

М.М. Можаровський

А.М. Шостачук

**ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І
МАШИН**

Курс лекцій

для студентів машинобудівних і транспортних
спеціальностей всіх форм навчання

2015

Зміст

Задачі дисципліни. “Теорія механізмів і машин”.....4

Розділ I . Структура та основи класифікації

механізмів.....5

- § 1.1. Поняття машини і механізму.....5
- § 1.2. Ланки. Кінематичні пари та їх класифікація.....8
- § 1.3. Кінематичні ланцюги та їх класифікація.....13
- § 1.4. Механізми та їх класифікація.....15
- § 1.5. Структурні формули просторових і плоских механізмів.....21
- § 1.6. Структурний синтез механізмів.....24
- § 1.7. Заміна вищих пар нижчими.....27
- Питання для самоконтролю.....31

Розділ II. Кінематичний аналіз механізмів.....31

- § 2.1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів..31
- § 2.2. Основний підхід до кінетичного аналізу графо-аналітичним методом.....33
- § 2.3. Основні залежності, що зв’язують швидкості і прискорення двох точок, що відносяться до однієї ланки.....35
- § 2.4. Кінематичний аналіз груп Ассура II класу I виду...38
- § 2.5. Основні рівняння, що зв’язують швидкості і прискорення двох точок, що належать двом ланкам, які входять в поступальну пару.....49
- § 2.6. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2-го виду.....52
- § 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 3-го виду.....59

Розділ 3. Вступ у динамічний аналіз механізмів та машин. силовий розрахунок механізмів.....	63
§ 3.1. Сили, що діють на ланки механізмів та машин.....	64
§3.2. Загальна методика силового розрахунку.....	70
§ 3.3. Силовий розрахунок шарнірно-важільного механізму.....	79
§3.4. Теорема Жуковського.....	87
Питання для самоконтролю.....	91
Розділ 4. Дослідження руху машинного агрегату.....	92
§4.1. Динамічна модель машинного агрегату.....	92
§ 4.2. Зведення сил та мас.....	95
§ 4.3. Рівняння руху механізму.....	100
§ 4.4 Режими руху.....	104
§ 4.5. Визначення закону руху механізму.....	106
§ 4.6 Усталений режим. Нерівномірність руху механізму.....	109
§ 4.7. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера (за допомогою діаграми енергомас)..	113
Питання для самоконтролю.....	123

ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН”

Задачі ТММ досить різноманітні, але важливіші із них можна згрупувати за трьома розділами:

- **аналіз механізмів;**
- **синтез механізмів;**
- **теорія машин-автоматів.**

Аналіз механізмів полягає в дослідженні кінематичних і динамічних властивостей механізму за заданою його схемою, а **синтез механізму** – в проектуванні схеми механізму за заданими його властивостями. Отже, будь-яка задача синтезу механізму є протилежною по відношенню до задачі аналізу.

Розвиток **теорії машин-автоматів** зв'язаний головним чином з удосконаленням методів побудови схеми системи управління, яка визначає узгодження руху виконавчих органів.

До теорії машин-автоматів відноситься також розробка методів проектування промислових роботів.

Розділ I

СТРУКТУРА ТА ОСНОВИ КЛАСИФІКАЦІЇ МЕХАНІЗМІВ

§ 1.1. Поняття машини і механізму

Сучасне виробництво передбачає використання у всіх його галузях всіляких механічних систем, які розділяються на машини, машинні установки (агрегати), механізми, механічні пристосування і прибори.

Машиною називається система рухомо з'єднаних ланок, яка здійснює механічні рухи для перетворення або енергії, або матеріалів, або інформації з метою заміни або полегшення фізичної або розумової праці людини.

Усі машини ділять на дві великі групи: **енергетичні машини і робочі машини**. Робочі машини, в свою чергу, розділяються на технологічні, транспортні та інформаційні.

Енергетичні машини призначені для перетворення будь-якого виду енергії в механічну (та навпаки). До них належать, наприклад, електродвигуни, двигуни внутрішнього згорання, пневмодвигуни, електрогенератори та інші.

Машини для перетворення матеріалів підрозділяються на технологічні та транспортні. В технологічних машинах відносно матеріалу розуміється оброблений предмет, який може бути в твердому, рідкому або газоподібному стані. Перетворення матеріалу у цих машинах відбувається в зміні його розмірів, властивостей або стану. Прикладами

технологічних машин є металообробні верстати, прокатні стани, ткацькі верстати, машини харчової та хімічної промисловості.

У транспортних машинах відносно матеріалу розуміється переміщений предмет. Приклади транспортних машин: автомобілі, тепловози і електровози, літаки, вертольоти, підйомні крани, конвеєри та інші.

Машини, які призначені для перетворення інформації, називаються інформаційними. Якщо інформація представлена у вигляді чисел, то інформаційна машина називається **лічильною**, або обчислювальною.

Машинною установкою називається сукупність машини – двигуна (Д), передаточного механізму (ПМ) і робочої машини (РМ), виготовлених у вигляді окремих агрегатів (рис. 1.1). Для узгодження роботи двигуна (Д) і робочої машини (РМ) є система управління (СУ). Якщо вказані складові частини конструктивно об'єднані в один агрегат, то така система розглядається як єдина машина: токарний верстат, автомобіль та інші.

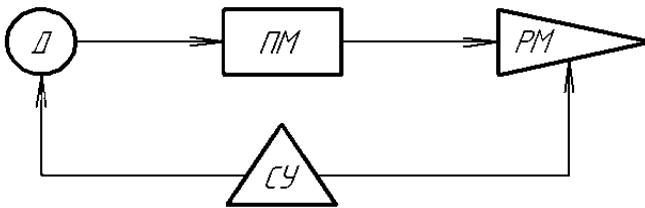


Рисунок 1.1 – Схема машинної установки

Устрій, який приводить до руху робочу машину, називається **приводом робочої машини**. Привод

складається із машини – двигуна (Д) і передаточного механізму (ПМ). Найчастіше використовується електромеханічний привод (ЕМП).

Механізмом називається система рухомо з'єднаних ланок, яка призначена для циклічного перетворення руху одного або декількох вхідних ланок у потрібний рух вихідних ланок.

За функціональним призначенням механізми ділять на наступні види:

- двигунові механізми, тобто механізми, які вмонтовані в машини-двигуни;
- передаточні механізми;
- виконавчі механізми, тобто механізми, які вмонтовані в робочу машину.

Як приклад, на рис. 1.2 наведена кінематична схема стержневого механізму, призначеного для перетворення обертального руху вхідної ланки 1 у зворотно-поступальний рух вихідної ланки 3.

Ланки цього механізму мають таку назву:

- 1 – кривошип, тобто ланка, яка робить повнооборотне обертання відносно нерухомої вісі, яка проходить через точку O ;
- 2 – шатун – ланка, яка робить складний плоский рух і з'єднана тільки з рухомими ланками;
- 3 – повзун – ланка, яка робить зворотно-поступальний рух;
- 4 – стійка, тобто нерухома ланка (рама, корпус).

Застосовується цей механізм у двигунах внутрішнього згоряння (двигуновий механізм), у поршневих насосів (виконавчий механізм), у манометрах (передаточний механізм).

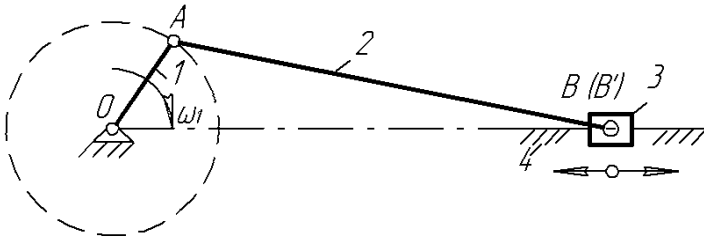


Рисунок 1.2 – Кінематична схема кривошипно-повзунковий механізм

На прикладі кривошипно-повзункового механізму робимо висновок, що механізм має ту ж структуру, що і машина.

Механізм можна вважати машиною, якщо він в умовах руху долає зовнішній опір, зв'язаний безпосередньо з процесом виробництва, або транспорту.

§ 1.2. Ланки. Кінематичні пари та їх класифікація

З'єднання двох стичних ланок, яке допускає їх відносний рух, називається **кінематичною парою**. Кожне із двох тіл, які складають кінематичну пару, називається **ланкою**. **Ланка** – це деталь, або декілька деталей, нерухомо з'єднаних між собою. **Деталь** – це виріб, виготовлений із одного куска матеріалу без будь-яких складальних операцій.

Вхідною ланкою (вхід) називається ланка, якій задається рух, перетворюваний механізмом в необхідний рух других ланок.

Вихідною ланкою (вихід) називається ланка, здійснююча рух, для виконання якого і призначений механізм. Останні рухомі ланки називаються **проміжними**. Сукупність поверхонь, ліній, або точок ланок, по яким вони можуть торкатися, утворюючи кінематичну пару, називається **елементами кінематичної пари**.

За геометричною ознакою кінематичної пари ділять на нижчі та вищі. У нижчої пари ланка торкається по поверхні, а у вищої – в точці, або по лінії.

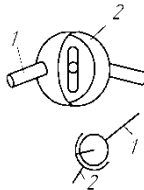
Для того, щоб елементи кінематичних пар знаходились в контакті, пари повинні бути замкнуті. **Замикання** може бути **геометричним і силовим**. Нижчі пари у більшості замкнуті геометрично. У вищих парах силове замикання відбувається силою ваги, або силою пружності пружини.

Класифікують кінематичні пари за умовами в'язей. Відомо, що вільне тіло в просторі має 6 ступенів рухомості. Обмеження, перешкоджаючі вільному руху тіла, називаються умовами в'язей.

Таблиця 1. Приклади кінематичних пар та їх умовне зображення за ГОСТ

Клас пари	Число умов в'язі	Число ступенів свободи	Назва	Рисунок к.п. для плоского руху	Клас пари	Число умов в'язі	Число ступенів свободи	Назва	Рисунок кінематичної пари для просторового руху
5	5	1	Поступальна		5	5	1	Гвинтова	
5	5	1	Обертальна		4	4	2	Циліндрична	

4	4	2	Зубчасте зачеплення		3	3	3	Сферична	
4	4	2	Колесо-рейка		2	2	4	Циліндр на площині	
4	4	2	Кулак-ролик		1	1	5	Куля-площина	

					4	4	2	Сферична з пальцем	
--	--	--	--	--	---	---	---	--------------------	---

Входження двох ланок у кінематичну пару накладає на відносний рух цих ланок певні обмеження (умови в'язі), кількість яких не може бути більше п'яти, оскільки при шести обмеженнях ланки гублять відносний рух, тобто кінематична пара переходить в жорстке з'єднання.

Кінематичні пари в залежності від числа умов в'язі розділяють на п'ять класів:

Клас пари $S = 6 - H$	1	2	3	4	5
Число умов в'язі S	1	2	3	4	5
Залишки ступені рухомості H	5	4	3	2	1

Приклади кінематичних пар та їх умовне зображення за ГОСТ приведені в табл. 1

Як можна бачити із таблиці, нижчі пари можуть бути обертальні та циліндричні, поступальні та гвинтові, а також сферичні кінематичні пари. Вищі кінематичні пари можна схематично представити у вигляді криволінійного контуру, який торкається з другим криволінійним контуром. Такі кінематичні пари трапляються в зубчастих, кулачкових та інших механізмах.

Нижчі пари відносяться до 5-го класу, до 4-го і 3-го класу.

Вища пара, яка має кочення з ковзанням одного елемента по другому, відноситься до 4-го класу.

§ 1.3. Кінематичні ланцюги та їх класифікація

Система ланок, зв'язаних між собою кінематичними парами, називається **кінематичним ланцюгом**.

Кінематичні ланцюги підрозділяються на замкнуті і незамкнуті, прості та складні, плоскі та просторові.

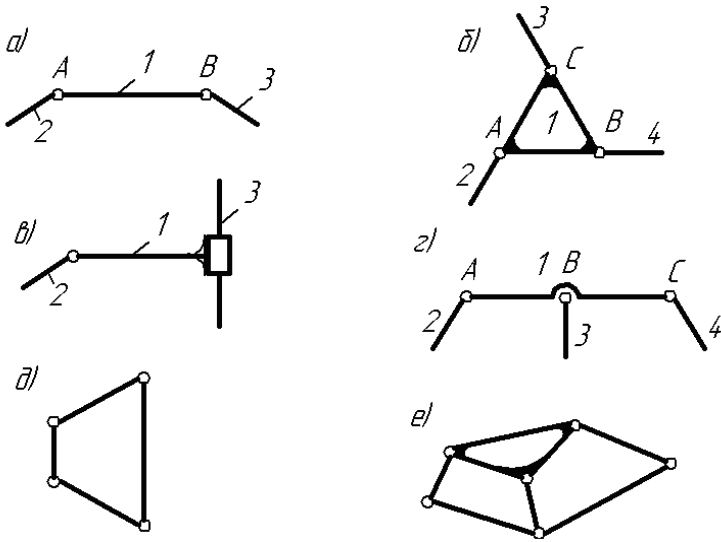


Рисунок 1.3 – Приклади кінематичних ланцюгів

Незамкнутими називаються ланцюги з такими ланками, які входять тільки в одну кінематичну пару (рис.1.3, а, б, в, г).

У **замкнутих ланцюгах** кожна ланка входить не менше, ніж у дві кінематичні пари (рис.1.3, д, е).

Простим називається кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше, ніж у дві кінематичні пари (рис.1.3, а, в, д).

Складним називається кінематичний ланцюг, у якого є хоча би одна ланка, яка входить більше, ніж у дві кінематичні пари (рис.1.3, б, г, е).

Плоским називається кінематичний ланцюг, у якого траєкторії руху точок усіх ланок лежать в паралельних площинах. Якщо траєкторії руху точок ланок знаходяться

не в паралельних площинах, або є просторові криві лінії, то такий **кінематичний ланцюг** буде **просторовий**.

§ 1.4. Механізми та їх класифікація

Механізмом називається кінематичний ланцюг, поставлений на одну із своїх ланок, у якого при заданому русі однієї, або декількох вхідних ланках, усі останні ланки одержують наперед визначені рухи.

Плоскі механізми з нижчими парами. Із плоских механізмів найбільше розповсюдження мають шарнірні механізми, ланки яких з'єднані тільки обертальними кінематичними парами (рис. 1.4).

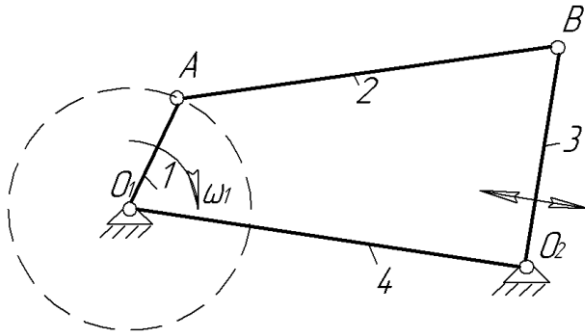


Рисунок 1.4 – Кривошипно-коромисловий механізм

У цьому механізмі ланка 2, яка утворює кінематичні пари тільки з рухомими ланками, називається **шатуном**. Ланка 1 робить повне обертання навколо нерухомої вісі, яка проходить через точку O_1 , називається **кривошипом**. Ланка 3 робить хитальні рухи відносно вісі, яка проходить

через точку O_2 . Замінюючи у шарнірному чотири ланковому механізмі одну, або дві обертальні кінематичні пари на поступальні, одержимо різні механізми: з однією поступальною кінематичною парою можна одержати **кривошипно-повзунковий механізм**. Такий механізм можна одержати, якщо стійкою з робити ланку, яка входить в поступальну пару (рис. 1.5).

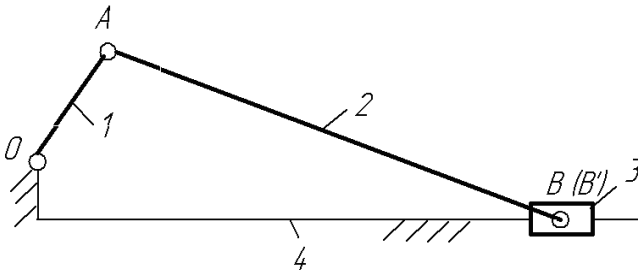


Рисунок 1.5 – Кривошипно-повзунковий механізм

При цьому у механізмі буде повзун – 3, тобто ланка, яка входить тільки в нижчі кінематичні пари і робить прямолінійний поступальний рух. Якщо після заміни обертальної кінематичної пари на поступальну стійкою виконати ланку, яка входить у дві обертальні кінематичні пари O і A , то ми одержимо кривошипно-кулісний механізм (рис.1.6). Тут ланка 4 – куліса, тобто ланка, яка обертається навколо нерухомої вісі і утворює з другою ланкою поступальну кінематичну пару.

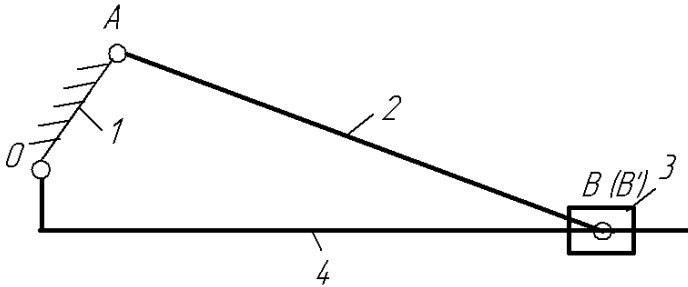


Рисунок 1.6.– Кривошипно-кульісний механізм: 1 – стійка, 2 – кривошип; 3 – кульісний камінь; 4 – кульіса

Із чотириланкового кінематичного ланцюга, який має дві суміжні поступальні пари, можна одержати синусний механізм (рис. 1.7).

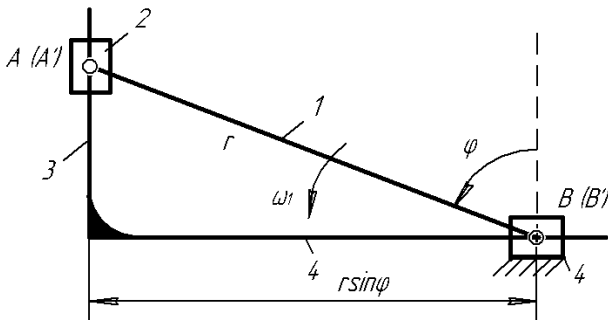


Рисунок 1.7 – Синусний механізм

У цьому механізмі повзун 2 переміщується пропорційно синусу кута повороту кривошипа 1, якщо кут між осями поступальних пар дорівнює 90^0 .

Із чотириланкового кінематичного ланцюга, з двома несуміжними поступальними парами, можна одержати тільки тангенсний механізм (рис. 1.8), який зветься так

через те, що переміщення повзуна 2 пропорційно тангенсу кута повороту φ куліси 1.

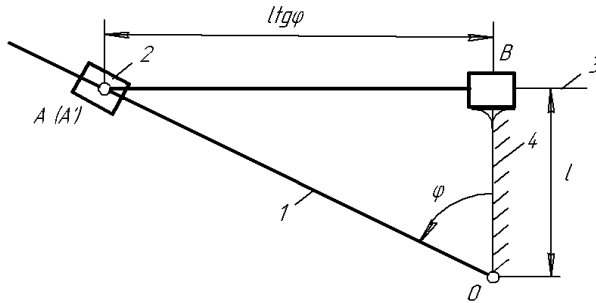


Рисунок 1.8 – Тангенсний механізм

Кулачкові механізми. Кулачком називається ланка, яка має елемент вищої пари, виготовлений у вигляді поверхні змінної кривизни. Механізм, який має кулачок 1

(рис.1.9), називається кулачковим, який за формою нагадує стиснутий кулак людини, має поверхню змінної кривизни і торкається ролика 2, утворюючи з ним вищу пару A . Постійне торкання елементів вищої пари забезпечується пружиною, яка розміщується між стійкою 4 і вихідною ланкою 3 (штовхач). Ясно, що різноманітність форм, яку можна надати кулачку,

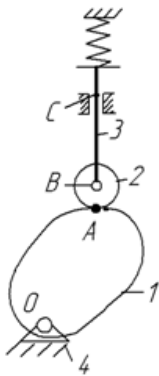


Рисунок 1.9 – Кулачковий механізм

визначає надзвичайну різноманітність перетворень руху кулачкових механізмів, які виготовляються.

Зубчасті механізми. Так називається механізм, до складу якого входять зубчасті ланки. За ГОСТ 16530-83 зубчаста ланка визначається як ланка, що має виступи (зубці) для передачі руху завдяки взаємодії з виступами другої ланки (також зубчастої). Кожний зуб можна розглядати як кулачок, а весь механізм – як багатократно повторений кулачковий механізм.

