandas esse res singulas in ordine ad cognitionem nostram quam si de iisdem loquemur prout re vera existunt, *Regulæ*, XII, *Œuv.*, t. X, p. 418.

(2) *Réponses aux 2es objections*, Œuv., t. VII, p. 161.

(3) *Regulæ* XII, Œuv. t. X, p. 418.

(4) Cf. *Regulæ* VI, Œuv. t. X, p. 383, et *Principia Philosophiæ*, IV, Œuv. t. VIII, p. 326.

le quadrilatère, le chiliogone — complexes du point de vue de la déduction — sont simples au regard de l'intuition : il y aurait donc une infinité de natures simples. En fait, Descartes ne se décide pas, et de là vient la faiblesse de son système, faiblesse qui devait se manifester plus ouvertement dans l'œuvre de ses successeurs. Chez Malebranche, la théorie des natures simples devient un réalisme statique, une sorte (1) d'atomisme mathématique que les progrès même de la science devaient presque immédiatement ruiner. Le réalisme ainsi entendu est inséparable, en effet, des conceptions mécanistes qui caractérisaient la physique de Descartes. Or cette physique a été abandonnée dès le temps de Leibniz.

Pour des raisons que nous avons développées plus haut, cependant, nous ne croyons pas que les principes introduits par Leibniz et Newton aient transformé autant qu'on l'a dit (2) le cours de la pensée des mathématiciens ; nous ne saurions donc voir dans le *mécanisme* de Descartes la source principale des difficultés qui ont compromis sa doctrine mathématique. Pour nous, ces difficultés tiennent surtout à une autre cause : elles viennent de ce que Descartes, tout en proposant une philosophie de l'intuition, restait fermement attaché à la conception synthétiste de la science.

La conception synthétiste suppose la possibilité de poser a priori, comme autant d'éléments séparés et distinctement conçus, un ensemble de natures simples. Elles nous force également à admettre que ces natures

(1) Selon Malebranche, la science mathématique traite « des rapports des idées entre elles, les idées qu'elle étudie étant les *nombres nombrants*, avec leurs propriétés, et l'*étendue intelligible*, avec toutes les lignes et figures qu'on y peut découvrir ». Cf. Brunschvicg, les *Etapes de la Philosophie Mathématique*, p. 130 et suiv.

(2) Voir plus haut, chap. II, § III.

peuvent être discernées sans difficulté, puisque — c'est une idée chère à Descartes — le travail scientifique doit, selon cette conception, être purement mécanique et ne saurait consister dans la découverte ou dans l'analyse des notions. Or, effectivement, nous avons vu que l'intuition est, selon Descartes, essentiellement « facile et distincte » ; ailleurs (1) il dit que les natures simples sont connues, en quelque sorte à l'avance, « par une lumière innée », et il précise (2) : « Il en résulte qu'il ne faut se donner aucune peine pour connaître les natures simples, parce qu'elles sont assez connues par elles-mêmes ». Partant de là, Descartes, dans les *Regulæ*, aboutit directement à sa théorie de la science (3). « Toute science humaine consiste seulement à voir distinctement comment les natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses ». La science doit combiner les notions connues, non en conquérir de nouvelles, et c'est à tort que « toutes les fois qu'on propose quelque difficulté à examiner, la plupart s'arrêtent sur le seuil, persadués qu'il leur faut chercher quelque nouvelle espèce d'être qui leur est inconnue ». Sans doute Descartes laisse-t-il entendre — en prenant pour exemple l'étude de l'aimant — que la science synthétique ne nous donne peut-être pas une connaissance parfaite et complète. Mais cette science est la seule qui soit accessible à l'homme. Aussi celui qui la possède « peut-il affirmer hardiment qu'il a découvert la nature véritable de l'aimant autant que l'homme peut la trouver au moyen des expériences données ».

Depuis le temps de Descartes, cependant nos idées

(1) *Regulæ*, XII, Œuv. t. X, p. 419 et passim.
(2) *Regulæ*, XII, *ibid.*, p. 425.
(3) *Ibid.* p. 427.

sur la science se sont modifiées. Nous ne croyons plus que celle-ci puisse progresser par l'effet d'opérations purement mécaniques. Il nous apparaît que la tâche principale du mathématicien, — la plus difficile et la plus féconde, — est le travail d'analyse qui précède la construction des théories. Ainsi nous ne pouvons plus croire que les natures simples nous soient données d'emblée ni même qu'elles soient séparées avant d'avoir été découpées — artificiellement — par le savant. Nous n'admettrons pas davantage que la connaissance directe des faits mathématiques ait pour principal caractère d'être claire et distincte; nous la regarderons plutôt comme une vue confuse et imprécise, bien que pleine et profonde. Pascal, mieux que Descartes, a caractérisé l'intuition, lorsqu'il a écrit (1) : « Nous connaissons la vérité, non seulement par la raison, mais encore par le cœur; c'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premiers principes, et c'est en vain que le raisonnement, qui n'y a point de part, essaye de les combattre... Et c'est sur ces connaissanees du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie et qu'elle y fonde tout son discours ».

Le savant moderne, toutefois, ne cherche pas à expliquer lui-même, il ne prétend pas comprendre complètement en quoi consiste et dans quelles conditions peut agir l'intuition. Les définitions qu'il en donne restent le plus souvent négatives. Les vérités mathématiques, dit-il, ne sont ni des conséquences de faits expérimentaux, ni des résultats de constructions ou déductions logiques : donc elles supposent un mode d'aperception qui ne se confond, ni avec l'expérience des sens, ni avec

(1) *Pensées*, f°. 191 et sect, IV f°. 282. — Cf. Brunschvicg, *les Étapes de la Philosophie Mathématique*, p. 170.

le raisonnement. Ce mode d'aperception — ajoute-t-il — nous avons par instants conscience de le pratiquer (dans le travail de découverte), et nous constatons qu'il ne ressemble aucunement à la connaissance démonstrative ; en nous efforçant de l'isoler, nous réussissons à en noter quelques caractères ; cependant, nous devons reconnaître qu'il reste mystérieux et qu'en en affirmant la réalité, le mathématicien pose une question au philosophe plutôt qu'il ne l'aide à en résoudre une.

Bien qu'elle limitât ainsi ses affirmations — et parfois, peut-être, pour cette raison — la doctrine intuitioniste des mathématiciens modernes a été l'objet de critiques assez nombreuses. Les logiciens l'ont jugée d'abord contraire à leurs principes, car, disaient-ils, seule la logique est juge de la vérité et permet, par conséquent, de fonder une science rigoureuse et certaine. Puis, avertis que l'on ne contestait pas la justesse de cette observation, ils ont émis l'idée que, si elle ne voulait pas porter atteinte à la logique, la doctrine intuitioniste perdait toute raison d'être. « Mais alors — écrit Couturat dans l'un de ses derniers articles (1), — nous ne voyons plus rien qui sépare Poincaré des logisticiens ; car, bien évidemment, ceux-ci n'ont jamais prétendu supprimer ou proscrire l'intuition intellectuelle. » — M. Brunschvicg, d'autre part, fort opposé aux vues métaphysiques des logisticiens, a élevé contre l'intuitionisme des objections d'un ordre différent.

D'après M. Brunschvicg (2), l'intuitionisme, entre les mains des mathématiciens, a surtout été une arme

(1) *Logistique et intuition*, apud *Revue de Métaphysique*, mars 1913, p. 268.

(2) *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, chapitre XX.

de combat. L'importance qui lui a été donnée est accidentelle et tient aux circonstances qui l'ont vue naître. Les mathématiciens, sentant la nécessité de réagir contre le formalisme de l'arithmétique et de la logique, ont cherché un refuge dans une nouvelle forme de l'empirisme, l' « empirisme intuitioniste ». S'appliquant, cependant à dégager le sens que les mathématiciens modernes attachent à l'idée d'intuition, M. Brunschvicg trouve que, sous ce nom, on ne comprend pas autre chose que « le travail profond de l'intelligence ». Mais, dit-il, par suite des circonstances, on s'est trouvé établir entre l'intelligence et l'intuition une opposition de nature qui n'est en réalité pas fondée. On a été frappé de la différence qu'il y a en mathématiques entre l'ordre de l'invention et l'ordre de la déduction logique, et l'on a conclu de là que l'intuition et l'intelligence déductive marchent dans des sens opposés. Pourtant, dit M. Brunschvicg, « si la mathématique intervertit le sens de la déduction spécifiquement logique, devra-t-on répéter encore qu'elle invertit le travail naturel, normal de l'esprit ? ou ne s'oppose-t-elle pas plutôt à une première inversion, dictée par les besoins de la pédagogie, beaucoup plutôt que par les exigences de la philosophie, et qui a eu pour effet déjà de renverser l'ordre naturel de la pensée ? ne marque-t-elle pas un retour aux démarches de l'intelligence humaine ? » A ces questions M. Brunschvicg répond plus loin (1) : « ... La philosophie mathématique a, jusqu'ici, manqué le problème de la vérité. En supposant une inversion de sens entre l'ordre psychologique de l'invention et l'ordre logique de l'exposition, elle admettait implicitement que le souci de la rigueur dans le raisonnement est étranger à l'in-

(1) *Loc. cit.*, p. 500.

vention, que la mise en forme logique est indifférente à la *matière de vérité*. Au contraire, la philosophie résout le problème, ou plutôt elle fait voir que le savoir scientifique l'a effectivement résolu, si elle sait assigner un même but à l'effort de l'inventeur et au travail du logicien : l'extension progressive des opérations mathématiques ».

L'extension progressive des opérations mathémathiques, nous dit-on. Divers passages de l'ouvrage de M. Brunschwicz donneraient à penser qu'il faut entendre par là une progression continue, sans heurt, l'effet du mouvement naturel de l'esprit. Or, ainsi interprétée, la conclusion de M. Brunschvicg nous paraît difficilement conciliable avec la conception que l'état actuel de l'Analyse amène les mathématiciens à se faire de leur œuvre.

Il semble y avoir, au sein des mathématiques, un conflit, une opposition sur laquelle nous avons longuement insisté plus haut. M. Brunschvicg paraît penser que ce conflit est artificiel, qu'il est dû à un accident historique, à la vogue passagère de l'arithmétisme de Kronecker et de la logistique de Russell et Couturat. Faut-il donc supposer que les mathématiciens qui, indépendamment de toute théorie philosophique, ont conscience d'une dualité de points de vue, entre lesquels ils doivent se partager, et qu'il leur faut réconcilier — faut-il supposer que ces savants sont purement et simplement dupes d'une illusion ?

