Тема 17. Числення предикатів

17.1. Формальна теорія *K*

У логіці предикатів, на відміну від логіки висловлювань, немає ефективного способу для розпізнавання, чи є формула загальнозначущою (нагадаємо, що в логіці висловлювань таким методом є побудова таблиць істинності). Тому аксіоматичний метод стає істотним при вивченні формул, які містять квантори. Визначення загальнозначущих формул, так само, як і в численні висловлювань, здійснюється введенням деякої сукупності формул, що називаються аксіомами, а також правил виведення, які дають змогу з одних загальнозначущих формул одержувати інші.

Означення 17.1. Числення предикатів K (теорія першого порядку K) – це аксіоматична теорія, символами якої є:

- пропозиційні зв’язки $\neg$, $\rightarrow$;
- квантор загальності $\forall$;
- допоміжні символи: кома “,”, та дужки “(“, “)”;
- предметні змінні $x_1, x_2, \ldots$;
- предметні константи $a_1, a_2, \ldots$;
- функціональні символи $f_1, f_2, \ldots$;
- предикатні символи $P_1, P_2, \ldots$

Означення формули 16.4 поширюється на числення предикатів, з тією різницею, що тут використовуються тільки два символи пропозиційних зв’зок: $\neg$ та $\rightarrow$.

Аксіоми числення K розбиваються на **логічні** аксіоми та **власні**. Наступні формули є логічними аксіомами числення K.

А1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

А2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

А3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

А4. $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$, якщо y вільно для x в формулі $A(x)$.

А5. $\forall x(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$, якщо A не містить вільних входжень x.

Власні аксіоми формулюються окремо для кожної конкретної предметної області.

Правилами виведення у численні K є наступні:

1) modus ponens (MP): $A, A \rightarrow B \vdash B$.
2) правило **узагальнення** Gen: з $\Gamma \vdash A(x)$ слідує $\Gamma \vdash \forall x A(x)$, якщо x не входить вільно в жодну з формул Γ.

Як і в численні висловлювань L, наведені аксіоми числення K є не конкретними аксіомами, а схемами аксіом.

Моделлю теорії першого порядку K називається довільна інтерпретація, в якій істинні всі аксіоми теорії K. Якщо правила виведення MP та Gen застосовуються до істинних в даній інтерпретації формул, то результатом є формули, які також істинні в тій самій інтерпретації.

Множина формул, які виводяться за правилами виведення з аксіом теорії K, є теоремами теорії K. Аксіоми А1, А2, А3 теорії K та правило MP визначені в теорії L, відповідно, всі теореми теорії L включаються у множину теорем теорії K.

Теорема 17.1. Формула $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$, де змінна y вільна для x в формулі $A(x)$, – загальнозначуща.

Доведення. Нехай $x, x_1, \ldots, x_n$ – усі вільні змінні формули $A(x)$. Тоді $y, x_1, \ldots, x_n$ – перелік вільних змінних формули $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$. Розглянемо довільну інтерпретацію з області інтерпретації D.

Нехай $[b, a_1, \ldots, a_n]$, де $b, a_i \in D$ $(1 \leq i \leq n)$ – довільний набір значень вільних змінних формули $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$. Доведемо, що на цьому наборі формула $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$ набуває значення истина (Т). Справді, для формули $A(x)$ або існує елемент $a_0 \in D$ такий, що в наборі $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ значень вільних змінних $x, x_1, \ldots, x_n$ формула $A(x) = \mathrm{F}$, або для будь-якого елементу $a \in D$ у наборі $[a, a_1, \ldots, a_n]$ значень вільних змінних $x, x_1, \ldots, x_n$ формула $A(x) = \mathrm{T}$.

У першому випадку $\forall xA(x) = \mathrm{F}$ і тоді $\forall xA(x) \to A(y) = \mathrm{T}$.

У другому випадку $\forall xA(x) = \mathrm{T}$ та $A(y) = \mathrm{T}$ на наборі $[b, a_1,\ldots,a_n]$ і тоді $\forall xA(x) \to A(y) = \mathrm{T}$. ►

<u>Теорема 17.2.</u> Формула $\forall x(A\to B(x)) \to (A\to\forall xB(x))$, де A не містить вільних входжень x, – загальнозначуща.