Обертальна зубчаста ланка називається **зубчастим колесом**. На схемі механізмів циліндричні зубчасті колеса зображуються у вигляді кола, яке котиться без ковзання.

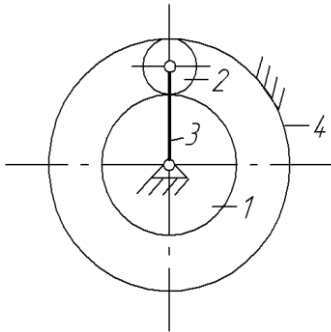


Рисунок 1.10 –
Планетарний зубчастий
механізм

Наприклад на рис. 1.10, показаний зубчастий планетарний механізм, у якого колесо 2 (сателіт) обертається навколо своєї осі і одночасно рухається разом з ланкою 3 навколо осі центрального (сонячного) колеса 1, тобто робить рух, подібний руху планети (звідси назва механізму).

Фрикційні механізми. Механізми, в яких для передачі руху між ланками, які торкаються, використовується тертя, називаються **фрикційними**.

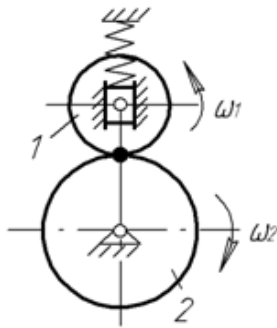


Рисунок 1.11 – Фрикційний механізм з циліндричними котками

Наприклад, для передачі обертання з постійним відношенням кутових швидкостей відбувається за рахунок тертя циліндричних поверхонь котків 1 і 2 (рис. 1.11).

Механізми з гнучкими ланками. Під гнучкими ланками слід розуміти звичайно паси, канати, нитки, ланцюги, які обхвачують дві чи більше ланок і утворюють певний зв'язок між переміщеннями цих ланок. На рис. 1.12 наведений найпростіший механізм з гнучкою ланкою, який на відміну від зубчастого і фрикційного механізмів, може служити для передачі обертання від ланки 1 до ланки 2 за значних відстаней між осями їх обертання.

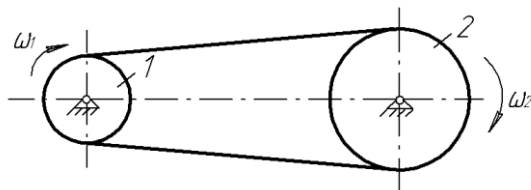


Рисунок 1.12 – Механізм з гнучкою ланкою

В залежності від типу гнучкої ланки цей механізм називається пасовим, канатним, або ланцюговим.

§ 1.5. Структурні формули просторових і плоских механізмів

Структурна формула механізму визначає ступінь його рухомості W в залежності від кількості n рухомих ланок і числа кінематичних пар різних класів. Позначимо кількість пар 1, 2 ... 5 класів, які входять в механізм, відповідно через $p_1, p_2, p_3 \dots p_5$. Число ступенів свободи n рухомих ланок, якщо на них не було б накладено ніяких в'язей, дорівнювало б $6n$. Але кожна пара 5-го класу віднімає 5 ступенів свободи, кожна пара 4-го класу – 4 ступені свободи і т.д. Через це ступінь рухомості просторового механізму виразиться так:

$$W = 6nc - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1.1)$$

Якщо механізм і кінематичні пари, які до нього входять, є плоским, то можна застосувати площинну класифікацію пар, беручи до уваги при цьому, що вільне тіло у плоскому русі має три ступені свободи. Тоді кількість умов в'язі, а отже і клас пари будуть:

$$S = 3 - H \quad (1.2)$$

де H – число ступенів свободи у відносному русі ланок; S – клас пари при площинній класифікації.

Вочевидь, що обертальна і поступальна пари за площинною класифікацією будуть відноситись не до 5-го, а до 2-го класу.

Вища пара за площинною класифікацією відноситься не до 4-го, а до 1-го класу. Тоді ступінь рухомості плоского механізму буде мати вигляд:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) називається формулою Чебишева, яка дає змогу визначити ступінь рухомості плоского механізму, якщо відома кількість рухомих ланок і кінематичних пар 2-го (p_5) і 1-го (p_4) класів за площинної класифікації.

В плоскому механізмі з нижчими парами (рис. 1.13) можна виділити:

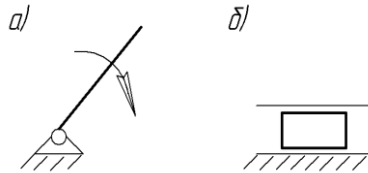


Рисунок 1.13 – Вхідні ланки плоских механізмів

1) вхідні ланки, кожна із яких з'єднується за допомогою обертальної (а), або поступальної (б) кінематичної пари до стійки і має одну ступінь рухомості ($W = 1$).

2) кінематичні ланцюги, або структурні групи ланок, які мають число ступенів рухомості ($W = 0$).

Кількість ланок і кінематичних пар в структурній групі можна визначити із формули (1.3):

$$W = 3n - 2p_5 = 0, \quad (1.4)$$

звідки

$$n = \frac{2}{3} p_5 \quad \text{і} \quad p_5 = \frac{3}{2} n. \quad (1.5)$$

Із формули (1.5) виходить, що кількість ланок в групі повинна бути чіт, а кількість кінематичних пар кратному трійці. Більшість плоских механізмів з нижчими парами складають із двоповідкових груп (рис. 1.14), а деякі мають триповідкові групи (рис. 1.15).

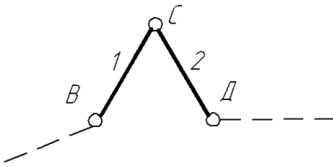


Рисунок 1.14 –

Двоповідкова група ланок

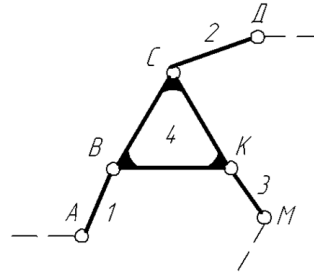


Рисунок 1.15 –

Триповідкова група ланок

Замінюючи в двоповідковій групі (рис. 1.14) обертальні пари на поступальні, одержують ще чотири різних модифікацій цієї групи, одна із яких наведена на рис. 1.16 (з однією поступальною парою).

Численні модифікації триповідкових груп ланок засновані на різних сполученнях обертальних і поступальних пар. Одна з них показана на рис. 1.17.

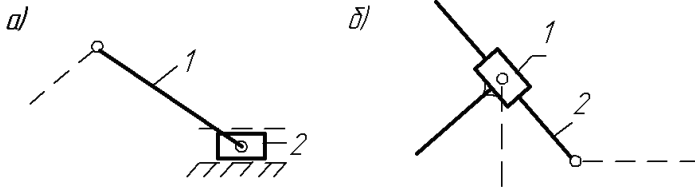


Рисунок 1.16 – Модифікації двоповідкової групи ланок з однією поступальною парою

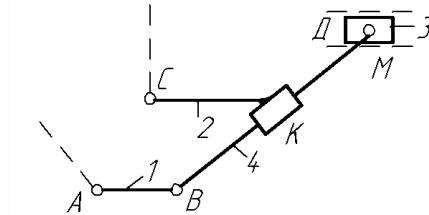


Рисунок 1.17 – Модифікація триповідкової ланки з двома поступальними кінематичними парами

§ 1.6. Структурний синтез механізмів

Структурним синтезом механізмів називається проектування структурної схеми механізму, на якій зазначають стійку, рухомі ланки, види кінематичних пар і їх взаємне розташування. Структурна схема може бути представлена графічно з застосуванням умовних позначень ланок і кінематичних пар або аналітичним виразом, з орієнтацією на використання ПЕОМ.

Для структурного синтезу замкнутих багатоланкових механізмів зручно знаходити структурні схеми шляхом

приєднання (нашарування) деяких кінематичних ланцюгів (структурних груп ланок Ассур) (рис. 1.14 ... 1.17) до вхідних ланок (рис. 1.13, а, б).

При цьому **структурною групою** називається кінематичний ланцюг, приєднання якого до механізму не змінює число ступенів рухомості W , причому група не повинна розпадатися на більш прості кінематичні ланцюги, задовольняючи цій умові.

Перш ніж пояснювати принцип нашарування структурних груп ланок при проектуванні схеми механізму, відмітимо що кожна із вказаних структурних груп, будучи приєднаною до стійки, дає нерухому систему, тобто $W = 0$ (рис. 1.18).

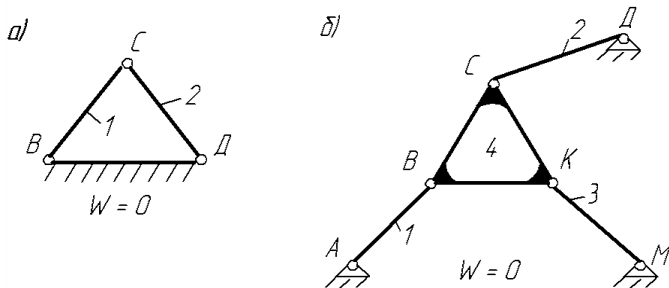


Рисунок 1.18 – Нерухомі стержньові системи

Тепер пояснимо принцип нашарування на прикладі утворення плоского шестиланкового шарнірного механізму (рис. 1.19).

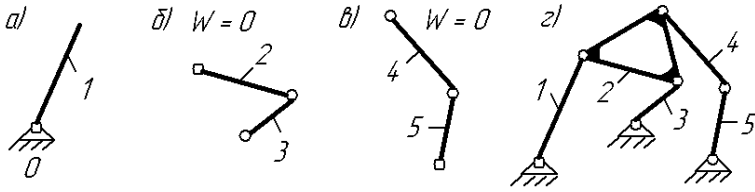


Рисунок 1.19 – Принцип утворення схеми механізму

На рис. 1.19 наведено: початкова ланка 1, яка має $W = 1$. Тоді і механізм, в цілому, також повинен мати $W = 1$. Через це ми можемо приєднувати (нашаровувати) тільки такі кінематичні ланцюги, які мають $W = 0$. Такими кінематичними ланцюгами і являються двоповідкові групи II (2-3) і II (4-5). В результаті одержали шестиланковий механізм, у якого $W = 1$, тобто структурна схема утворена за формулою: I (1) \rightarrow II (2-3) \rightarrow II (4-5). Формула I (1) \rightarrow II (2-3) \rightarrow III (4-5-6-7) свідчить про приєднання до двоповідкової групи II (2-3) триповідкової групи III (4-5-6-7) (рис. 1.20).

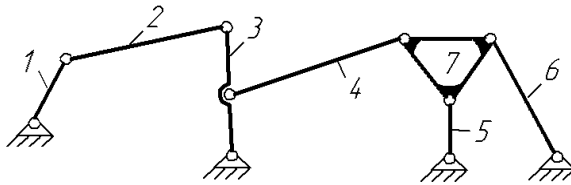


Рисунок 1.20 – Механізм, побудований за схемою
I (1) \rightarrow II (2-3) \rightarrow III (4-5-6-7)

§ 1.7. Заміна вищих пар нижчими

При структурному аналізі плоских механізмів з вищими парами, останні замінюють кінематичними ланцюгами з нижчими парами. При цьому кількість в'язей, які накладають замінювальним кінематичним ланцюгом, повинно дорівнювати числу в'язей вищої пари (ступінь рухомості механізму повинна бути незмінною), а також характер відносно миттєвого руху досліджувальних ланок повинен залишатися. Припустимо, що даний механізм має n рухомих ланок, p_5 пар 5-го класу і p_4 пар 4-го класу. Ступінь рухомості механізму визначається формулою:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Замінімо вищі пари (4-го класу) кінематичними ланцюгами, які мають тільки нижчі пари (5-го класу); нехай n' - число ланок замінюючи x ланцюгів, p_5' - число додаткових нижчих пар, в які входять ці ланки. Ступінь рухомості замінюючого механізму:

$$W = 3(n + n') - 2(p_5 + p_5').$$

Оскільки ступінь рухомості замінюваного і заміненого механізмів повинна бути однакою, то

$$W = 3(n + n') - 2(p_5 + p_5') = 3n - 2p_5 - p_4,$$

звідки

$$p_5' = \frac{1}{2} (n' + p_4)$$

Нехай $p_4 = 1$, тоді

$$p_5' = \frac{1}{2} (n' + 1)$$

Саме просте рішення цього рівняння одержимо, прийнявши $n' = 1$, що дає $p_5' = 2$, тобто кожну вищу пару можна замінити однією ланкою, яка входить у дві нижчі пари.

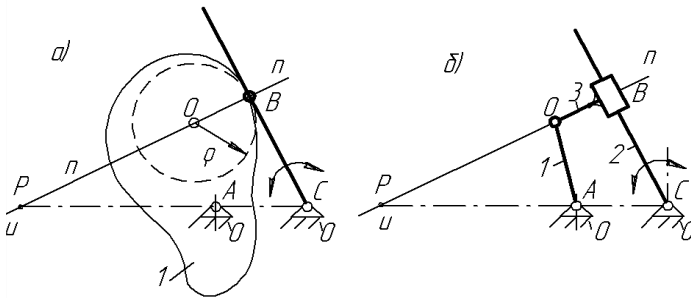


Рисунок 1.21 – Кулачковий механізм з обертальним штовхачем і замінюваний чотириланковий механізм тільки з нижчими парами

Для заданого положення ланок (рис. 1.22, а) замінюємо вищу пару B ланкою 3, яка входить в обертальну пару O з ланкою 1, а з ланкою 2 входить в поступальну пару через те, що ланка 2 пряма лінія, радіус кривизни якої заходить в безкінечність. В результаті одержуємо замінюваний чотириланковий механізм (рис. 1.21, б).

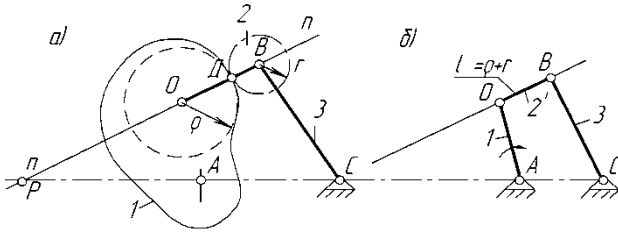
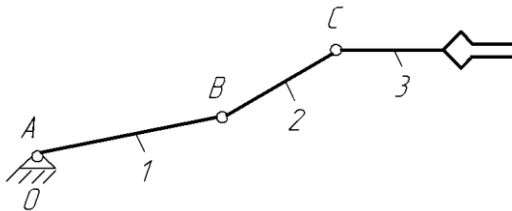


Рисунок 1.22 – Кулачковий механізм з обертальним штовхачем 3 з роликом 2 і замінюваний чотириланковий механізм з нижчими парами

Для заданого положення ланок замінюємо вищу пару D ланкою $2'$, яка входить в обертальні пари O і B , центри яких співпадають з центром кривизни ланки 1 і центром кола 2.

В механізмах з простими незамкнутими кінематичними ланцюгами ступінь рухомості визначається за формулою (1.1).

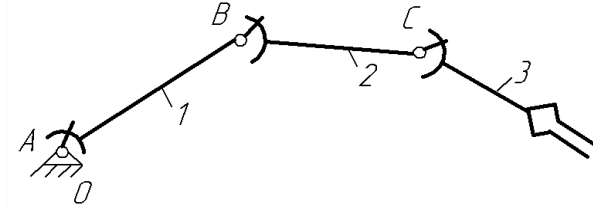
Приклад 1. Визначити ступінь рухомості захвата, тобто пристрою, який дозволяє хватати предмет, що рухається.



Розв'язання: $n = 3$; $p_5 = 3$; $p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 0$;

$$W = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3.$$

Приклад 2. Визначити W для механізму маніпулятора.



Розв'язання: $n = 3$; $p_4 = 3$; $p_5 = p_3 = p_2 = p_1 = 0$

$$W = 6n - 4p_4 = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 6.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає ТММ?
2. Дайте визначення механізму, машини.
3. Назвіть дві основні проблеми ТММ.
4. Що називається ланкою, кінематичною парою?
5. За якими ознаками класифікують кінематичні пари?
6. Що називається кінематичним ланцюгом? Як їх класифікують?
7. Яка різниця між механізмом та кінематичним ланцюгом?
8. Запишіть формулу Чебишева.
9. За якою формулою визначають ступінь вільності просторового механізму?
10. Наведіть приклади основних механізмів з нижчими парами та їх структурні формули.
11. Наведіть приклади основних механізмів з вищими парами
12. Сформулюйте основний принцип створення механізмів.
13. Дайте визначення групі Ассура.
14. Як визначається клас і порядок груп Ассура?
15. Який порядок структурного аналізу механізмів?
16. Який механізм називається механізмом I класу? Як визначається клас механізму?

Розділ II

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів
2. Основний підхід до кінетичного аналізу графоаналітичним методом
3. Основні залежності, що зв'язують швидкості і прискорення двох точок, що відносяться до однієї ланки
4. Кінематичний аналіз груп Ассура II класу I виду

§ 2.1. Задачі і методи кінематичного аналізу механізмів

Кінематичне дослідження механізму, тобто вивчення руху ланок механізму без врахування сил, що обумовлюють цей рух, складається, в основному, з розв'язку 3-х наступних задач:

- визначення переміщень ланок і траєкторій точок ланок;
- визначення швидкостей характерних точок ланок і кутових швидкостей ланок
- визначення прискорень характерних точок ланок і кутових прискорень ланок.

До характерних точок ланок відносять центри кінематичних пар і центри мас ланок. Знання кінематичних параметрів механізму необхідно для визначення:

- сил інерції ланок при силовому дослідженні механізму;
- кінетичної енергії механізму і потужності, що споживається ним при дослідженні руху механізму.

Кінематичне дослідження механізму виконують графічним, графоаналітичним та аналітичним методами.

В графічному методі кінематичні параметри механізму визначаються тільки шляхом графічних побудов ([1], стор. 107-116). Цей метод відрізняється наочністю і відносною простотою але не дозволяє отримати точних результатів.

В графоаналітичному методі рівняння руху точок механізму записують аналітично в векторній формі, а розв'язують графічним шляхом (побудовою планів швидкостей і прискорень). Метод дозволяє отримати необхідну для інженерних розрахунків точність результатів.

В аналітичних методах рівняння руху точок механізму записують і розв'язують аналітично ([1], стор. 117-135). Аналітичні методи дозволяють отримати результати високої точності, але відрізняються високою складністю та трудомісткістю обчислень.

В подальшому буде детально розглянуто графоаналітичний метод кінематичного аналізу.

§ 2.2. Основний підхід до кінетичного аналізу графоаналітичним методом

Перша задача кінематичного аналізу (визначення переміщень ланок і траєкторій точок ланок) в графоаналітичному методі розв'язується графічно, шляхом побудови кінематичної схеми механізму для ряду положень (8-12) початкової ланки. Визначення швидкостей і прискорень характерних точок механізму (розв'язок *другої* та *третьої* задач) починають від початкової ланки (механізму I-го класу) і виконують по

групах Ассур в порядку їх приєднання до механізму I-го класу.

Характер рівнянь руху однієї точки відносно другої, які складають при проведенні кінематичного аналізу графоаналітичним методом, залежить від взаємного розташування цих точок на ланках механізму. В цьому розташуванні може бути два випадки:

- дві точки належать одній ланці (одна знаходиться на деякій відстані від другої);
- дві точки знаходяться на різних ланках (в заданий момент часу співпадають).

Другий випадок має місце в кінематичному аналізі, де дотикаються точки однієї ланки з точками другої. Наприклад, в механізмі Шепінга (рис.2.23) перший випадок має місце при розташуванні точок O і A на ланці 1, точок C і B на ланці 3, точок C і D на ланці 4. Другий випадок має місце в обертовій парі O , де дотикаються точки стояка і ланки 1, в обертовій парі A дотикаються точки ланок 1 і 2, в поступальній парі F – 2 і 3, в обертовій парі C – 3 і 4 і т.ін.

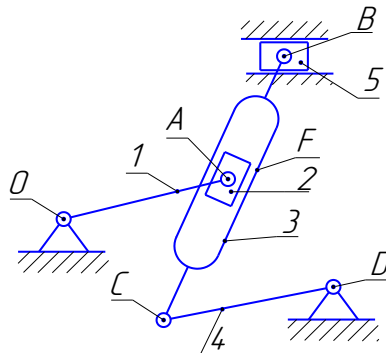


Рисунок 2.23

Якщо дві точки належать одній ланці, то рівняння руху однієї точки відносно другої будуть рівняннями плоского руху, оскільки в загальному випадку в складі плоского механізму ланка здійснює такий рух.

