

2. VERTEDEROS Y CALIBRACIÓN DE VERTEDEROS DE MEDIDA

2.1 OBJETIVOS

Los objetivos de esta práctica de laboratorio son tres:

- En general, desarrollar un estudio teórico de los vertederos como estructuras hidráulicas concebidas para el control de niveles y medición de caudales.
- Particularizar el estudio al flujo a través de vertederos de pared delgada.
- Calibrar un vertedero de pared delgada, a partir de un vertedero patrón (vertedero Bazin), cuya ecuación de calibración se conoce, o de cualquier otro dispositivo que permita medir correctamente caudales, por ejemplo un medidor electromagnético.

2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.2.1 Definición de vertedero. Un vertedero es un dique o pared que presenta una escotadura de forma regular, a través de la cual fluye una corriente líquida. Véase la Figura 2.1. El vertedero intercepta la corriente, causando una elevación del nivel aguas arriba, y se emplea para controlar niveles (vertederos de rebose) y/o para medir caudales (vertederos de medida).

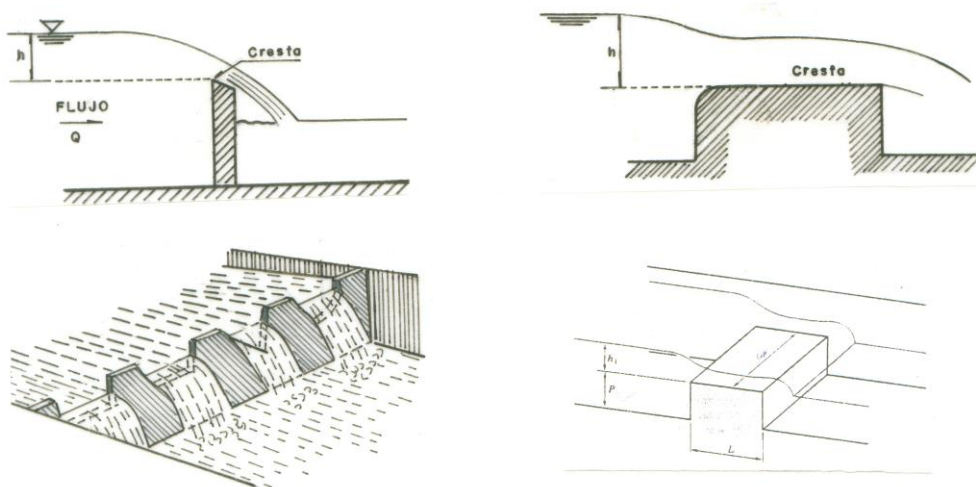


FIGURA 2.1. Flujo a través de vertederos.

La arista o superficie más elevada del vertedero, que está en contacto con el agua, se llama cresta. La altura h de la lámina de fluido sobre la cresta, responsable de la descarga, se llama cabeza o carga del vertedero. Ver Figura 2.1.

El flujo a través del vertedero tiene su motor en la fuerza de gravedad y el uso frecuente de los vertederos de pared delgada, como aforadores, se debe a que son estructuras de construcción sencilla y, principalmente, por la facilidad de determinar, con bastante aproximación, el caudal del flujo en un canal, a partir de la carga del vertedero, h . Véase la Figura 2.1.

2.2.2 Terminología relativa a los vertederos. A continuación se definen los términos comúnmente utilizados en la descripción de los flujos a través de vertederos. La Figura 2.2 ilustra dichos términos.

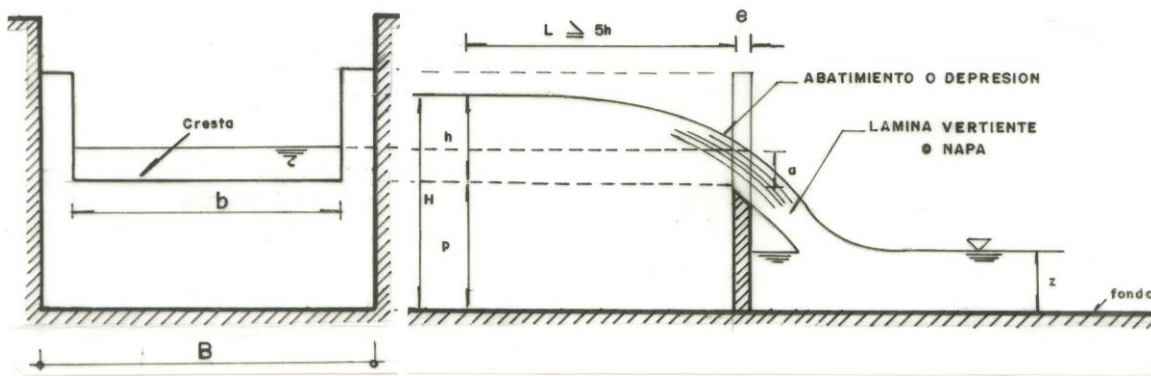


FIGURA 2.2. Terminología relativa al flujo a través de vertederos.

Donde:

- b : Longitud de la cresta del vertedero
- B : Ancho del canal de acceso
- h : Carga del vertedero. Es el desnivel entre la superficie libre de aguas arriba y la cresta del vertedero
- a : Carga sobre la cresta
- P : Altura o cota de la cresta, referida al fondo del canal
- z : Espesor de la lámina de agua, aguas abajo del vertedero
- L : Distancia mínima, aguas arriba del vertedero, a la cual se coloca el medidor de niveles (limnómetro). $L \geq 5h$
- e : Espesor de la pared del vertedero
- H : Espesor de la lámina de agua, aguas arriba del vertedero

El chorro descargado a través de la escotadura del vertedero, modelado por la cresta, forma una hoja llamada napa o lámina vertiente. Véase la Figura 2.2.

Como se verá posteriormente, el caudal, Q , descargado a través de un vertedero, se puede expresar en función exclusiva de la carga del vertedero, h ; es decir, $Q = f(h)$.

2.2.3 Tipos de lámina vertiente. Cuando el aire atmosférico rodea externa y completamente a la lámina vertiente y ésta se despega totalmente de la cara de aguas abajo del vertedero, se dice que éste es de lámina libre. Véase la Figura 2.1. Esta forma de lámina corresponde al régimen más estable y, por lo tanto, la más deseable en el empleo de los vertederos de pared delgada como medidores de caudal.

En el caso de un vertedero rectangular, sin contracciones laterales, esto es, con longitud de cresta igual al ancho de plantilla del canal de acceso, el espacio situado bajo la lámina de agua estará incomunicado con la atmósfera exterior, y el escurrimiento puede tomar una de las siguientes formas:

2.2.3.1 Lámina libre. Ya descrita anteriormente. Se obtiene mediante la instalación de orificios de ventilación en las paredes del canal, inmediatamente aguas abajo del vertedero, con lo cual se comunica la zona situada bajo la lámina con la atmósfera exterior. Véanse las Figuras 2.3a y 2.5.

2.2.3.2 Lámina abatida. Esta lámina ocurre cuando la ventilación de la descarga es insuficiente, por lo cual se introduce aire en la parte inferior de dicha lámina, disminuyendo su presión por debajo del valor de la presión atmosférica. En consecuencia, la presión atmosférica que actúa sobre la parte superior de lámina hace que ésta se adhiera a la placa del vertedero. Véase la Figura 2.3b.

El agua situada entre el vertedero y la lámina tiende a subir hasta que se rompe ésta, permitiendo la entrada de aire. El régimen vuelve a establecerse sucesivamente. La inestabilidad del régimen, debida a las entradas intermitentes de aire, se presenta para cierto rango de la relación h/P .

2.2.3.3 Lámina adherente. Es el caso de menor aireación de la lámina vertiente; es decir, la ventilación por debajo de la lámina vertiente es nula. Se presenta para pequeñas cargas h , en cuyo caso la velocidad es insuficiente para despegar la lámina. Véase la Figura 2.3c.

2.2.3.4 Lámina ahogada inferiormente. Ocurre al aumentar la carga de un vertedero de lámina adherente, sin que el aire pueda entrar debajo del manto inferior de la lámina, como se muestra en la Figura 2.3d. El espacio A se llena de agua, constituyendo una zona muerta y turbulenta, sin participar del escurrimiento general.

Cuando, en un vertedero de lámina libre, la carga es bastante grande, se produce una rápida al pie de la placa del vertedero (una rápida ó un rápido es un flujo de gran velocidad, con lámina deprimida, que normalmente se presenta en un canal cuando éste cambia de una pendiente suave a una pendiente fuerte); posteriormente, un poco aguas abajo, el flujo adquiere su velocidad normal y, dadas las condiciones de régimen subcrítico aguas abajo, se forma un resalto hidráulico. Véase la Figura 2.3e.

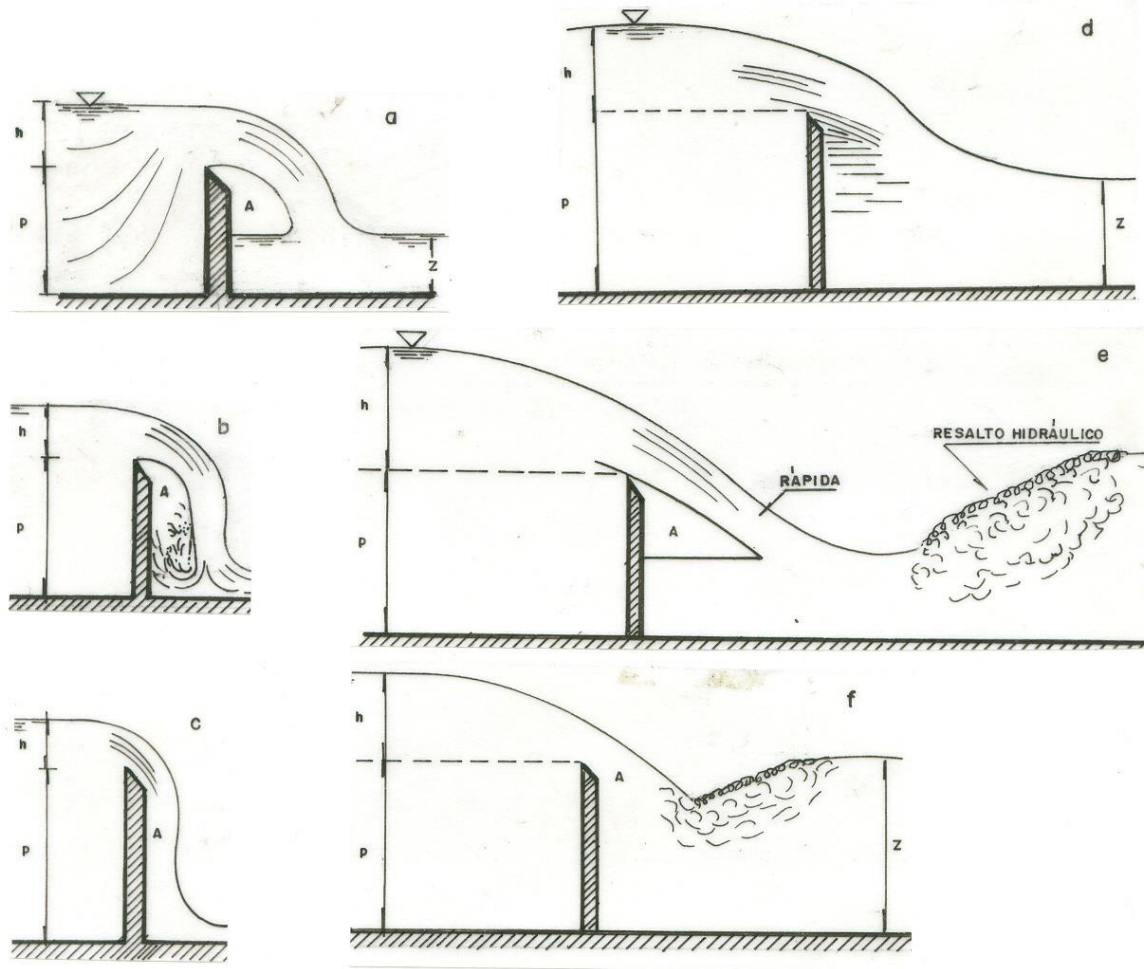


FIGURA 2.3. Diferentes tipos de lámina vertiente.

2.2.3.5 Lámina ahogada superiormente. Se presenta cuando el resalto hidráulico se acerca al vertedero cubriendo el pie de la lámina vertiente, al atenuarse la rápida por la disminución de la carga. Ver Figura 2.3f. En este caso, por ser constante el caudal aguas arriba del vertedero, toda variación en el nivel de aguas abajo repercute en el nivel de aguas arriba.

