Le théorème de Cobham

Paul Fermé, Willy Quach, Yassine Hamoudi

14 décembre 2015

Table des matières

1 Introduction

Dans un article publié en 1969, Cobham prouva le théorème suivant concernant les suites automatiques :

Théorème 1 ([Cob69])**.** *Soient $k, l \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants. Si $\underline{a}$ est une suite simultanément k et l automatique, alors $\underline{a}$ est ultimement périodique.*

La preuve originale figurant dans [Cob69] est cependant considérée comme peu intuitive, et plutôt difficile à suivre. Différents auteurs ont donc cherché à en présenter une version simplifiée. Une des principales avancées dans cette direction est l'utilisation des ensembles syndétiques, présentée par Hansel dans [Han82]. Cependant, plusieurs preuves s'y rapportant se sont révélées incorrectes.

Nous présentons ici une preuve complète du théorème de Cobham, basée sur le travail de [AS03] et les corrections apportées dans [RW09]. Nous démontrerons dans un premier temps le caractère syndétique des ensembles à la fois k et l automatiques. Nous nous servirons ensuite de ce résultat pour prouver le Théorème 1.

Nous nous attacherons également à comparer les preuves modernes avec le travail original de Cobham. Il s'avère en effet que certains des résultats utilisés dans [AS03] et [RW09], notamment concernant les ensembles syndétiques, figurent implicitement dans [Cob69].

1.1 Notations

On notera Σ_k l'alphabet $\{0, \ldots, k-1\}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la représentation en base $k \geq 2$ de n est $(n)_k \in \Sigma_k^\star$. A l'inverse, l'interprétation en base k de $w \in \Sigma_k^\star$ est l'entier $[w]_k \in \mathbb{N}$. On notera également $|w|$ la longueur du mot w.

Pour tout ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$, sa représentation en base k est $(X)_k = \{(n)_k : n \in X\}$.

2 Ensembles syndétiques

Un ensemble infini $X = \{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ est *syndétique* s'il existe $c > 0$ tel que $x_{n+1} - x_n < c$ quelque soit n (on dit aussi que X est $c-$syndétique). Cette notion est utilisée dans plusieurs preuves du théorème de Cobham. Elle apparaît notamment dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Si k et l sont multiplicativement indépendants, alors tout ensemble infini $X \subseteq \mathbb{N}$ à la fois k-automatique et l-automatique est syndétique.*

Certaines démonstrations de cette proposition reprennent cependant un argument erroné que nous détaillerons ci-dessous. Nous étudierons par la suite une preuve correcte, issue de [RW09]. Bien que la Proposition 2 ne figure pas explicitement dans l'article original de Cobham, nous verrons qu'elle se déduit du lemme 3 de [Cob69].

2.1 Preuve (erronée) par [AS03]

Une preuve de la Proposition 2 est proposée dans [AS03]. Elle manipule les ensembles denses à droite.

Définition 3. *Un ensemble $X \subseteq \Sigma^\star$ est dense à droite si tout mot $x \in \Sigma^\star$ peut être complété par un mot $y \in \Sigma^\star$ tel que $xy \in X$.*

Cette preuve débute par l'énoncée du lemme correct suivant.

Lemme 4 ([AS03])**.** *Soient $k, l \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants. Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est infini et $k-$automatique, alors $0^\star(X)_l = 0^\star\{(n)_l : n \in X\}$ est dense à droite.*

Démonstration. Considérons $x \in \Sigma_l^\star$. On cherche $y \in \Sigma_l^\star$ tel que $xy \in 0^\star(X)_l$.

Puisque X est infini et $k-$automatique, d'après le lemme de l'étoile il existe $t, u, v \in \Sigma_k^\star$ tel que $u \neq \varepsilon$ et $tu^\star v \subseteq (X)_k$. Par des considérations arithmétiques élémentaires, on peut alors trouver deux entiers p et q tels que :

$$[x]_l l^q < [tu^p v]_k < ([x]_l + 1) l^q$$

Il existe donc un entier $j < l^q$ tel que $[x]_l l^q + j = [tu^p v]_k$. Si on prend $y \in \Sigma_l^q$ tel que $[y]_l = j$, on a $[xy]_l = [x]_l l^q + [y]_l = [x]_l l^q + j = [tu^p v]_k \in 0^\star(X)_l$. Ainsi $0^\star(X)_l$ est dense à droite. □

Cette preuve réutilise en fait les idées développées par Cobham pour démontrer le lemme 2 de [Cob69]. Le résultat qu'il obtient apporte une précision supplémentaire nécessaire dans la suite de sa démonstration :

Lemme 5 ([Cob69])**.** *Soient $k, l \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants, et $d > c \geq 0$ deux entiers quelconques. Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est infini et $k-$automatique, alors pour tout $x \in \Sigma_l^\star$ il existe $y \in \Sigma_l^\star$ tel que $xy \in 0^\star(X)_l$ et $|(y)_l| \equiv c \mod d$ (en particulier, $0^\star(X)_l$ est dense à droite).*

La preuve de [AS03] se poursuit par le lemme suivant :

Lemme 6 (Erroné)**.** *Si X est un ensemble k-automatique et $0^\star(X)_k$ est dense à droite, alors X est syndétique.*