В групах Ассура, за допомогою яких утворюються плоскі Швидкості (прискорення) центрів обертання кінематичних пар для двох ланок повинні бути рівними між собою, інакше один центр вимушений буде зміститись відносно іншого, що неможливо. В поступальній кінематичній парі точка однієї ланки може рухатись відносно точки другої ланки вздовж напрямних пари, тобто маємо складний рух однієї точки відносно іншої.

§ 2.3. Основні залежності, що зв'язують швидкості і прискорення двох точок, що відносяться до однієї ланки

З курсу теоретичної механіки відомо, що будь-який плоский рух тіла можна розкласти на два:

- переносний поступальний рух разом з довільно вибраною точкою (полюсом) тіла;
- відносний обертальний рух навколо цього полюса.

Тому швидкість будь-якої точки C (рис.2.24) плоскої фігури можна представити як геометричну суму швидкості полюса B і швидкості обертанні точки C навколо полюса B .

Домовимось в подальшому:

- абсолютні швидкості позначати латинською буквою V , позначивши прописною буквою в індексі точку, швидкість

якої позначається; наприклад, V_C – абсолютна швидкість точки C ;

- відносні швидкості позначати також строчною буквою латинського алфавіту V з індексом із двох букв. Перші буква вказує на точку, швидкість якої визначається, а друга – точку, відносно якої рух розглядається. Наприклад; V_{CB} – швидкість точки C відносно B , V_{BC} – швидкість точки B відносно C ;

- рисою на буквою \bar{V} відмічати, що швидкість розглядається, як вектор, тобто, не тільки за модулем, а і за напрямком.

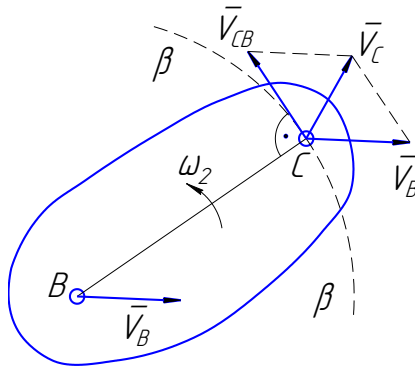


Рисунок 2.24

При обертанні тіла навколо точки B точка C рухається по дузі $\beta\beta$ кола, що описується з точки B радіусом BC (рис.2.24). Тому швидкість \bar{V}_{CB} направлена по дотичній, проведеній в точці C цієї дуги, тобто вектор \bar{V}_{CB} направлений перпендикулярно до BC в сторону, що визначена знаком кутової швидкості. Прискорення точки

С також можна скласти із двох прискорень: прискорення точки B і прискорення точки C при обертанні тіла навколо точки B . Позначивши останнє прискорення як \bar{a}_{CB} , отримуємо:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}. \quad (2.1)$$

При русі точки C по дузі $\beta\beta$ прискорення \bar{a}_{CB} , в свою чергу, також складається із двох прискорень (рис.2.25): нормального \bar{a}_{CB}^n і дотичного \bar{a}_{CB}^t .

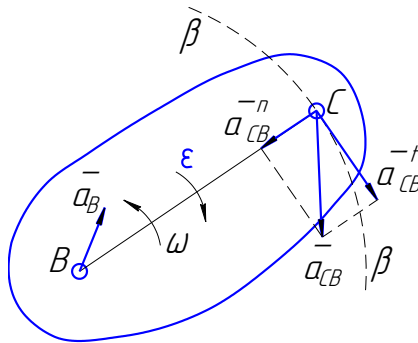


Рисунок 2.25

Нормальне прискорення \bar{a}_{CB}^n направлено до центра обертання, тобто від точки C до точки B . Дотичне прискорення \bar{a}_{CB}^t направлено по дотичній до дуги $\beta\beta$, тобто перпендикулярно до BC в сторону, що визначається кутовим прискоренням ϵ .

Таким чином, векторне рівняння для прискорення точки C має вигляд:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau. \quad (2.2)$$

Величину прискорень \bar{a}_{CB}^n і \bar{a}_{CB}^τ можна визначити за формулами:

$$a_{CB}^n = \omega^2 l_{BC} = \frac{V_{CB}^2}{l_{BC}} = V_{CB} \cdot \omega; \quad a_{CB}^\tau = \varepsilon \cdot l_{BC}.$$

§ 2.4. Кінематичний аналіз груп Ассурі II класу I виду

Розв'язок векторних рівнянь (1) і (2) здійснюють графічним способом, при якому швидкості або повні прискорення всіх точок зображують у вигляді векторів на кресленні, що побудовані з однієї точки, яку називають полюсом. Ці векторні фігури називають відповідно планом швидкостей і планом прискорень. Розглянемо визначення швидкостей і прискорень точок ланок групи Ассурі II класу 1-го виду, що входить в механізм шарнірного чотириланкового механізму (Рис. 2.26).

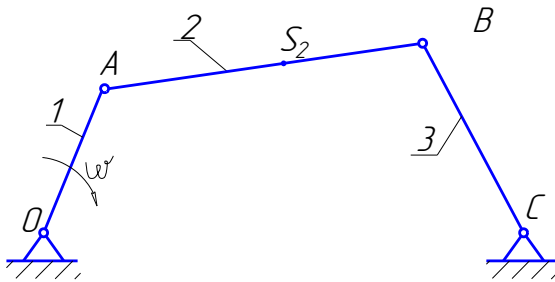


Рисунок 2.26

Спочатку визначимо за формулою Чебишева ступінь рухливості цього механізму ступінь рухливості цього механізму. Механізм складається з трьох рухомих ланко:

1; 2; 3 (тобто $n = 3$) і чотирьох кінематичних пар п'ятого класу: O ; A ; B ; C ($p_5=4$). Таким чином,

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Оскільки $W = 1$, то механізм складається із одного механізму I класу (початкової ланки), за який вибираємо стояк і кривошип 1, і групи Асура II класу 1-го виду (рис. 2.27). Формула будови механізму має вигляд: $I(0,1) \rightarrow II(2,3)$. В цілому це є механізм II класу.

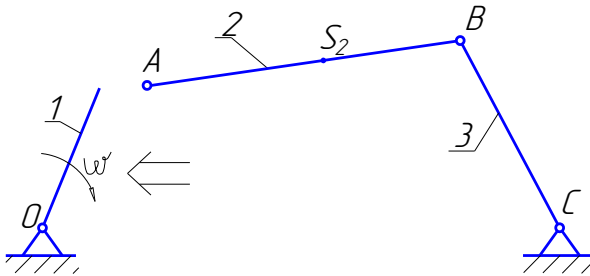


Рисунок 2.27

Побудова планів швидкостей та їх читання суттєво спроститься при використанні властивостей цих планів, які полягають у наступному:

- вектори, що виходять із полюса плану, виражають абсолютні (повні) швидкості відповідних точок ланок механізму в масштабі плану швидкостей; точки плану швидкостей, що відповідають нерухомим точкам механізму, знаходяться в полюсі;

- вектори, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей, виражають величини і напрями відносних швидкостей;
- вектори відносних швидкостей точок ланки на плані швидкостей утворюють фігуру, що подібна однойменній жорсткій фігурі, як утворена відрізками, що з'єднують ці точки ланки на плані механізму, повернутого по відношенню до останньої на 90° в сторону миттєвого обертання заданої ланки.

Для виконання кінематичного дослідження шарнірного чотириланкового механізму необхідно знати основні розміри його ланок (l_{OA} , l_{AB} , l_{BC}), положення центру мас S_2 ланки 2 і значення кутової швидкості ω_1 початкової ланки.

Кутову швидкість ω_1 початкової ланки в кінематичному аналізі як правило, приймають постійною ($\omega_1 = const$). В результаті кінематичного аналізу визначаються: швидкості і прискорення характерних точок механізму (A , B , S_2); величини та напрями кутових швидкостей і прискорень ($\omega_2; \omega_3; \varepsilon_2; \varepsilon_3$) ланок 2 і 3. Спочатку визначаємо величину швидкостей точки A початкової ланки:

$$V_1 = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Швидкість $\bar{V}_A \perp OA$ і направлена в сторону кутової швидкості ω_1 (рис.2.28, а). Вибравши полюс P і величину відрізка \bar{Pa} , що зображує вектор \bar{V}_A , визначимо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_V = \frac{V_A}{(Pa)}$$

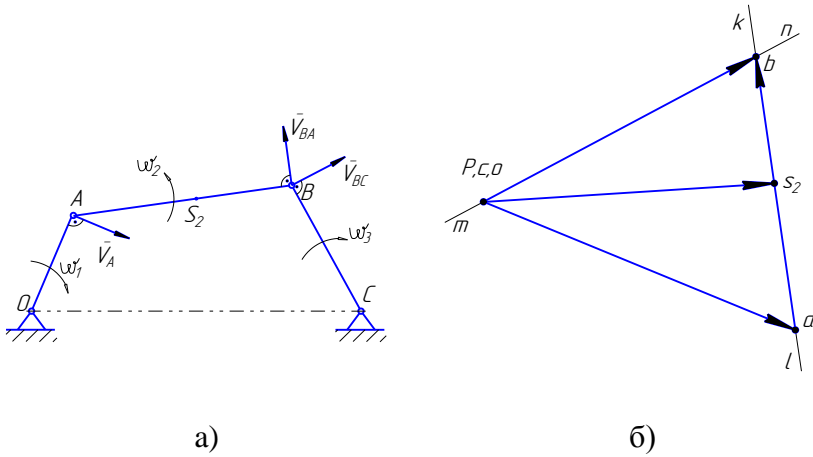


Рисунок 2.28

Відкладаємо відрізок \overline{Pa} , що зображує абсолютну швидкість точки A із полюса P плану швидкостей перпендикулярно напрямку OA (рис. 28,б), швидкості нерухомих точок механізму O і C дорівнюють нулю і, як наслідок, точки o і c на плані швидкостей співпадають з полюсом P . Для визначення швидкості внутрішньої точки B групи Ассурі ABC виразимо її швидкість через швидкості зовнішніх точок A і C . Для цього скористаємось рівняннями, що зв'язують швидкості двох точок однієї ланки:

$$\begin{cases} \overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} \\ \overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC} \end{cases}, \quad (2.3)$$

де V_A – швидкість точки A ;

де V_{BA} – відносна швидкість точки B при її обертанні разом з ланкою AB навколо точки A ;

V_C – швидкість точки C ;

де V_{BC} – швидкість точки B відносно нерухомої точки C , тобто абсолютна швидкість точки B .

Розв'язуємо графічно перше рівняння системи (2.3). Для цього через кінець вектора \overline{Pa} , що зображує \overline{V}_A , тобто через точку “а” проводимо пряму lk (рис.28,б), паралельну напрямку відносної швидкості \overline{V}_{BA} (перпендикулярно ланці AB). Довжина і вектора \overline{V}_{BA} поки невідома. Далі розв'язуємо друге рівняння системи (2.3). Для цього через точку “с”, що співпадає з полюсом плану швидкостей, проводимо пряму mn , паралельну напрямку абсолютної швидкості точки B , тобто перпендикулярно до ланки BC . Перетин ліній lk і mn дає точку “b” – кінець вектора \overline{Pb} , що зображує швидкість \overline{V}_B точки B .

Напрямок швидкості \overline{V}_B визначається напрямком відрізка \overline{Pb} , а швидкість \overline{V}_{BA} – відрізком \overline{ab} .

Швидкість центру ваги S_2 ланки AB визначаємо методом подібності (3-я властивість). Точка A , B і S_2 на плані швидкостей (рис. 28,б) повинні розташовуватись подібно точкам A , B і S_2 на ланці (рис.28,а), тобто точка s_2 повинна лежати на відрізку \overline{ab} і ділити його в такому ж відношенні, в якому точка S_2 ділить відрізок AB . Для визначення s_2 складаємо пропорцію:

$$\frac{(as_2)}{AS_2} = \frac{(ab)}{AB}, \text{ звідки}$$

$$(as_2) = \frac{AS_2 \cdot (ab)}{AB}.$$

З'єднавши точку s_2 з полюсом плану швидкостей отримуємо відрізок $\overline{Ps_2}$, що являє собою швидкість $\overline{Vs_2}$ центру мас ланки AB . Значення швидкостей визначають за формулами:

$$V_B = \mu_v \cdot (Pb);$$

$$V_{BA} = \mu_v \cdot (ab);$$

$$V_{s_2} = \mu_v \cdot (Ps_2),$$

де μ_v – масштабний коефіцієнт плану швидкостей.

За визначеними абсолютними та відносними швидкостями знаходимо величини та напрями кутових швидкостей всіх ланок механізму. Кутова швидкість кривошипа ω_1 задана. Кутову швидкість ω_2 другої ланки визначаємо за формулою:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}.$$

Ця швидкість направлена проти ходу годинникової стрілки, оскільки якщо перенести вектор відносної швидкості $\overline{V_{BA}}$ в точку B (рис. 2.28,а), то він буде «обертати» відносно точки A ланку 2 проти годинникової стрілки. Кутову швидкість ω_3 третьої ланки, в свою чергу, визначимо за формулою:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_{BC}}.$$

Ця кутова швидкість направлена за ходом годинникової стрілки, оскільки вектор абсолютної швидкості точки B відносно нерухомої точки C намагається повернути точку B відносно точки C за годинниковою стрілкою (рис.28, а).

Перейдемо до визначення прискорень характерних точок і кутових прискорень ланок за допомогою *плану прискорень*.

При побудові планів прискорень також належить користуватись їх властивостями. Які полягають в наступному:

- вектори, що виходять з полюсу, зображують абсолютні прискорення відповідних точок механізму в масштабі плану прискорень; точки плану прискорень, що відповідають точкам механізму, прискорення яких дорівнюють нулю, розташовуються в полюсі;
- фігура на плані прискорень, що утворена векторами відносних прискорень, подібна фігурі на ланці, що утворена відрізками, які з'єднують відповідні точки.

Визначаємо прискорення точки A початкової ланки. Оскільки ланка OA обертається рівномірно, то точка A має тільки нормальне прискорення, що направлене вздовж ланки від точки A до центру обертання (точки O). Величина цього прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}.$$

Вибравши величин відрізка $\overline{\pi a}$, що зображує вектор $\overline{a_A}$, визначимо масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)}.$$

Відкладаємо відрізок $\overline{\pi a}$, що зображує абсолютне прискорення точки A із полюсу π плану прискорень паралельно ланці OA (рис. 2.29,б).

Розглядаючи рух точки B з ланками AB і BC складаємо векторні рівняння для визначення прискорення точки B :

$$\begin{cases} \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} \\ \overline{a_B} = \overline{a_C} + \overline{a_{BC}} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Відносні прискорення $\overline{a_{BA}}$ і $\overline{a_{BC}}$ можна представити у вигляді суми двох складових – нормальної, що направлена по осі відповідної ланки до центра обертання в відносному русі, і дотичної, яка перпендикулярна до цієї ланки. Тоді рівняння (2.4) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau} \\ \overline{a_B} = \overline{a_C} + \overline{a_{BC}^n} + \overline{a_{BC}^\tau} \end{cases}. \quad (2.5)$$

В цих рівняннях прискорення \overline{a}_A відоме за величиною та напрямком, а прискорення $\overline{a}_C = 0$. Модулі нормальних прискорень \overline{a}_{BA}^n і \overline{a}_{BC}^n можна визначити, оскільки із попереднього розрахунку відомі значення кутових швидкостей ланок AB і BC :

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot (BA);$$

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot (BC).$$

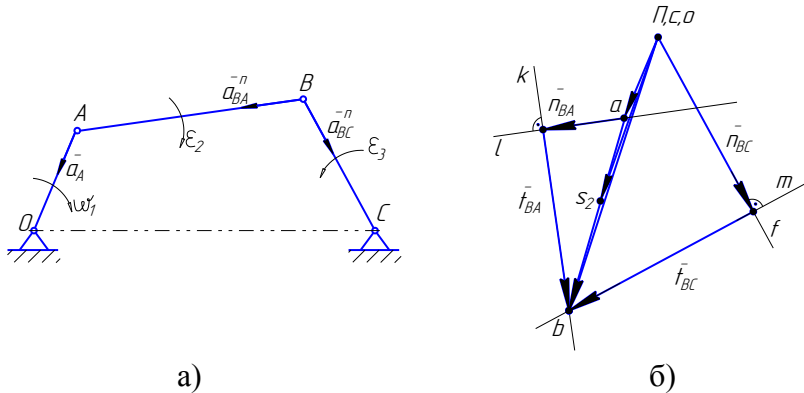


Рисунок 2.29

Прискорення \overline{a}_{BA}^n направлене вздовж вісі ланки AB від точки B до точки A , а прискорення \overline{a}_{BC}^n – вздовж вісі CB від точки B до точки C (рис.29,а).

Для відносних дотичних прискорень відомі тільки лінії їх дії. Прискорення \overline{a}_{BA}^τ є перпендикулярним до ланки AB ($\perp \overline{a}_{BA}^n$), а прискорення \overline{a}_{BC}^τ є перпендикулярним до ланки

СВ ($\perp \bar{a}_{BC}^n$). Величини та напрямки дотичних прискорень \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ визначають при побудові плану прискорень.

Згідно першому рівнянню системи (5) до прискорення \bar{a}_A (з точки “а” плану прискорень) паралельно ланці AB в напрямку від точки B до точки A проводимо лінію ae і відкладаємо на ній відрізок:

$$n_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a},$$

який зображує в масштабі нормальне прискорення \bar{a}_{BA}^n , а з кінця вектора \bar{n}_{BA} проводимо промінь kb перпендикулярно до AB , вздовж якого і буде направлене дотичне прискорення \bar{a}_{BA}^τ .

Відповідно другому рівнянню системи (5) із точки C , що співпадає з полюсом P ($a_C = 0$), проводимо лінію πf паралельно BC і відкладаємо на ній відрізок:

$$n_{BC} = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}.$$

Вектор \bar{n}_{BC} зображує в масштабі нормальне прискорення \bar{a}_{BC}^n і направлений від точки B до точки C . З кінця вектора \bar{n}_{BC} проводимо промінь $mb \perp BC$, вздовж якого і буде направлене дотичне прискорення \bar{a}_{BC}^τ .

В результаті перетину променів kb і mb отримуємо точку “ b ”. Відрізок $\overline{\pi b}$ буде відображати повне прискорення $\overline{a_B}$ точки B , модуль якого:

$$a_B = \mu_a \cdot (\pi b).$$

Відрізки $\overline{\tau_{BA}}$ $\overline{\tau_{BC}}$ відображають дотичні прискорення $\overline{a_{BA}^\tau}$ і $\overline{a_{BC}^\tau}$, а відрізок \overline{ab} – повне прискорення $\overline{a_{BA}}$.

Для визначення положення точки S_2 на лінії ab складаємо пропорцію:

$$\frac{(as_2)}{AS_2} = \frac{(ab)}{AB}.$$

$$\text{З пропорції знаходимо: } (as_2) = \frac{AS_2 \cdot (ab)}{AB},$$

де (as_2) , (ab) – довжини відрізків на плані прискорень (рис.2.29, б);

AS_2 , AB – довжини відрізків на схемі механізму (рис. 2.29, а).

Модулі прискорень $\overline{a_{BA}^\tau}$, $\overline{a_{BC}^\tau}$, $\overline{as_2}$ і $\overline{a_{BA}}$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \overline{a_{BA}^\tau} &= \mu_a \cdot \tau_{BA}; & \overline{a_{BC}^\tau} &= \mu_a \cdot \tau_{BC}; \\ \overline{as_2} &= \mu_a \cdot (\pi s_2); & \overline{a_{BA}} &= \mu_a \cdot (ab). \end{aligned}$$

Визначаємо кутові прискорення ланок. Кутове прискорення ланки 1, що здійснює рівномірне обертання $\varepsilon_1 = 0$.

Кутові прискорення ланок AB і BC відповідно визначаються:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{BC}}.$$

Для визначення напрямку кутових прискорень ε_2 і ε_3 абстрактно переносимо прискорення \bar{a}_{BA}^τ і \bar{a}_{BC}^τ в точку B механізму (рис.2.29, а) і розглядаємо рух точки B відносно точок A і C . Видно, що кутове прискорення ε_2 направлене за ходом годинникової стрілки, а кутове прискорення ε_3 – проти ходу годинникової стрілки.