Les mathématiciens qui cherchent à déterminer les caractères de l'intuition n'entendent nullement, croyons-nous, l'opposer à « l'intelligence ». D'autre part nous admettrons volontiers avec M. Brunschvicg (1) que

(1) C'est un point sur lequel nous reviendrons plus loin (chapitre V, III).

l'ordre logique doit être distingué de l'ordre pédagogique. Mais que, moyennant cette distinction, l'on puisse faire cesser toute discordance entre l'intuition et la logique, c'est ce qu'il ne nous paraît pas possible de soutenir.

La nécessité de découper dans le champ de l'intuition mathématique une chaîne de propositions se déduisant logiquement les unes des autres, — l'obligation où nous sommes de faire de longs détours, d'user de ruses et de moyens de fortune pour arriver à démontrer péniblement des résultats qui, pour un esprit capable d'avoir une vue d'ensemble sur la science, domineraient évidemment les prémisses d'où nous les tirons au lieu d'être conditionnés par elles, — l'idée même d'un *ordre* introduit dans les vérités scientifiques, — toutes ces conditions, tous ces concomitants de la démonstration logique nous paraissent être autant de contraintes, autant de digues, qui contrarient le flot de l'intuition ; nous ne pouvons, semble-t-il, nous rendre maîtres de ce flot qu'en l'appauvrissant et en le canalisant. Que l'idée d'intuition pure, séparée du raisonnement logique, soulève des difficultés, cela est indéniable, et il serait fort souhaitable de pouvoir supprimer ces difficultés en en extirpant la racine. Mais la distinction de tendances opposées, dans l'œuvre mathématique, nous paraît devoir être maintenue sous une forme ou sous une autre ; et nous ne saurions croire qu'elle a été uniquement imaginée pour les besoins de la discussion engagée par les logisticiens.

M. Brunschvicg répondra sans doute qu'au sein même de l'intelligence il admet bien le dualisme auquel nous faisons allusion. Cependant nous croyons que son argumentation tend, qu'il le veuille ou non, à atténuer ce dualisme. Recherchant les « racines de la vérité géométrique », M. Brunschvicg est conduit à souligner l' « adaptation réciproque de l'expérience et de la raison ». A fortiori résulte-t-il de ses principes que la vérité de l'Analyse suppose l'adaptation de la méthode algébrique aux faits — pour nous « intuitifs » — étudiés par les analystes. Mais ce qui importe à l'homme de science, c'est de savoir dans quelle mesure cette adaptation, qui conserve toujours le caractère d'un compromis, peut être effectivement regardée comme accomplie. Or, plus nous avançons en Analyse, plus il semble qu'elle soit difficile à réaliser. C'est pourquoi, selon nous, toute théorie qui tend à ramener à l'unité les différentes faces de la pensée mathématique ne saurait rendre un compte tout à fait fidèle de l'orientation actuelle de l'Analyse.

CHAPITRE V

LA MISSION ACTUELLE DU MATHÉMATICIEN

De la conception de la science qu'adopte, ou vers laquelle incline le mathématicien, doit résulter l'idée qu'il se fait lui-même de sa mission. Ainsi, après l'étude à laquelle nous avons procédé, nous devrions pouvoir facilement définir le rôle que s'attribue l'analyste contemporain, la place qu'occupent ses travaux dans l'ensemble de la science, l'orientation qu'il jugera convenable de donner à l'enseignement des mathématiques. En réalité, cependant, nous éprouvons quelque peine à interpréter fidèlement, sur ces points, la pensée des savants professionnels, car il s'en faut que ceux-ci dégagent toujours avec netteté les conséquences des principes scientifiques qui prédominent à leur époque. D'ailleurs, la doctrine « intuitioniste », telle qu'elle nous parait ressortir d'un examen attentif de l'Analyse moderne, ne s'impose pas nécessairement aux analystes sous forme explicite et absolue : elle est, seulement, l'expression d'une tendance, qui, chez beaucoup d'entre eux, ne se manifeste qu'incomplètement. Aussi n'est-il point surprenant que les hommes de science continuent à avoir, sur les questions que nous indiquons, des opinions fort divergentes. Nous allons, dans le présent chapitre, examiner quelques-unes de ces opinions et chercher à les apprécier à la lumière des conclusions auxquelles nous sommes parvenus plus haut.

I. — Les Mathématiques et la Physique (1).

La première question qui retient notre attention, lorsque nous cherchons à déterminer la mission du mathématicien moderne, a trait aux relations de la science théorique avec la science expérimentale, ou, plus précisément, à la fonction de l'Analyse mathématique par rapport à la physique.

C'est, comme on sait, au XVII^e^ siècle, que la Mécanique et la Physique prirent la forme de sciences rationnelles ou théories logiques, reposant sur un certain nombre de principes et de faits expérimentaux, et tirant — par déduction — de ces données les diverses conséquences qui en découlent. Les faits pris ici pour points de départ (de même que ceux que l'on cherche à découvrir) ayant le plus souvent un caractère quantitatif, il est *a priori* vraisemblable que la méthode de la Mécanique et de la Physique rationnelles sera principalement mathématique. C'est là, du moins, ce que devaient naturellement penser les savants qui adoptèrent au XVII^e^ siècle la conception synthétiste des Mathématiques, plaçant l'algèbre au premier plan (comme le voulaient les Cartésiens) et en faisant, avant tout, une *méthode*, applicable à la résolution de tous les problèmes quantitatifs.

(1) Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans la *Revue de Métaphysique*, en mai 1907.

Cependant Descartes lui-même n'aperçut pas la conséquence qui résultait fatalement de ses principes. Sans doute il prétend bien faire de la Physique une théorie mathématique, puisqu'il veut en traiter les problèmes en termes d'étendue et de mouvement. Mais l'on ne voit pas exactement quel lien il établit entre cette théorie et la méthode algébrique, dont pourtant il fut par ailleurs l'un des principaux promoteurs. La pensée de Descartes présente ici une lacune que nous avons déjà signalée lorsque nous avons fait allusion aux jugements portés par le philosophe sur son traité de la *Géométrie*. A ce propos, nous avons indiqué la raison probable de l'attitude de Descartes. Bien qu'il attribue certainement une portée générale à la méthode posée dans la *Géométrie*, il ne voit pas comment les problèmes contenus dans ce traité peuvent être utilisés en mécanique. Et c'est pourquoi il se désintéresse de ces problèmes. Cependant, l'arrêt que subit de ce fait le développement de la pensée scientifique ne fut que de courte durée. Grâce à la création du calcul infinitésimal, Newton et Leibniz purent réaliser l'œuvre qu'avait ébauchée Descartes : la réduction au calcul des problèmes fondamentaux de la mécanique. De nouveaux progrès furent accomplis dans cette voie au cours du XVIII[e] siècle, et ainsi fut bientôt constituée, sous le nom de *Mécanique analytique* et de *Physique mathématique*, un ensemble de théories extrêmement remarquables, qui empruntent la méthode de l'algèbre, mais l'appliquent à d'autres objets que ceux auxquels s'attache d'ordinaire le pur mathématicien.

« Les méthodes que j'expose, dit Lagrange (1), — auteur du premier traité systématique de mécanique analytique — ne demandent ni constructions, ni raison-

(1) *Mécanique analytique*, Avertissement, *Œuv.* t. XI, p. XII.

nements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine ». Cette conception de la Mécanique fit rapidement fortune et elle exerça une grande influence sur le mouvement des idées philosophiques (1). Elle fut même, à proprement parler, le point de départ du système d'Auguste Comte, et c'est pourquoi ce dernier proclame « l'éminente supériorité philosophique de Lagrange sur tous les géomètres postérieurs à Descartes et à Leibniz ».

La grande découverte qu'aurait faite Lagrange — si l'on en croit Comte — consistait, en somme, à reconnaître que la méthode des sciences mathématiques peut être entièrement détachée de son objet traditionnel et rapportée à des objets nouveaux. En conséquence, on pourra construire des théories portant sur les lois du monde physique et se composant de deux parties nettement discernables : une forme qui est purement mathématique (analytique, algébrique), une matière qui est fournie par l'expérience.

Cette doctrine, séduisante par sa simplicité, s'est perpétuée au cours du XIXe siècle et nous la retrouvons, telle quelle, dans l'esprit ou dans les écrits de nombreux physiciens contemporains.

Écoutons, par exemple, Pierre Duhem, l'un des grands théoriciens de la physique de notre temps. Dans un récent ouvrage, Duhem définit en ces termes la

(1) Cf. L. Brunschvicg. *Les Etapes de la Philosophie mathématique*, p. 286 et suiv.

théorie physique(1) : « C'est un système de propositions mathématiques, déduites d'un petit nombre de principes, qui ont pour but de représenter aussi simplement, aussi complètement et aussi exactement que possible, un ensemble de lois expérimentales ». La théorie, ajoute Duhem, doit passer par les stades suivants : en premier lieu, le savant choisit un certain nombre de propriétés physiques simples qui jouent pour lui le rôle de qualités premières et d'hypothèses, c'est-à-dire de définitions et d'axiomes ; puis il combine ensemble ces définitions et ces axiomes suivant les règles de l'Analyse mathématique ; enfin, il traduit les résultats obtenus en un certain nombre de jugements susceptibles d'être confrontés avec l'expérience. Des trois stades ainsi définis, cependant, c'est le second qui a le plus d'ampleur, et, dans ce second stade, la théorie doit être dirigée suivant une méthode et d'après des considérations purement mathématiques.

Sans doute on rencontre des physiciens que leur instinct ou leurs préjugés portent à se méfier de la spéculation *a priori*. Ceux-ci ne veulent voir dans les mathématiques qu'un langage commode, exprimant, sous une forme brève et facilement maniable, les faits concrets fournis par l'expérience. Ils exigent que la Physique mathématique ne soit, d'un bout à l'autre, qu'une traduction juxtalinéaire de la réalité sensible. Ils demandent donc que toutes les transformations algébriques utilisées par cette science aient un sens phy-

(1) *La théorie physique, son objet et sa structure*, Paris, Chevalier et Rivière, 1909, p. 26-27. Depuis la publication de cet ouvrage, Duhem paraît avoir quelque peu atténué les thèses qu'il y soutient. Voir en particulier ses articles sur la science allemande (*Revue des deux Mondes*, 1er février 1919 et *Revue du Mois*, 10 juin 1919).

sique. Ils ne consentent à raisonner, suivant une formule de Gustave Robin (1), « que sur des opérations réalisables ».

