Sur Heisuke Hironaka, docteur honoris causa de l'Université de Nice

Bernard Teissier

La cérémonie s'est tenue le 2 juillet 2002. À cette occasion il a été demandé à Bernard Teissier de présenter le lauréat. En voici le texte.

Madame la Présidente, Monsieur le Représentant de l'Ambassadeur du Japon, Madame la Représentante du Maire de Nice, Mesdames et Messieurs, chers collègues.

C'est une tâche agréable et intéressante d'essayer d'expliquer à nos collègues niçois non mathématiciens et à leurs hôtes quelle sorte de mathématicien ils ont choisi de nommer Docteur *honoris causa* de leur université en la personne de Heisuke Hironaka. Bien sûr, il est connu de tous les mathématiciens pour avoir démontré un des théorèmes les plus importants des mathématiques, la résolution des singularités en géométrie algébrique et reçu la médaille Fields, et il est connu de tous les Japonais pour avoir reçu, le premier de ceux qui sont nés pendant l'ère Showa, l'Ordre de la culture de l'Empereur du Japon.

Mais permettez-moi d'entrer un peu dans les détails. Les singularités dont il s'agit sont celles des variétés algébriques, définies comme ensembles de points de l'espace dont les coordonnées annulent des polynômes. Intuitivement, les singularités sont les points au voisinage desquels la géométrie présente des caractères particuliers. L'ombre portée sur un papier blanc par un morceau de fil de fer bien lisse mais un peu tordu dans l'espace a, sous un éclairage rasant, un point singulier. Bien que nos sens ne puissent pas vraiment distinguer la manière dont la torsion du fil de fer et la direction du faisceau lumineux affectent la nature de la singularité de l'image, les équations qui décrivent la situation, elles, le peuvent.

Le problème de la résolution des singularités est, toujours intuitivement, de montrer que n'importe quelle singularité d'un objet algébrique, en n'importe quelle dimension, est obtenue par un procédé analogue de projection à partir d'un objet sans singularités. Et il s'agit de le construire vraiment, de passer de l'ombre au fil de fer de manière algébrique. Le sujet demande donc un mélange de vision géométrique et de maîtrise algébrique, ainsi qu'une philosophie du rapport entre les deux assez forte pour permettre de trouver son chemin au milieu de difficultés conceptuelles et techniques redoutables.

Le problème était posé depuis le début du XX^e siècle, et ses implications dépassent de loin le domaine strict des singularités. Le résultat a des conséquences dans pratiquement tous les domaines, et la version assez faible récemment démontrée en caractéristique $p > 0$ a aussi des conséquences remarquables en théorie des nombres.

Photo Marc Laurin © Laboratoire Dieudonné, Nice

Cérémonie de remise du diplôme de Dr. Honoris causa
à H. Hironaka – Nice, juillet 2002

Photo Marc Laurin © Laboratoire Dieudonné, Nice

H. Hironaka
Nice, juillet 2002

Oscar Zariski, le maître de Hironaka, avait fait, dans les années 40 à 60, des progrès essentiels, démontrant en particulier le théorème jusqu'à la dimension 3, avec une approche utilisant toute la puissance de l'algèbre moderne, mais dont le rapport avec la géométrie, bien qu'il l'ait développé de manière très originale, était encore marqué par celui de ladite algèbre aux travaux géométriques de Riemann sur les courbes. Il me semble qu'une des originalités des travaux d'Hironaka a été de reprendre à la base – au moins conceptuellement – le rapport entre la géométrie des singularités et l'algèbre ; il a développé une vision nouvelle de ces rapports, et créé ou adapté à son propos les outils algébriques correspondants, par exemple le célèbre théorème de préparation de Weierstrass dont il a grandement étendu le sens et la portée, ainsi que la non moins célèbre méthode du polygone de Newton utilisée par ce dernier pour montrer qu'une courbe était bien, au voisinage d'un point singulier, l'image analytique d'un petit morceau de fil de fer. Bon nombre de ces outils ont d'ailleurs été d'une grande utilité dans des domaines de l'algèbre éloignés de la résolution. J'aime penser que Hironaka a développé le meilleur des trois influences auxquelles il a été soumis : l'approche énergique et en même temps un peu distanciée de l'algèbre commutative et de la géométrie de l'École japonaise qui a commencé sa formation, la rigueur imaginative de Zariski, l'usage de l'abstraction et la recherche du bon cadre comme techniques de démonstration selon la doctrine de Grothendieck.