§ 2.5. Основні рівняння, що зв'язують швидкості і прискорення двох точок, що належать двом ланкам, які входять в поступальну пару

Нехай точка B_2 (рис. 2.30, а) належить ланці 2, а точка B_3 – ланці 3. В заданий момент часу точки B_2 і B_3 співпадають. Точка B_3 лежить під точкою B_2 (рис. 30, б). Ланки 2 і 3 утворюють поступальну пару (CD – вісь симетрії напрямних). У випадку, що розглядається, швидкість точки B_3 геометрично складається з двох швидкостей – *переносної та відносної*. *Переносною швидкістю* є швидкість тієї точки ланки 2, з якою на даний момент співпадає точка B_3 (тобто швидкість точки B_2).

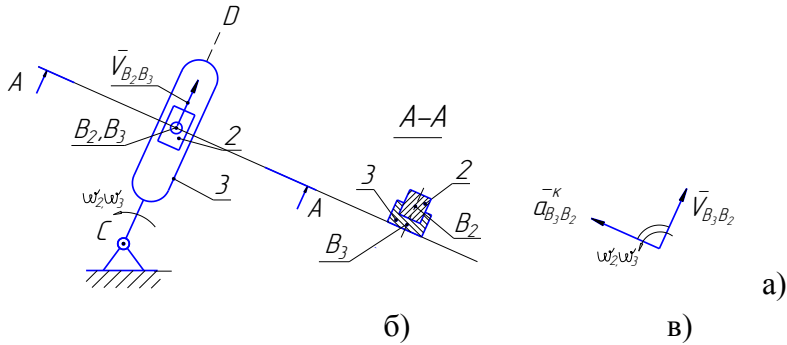


Рисунок 2.30

Відносна швидкість точки B_3 дорівнює швидкості ланки 3 відносно ланки 2. При рухові ланки 3 відносно ланки 2 точка B_3 рухається по прямій CD . Тому відносна швидкість, що позначається $\bar{V}_{B_3B_2}$, направлена по лінії CD (рис. 30, а). Таким чином, формула для визначення швидкості точки B_3 має вигляд:

$$\bar{V}_{B_3} = \bar{V}_{B_2} + \bar{V}_{B_3B_2} \quad (2.6)$$

Прискорення точки B_3 , як відомо з курсу теоретичної механіки, складається з трьох прискорень переносного \bar{a}^{nep} , $\bar{a}^{від}$ і прискорення Кориоліса \bar{a}^{κ} :

$$\bar{a}_{a\bar{b}c} = \bar{a}^{nep} + \bar{a}^{від} + \bar{a}^{\kappa} \quad (2.7)$$

Переносним прискоренням \bar{a}^{nep} буде прискорення точки B_2 ланки 2, з якою в заданий момент часу співпадає точка B_3 , тобто \bar{a}_{B_2} .

У відносному русі, як відмічалось, точка B_3 рухається по прямій лінії CD . Тому в цьому русі точка B_3 має відносне прискорення $\overline{a}_{B_3B_2}^{\text{від}}$, направлене вздовж CD . Тому стосовно випадку, що розглядається, формула (2.7) набуває вигляду:

$$\overline{a}_{B_3} = \overline{a}_{B_2} + \overline{a}_{B_3B_2}^{\text{від}} + \overline{a}_{B_3B_2}^{\text{к}} \quad (2.8)$$

Оскільки ланки 2 і 3 утворюють поступальну пару, то вони не мають відносного обертання, як наслідок, обертаються разом і мають однакові кутові швидкості

$$\omega_2 = \omega_3.$$

Коріолісове прискорення $\overline{a}_{B_3B_2}^{\text{к}}$, що появляється в результаті взаємодії переносного та відносного рухів, обчислюється за формулою:

$$\overline{a}_{B_3B_2}^{\text{к}} = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{B_3B_2}, \quad (2.9)$$

де $V_{B_3B_2}$ – швидкість відносного руху;

ω_2 – кутова швидкість переносного руху (обертання) ланки 2.

Напрямок прискорення Коріоліса визначають за наступним правилом: вектор прискорення $\overline{a}_{B_3B_2}^{\text{к}}$ направлений в ту сторону, в яку буде направлений вектор швидкості $\overline{V}_{B_3B_2}$ відносного руху, якщо його повернути на

90° в напрямку кутової швидкості ω_2 переносного руху (рис. 30, в).

§ 2.6. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2-го виду

Розглянемо визначення швидкостей і прискорень ланок групи Ассура II класу 2-го виду на прикладі кривошипно-повзункового механізму (рис.2.31), в якому є точки, що належать різним ланкам, які входять в поступальну пару.

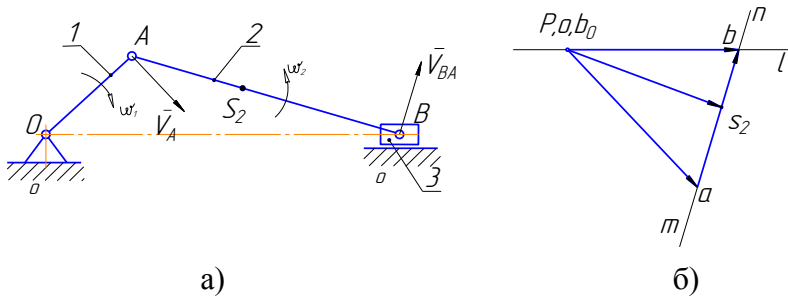


Рисунок 2.31

Для виконання кінематичного аналізу механізму необхідно задати розміри його ланок l_{OA} , l_{AB} , положення центра мас S_2 (ланки 2), а також значення кутової швидкості ω_1 початкової ланки (кривошипу), яку вважаємо постійною ($\omega_1 = const$).

В результаті кінематичного аналізу ми повинні отримати швидкості і прискорення точок A , B , S_2 , величини та напрямки кутової швидкості ω_2 і кутового прискорення ε_2 ланки. Механізм складається із стояка,

початкової ланки і групи Ассура II класу 2-го виду (ланки 2 і 3).

Спочатку визначаємо швидкість точки A кривошипа OA :

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Швидкість $\overline{V}_A \perp OA$ і направлена в сторону кутової швидкості ω_1 .

Вибравши величину відрізка Pa , яким зображується відрізок \overline{V}_A , визначаємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{(Pa)}.$$

На плані швидкостей (рис. 31, б) направлений відрізок \overline{Pa} відкладається з полюса P , перпендикулярно до ланки OA .

Точки A і B належать одній ланці AB , тому:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}. \quad (2.10)$$

Точка B , крім того, належить повзуну 3, який рухається поступально в напрямку BO . Як наслідок, рівняння (10), яке зв'язує швидкості двох точок, що належать двом ланкам, для заданого випадку мають вигляд:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{B_0} + \overline{V}_{BB_0}, \quad (2.11)$$

де \bar{V}_{B_0} – швидкість точки B_0 , що належить стійці 0 і яка співпадає в даний момент часу з точкою B повзуна.

\bar{V}_{BB_0} – швидкість точки B в поступальному русі відносно точки B_0 .

В цих рівняннях швидкість \bar{V}_A відома за величиною і напрямком, а швидкість $\bar{V}_{B_0} = 0$.

Для відносних швидкостей \bar{V}_{BA} і \bar{V}_{BB_0} відомі лише напрямки: *вектор швидкості $\bar{V}_{BA} \perp AB$, а вектор швидкості \bar{V}_{BB_0} паралельний напрямній повзуна 3 (вздовж BO).*

Розв'язуємо рівняння (10) і (11) графічно.

Згідно першого рівняння до швидкості точки A точку через точку “ a ” плану швидкостей (рис. 2.30, б) проводимо перпендикулярно AB лінію mn , вздовж якої буде направлений вектор швидкості \bar{V}_{BA} .

Згідно з другим рівнянням через точку b_0 , що співпадає з полюсом P плану швидкостей, оскільки $\bar{V}_{BB_0} = 0$, проводимо $b_0l \parallel BO$, вздовж якої буде направлена швидкість \bar{V}_{BB_0} . Точка “ b ” перетину ліній mn і b_0l визначає кінець вектора швидкості \bar{V}_B точки B .

Виходячи із теореми подібності, знаходимо на плані швидкостей току S_2 , що відповідає центру ваги ланки 2. З'єднавши полюс P з точкою S_2 отримаємо відрізок \bar{P}_{S_2} , що визначає швидкість центру ваги ланки 2.

Перемноживши заміряні відрізки \overline{Pb} і \overline{ab} на масштабний коефіцієнт μ_V , отримаємо значення відповідних швидкостей:

$$V_B = Pb \cdot \mu_V ; \quad V_{BA} = ab \cdot \mu_V .$$

Для визначення напрямку кутової швидкості ланки 2 перенесемо вектор \overline{ab} , що зображує швидкість \overline{V}_{BA} на плані швидкостей, в точку B механізму (рис.2.31, а).

В напрямку вектора \overline{V}_{BA} точка B обертається відносно A , як наслідок, кутова швидкість ω_2 направлена проти ходу годинникової стрілки.

Величина кутової швидкості ω_2 визначається з виразу:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} .$$

Переходимо до визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок механізму.

Визначаємо прискорення точки A . Оскільки ланка OA обертається рівномірно, то точка A має тільки нормальне прискорення, що направлене вздовж ланки OA від точки A до центру обертання O (рис. 2.32,а).

Величина цього прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n = \omega_1 \cdot l_{OA} .$$

Із точки π (рис.2.32, б), що прийнята за полюс плану прискорень, відкладаємо паралельно ланці OA в напрямку

від точки A до точки O відрізок $\overline{\pi a}$, що відповідає прискоренню \overline{a}_A . Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}$$

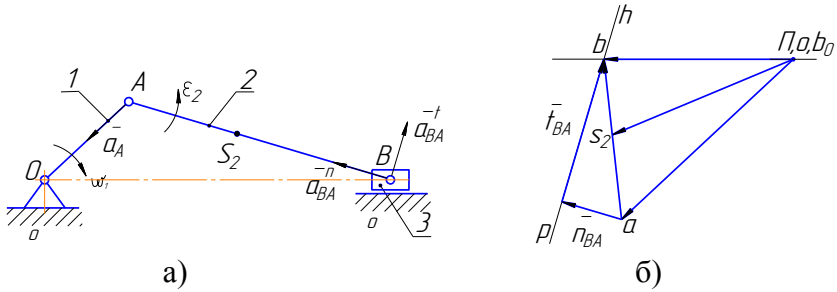


Рисунок 2. 32

Оскільки точки A і B належать одній ланці AB , то:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^t \quad (2.12)$$

де \overline{a}_A – абсолютне прискорення точки A ;

\overline{a}_{BA} – повне відносне прискорення точки B при обертанні її разом ланкою 2 навколо точки A ;

\overline{a}_{BA}^n – нормальне прискорення точки B при обертанні її разом ланкою 2 навколо точки A , що направлене вздовж ланки AB від точки B до точки A і по величині дорівнює:

$$\overline{a}_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{AB}^2}{l_{AB}},$$

де \overline{a}_{BA}^r – дотичне прискорення точки B при обертанні її разом ланкою 2 навколо точки A ; величина цього прискорення невідома, відома тільки лінія його дії, перпендикулярна до AB .

Повзун 3 якому належить точка B , здійснює поступальний рух відносно нерухомих напрямних в напрямку BO . Як наслідок, рівняння (2.12), що зв'язує прискорення двох точок, які належать різним ланкам, для заданого випадку має вигляд:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{B_0} + \overline{a}_{BB_0}^{\kappa} + \overline{a}_{BB_0}^{\text{відн}}, \quad (2.13)$$

де \overline{a}_{B_0} – прискорення точки B_0 , яка належить стояку, $\overline{a}_{B_0} = 0$;

$\overline{a}_{BB_0}^{\kappa}$ – Коріолісове прискорення точки B_0 при її рухові відносно точки B_0 , $\overline{a}_{BB_0}^{\kappa} = 0$, оскільки $\omega_2 = \omega_3 = 0$;

$\overline{a}_{BB_0}^{\text{відн}}$ – прискорення точки B_0 в поступальному русі разом з повзуном 3 відносно стояка, яке направлене в напрямку BO , величина його невідома.

В зв'язку з тим, що $\overline{a}_{BB_0}^{\kappa} = 0$, рівняння (2.13) набуває вигляду:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{B_0} + \overline{a}_{BB_0}^{\text{відн}}. \quad (2.14)$$

Розв'язуємо векторні рівняння (12) і (14) графічно.

Відповідно першому векторному рівнянню до прискорення точка A , тобто із точки “ a ” плану прискорень (рис.2.32, б), паралельно AB в напрямку від точки B до точки A відкладаємо відрізок $\overline{n_{BA}}$, зображує в масштабі нормальне прискорення $\overline{a_{BA}^n}$. Через кінець вектора $\overline{n_{BA}}$ перпендикулярно до ланки AB проводимо лінію ph , вздовж якої буде направлене дотичне прискорення $\overline{a_{BA}^r}$.

Розглянемо друге рівняння. Оскільки $\overline{a_{B_0}} = 0$, то точка b_0 на плані прискорень співпадає з полюсом π . Далі, із точки π (b_0) паралельно лінії BO проводимо лінію πb , вздовж якої буде направлене прискорення $\overline{a_{BB_0}}$.

Точка “ b ” перетину ліній ph і πb визначає кінець відрізка $\overline{\pi b}$, що відповідає абсолютному прискоренню точки B .

Точка “ b ” на плані прискорень визначає також відрізки $\overline{\tau_{BA}}$ і \overline{ab} , що зображують дотичне $\overline{a_{BA}^r}$ і повне $\overline{a_{BA}}$ відносні прискорення.

Знаючи положення S_2 центру ваги ланки 2, знаходимо за правилом подібності відповідну точку s_2 на плані прискорень. Відрізок $\overline{\pi s_2}$ визначає величину і напрям прискорення центру ваги ланки 2. Для визначення напрямку кутового прискорення ε_2 ланки 2 перенесемо вектор $\overline{\tau_{BA}}$, що зображує дотичне $\overline{a_{BA}^r}$ прискорення, в точку B (рис.2.31, а). Видно, що кутове прискорення ε_2 направлене проти ходу годинникової стрілки. Величина кутового прискорення ε_2 визначається за формулою:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{AB}} = \frac{\tau_{BA} \cdot \mu_a}{l_{AB}}$$

§ 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 3-го виду

Розглянемо визначення швидкостей і прискорень точок ланок, кутових швидкостей і кутових прискорень ланок групи Ассура II класу 3-го виду на прикладі кулісного механізму, зображеного на рис. 2.33, а.

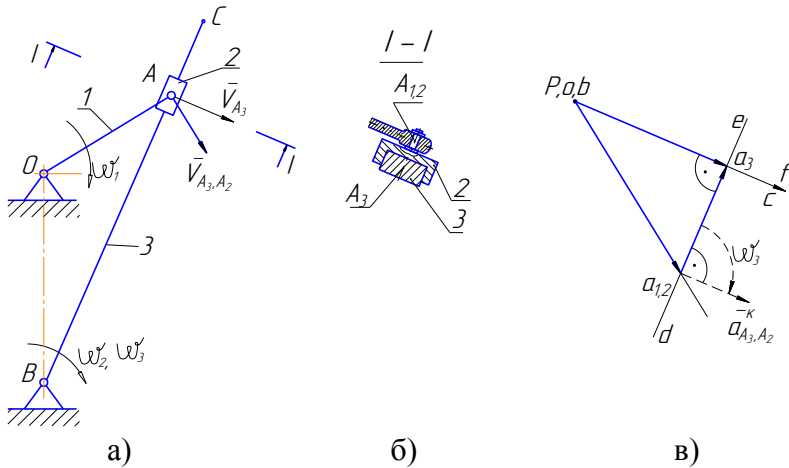


Рисунок 2.33

Кулісний механізм має початкову ланку 1 і групу Ассура II класу 3-го виду (ланки 2, 3). Внутрішньою парою цієї групи є поступальна кінематична пара і, крім цього, ланка 3 (куліса) здійснює обертальний рух.

Спочатку визначається швидкість точки A обертальної кінематичної пари, що утворюється ланками 1 і 2 (рис.2.33, б). Позначимо цю точку, як $A_{1,2}$.

Знаючи кутову швидкість ω_1 ланки 1 , знаходимо:

$$V_{A_{1,2}} = \omega_1 \cdot l_{OA}$$

Вибравши масштабний коефіцієнт плану швидкостей μ_v , із довільного полюса P (рис.33, в) відкладаємо відрізок $\overline{Pa_{1,2}}$, який зображує швидкість $\overline{V}_{A_{1,2}}$ в напрямку кутової швидкості ω_1 і перпендикулярно до OA .

Як відмічалось, в механізмі, що розглядається, є одна поступальна пара, що утворюється ланками 2 і 3 . При наявності поступальної пари застосуємо рівняння (6), що є достовірним для точок, які співпадають для двох ланок. Для цього на ланці 3 (рис.2.33, б) виберемо точку A_3 , яка співпадає в даний момент часу з точкою $A_{1,2}$ (яка лежить на одній лінії) ланок 1 і 2 .

Далі рух точки A_3 , що належить кулісі, можна розглядати як складний, що складається з двох рухів:

- переносного, з відомою швидкістю $V_{A_{1,2}}$ і
- відносного, зі швидкістю $V_{A_3, A_{1,2}}$, що направлений вздовж куліси BC .
- За формулою (6):

$$\overline{V}_{A_3} = \overline{V}_{A_{1,2}} + \overline{V}_{A_3, A_{1,2}} \quad (2.15)$$

де V_{A_3} – абсолютна швидкість точки A_3 .

З іншого боку, точки A_3 і B належать кулісі 3, тому для точки A_3 можна записати:

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_B + \bar{V}_{A_3B} \quad (2.16)$$

де \bar{V}_B – швидкість точки B куліси 3 ($\bar{V}_B = 0$);

\bar{V}_{A_3B} – швидкість точки A_3 в обертальному відносному русі навколо точки B , яка направлена перпендикулярно до BC .

На плані швидкостей (рис.2.33, в) згідно рівняння (2.15) через точку “ a ” відрізка $\overline{Pa_{1,2}}$, який зображує $\bar{V}_{A_{1,2}}$ проводимо лінію de паралельно BC , вздовж якої буде направлений вектор $\bar{V}_{A_3A_{1,2}}$.

З іншого боку, згідно рівняння (16) через точку “ b ”, що співпадає з полюсом P , оскільки $\bar{V}_B = 0$, проводимо лінію Pf перпендикулярно BC , вздовж якої буде направлений вектор \bar{V}_{A_3B} . Точка “ a_3 ” перетину цих ліній являє собою кінець направлених відрізків $\overline{Pa_3}$ і $\overline{a_{1,2}a_3}$, які в масштабі зображують швидкості \bar{V}_{A_3} і $\bar{V}_{A_3A_{1,2}}$. Кутову швидкість ланки 3 знайдемо за формулою:

$$\omega_3 = \frac{V_{A_3}}{l_{AB}} = \frac{(Pa_3) \cdot \mu_V}{l_{AB}}.$$

При цьому необхідно враховувати, що довжина куліси l_{AB} (рис.33, а) при повороті кривошипа l змінюється і для кожного положення ланок її належить визначати по кінематичній схемі механізму.

Кутова швидкість ω_2 ланки 2 дорівнює кутовій швидкості ланки 3, оскільки ці ланки утворюють поступальну пару, тобто обертаються разом.

Переносячи напрям вектора швидкості V_{A_3} з плану швидкостей в точку A схеми механізму (рис. 33, а), встановлюємо, що ω_3 направлена за ходом годинникової стрілки.

Знаючи швидкість точки A_3 , можна на основі теореми подібності визначити швидкість будь-якої точки, що лежить на кулісі. Так, наприклад, для точки C , згідно теореми подібності приймаємо:

$$\frac{V_C}{l_{A_3}} = \frac{(Pc)}{(Pa_3)} = \frac{l_{BC}}{l_{BA}}, \quad (Pc) = \frac{l_{BC}}{l_{BA}} \cdot (Pa_3).$$

Оскільки точка C на схемі механізму лежить на кулісі за точкою A , то і на плані швидкостей ця точка буде лежати на лінії Pf за точкою “ a_3 ”.

Розділ 3

ВСТУП У ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ ТА МАШИН. СИЛОВИЙ РОЗРАХУНОК МЕХАНІЗМІВ

У кінематиці дослідження руху ведеться тільки з врахуванням будови механізмів та геометричних співвідношень між розмірами ланок. Передбачається, що рух вхідних ланок відомий. Рух вихідних ланок вивчається в залежності від заданого руху вхідних ланок. За цих умов сили, які діють на ланки механізму, не враховуються.