Contre une pareille doctrine, Duhem s'élève de toutes ses forces. Il adopte une attitude exactement opposée à celle de Gustave Robin. « Les exigences de la logique algébrique, écrit-il, sont les seules auxquelles le théoricien soit tenu de satisfaire. Les grandeurs sur lesquelles portent ses calculs ne prétendent point être des réalités physiques, les principes qu'il énonce dans ses déductions ne se donnent point pour l'énoncé de relations véritables entre ces réalités ». Selon Duhem, la confrontation entre la théorie mathématique et l'expérience ne doit venir qu'à la fin, lorsque la théorie est achevée. Aussi bien n'est-il pas possible de contrôler une théorie physique proposition par proposition au fur et à mesure de son développement : une théorie ne peut être examinée qu'en bloc parce qu'elle se compose de parties indissolublement liées les unes aux autres. « Le seul contrôle expérimental de la théorie physique qui ne soit pas illogique consiste à comparer *le système entier de la théorie physique à tout l'ensemble des lois expérimentales* et à apprécier si celui-ci est représenté par celui-là d'une manière satisfaisante ».

A l'appui de cette thèse, Duhem apporte une longue suite de preuves. Lorsque, dit-il, on cherche à interpréter en langage théorique une expérience de laboratoire, ce n'est pas une loi que l'on affirme, c'est un très grand nombre de lois. Pour faire une expérience il faut des instruments : or l'usage de l'instrument le plus simple suppose que l'on adhère à tout un ensemble de théories. S'agit-il, par exemple, d'interpréter exactement

(1) Cité par Duhem, p. 340.

une opération faite à la loupe? On est obligé de faire appel aux lois de la dioptrique, à la théorie de la dispersion (1). Que si, pour vérifier une première loi, on voulait utiliser le résultat brut d'une expérience, on devrait apporter à ce résultat une série de corrections, et, pour faire ces corrections, on s'appuirait nécessairement sur des lois non encore vérifiées. « En résumé (2), le physicien ne peut jamais soumettre au contrôle de l'expérience une hypothèse isolée, mais seulement tout un ensemble d'hypothèses ; lorsque l'expérience est en désaccord avec ses prévisions, elle lui apprend que l'une au moins des hypothèses qui constituent cet ensemble est inacceptable et doit être rejetée : mais elle ne lui désigne pas celle qui doit être changée ». De là, Duhem conclut que l'appui de l'expérience ne peut venir en aide au physicien que lorsqu'il a fini de composer son œuvre. Toute la peine jusque là, tout le travail constructeur, incombe à l'Analyse mathématique.

C'est une thèse analogue que soutient M. Bouasse, dans un livre récent (3), où il expose la « méthode de la Physique ». « La Physique, dit M. Bouasse, cherche à reconstruire le monde, à le déduire par voie purement syllogistique d'un principe général une fois admis ». Sitôt, donc, que le principe est trouvé (on l'obtient en tâtonnant, et généralement par hasard), le mathématicien est seul à l'œuvre ; il doit déduire les conséquences du principe, « créer une forme » et en « dévider les propriétés suivant un sorite par nature indéfini », « construire un barême de sorites » ; quant à l'expé-

(1) *Ibid.*, p. 243.
(2) *Ibid.*, p. 307.
(3) *De la Méthode dans les Sciences*, F. Alcan, 1909, p. 76 et suiv.

rience, « elle ne doit plus intervenir que pour vérifier à mesure les divers théorèmes rencontrés ».

Voilà en quels termes s'expriment de nombreux physiciens contemporains. Certes, les mathématiciens ne se plaindront pas du rôle qu'on veut ici leur attribuer. Toutefois, ils inclineront à penser que les physiciens dont nous rapportons les idées emploient le mot « mathématique » dans un sens un peu trop étroit. M. Bouasse semble ne voir dans le travail de l'analyste que le traitement logique d'un sorite. Pareillement Duhem, à maintes reprises, fait des termes *logique*, *abstrait*, des synonymes exacts de *mathématique*. Il déclare que le théoricien n'est tenu d'obéir qu'à la Logique. Et, pour préciser sa pensée, il nous propose comme un modèle de science parfaite la géométrie classique, où il discerne les opérations suivantes (1) : l'abstraction qui fournit les notions de nombre, de ligne, de surface ; l'analyse philosophique qui de ces notions tire les axiomes et les postulats ; enfin la déduction mathématique ou logique « qui s'assure que ces postulats sont compatibles et indépendants, qui patiemment, dans un ordre impeccable, déroule la longue chaîne de théorèmes dont ils sont gros ».

Le type de science logique ainsi défini par Duhem est celui que nous devons toujours, selon lui, chercher à réaliser. Dans un de ses plus brillants chapitres, nous voyons Duhem partir en guerre contre certains physiciens anglais, qui n'écrivent pas une formule sans en chercher immédiatement une représentation matérielle, qui ne peuvent concevoir la science sans une collection compliquée de modèles mécaniques. « Voici, s'indigne Duhem à propos d'un ouvrage de O. Lodge (1), voic

(1) *Loc. cit.*, p. 98.

un livre destiné à exposer les théories modernes de l'électricité : il n'y est question que de cordes qui s'enroulent sur des poulies ; de tubes qui pompent de l'eau, d'autres qui s'enflent et se contractent ; nous pensions entrer dans la demeure paisible et soigneusement ordonnée de la raison déductive ; nous nous trouvons dans une usine ». S'inspirant de Pascal, Duhem établit un parallèle entre deux sortes d'esprits : les esprits amples mais faibles, les esprits profonds mais étroits. Il range les disciples de Maxwell, chez qui l'imagination prime la faculté logique de raisonner, parmi les esprits amples, en compagnie de Shakespeare et de Napoléon. Mais il donne lui-même la préférence aux esprits profonds, tels que Descartes, Newton, et la plupart des physiciens continentaux. « Pour un Français, une théorie physique est essentiellement un système logique ».

Remarquons d'ailleurs, que la logique dont parle ici Duhem n'est nullement celle des « logisticiens » modernes (2). Duhem classe, en effet, tous les adeptes du calcul symbolique parmi les esprits amples, mais faibles (3). Il y a plus. Les algébristes, déjà, feraient à l'imagination certaines concessions que Duhem semble regretter un peu. « Les mathématiciens, dit-il, ont imaginé des procédés qui substituent à la méthode purement abstraite et déductive une autre méthode où la faculté d'imaginer ait plus de part que le pouvoir de raisonner. Au lieu de traiter directement des notions abstraites qui les occupent, de les considérer en elles-mêmes, ils profitent de leurs propriétés les plus simples pour les représenter par des nombres, pour les

(1) *Ibid.*, p. 111.
(2) Voir *supra*, chapitre III, II.
(3) *Loc. cit.*, pp. 120-122.

mesurer; alors, a lieu d'enchaîner dans une suite de syllogismes les propriétés de ces notions elles-mêmes, ils soumettent les nombres fournis par les mesures à des manipulations... L'auteur de certaines découvertes algébriques, un Jacobi par exemple, n'a rien d'un métaphysicien ; il ressemble bien plutôt au joueur qui conduit à une victoire assurée la tour ou le cavalier. En maintes circonstances, l'esprit géométrique vient se ranger, auprès de l'esprit de finesse, parmi les esprits amples, mais faibles (1) ».

Voilà qui fixe bien l'opinion de Duhem. L'esprit profond qu'il nous vante s'efforcera d'être exclusivement logique, et de réduire la Mathématique à une chaîne de syllogismes ; celle-ci ne sera pour lui qu'une forme ou un moule, vide de tout contenu objectif.

Or, si une pareille thèse eût été accueillie avec faveur par les algébristes du XVIIIe siècle, elle constitue pour les mathématiciens d'aujourd'hui un véritable anachronisme. Elle est incompatible, à notre avis, avec les conceptions actuelles des analystes sur la nature et le rôle de leurs recherches.

Que la science *faite* puisse prendre la forme d'une suite bien enchaînée de syllogismes, nul ne voudra, certes, le contester. Mais Duhem ne s'occupe pas de la science faite ; il s'occupe de la science qui se fait. Personne ne croira, en effet, que la physique de la lumière, l'électro-dynamique et la mécanique chimique soient arrivées, comme par exemple la théorie des équations du second degré, aux derniers stades de leur évolution. Les livres que l'on écrit sur ces matières sont des œuvres provisoires qui seront plus tard aussi oubliées que les écrits de Tartaglia ou de Viète sur les équations

(1) *Ibid.*, p. 98.

algébriques. Or, qui reprocherait à ces vieux auteurs de n'avoir pas suffisamment suivi l'ordre logique dans des ouvrages que nous ne lisons pas ? On ne demande qu'une chose aux créateurs, c'est d'avoir des idées, quitte à laisser à d'autres le soin de ranger ces idées à la place exacte qu'elles doivent occuper dans l'édifice logique de la science.

La seule question en litige est donc la suivante : quel est, dans la physique théorique, le principal instrument de la découverte ? Duhem ne veut pas que ce soit l'expérience : car, dit-il, on ne peut établir expérimentalement une ou plusieurs lois physiques sans pécher à chaque instant contre la Logique. Il s'adresse donc aux Mathématiques. Mais, nous le demandons, les Mathématiques peuvent-elles être une science féconde et créatrice sans sortir, à leur tour, de la pure logique ? Certes, c'est un problème de savoir comment une science fondée sur les faits peut s'accorder avec la Logique. Mais Duhem ne résout pas ce problème : il ne fait que reculer la difficulté en la renvoyant de la Physique aux Mathématiques. S'il se trouvait qu'au regard de la Logique l'Analyse mathématique fût sujette aux mêmes infirmités que la méthode expérimentale, l'argumentation de Duhem serait tout au moins incomplété.

L'erreur commise par Duhem consiste, croyons-nous, à postuler que l'on peut opposer les vérités mathématiques aux faits physiques comme on oppose la théorie à la pratique. Or, si les conclusions de nos deux derniers chapitres sont exactes, la Mathématique pure ne serait nullement la science parfaite et exceptionnelle que suppose cette manière de voir, et le développement des parties les plus abstraites de cette science ressemblerait par de nombreux traits à celui des sciences expérimentales. Loin d'atténuer cette ressemblance, l'argumentation de Duhem nous paraît au contraire l'accentuer. En la lisant, on a sans cesse l'impression que l'on pourrait appliquer à la Mathématique ce que Duhem dit si bien de la Physique. C'est ce que nous allons chercher à montrer par quelques exemples.