Доведення. Доведення аналогічно попередній теоремі. ►

Таким чином, ми показали, що схеми аксіом А4 та А5 є загальнозначущими в теорії K. Загальнозначущість схем А1 – А3 була розглянута раніше (див. лекцію 15) при розгляді числення висловлювань L.

<u>Теорема 17.3.</u> Формула, яка отримується із загальнозначущої формули за допомогою правил виведення MP та Gen, є загальнозначущою.

Доведення. Для правила MP це автоматично випливає з того, що воно зберігає логічне слідування (див. теорему 14.3).

Розглянемо правило Gen. Нехай, множина Г містить одну формулу B (доведення досить легко узагальнити на довільну кількість формул з Г). Припустимо, що ми обрали область інтерпретації D та провели заміну в формулі A всіх вільних змінних на елементи з D, наприклад, $x = b$, $b\in D$. З $B\vdash A(b)$ отримуємо $B\to A(b) = \mathrm{T}$ за теоремою 14.1. Це виконується для всіх x, тобто $\forall x(B\to A(x)) = \mathrm{T}$. Змінна x не входить вільно у формулу B, отже формула $\forall x(B\to A(x)) \to (B\to\forall xA(x))$ – загальнозначуща (за теоремою 17.2). Таким чином, з формул $\forall x(B\to A(x))$ та $\forall x(B\to A(x)) \to (B\to\forall xA(x))$ за правилом MP отримуємо $B\to\forall xA(x) = \mathrm{T}$, тобто $B\vdash \forall xA(x)$. ►

Розглянемо приклади виведень у численні K.

$\vdash \forall x\forall yA(x,y) \to \forall y\forall xA(x,y)$

1. $\forall yA(x,y) \to A(x,y)$ аксіома А4
2. $\forall x\forall yA(x,y) \to \forall yA(x,y)$ аксіома А4
3. $\forall x\forall yA(x,y) \to A(x,y)$ наслідок 1 з теореми дедукції числення L
4. $\forall x (\forall x\forall yA(x,y) \to A(x,y)) \to (\forall x\forall yA(x,y) \to \forall xA(x,y))$ аксіома А5
5. $\forall x (\forall x\forall yA(x,y) \to A(x,y))$ за правилом Gen з 3
6. $\forall x\forall yA(x,y) \to \forall xA(x,y)$ за правилом MP з 4 та 5
7. $\forall y (\forall x\forall yA(x,y) \to \forall xA(x,y)) \to (\forall x\forall yA(x,y) \to \forall y\forall xA(x,y))$ аксіома А5
8. $\forall y (\forall x\forall yA(x,y) \to \forall xA(x,y))$ за правилом Gen з 6
9. $\forall x\forall yA(x,y) \to \forall y\forall xA(x,y)$ за правилом MP з 7 та 8

Розглянемо виведення правила екзистенціонального узагальнення: $A(y) \vdash \neg\forall x\neg A(x)$, де x вільно для y в $A(x)$.

1. $A(y)$ гіпотеза
2. $(\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)) \to (A(y) \to \neg\forall x\neg A(x))$ теорема $L7$
3. $\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)$ аксіома А4
4. $\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \forall x\neg A(x)$ теорема $L4$
5. $\neg\neg\forall x\neg A(x) \to \neg A(y)$ наслідок 1 з теореми дедукції числення L
6. $A(y) \to \neg\forall x\neg A(x)$ за правилом MP з 2 та 5
7. $\neg\forall x\neg A(x)$ за правилом MP з 1 та 6

17.2. Теорема дедукції

Теорема дедукції в численні K відрізняється від теореми дедукції для числення L. Для формулювання цієї теореми нам потрібні будуть деякі додаткові означення та результати.

<u>Означення 17.2.</u> Нехай A, B_1, ..., B_n – формули числення предикатів. Нехай B_1, ..., B_n – це виведення в численні предикатів. Будемо говорити, що формула B_i залежить у виведенні від формули A, якщо виконується одна з умов:

а) B_i є сама формула A та включена у вивід на цій підставі;

б) B_i отримана за одним із правил виведення із попередніх формул, з яких хоча б одна залежить від формули A.