Динаміка вивчає дійсний рух механізмів з урахуванням усіх факторів, що на нього впливають. Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл під дією сил. Розрізняють дві основні задачі динаміки:

- визначення сил, які діють на ланки механізмів за заданим законом руху, та встановлення способів зменшення динамічних навантажень, що виникають при русі механізмів;
- визначення дійсного закону руху механізмів під дією прикладених до нього сил та встановлення способів забезпечення заданих режимів руху механізму.

Перша задача має назву силового аналізу механізмів, а друга – динаміки механізмів.

У динаміку входять і ряд інших задач, що мають важливе технічне значення: тертя у кінематичних парах; механічний коефіцієнт корисної дії механізмів; теорія коливань в механізмах та віброзахист машин і т. ін.

Крім цього у динаміці можна виділити два класи задач – аналіз механізмів і машин та синтез механізмів і машин за заданими динамічними умовами.

§ 3.1. Сили, що діють на ланки механізмів та машин

Сили (моменти), прикладені до ланок, можна поділити на групи.

1. *Рушійні сили.* Створюються двигунами, які здійснюють перетворення якогось виду енергії (теплової, електричної, гідравлічної) у механічну роботу. Вони здійснюють позитивну роботу за час своєї дії або за один цикл. Рушійні сили збільшують кінетичну енергію машини і прикладені до ланок механізму, що називаються ведучими; з напрямом швидкості точок прикладання утворюють гострі кути, зокрема ці кути можуть дорівнювати і нулю.

2. *Сили опору.* Здійснюють від'ємну роботу за час своєї дії, або за один цикл. Вони діляться на сили корисного (виробничого, технологічного) опору та сили шкідливого опору - опір середовища (повітря, чи якогось іншого газу, рідини), в якому рухаються ланки механізму. Сили опору середовища переважно малі у порівнянні з іншими силами і в задачах курсу ТММ не враховуються. Особливе місце посідає шкідливий опір у кінематичних парах – тертя. Тертя в механізмах розглядатимемо окремо.

Сили корисного опору – це сили, для подолання яких створено машину. Ці сили напрямлені проти переміщення точок їх прикладання – з напрямом швидкості точок прикладання утворюють тупі кути, або, зокрема, кути, що

дорівнюють 180° ; сили опору зменшують кінетичну енергію машини.

3. *Сили тяжіння* (ваги) окремих ланок та сили пружності пружин. На деяких ділянках руху механізму ці сили можуть здійснювати як додатну, так і від'ємну роботу (у випадку сил тяжіння в залежності від того, чи піднімається, або опускається центр ваги ланки). Але за повний кінематичний цикл робота даних сил дорівнює нулю, оскільки точки їх прикладання рухаються циклічно. Сили тяжіння ланок завжди напрямлені вертикально вниз (до центра тяжіння землі); модуль цих сил обчислюється за відомою формулою $G = mg$, де g – прискорення вільного падіння. Врахування цих сил не викликає труднощів. Сили пружності пружин визначаються за їх характеристиками чи за коефіцієнтами жорсткості.

4. *Сили взаємодії між ланками механізму*, тобто сили, що діють у кінематичних парах. Ці сили являють собою реакції на дію активних сил. Згідно третього закону Ньютона реакції завжди взаємообернені. Їх нормальні складові роботи не виконують, в той час як дотичні складові тобто сили тертя здійснюють від'ємну роботу. Сили перших трьох груп відносяться до категорії активних, вони переважно відомі. Ці сили прикладені до механізму ззовні, а тому є зовнішніми. Сили четвертої групи – реакції, якщо розглядати механізм в цілому, є внутрішніми силами. Реакції наперед невідомі. Вони залежать від активних сил та від прискорень ланок механізму.

Найбільший вплив на закон руху механізму чинять рушійні сили та сили корисного опору. Їх величина та

характер дії визначається робочим процесом машини чи приладу, в яких використаний даний механізм. Ці сили можуть бути постійними, але в більшості випадків вони є функціями кінематичних параметрів – переміщення, швидкості або часу. Рушійні сили та сили опору звичайно визначають експериментальним шляхом за допомогою відповідних приладів (індикаторів, динамометрів, різних давачів і т.п.) для ряду положень механізму за цикл його роботи. Вивчення робочих процесів та їх характеристик є задачею відповідних спеціальних наукових дисциплін та виходить за рамки курсу ТММ, а тому при розв’язуванні задач дані сили вважають відомими і заданими у вигляді так званих механічних характеристик. *Механічною характеристикою* машини називають функціональну залежність силового параметру від часу чи його кінематичного параметру, представлену графічно, масивом чисел або аналітично.

Розглянемо механічні характеристики деяких машин, двигунів та технологічних машин.

Характеристики сил, що залежать від швидкості. На рис. 3.1, *а, б*, показані механічні характеристики для електродвигунів постійного струму з паралельним і послідовним збудженнями; на рис. 3.2, *а* зображена механічна характеристика асинхронного електродвигуна трифазного струму – залежність крутного моменту від кутової швидкості ротора. Робочою частиною характеристики є ділянка *ab*. При деякому значенні кутової швидкості ω , що відповідає номінальному моменту M_n двигуна і номінальній швидкості ω_n , двигун розвиває максимальну потужність. Кутова швидкість ω_c , при якій

$M_0 = 0$, називається синхронною; з цією швидкістю ротор обертається при марноході. Наприклад, точка O діаграми визначає початковий пусковий момент M_0 двигуна при нульовій кутовій швидкості ротора.

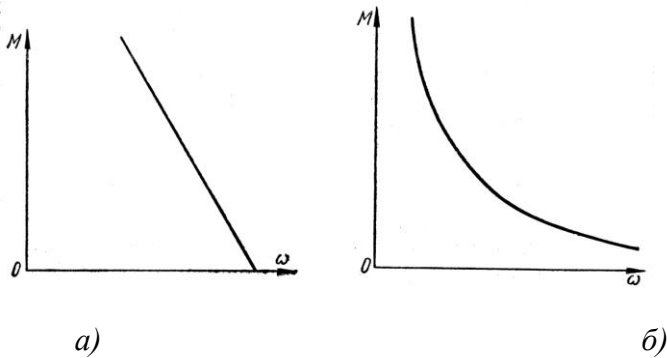
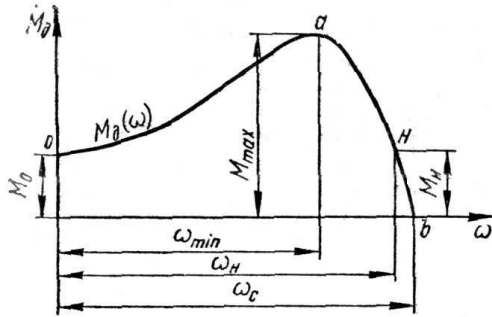
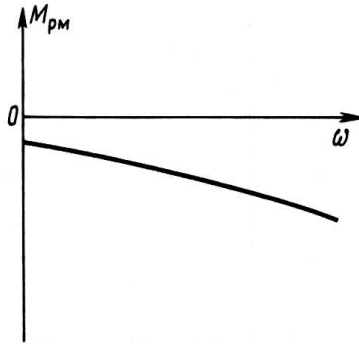


Рис. 3.1

Від швидкості залежать сили та моменти, що діють у таких робочих машинах як електрогенератори, вентилятори, відцентрові помпи і т.ін. (рис. 3.2, б). Відмітимо, що при зображенні механічних характеристик додержуються наступного правила знаків: силу і момент враховують додатними, якщо на розглядуваній ділянці шляху (лінійній чи кутовій) вони виконують додатну роботу.



а)



б)

Рис. 3.2

Характеристики сил, що залежать від переміщення.
 На рис. 3.3 показана схема механізму двотактного двигуна внутрішнього згоряння (ДВЗ) та його механічна характеристика – залежність сили тиску газів F_θ на поршень від його переміщення. Зазначимо, що для ДВЗ механічна характеристика частіше представляє собою залежність тиску газів у циліндрі від переміщення поршня

і називається індикаторною діаграмою. Якщо подача палива в ДВЗ не змінюється, то при наступних обертах початкової ланки 1 механічна характеристика повторює свою форму.

Робота сили F_D графічно зображується площею, що обмежена кривою $F_D(S_c)$. У розглядуваному випадку додатна площа більша, ніж від'ємна. Таким чином робота сили F_D за повний цикл буде додатною. Отже, сила F_D є рушійною, хоча вона міняє знак.

Сили, що залежать тільки від переміщення, діють у багатьох інших машинах та приладах: поршневих помпах та компресорах, стругальних, фрезерних, довбальних верстатах і т.п. На рис. 3.4, а подається механічна характеристика стругального верстата у вигляді прямої, що виражає залежність сили різання P , прикладеної до різця, від переміщення різця S .

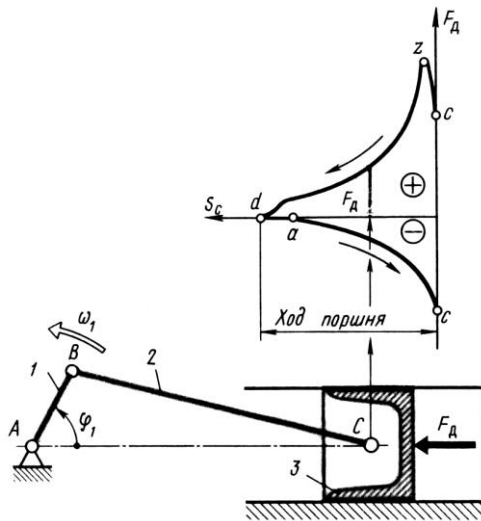


Рис. 3.3

У ряді машин дія активних сил робочого процесу на робочі органи машини є короткочасна і здійснюється лише на малій ділянці траєкторії робочого органу. Це має місце, наприклад, у ковальських пресах, відбійних молотках, машинах для забивання паль і т. ін. Робочі процеси такого роду називають ударними або імпульсними. Типова характеристика ударного процесу показана на рис. 3.4, б.

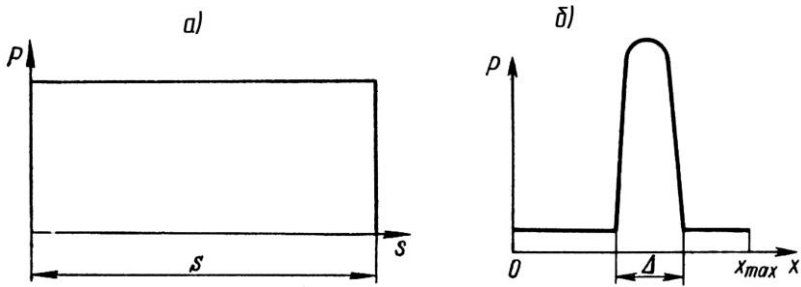


Рис. 3.4

Отже, маючи механічну характеристику машини, можна безпосередньо отримати величину сили чи моменту в конкретних положеннях механізму, або при різних швидкостях чи в заданий момент часу.

Наведені механічні характеристики машин-двигунів та робочих машин є типовими.

§3.2. Загальна методика силового розрахунку

Силовий аналіз механізмів ґрунтується на розв'язанні першої задачі динаміки – за заданим законом руху визначити діючі сили. Визначення реакцій, а також – у низці задач – сил та моментів, що прикладені до механізму ззовні, складає зміст його силового розрахунку.

Під час руху механізму в кінематичних парах діють сили, що є силами взаємодії між ланками. Сили взаємодії ланок, що виникають в місцях їх дотику, називають *реакціями* в кінематичних парах. Навантаженість кінематичних пар реакціями є важливою динамічною характеристикою механізму. Знання сил в кінематичних парах має велике практичне значення для розрахунків ланок механізму на міцність, жорсткість, вібростійкість, стійкість проти спрацьовування, для розрахунку вальниць на довговічність та для проведення інших подібних розрахунків, що виконуються при проектуванні механізмів. Таким чином силовий розрахунок включає, перш за все, визначення реакцій у кінематичних парах. Зовнішні сили, що прикладені до ланок механізму, як правило, задані. Визначенню підлягає лише зовнішня зрівноважувальна сила (зрівноважувальний момент), що прикладена до вхідної ланки, при якій забезпечується прийнятий закон її руху.

Силовий розрахунок механізмів може бути виконаний різними методами. В ТММ досить широке застосування отримав *метод силового розрахунку механізмів на основі звичайних рівнянь рівноваги твердих тіл*. Суть методу зводиться до застосування рівнянь рівноваги у формі Д'Аламбера. Для цього силу інерції, яка є протидією тіла, що прискорюється, та яка прикладена до тіла, що надає це прискорення, умовно переносять на тіло, що прискорюється. Перенесена сила зрівноважується з усіма зовнішніми силами, в тому числі і з реакціями, що діють на це тіло.

Стосовно механізмів суть методу може бути сформульована так: *якщо до всіх зовнішніх сил, що діють на ланку (групу Ассура, механізм) додати сили інерції (моменти), то під дією усіх цих сил ланку (групу Ассура, механізм) можна розглядати як таку, що умовно знаходиться в рівновазі.* Цей метод дозволяє записати рівняння руху в формі рівнянь рівноваги, тим самим задачу динаміки розв'язати методами статички.

Таким чином, при застосуванні принципу Д'Аламбера до розрахунку механізмів, крім зовнішніх сил, вводяться в розрахунок сили інерції, які виникають при русі ланок і діють як додаткові (фіктивні) сили. Нагадаємо, під силою інерції розуміють кінетичну реакцію тіла на прискорення, яке надається йому ззовні. Сили інерції – це сили, обумовлені масою та рухом тіла з прискоренням. Сили інерції тіла (ланки) являють собою результат сумарної дії елементарних сил інерції кожної точкової маси тіла. Для зручності розрахунків незлічену систему елементарних сил інерції, що відповідають точковим масам, замінюють рівнодійними силами та парами. В загальному випадку, якщо тіло (ланка) здійснює плоскопаралельний рух, частіше за все елементарні сили інерції зводяться до одного головного вектора сил інерції (скорочено сили інерції) $\bar{\Phi} = -m\bar{a}_s$, прикладеного в центрі мас тіла, та головного момента сил інерції (скорочено момента сил інерції) $\bar{M}_\phi = -I_s\bar{\varepsilon}$, де m – маса тіла; a_s – прискорення центра мас тіла; ε – кутове прискорення тіла; I_s – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас, перпендикулярно площині його руху. Головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}$ спрямований протилежно вектору прискорення

центра мас \bar{a}_s . Головний момент сил інерції \bar{M}_ϕ спрямований протилежно кутовому прискоренню $\bar{\varepsilon}$.

Метод силового розрахунку механізму з врахуванням сил інерції та застосуванням рівнянь динамічної рівноваги часто називають *кінетостатичним розрахунком* механізмів, на відміну від статичного розрахунку, при якому не враховуються сили інерції. У сучасних швидкохідних машинах слід обов'язково враховувати сили інерції ланок механізму, бо значення цих сил можуть значно перевищувати за величиною прикладене зовнішнє навантаження.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів будемо виконувати методом кінетостатики, умовно приклавши до кожної рухомої ланки механізму, крім зовнішніх сил \bar{F} (моментів \bar{M}), головний вектор $\bar{\Phi}$ та головний момент \bar{M}_ϕ сил інерції. Тоді для кожної ланки можна записати три рівняння кінетостатики. Нагадаємо, для рівноваги довільної плоскої системи тіл необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центра, що лежить у площині дії сил, були рівні нулю.

$$\sum F_x + \Phi_x = 0, \quad (3.1)$$

$$\sum F_y + \Phi_y = 0, \quad (3.2)$$

$$\sum M_0(\bar{F}) + \sum M + M_0(\bar{\Phi}) + M_\phi = 0. \quad (3.3)$$

Часто в розрахунках рівняння (3.1) та (3.2) замінюють одним еквівалентним векторним рівнянням:

$$\Sigma \bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.4)$$

Головний вектор $\bar{\Phi}$ та головний момент \overline{M}_Φ сил інерції визначаються з відомих формул:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_s, \overline{M}_\Phi = -I_s\bar{\varepsilon}.$$

Невідомі реакції визначаються з рівнянь (3.1) – (3.4), в які вони входять у складі сум $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_0(\bar{F})$, з відомими зовнішніми силами.

Зазначимо, до викладена методика – для силового розрахунку плоских механізмів. При цьому прийнято, що механізм має площину симетрії, яка паралельна площині руху і в якій діють усі прикладені сили. Вказаній умові відповідає дуже велика кількість механізмів енергетичних, технологічних, транспортних машин та різних приладів.

При русі механізму в його кінематичній парі виникають сили тертя, що гальмують рух, знижують коефіцієнт корисної дії механізму. Силовий розрахунок може бути виконаний як з урахуванням, так і без урахування тертя. В першому наближенні проводять розрахунок без урахування сил тертя в кінематичних парах, розглядаючи механізм як систему з ідеальними в'язями. Відзначимо, у більшості випадків сили тертя малі, порівняно з іншими силами, що діють на механізм, тому уточнений розрахунок часто не робиться.

Розглянемо дію сил в кінематичних парах. Реакція, тобто сила взаємодії ланок, що утворюють нижчу кінематичну пару, представляє собою рівнодіючу

елементарних сил (елементарних тисків однієї ланки на іншу), розподілених по поверхні дотику ланок. Як відомо, сила взаємодії між двома тілами, що дотикаються (якщо нехтувати силами тертя), напрямлена по спільній нормалі до поверхні стикання. Таким чином, у поступальній кінематичній парі всі елементарні сили, а отже і їх рівнодійна – реакція R_{12} (рис. 3.5), будуть напрямлені по нормалі до напрямної кінематичної пари $x-x$. Реакція, як і будь-яка сила, характеризується трьома параметрами: величиною (модулем), напрямком і точкою прикладання. Величина і точка прикладання реакції невідомі і повинні бути визначені в процесі силового розрахунку. Таким чином, поступальна пара вносить в рівняння (3.1) – (3.4) два невідомих параметри. Сказане повністю стосується і реакції R_{21} , яка прикладена до ланки 2 з боку ланки 1, оскільки сили взаємодії ланок R_{12} , R_{21} зв'язані третім законом Ньютона: $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$. Відзначимо, що реакції в кінематичних парах будемо позначати двома нижніми індексами: перший вказує номер ланки, на яку діє сила, другий – номер ланки, зі сторони якої діє сила.

Розглянемо обертальну кінематичну пару V класу (рис. 3.6). Якщо знехтувати силами тертя, то рівнодійна R_{12} елементарних тисків однієї ланки на іншу, напрямлена по нормалі до циліндричних поверхонь дотику обох ланок, пройде через центр шарніра O . Положення центра шарніра завжди відоме, але невідомі ні величина цієї реакції, ні її напрям.

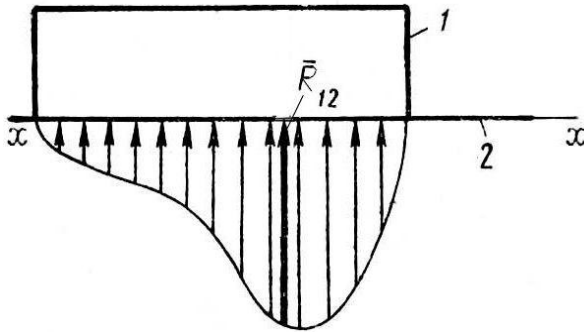


Рис. 3.5

Таким чином, від кожної реакції, що діє в нижчій кінематичній парі, в розрахункових рівняннях (3.1) – (3.4) з'являться два невідомі параметри.

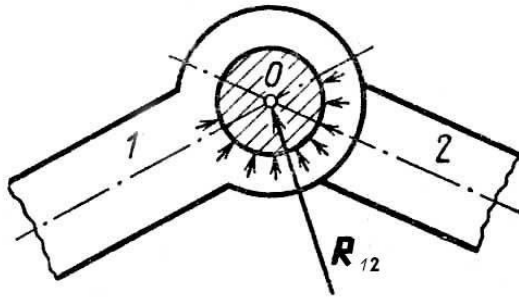


Рис. 3.6

У вищій парі IV класу (рис. 3.7) реакція R_{12} прикладена в точці A дотику ланок 1 та 2 і напрямлена вздовж спільної нормалі $n-n$ (тертя не враховується). Таким чином, для реакції R_{12} відомі як точка прикладання, так і лінія дії; невідомим є тільки її модуль.

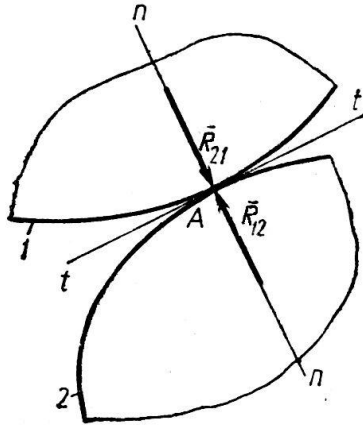


Рис. 3.7

Умови статичної визначеності плоских механізмів, кінематичних ланцюгів.