Qualités premières. — Le théoricien de la Physique, dit Duhem (1), part d'un certain nombre de qualités premières qu'il traduit en notions mathématiques. Ces qualités, traitées comme irréductibles, le sont en fait, non en droit, et toujours à titre provisoire. Effectivement, il arrive fréquemment qu'une qualité, regardée à tort comme première, ne soit en réalité qu'une « combinaison de qualités déjà connues et acceptées ».

Point n'est besoin de commentaire pour appliquer ces vues aux notions mathématiques. C'est en effet par les mathématiciens qu'elles furent pour la première fois formulées, et Duhem se borne à les transporter dans le domaine de la Physique. Mais nous nous arrêterons un instant sur le mot « traduction » fréquemment employé par Duhem.

Le développement mathématique d'une théorie physique, — nous dit-on, — ne peut se souder aux faits observables que par une traduction, une version qui remplace le langage de l'observation concrète par le langage des nombres « Mais qui traduit, trahit; *traduttore, traditore*; il n'y a jamais adéquation complète entre les deux textes qu'une version fait correspondre l'un à l'autre (2) » — Ces remarques pourraient faire croire que le physicien est obligé de s'exprimer dans une langue étrangère tandis que le mathématicien parle sa

(1) *Loc. cit.*, p. 200 et suiv.
(2) *Loc. cit.*, p. 215.

propre langue. Il n'en est rien. L'analyste, lui aussi, fait une version. Il traduit, comme nous l'avons dit ailleurs, la qualité en quantité, et sa traduction n'est pas adéquate au texte. Lorsque, par exemple, on exprime la fonction exponentielle par l'égalité $y = 1 + x + \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} + \dots$, on *traduit* cette fonction dans la langue de l'algèbre ; mais, ce faisant, on la déforme : car, pour avoir la vraie valeur de y, il faudrait donner au polynome qui la représente une infinité de termes. Ainsi, pas plus que le physicien, le mathématicien ne raisonne directement sur les qualités premières qui lui servent de point de départ : force lui est de transformer ces qualités en notions algébriques, offrant une prise au calcul et à la déduction logique.

Rôle de la déduction algébrique. — Dans un chapitre intitulé : *Déduction mathématique et théorie physique*, Duhem oppose l'à peu près physique à la précision mathématique. Il montre qu'une infinité de faits théoriques différents peuvent être pris pour traductions d'un même fait pratique. « Dire que la température est 10°, ou 9°,99 ou 10°, 01, c'est formuler trois faits théoriques incompatibles ; mais ces trois faits théoriques incompatibles correspondent à un seul et même fait pratique si la précision de notre thermomètre n'atteint pas au cinquantième de degré. Un fait pratique ne se traduit donc pas par un fait théorique unique, mais par une sorte de faisceau qui comprend une infinité de faits théoriques différents (1) ». Cette constatation conduit à une remarque, où, selon Duhem, apparaîtrait une différence essentielle entre la déduction mathématique et la loi physique. Supposons (2) que d'un premier fait

(1) *Ibid.*, p. 217.
(2) *Ibid.*, q. 231.

pratique on veuille *déduire* un second fait pratique. Au premier fait correspond un faisceau de faits théoriques d'où l'on tire, par déduction, un autre faisceau de faits théoriques. Si ces derniers faits sont assez voisins pour représenter, au degré d'approximation voulu, un seul et même fait pratique, la déduction théorique fournit bien une relation entre deux faits pratiques. Si, au contraire, les faits théoriques déduits s'écartent les uns des autres, le calcul que l'on a fait ne conduit pas à un résultat pratique déterminé : valable pour le mathématicien, il est sans utilité pour le physicien.

Les remarques que fait ici Duhem sont parfaitement justes ; mais c'est à condition que l'on écrive « logique » ou « algébrique » partout où il a mis « théorique » et « mathématique ». L'opposition, en effet, n'est pas entre les mondes physique et mathématique : elle est entre la complexité, la richesse du donné objectif, et la pauvreté du schéma que nous substituons à ce donné. Comme le physicien, l'analyste est chaque jour arrêté par les difficultés que l'on nous signale. Lorsqu'il traduit une fonction transcendante dans la langue de l'algèbre, il est obligé de simplifier cette fonction ; il néglige un certain reste. Or il existe une infinité d'expressions algébriques dont la différence est beaucoup plus petite que le reste négligé. Qu'est-ce à dire, sinon qu'à un fait mathématique donné correspond une infinité de faits algébriques ? Nous voilà dès lors ramenés aux remarques de Duhem. Un calcul algébrique ne pourra être fécond que sous certaines conditions. Par exemple, pour déduire les propriétés d'une fonction de celles d'une expression algébrique, il ne suffit pas de savoir que la fonction et l'expression sont très voisines en tel point donné : il faut encore s'assurer qu'elles restent très voisines lorsque le point varie d'une manière quelconque. Or, comment verra-t-on s'il en est ainsi? On considérera, par exemple, un faisceau d'expressions algébriques qui, au point initial, sont très voisines de la fonction donnée, et l'on cherchera si ces expressions restent voisines, lorsque la variable décrit un chemin quelconque. Cette étude, de tous points semblable à celle que décrit Duhem, a renouvelé en particulier la théorie des équations différentielles. Par conséquent, ce qu'on nous présentait comme constituant une différence entre les Mathématiques et la Physique nous apparaît au contraire comme un trait de ressemblance.

L'expérience. — L'expérimentation est, par excellence, la méthode des sciences naturelles. Il serait cependant inexact de croire qu'elle n'a rien à voir avec les Mathématiques. Le mathématicien — nous l'avons déjà dit — expérimente souvent. Veut-il étudier une famille de fonctions? Il prend un exemple numérique et en observe l'allure, en étudie les caractères distinctifs. Veut-il se renseigner sur un type d'équations différentielles? Il considère d'abord un cas particulier dont les propriétés peuvent être *calculées*, et il s'élève par induction de ce cas au cas général. En même temps qu'une méthode de recherche, l'expérience est d'ailleurs pour le mathématicien un moyen de contrôle. Lorsqu'un élève soumet un énoncé de théorème à un professeur, comment s'y prend celui-ci pour en contrôler l'exactitude? Presque toujours il commence par prendre un exemple et il regarde si cet exemple obéit au théorème proposé. C'est ainsi que sont relevées la plupart des erreurs commises par les analystes : un jour arrive où quelque expérience simple met en défaut les lois inexactes qu'ils avaient énoncées.

Mais, si l'expérimentation est d'usage courant en Mathématiques, la regarderons-nous cependant comme un instrument de recherche sûr et rigoureux ? Non, et cela pour les raisons mêmes que Duhem met en lumière en parlant de la Physique. En général les faits mathématiques ne sont pas isolables. Lorsque j'aborde l'étude d'une nouvelle famille de fonctions et que je veux en organiser, en déduire rationnellement les propriétés, je suis obligé de faire à la fois un très grand nombre de suppositions, *susceptibles*, par leur combinaison, d'expliquer ces propriétés. A supposer alors qu'une expérience contredise mon système, elle le ruine indubitablement, mais elle ne me dit pas qu'elle est, parmi mes suppositions, celle qui était fausse. Que conclura de là un dialectitien rigoureux ? Il soutiendra que l'expérience ne sert pas vraiment à découvrir, mais intervient après coup, une fois la théorie complètement édifiée. — C'est, — appliquée aux Mathématiques, — la conclusion même de Duhem (1).

Sans doute, on nous dira qu'il n'y a pas lieu de comparer sur ce point les Mathématiques à la Physique. Le contrôle d'une théorie mathématique est si aisé et si rapide qu'à peine est-il besoin de spécifier comment et à quel moment on doit le faire. Dès que l'analyste s'est assuré qu'il n'a pas commis d'étourderies, son œuvre est définitive. En Physique, au contraire, le rôle de l'expérience est capital parce qu'une théorie ne saurait être regardée comme établie qu'après un contrôle prolongé. Et même, la théorie physique n'est-elle pas, en réalité, toujours provisoire ?

C'est ici le cas de répondre que le temps ne fait rien à l'affaire. Peu nous importe qu'un analyste habile arrive parfois (rarement) au bout de sa tâche après quinze jours de tâtonnements, tandis qu'à telle théorie physique il

(1) Voir *supra*, p. 236.

a fallu plusieurs générations pour sortir de l'enfance. Le mathématicien n'en a pas moins été aux prises, pendant quinze jours, avec les difficultés auxquelles se heurtent les physiciens.

Peut-on dire, d'autre part, qu'une théorie physique — mise à l'abri des étourderies possibles de ses auteurs, — soit moins définitive qu'une théorie mathématique?

Duhem admet (1), avec la plupart des savants contemporains, que les postulats de la Physique sont inaccessibles aux démentis de l'expérience. Il y a donc du définitif en Physique comme en Mathématiques. Seulement ce définitif est toujours sujet à revision : corrections de détail d'abord, et quelquefois bouleversement [exemple : Copernic]. « Un jour peut-être, en refusant de recourir à des corrections pour rétablir l'accord entre le schéma théorique et le fait, en portant résolument la réforme parmi les propositions qu'un commun accord déclarait intangibles, le savant accomplira l'œuvre de génie qui ouvre à la théorie une carrière nouvelle (2) ». Mais, en tout cas, le bon sens seul est juge des hypothèses qui doivent être conservées ou abandonnées (3).

Il en est exactement de même en Mathématiques. Une théorie, définitive au regard de la Logique, n'est pas pour cela intangible. Il peut devenir opportun de l'englober dans une théorie plus générale. Ainsi, pour un algébriste d'autrefois la fraction $\frac{1}{1+x^2}$ appartenait au type des fonctions *toujours continues*. Pour un moderne, cette fraction présente deux discontinuités isolées aux

(1) *Loc. cit.* p. 342 et sqq.
(2) *Loc. cit.* p. 348.
(3) *Ibid.*, p. 356.

points imaginaires $\pm\sqrt{-1}$. Et qui sait si nos points de vue actuels ne disparaîtront pas à leur tour ?. L'étude des fonctions transcendantes, par exemple, a été fondée originellement sur la théorie algébrique des polynomes (base du calcul des séries). Mais peut-être une autre théorie, plus souple, plus nuancée, sera-t-elle un jour édifiée qui s'adaptera plus exactement aux faits que nous nous proposons de figurer. A quel moment conviendra-t-il d'abandonner pour un autre le vieux modèle de série convergente auquel nous sommes si habitués et qui nous a rendu tant de services? Cela, nous ne saurions le décider *a priori* : le bon sens seul doit en être juge.

Et ainsi, sur ce point encore, nous concluons à une similitude entre les Mathématiques et la Physique.