Finalmente, cuando la superficie libre, aguas abajo del vertedero, es superior a la elevación de la cresta, se dice que el vertedero está funcionando ahogado. Véanse las Figuras 2.3d y 2.7b.

2.2.4 Clasificación de los vertederos. Los vertederos se clasifican en atención a diversos aspectos:

2.2.4.1 Según el espesor de la pared:

- Vertederos de pared delgada ($e / h < 0.67$). Véanse las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4a.
- Vertederos de pared gruesa o de cresta ancha ($e / h \geq 0.67$). Ver la Figura 2.4b.

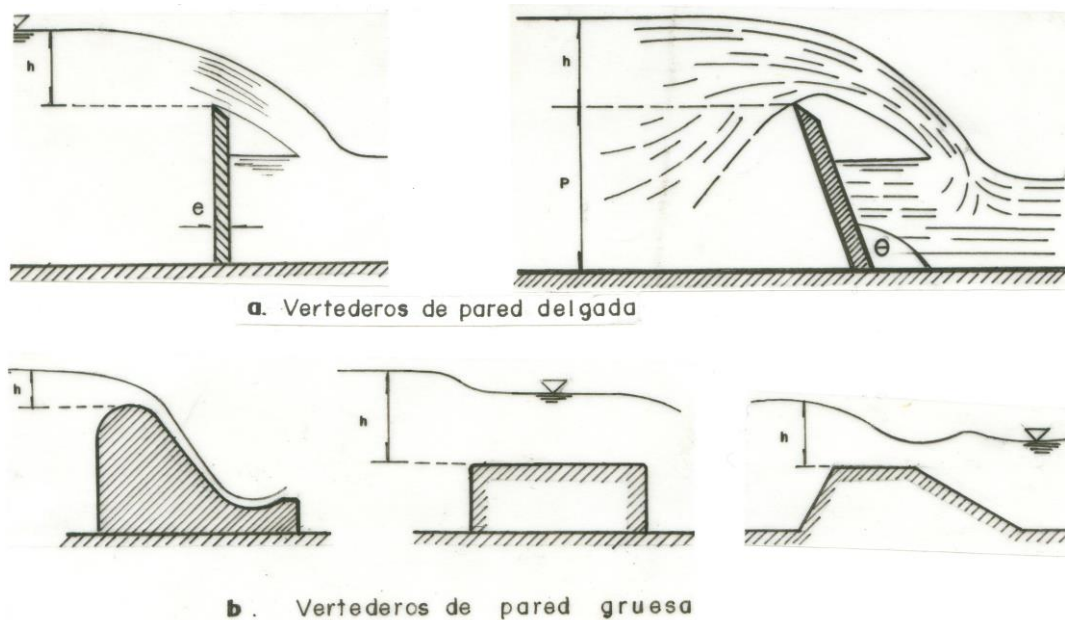


FIGURA 2.4. Tipos de vertederos según el espesor de la pared

Los vertederos de pared delgada sirven para medir caudales con gran precisión, y los de pared gruesa, como integrantes de una presa u otra estructura hidráulica, se utilizan para controlar niveles, aunque también se pueden instrumentar como medidores de caudales.

La superficie de contacto entre la lámina líquida vertiente y un vertedero de pared gruesa es relativamente grande, mientras que en los de pared delgada el contacto es una línea, constituida por una arista viva (la cresta), achaflanada y practicada en una chapa (placa) de unos 5 mm de espesor, cuyo material puede ser latón, acero inoxidable, acrílico, fibra de vidrio, cobre, hierro

galvanizado, etc. Esta chapa es prácticamente el vertedero, y en ella se practican las diferentes escotaduras (triangulares, circulares, trapezoidales, etc.).

La exactitud de la medida del caudal exige que el vertedero esté bien ventilado. La ventilación tiene por objeto introducir aire debajo de la lámina vertiente, gracias a un tubo de ventilación, para que, por ambas caras de la lámina, actúe la misma presión (atmosférica). Ver la Figura 2.5.

La lámina adherida en un vertedero no ventilado crea succión, y es causal de errores en la determinación de caudales.

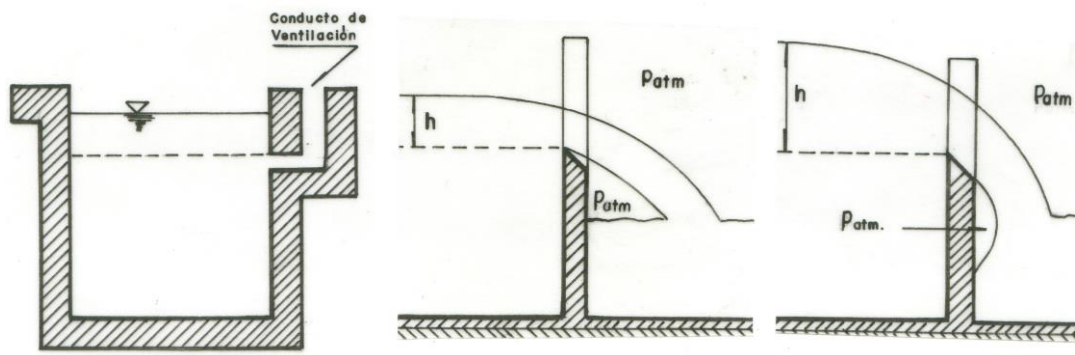


FIGURA 2.5. Ventilación en vertederos.

2.2.4.2 Según su forma geométrica: Ver la Figura 2.6

Vertederos de pared delgada:

- Rectangulares
- Triangulares
- Trapezoidales
- Circulares
- Semicirculares
- Parabólicos
- Simétricos
- Asimétricos
- Exponenciales

Vertederos de pared gruesa:

- Rectangulares de arista viva
- De cresta redondeada y talud vertical
- Cresta redondeada y talud inclinado hacia aguas abajo
- De cresta elíptica y talud inclinado hacia aguas abajo
- Vertedero Cimacio o de Creager

El más importante de los vertederos de pared gruesa es aquel cuyo perfil coincide con la forma del perfil inferior de la lámina vertiente, perfectamente ventilada, sobre un vertedero hipotético de pared delgada. A este tipo se le conoce con el nombre de cimacio y fue W.P. Creager el primero en idearlo.

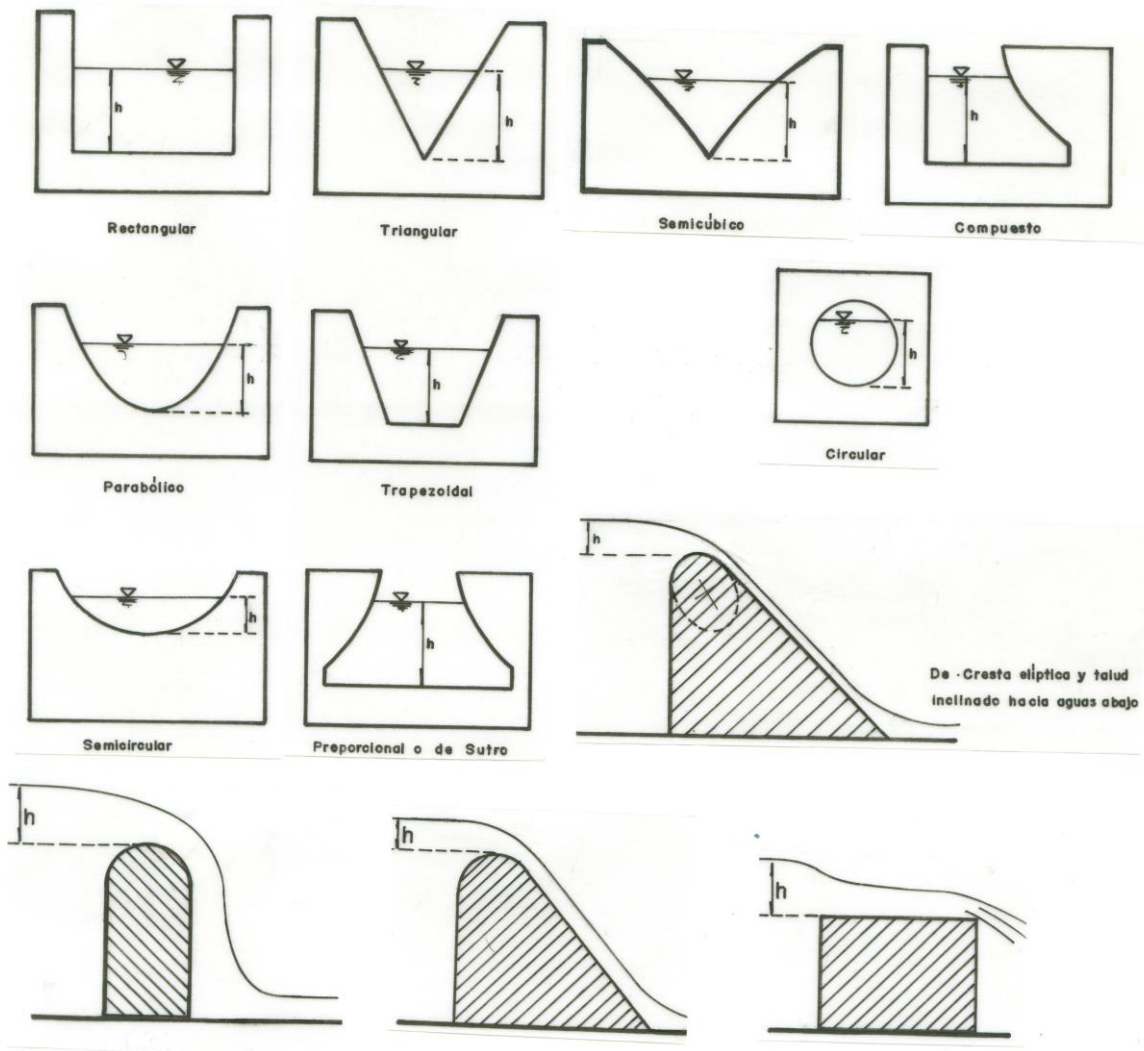


FIGURA 2.6. Diferentes formas de vertederos

2.2.4.3 Según la altura de la lámina de agua, aguas abajo: Ver la Figura 2.7

De acuerdo con el espesor de la lámina de aguas abajo, los vertederos pueden clasificarse en:

- Vertederos de descarga libre
- Vertederos sumergidos o ahogados

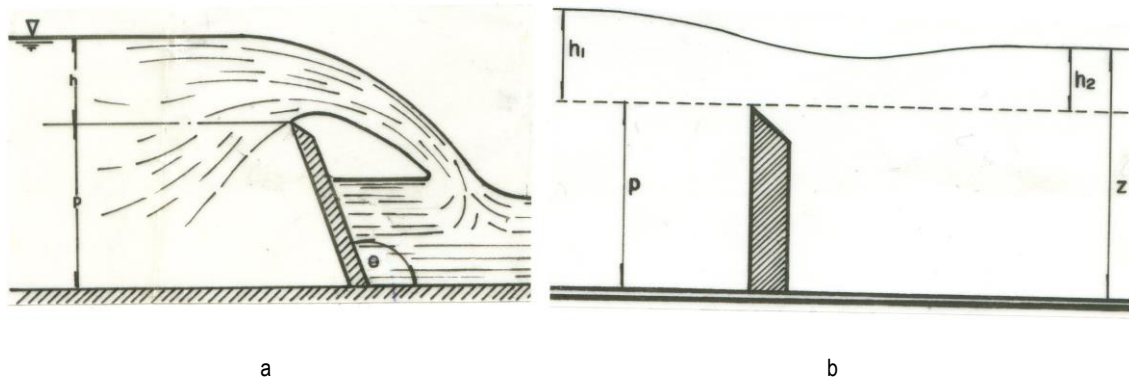


FIGURA 2.7 Vertederos operando con lámina libre y lámina sumergida

2.2.4.4 Según la longitud de la cresta: Ver la Figura 2.8

- Vertederos sin contracciones laterales ($b = B$)
- Vertederos con contracciones laterales ($b < B$)