Теорема 17.4. Нехай Γ, $A \vdash B$ і при цьому у виводі формула B не залежить від формули A. Тоді $\Gamma \vdash B$.

Доведення. Доведення будемо проводити по індукції за довжиною виводу.

1) $n = 1$. Тоді очевидно, що формула B може бути або аксіомою, або належати Γ і за означення $\Gamma \vdash B$.

2) Нехай теорема виконується для виводу довжиною $n - 1$.

3) Покажемо, що теорема виконується для виводу довжиною n. Якщо вивід має вигляд $B_1, ..., B_n$, то B_n може бути отримана як аксіома, як формула із Γ або виведена із попередніх за правилами виводу, де ні одна із попередніх не залежить від A. В перших двох випадках, очевидно, $\Gamma \vdash B$. В третьому, оскільки B_n отримана за правилами виводу із попередніх формул, то за індуктивним припущенням ні одна з $B_1, ..., B_{n-1}$ не залежить від A і існує вивід $B_1, ..., B_{n-1}$ з Γ, та, оскільки застосування правил виводу не виводить нас за рамки множини Γ, то таким чином $\Gamma \vdash B$. ►

З використання цього результату можна показати, що теорема дедукції виконується, якщо у виводі не зв'язується квантором вільна змінна, яка переноситься вправо.

Теорема 17.5 (теорема дедукції Ербрана). Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і при цьому у виводі при застосуванні правила узагальнення Gen до формул, залежних в виводі від A, не зв'язується квантором жодна вільна змінна формули A, то $\Gamma \vdash A \to B$.

Наслідок 1. Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і при цьому у виводі не використовується правило узагальнення, то $\Gamma \vdash A \to B$.

Наслідок 2. Якщо $\Gamma, A \vdash B$ і при цьому A замкнена формула, то $\Gamma \vdash A \to B$.

17.3. Прикладні теорії першого порядку

В даному підрозділі будуть представлені дві прикладні теорії першого порядку: теорія рівностей та формальна арифметика.

Розглянемо теорію першого порядку ***T***, у числі предикатних символів якої міститься предикат рівності $A^2(t,s)$, який для скорочення будемо позначати $t=s$, а замість $\neg A^2(t,s)$ відповідно будемо писати $t \neq s$.

Означення 17.3. Теорія ***T*** називається **теорію першого порядку з рівністю**, якщо наступні формули є аксіомами теорії ***T***:

A6. $\forall x\ (x=x)$ — рефлективність рівності;

A7. $(x=y) \to (A(x) \to A(x)\{y/x\})$ — підстановка рівності,

де x та y – предметні змінні, $A(x)$ – довільна формула, $A(x)\{y/x\}$ отримується заміною яких-небудь (не обов'язково всіх) вільних входжень x на y, якщо y вільно для тих входжень x, які замінюються.

Доведемо основні теореми теорії ***T***.

Теорема 17.6. $\vdash t=t$ для довільного терму t.

Доведення. З A6: $\vdash \forall x\ (x=x)$ та A4: $\vdash \forall x\ (x=x) \to (t=t)$ за правилом MP отримуємо $t=t$. ►

Теорема 17.7. $\vdash x=y \to y=x$.

Доведення. Нехай $A(x)$ є $x=x$, $A(x)\{y/x\}$ є $y=x$. Тоді:

1) $\vdash (x=y) \to ((x=x) \to (y=x))$ — аксіома A7;
2) $\vdash x=x$ — теорема 17.6;
3) $\vdash (x=y) \to (y=x)$ — за наслідком 2 теореми дедукції для числення L. ►

Теорема 17.8. $\vdash x=y \to (y=z \to x=z)$.

Доведення. Нехай $A(y)$ є $y=z$, $A(y)\{x/y\}$ є $x=z$. Тоді:

1) $\vdash (y=x) \to ((y=z) \to (x=z))$ — аксіома A7;
2) $\vdash (x=y) \to (y=x)$ — за теоремою 17.7;
3) $\vdash x=y \to (y=z \to x=z)$ — за наслідком 1 теореми дедукції для числення L. ►

Наведемо тепер означення формальної арифметики ***A***, яка була вперше введена Пеано.