De cette rapide analyse que résulte-t-il ? Nous avons examiné les principaux caractères attribués par Duhem aux théories physiques, et nous avons constaté que ces caractères se retrouvent, pour la plupart, dans les théories mathématiques. Nous concluons de là, que si la théorie physique résulte, comme on le pense généralement, de la combinaison de deux éléments — une forme logique et une matière extralogique —, il doit en être de même de la théorie mathématique. En d'autres termes il est impossible de considérer la Mathématique comme le moule de la théorie physique, car il y a dans cette science même autre chose qu'un moule, il y a un fond objectif qui ne se laisse qu'incomplètement réduire en termes logiques.

Dira-t-on que l'on peut, en Mathématiques, séparer la forme du fond, isoler la méthode pour l'appliquer à l'étude des problèmes de la Physique ? C'était l'idée de la fin du XVIII[e] siècle, celle dont s'est inspiré Auguste

Comte (1). Et, sans doute, si les physiciens n'empruntaient à la Mathématique que ses procédés de calcul et de synthèse logique, cette idée pourrait être défendue. Mais on sait que la Physique contemporaine est liée aux théories les plus nouvelles de l'Analyse, et notamment de l'Analyse fonctionnelle. Elle ne saurait donc fonder sa méthode sur une conception de la Mathématique qui ne répond plus à l'état actuel de cette science.

S'il fallait en croire les auteurs que nous avons cités, le mathématicien serait, en quelque sorte, le serviteur de la Physique. Or, c'est précisément ce que les conditions dans lesquelles s'effectue aujourd'hui la recherche mathématique nous empêchent d'admettre. Du moment, en effet, où la science mathématique a son objet propre — et un objet qui ne peut être dompté qu'au prix de longs efforts et par de multiples artifices — il est clair que la marche de cette science doit être déterminée d'après son objet et non d'après celui d'une science voisine. Sans doute le mathématicien aidera le physicien. Mais il faut, avant cela, qu'il mette de l'ordre et qu'il y voie clair dans son propre domaine. Si, comme on l'a pensé pendant un temps, la Mathématique était définitivement sortie de l'ère des difficultés, si, suivant l'expression de M. Bouasse, elle n'avait plus qu'à « dévider » les conséquences de ses principes, alors elle pourrait peut-être se mouler exactement sur les problèmes de la Physique. Mais plus que jamais, l'analyste a ses propres embarras à surmonter : le premier devoir qui lui incombe est donc, incontestablement, de dissiper ceux-ci.

(1) La méthode ainsi isolable n'est pas, bien entendu, selon Comte, celle de la logique formelle classique (Cf. Winter, la *Méthode dans la philosophie des Mathématiques*, p. 58), mais bien celle (logico-mathématique) que nous avons définie dans notre chapitre III.

II. — La direction des recherches

Puisque le mathématicien ne saurait demander à des sciences autres que la sienne l'indication de la voie dans laquelle il doit diriger ses recherches, puisqu'il en est réduit, pour conduire son travail, à sa propre inspiration, comment, dans la pratique, orientera-t-il son activité, de quelle manière pourra-t-il s'assurer qu'il fait une œuvre bonne et féconde ?

Il ne s'agit pas ici de savoir quelles sont, en mathématiques, les conditions du succès et comment on peut réaliser une œuvre de premier ordre. Autant vaudrait demander par quels moyens on devient un homme de génie. Mais, avant de prétendre au succès, il convient, semble-t-il, de déterminer exactement le but qu'on se propose. En quoi doit-on faire consister, à quels signes peut-on reconnaître, la valeur d'une découverte mathématique ? Nous avons vu plus haut combien il est difficile de trancher cette question *a priori*. Mais, du moins, les savants de profession sont-ils capables de la résoudre *en fait* ? Possèdent-ils des critères sûrs pour juger les travaux auxquels ils se consacrent ou ceux qu'accomplissent leurs confrères ?

Nous devons reconnaître que, si les analystes modernes appliquent en effet des critères lorsqu'ils ont à apprécier un problème ou une solution, il s'en faut que ces critères soient uniformes et invariables. Il existe, à notre époque, de nombreuses écoles mathématiques, et chacune d'elles a son idéal, son point de vue particulier. Cherchons donc à nous faire une idée sommaire des règles de conduite que les plus notables de ces écoles proposent à leurs adeptes.

Quels sont, se demandent les chercheurs, les problèmes qui méritent de fixer notre attention ? En face de cette interrogation, le parti le plus simple qu'on puisse prendre consiste évidemment à n'en prendre aucun. C'est à quoi nous amènerait le point de vue de certains physiciens dont nous avons plus haut exposé les idées. Il serait absurde, dit M. Bouasse (1) de chicaner le créateur de formes sur la valeur et la nature d'un postulat : « alors même que celui-ci ne correspond à rien de réel, la forme qui en dérive n'en est pas moins intéressante et utile comme complétant le barème des formes ; rien ne dit que, dans un avenir plus ou moins éloigné, on ne lui trouve une application, c'est-à-dire des faits qui acceptent de s'y loger ». Le mathématicien, dit encore M. Bouasse, prépare à l'avance des formes qui seront utilisées par le physicien : « ces formes sont aujourd'hui connues en très grand nombre : on en a comme dévidé à l'avance les propriétés suivant un sorite par nature indéfini qui, pratiquement, peut remplir des volumes entiers ».

Oui : mais, combien de volumes ? Le nombre évidemment, n'en saurait être limité ; car on n'épuisera jamais toutes les formules qui pourraient, le cas échéant, servir aux physiciens. Faudra-t-il donc imiter ces compilateurs de la Renaissance qui amoncelaient dans d'énormes *Compendia* toutes les recettes qu'ils connaissaient ? En un siècle où l'on voit se multiplier et se ramifier à l'infini les voies dans lesquelles peuvent s'engager les théories, ce serait là, nous semble-t-il, une entreprise vraiment sans issue.

Aussi ne saurait-on s'étonner que le programme tracé par M. Bouasse ne soit pas accueilli avec faveur par les

(1) *Loc. cit.*, (voir ci-dessus p. 236).

mathématiciens. Par contre d'assez nombreux analystes sont aujourd'hui encore disposés à admettre que la Mathématique pure peut être construite suivant un plan régulier, et que ce plan ne saurait donner lieu à aucune discussion ; c'est, en effet, la logique qui le fournira : il consiste à s'élever progressivement du simple au composé.

Cette conception des mathématiques ne diffère pas, au fond, de celle que nous avons rencontrée chez les algébristes du XVIII^e siècle, et l'on peut dire qu'elle est désormais jugée. Elle devait néanmoins s'imposer de nouveau à l'attention de ceux des savants de notre temps qui ont poussé le plus loin le souci de la rigueur et de la perfection logique. L'édifice de la science a été entièrement rebâti. Beaucoup de théories, qui paraissaient indépendantes, sont aujourd'hui reliées entre elles et se font suite exactement l'une à l'autre. Le nombre des postulats indémontrables a été de plus en plus restreint. Ne serait-ce point que l'idéal synthétiste finirait, malgré tout, par se réaliser ? L'afflux de notions nouvelles, que l'algèbre, en se développant, leur apportait pêle-mêle, avait, un moment, désorienté les analystes ; mais aujourd'hui, — les notions premières et les règles de la déduction étant mieux connues, — ne va-t-on pas pouvoir rétablir l'ordre dans la production mathématique et en faire vraiment un système de généralisation logique ?

Nous avons suffisamment discuté plus haut cette doctrine pour reconnaître qu'il est impossible de la faire revivre aujourd'hui. Prise à la lettre elle est contredite par les témoignages des savants et par l'examen des œuvres mathématiques les plus importantes de notre époque. Il convient, toutefois, d'observer que l'emploi d'une méthode de généralisation régulière et progressive n'est pas à dédaigner en Analyse. Qu'il s'agisse, par exemple, de la théorie des fonctions, on pourra essayer de combiner méthodiquement des fonctions simples de manière à former des types de fonctions bien gradués. Les fonctions algébriques ont conduit aux fonctions elliptiques (premier exemple de transcendantes nouvelles obtenues par les méthodes modernes), les fonctions elliptiques conduisent aux fonctions modulaires, les fonctions modulaires aux fonctions fuschiennes : ainsi, on peut toujours, d'une famille donnée de fonctions, s'élever à une famille plus compliquée. C'est de cette manière que Gauss, par exemple, nous engage à procéder lorsqu'il nous invite à passer de l'étude des fonctions logarithmiques et circulaires à celle des fonctions hypergéométriques, qui constituent « un genre supérieur ».

L'emploi systématique d'une semblable méthode se heurte malheureusement à d'insurmontables difficultés : complication croissante des calculs et impossibilité de faire un choix *a priori* entre les extensions en nombre infini que comporte une même théorie. C'est pourquoi, pour les raisons que nous avons exposées dans un chapitre précédent, l'opinion d'après laquelle la Mathématique pouvait se développer par simple généralisation doit être abandonnée.

Nous avons vu qu'à la base d'une œuvre mathématique il y a toujours un choix dont la logique ne peut pas rendre compte. Le caractère libre de ce choix, affaire d'instinct et de goût, prend une telle importance aux yeux d'une certaine école qu'elle en vient à considérer l'Analyse mathématique comme une pure œuvre d'art. Selon les adeptes de cette école, aucune recherche ne s'impose spécialement à nous ; seules, par conséquent, les spéculations qui nous procurent une satisfaction esthétique méritent d'occuper notre temps; la palme reviendra aux savants qui sauront nous apporter les théories les plus jolies. Un problème élégant est toujours intéressant, un problème pénible est sans valeur.

Il faut reconnaître que cette manière de voir devient assez naturelle du moment que l'on ne croit plus au développement mécanique de l'Analyse. Aussi a-t-elle été d'un usage courant pendant la plus grande partie du XIXᵉ siècle; c'est alors l'ère des « beaux théorèmes », l'époque où les mémoires portent pour titres : « Sur une propriété remarquable, etc. ». « Sur une famille intéressante de, etc. » ou d'autres formules de même espèce.

Dans la pratique, incontestablement, cette orientation de la science a été féconde; car elle a permis d'introduire en Analyse un grand nombre d'idées nouvelles. Cependant elle nous oblige à poser une fois de plus une question qui nous a déjà arrêtés plus haut. Dans la bouche du mathématicien, quel est au juste le sens de ces mots : « beau », « élégant », « remarquable » ?