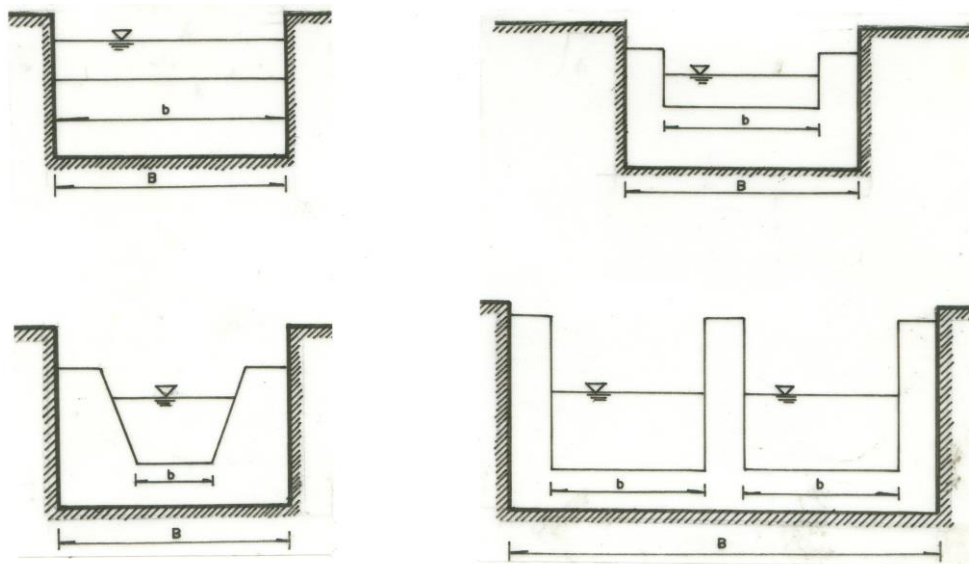


FIGURA 2.8. Diferentes vertederos con contracciones laterales

2.2.4.5 Según la posición del plano del vertedero con respecto a la dirección de la corriente:
Ver la Figura 2.9.

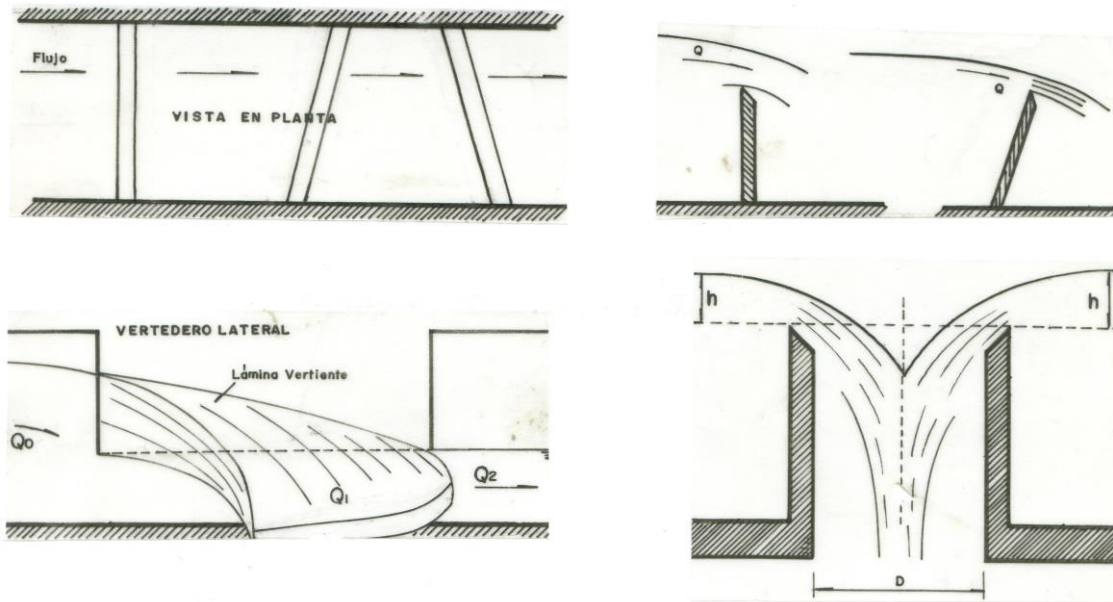


FIGURA 2.9. Vertederos transversales, laterales, oblicuos y de pozo.

- Vertederos transversales o normales
- Vertederos laterales (comúnmente llamados aliviaderos)
- Vertederos oblicuos
- Vertedero de aducción radial o de pozo

2.3 DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS PARA EL CAUDAL A TRAVÉS DE VERTEDEROS DE PARED DELGADA

Se presenta a continuación la deducción de expresiones que permiten calcular el caudal de flujo a través de vertederos de pared delgada y de forma rectangular, triangular, circular y trapezoidal, para lo cual se requiere plantear las siguientes hipótesis:

- Aguas arriba del vertedero, el flujo es uniforme y la presión varía linealmente con la profundidad, de acuerdo con la ley hidrostática de presiones.
- La superficie libre es paralela al fondo del canal, lo suficientemente lejos del plano del vertedero, aguas arriba, y todas las partículas que fluyen sobre el vertedero, se mueven horizontalmente (en realidad, la superficie libre se abate en la vecindad del vertedero).
- La presión externa a la lámina vertiente es la atmosférica.
- Los efectos debidos a la viscosidad y tensión superficial del líquido son despreciables.

2.3.1 Expresión para el caudal en vertederos rectangulares Considérese una corriente líquida que fluye a través de un vertedero rectangular, como se muestra en la Figura 2.10.

Sean los puntos 0 y 1 en la superficie libre del fluido, en una sección suficientemente lejos aguas arriba del vertedero, y justo encima de la cresta, respectivamente.

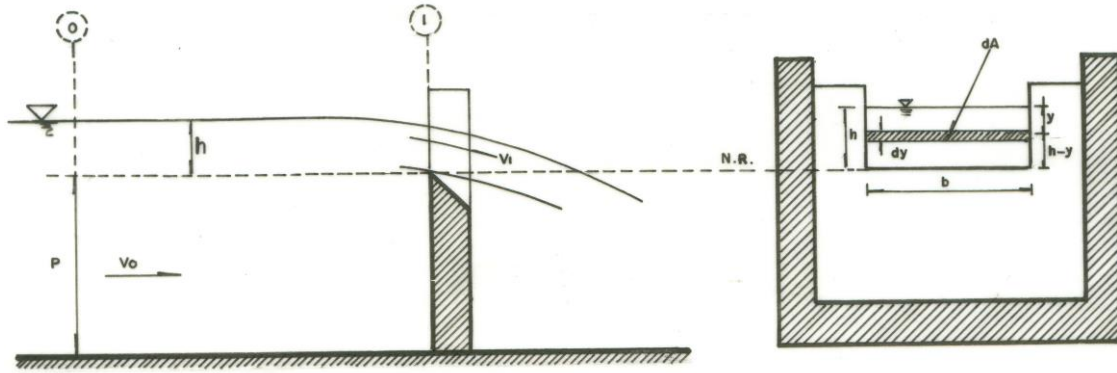


FIGURA 2.10. Flujo a través de un vertedero rectangular de pared delgada.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones (0) y (1), despreciando las pérdidas de carga, se tiene:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \quad (2.1)$$

Reemplazando, se tiene

$$h + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = (h-y) + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g}$$

Resultando :

$$\boxed{\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = y + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g}} \quad (2.2)$$

donde :

α_0, α_1 : coeficientes de corrección por energía cinética, de Coriolis.

v_0 : velocidad de aproximación del flujo, medida en una sección lo suficientemente lejos, aguas arriba del vertedero.

En la mayoría de los casos, la velocidad de aproximación, v_0 , suele despreciarse por ser muy pequeña, si se le compara con v_1 . Además, en flujos turbulentos y uniformes, los coeficientes de Coriolis son aproximadamente iguales a la unidad; por ello, se supone que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha = 1$.

Despejando la velocidad del flujo en la sección (1), justo encima de la cresta, de la ecuación (2.2), se tiene:

$$v_1 = \sqrt{2gy + v_0^2} \quad (2.3)$$

De otro lado, aplicando la ecuación de conservación de masa, el caudal elemental, teórico, que fluye a través del área diferencial, $dA = b \, dy$, sobre la cresta, es:

$$dQ_t = v_1 dA = \sqrt{2gy + v_0^2} \, b \, dy$$

El caudal teórico, a través del vertedero, será:

$$Q_t = \int dQ_t$$

$$Q_t = \int_0^h \left(\sqrt{2gy + v_0^2} \right) b \, dy$$

El caudal real descargado por el vertedero se obtiene introduciendo un coeficiente de descarga, C_d , el cual sirve para corregir el error de despreciar las pérdidas de carga del flujo, y tiene en cuenta, también, el efecto de la contracción de las líneas de corriente en la proximidad del vertedero y de la lámina vertiente sobre la cresta del mismo.

Además, C_d es adimensional, menor que 1, y es función de la viscosidad y tensión superficial del líquido, de la rugosidad de las paredes del vertedero y del canal de acceso, de la relación h/P y de la forma geométrica de la escotadura del vertedero.

Luego, el caudal real a través del vertedero será:

$$Q = C_d Q_t \quad (2.4)$$

$$Q = C_d b \int_0^h \left(\sqrt{2gy + v_0^2} \right) dy$$

Haciendo:

$$u = 2gy + v_0^2 \quad ; \quad du = 2g \, y \quad \therefore \quad dy = \frac{du}{2g}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$Q = C_d b \int_{v_0^2}^{2gh + v_0^2} \left(\frac{u^{1/2}}{2g} \right) du$$

$$Q = C_d \left(\frac{b}{2g} \right) \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_{v_0^2}^{2gh + v_0^2}$$

$$Q = \frac{2}{3} C_d \frac{b}{2g} \left[(2gh + v_0^2)^{3/2} - (v_0^2)^{3/2} \right]$$

$$Q = \frac{2}{3} C_d \frac{b}{2g} \left[\sqrt{(2gh + v_0^2)^3} - \sqrt{(v_0^2)^3} \right]$$

Introduciendo 2g dentro de los radicales, se tiene:

$$Q = \frac{2}{3} C_d b \left[\sqrt{\frac{(2gh + v_0^2)^3}{(2g)^2}} - \sqrt{\frac{(v_0^2)^3}{(2g)^2}} \right]$$

Ahora, multiplicando y dividiendo por 2g, se tiene:

$$Q = \frac{2}{3} C_d b \left[\sqrt{\frac{(2gh + v_0^2)^3 2g}{(2g)^2 2g}} - \sqrt{\frac{(v_0^2)^3 2g}{(2g)^2 2g}} \right]$$

$$Q = \frac{2}{3} C_d b \left[\sqrt{\left(\frac{2gh + v_0^2}{2g} \right)^3} \sqrt{2g} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^3} \sqrt{2g} \right]$$

$$Q = \frac{2}{3} C_d b \sqrt{2g} \left[\sqrt{\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^3} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^3} \right] \quad (2.5)$$

Como v_0 depende de Q , y éste es lo que se desea medir, la solución de la anterior ecuación es difícil, excepto por ensayo y error. Sin embargo, la velocidad de aproximación, v_0 , es, a menudo, muy pequeña y, por tanto, despreciable, con lo cual la ecuación (2.5) se reduce a:

$$Q = \frac{2}{3} C_d b \sqrt{2g} h^{3/2} \quad (2.6)$$

La exactitud obtenida con esta fórmula y otras análogas depende del conocimiento del valor que, en cada caso, tome el coeficiente C_d , para lo cual es preciso, ante todo, distinguir el caso en que el vertedero consista en una escotadura mucho más estrecha que el canal, y aquel otro en que, como ocurre en muchas obras hidráulicas (presas, aliviaderos, etc.) son las mismas paredes del canal, depósito o embalse, las que limitan el vertedero.

2.3.1.1 Vertederos rectangulares sin contracciones laterales. James B. Francis (1852) [Ref. 11] llevó a cabo una de las más detenidas investigaciones que, sobre este tema, se hayan efectuado. Sus ensayos se limitaron, no obstante, al rango $0.2 \leq h \leq 0.3$ m, y propuso la siguiente fórmula:

$$Q = 1.838 \frac{m^{1/2}}{s} b \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (2.7)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $b(m)$, $h(m)$, v_0 (m/s).

Obsérvese que el coeficiente 1.838 es igual al producto de la $\frac{2}{3} C_d \sqrt{2g}$ ecuación (2.5), con $C_d = 0.6227428$.

H. Bazin [Ref. 11] emprendió ensayos en mayor escala con cargas $0.08 < h < 0.50$ m, para establecer el siguiente resultado:

$$Q = \left(0.405 + \frac{0.0027}{h} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] b h \sqrt{2gh} \quad (2.8)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $b(m)$, $h(m)$, $P(m)$.

Esta ecuación puede sustituirse, con un error de 2 a 3%, para $0.1 < h < 0.3$ m, por la siguiente:

$$Q = \left[0.425 + 0.212 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] b h \sqrt{2gh} \quad (2.9)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $h(m)$, $P(m)$, $b(m)$.

Alphonse Fteley y Frederick P. Stearns [Ref. 11] experimentaron con vertederos rectangulares, para longitudes de cresta comprendidas en el rango $1.5 \leq b \leq 5.8$ m, y propusieron:

$$Q = 1.827 \frac{m^{1/2}}{s} b \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (2.10)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $h(m)$, $b(m)$, $v_0 (m/s)$.