Означення 17.4. **Формальна арифметика *A*** – це числення предикатів, в якому є:

1. Предметна константа 0.
2. Двомісні функціональні символи + та ×, одномісний функціональний символ ´.

3. Двомісний предикат = ($\neg$= позначатимемо через $\neq$).
4. Власні схеми аксіом:
   E1. $(P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x'))) \to \forall xP(x)$
   E2. $t_1' = t_2' \to t_1 = t_2$
   E3. $t' \neq 0$
   E4. $t_1 = t_2 \to (t_1 = t_3 \to t_2 = t_3)$
   E5. $t_1 = t_2 \to t_1' = t_2'$
   E6. $t + 0 = t$
   E7. $t_1 + t_2' = (t_1 + t_2)'$
   E8. $t \times 0 = 0$
   E9. $t_1 \times t_2' = t_1 \times t_2 + t_1$

Тут P – довільна формула, а t, t_1, t_2 – довільні терми теорії A. Схема аксіом E1 виражає принцип математичної індукції.

17.4. Модельні властивості числення *K*

Розглянемо модельні властивості теорії першого порядку K.

Теорема 17.9. Формальна теорія першого порядку K є несуперечливою.

Доведення. Для всякої формули A з K нехай $h(A)$ означає формулу, яка отримана з формули A шляхом опускання в ній всіх кванторів і термів разом зі всіма відповідними дужками і комами. Наприклад:

$$h(\forall xP(y,x) \to Q(y)) = P \to Q;$$
$$h(\neg\forall zP(x,a,z) \to Q(f(y))) = \neg P \to Q.$$

Із визначення h випливає, що $h(\neg A) = \neg h(A)$ та $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$. А звідси маємо, що всяка аксіома A1 – A5 перетворюється на тавтологію. Дійсно, це очевидно для A1 – A3, а для A4 маємо:

$$h(\forall xA(x) \to A(t)) = A \to A,$$

що теж є тавтологією. Далі

$$h(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall xB(x))) = (A \to B) \to (A \to B).$$

Значить, якщо $h(A)$ – тавтологія, то і $h(\forall xA(x))$ – тавтологія, крім того, як ми впевнились, коли $h(A)$ і $h(A \to B)$ – тавтології, то і $h(B)$ – тавтологія.

Таким чином, якщо A є теоремою у K, то $h(A)$ – тавтологія. Якби існувала така формула B, що $\vdash_K B$ і $\vdash_K \neg B$, то формули В та $\neg B$ одночасно були б тавтологіями, що неможливо в силу того, що числення висловлювань є несуперечливою теорією. ►

На відміну від логіки висловлювань, логіка предикатів є нерозв'язуваною. Наведемо це твердження без доведення.

Теорема 17.10 (теорема Черча). Не існує алгоритму, який для будь-якої формули логіки предикатів установлює, чи є вона загальнозначущою, чи ні.

Теорема 17.11 (теорема про повноту – без доведення). Теоремами числення предикатів K є ті й тільки ті формули, які є загальнозначущими.

Теорії першого порядку мають певні обмеження. Ці обмеження встановлюють дві теореми Геделя про неповноту. Доведення цих теорем виходить далеко за межі цього курсу, тож тут вони наводяться тільки у вигляді формулювань

Теорема 17.12 (перша теорема Геделя про неповноту). У будь-якій достатньо багатій теорії першого порядку (зокрема, в довільній теорії, яка включає формальну арифметику), існує така істинна формула A, що ні A, ні $\neg A$ не виводяться в цій теорії.

Твердження про теорію першого порядку також можуть бути сформульовані у вигляді формул теорії першого порядку. Так, твердження о властивостях формальної арифметики можуть бути сформульовані як арифметичні вирази.

Теорема 17.13 (друга теорема Геделя про неповноту). У будь-якій достатньо багатій теорії першого порядку (зокрема, в довільній теорії, яка включає формальну арифметику) формула A, яка стверджує несуперечність цієї теорії, в ній не виводиться.