On ne peut plus se contenter aujourd'hui de rechercher la beauté, dans les propriétés mathématiques, selon le point de vue des géomètres grecs. Nous avons vu, en effet, que les préoccupations esthétiques des Grecs les contraignaient à limiter à l'excès le champ de la science, et d'ailleurs, il est manifeste que les théories actuellement en honneur ne possèdent nullement ces qualités de simplicité et d'harmonie que prisait la science hellénique. Sans doute, les savants modernes font-ils souvent encore de ces rencontres imprévues — et en quelque sorte providentielles — qui excitent l'admiration. De même que les Pythagoriciens étudiaient avec prédilection les relations qui unissent les différentes sciences, de même on s'efforce aujourd'hui de découvrir des analogies, de discerner des liaisons entre les diverses théories : c'est un « moment solennel », comme le dit justement M. Brunschvicg, que celui où deux domaines de la Mathématique entrent en contact. Mais, quelque intérêt que présentent les rapprochements de ce genre, on ne saurait évidemment en faire une condition nécessaire des progrès des mathématiques.

Aussi bien, n'est-ce pas dans la qualité objective des résultats obtenus, mais plutôt dans les mérites de la démonstration que semble résider, pour la plupart des mathématiciens de l'école esthétique moderne, la valeur d'une théorie. C'est à la beauté architecturale des formules et des déductions, que le mathématicien artiste est surtout sensible. Encore pénétré des conceptions synthétistes du XVIII^e siècle, il incline à penser que l'objet de nos recherches est relativement indifférent (comme cela doit être si cet objet emprunte aux définitions et aux démonstrations tout ce qu'il a de réalité). Peu importe donc que l'on étudie tel ou tel problème, qui serait regardé par d'autres, comme artificiel et vain; seule est à considérer la manière, plus ou moins élégante, par laquelle on vainc les difficultés proposées; tout le prix d'une théorie est dans le choix et la rigueur des méthodes employées, dans la conduite des discussions, dans les ruses et les habiletés dialectiques de l'auteur.

Le déclin de la conception synthétique des Mathématiques devait nécessairement produire une réaction entre cette manière de voir. Cependant le point de vue esthétique subsista longtemps, sous une forme moins absolue il est vrai, dans une école de mathématiciens que l'on pourrait appeler l'école éclectique.

Les éclectiques auxquels nous faisons allusion ne se proposent pas de construire de vastes théories; mais ils poursuivent des résultats de détail, recherchant, dans tous les domaines, ce qui est élégant, ce qui est facile, ce qui est pittoresque, comme aussi ce qui peut être de quelque utilité pour les applications pratiques de la science. Cette méthode de travail a, pendant un temps, permis d'obtenir une grande richesse de production. Feuilletons l'œuvre de certains mathématiciens d'il y a quarante ans : l'étonnante variété des sujets qu'ils ont effleurés nous confond; ils sautent, comme au hasard, de l'un à l'autre, cueillant partout les fleurs les plus colorées. Ils ont ainsi composé un joli bouquet, mais leur œuvre ne comporte pas de suite, et c'est là un assez grave défaut. Sous des dehors inoffensifs, le point de vue éclectique a peut-être nui, plus qu'on ne le croit d'ordinaire, aux progrès des mathématiques; car on a plus ou moins défloré tous les sujets connus, laissant les générations nouvelles engagées dans des impasses. Pareille situation ne saurait dûrer. D'ailleurs, les théorèmes se multiplient si rapidement qu'on ne peut plus se borner aujourd'hui à les collectionner sans méthode. Chacun, à notre époque, sent la nécessité de rétablir en Analyse un programme de recherches nettement défini.

Si pourtant le mathématicien ne peut se fier ni aux règles de la logique ni à son sens esthétique pour apprécier la valeur des théories, comment, encore une fois, ordonnera-t-il et conduira-il ses travaux ? Il lui reste, en pratique, une dernière ressource, qui est de s'en remettre à la tradition et à ses pairs. De tout temps les savants se sont mutuellement excités au travail en se piquant d'émulation, en s'adressant les uns aux autres des questions ou des défis. Les maîtres de la science, d'autre part, se sont chargés de diriger leurs disciples en canalisant les recherches de ceux-ci dans certaines directions déterminées. Certains professeurs — comme Hilbert à l'occasion d'un congrès international — ont même pris la peine d'énoncer publiquement les problèmes qui devaient, à leur avis, faire l'objet des recherches de leurs successeurs. C'est là une initiative excellente, à condition toutefois que le disciple ne se méprenne pas sur le rôle et le genre d'influence qui convient au maître. Or il semble que, dans certains pays où se sont perpétuées des traditions d'enseignement scolastiques, les jeunes savants aient tendance à appliquer, comme règle de travail, une méthode qui rappelle un peu trop l'ancienne « méthode d'autorité ».

Voyons à l'œuvre un débutant qui pratique cette méthode et qui cherche un sujet de travail. S'il ne se contente pas de s'en faire dicter un par son professeur, il ne fera pourtant pas son choix librement. Il commencera par lire, sur un ensemble de questions, les nombreux mémoires que lui indiquent les recueils bibliographiques. Il verra ainsi ce qui a déjà été fait, et il se garantira contre la mésaventure qui consiste à retrouver des résultats non-inédits. Mais ce n'est là encore qu'un travail préliminaire, une précaution nécessaire. Reprenant donc sa pile de mémoires, notre débutant cherchera si l'on n'y trouve point l'ébauche d'une théorie susceptible d'être généralisée ou perfectionnée. Il se demandera s'il n'y aurait pas moyen d'accrocher quelque suite, quelque complément, à l'œuvre d'un auteur connu, de préférence illustre. Que ces recherches aboutissent, et le voilà du coup dispensé de justifier péniblement, dans la préface de sa dissertation, le choix de son sujet. Il n'a qu'à dire : « M. X. a énoncé tel résultat : mais on peut aller plus loin : c'est ce que j'ai fait », ou bien : « M. Y. s'est posé telle question : on pourrait se poser telle autre question connexe, voisine, analogue :

je me la suis posée. » Et qu'elle ne sera pas la joie du débutant s'il trouve la démonstration d'un théorème qui avait résisté aux efforts d'un savant illustre. Il est désormais hors d'atteinte, inaccessible à la critique, car il peut écrire fièrement : « Le professeur Z. a été arrêté par telle difficulté : j'en ai triomphé. »

Le plus clair résultat de ces usages est une multiplication indéfinie des mémoires ou notes scientifiques, dans lesquels sont traités, sans unité de vues, les problèmes les plus disparates. Déjà Leibniz, relevant le défaut d'ordre et de méthode qui caractérisait — en son siècle — la recherche mathématique, se plaignait de « cette horrible masse de livres qui va toujours en augmentant » et qui ne peut que « dégoûter de la science » ceux qui seraient tentés de s'y adonner. Depuis lors, le flot des écrits n'a cessé de monter, et, pour en rendre le contenu utilisable, il a fallu créer des encyclopédies spéciales, des répertoires bibliographiques compliqués. Ainsi le XIXᵉ siècle a vu naître une nouvelle et dernière école de mathématiciens : celle des érudits qui, pour se tenir au courant de tous les mémoires publiés et de tous les petits faits signalés ici et là, ont dû introduire dans la science des grandeurs et des figures la méthode philologique.

Les constatations que nous sommes ainsi amenés à faire lorsque nous observons de dehors les méthodes de recherche des mathématiciens sont, à première vue, peu encourageantes. Pourtant il est indéniable que la science n'a cessé de réaliser depuis deux cents ans, et réalise chaque jour sous nos yeux, des progrès décisifs ; qui plus est, nous avons l'impression que, malgré maints tâtonnements, elle avance et évolue dans une direction précise. C'est que, peut-être, les mathématiciens sont en réalité moins embarrassés pour trouver leur voie que ne porterait à le croire l'attitude de certains d'entre eux. Sans doute, les règles d'après lesquelles ils déterminent pratiquement leurs sujets d'études et leur emploi du temps sont quelquefois discutables. Mais, au fond d'eux-mêmes, il sont dirigés par des principes qu'ils ne formulent pas explicitement, par des considérations qui découlent directement des tendances générales de la science de leur temps. En d'autres termes la conception de l'analyse mathématique qui s'est peu à peu affermie dans l'esprit des savants modernes leur fournit — souvent en dépit de leurs préférences personnelles, en dépit des tendances et des opinions d'école — les règles de conduite dont ils ont besoin.

Il suffit, croyons-nous, pour obtenir ces règles, de rapprocher un certain nombre de remarques que nous avons déjà eu occasion d'énoncer dans le cours de notre étude.

Rappelons-nous, d'abord, qu'une œuvre mathématique est toujours le produit d'un double travail : travail d'analyse (au sens que nous avons donné plus haut à ce mot) (1) et travail de synthèse. Mais, tandis que l'analyse ne jouait autrefois qu'un rôle accessoire et préliminaire, elle a pris de nos jours une grande importance, en raison de la place qu'elle occupe dans les théories, et en raison des ressources d'invention qu'elle exige de la part de l'homme de science. Tel est le fait dont il faut partir et dont il convient d'accepter les conséquences, quitte à abandonner pour cela certaines idées ou certaines coutumes du passé.

Ainsi, — précisément à cause de la part prépondérante qu'avait naguère la synthèse dans l'élaboration des ma-

(1) Voir page 210.

thématiques, — on a pris l'habitude de commencer celle-ci avant d'avoir terminé l'analyse. De là vient que nous voyons édifier tant de théories volumineuses, minutieusement ordonnées, mais condamnées néanmoins à disparaître, parce qu'elles sont construites sur des bases insuffisamment éprouvées. Il y a là un gaspillage d'efforts que l'on éviterait si l'on voulait bien reconnaître que la recherche analytique, encore qu'elle n'apporte que des résultats épars et imparfaits, doit être poursuivie pour elle-même avant la construction de toute théorie synthétique ; on ne doit pas craindre de s'y attarder, mais la laisser, au contraire, se développer posément et respecter les caractères propres qui la distinguent.

On remarque également chez beaucoup de mathématiciens une tendance professionnelle à toujours systématiser et généraliser. Or cette tendance, qui est excellente dans la synthèse, contrarie plus qu'elle ne favorise les progrès de l'analyse. Il convient donc de n'y pas céder prématurément. Au moment où une théorie hésite sur la route à suivre, tâtonne pour s'orienter, il ne lui sied pas de viser à la perfection logique, encore moins de chercher à être complète. En dépit de l'axiome : « Il n'y a de science que du général », c'est souvent, en fait, l'examen d'un cas particulier qui fournira le fil conducteur cherché. A quoi bon systématiser ce qui est provisoire ? A quoi bon généraliser ce qui n'est qu'une ébauche ?