F. Frese [Ref. 11], con base en sus experimentos y en los de H. Bazin, F. Stearns, H. Castel, J.A.Lesbros y A. Fteley, y para valores de h que no excedan apreciablemente a los de Bazin, estableció la siguiente fórmula:

$$Q = \left[\left(0.41 + \frac{0.0014}{h} \right) \left(1 + 0.55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right) \right] bh \sqrt{2gh} \quad (2.11)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $h(m)$, $b(m)$, $P(m)$.

Las fórmulas de Bazin y Frese conducen a valores demasiado grandes de Q , a causa de una insuficiente entrada de aire bajo la lámina, lo cual crea una depresión en esta zona. Theodore Rehbock (1900) [Ref. 11] eliminó esta causa de error, mediante disposiciones adecuadas, obteniendo valores de Q más pequeños que los de Frese y Bazin, para valores de h entre 0.02 m y 0.18 m, según la fórmula:

$$Q = \left[\left(0.406 + \frac{0.002}{3h - 0.012} \right) \left(1 + 0.55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right) \right] bh \sqrt{2gh} \quad (2.12)$$

Válida para vertederos rectangulares sin contracciones laterales. $Q(m^3/s)$, $h(m)$, $P(m)$, $b(m)$.

Para grandes valores de h , esta fórmula da valores de Q algo más elevados que los calculados por la ecuación de Bazin.

Posteriormente, T. Rehbock (1912) [Ref. 11] modificó su fórmula, dándole la forma siguiente, más manejable para el cálculo:

$$Q = \frac{2}{3} \left[0.605 + \frac{1}{1100h} + \frac{h}{12P} \right] bh \sqrt{2gh} \quad (2.13)$$

$Q (m^3/s)$, b , h y P en metros.

La cual, para grandes cargas h , coincide bastante bien con la ecuación (2.8) de Bazin.

El mismo Rehbock [Ref. 11], en el año 1913, modificó nuevamente aquella fórmula, expresándola de la siguiente manera:

$$Q = \frac{2}{3} \left(0.605 + \frac{1}{1050 h - 3} + \frac{0.08 h}{P} \right) b h \sqrt{(2) 9.8 h}$$

$$Q = \left(1.787 + \frac{2.95146}{1050 h - 3} + \frac{0.236 h}{P} \right) \frac{m^{1/2}}{s} b h^{3/2} \quad (2.14)$$

y también sustituyó el denominador (1050 h - 3) por 1000 h.

Después de establecido el nuevo Laboratorio de Hidráulica en Karlsruhe (1921) [Ref. 11], Rehbock comprobó reiteradamente su fórmula, empleando cargas h, hasta de 1.25 m, proponiendo, en 1929, la siguiente expresión:

$$Q = \left(1.782 + \frac{0.24 h_e}{P} \right) \frac{m^{1/2}}{s} b h_e^{3/2} \quad (2.15)$$

siendo $h_e = h + 0.0011$ m y h (m), $(h/P) < 1.0$, $b \geq 0.3$ m, $P \geq 0.1$ m, $0.03 < h < 1.25$ m

Según Ludwig Prandtl [Ref. 11], la diferencia 0.0011 m en h se atribuye a una acción capilar por tensión superficial.

Los resultados obtenidos por las ecuaciones (2.14) y (2.15) difieren poco entre sí, teniendo la (2.15) la ventaja de ser más sencilla y coincidir bastante bien con la de la Asociación Suiza de Ingenieros y Arquitectos [Ref. 14], que a continuación se expresa:

$$Q = \frac{2}{3} \left[0.615 \left(1 + \frac{1}{1000 h + 1.6} \right) \right] \left[1 + 0.5 \left(\frac{h}{h + P} \right)^2 \right] \frac{m^{1/2}}{s} \sqrt{2g} b h^{3/2} \quad (2.16)$$

Longitudes en metros; $0.025 \leq h \leq 0.8$ m; $P \geq 0.3$ m; $(h/P) \leq 1.0$.

Para completar la serie de fórmulas empleadas en el cálculo de la descarga a través de vertederos rectangulares, de pared delgada y sin contracciones laterales, se citan a continuación las fórmulas de Horace King y de Harris [Ref 9], válidas en el sistema inglés:

$$Q = 3.34 \frac{\text{pie}^{0.53}}{s} \left[1 + 0.56 \left(\frac{h}{h + P} \right)^2 \right] b h^{1.47} \quad \text{Ecuación de H. King} \quad (2.17)$$

$$Q = \left[3.27 + \frac{C}{h} + 1.5 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \frac{\text{pie}^{1/2}}{s} b h^{3/2} \quad \text{Ecuación de Harris} \quad (2.18)$$

Donde C es un coeficiente que depende de la temperatura del agua.

Para $T = 39^\circ \text{F}$, $C = 0.023$; para $T = 68^\circ \text{F}$, $C = 0.018$

Además, Q (pie³/s) ; h , b y P en pie.

2.3.1.2 Vertederos rectangulares con contracciones laterales. Si el vertedero está limitado lateralmente, como ocurre, por ejemplo, cuando es un simple recorte rectangular en una pared vertical, la lámina vertiente experimenta una contracción lateral que da por resultado un menor caudal por unidad de longitud de la cresta del vertedero, debido a que la longitud efectiva de la cresta se disminuye. Según Francis, esta disminución es igual a $(N/10)h$, donde N es el número de contracciones laterales que presenta el vertedero.

Así, para dos contracciones, la longitud efectiva de la cresta del vertedero rectangular será:

$$b' = b - \frac{2h}{10} \quad (2.19)$$

Luego, para vertederos rectangulares de pared delgada y con dos contracciones laterales, sigue siendo válida la ecuación (2.6), reemplazando b por $b' = b - 2h/10$

Luego,

$$Q = \frac{2}{3} C_d \left(b - \frac{2h}{10} \right) \sqrt{2g} h^{3/2} \quad (2.20)$$

Existe una diversidad de expresiones comúnmente empleadas para determinar el coeficiente de descarga, C_d , de la ecuación (2.20), algunas de las cuales son las siguientes:

ECUACIÓN DE FRANCIS [Ref. 11]

$$C_d = 0.623 \left[\left(1 - \frac{N}{10} \right) \frac{h}{b} \right] \left[\left(1 + \frac{v_0^2}{2gh} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2gh} \right)^{3/2} \right] \quad (2.21)$$

Donde,

N : número de contracciones laterales

v_0 : velocidad de aproximación al vertedero

Los límites de aplicación son:

$$0.18 \leq h \leq 0.50 \text{ m}; \quad b \geq 3h; \quad 0.6 \leq P \leq 1.5 \text{ m}; \quad 2.4 \leq b \leq 3.0 \text{ m}$$

ECUACIÓN DE HÉGLY [Ref. 11]

$$C_d = \left(0.405 - 0.03 \frac{B-b}{B} + \frac{0.0027}{h} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

Límites de aplicación:

$$0.10 \leq h \leq 0.60 \text{ m}; \quad 0.50 \leq b \leq 2.0 \text{ m}; \quad 0.20 \leq P \leq 1.13 \text{ m}$$

Válida para toda clase de contracciones, completas e incompletas, suprimidas de un lado, y para una o varias escotaduras, cuyas crestas sumen la longitud b .

ECUACIÓN DE HAMILTON – SMITH [Ref. 11]

$$C_d = 0.616 \left(1 - \frac{b}{10B} \right) \quad (2.23)$$

Límites de aplicación:

$$0.075 \leq h \leq 0.6 \text{ m}; \quad b \geq 0.3 \text{ m}; \quad h/b \leq 0.5; \quad (B-b) \geq 2h; \quad P \geq 0.3 \text{ m}; \quad z \geq 2h$$

Además, si $B(h+P) < 10bh$, en la ecuación (2.6) se reemplazará h por $h' = h + 1.4 v_0^2/2g$, donde v_0 es la velocidad de aproximación en el canal.

ECUACIÓN DE LA SOCIEDAD BELGA DE INGENIEROS MECÁNICOS [Ref. 14]

$$C_d = 0.4106 \left(1 + \frac{1.8}{1000 h} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (2.24)$$

Rangos de validez: $b \geq 0.5 \text{ m}; \quad 0.1 \leq h \leq 0.8 \text{ m}; \quad P \geq 0.3 \text{ m}; \quad h \leq P$

ECUACIÓN DE BRASCHMANN (1845) [Ref. 11]

$$C_d = 0.5757 + 0.0579 \frac{b}{B} + \frac{0.000795}{h} \quad (2.25)$$

B, b y h en metros.

No se conocen restricciones.

FÓRMULA DE LA SOCIEDAD SUIZA DE ARQUITECTOS E INGENIEROS, SIA [Ref. 14]

$$C_d = \left[0.578 + 0.037 \left(\frac{b}{B} \right)^2 + \frac{3.615 - 3 \left(\frac{b}{B} \right)^2}{1000h + 1.6} \right] \left[1 + 0.5 \left(\frac{b}{B} \right)^4 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (2.26)$$

Límites de aplicación:

$$0.025 \leq h \leq 0.8 \text{ m}; \quad b/B \leq 0.3; \quad P \geq 0.3 \text{ m}; \quad h/P \leq 1$$

2.3.1.3 Vertederos con descarga sumergida. Un vertedero opera sumergido cuando el espesor, z, de la lámina de aguas abajo, es mayor que la altura de la cresta, P. Véase la Figura 2.11. Diversas fórmulas se han propuesto para el cálculo del caudal en vertederos sumergidos, de las que ninguna parece ser completamente satisfactoria.

A. Fteley y F. P. Stearns [Ref. 11], basándose en resultados experimentales obtenidos, unos por J. B. Francis (1848) y otros por ellos mismos, establecieron la siguiente fórmula:

$$Q = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} b \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right) \sqrt{h_1 - h_2} \quad (2.27)$$

Válida para: $0.1 \leq h_1 \leq 0.3 \text{ m}$; $h_2/h_1 < 1.0$. Véase la Figura 2.11.

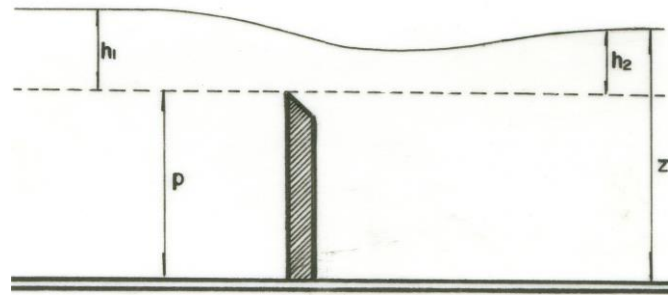


FIGURA 2.11 Vertedero con lámina sumergida

Según Bazin [Ref. 11], para un vertedero rectangular de pared delgada, sin contracciones laterales y con lámina sumergida, el caudal puede calcularse con suficiente aproximación empleando la siguiente fórmula (con la notación de la Figura 2.11):

$$Q = 1.05 Q_1 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{h_2}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{h_1 - h_2}{h_1}} \quad (2.28)$$

En la cual Q_1 es el caudal para lámina libre, con $h = h_1$

FÓRMULA DE KING [Ref. 11]

$$Q = 3.34 b (h_1 - h_2)^{1.47} \left[1 + 0.56 \left(\frac{h_1}{h_1 + P} \right)^2 \right] \left[1 + 0.2 \sqrt{\frac{h_1 h_2}{z (h_1 - h_2)}} \left(1 + 1.2 \frac{h_2}{h_1 - h_2} \right) \right] \quad (2.29)$$

Válida para vertederos rectangulares de pared delgada, sin contracciones. Q (pie^3/s); h_1 , h_2 , P , b y z en pies. Véase la Figura 2.11.

FÓRMULA DE VILLEMONTÉ [Ref. 11]

$$Q = Q_1 (1 - S^n)^{0.385} \quad (2.30)$$

Válida para vertederos de pared delgada y de cualquier forma geométrica.

Q_1 : caudal a través del vertedero con descarga libre e igual carga h_1

S : h_2 / h_1 (grado de sumergencia)

n : Exponente de la carga h en la ecuación para Q correspondiente

Vertedero rectangular : $n = 3/2$

Vertedero proporcional : $n = 1.0$

Vertedero triangular : $n = 5/2$

Vertedero parabólico : $n = 2.0$

ECUACIÓN DE MAVIS [Ref. 11]

$$Q = Q_1 \left[1 - \left(0.45 S + \frac{0.40}{2^{(10-10S)}} \right) \right] \quad (2.31)$$

Donde S se define como sigue:

$$S = \frac{a_2 \sqrt{h_2}}{a_1 \sqrt{h_1}} \quad (2.32)$$

a_1 y a_2 son las áreas del vertedero, correspondientes a las cargas h_1 y h_2 , respectivamente.