Розглянемо плоский механізм, що складається з n рухомих ланок та p_5 нижчих (V класу) і у p_4 вищих (IV класу) кінематичних пар. Для цього механізму можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги; число невідомих параметрів під час визначення реакцій у кінематичних парах цього ланцюга становитиме $2p_5+p_4$. Щоб задача була статично визначеною, кількість рівнянь рівноваги повинна дорівнювати числу невідомих, що входить до них, тобто $3n=2p_5+p_4$. Запишемо для плоского кінематичного ланцюга формулу Чебишева у вигляді $3n=2p_5+p_4+W$. Порівнюючи вирази, роблять висновок: механізм без залишкових в'язей є статично визначеним. W рівнянь, що залишилися, використовуються для визначення тих зовнішніх силових факторів, які не задані в силовому розрахунку і є

шуканими. В багатьох підручниках невідомий зовнішній силовий фактор називається зрівноважувальною силою (моментом).

В той же час, для будь-якої структурної групи Ассура справедливе співвідношення $3n=2p_5+p_4$. Отже, будь-яка структурна група є статично визначеною, а тому при силовому розрахунку доцільно розглядати рівновагу окремих структурних груп.

Послідовність силового розрахунку механізмів.

При силовому розрахунку невідомими будуть внутрішні сили в кінематичних парах, тобто реакції, та часто зрівноважувальна сила (момент). Щоб визначити їх, механізм треба розкласти на групи Ассура. Оскільки групи Ассура є статично визначеними, механізм розкладається на групи Ассура та механізм I класу. При цьому необхідно, щоб зрівноважувальна сила була прикладена до рухомої ланки механізму I класу. Підкреслимо, що при такому розкладанні механізму, в кожній групі Ассура невідомими будуть тільки реакції. Після того, як силовий розрахунок усіх груп Ассура виконано, механізм I класу також буде статично визначеним.

Підсумуємо: силовий розрахунок механізму потрібно проводити за структурними групами Ассура, починаючи з групи, яка приєднана останньою в процесі утворення механізму, і завершувати розрахунком механізму I класу. Таким чином, послідовність силового розрахунку є зворотною до послідовності кінематичного дослідження.

§ 3.3. Силевий розрахунок шарнірно-важільного механізму

Розглянемо графічний метод силового дослідження плоских важільних механізмів шляхом складання рівнянь рівноваги та побудови плану сил. Наведемо розрахунок шестиланкового кулісного механізму поперечно-стругального верстата. Вихідними даними для розрахунку є: кінематична схема механізму в заданому положенні (рис. 3.8); маси m_i та моменти інерції I_{Si} ланок; положення їх центрів мас s_i ; кутова швидкість ω_1 кривошипа; сила корисного опору, в розглядуваному прикладі F_P - сила різання, яка прикладена до різця (ланка 5), в напрямку, протилежному руху.

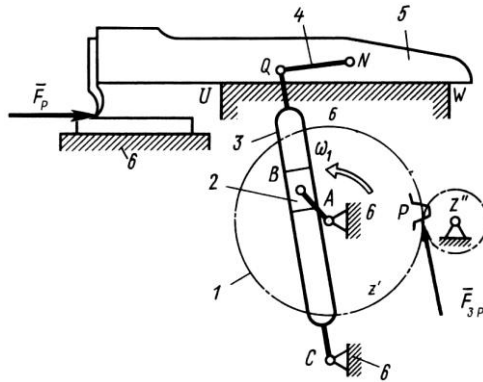


Рис. 3.8

Невідомими є реакції у кінематичних парах та зрівноважувальна сила $F_{зр}$. Оскільки у даному прикладі задано, що верстат з'єднаний з двигуном за допомогою

зубчастої передачі $z' - z''$, то зовнішній силовий фактор, який прикладений до зубчастого колеса z' (ланка 1), являє собою силу, модуль якої треба визначити (напрямок та точка прикладання відомі).

Підкреслимо, що до силового розрахунку приступають лише після виконання кінематичного аналізу. Припустимо, що кінематичний розрахунок виконаний, і, отже, відомі повні прискорення центрів мас усіх ланок та їх кутові прискорення за величиною та напрямком. За знайденими прискореннями визначаємо модулі та напрями головних векторів та головних моментів сил інерції всіх ланок за формулами:

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_{Si}; \bar{M}_{\Phi_i} = -I_{Si} \bar{\varepsilon}_i.$$

Вектори сил інерції $\bar{\Phi}_i$ прикладені в центрах мас і напрямлені в протилежну сторону до напрямків векторів відповідних прискорень a_{Si} , моменти M_{Φ_i} напрямлені протилежно до кутових прискорень ε_o .

Визначимо сили ваги усіх рухомих ланок за рівністю:

$$G_i = m_i g = 9,81 m_i$$

і прикладемо їх у центрах мас s_i ланок вниз по вертикалі.

Розбиваємо механізм на групи Ассура. Даний механізм утворений шляхом послідовного приєднання до механізму I класу (ланки 1,6) двох груп Ассура другого класу: групи третього виду (ланки 2,3) та другого виду (ланки 4,5).

Накреслимо в масштабі найвіддаленішу від вхідної ланки групу Ассура (ланки 4,5) і нанесемо діючі на неї сили: корисного опору F_p , ваги G_4 , G_5 , сили (і моменти сил) інерції Φ_4 , Φ_5 , M_{Φ_4} – усі вони відомі; а також реакції від'єднаних від групи Ассура ланок (рис. 3.9, а). Невідомими є реакції. Реакція стояка на повзун R_{56} нормальна до напрямної UW . Невідомим є її модуль, а також точка прикладання, яка визначається через плече b . Реакцію в обертальній парі Q , невідому за модулем і напрямом, розкладемо на дві складові \bar{R}_{43}^n , \bar{R}_{43}^t так, щоб момент нормальної складової відносно точки N дорівнював нулю. Невідомі модуль та напрям внутрішньої реакції $\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{54}$ в шарнірі N визначаються пізніше, через план сил.

Під дією цих сил згідно з принципом Д'Аламбера група Ассура перебуватиме в стані умовної рівноваги.

Складову R'_{43} знайдемо з умови рівноваги ланки 4, за рівнянням моментів

$$\sum M_N \bar{F} = 0, R'_{43}QN + G_4h_1 - \Phi_4h_2 - M_{\Phi_4} / \mu_l = 0,$$

звідки

$$R'_{43} = \frac{\Phi_4h_2 + M_{\Phi_4} / \mu_l - G_4h_1}{QN},$$

де QN , h_1 , h_2 - плечі сил, які вимірюємо на кресленні групи Ассура.

Якщо права частина рівності додатна то це означає, що напрям реакції R'_{43} на схемі прийнято правильно. При

від'ємному значенні – потрібно замінити напрям реакції R'_{43} на протилежний.

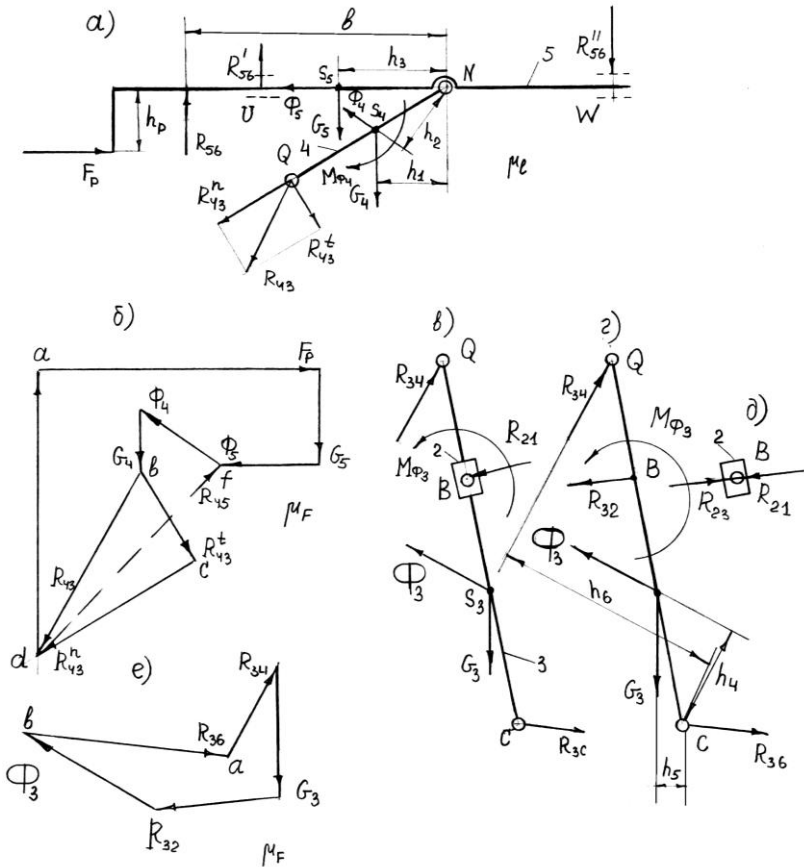


Рис. 3.9

Подальші силові розрахунки проводимо графічним методом. Складаємо векторне рівняння рівноваги сил, прикладених до всієї групи Ассур (4,5):

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{R}_{56} + \bar{F}_p + \bar{G}_5 + \bar{\Phi}_5 + \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_4 + \bar{R}'_{43} + \bar{R}''_{43} = 0, \quad (3.5)$$

пам'ятаючи, що для системи, яка перебуває в рівновазі, многокутник сил буде замкненим.

Будуємо план сил. Для цього вибираємо масштаб μ_F та вираховуємо відповідні відомим силам довжини відрізків. Потім, починаючи від т.а (рис. 3.9, б), відкладаємо, згідно з рівнянням (3.5), вектори, що зображають ці сили F_P , G_5 , Φ_5 , Φ_4 , G_4 , R'_{43} у масштабі μ_F . Після цього через початок вектора, що зображає на плані силу \bar{F}_P (т.а), проводимо лінію, паралельну до \bar{R}_{56} на кресленні групи Ассура, а через кінець вектора, що зображає \bar{R}'_{43} (т.с) – лінію, паралельну \bar{R}_{43}^n . Точка d перетину цих двох прямих визначить невідомі реакції R_{56} , R_{43}^n . Напрямок їх приймається таким, щоб стрілки на векторах сил були орієнтовані в напрямку обходу контура. Повну реакцію R_{43} в шарнірі Q отримуюмо графічно згідно рівняння $\bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}'_{43}$.

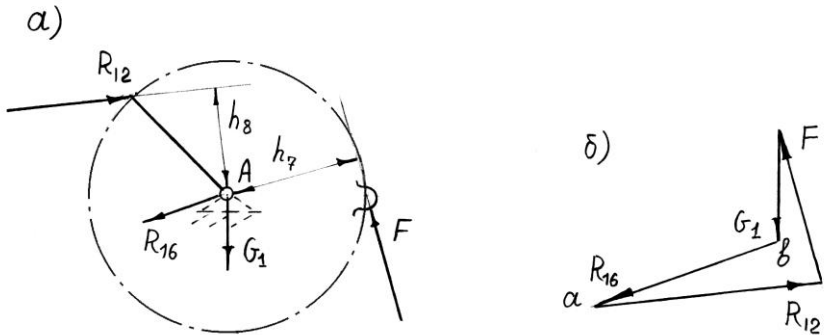


Рис. 3.10

Модулі знайдених реакцій визначаємо за відомими формулами

$$R_{56} = \mu_F ad,$$

$$R_{43} = \mu_F bd,$$

де ad, bd - відрізки на плані сил.

Для визначення реакцій \bar{R}_{45} у внутрішній кінематичній парі N розглянемо умову рівноваги сил, що діють на ланку 4,

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_4 + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{45} = 0.$$

Розв'язок отримуємо, замкнувши на плані сил точки d і f . Модуль реакції дорівнює $R_{45} = \mu_F df$.

Визначимо координату b точки прикладання реакції R_{56} . З рівняння моментів усіх сил, що діють на ланку 5 відносно т. N , $\sum M_N(\bar{F}) = 0$, отримаємо:

$$R_{56}b - G_5h_3 - F_ph_p = 0, \quad b = \frac{G_5h_3 + F_ph_p}{R_{56}}.$$

Якщо плече b буде мати таку довжину, що т. D виявиться поза поверхнею UW , то силова дія стояка 6 на повзун 5 зведеться до двох реакцій R'_{56} , R''_{56} . Знайдена R_{56} є тоді лише їхньою рівнодійною. Шукані реакції визначаються за допомогою теореми Варіньона:

$$R'_{56} = R_{56} \frac{l_{DW}}{l_{UW}}; \quad R''_{56} = R_{56} \frac{l_{DU}}{l_{UW}}$$

Перейдемо до розгляду групи Ассура 2,3. Накреслимо в масштабі групу Ассура і прикладемо діючі сили (рис. 3.9, е). Двоповодкова група Ассура третього виду частіше за інші зустрічається в сучасному машинобудуванні. При цьому, часто $G_2=0$, $\Phi_2=0$ або настільки малі, що ними нехтують

До ланок групи прикладені: відома з попереднього розрахунку реакція $\bar{R}_{34} = -\bar{R}_{43}$, а також відомі сили та момент G_3 , Φ_3 , M_{Φ_3} . Невідомими є модуль та напрям реакцій R_{36} і R_{21} в шарнірах C та B , модуль реакції взаємодії $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ в поступальній парі 2-3.

Розглянемо рівновагу не групи Ассура, а окремих ланок, які входять до групи, оскільки відомо напрям реакції R_{32} повзуна на кулісу (реакції у внутрішній кінематичній парі B). Ця реакція нормальна до напрямної CQ і прикладена в т. B (рис. 3.9, з).

За модулем реакцію R_{32} знайдемо з рівняння моментів сил, що діють на кулісу, відносно т. C :

$$\sum M_C = 0, R_{32}BC + \Phi_3 h_4 + G_3 h_5 - R_{34} h_6 + M_{\Phi_3} / \mu_l = 0,$$

звідки
$$R_{32} = \frac{R_{34} h_6 - \Phi_3 h_4 - G_3 h_5 - M_{\Phi_3} / \mu_l}{BC}, \bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}.$$

Із рівноваги повзуна (рис. 3.9, д) маємо:

$$\sum \bar{F} = 0, \bar{R}_{23} + \bar{R}_{21} = 0, \bar{R}_{23} = -\bar{R}_{21}.$$

Реакцію R_{36} знаходимо методом планів сил згідно з векторним рівнянням для ланки 3:

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{R}_{34} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{32} + \bar{\Phi}_3 + \bar{R}_{36} = 0.$$

Для цього з довільно вибраної точки (полюса a , рис. 3.9, e) в масштабі μ_{F_1} відкладаємо сили \bar{R}_{34} , \bar{G}_3 , \bar{R}_{32} і $\bar{\Phi}_3$. Невідома реакція R_{36} замкне многокутник сил. За модулем $R_{36} = \mu_{F_1} ab$.

Переходимо до силового розрахунку механізму I класу. Накреслимо його в масштабі (рис. 3.10, a) і нанесемо діючі сили: відому силу $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$, силу ваги G_1 , невідому за модулем і напрямком реакцію R_{16} , та невідому лише за модулем зрівноважувальну силу F_{3p} . В даному прикладі зрівноважувальна сила являє собою рушійну силу. Лінія дії сили F_{3p} проходить через полюс зачеплення P під кутом зачеплення α_w . Положення полюса P та величина кута α_w визначаються з геометричного розрахунку зубчастої передачі.

Сила F_{3p} знаходиться з рівняння моментів сил відносно т.А

$$\sum M_A F = 0, \quad F_{3p} h_7 - R_{12} h_8 = 0,$$

$$\text{звідки } F_{3p} = \frac{R_{12} h_8}{h_7}.$$

Відмітимо, що силу F_{3p} можна також отримати і коротшим шляхом, не роблячи розбивки механізму, застосувавши теорему М.Є. Жуковського.

Реакцію R_{16} стояка b на кривошип I визначимо за допомогою побудови плану сил (рис. 3.10, b) згідно з рівнянням

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_{3p} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{16} = 0.$$

За модулем невідома реакція $R_{16} = \mu_{r_2} \cdot ab$.

§3.4. Теорема Жуковського

Визначення зрівноважувальної сили методом М.Є.Жуковського. У випадку задач, у яких необхідно знайти зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент, а визначати реакції в кінематичних парах немає потреби, використовують теорему (метод) Жуковського. Прикладом таких задач є: визначення потужності та типу двигуна, моменту інерції маховика, характеристики регулятора та інші задачі динаміки.

Співвідношення між силами, прикладеними до ланок механізму (включаючи і сили інерції), можна дістати, застосувавши теорему Жуковського про жорсткий важіль: якщо для механізму, що перебуває в русі, побудувати план швидкостей, а потім вектори усіх активних сил та сил інерції, які прикладені в різних точках механізму, повернути на 90^0 в один і той же бік та перенести в однойменні точки плану швидкостей, то сума моментів цих сил відносно полюса буде дорівнювати нулю.

Замість сил можна повертати план швидкостей на 90^0 , а сили прикладати так, як вони показані на схемі механізму. Тоді теорему Жуковського можна сформулювати таким чином: *якщо до плану швидкостей, повернутого на 90^0 , у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили (і моменти), сили інерції (і моменти сил інерції), а також зрівноважувальну силу (момент) і розглядати план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в*

рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю. Таким чином, рівновазі механізму відповідає рівновага повернутого плану швидкостей, який розглядається як “жорсткий важіль”, що шарнірно закріплений в полюсі плану.

Доведення теореми ґрунтується на принципі можливих переміщень.

Моменти сил, що прикладені до ланок механізму найчастіше зображають у вигляді пар сил, які переносять на план швидкостей. Якщо моменти M_i , що діють на ланки механізму, переносяться на план швидкостей безпосередньо у вигляді моментів, їх величина визначається рівнянням $M_i^0 = M_i \frac{ab}{l_{AB}}$,

де l_{AB} , m – довжина ланки, до якої прикладений момент M_i ; ab , mm – відрізок плану швидкостей, до якого прикладається момент M_i^0 . При цьому момент M_i^0 має той же знак, що і заданий момент M_i , якщо напрям відрізка ab (порядок літер) співпадає з напрямом відрізка AB схеми механізму. Якщо напрям ab протилежний AB , то моменти M_i^0 та M_i мають різні знаки.

Застосування важеля Жуковського дозволяє визначити шукану силу за допомогою тільки одного рівняння моментів. У випадку застосування методу плану сил необхідно провести повний силовий розрахунок механізму.

Відзначимо, що метод Жуковського можна застосовувати для знаходження величини будь-якої сили, якщо точка прикладання та лінія дії цієї сили задані, а

також відомі лінії дії, величини та точки прикладання усіх інших сил, які діють на ланки механізму.

З наведеного випливає наступна послідовність визначення зрівноважувальної сили за способом Жуковського: - креслять кінематичну схему механізму у заданому положенні та вибраному масштабі з прикладеними усіма зовнішніми силами. Моменти замінюють парами сил; - будують план швидкостей, повернутий на 90^0 ; - до однойменних точок повернутого плану прикладають усі зовнішні сили, сили інерції, а також зрівноважувальну силу, зберігаючи їх напрям; - складають рівняння суми моментів усіх сил відносно полюса і визначають зрівноважувальну силу.

Приклад. За допомогою важеля Жуковського визначити F_{zp} для механізму, що зображений на рис. 3.11. Згідно з умовою F_{zp} прикладена в т. A кривошипа.