Ces remarques équivalent à dire, en somme, qu'avant de mettre au point la forme d'une théorie il est nécessaire de se préoccuper du fond. Mais nous n'admettons pas d'autre part, que le mathématicien doive rechercher certains faits de préférence à d'autres (sauf lorsqu'il est possible de faire un choix en faits équiva-

lents), ni qu'il y ait lieu de donner le pas à certaines théories en raison des mérites de leur contenu. Les considérations qui nous portent à juger tel fait plus intéressant qu'un autre sont le plus souvent, comme nous l'avons vu, de simples préjugés. M. Denjoy le montre une fois de plus, fort spirituellement, dans un récent article (1), où il raille les savants traditionalistes de ne s'intéresser qu'à de « bonnes bourgeoises de fonctions » et de méconnaître l'importance de certains travaux récents. Ces esprits retardataires semblent en effet se méprendre complètement sur la mission qui incombe au véritable analyste. La découverte doit être, selon nos vues, une exploration ; le mathématicien a pour mission de
216 rechercher ce qui *est* ; son but est de dresser la carte du monde des faits mathématiques. Peu nous importera, par conséquent, que le chercheur découvre ceci ou cela, pourvu qu'il parvienne à inscrire quelque chose sur la carte à des endroits où il n'y avait que des blancs, pourvu que par un certain biais il pénètre là où on n'était pas encore allé, pourvu qu'il nous apporte des informations précises, définitives, ces informations fussent-elles d'ailleurs purement négatives.

En d'autres termes le mathématicien moderne regardera un problème comme étant avant tout un point d'interrogation, une question à laquelle il faut trouver une réponse. Sans doute, entre toutes les formes que peut recevoir la réponse, devra-t-on choisir de préférence celle qui est la plus simple, la plus générale et qui possède au plus haut degré les diverses qualités qui rendent une théorie claire et facilement maniable. Mais, quelle que soit la réponse obtenue, cette réponse doit en

(1) A. Denjoy. *L'Orientation actuelle des Mathématiques*, *Revue du Mois*, 10 avril 1919.

tout cas nous satisfaire si elle met fin au doute qui a fait naître le problème.

Il est vrai que les questions objectives que l'on peut ainsi se poser et les biais par où on peut les aborder sont en nombre illimité, et qu'ici encore un choix est nécessaire. Pour faire œuvre utile et progresser réellement dans l'exploration du monde mathématique, il faut se borner aux questions qui sont, à n'en pas douter, au travers de notre route, à celles que le développement de l'analyse, tel qu'il se produit en notre temps, impose directement et nécessairement à notre attention. Il faut, de plus, que les résultats obtenus par le chercheur soient de nature à soulager l'effort de ses successeurs : soit que ces résultats mettent en évidence des lois dont la connaissance déterminera, suivant l'expression de Mach et d'Henri Poincaré, une économie de pensée (1), soient qu'ils nous renseignent sur l'issue de certaines routes d'exploration et épargnent ainsi aux savants de l'avenir des hésitations et des démarches inutiles. Or, pour la détermination des questions qui remplissent de telles conditions, qui donnent lieu à de tels résultats, on ne saurait donner à l'avance aucune recette précise. Encore moins est-il possible de prévoir quels moyens de démonstration devront être mis en œuvre pour venir à bout de ces questions. C'est pourquoi le chemin qui mène aux grandes découvertes reste toujours incertain et aléatoire.

Mais, précisément, il résulte de notre conception de la science que ceux même qui n'aboutissent pas à des découvertes éclatantes peuvent néanmoins accomplir une œuvre féconde. Nous avons vu, en effet, que la

(1) H. Poincaré. *L'Avenir des Mathématiques*, réimprimé dans *Dernières pensées*, 1913.

connaissance des faits mathématiques n'est généralement acquise qu'au prix d'une lutte aux péripéties multiples, après maintes tentatives et maints insuccès. Il faut, croyons-nous, avoir reconnu un grand nombre de voies pour pouvoir discerner celle qui conduit quelque part. Partant de ce principe, nous devons admettre que l'effort des chercheurs ne sera jamais entièrement vain pourvu qu'il soit énergique et loyal, pourvu qu'il aborde de front les difficultés au lieu de tourner autour, pourvu qu'il s'applique à pénétrer chaque jour plus avant au cœur de la réalité objective.

III. — L'enseignement des Mathématiques

La question que nous venons de traiter pour ce qui regarde la recherche mathématique devra également être posée à propos de l'enseignement, et spécialement à propos de l'enseignement élémentaire, que des nécessités pédagogiques obligent à s'enfermer dans un cadre fixe et précis. Dans quel sens cet enseignement doit-il être orienté ? Quelles sont les théories qui y prendront place ? Dans quel ordre, dans quel esprit conviendra-t-il d'exposer ces théories ?

La solution que l'on donnera à cette question dépend, évidemment, tout d'abord du but que l'on a en vue. Suivant que l'on voudra former des ingénieurs, de futurs professeurs, ou simplement développer l'intelligence de l'élève, on devra adopter un programme d'enseignement différent. Cependant les principes intellectuels qui dirigent les savants d'une époque auront nécessairement une répercussion sur l'idée qu'il se font de l'enseignement. De la doctrine que l'on professe sur l'objet et le rôle des Mathématiques résultent naturellement certaines directives pédagogiques. Voyons donc si l'étude historique que nous avons esquissée ne nous conduira pas, dans cet ordre d'idées, à quelques conclusions intéressantes.

Une constatation s'impose en premier lieu. C'est que, si l'on a raison de distinguer et même d'opposer la mission des ouvriers de la science et celle des professeurs, il y a néanmoins un parallélisme remarquable entre les différentes écoles dans lesquelles nous pouvons ranger les uns et les autres. A chacune des conceptions que nous avons vu successivement présider au développement de l'œuvre mathématique répond nettement une conception correspondante de l'enseignement.

Si, comme les Grecs, nous estimons que l'intérêt principal de la spéculation mathématique tient à la beauté des propriétés numériques ou géométriques envisagées, nous devrons évidemment demander au professeur d'initier tout d'abord ses élèves aux plus parfaites de ces propriétés : nous l'inviterons, par exemple, à leur faire connaître les plus belles propositions de la théorie des nombres ou de la théorie des polyèdres réguliers, sans s'inquiéter de savoir si ces propositions sont ou non de quelque utilité pratique et si elles donnent, d'autre part, un aperçu suffisant de la puissance des méthodes employées par les analystes.

Si nous pensons, au contraire, que les théories mathématiques valent principalement par la forme logique sous laquelle elles se présentent, alors nous tiendrons surtout à familiariser les débutants avec les méthodes de la démonstration en les mettant en présence de systèmes logiques parfaitement construits et rigoureusement enchaînés.

Dans une certaine mesure, il est possible de concilier ce second point de vue avec le précédent. C'est ce que les Grecs avaient cherché à faire dans leurs traités didactiques, et les *Eléments* d'Euclide nous fournissent à cet égard un admirable modèle qu'une longue suite de générations a religieusement suivi. Grâce à l'enseignement euclidien, l'élève peut du même coup s'habituer aux exigences du raisonnement et acquérir la connaissauce des faits géométriques les plus notoires. Mais cet enseignement ne saurait suffire à notre époque. En effet, d'une part, les faits sur lesquels il porte n'occupent plus aujourd'hui dans la science la place privilégiée qu'ils avaient autrefois, et certains d'entre eux nous apparaissent au contraire comme très spéciaux; d'autre part, la géométrie enclidienne ne nous donne qu'une idée incomplète des méthodes de démonstration et des procédés de calcul dont l'usage s'est développé dans les théories modernes. Ainsi il faut opter entre les deux tendances qui s'unissaient chez les Euclidiens, et renoncer aujourd'hui à faire marcher de front l'étude des faits et celle des méthodes.

Entre les deux partis qui, dès lors, semblent s'offrir au maître, les mathématiciens de l'école synthétiste ne pouvaient pas hésiter. La suprématie obtenue par cette école eut naturellement pour effet d'accentuer le caractère formel de l'enseignement. Il en fut ainsi en particulier pendant la seconde moitié du XIXe siècle, car c'est à cette époque que la conception synthétiste de la science se répandit — avec un certain retard — dans le monde pédagogique, où d'ailleurs elle subsista plus longtemps que dans les milieux adonnés au travail de recherche. Suivant les maîtres qui dirigèrent alors notre enseignement, le professeur de mathématiques devrait se proposer comme but unique de former l'intelligence de ses élèves et de leur apprendre à raisonner avec rigueur. Peu importe qu'on leur enseigne telle ou telle partie de la science pourvu qu'on leur fasse comprendre ce que c'est qu'une démonstration et qu'on les habitue à n'avancer aucune vérité qu'ils ne soient capables de prouver. Cette conception a eu, en France, d'autant plus de succès qu'elle se trouvait conforme aux principes adoptés, dans divers ordres d'enseignement littéraire, par des pédagogues éminents. On mettait, vers l'année 1900, les questions de « méthode » au-dessus de toutes les autres, et l'on s'imaginait par là faire preuve d' « esprit scientifique ». Et en effet, s'il était vrai que la science pure, celle qui n'est pas encore mêlée d'éléments étrangers, n'est qu'une forme, indépendante du contenu auquel on l'applique, il s'ensuivrait qu'il est parfaitement inutile de donner à l'enfant des connaissances positives; amasser des faits est une tâche inintelligente dont la vie saura fort bien s'acquitter; ce qui importe, ce qui constitue la véritable mission du maître, c'est de développer chez l'élève le sens de la méthode, c'est de faire l'éducation des facultés formelles qui préexistent dans son entendement.

Depuis quelques années, cependant, on a reconnu les inconvénients que présente — dans l'enseignement mathématique tout au moins — l'adoption d'un point de vue aussi absolu. Non seulement, en faisant dominer des préoccupations purement logiques, on a rebuté et éloigné des Mathématiques d'excellents esprits; mais, faute de s'intéresser à la matière de la science, on a négligé de donner aux jeunes gens les connaissances objectives qui pouvaient un jour leur être utiles.

Une réaction devait donc se produire, et elle se manifesta tout d'abord dans le camp des savants et des professeurs qui cherchent à orienter la spéculation mathématique vers les applications concrètes. Ces maîtres se plaignirent, avec raison, que l'on creusât un fossé artificiel entre la science théorique et la vie pratique. Sous prétexte, disaient-ils, que les données des sens et de l'imagination manquent de rigueur scientifique, on a fait table rase de ces données et on les a remplacées par des constructions logiques qui paraissent à l'élève inventées de toute pièce et qu'il ne peut rattacher à aucune réalité. Sous prétexte d'éliminer de la science les généralisations intuitives, les raisonnements par analogie ou par approximation, on en a banni le bon sens. Ainsi, concluait-on, il faut changer de méthode ; il faut réduire considérablement dans l'enseignement des Mathématiques, le rôle de l'appareil logique, et accorder une large place à l'intuition sensible, à la représentation concrète des faits théoriques.