La ecuación de Mavis es válida para vertederos rectangulares, triangulares, circulares, parabólicos, sutro y puntiagudos.

2.3.2 Expresión para el caudal en vertederos triangulares. Para medir pequeños gastos, el vertedero triangular es más preciso que el rectangular, puesto que, para un mismo caudal, los valores de h son mayores.

Considérese la figura siguiente, en donde se esquematiza el flujo a través de un vertedero triangular, simétrico y de pared delgada, con un ángulo θ en el vértice de la escotadura.

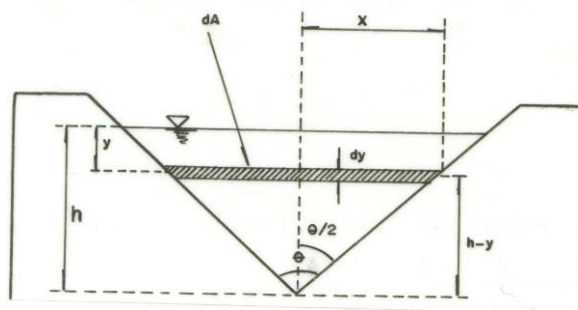


FIGURA 2.12. Flujo a través de un vertedero triangular

Análogamente a como se procedió en la sección 2.3.1, despreciando la velocidad de aproximación, v_0 , en la ecuación (2.3), la velocidad teórica del flujo sobre la cresta, es:

$$v_1 = \sqrt{2gy} \quad (2.3)$$

La descarga elemental, a través del diferencial de área, es:

$$dQ = v_1 dA = \sqrt{2gy} dA \quad (2.33)$$

De la figura, $dA = 2x dy$

Además,

$$\tan(\theta/2) = \frac{x}{h-y}$$

$$x = (h-y) \tan(\theta/2)$$

Luego, $dA = 2(h-y) \tan(\theta/2) dy$

Sustituyendo este último resultado en (2.31), se tiene:

$$dQ = 2\sqrt{2gy} \tan(\theta/2)(h-y) dy$$

$$dQ = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2)(h-y) y^{1/2} dy$$

El caudal total, teórico, será:

$$Q_t = \int dQ = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2) \int_0^h (h-y) y^{1/2} dy$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2) \left(h \int_0^h y^{1/2} dy - \int_0^h y^{3/2} dy \right)$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2) \left(2 \frac{h}{3} y^{3/2} \Big|_0^h - \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_0^h \right)$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2) \left(\frac{2}{3} h^{5/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} \right)$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \tan(\theta/2) \frac{4}{15} h^{5/2}$$

$$Q_t = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h^{5/2}, \quad \text{Caudal teórico} \quad (2.34)$$

El caudal real se obtiene multiplicando el caudal teórico por el correspondiente coeficiente de descarga, C_d , así:

$$Q = C_d Q_t$$

Luego,

$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h^{5/2}, \quad \text{Caudal real} \quad (2.35)$$

Si $\theta = 90^\circ$, $\tan(\theta/2) = 1$, y, según Thomson, para $0.05 \text{ m} \leq h \leq 0.25 \text{ m}$, $C_d = 0.593$.

Agrupando todas las constantes de (2.35) en una sola, se tiene:

$$C = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan(\theta/2)$$
$$C = \frac{8}{15} 0.593 \sqrt{2 \cdot 9.81} \tan 45^\circ = 1.4$$

Luego,

$$Q = 1.4 h^{5/2}, \quad \text{Fórmula de Thomson} \quad (2.36)$$

Q (m^3/s) y h (m). [Ref. 11]

Experimentando con vertederos triangulares ($\theta = 90^\circ$), el Profesor Horace King, en la Universidad de Michigan, obtuvo:

$$Q = 1.34 h^{2.47}, \quad \text{Fórmula de King} \quad (2.37)$$

h (m) y Q (m^3/s). [Ref. 11]

Mr. A.A. Barnes [Ref. 11], de los experimentos realizados por Thomson y Barr, propuso

$$Q = 1.337 h^{2.48} \quad (2.38)$$

h (m), Q (m^3/s) y $\theta = 90^\circ$.

El profesor Raymond Boucher [Ref. 11], de la Escuela Politécnica de Montreal, obtuvo para $\theta = 90^\circ$, h (m) y Q (m^3/s):

$$Q = 1.3424 h^{2.48} \quad (2.39)$$

Ecuación ésta que fue confirmada por Mr. V.M. Cone (1916) [Ref. 11]. Mr. Cone también propuso las siguientes fórmulas para otros valores de escotaduras triangulares:

Para $\theta = 60^\circ$, h (m) y Q (m^3/s),

$$Q = 0.7725 h^{2.47} \quad (2.40)$$

Para $\theta = 30^\circ$, h (m) y Q (m^3/s),

$$Q = 0.3564 h^{2.45} \quad (2.41)$$

Gourley y Crimp [Ref. 11], para ángulos θ de 45° , 60° y 90° , propusieron la siguiente fórmula:

$$Q = 1.32 \tan(\theta/2) h^{2.48} \quad (2.42)$$

Q (m^3/s) y h (m)

Otras ecuaciones de bastante precisión, para el coeficiente C_d en vertederos triangulares, según la ecuación (2.35), son las de Barr, de Hègly y de Heyndrick, que se expresan a continuación:

ECUACIÓN DE BARR (1909) [Ref. 11]

$$C_d = 0.565 + \frac{0.0087}{h^{1/2}} \quad (2.43)$$

Rangos de validez: $\theta = 90^\circ$; $0.05 < h < 0.25m$; $p \geq 3h$; $B \geq 8h$

ECUACIÓN DE HÈGLY (1921) [Ref. 11]

$$C_d = 0.5812 + \frac{0.00375}{h} \left(1 + \left(\frac{h^2}{B(h+P)} \right)^2 \right) \quad (2.44)$$

Válida para $\theta = 90^\circ$ y $0.1 < h < 0.5 m$.

ECUACIÓN DE HEYNDRICK [Ref. 11]. Válida para $\theta = 60^\circ$ y cargas normales.

$$C_d = \left[0.5775 + 0.214 h^{1.25} \right] \left[1 + \left(\frac{h^2}{B(h+p)} \right)^2 \right] \quad (2.45)$$

En vertederos triangulares, según F. J. Domínguez [Ref. 6], tienen poca influencia la elevación de la cresta y el ancho del canal de aducción sobre el coeficiente de descarga, C_d , debido a la relativa pequeñez de la escotadura, además de que la altura de la cresta hace poco sensible la influencia de la velocidad de aproximación, v_0 .

Según F. J. Domínguez, para $\theta = 90^\circ$, el caudal no varía con la altura de la cresta, aunque el fondo esté muy cerca del vértice del triángulo, y el ancho del canal empieza a influir solamente para $B < 6h$. En vertederos de 45° esta influencia sólo es advertible cuando $B < 4h$.

La poca variación de los C_d en los vertederos triangulares los hace recomendables para el aforo de gastos inferiores a 30 l/s, con cargas entre 6 y 60 cm.

Los vertederos triangulares son muy sensibles a cualquier cambio en la rugosidad de la placa, por lo cual las ecuaciones anteriores son válidas para placas de vertedero lisas.

Finalmente, se recomienda rigurosa exactitud en la medición de la carga, pues el caudal varía con la potencia 5/2 de la misma.

2.3.3 Expresión para el caudal en vertederos trapeciales. Es práctica usual, aunque errónea, suponer que la descarga a través de un vertedero trapecial es la suma de los caudales correspondientes a un vertedero rectangular de ancho b y otro triangular formado por los dos triángulos de las orillas de la escotadura, para la misma carga h . Véase la Figura 2.13.

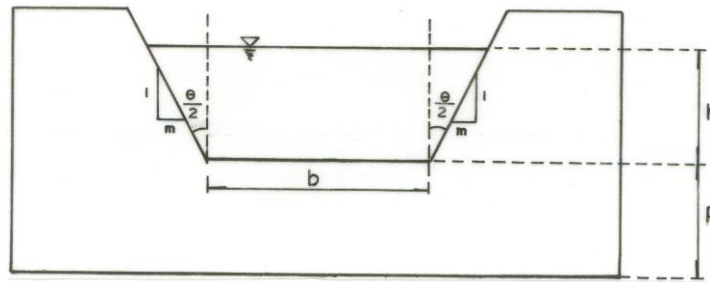


FIGURA 2.13. Flujo a través de un vertedero trapecial.

Por lo tanto, $Q_{v. \text{trapecial}} = Q_{v. \text{rectangular}} + Q_{v. \text{triangular}}$

De las ecuaciones (2.6) y (2.35) se obtiene el caudal a través del vertedero trapecial, así:

$$Q = \frac{2}{3} C_{d_r} b \sqrt{2g} h^{3/2} + \frac{8}{15} C_{d_t} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h^{5/2} \quad (2.46)$$

Donde C_{d_r} y C_{d_t} son los coeficientes de gasto correspondientes a los vertederos rectangular y triangular, respectivamente.

El vertedero trapecial de mayor interés es el **Cipolletti**, que lleva el nombre de un ingeniero italiano, ideador del mismo. La geometría regular de este vertedero es tal que el trapecio tiene taludes laterales 1H:4V, de manera que el incremento de caudal provocado por los dos triángulos laterales, compense la disminución de caudal que producen las contracciones laterales de un vertedero rectangular, de longitud de cresta b , en igualdad de condiciones de carga, h . Véase la Figura 2.13.

En efecto, el procedimiento seguido por Cipolletti, para determinar la pendiente del talud lateral en su vertedero, fue el siguiente:

- Incremento del caudal debido a las dos escotaduras triangulares, según la ecuación (2.35):

$$Q_t = \frac{8}{15} C_{dt} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h^{5/2} \quad (2.35)$$

- Decremento del caudal debido a las dos contracciones laterales del vertedero rectangular, según la ecuación (2.20):

$$Q_r = \frac{2}{3} C_{dr} \frac{2}{10} h \sqrt{2g} h^{3/2}$$

$$Q_r = \frac{2}{15} C_{dr} \sqrt{2g} h^{5/2} \quad (2.47)$$

Igualando las ecuaciones (2.35) y (2.47), suponiendo $C_{dr} = C_{dt}$, se tiene:

$$\frac{8}{15} C_{dt} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h^{5/2} = \frac{2}{15} C_{dr} \sqrt{2g} h^{5/2}$$

Obteniéndose:

$$\tan(\theta/2) = \frac{1}{4} \quad (2.48)$$

Sin embargo, la realidad es otra. Experimentos realizados por Flynn y Dyer, Stewart, Longuell, Etcheverry, y por el mismo Cipolletti, han desmentido la superposición de los caudales expresados en la ecuación (2.46) [Ref. 11].

Según F. J. Domínguez [Ref. 6], Cipolletti encontró experimentalmente que $C_d = 0.63$ para la ecuación (2.6) de vertederos rectangulares, con la cual se obtiene una fórmula empírica para un vertedero Cipolletti, y es:

$$Q = \frac{2}{3} 0.63 \sqrt{(2) 9.81} b h^{3/2}$$

$$Q = 1.86 b h^{3/2} \quad (2.49)$$

La ecuación (2.49) es válida para $\tan \theta/2 = 1/4$, $h < b/3$, con Q (m³/s), b (m) y h (m).

2.3.4 Expresión para el caudal en vertederos circulares. La deducción teórica de la ecuación para determinar el caudal a través de vertederos circulares es bastante compleja, desde el punto de vista matemático, pues, conduce a dos integrales elípticas, funciones de la relación h/D , cuyos valores aparecen disponibles en tablas.

Sea un flujo a través del vertedero circular, de pared delgada y vertical, como se muestra en la Figura 2.14.

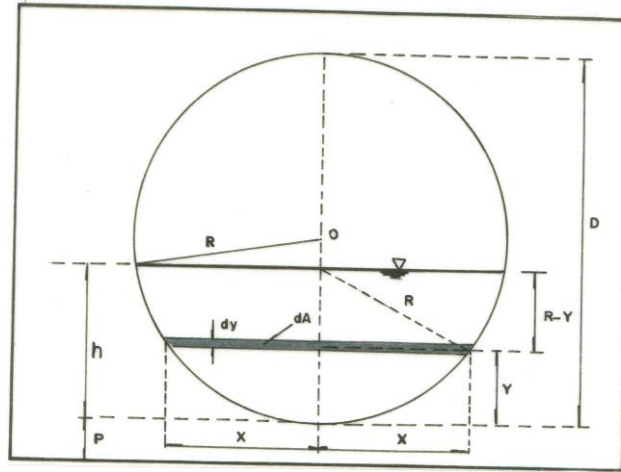


FIGURA 2.14. Flujo a través de un vertedero circular.