Mais il faut aussi insister sur l'extraordinaire puissance mathématique nécessaire pour mener à bien la démonstration, et dont je ne peux donner ici aucune idée. Pendant 25 ans l'article de 1964 a été considéré comme un des plus difficiles, sinon le plus difficile, de toutes les mathématiques. La valeur d'une telle opinion est évidemment relative, mais il reste que, le problème restant ouvert en caractéristique positive, pas mal de mathématiciens y avaient réfléchi, et ce n'est que depuis une dizaine d'années que l'on a vu paraître une nouvelle génération de travaux sur la résolution, les uns précisant et donnant un caractère algorithmique à la méthode de Hironaka, les autres explorant des voies différentes. Il faut ajouter qu'après la géométrie algébrique, Hironaka a résolu le problème de la résolution des singularités en géométrie analytique complexe, où se posent de nouveaux problèmes de globalisation, pour la solution desquels il a inventé la théorie du *jardinage des singularités*, encore trop peu connue, et aussi en géométrie réelle.

Les nombreux efforts pour adapter la méthode de Hironaka en caractéristique positive, auxquels il a contribué et contribue, n'ont pas jusqu'ici abouti, et les meilleurs résultats à ce jour en ce qui concerne le problème « pur » restent en dimension au plus 3 et sont ceux d'Abhyankar, un autre élève de Zariski, suivis de travaux de Moh et Cossart, mais il faut signaler un progrès récent très important, par des méthodes très différentes, dû à J. De Jong et d'autres.

Mais Hironaka n'est pas l'homme d'un seul théorème. Avant, pendant, et après la résolution il a apporté des contributions fondamentales à toute la géométrie algébrique et analytique, réelle ou complexe.

Je souhaite signaler particulièrement la théorie des ensembles sous-analytiques où Hironaka introduit, dans un domaine dominé depuis les années 50 par les méthodes de projection, une méthodologie radicalement nouvelle. Celle-ci consiste à tout simplifier par des transformations biméromorphes (celles qui servent pour la résolution des singularités en géométrie analytique). Cette théorie, que grâce à lui nous pouvons désormais imaginer comme celle de tous les ensembles que l'on peut « dessiner » dans un espace euclidien avec un crayon analytique multidimensionnel paramétré par un nombre fini de boules, a de très nombreuses applications dans des domaines « concrets » des mathématiques comme la théorie du contrôle ou les équations aux dérivées partielles. Dans le cours du développement de cette philosophie de la simplification sont nées des techniques, comme celle d'aplatissement, qui elles aussi ont des applications bien au-delà du problème qui les a vu naître.

Il faut signaler aussi les travaux sur l'équisingularité, autre sujet où se rencontrent l'algèbre et la géométrie, mais ici cette dernière est plutôt sous la forme de topologie puisqu'il s'agit de déterminer algébriquement les points d'un espace analytique singulier au voisinage desquels celui-ci « a la même forme ». Là aussi, la philosophie de la simplification biméromorphe a permis une nouvelle approche et aujourd'hui, dans ce domaine, les conditions d'équisingularité étudiées par Hironaka jouent un rôle majeur. Il a aussi apporté une contribution très importante à la théorie de l'équisingularité élaborée par Zariski sur des bases très différentes.

Devant passer sous silence de nombreux autres travaux, qui ont aussi une descendance très vivace aujourd'hui, j'espére en avoir assez dit pour esquisser le portrait mathématique d'un des grands géomètres de notre époque. Je veux maintenant parler un peu de l'homme, élevé dans une nombreuse famille de la préfecture de Yamaguchi, jeune pianiste de talent, qui a choisi de devenir mathématicien. Remarqué par Zariski lors d'un voyage au Japon, il vient rejoindre à Harvard les élèves, choisis avec une grande exigeance, de celui-ci, et soutient en 1960 son PhD, « on the theory of birational blowing-up », qui contient des idées qui connaîtront une descendance magnifique chez S. Mori 25 ans après. Après quelques années à Brandeis et Columbia, il devient professeur à Harvard, où il restera jusqu'à son départ comme « Emeritus » pour concentrer ses activités au Japon. Il faut dire que depuis la fin des années 70, il avait avec détermination mis au service du développement des mathématiques au Japon son immense notoriété, en créant une fondation destinée à aider les étudiants japonais à travailler dans les meilleures conditions dans leur pays et à l'étranger, et aussi à intéresser à des sujets scientifiques des lycéens sélectionnés, par exemple en les réunissant dans des séminaires assez informels avec des scientifiques japonais et étrangers. Recueillir les fonds, mettre tout cela en place et le faire fonctionner, a demandé, même avec l'aide de sa célébrité, une énergie et une constance prodigieuses, sur une période de plus de vingt ans. Plus récemment il a accepté deux mandats de président de l'université de Yamaguchi, sans doute par sens du devoir envers sa préfecture d'origine.