У довільному масштабі будують план швидкостей. Прикладаємо у відповідних точках плану швидкостей всі сили, повернуті на 90^0 за рухом стрілки годинника. При цьому моменти $M_{\phi 2}$ замінюємо парю сил $F'_{M\phi}$ і $F''_{M\phi}$, що прикладені в точках A та B , зі збереженням напрямку моменту:

$$F'_{M\phi} = F''_{M\phi} = \frac{M_{\phi 2}}{l_{AB}}.$$

Складаємо рівняння моментів відносно полюса плану швидкостей $\sum M_{P_v} F = 0$,

$$F_{3P} p_v a - F'_{M\phi} h_1 - G_2 h_2 - \Phi_2 h_3 + F_{KO} p_v b - \Phi_3 p_v b - F''_{M\phi} h_4 = 0.$$

$$\text{Звідки } F_{3P} = \frac{F'_{M\Phi} h_1 + G_2 h_2 + \Phi_2 h_3 - F_{K0} p_v b + F''_{M\Phi} h_4 + \Phi_3 p_v b}{p_v a}.$$

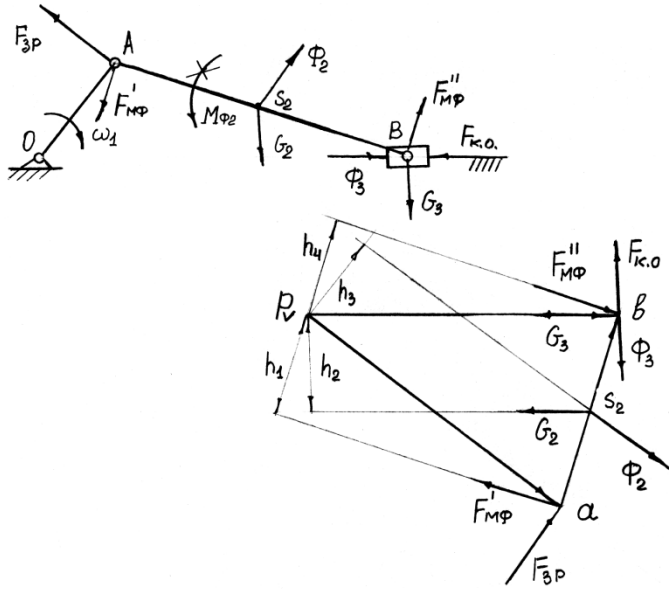


Рис. 3.11

Якщо при розв'язку даного рівняння сила F_{3P} додатна, то це означає, що її напрям вибрано правильно. При від'ємному значенні правої частини напрям сили F_{3P} треба змінити на протилежний.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає динаміка?
2. Сформулюйте основні задачі динаміки.
3. Назвіть сили, що діють на ланки механізму, та дайте їм коротку характеристику.
4. Дати означення механічної характеристики машини.
5. На якому принципі теоретичної механіки ґрунтується кінетостатичний розрахунок механізму?
6. Яка послідовність силового розрахунку механізмів?
7. Яка умова статичної визначеності кінематичних ланцюгів?
8. Сформулюйте теорему Жуковського.

Розділ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАШИННОГО АГРЕГАТУ

Вивчення закону руху механізму машинного агрегату під дією заданих сил є однією з основних задач динаміки. Для розв'язку цієї задачі необхідно скласти рівняння руху системи і розв'язати його відносно невідомого кінематичного параметра. При визначенні закону руху задача може бути суттєво спрощена, якщо перейти до динамічної моделі.

Вивчення динаміки машини повинно починатися з вибору її динамічної моделі. Вибір динамічної моделі того чи іншого об'єкта залежить, у першу чергу, від мети дослідження, від характеру задачі, що розглядається.

§4.1. Динамічна модель машинного агрегату

Машинний агрегат – це, переважно, сукупність машини-двигуна, механізму передач та робочої машини. Це, як правило, багатоланкова система, навантажена багатьма силами та моментами, прикладеними до різних ланок. На рис. 4.1, як приклад, приведена силова установка, в якій ДВЗ приводить в рух через зубчасту передачу вал робочої машини – відцентрової помпи. До ланок машинного агрегату під час руху прикладені різні сили: рушійна сила F_D , сила корисного опору – момент M_{PM} , сили тяжіння, в усіх кінематичних парах діють сили тертя. Характер дії цих сил різний: деякі залежать від положення чи швидкості ланок, інші постійні. При цьому кожна ланка має свою масу, момент інерції. Своїми діями

прикладені сили надають механізму той чи інший закон руху. Визначення закону руху такої складної багатоланкової системи становить непросту задачу.

У той же час для механізму, що має один ступінь вільності, задачу можна вважати розв'язаною, якщо буде відомий закон руху однієї ланки, яка таким чином буде початковою. Закон руху інших ланок і точок механізму після цього можна без значних зусиль визначити методами кінематичного аналізу.

Викладене наводить на думку замінити весь складний багатоланковий механізм однією умовною рухомою ланкою. Виберемо за таку ланку I (рис. 4.1, *a*) та виділимо її разом зі стояком (рис. 4.1, *б*). До умовної ланки пред'явимо такі вимоги: нехай її момент інерції $I_{зв}$ і момент сил $M_{зв}$, якими вона навантажена, будуть такими, що закон руху умовної ланки буде повністю співпадати з законом руху ланки I заданого механізму, тобто для будь-якого моменту часу буде справедливим рівняння $\omega_1 = \omega_m$, де ω_1 - кутова швидкість кривошипу I заданого механізму, ω_m - кутова швидкість умовної ланки (моделі).

Це означає, що умовна ланка зі стояком є своєрідною динамічною моделлю машинного агрегату. Таким чином, якщо визначити закон руху цієї простої моделі (рис. 4.1, *б*), то автоматично стане відомим дійсний закон руху початкової ланки заданого механізму. Зазначимо, якщо заданий механізм має кривошип, то його доцільно вибрати за рухому ланку динамічної моделі.

Підсумуємо викладене. Побудова динамічної моделі машинного агрегату полягає в заміні заданого багатоланкового механізму, навантаженого довільною

системою сил та моментів, простою динамічною моделлю (рис. 4.1, б) – однією умовною рухомою ланкою зі стояком. При цьому, всі сили і моменти, що прикладені до заданого механізму, замінені, як правило, одним зведеним моментом, що прикладений до умовної ланки. Отже $M_{зв}$ є еквівалентом до всього навантаження, прикладеного до машинного агрегату. Так само маси всіх ланок замінені моментом інерції умовної ланки - зведеним моментом інерції $I_{зв}$.

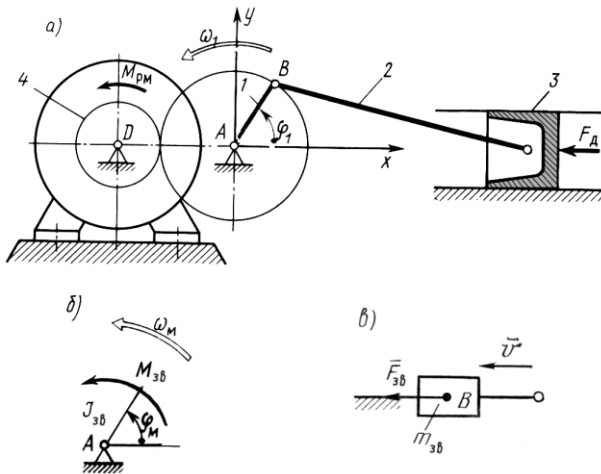


Рис. 4.1

Таким чином, побудова динамічної моделі полягає в зведенні сил – визначенні $M_{зв}$ і в зведенні мас – визначенні $I_{зв}$. При цьому, щоб динамічна модель була адекватна заданому механізму, необхідно (слідє з рівняння Лагранжа II роду, принципу можливих переміщень), щоб при зведенні сил була витримана умова рівності елементарних робіт всіх сил і моментів, прикладених до

ланок реального механізму, і зведеної сили; при зведенні мас - умова рівності кінетичних енергій мас реального механізму і зведеного моменту інерції моделі.

Наголосимо: побудова динамічної моделі дає змогу, розв'язуючи задачі динаміки, розглядати не весь складний машинний агрегат з багатьма ланками, що мають різні маси та на які діють різні сили, а одну умовну ланку з однією еквівалентною масою (чи моментом інерції) із прикладеною до неї, як правило, однією силою (чи моментом).

Зазначимо, що в загальному випадку розрізняють дві динамічні моделі: з розподіленою масою (рис. 4.1, б), та із зосередженою масою (рис. 4.1, в). Остання застосовується, переважно, якщо в складі механізму немає жодної ланки, що здійснює обертальний рух.

§ 4.2. Зведення сил та мас

При дослідженні руху механізму зручно замінити усі сили та моменти, звівши їх до однієї ланки, еквівалентною з точки зору динаміки, силою чи моментом сил. При цьому необхідно, щоб елементарна робота на розглядуваному можливому переміщенні, або потужність, що розвивається замінюючою силою чи моментом, була рівна, відповідно, сумі елементарних робіт або потужностей, що розвивають сили та моменти, які прикладені до ланок механізму на цьому ж переміщенні.

Сили чи моменти, що задовольняють цій умові, називають *зведеними силами* та *моментами*. Ланка, до якої зводяться сили та моменти (маси), називається *ланкою*

зведення, а точка прикладання зведеної сили – *точкою зведення*. Зазвичай за ланку зведення приймають ту ланку, за узагальненою координатою якої проводяться дослідження механізму. Частіше це початкова ланка, головний вал робочої машини або вихідний вал машини-двигуна.

Для визначення зведеної сили чи моменту може бути використана рівність

$$P_{3B} = \sum_1^n P_i, \quad (4.1)$$

де P_{3B} - потужність, що розвиває зведена сила чи зведений момент; $\sum_1^n P_i$ - сумарна потужність усіх сил та моментів, що підлягають зведенню.

Потужність P_{3B} може бути представлена як

$$P_{3B} = M_{3B}\omega, \text{ або } P_{3B} = F_{3B}V_B, \quad (4.2)$$

де M_{3B} – зведений момент; ω - кутова швидкість ланки зведення; F_{3B} – величина зведеної до точки B сили; V_B - швидкість точки зведення (рис. 4.1, *в*).

Права частина рівності (4.1) в розгорнутому вигляді може бути представлена так:

$$\sum_1^n P_i = \sum_1^n F_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i, \quad (4.3)$$

де F_i, M_i – сила і момент, які прикладені до i -ої ланки; v_i – швидкість точки прикладання сили F_i ;

α_i – кут, утворений силою F_i та вектором швидкості v_i ;

ω_i – кутова швидкість i -ої ланки.

З рівнянь (4.2) та (4.3) отримуємо:

$$M_{3B} = \sum_1^n \left(F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \right), \quad (4.4)$$

$$F_{3B} = \sum_1^n \left(F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + M_i \frac{\omega_i}{v_B} \right) \quad (4.5)$$

Зустрічається таке визначення: зведеним моментом (силою) називають момент (силу), що умовно прикладений до ланки зведення, миттєва потужність якого дорівнює сумі миттєвих потужностей усіх сил і моментів, що діють на ланки механізму.

Наголосимо, що при заданих силах F_i та моментах M_i визначення зведеного моменту чи зведеної сили не являє значних труднощів і може бути легко проведене, наприклад, якщо для кожного досліджуваного положення механізму буде побудований план швидкостей.

Зазначимо, що деколи окремо зводять рушійні сили, сили опору, сили ваги і т.ін. Формули (4.4), (4.5) залишаються справедливими в усіх випадках, потрібно лише вказати, які сили зводяться.

Зведення мас. Заміна мас рухомих ланок механізму зведеною масою, зосередженою в довільно вибраній точці ланки зведення, або зведеним моментом інерції виконується на основі еквівалентності миттєвих значень кінетичних енергій моделі $T_{\text{мод}}$ та всього механізму $T_{\text{мех}}$

$$T_{\text{мод}} = T_{\text{мех}}.$$

Кінетична енергія плоского механізму для будь-якого його положення дорівнює сумі кінетичних енергій усіх його рухомих ланок T_i і в загальному випадку може бути представлена у вигляді

$$T_{\text{мех}} = \sum_1^n T_i = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

де I_{si} – момент інерції i -ої ланки відносно осі, що проходить через центр мас s_i перпендикулярно площині руху;

ω_i – кутова швидкість i -ої ланки;

m_i – маса i -ої ланки;

v_{si} – швидкість центру мас i -ої ланки.

Вирази кінетичної енергії $T_{\text{мод}}$ для ланки зведення, або точки зведення:

$$T_{\text{мод}} = \frac{I_{3B} \omega^2}{2}, \text{ або } T_{\text{мод}} = \frac{m_{3B} v_B^2}{2}. \quad (4.6)$$

У відповідності з умовою динамічної еквівалентності механізму та моделі отримаємо

$$\frac{I_{3B} \omega^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

$$\text{або } \frac{m_{3B} v_B^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right), \text{ звідки}$$

$$I_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 + m_i \left(\frac{v_{si}}{\omega} \right)^2 \right\}, \quad (4.7)$$

$$m_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left(\frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 + m_i \left(\frac{v_{si}}{v_B} \right)^2 \right\}. \quad (4.8)$$

Зустрічаються такі визначення: - зведеним моментом інерції називається такий умовний момент інерції, кінетична енергія якого у кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок;

- зведена маса являє собою таку умовну масу, зосереджену в деякій точці зведення, кінетична енергія якої в кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок.

Зведені сила та маса згідно рівнянь (4.4)-(4.8) залежать від співвідношень, відповідно, швидкостей ланок механізму до швидкості ланки зведення та квадратів цих відношень. Ці співвідношення, в загальному випадку, залежать тільки від положення механізму, але вони будуть однаковими при будь-якому законі руху механізму. Отже, зведена сила і маса, як правило, є величинами змінними, періодичними функціями, які залежать від узагальненої координати механізму.

З викладеного робимо висновок, що модель, якою замінюється механізм, є умовним тілом тому, що в загальному випадку її момент інерції (маса) є змінними, тоді як реальні фізичні тіла мають постійні моменти інерції (маси). Лише в окремих випадках, коли передатне

відношення механізму є сталим (наприклад, зубчасті, фрикційні механізми, шарнірний паралелограм та інші), зведений момент інерції постійний.

Таким чином, оскільки $I_{зв}, M_{зв}$ не залежать від закону руху, зведення мас та сил можна виконувати і не знаючи законів руху механізму. Отже, розв'язуючи задачі динаміки, цілком можливо (і потрібно) спочатку побудувати динамічну модель механізму, виконавши зведення сил та мас, а потім вже знаходити закон її руху.

§ 4.3. Рівняння руху механізму

Для визначення законів руху початкових ланок за заданими силами використовуються рівняння, що називаються рівняннями руху механізму. Число цих рівнянь дорівнює числу ступенів рухомості механізму.

Рівняння руху механізму можуть бути представлені в різних формах. Для механізмів з одним ступенем вільності одна з найпростіших форм рівнянь отримується на основі теореми про зміну кінетичної енергії: зміна кінетичної енергії механізму на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх сил, що діють на ланки механізму на цьому самому переміщенні. Цей закон подають у вигляді рівняння

$$T - T_0 = \sum A, \quad (4.9)$$

де T – кінетична енергія механізму в довільному положенні; T_0 – кінетична енергія механізму в положенні, що приймається за початкове; $\sum A$ – алгебраїчна сума робіт

усіх сил і моментів, що прикладені до механізму на деякому переміщенні.

Роботу здійснюють усі активні сили і моменти та сили тертя у всіх кінематичних парах механізму.

Рівняння руху в енергетичній формі. Зведемо усі сили і моменти механізму з одним ступенем вільності до однієї ланки зведення, тобто замінимо розглядуваний механізм його динамічною моделлю. Оскільки все навантаження, прикладене до моделі, виражається зведеним моментом M_{3B} , то права частина рівняння (4.9) дорівнює

$$\Sigma A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi, \quad (4.10)$$

а саме рівняння (4.9), враховуючи (4.6), можна записати у вигляді

$$\frac{I_{3B}\omega^2}{2} - \frac{I_{3B0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi. \quad (4.11)$$

Рівняння (4.11) називають *рівнянням руху механізму в енергетичному виді*, або – в формі рівняння кінетичної енергії. Загалом верхня межа φ інтегрування в (4.11) вважається змінною.

Якщо все навантаження, що прикладене до механізму, залежить тільки від його положення (і не залежить від ω), то рівняння (4.10) розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}} + \frac{I_{3B0}}{I_{3B}} \omega_0^2}. \quad (4.12)$$

При заданих функціях I_{3B} , M_{3B} і відомій швидкості ω_0 в початковий момент, рівняння (4.12) дозволяє визначити значення ω при різних переміщеннях ланки зведення. Таким чином можна отримати дійсний закон руху механізму.

Якщо дослідження механізму починається з моменту пуску (тобто $\omega_0 = 0$), то (4.12) набуде вигляду:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}}}.$$

Аналогічно (4.11) можна представити рівняння руху механізму, якщо всі сили і маси зводяться до вибраної точки зведення B :

$$\frac{m_{3B} v_B^2}{2} - \frac{m_{3B0} v_{B0}^2}{2} = \int_{s_0}^s F_{3B} ds. \quad (4.13)$$

Рівняння руху в диференційній формі. Рівняння руху механізму в енергетичній формі (4.11) використовується, переважно, у випадках коли зведені силові фактори залежать від положень ланок. В інших випадках використовується диференційне рівняння руху механізму, яке можна отримати, продиференціювавши рівняння (4.11) по координаті:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{I_{3B} \omega^2}{2} \right) = M_{3B},$$

або, враховуючи, що в загальному випадку змінною величиною є не тільки ω , але й I_{3B} , після нескладних перетворень одержимо:

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2 dI_{3B}}{2d\varphi} = M_{3B}. \quad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називається *рівнянням руху в диференційній формі*, оскільки шукана змінна величина – кутова швидкість ω початкової ланки, знаходиться під знаком похідної.

У випадку, коли досліджуваний механізм має $I_{3B} = const$, то рівняння (4.14) спрощується і має вигляд:

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} = M_{3B}.$$

Для визначення кутового прискорення початкової ланки розв'яжемо рівняння (4.14) відносно $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{M_{3B}}{I_{3B}} - \frac{\omega^2}{2I_{3B}} \frac{dI_{3B}}{d\varphi}.$$

Похідна $\frac{dI_{3B}}{d\varphi}$ обчислюється чисельним диференціюванням на ЕОМ, або графічним

диференціюванням, якщо це не можливо зробити аналітично.

§ 4.4 Режими руху

Дослідження динаміки машин полягає, в першу чергу, у визначенні та аналізі часткових рішень, наведених вище диференційних рівнянь руху, що відповідають характерним режимам роботи.

Процес руху машини в загальному випадку складається з трьох режимів: *розбігу*, *усталеного руху*, *вибігу*. Це наочно показує діаграма залежності швидкості руху початкової ланки від часу (рис. 4.2). При усталеному русі швидкість головного вала змінюється періодично, інколи вона може бути постійною. Розбіг та вибіг – це перехідні режими, які характеризуються неперіодичними змінами швидкості вала машини (початкової ланки). З цих міркувань часто розрізняють два режими: усталений рух та перехідні процеси.

Усталений рух. Під усталеним рухом будемо розуміти такий режим роботи, при якому вхідний параметр двигуна (параметри u , що керує процесом перетворення енергії) лишається постійним ($u = u_0 = const$), а кутова швидкість вихідного вала двигуна або лишається постійною, або коливається біля деякого середнього значення ω_0 , причому найбільші відхилення малі у порівнянні з цим середнім значенням. Іншими словами, в цьому випадку:

$$\overset{\square}{\varphi} = \overset{\square}{\omega}(t) = \omega_0 + \overset{\square}{\psi}(t); \quad \left| \overset{\square}{\psi}(t) \right|_{\max} \ll \omega_0. \quad (4.15)$$

Усталеним рухом машини називається рух, при якому її кінетична енергія є періодичною функцією часу. Проміжок часу (t_u), протягом якого швидкість головного вала набуває свого початкового значення, пройшовши через ω_{\max} та ω_{\min} , називають *циклом усталеного руху*.

Оскільки швидкості на початку та в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ($\omega_o = \omega$), то рівняння руху (4.9) набуває вигляду:

$$A_p = A_o.$$

Рівність (4.15) – основне енергетичне рівняння усталеного руху. При усталеному русі робота рушійних сил за один цикл дорівнює роботі сил опору (виробничого та шкідливого). У середині циклу ця рівність, як правило, не зберігається, а тому мають місце коливання швидкості початкових ланок. Якщо, $A_p > A_o$ - рух механізму прискорений і навпаки.

Перехідні процеси. *Розбіг* - це режим руху, у процесі якого машина зі стану спокою приходить до усталеного руху. Рівняння руху набуває вигляду:

$$\frac{I_{зв.} \omega^2}{2} = A_p - A_o.$$

Оскільки кінетична енергія завжди додатна, то для можливості пуску машини необхідно, щоб робота рушійних сил була більшою за роботу сил опору, $A_p > A_o$. Надлишок роботи A_p витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто збільшення швидкості рухомих мас.

Вибіг (зупинка) – це режим руху, в процесі якого машина переходить від усталеного руху до стану спокою. Переважно при вибігу двигун відключається або переводиться в генераторний режим, при якому вводиться додатковий гальмівний момент.

Таким чином, у період розбігу кінетична енергія машини збільшується за рахунок надлишку роботи рушійних сил над роботою сил опору ($A_p > A_o$); під час усталеного руху кінетична енергія на початку та в кінці кожного циклу однакова ($A_p = A_o$); у період вибігу кінетична енергія повністю поглинається роботою сил опору.