Análogamente a como se procedió en los numerales 2.3.1 y 2.3.2, aplicando la ecuación de Bernoulli entre (0) y (1), se tiene:

$$h + \frac{p_0}{\gamma} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = y + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g}$$

Haciendo $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha$, y despreciando la altura de velocidad de acceso, lejos del vertedero, se tiene:

$$v_1 = \sqrt{2g(h-y)} \quad (2.50)$$

Además,

$$dQ = v_1 dA$$

$$dQ = \sqrt{2g(h-y)} 2x dy \quad (2.51)$$

De la geometría del esquema de la figura, se tiene:

$$x = \sqrt{R^2 - (R-y)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 + 2Ry - y^2} = \sqrt{2Ry - y^2} = \sqrt{y(2R-y)}$$

$$x = \sqrt{y(D-y)} \quad (2.52)$$

Sustituyendo (2.52) en (2.51), se tiene:

$$dQ = 2\sqrt{2g(h-y)}\sqrt{y(D-y)}dy$$

$$dQ = 2\sqrt{2g}\sqrt{y(D-y)(h-y)}dy \quad (2.53)$$

Integrando la ecuación (2.53) se obtiene el caudal total teórico, así:

$$Q_t = \int dQ$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \int_0^h (\sqrt{y(D-y)(h-y)})dy \quad (2.54)$$

Multiplicando y dividiendo por $D^{5/2} = \sqrt{D^5}$, resulta :

$$Q_t = 2\sqrt{2g} \int_0^h \left(\frac{\sqrt{y(D-y)(h-y)}}{D^{5/2}} D^{5/2} \right) dy$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} D^{5/2} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y(D-y)(h-y)}{D^5}} \right) dy$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} D^{5/2} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y}{D} \left(\frac{D-y}{D} \right) \left(\frac{h-y}{D} \right) \left(\frac{1}{D^2} \right)} \right) dy$$

$$Q_t = 2\sqrt{2g} D^{5/2} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y}{D} \left(1 - \frac{y}{D} \right) \left(\frac{h}{D} - \frac{y}{D} \right)} \right) \frac{1}{D} dy \quad (2.55)$$

El caudal total real se obtendrá introduciendo el coeficiente de descarga, C_d para este tipo de vertedero; luego

$$Q = C_d Q_t \quad (2.56)$$

$$Q = 2\sqrt{2g} C_d D^{5/2} \int_0^h \left(\sqrt{\frac{y}{D} \left(1 - \frac{y}{D} \right) \left(\frac{h}{D} - \frac{y}{D} \right)} \right) d\left(\frac{y}{D}\right) \quad (2.57)$$

Haciendo $k^2 = h/D$ (menor que 1) y $z = y/D$, la ecuación (2.57) se transforma en :

$$Q = 2\sqrt{2g} C_d D^{5/2} \int_0^{k^2} \left(\sqrt{z(1-z)(k^2-z)} \right) dz \quad (2.58)$$

$$\text{Si } y = 0, z = 0; \text{ y si } y = h, z = \frac{h}{D} k^2$$

La resolución de la integral del miembro derecho de la ecuación (2.58) genera las integrales elípticas complejas, E y F, transformándola a la siguiente forma:

$$Q = \frac{4}{15} \sqrt{2g} C_d D^{5/2} [2(1 - k^2 + k^4) E - (2 - 3k^2 + k^4) F] \quad (2.59)$$

Ahora, haciendo:

$$W = 2(1 - k^2 + k^4) E - (2 - 3k^2 + k^4) F \quad (2.60)$$

se tiene:

$$Q = \frac{4}{15} \sqrt{2g} C_d W D^{5/2} \quad (2.61)$$

y llamando

$$\phi = \frac{4}{15} \sqrt{2g} W \quad (2.62)$$

finalmente, resulta:

$$Q = C_d \phi D^{5/2} \quad \text{Ecuación de Staus - Von Sanden} \quad (2.63)$$

Q (m³/s), ϕ (m^{1/2}/s), D (m).

La ecuación (2.59) fue obtenida por primera vez por A. Staus y K. von Sanden, en 1926.

K y F son funciones exclusivas de $h/D = k^2$ y sus valores están disponibles en la Tabla 2.1, la que, a su vez, permite obtener también valores de ϕ en m^{1/2}/s.

Ramponi propone la siguiente fórmula aproximada, para calcular ϕ en m^{1/2}/s.

$$\phi = 3.203 \left(\frac{h}{D} \right)^{1.975} - 0.842 \left(\frac{h}{D} \right)^{3.78} \quad (2.64)$$

TABLA 2.1. Valores de w y ϕ en función de $h/D = k^2$, para vertederos circulares de pared delgada. Tomada de [Ref. 20]

h/D (adim.)	w (adim.)	ϕ ($m^{1/2}/s$)	h/D (adim.)	w (adim.)	ϕ ($m^{1/2}/s$)	h/D (adim.)	w (adim.)	ϕ ($m^{1/2}/s$)
0.01	0.0004	0.00047	0.36	0.3451	0.4076	0.71	1.1804	1.3943
0.02	0.0013	0.00154	0.37	0.3633	0.4291	0.72	1.2085	1.4275
0.03	0.0027	0.00319	0.38	0.3819	0.4511	0.73	1.2368	1.4609
0.04	0.0046	0.00543	0.39	0.4009	0.4735	0.74	1.2653	1.4946
0.05	0.0071	0.00893	0.40	0.4203	0.4965	0.75	1.2939	1.5284
0.06	0.0102	0.0120	0.41	0.4401	0.5199	0.76	1.3226	1.5623
0.07	0.0139	0.0164	0.42	0.4603	0.5437	0.77	1.3514	1.5963
0.08	0.0182	0.0215	0.43	0.4809	0.5681	0.78	1.3802	1.6303
0.09	0.0231	0.0273	0.44	0.5019	0.5929	0.79	1.4091	1.6644
0.10	0.0286	0.0338	0.45	0.5233	0.6182	0.80	1.4380	1.6986
0.11	0.0346	0.0409	0.46	0.5451	0.6439	0.81	1.4670	1.7328
0.12	0.0412	0.0487	0.47	0.572	0.6700	0.82	1.4960	1.7671
0.13	0.0483	0.0571	0.48	0.5896	0.6965	0.83	1.5250	1.8013
0.14	0.0560	0.0661	0.49	0.6123	0.7223	0.84	1.5540	1.8356
0.15	0.0642	0.0758	0.50	0.6540	0.7506	0.85	1.5830	1.8699
0.16	0.0728	0.0860	0.51	0.6588	0.7782	0.86	1.6120	1.9041
0.17	0.0819	0.0967	0.52	0.6825	0.8062	0.87	1.6410	1.9384
0.18	0.0914	0.1080	0.53	0.7064	0.8344	0.88	1.6699	1.9725
0.19	0.1014	0.1198	0.54	0.7306	0.8630	0.89	1.6988	2.0066
0.20	0.1119	0.1322	0.55	0.7551	0.8920	0.90	1.7276	2.0407
0.21	0.1229	0.1452	0.56	0.7799	0.9212	0.91	1.7561	2.0743
0.22	0.1344	0.1588	0.57	0.8050	0.9509	0.92	1.7844	2.1077
0.23	0.1464	0.1729	0.58	0.8304	0.9809	0.93	1.8125	2.1409
0.24	0.1589	0.1877	0.59	0.8560	1.0111	0.94	1.8403	2.1738
0.25	0.1719	0.2030	0.60	0.8818	1.0416	0.95	1.8678	2.2063
0.26	0.1854	0.2190	0.61	0.9079	1.0724	0.96	1.8950	2.2384
0.27	0.1994	0.2355	0.62	0.9342	1.1035	0.97	1.9219	2.2702
0.28	0.2139	0.2527	0.63	0.9608	1.1349	0.98	1.9484	2.3015
0.29	0.2289	0.2704	0.64	0.9876	1.1666	0.99	1.9744	2.3322
0.30	0.2443	0.2886	0.65	1.0147	1.1986	1.00	2.0000	
0.31	0.2601	0.3072	0.66	1.0420	1.2308			
0.32	0.2763	0.3264	0.67	1.0694	1.2632			
0.33	0.2929	0.3460	0.68	1.0969	1.2957			
0.34	0.3099	0.3660	0.69	1.1246	1.3284			
0.35	0.3273	0.3866	0.70	1.1524	1.3612			

De otro lado, según Stauss y Jorissen, el coeficiente de descarga, C_d , se puede determinar empleando la siguiente ecuación [Ref. 20]:

$$C_d = 0.555 + \frac{D}{110h} + 0.041 \frac{h}{D} \quad (2.65)$$

Válida para $0.20 \text{ m} \leq D \leq 0.30 \text{ m}$ y para $0.075 < h/D < 1.0$. La distancia mínima entre los bordes del vertedero y las fronteras del canal de acceso debe ser $3D$.

Ramponi también propone la siguiente ecuación, para determinar el coeficiente de descarga [Ref. 20]:

$$C_d = \left[0.35 + \frac{0.002}{h/D} \right] \left[1 + \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 \right] \quad (2.66)$$

donde:

A : área mojada del vertedero entre la cresta y la carga h correspondiente.

A_0 : área mojada del canal de acceso.

Válida para vertederos con $D < 1.0 \text{ m}$ y que no cumplan con la exigencia de distancia mínima $3D$ de la ecuación (2.65).

El vertedero circular presenta las siguientes ventajas: simplicidad y facilidad de instalación (no requiere de horizontalidad perfecta de la cresta, como el vertedero rectangular, ni de bisectriz vertical, como en el triangular), ventilación asegurada y más recomendable que el vertedero rectangular para medir caudales pequeños.

2.4 RELACIÓN GENERAL ENTRE EL CAUDAL Y LA CARGA EN VERTEDEROS

A lo largo del numeral 2.3 se ha evidenciado la relación entre el caudal, Q , descargado a través de un vertedero, y la carga, h_v , correspondiente. Cualquiera sea la forma geométrica del vertedero (rectangular, trapecial, triangular, de pared gruesa o delgada, etc.), la expresión general para determinar la descarga a través de vertederos, tiene la forma potencial siguiente:

$$Q = \alpha h_v^\beta \quad (2.67)$$

donde:

α : coeficiente que agrupa varias constantes, y depende del tipo de vertedero.

β : exponente de la carga que depende de la forma geométrica de la escotadura del vertedero.

La variación de Q vs. h_v , dada por la ecuación (2.67), se muestra en la Figura 2.15.

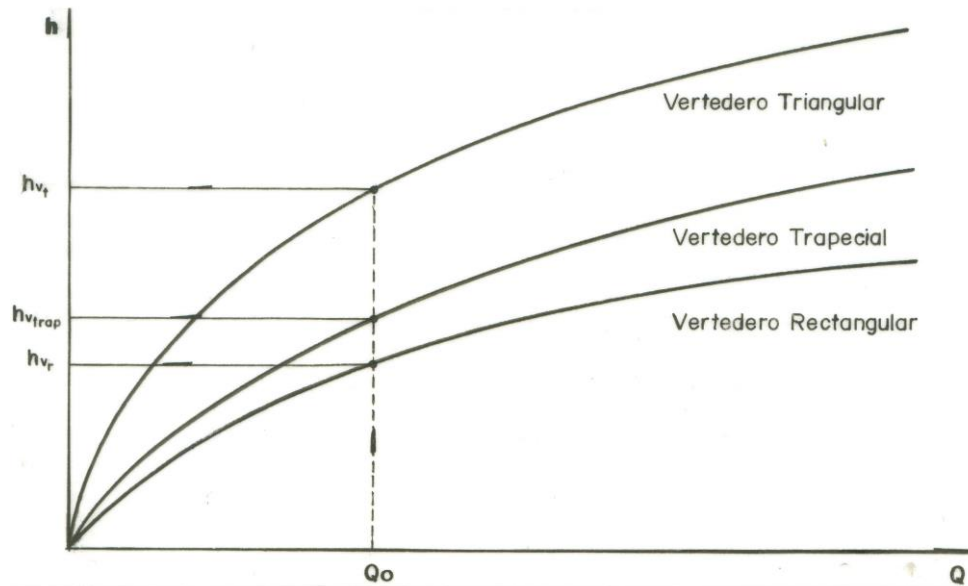


FIGURA 2.15. Variación de Q vs. h_v para vertederos.