Telle fut l'argumentation présentée au cours des dernières années, par un groupe important de réformateurs. D'ailleurs, ces réformateurs, qui comptaient parmi eux d'éminents mathématiciens, n'étaient pas mûs uniquequement par les considérations dont nous venons de parler : ils étaient poussés par d'autres raisons, plus profondes, qui tenaient à l'évolution même de la pensée mathématique. En effet, il est bien évident que le déclin de la conception synthétiste des Mathématiques devait entraîner tôt ou tard l'abandon d'un type d'enseignement principalement logique et formel. Du moment où l'on reconnaît qu'il y a, à la base de l'Analyse mathématique, un ensemble de faits irréductibles à la logique, on ne doit plus présenter cette Analyse comme une construction pure et simple et l'on doit éviter de faire croire à l'élève que les notions mathématiques sont entièrement créées par notre esprit. Selon les vues actuelles, la pensée mathématique ne deviendrait logique qu'après avoir analysé et formulé certaines données. Dès lors il devient indifférent que, dans l'enseignement élémentaire, la logique entre en scène un peu plus tôt ou un peu plus tard. Quoi que l'on fasse, il y aura toujours, au point de départ du raisonnement, des faits posés a priori et des propositions non démontrées. Quel inconvénient peut-il donc y avoir à augmenter un peu, dans le résumé de la science qu'on offre à l'élève, la proportion des vérités qui ne sont pas objets de démonstration ?

Ainsi, ce sont des raisons fondamentales qui nous conduisent à modifier les principes par lesquelles était régi il y a une vingtaine d'années notre enseignement mathématique. Lorsque nous approfondissons ces raisons, nous sommes même portés à penser qu'en développant le côté pratique de l'enseignement on n'a accompli qu'une moitié de la réforme nécessaire. En effet, les motifs qui nous incitent à vouloir cultiver chez l'élève la faculté intuitive ne s'appliquent pas seulement à l'intuition sensible, mais également, et avec la même force, à l'intuition intellectuelle ; les considérations qui militent en faveur d'un enseignement objectif doivent nous faire rechercher, dans nos leçons, non seulement l'objectivité physique, mais aussi cette autre objectivité, que nous avons appelée *intrinsèque*, et qui caractérise les mathématiques modernes.

Quels devraient donc être exactement le programme et le point de vue de l'enseignement, si l'on voulait qu'il fût conforme aux principes qui nous paraissent diriger aujourd'hui la pensée mathématique ?

L'enseignement que nous avons en vue devra sans doute réserver une grande place à l'étude des méthodes de calcul et des formes de raisonnement. Ces méthodes, ces formes sont en effet l'instrument de la démonstration mathématique, et c'est à leurs perfectionnements successifs que sont dûs, en fait, les principaux progrès réalisés par l'Analyse. Mais, en même temps que l'on familiarisera l'élève avec les conditions de la démonstration, on devra lui montrer que les faits contenus dans une théorie mathématique ont une valeur et un intérêt propres, indépendamment des procédés logiques ou algébriques qui permettent de vérifier ces faits. Ainsi l'on s'efforcera de faire connaître au débutant les propriétés les plus saillantes des notions qu'étudie l'Analyse actuelle, les résultats essentiels qui permettent de comprendre le développement de la science; et l'on n'aura crainte d'avancer ces résultats sans preuve, si la justification qu'on en pourrait donner est trop indirecte ou si elle dépasse les connaissances de l'élève. En d'autres termes, on abandonnera ce vieux préjugé pédagogique d'après lequel le professeur de mathématiques ne devrait jamais parler d'autorité et serait tenu de prouver tous ses dires par un raisonnement en forme. Quels motifs pourraient, en effet, justifier un pareil scrupule ? En physique, sans doute, il y a quelque inconvénient à énoncer comme un fait ce qui est la conséquence d'une démonstration; car on expose l'élève à ne pas distinguer exactement, dans la théorie qu'on lui enseigne, la part de l'expérience et celle du raisonnement. Mais en mathématiques, pareil danger n'existe pas : l'élève est parfaitement averti qu'à l'exception des définitions, axiomes et postulats, tout, dans une théorie mathématique, doit être étayé par une démonstration; rien ne nous oblige donc à le mettre à de vérifier, dans chaque cas particulier qu'il en est bien ainsi. Peut-être, ici, va-t-on nous objecter que nous abaissons l'enseignement des Mathématiques, en l'obligeant à s'adresser à la mémoire au lieu de faire seulement appel à l'intelligence pour la conduite des démonstrations, et au bon sens pour la détermination des données premières : mais nous répondrons qu'en aucun cas, à l'heure actuelle, le bon sens ne pourrait suffire pour choisir et pour exprimer les vérités non démontrées dont partent les théories mathématiques ; dès lors, un enseignement où la mémoire n'interviendrait à aucun degré est manifestement impossible.

Ces observations doivent être complétées par une remarque connexe qui touche à une question d'un caractère général, fréquemment posée dans les discussions philosophiques. Y a-t-il, dans les théories qui constituent les Mathématiques pures, divers *ordres* à considérer, et, en particulier, l'ordre de l'enseignement est-il distinct de l'ordre de la spéculation ou de la découverte ?

C'est là une question qui n'a jamais été résolue d'une manière absolument satisfaisante, et cela peut-être parce que l'on a cherché à la simplifier à l'excès.

Partant de l'opposition établie par Platon entre la connaissance intuitive et la connaissance discursive, on a pensé que chacune de ces connaissances avait son ordre propre et que l'on devait dès lors admettre une distinction fondamentale entre l'ordre de l'être et l'ordre du discours.

Certains philosophes, d'autre part, se plaçant plus spécialement au point de vue de l'activité intellectuelle du savant, ont opposé l'ordre de l'invention et l'ordre de la démonstration, l'ordre de la découverte et l'ordre de l'exposition didactique (1).

Reprenant la question à son tour, M. Léon Brunschvicg a fort justement montré qu'il importe de ne pas con-

(1) Dans le langage de XVII[e] siècle, ces deux ordres sont l'*ordre de l'analyse* et l'*ordre de la synthèse.*

fondre l'ordre de la démonstration et celui de l'enseignement ; moyennant cette distinction, il espère pouvoir rapprocher le premier de ces ordres de l'ordre de l'invention.

Si, cependant, l'on admet les résultats de l'étude que nous avons faite dans les chapitres précédents, on sera conduit à une conclusion un peu différente et un peu plus complexe.

L'opposition fondamentale est bien, selon nous, comme le soutenaient les Platoniciens, entre la vérité objective des faits mathématiques et les conditions de la connaissance ; mais, tandis que l'on est fondé à placer au premier rang de ces dernières l'*ordre* de la démonstration, on ne saurait parler d'un ordre objectif, d'un ordre de l'être. En effet, c'est, nous l'avons vu, le propre de la construction logique et algébrique d'introduire un ordre dans une matière qui n'en comporte pas par elle-même. Le principe de la démonstration consiste à sérier les questions et à classer suivant une suite unilinéaire, en les enchaînant les unes aux autres, des propriétés qui sont en effet solidaires, mais entre lesquelles, du point de vue de l'intuition, il n'y a aucune hiérarchie, aucun rapport de succession. Ainsi, on ne saurait admettre l'existence d'un *ordre* antérieur à la démonstration. Aussi bien n'avons-nous pu définir l'intuition que d'une manière négative, et nous ne saurions admettre, par conséquent, qu'il soit possible de l'isoler de la connaissance démonstrative ; dans toute spéculation mathématique, il y a une part de démonstration et c'est de cette part que nous devons faire relever l'ordre des propriétés sur lesquelles nous spéculons.

En d'autres termes, le conflit que nous croyons apercevoir au fond des théories mathématiques modernes et sur lequel nous avons longuement insisté, n'est point l'opposition de deux ordres de vérités. Il n'en est pas moins exact qu'il y a une différence profonde, entre l'ordre dans lequel les vérités se présentent à l'inventeur et l'ordre dans lequel elles sont démonstrativement établies. Ainsi il existe bien un ordre de la découverte distinct de l'ordre logique. Mais les voies de la découverte ne sauraient être regardées comme plus exactement conformes à la réalité que celles de la logique. La découverte, nous l'avons vu, opère par tâtonnements, par coups de sonde, elle use d'expédients et de ruses. Si donc elle ne classe pas d'emblée les faits mathématiques suivant une chaîne déductive, mais recherche d'abord, parmi ces faits, les plus apparents, les plus suggestifs, les plus révélateurs, l'ordre qu'elle suit n'en est pas, pour cela, moins artificiel. Sans doute il est fort important d'étudier l'opposition de cet ordre et de l'ordre logique, car c'est ainsi que l'on est amené à reconnaître indirectement la qualité objective des faits mathématiques ; mais on ne saurait attribuer une valeur propre à l'ordre de la découverte, dont le principal caractère est d'être changeant et éclectique.

Cela admis, on n'aura plus de peine à porter un jugement sur le plan qu'il convient d'adopter dans l'enseignement des mathématiques. Ce plan ne nous étant pas imposé par la nature des faits enseignés, nous restons maître de le déterminer d'après des raisons d'opportunité ou d'après des exigences pédagogiques. Comme les méthodes de découverte, et pour des raisons analogues, l'enseignement trouvera avantage à être éclectique. En effet, l'enseignement doit donner au débutant un aperçu d'une réalité extrêmement complexe et touffue, dans laquelle le savant s'applique à introduire un ordre logique. Or, comment atteindre ce but sinon en employant concurremment des méthodes différentes et en se plaçant à divers points de vue ? Ainsi seulement le maître pourra faire saisir à ses disciples le double caractère qui fait pour nous le prix de la science mathématique : la puissance et la souplesse de la méthode, la variété et la richesse de la matière.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE PREMIER

LA CONCEPTION HELLÉNIQUE DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE II

LA CONCEPTION SYNTHÉTISTE DES MATHÉMATIQUES

CHAPITRE III

L'APOGÉE ET LE DÉCLIN DE LA CONCEPTION SYNTHÉTISTE

CHAPITRE IV

LE POINT DE VUE DE L'ANALYSE MODERNE

CHAPITRE V

LA MISSION ACTUELLE DU MATHÉMATICIEN

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

EXTRAIT DU CATALOGUE

12 02 n