Перехідні процеси при зміні навантаження. Часто усталений рух чергується із розбігом (при підвищеннях швидкісного режиму) та гальмуваннями (при зменшенні швидкості). Так працює, наприклад, автомобільний двигун.

Відмітимо, що багато механізмів не працюють у режимі усталеного руху.

§ 4.5. Визначення закону руху механізму

Визначення закону руху механізму полягає у визначенні закону руху її початкової ланки. Початковою ланкою в більшості механізмів є кривошип.

Для визначення закону руху початкової ланки механізму, яка визначає рух усіх інших ланок, використовуються рівняння руху (4.11) - (4.14). Розв'язуючи їх відносно швидкості руху початкової ланки, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу.

Неусталений режим. Розглянемо один з найпростіших випадків: механізм навантажений силовими факторами, що є функціями лише переміщення своїх точок прикладання.

Для визначення закону руху механізму при неусталеному режимі повинні бути відомі такі вихідні дані: кінематична схема механізму; маси, моменти інерції та положення центрів мас усіх рухомих ланок; механічні характеристики силових факторів; початкові умови руху. Останнє важливо для дослідження саме неусталеного режиму. Нехай зведений момент інерції розглядуваного механізму має змінну величину $I_{3B} = \text{var}$. Потрібно визначити залежність швидкості початкової ланки від її кута повороту, тобто $\omega(\varphi)$. Така задача є досить розповсюдженою (механізми дизель-компресорів, бурових верстатів і підймальних кранів з приводом від ДВЗ, різних пристроїв з пневмоприводом і т. ін.).

Для розв'язку даної задачі використовують рівняння руху механізму в енергетичному виді, яке розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\Sigma A}{I_{3B}} + \frac{I_{3B_0}}{I_{3B}} \omega_0^2}, \quad (4.16)$$

де ΣA визначається з (4.10).

Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Для цього будують діаграми $M_{3B}(\varphi)$, $I_{3B}(\varphi)$, $\Sigma A(\varphi)$ (див. § 4.7).

З рівняння (4.16), із урахуванням початкових умов, обчислюється для кожного положення механізму кутова

швидкість ω . У такій послідовності виконують розрахунок чисельним методом із застосуванням ЕОМ.

Для визначення часу t руху механізму можна скористатися умовою:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

звідки дістанемо:

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)},$$

або:

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (4.17)$$

Якщо дослідження руху механізму ведеться з початку пуску, то $t_0 = 0$ і (4.17) набуває вигляду:

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (4.18)$$

За формулами (4.17) та (4.18) можна визначити час руху механізму як функції кута повороту φ початкової ланки. Інтеграл у правій частині (4.17), (4.18) може бути визначений графічно, якщо побудувати графік $\frac{1}{\omega(\varphi)}$ за відомою функцією $\omega(\varphi)$. За графіками $\omega(\varphi)$ і $t(\varphi)$, якщо виключити з них кут φ , можна дістати функцію $\omega(t)$ - залежність кутової швидкості ω від часу t .

Кутове прискорення ланки зведення визначається графічним диференціюванням функції $\omega(t)$.

Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать як від положення, так і швидкості, або силами, що залежать лише від швидкості, в конспекті не розглядається. Розв'язок цих задач наведено у повному курсі ТММ.

§ 4.6 Усталений режим. Нерівномірність руху механізму

Усталеним рухом називається такий рух, при якому швидкість початкової ланки (узагальнена швидкість) є періодичною функцією часу. На рис. 4.2 показано для усталеного руху приклад залежності швидкості руху початкової ланки механізму від часу t . Як бачимо, кутова швидкість періодично коливається відносно деякого постійного середнього значення.

Нерівномірність ходу машини є наслідком двох факторів: зміни упродовж циклу миттєвих значень зведених моментів рушійних сил і сил опору; періодичної зміни зведеного моменту інерції механізму.

Нерівномірність обертання оцінюється коефіцієнтом нерівномірності

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}},$$

де ω_{\max} , ω_{\min} , ω_{cp} - відповідно максимальна, мінімальна та середня за цикл швидкість.

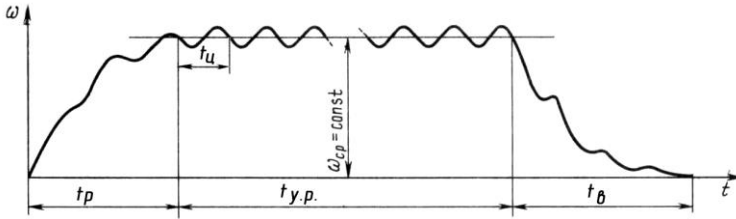


Рис. 4.2.

Величина ω_{cp} рахується за формулою $\omega_{cp} = \frac{\pi n}{30}$, у якій n – частота обертання початкової ланки.

Коефіцієнт нерівномірності характеризує розмах коливань швидкості по відношенню до її середнього значення. Очевидно, що чим менше δ , тим рівномірніше рухається початкова ланка.

Для кожного виду машин є своя допустима величина коефіцієнта нерівномірності δ , встановлена практикою. Значення допустимих коефіцієнтів нерівномірності руху наведено у технічних довідниках; так для помпи 1/5-1/30; для металообробних верстатів 1/20-1/50, для ДВЗ 1/80-1/100, для електричних генераторів змінного струму 1/200-1/300, для авіаційних двигунів та турбогенераторів 1/200 і менше.

Коефіцієнт нерівномірності є величина досить мала, що дозволяє прийняти середню величину кутової швидкості рівного середньому арифметичному з її максимального і мінімального значень.

Звичайно, при проектуванні механізму задаються наперед бажаними для механізму значеннями коефіцієнта

нерівномірності руху та середньої швидкості обертання головного вала.

В усталеному режимі працюють дуже багато машин. Найкращі умови для роботи таких машин – абсолютно рівномірне обертання їх головного вала. Як відомо, у загальному випадку швидкість початкової ланки механізму при усталеному русі є змінною величиною. Коливання швидкості початкової ланки за час усталеного руху бувають двох різних типів: *періодичні та неперіодичні*.

Періодичними коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

Неперіодичні коливання швидкостей залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т.п. Раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини і, оскільки ці коливання не мають певного циклу, то вони називаються неперіодичними. У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Коливання швидкості обох типів небажані як з точки зору динаміки машини, так і виконання нею технологічного процесу. Коливання швидкості спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують *ККД* машини, довговічність та надійність її роботи.

Оскільки коливання швидкості повністю усунути неможливо, необхідно по можливості їх зменшити.

Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини або механізму має суттєве практичне значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

Розглянемо шляхи розв'язування цієї задачі. Маса є мірою інертності тіла. Всі ланки механізму мають інертність. Ця властивість полягає в тому, що чим інертніше матеріальне тіло, тим повільніше проходить зміна його швидкості, яка викликана дією прикладених до нього сил. Таким чином, щоб отримати обертання головного вала з нерівномірністю, що не перевищує заданої величини, інертність цього вала з усіма зв'язаними з ним деталями необхідно зробити достатньо великою. Практично, це збільшення інертності досягається посадкою на один із валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь має назву маховик (колесо з великим моментом інерції). Підбираючи момент інерції маховика, можна забезпечити обертання головного вала машини із заданим коефіцієнтом нерівномірності.

Дія маховика полягає у тому, що при перевищенні роботи A_p над роботою A_0 маховик приймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції, не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота $A_0 > A_p$, маховик віддає накопичену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії машини. Таким чином, основне призначення маховика є

обмеження коливань кутової швидкості в межах, що встановлені величиною коефіцієнта нерівномірності δ .

Акумулююча здатність маховика використовується не лише для забезпечення допустимої нерівномірності ходу машини. В деяких машинах (у яких корисне навантаження періодично змінюється в значних межах) маховик дозволяє використовувати накопичену енергію для подолання підвищених корисних навантажень без збільшення потужності двигуна. Маховик неодмінно застосовується в машинах ударної дії – молотах, прокатних станах, дробарках і т. ін., допомагаючи електродвигуну при пікових навантаженнях. В автомобілях маховик сприяє рушати машині з місця.

Регулювання періодичних коливань швидкості здійснюється за допомогою маховика, що виконаний, як правило, у вигляді колеса з розвинутим ободом (з великим моментом інерції).

Регулювання неперіодичних коливань за допомогою маховика можливо здійснити, якщо вони незначні. При значних неперіодичних коливаннях встановлюють механізми, що називаються регуляторами – які регулюють закони зміни рушійних сил або сил опору.

§ 4.7. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера (за допомогою діаграми енергомас)

Переходимо до наступної важливої задачі динаміки механізмів та машин - про визначення найвигідніших співвідношень між силами, масами та швидкостями ланок механізму, які забезпечують заданий режим його руху.

Визначення моменту інерції маховика за заданою величиною δ виконується в процесі проектування машини та складає одну із задач її динамічного синтезу.

Для машин, що виконують різні технологічні процеси, коливання ω допустимі лише в певних межах, встановлених практикою експлуатації обладнання.

Розглянемо задачу, в якій необхідно знайти величину зведеного моменту інерції ланки зведення, при якому її кутова швидкість не виходила б за наперед задані значення. Розв'язок даної задачі зводиться до визначення моменту інерції маховика.

Задачу будемо розв'язувати методом Віттенбауера, графоаналітичним методом за допомогою побудови діаграми енергомас – залежності кінетичної енергії механізму від зведеного моменту інерції.

Для визначення моменту інерції махового колеса вважають заданими або попередньо знайденими:

- схема механізму та розміри ланок;
- маси і моменти інерції ланок;
- середня кутова швидкість ланки зведення ω_{cp} ;
- коефіцієнт δ нерівномірності руху ланки зведення;
- сили, прикладені до ланок механізму.

Виберемо за початкову ланку головний вал механізму, що виконує неперервний обертальний рух.

Послідовність визначення моменту інерції маховика за методом Віттенбауера:

- будуються n (дванадцять) рівновіддалених за кутом повороту кривошипа планів положень механізму;
- для побудованих планів положень будуються плани швидкостей;

- для n положень механізму за формулою (4.4) визначаються зведені моменти сил, при цьому для робочих машин знаходяться зведені моменти сил корисного опору M_o , а зведені моменти рушійних сил M_p наближено приймаються такими, що мають деяке постійне значення, поки що невідоме. Для машин – двигунів, навпаки, знаходяться зведені M_p , а M_o приймаються постійними;
- будується графік зведеного моменту сил корисного опору (для машин двигунів - рушійних сил) (рис. 4.3, а). Всі графіки будуються для одного циклу усталеного руху.
- графічно інтегруючи зведений момент сил корисного опору, отримуємо графік робіт сил опору $A_o = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_o d\varphi$.

Графік робіт рушійних сил для робочих машин з врахуванням прийнятих припущень, а також враховуючи те, що за один цикл усталеного руху $A_p = A_o$, що являє собою пряму лінію, яка з'єднує початок і кінець графіка роботи сил опору (рис. 4.3, б) (для машин-двигунів навпаки);

- віднявши від ординат графіка робіт рушійних сил ординати робіт сил корисного опору, будуємо графік надлишкової роботи, який одночасно є графіком приросту кінетичної енергії (рис. 4.3, в). $A_p - A_o = \Delta T$;
- для побудованих положень механізму за формулою (4.7) визначаємо зведені до кривошипа моменти інерції механізму (без маховика).

Зауважимо, що в результаті виконання перших трьох пунктів та даного – механізм приводиться до динамічної моделі;

- будуємо графік зведеного моменту інерції як функцію кута повороту кривошипа, розмістивши вісь ординат перпендикулярно до осі ординат на попередніх графіках (рис. 4.3, *з*);
- шляхом графічного виключення спільного параметра φ з діаграм приросту кінетичної енергії та зведеного моменту інерції будуємо графік приросту кінетичної енергії як функції зведеного моменту інерції – діаграму енергомас (4.3, *д*).

Підкреслимо, що цю діаграму накреслено для механізму без маховика. Такою ж діаграма залишиться і для механізму з маховиком. Але початок осей координат зміститься: вліво, оскільки зведений момент інерції буде більшим на величину моменту інерції маховика; і до низу, оскільки за такої ж самої ω_{cp} має збільшитись кінетична енергія механізму. Таким чином, при зменшенні величини δ зростає зведена маса механізму та його кінетична енергія, яка необхідна для забезпечення руху механізму з заданою середньою швидкістю;

- до кривої діаграми енергомас проводяться дотичні під кутами ψ_{\max}, ψ_{\min} ,

$$\operatorname{tg} \psi_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\mu_I}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{cp}^2 (1 \pm \delta),$$

де $\mu_I, \mu_{\Delta T}$ - відповідно масштаби по осі абсцис і ординат діаграми енергомас.

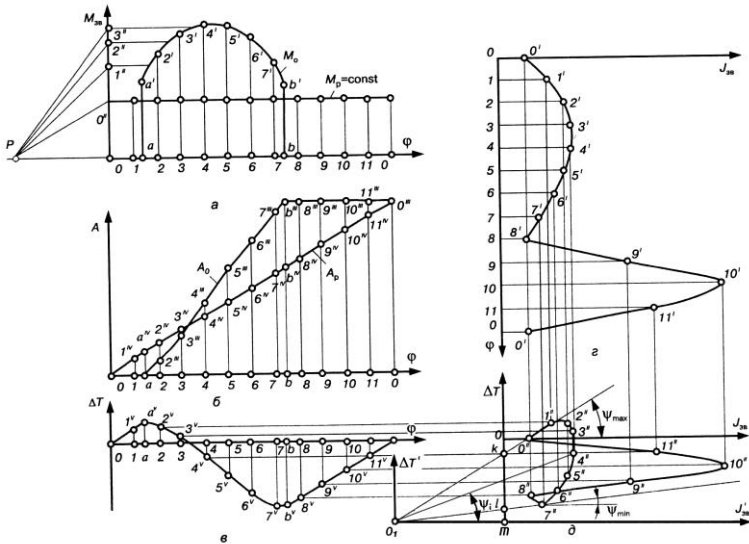


Рис. 4.3

Точка перетину дотичних є початком нової системи координат діаграми енергомас механізму з маховиком.

Величина моменту інерції маховика визначається за формулою

$$I_M = \mu_l Q_l m ,$$

де $Q_l m$ - відстань, на яку зміститься вісь ординат.

При малих значення коефіцієнта δ внаслідок невеликої різниці між кутами ψ_{\max}, ψ_{\min} точка перетину дотичних часто знаходиться за межами рисунка. У цьому випадку користуються формулою:

$$I_M = \frac{\mu_{\Delta T}(kl)}{\omega_{CP}^2 \delta} ,$$

де kl – відстань по осі ординат діаграми енергомас.

Для зменшення маси та габаритів маховика доцільніше його встановлювати на найшвидкохіднішому валі, оскільки кінетична енергія маховика, в результаті зміни якої здійснюється регулювання швидкості, прямо пропорційна ω^2 . Якщо маховик встановлюється не на ланці зведення, а на іншій ланці механізму, то повинна задовольнятися умова рівності кінетичної енергії:

$$\frac{I_M \omega^2}{2} = \frac{I_i \omega_i^2}{2},$$

звідки

$$I_i = I_M \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2 = I_M u_{i1}^2,$$

де I_i – момент інерції маховика, встановленого на i -й ланці; ω_i - кутова швидкість цієї ланки; u_{i1} - передатне відношення. Таким чином, чим більша кутова швидкість i -ї ланки, тим менший момент інерції маховика, і, відповідно менші його маса та габарити.

Після визначення моменту інерції маховика та місця його встановлення розраховують його основні розміри.

Відмітимо, що за допомогою кривої енергомас легко встановити залежність кутової швидкості ланки зведення як функції кута повороту φ . Вибираємо на цій кривій будь-яку точку (точка 4'', рис. 4.3, д) та з'єднуємо її з початком координат (точка O_I). Швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається вибраною точкою, знаходимо за формулою:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2T}{I}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\Delta T}}{\mu_1} \operatorname{tg}\psi_i}. \quad (4.19)$$

За формулою (4.19) будують графік $\omega(\varphi)$. Порівнюючи між собою кути ψ , можна наочно прослідкувати, як змінюється кутова швидкість ланки зведення при зміні її положення.

Відмітимо також, що за допомогою кривої енергомас можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху механізму. Для цього з початку системи координат (т. O_1 , рис. 4.3, δ) проводимо дві дотичні до кривої енергомас. Вимірюємо кути ψ_{\min}, ψ_{\max} . Коефіцієнт нерівномірності руху визначаємо за формулою:

$$\delta = \frac{\mu_{\Delta T}}{\mu_1} \frac{\operatorname{tg}\psi_{\max} - \operatorname{tg}\psi_{\min}}{\omega_{cp}^2}.$$

Визначення розмірів маховика. Форма маховика, загалом може бути вибрана довільною. Але за конструктивними міркуваннями, найбільш зручною є форма у вигляді диска з важким ободом, колеса зі спицями або форма, яка симетрична відносно головних осей інерції. При цій формі легше за все досягається співпадання вісі обертання з однією із головних центральних осей інерції. Це дозволяє уникнути додаткових тисків на вальниці вала, на якому розміщений маховик.

Якщо маховик виконаний у вигляді колеса зі спицями (рис. 4.4), то моментами інерції з'єднувальних частин нехтують і наближено вважають, що маса маховика

рівномірно розподілена по колу радіуса $R = D/2$ - геометричному місцю центрів ваги поперечних перерізів обода. Тоді момент інерції маховика можна виразити так (використовується формула для моменту інерції тонкого кільця):

$$I_M = mR^2 = \frac{mD^2}{4}, \quad (4.20)$$

де m – маса маховика.

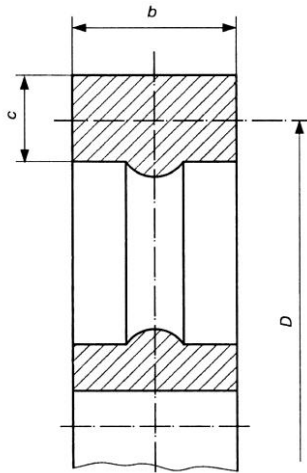


Рис. 4.4

Добуток маси обода маховика на квадрат його діаметра mD^2 називається *маховим моментом* або *характеристикою маховика*. Для багатьох деталей машин, що здійснюють обертальний рух (муфти, ротори електродвигунів тощо), ця характеристика наводиться у довідниках. Характеристика маховика має одиницю виміру $кг \cdot м^2$. За цією характеристикою можна визначити необхідну масу маховика, якщо задано або вибрано його

діаметр, значення якого визначається з суто конструктивних міркувань.

З рівняння (4.19) слідує, що при визначеній величині I_m вага маховика обернено пропорційна квадрату його діаметра D і для зменшення металоемкості вигідно брати більші діаметри. Але це заперечує вимозі малих габаритів та лімітується допустимою кутовою швидкістю.

Для запобігання небезпеці можливого розриву маховика відцентровими силами його діаметр D вибирають таким чином, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустиму для матеріалу маховика величину. Для перевірки діаметра маховика можна рекомендувати таку залежність:

$$D \leq \frac{60 v_{\text{доп}}}{\pi n}, \quad (4.21)$$

де $v_{\text{доп}}$ - допустима колова швидкість обода маховика, яка не повинна перевищувати для сталевих маховиків $70 - 120$ м/с, для чавунних - $30 - 45$ м/с; n - частота обертання маховика, хв^{-1} . Зауважимо, що хромонікелеві маховики допускають колову швидкість до 150 м/с.

Маса обода маховика практично може бути взята:

$$m_{\text{об}} = 0,9m,$$

тоді ширина b обода визначається з виразу:

$$m_{\text{об}} = \pi D b c \rho.$$

Тут $c = 0.4b$; ρ - густина матеріалу, кг/м^3 ; для сталевих маховиків ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) матимемо

$$b = 0,01\sqrt{m/D}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає побудова динамічної моделі?
2. Які умови мають бути витримані при зведенні сил та мас?
3. Запишіть рівняння руху механізму в енергетичній та диференційній формах.
4. Запишіть формулу, яка визначає зведений момент інерції, зведену масу.
5. Від чого залежать зведені сила та маса?
6. За якими формулами визначаються зведений момент та зведена сила?
7. Назвіть режими руху машини.
8. Запишіть формулу, яка визначає коефіцієнт нерівномірності руху.
9. Які умови мають бути витримані при зведенні сил та мас?
10. Які механізми встановлюють при значних неперіодичних коливаннях швидкості?
11. Як регулюють значні періодичні коливання швидкості?
12. В чому полягає дія маховика?
13. Послідовність визначення моменту інерції маховика.
14. Що таке характеристика маховика?
15. Як визначається діаметр маховика?