2.5 DESCRIPCIÓN DE LA INSTALACIÓN

La instrumentación experimental consta de los siguientes elementos (véase la Figura 2.16):

- Sistema de bombeo que incluye tanque de succión, situado en el primer piso del Laboratorio de Hidráulica, y tanque elevado, ubicado en el tercer piso del Bloque M2. Este sistema garantiza el abastecimiento de agua, en régimen permanente, para todas las prácticas de hidráulica contempladas en el programa de esta asignatura.
- Tubería de alimentación, provista de válvula de regulación de caudales.
- Canal de aproximación, de acrílico y sección rectangular.
- Tanque de aquietamiento con muros directores, aguas arriba del canal rectangular.
- Vertedero patrón (vertedero de Bazin), rectangular, sin contracciones laterales y previamente calibrado, cuya relación entre la carga y el caudal descargado es:

$$Q = 0.0214 h_B^{1.58} \quad (2.68)$$

Q (l/s) y h_B (mm)

- Vertedero problema o vertedero a calibrar, cuya ecuación de calibración se desea determinar. Es un vertedero de pared delgada y de forma geométrica regular.
- Limnímetros o medidores de niveles.

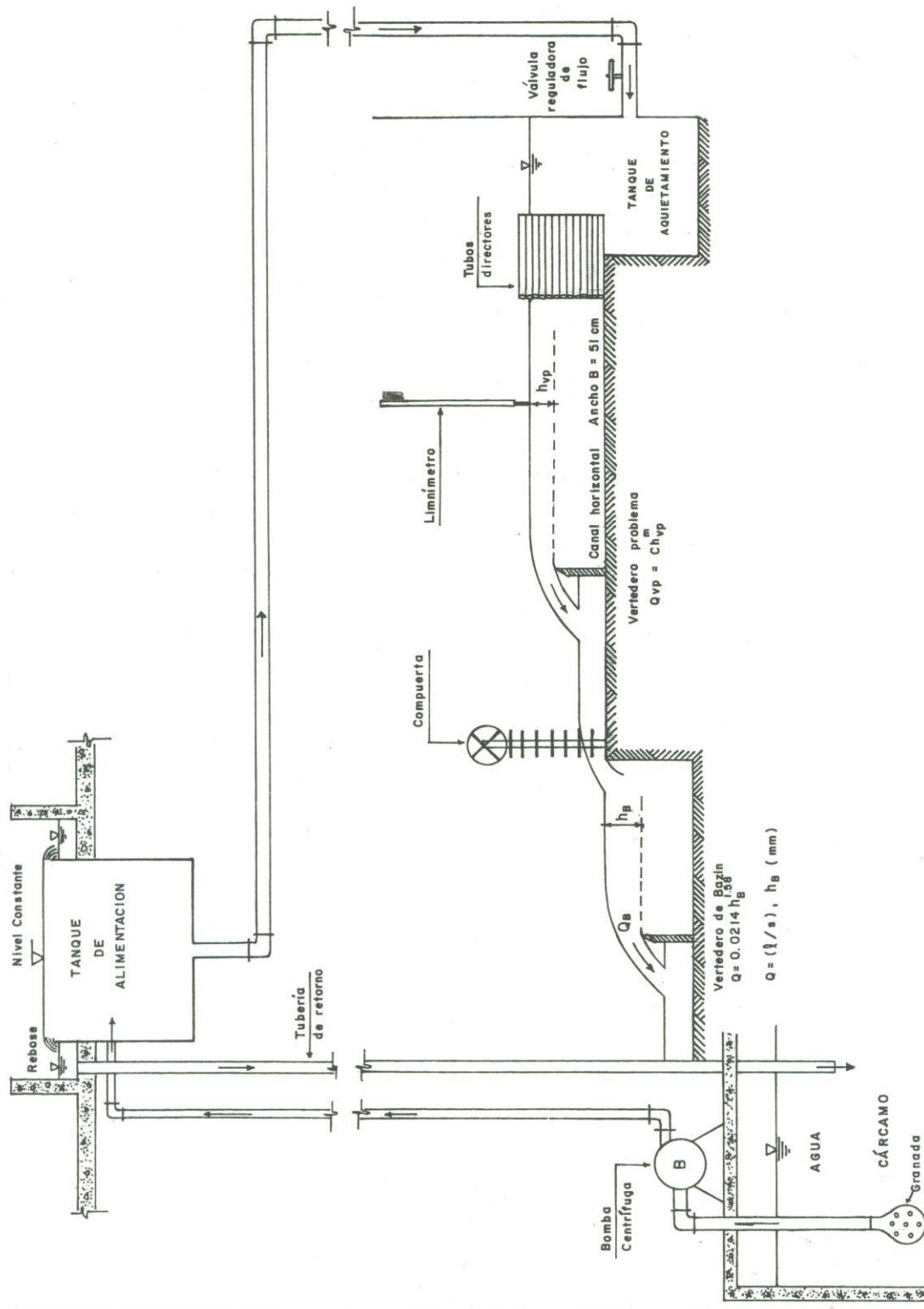


FIGURA 2.16. Instalación para la práctica de calibración de vertederos.

2.6 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Abierta la válvula de regulación de caudales, el agua circula por el canal de aproximación para fluir, primero, a través del vertedero a calibrar y, luego, a través del vertedero de Bazin. Al establecerse continuidad en el sistema, los caudales descargados por los dos vertederos, serán iguales. Se aclara que, alternativamente, los caudales medidos con el vertedero de Bazin podrían sustituirse por los caudales registrados por el medidor electromagnético de caudales, a fin de garantizar mayor precisión.

Para cada abertura de la válvula, se miden simultáneamente las cargas, h , correspondientes a los vertederos, como la diferencia entre el nivel de la superficie libre del agua y el nivel de la cresta, registrados por los limnímetros, una vez se haya estabilizado el flujo.

Este procedimiento se repetirá un número de veces no inferior a 10, iniciando con un caudal máximo que puede ser descargado por el vertedero problema, y disminuyendo sucesivamente los caudales, de tal manera que los decrementos en las cargas de los vertederos sean aproximadamente iguales.

Los valores observados y otros necesarios para el análisis se tabularán de la siguiente manera:

TABLA 2.2. Tabulación de datos experimentales para la calibración de vertederos

Lectura No.	Carga del Vertedero Patrón (Bazin) h_B , (mm)	Carga del Vertedero Patrón (Bazin) h_B , (m)	Carga del Vertedero Problema h_v , (mm)	Carga del Vertedero Problema h_v , (m)	Q_B (l/s)	Q_B (m^3/s)	$\log Q_B$	$\log h_v$	Q_{vp} (l/s)	Q_{vp} (m^3/s)	C_d (adim.)
1											
2											
3											
.											
.											
n											
											$\bar{C}_d =$

2.7 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALIBRACIÓN DEL VERTEDERO

Calibrar un vertedero consiste en determinar experimentalmente los valores de las constantes α y β de la ecuación general

$$Q = \alpha h_v^\beta \tag{2.67}$$

la cual se puede transformar a una ecuación lineal, aplicando la función logaritmo a ambos miembros, así:

$$\log Q = \log \alpha + \beta \log h_v \tag{2.69}$$

expresión ésta que es de la forma

$$y = a + bx \quad (2.70)$$

donde $a = \log \alpha$ es el intercepto de la recta con el eje de las y , y $b = \beta$ es la pendiente de la línea recta que representa.

En consecuencia, si se grafican los pares ordenados $(\log h_v, \log Q)$, observados durante la experiencia, se tendría una nube de puntos, a los cuales se les puede ajustar una línea recta, visualmente o por medio de un método de regresión lineal. (véase la Figura 2.17).

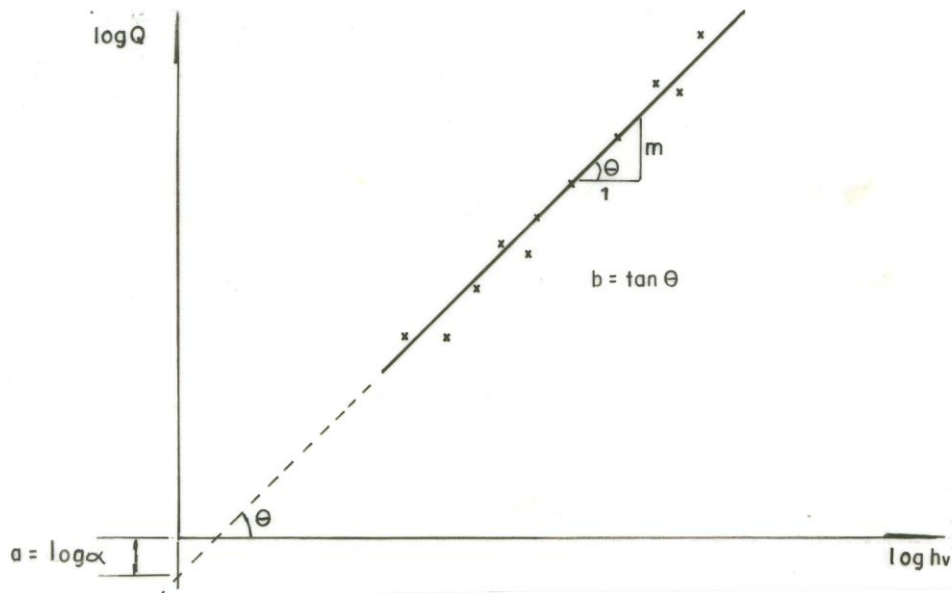


FIGURA 2.17. Ajuste de una línea recta a una nube de puntos.

Para el ajuste de una línea recta a los pares de valores observados, se puede aplicar el método de los mínimos cuadrados. Para ello resulta más ágil determinar la pendiente y el intercepto de la recta ajustada, es decir, los valores de la constante β y α del vertedero, empleando las ecuaciones (2.71) y (2.72), las cuales aparecen a continuación:

$$\beta = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \quad (2.71)$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \beta \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.72)$$

Donde $y_i = \log Q_i$ y $x_i = \log h_{v_i}$.

El coeficiente de descarga, C_d , se podría obtener fácilmente igualando la ecuación de calibración del vertedero, obtenida experimentalmente, con la correspondiente ecuación teórica, así:

Para un vertedero rectangular:

$$Q = \alpha h_v^\beta = \frac{2}{3} C_d \sqrt{2g} b h_v^{1.5}$$

$$\therefore C_d = \frac{3 \alpha h_v^\beta}{2 \sqrt{2g} b h_v^{1.5}}$$

$$C_d = \left(\frac{3 \alpha}{2 \sqrt{2g} b} \right) h_v^{\beta-1.5} \quad (2.73)$$

Para un vertedero triangular:

$$Q = \alpha h_v^\beta = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h_v^{2.5}$$

$$\therefore C_d = \frac{15 \alpha h_v^\beta}{8 \sqrt{2g} \tan(\theta/2) h_v^{2.5}}$$

$$C_d = \left(\frac{15 \alpha}{8 \sqrt{2g} \tan(\theta/2)} \right) h_v^{\beta-2.5} \quad (2.74)$$

En general,

$$C_d = c h_v^r \quad (2.75)$$

Donde c y r dependen de la forma geométrica del vertedero.

Para vertederos rectangulares : $r = \beta - 1.5$

Para vertederos triangulares : $r = \beta - 2.5$

Según la ecuación (2.75), C_d es función de h_v ; luego, para cada valor de h_v corresponderá uno de C_d . Para n mediciones, se podrá calcular un valor promedio de C_d , de la siguiente forma:

$$\bar{C}_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_{d_i} \quad (2.76)$$

Se recomienda especial cuidado en el empleo de las ecuaciones (2.73), (2.74) y (2.75), en relación con el manejo homogéneo de unidades, particularmente en el momento de completar la Tabla 2.2.

2.8 EFECTO DEL ERROR EN LA MEDIDA DE LA CARGA DEL VERTEDERO SOBRE EL CÁLCULO DE LA DESCARGA

A continuación se deducirán dos ecuaciones que permiten predecir el efecto que, sobre el caudal, genera el error en la medida de la carga de los vertederos rectangular y triangular:

2.8.1 Efecto del error en la medida de la carga de un vertedero rectangular. A partir de la siguiente ecuación general para un vertedero rectangular:

$$Q = c h_v^{3/2} \quad (2.77)$$

se tiene,

$$\frac{dQ}{dh_v} = \frac{3}{2} c h_v^{1/2} \quad (2.78)$$

de donde,

$$dQ = \frac{3}{2} c h_v^{1/2} dh_v \quad (2.79)$$

Dividiendo la ecuación (2.79) por la (2.77), se tiene:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\frac{3}{2} c h_v^{1/2} dh_v}{c h_v^{3/2}} = \frac{\frac{3}{2} c h_v^{1/2} dh_v}{c h_v^{3/2}}$$

Luego,

$$\frac{dQ}{Q} = 1.5 \frac{dh_v}{h_v} \quad (2.80)$$

Conclusión: Un error del 1%, en la medida de h_v , origina un error de 1.5% en el cálculo del caudal. Es decir, el error cometido en la medición de h_v se multiplica por 1.5 en el cálculo de Q.