Enfin il faut que je dise que son influence mathématique s'est exercée non seulement aux USA et au Japon, mais aussi en Europe, particulièrement en France, en Espagne et en Italie, où il a eu des disciples. L'École française de singularités, à laquelle appartient Frédéric Pham qu'un colloque honore cette semaine à Nice, est essentiellement formée d'enfants et petits-enfants mathématiques, parfois communs, de Hironaka, Thom, et Zariski.

En ce qui concerne la France, lors de sa seconde visite à l'IHÉS au début de 1968, deux mathématiciens français âgés à l'époque de 22 ans (il en avait 36), le rencontrant par hasard à la thèse d'un ami commun physicien, et le trouvant sympathique sans savoir qui il était (à leur question sur ses intérêts il avait répondu « je fais un peu d'algèbre commutative »), l'invitèrent après quelques séances de discussion à se joindre à eux pour un séjour de travail avec quelques autres projeté en Scandinavie l'été suivant. Il accepta aussitôt, et cela donna un séjour extraordinaire de trois semaines en Finlande en juillet-août 1968, pendant lequel il expliqua à une dizaine de jeunes mathématiciens et mathématiciennes et physiciens, majoritairement français et parmi lesquels se trouvait F. Pham, et un philosophe, ses premières idées sur la résolution des singularités des espaces analytiques complexes. Ce séjour et les exposés de Hironaka qui le préparèrent furent le début d'une collaboration intense qui se poursuivit en particulier à Nice et Oslo en 1970, à Harvard en 1970-71, Cargèse en 1972 et Pise en 1974, puis un peu partout. Cette histoire fait un peu sentir comment Hironaka ajoute à ses qualités mathématiques un ensemble de qualités que ses amis connaissent bien : une curiosité insatiable et une générosité inépuisable dans de très nombreux domaines, et en particulier ceux des idées et des êtres humains, et enfin un sens de l'humour empreint de tolérance, sur lequel je compte beaucoup lorsque je pense aux insuffisances de ce petit discours, qui n'a pu qu'évoquer, au sens où un Shaman évoque le monde des esprits, une œuvre mathématique majeure par sa profondeur et ses conséquences.

Je n'ai parlé que du passé, laissant à Hironaka de décrire, s'il le désire, ses rêves pour l'avenir, dont je suis sûr qu'ils sont aussi passionnants et généreux que ceux qui l'ont conduit jusqu'ici.

Pour en savoir plus, voici quelques pistes

Une bibliographie commentée intitulée – « resolution of singularities 1860-1999 », sur la résolution a été rédigée par Hauser dans *Resolution of singularities* (Birkhäuser, éd.), Collection Progress in Math, no. 181, 2000, p. 5–27.
L'article où Hironaka prouve la résolution des variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro est : – « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II. », *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), p. 109–203, et p. 205–326.
Il faut citer aussi, pour le cas analytique : – « Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space », *Acta Math. Vietnam. 2*, **2** (1977), p. 103–168.
et J.-M. Arica, H. Hironaka , J.-J. Vicente – « Desingularization theorems », in *Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan* (Madrid) (C. S. de Investigaciones Cientìficas), vol. 30, 1977.
– « Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps », in *Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Pisa) (I. M. L. T. dell'Università di Pisa), 1973, iii, pp. 162.
et, pour la théorie des sous-analytiques : – « Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps », in *Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Pisa) (I. M. L. T. dell'Università di Pisa), 1973, iii, pp. 162.