2.8.2 Efecto del error en la medida de la carga de un vertedero triangular. Partiendo de la siguiente ecuación general para un vertedero triangular:

$$Q = c h_v^{5/2} \tag{2.81}$$

se tiene,

$$\frac{dQ}{dh_v} = \frac{5}{2} c h_v^{3/2} \tag{2.82}$$

de donde,

$$dQ = \frac{5}{2} c h_v^{3/2} dh_v \tag{2.83}$$

Dividiendo la ecuación (2.83) por la (2.81), se tiene:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\frac{5}{2} c h_v^{3/2} dh_v}{c h_v^{5/2}} = \frac{5}{2} \frac{c h_v^{3/2} dh_v}{c h_v^{5/2}}$$

Luego,

$$\boxed{\frac{dQ}{Q} = 2.5 \frac{dh_v}{h_v}} \tag{2.84}$$

Conclusión: El error en la determinación del caudal, en un vertedero triangular, es 2.5 veces el error cometido en la medición de la carga h_v .

2.9 CÁLCULO DE PROPAGACIÓN DE ERRORES

Supóngase que se desea calibrar un vertedero rectangular, a partir de la ecuación de calibración del vertedero Bazin, para lo cual se conoce lo siguiente:

$$Q_B = Q_{Bazin} = 0.0214 h_B^{1.58}, \tag{2.85}$$

Para un vertedero rectangular, ya fue deducida la siguiente ecuación de caudal:

$$Q_R = \frac{2}{3} C_{dR} \sqrt{2g} b h_{vR}^{3/2} \quad (2.86)$$

donde todos los términos anteriores ya fueron definidos.

Llamando:

$$C_R = \frac{2}{3} \sqrt{2g} b \quad (2.87)$$

la ecuación (2.86) se reduce a:

$$Q_R = C_R C_{dR} h_{vR}^{3/2} \quad (2.88)$$

Ahora, haciendo:

$$m_R = C_R C_{dR} \quad (2.89)$$

la ecuación (2.88) queda reducida a la siguiente expresión:

$$Q_R = m_R h_{vR}^{3/2} \quad (2.90)$$

de donde:

$$m_R = \frac{Q_R}{h_{vR}^{3/2}} = \frac{Q_B}{h_{vR}^{3/2}} \quad (2.91)$$

$$m_R = 0.0214 h_B^{1.58} h_{vR}^{-3/2} \quad (2.92)$$

$$m_R = K_{R1} h_B^{1.58} h_{vR}^{-3/2} \quad (2.93)$$

Llamando $\varepsilon_{Q_B} = \frac{\delta Q_B}{Q_B}$, al error relativo de la medición del caudal con el vertedero Bazin, y

$\varepsilon_{h_B} = \frac{\delta h_B}{h_B}$, al error relativo de la medición de la carga del vertedero de Bazin, y empleando la ecuación (A5.17), el error relativo, ε_{Q_B} , en la medición de Q_B , se puede estimar como:

$$\varepsilon_{Q_B}^2 = \left(\frac{\delta Q_B}{Q_B} \right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{\delta h_B}{h_B} \right)^2 \quad (2.99)$$

$$\varepsilon_{Q_B}^2 = \alpha^2 \varepsilon_{h_B}^2 \quad (2.100)$$

$$\varepsilon_{Q_B} = \alpha \varepsilon_{h_B}$$

donde:

$$\varepsilon_{Q_B} = 1.58 \varepsilon_{h_B} \quad (2.101)$$

Por otra parte, el error físico relativo en la estimación de m_R , del canal rectangular, se calcula aplicando la ecuación (A5.17).

$$\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{físico}} = \sqrt{\alpha_1^2 \left(\frac{\delta h_B}{h_B}\right)^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{\delta h_{v_R}}{h_{v_R}}\right)^2} \quad (2.102)$$

$$\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{físico}} = \sqrt{(1.58)^2 \varepsilon_{h_B}^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \varepsilon_{h_{v_R}}^2}$$

$$\boxed{\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{físico}} = \sqrt{2.4964 \varepsilon_{h_B}^2 + 2.25 \varepsilon_{h_{v_R}}^2}} \quad (2.103)$$

El error relativo estadístico en la estimación de m_R se calcula teniendo en cuenta un límite de precisión, P_{m_R} , correspondiente a un porcentaje de confiabilidad $C\%$ de m_R , que se calcula así:

$$P_{m_R} = t_{C\%_{m_R}} S_{m_R} \quad (2.104)$$

donde $t_{C\%_{m_R}}$ es el intervalo de confianza del 95% del ajuste lineal de la ecuación (2.88), según la distribución t-Student, y S_{m_R} es la desviación estándar muestral de m_R , para n valores muestrales y con $(n - 2)$ grados de libertad, la cual se calcula como:

$$S_{m_R} = \sqrt{\frac{1}{n} \frac{S^2}{S^2(h)}} \quad (2.105)$$

donde:

$$S^2 = \left(\frac{n}{n-2}\right) \left[1 - \frac{S^2(h, Q)}{S^2(h) S^2(Q)}\right] S^2(h) \quad (2.106)$$

$S^2(h, Q)$: cuadrado de la covarianza de la muestra.

$S^2(h)$: varianza de la variable independiente en la muestra, h_v .

$S^2(Q)$: varianza de la variable dependiente de la muestra, Q.

Luego, el error relativo estadístico en m_R se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{estad.}} = \frac{(\delta m_R)_{\text{estad.}}}{m_R} = \frac{P_{m_R}}{m_R} \quad (2.107)$$

Reemplando la ecuación (2.104) en la ecuación (2.107), se tiene:

$$\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{estad.}} = \frac{t_{C\%_{m_R}} S_{m_R}}{m_R} \quad (2.108)$$

Finalmente, el error relativo total de m_R se calcula a partir de los estimativos de los errores físicos y estadísticos, por medio de la siguiente expresión:

$$\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{total}} = \sqrt{\left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{físico}}^2 + \left(\varepsilon_{m_R}\right)_{\text{estad.}}^2} \quad (2.109)$$

Ahora, se puede calcular el error relativo de la estimación del coeficiente de descarga, C_{d_R} , del vertedero rectangular, $\varepsilon_{C_{d_R}}$, así:

De la ecuación (2.89):

$$C_{d_R} = \frac{m_R}{C_R} \quad (2.110)$$

Reemplazando C_R de la ecuación (2.87) en la ecuación (2.110), se tiene:

$$C_{d_R} = \frac{m_R}{\frac{2}{3} \sqrt{2g} b} = \frac{3 m_R}{2 \sqrt{2} \sqrt{g} b} = \frac{3 m_R}{2 \sqrt{2} g^{1/2} b} = \frac{3 m_R g^{-1/2} b^{-1}}{2 \sqrt{2}} \quad (2.111)$$

$$C_{d_R} = \frac{3 \sqrt{2}}{4} m_R g^{-1/2} b^{-1} \quad (2.112)$$

$$C_{d_R} = K_{R_2} m_R g^{-1/2} b^{-1} \quad (2.113)$$

Luego, aplicando la ecuación (A5.17), al cálculo del error relativo del estimativo de C_{dR} , se tiene:

$$\varepsilon_{C_{dR}} = \sqrt{(\varepsilon_{m_r})_{total}^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon_g^2 + (-1)^2 \varepsilon_b^2} \quad (2.114)$$

donde:

ε_g : error relativo en la medición de la constante de aceleración de la gravedad.

ε_b : error relativo en la medición del ancho, b , del vertedero rectangular.

Finalmente, resulta:

$$\varepsilon_{C_{dR}} = \sqrt{(\varepsilon_{m_r})_{total}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_g^2 + \varepsilon_b^2} \quad (2.115)$$

Análogamente, para un vertedero triangular se procede como se hizo anteriormente con el vertedero rectangular, obteniéndose lo siguiente:

$$Q_T = \frac{8}{15} C_{dT} \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) h_{vT}^{5/2} \quad (2.116)$$

Haciendo $C_T = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

la ecuación (2.116), se reduce a:

$$Q_T = C_T C_{dT} h_{vT}^{5/2} \quad (2.117)$$

y agrupando $m_T = C_T C_{dT}$, la ecuación (2.117) queda más reducida así:

$$Q_T = m_T h_{vT}^{5/2} \quad (2.118)$$

de donde:

$$m_T = \frac{Q_T}{h_{vT}^{5/2}} = \frac{Q_B}{h_{vT}^{5/2}} \quad (2.119)$$

Reemplazando la ecuación (2.85) en la ecuación (2.119), se tiene:

$$m_T = 0.0214 h_B^{1.58} h_{VT}^{-5/2} \quad (2.120)$$

$$m_T = K_T h_B^{1.58} h_{VT}^{-5/2} \quad (2.121)$$

Con $K_T = 0.0214$

Luego, aplicando el resultado de la ecuación (A5.17) a la variable m_T , se tiene:

$$(\varepsilon_{m_T})_{\text{físico}} = \sqrt{(1.58)^2 \varepsilon_{h_B}^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \varepsilon_{h_{VT}}^2} = \sqrt{2.4964 \varepsilon_{h_B}^2 + \frac{25}{4} \varepsilon_{h_{VT}}^2} \quad (2.122)$$

Finalmente,

$$\boxed{(\varepsilon_{m_T})_{\text{total}} = \sqrt{(\varepsilon_{m_T})_{\text{físico}}^2 + (\varepsilon_{m_T})_{\text{estadístico}}^2}} \quad (2.123)$$

y

$$\boxed{\varepsilon_{C_{dT}} = \sqrt{(\varepsilon_{m_T})_{\text{total}}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_g^2 + \varepsilon_0^2}} \quad (2.124)$$

2.10 CUESTIONARIO

2.10.1 ¿En qué consiste la ventilación de un vertedero?

2.10.2 ¿Qué inconvenientes puede generar la falta de ventilación de un vertedero?

2.10.3 ¿Por qué razón los vertederos rectangulares con contracciones laterales, triangulares, trapeziales, circulares, exponenciales y de forma compuesta no necesitan de ventilación artificial?

2.10.4 Entre dos vertederos de pared delgada, uno rectangular y otro triangular, ¿cual presenta mayor carga, para un caudal determinado?

2.10.5 Compárense las cargas de los vertederos problema y de Bazin. ¿Cual de las dos es mayor, y a qué se debe la diferencia entre estas dos cargas?

2.10.6 ¿Qué tipos de flujo se presenta en una sección aguas arriba del vertedero y en otra, justo encima de la cresta del mismo?

2.10.7 Convierta la ecuación de calibración del vertedero problema, obtenida empíricamente, a una forma tal que el caudal se obtenga en m^3/s , a partir de la carga expresada en metros.

2.10.8 Para un valor dado de la carga del vertedero problema, h_{vp} , y con el valor correspondiente de C_d , calcúlese el valor del caudal, empleando la ecuación (2.5). ¿Qué porcentaje de error, con respecto a este caudal, se presenta al calcular el caudal con la ecuación teórica (2.6) y con la ecuación obtenida experimentalmente?

2.10.9 Deduzca una ecuación para el cálculo del error relativo en la determinación del caudal, en un vertedero trapecial, en función del error relativo en la medición de la carga h_v .

2.10.10 Compárense los caudales obtenidos con la ecuación de calibración del vertedero de Bazin, con los correspondientes a las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18), respetando los rangos de validez de cada una de estas ecuaciones.

2.10.11 Después de obtener la ecuación de calibración del vertedero rectangular con dos contracciones laterales, para un mismo valor de la carga h , compárese el caudal a través de este vertedero con el correspondiente a la ecuación (2.20), en combinación con las ecuaciones (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) y (2.26). Respétense los rangos de validez de estas últimas ecuaciones.

2.10.12 Luego de calibrar un vertedero triangular ($\theta = 90^\circ$ ó $\theta = 60^\circ$), compárense sus caudales con los correspondientes a las ecuaciones (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) y (2.42), y con el caudal correspondiente a la ecuación (2.35), en combinación con las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45). Respétense los rangos de validez de estas últimas ecuaciones.

2.10.13 Calíbrese un vertedero trapecial, tipo Cipolletti, y compárese su coeficiente de descarga con el valor 0.63, encontrado por este autor. También, compárense sus caudales con los correspondientes a la ecuación (2.49).

2.10.14 Calíbrese un vertedero circular, y compárense sus caudales con los correspondientes a la ecuación (2.63). Además, calcúlense los valores del coeficiente de descarga, y compárelos con los obtenidos con las ecuaciones (2.65) y (2.66).

2.10.15 Calcule el error relativo total en la estimación del coeficiente de descarga, C_d y del coeficiente m del vertedero trapecial del numeral 2.9.13.