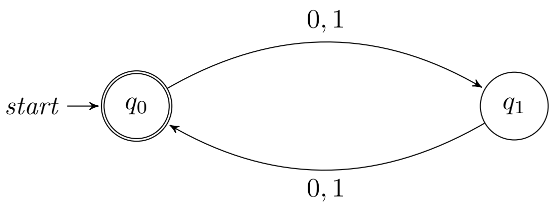
Si ce résultat était correct, la Proposition 2 découlerait facilement des Lemmes 4 et 6. Cependant, celui-ci est faux comme en témoigne le contre-exemple suivant :

Contre-exemple. *Considérons $X = \{n \in \mathbb{N} : |(n)_2| \equiv 0 \mod 2\}$ (il s'agit de l'ensemble des nombres dont l'écriture en base 2 comporte un nombre pair de chiffres). Cet ensemble est trivialement $2-$automatique et $0^\star(X)_2$ est dense à droite. Cependant, pour tout $i \geq 0$, on a $X \cap [2^{2i}, 2^{2i+1}[= \varnothing$. Autrement dit, on peut trouver des intervalles aussi larges que voulu et n'intersectant pas X, ce qui signifie précisément que X n'est pas syndétique.*

La preuve du Lemme 6 présentée dans [AS03] considère, à raison, que si X est k-automatique et $0^\star(X)_k$ dense à droite, alors pour tout entier n il existe $u \in \Sigma_k^\star$ tel que $(n)_k u \in 0^\star(X)_k$. On peut également borner la taille de u par le nombre d'états s d'un automate reconnaissant X en base k. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \leq s$ et $0 \leq t_n < k^{p_n}$ tels que $nk^{p_n} + t_n \in X$.

Les auteurs de [AS03] pensent alors pouvoir en déduire que X est $2k^s$−syndétique. Si tous les p_n étaient égaux à une même valeur p, on pourrait effectivement conclure que tout intervalle de la forme $[nk^p, (n+1)k^p[$ contient un élément de X, et X est donc $2k^p$−syndétique. Cependant, la dépendance en n des p_n implique que la distance séparant deux éléments consécutifs de X peut également dépendre de n.

Contre-exemple. *Appliquons le raisonnement de [AS03] au contre-exemple précédent. L'ensemble X est reconnu en base 2 par l'automate suivant :*



On a alors $p_n = |(n)_2| \mod 2$. *Autrement dit :*

$$\begin{cases} X \cap [n, n+1[\ \neq \varnothing & \textit{si } |(n)_2| \equiv 0 \mod 2 \\ X \cap [2n, 2(n+1)[\ \neq \varnothing & \textit{si } |(n)_2| \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

Mais $X \cap [n+1, 2n[\ = \varnothing$ *si* $n = 2^{2i} - 1$. *Ainsi, l'écart entre deux intervalles contenant des éléments de X peut être supérieur à $n-1$ pour n aussi grand que voulu. Donc X ne peut pas être syndétique.*

Il est intéressant de noter que Cobham parvient à éviter la dépendance en n précédente. Plus précisément, le lemme 3 de [Cob69] s'énonce ainsi :

Lemme 7 ([Cob69])**.** *Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble infini simultanément k et l automatique, et $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma_k, \delta)$ un automate reconnaissant X en base k. Il existe alors une constante $\lambda_{\mathcal{A}}$ tel pour tout état proprement récurrent s de $\mathcal{A}$, pour tout $L \geq \lambda_{\mathcal{A}}$ et pour tout mot $x \in \Sigma_k^\star$, il existe un mot $y \in \Sigma_k^L$ tel $\delta(q_0, xy) = s$.*

Un état s est *proprement récurrent* s'il existe un chemin commençant en q_0 qui passe infiniment souvent par s. Le Lemme 7 implique en particulier que tout état accessible depuis un état proprement récurrent est aussi proprement récurrent. En effet, d'après ce lemme, pour tout x il existe y tel que $s = \delta(s, xy)$. On a alors $\delta(\delta(s,x), yx) = \delta(\delta(s,xy), x) = \delta(s,x)$. Ainsi $\delta(sx)$ est proprement récurrent.

En particulier, si $X \subseteq \mathbb{N}$ infini est reconnu par $\mathcal{A}$, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\delta(q_0, (n)_k) \in F$ est proprement récurrent. On déduit alors du Lemme 7 que pour tout n (assez grand) il existe $0 \leq t_n < k^{\lambda_{\mathcal{A}}}$ tel que $nk^{\lambda_{\mathcal{A}}} + t_n \in X$. On peut alors conclure que X est syndétique.

La preuve de Cobham du Lemme 7 est cependant beaucoup plus complexe que celle (erronée) du Lemme 6. En particulier, elle nécessite d'appliquer à plusieurs reprises le Lemme 5.

2.2 Preuve (correcte) par [RW09]

Nous présentons ici une démonstration correcte de la Proposition 2, issue du travail détaillé dans [RW09].

L'idée générale de la preuve est la suivante : on va montrer qu'il existe un automate reconnaissant X en base l de telle sorte que, depuis n'importe quel état de l'automate, on pourra rejoindre un état final en un nombre borné d'étapes, la borne étant indépendante de l'état et du mot lu (c'est ce que l'on obtient à la fin du Lemme 12). Cela sera suffisant pour conclure sur le caractère syndétique de X.

La preuve formelle se décompose en cinq lemmes :

Lemme 8. *Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$ un AFD. Pour $s \in Q$, on définit $L_s := \{\, |w| : w \in \Sigma^\star, \delta(s,w) \in F \,\}$. Alors $\mathbf{1}_{L_s}$ (la fonction caractéristique de L_s) est ultimement périodique.*

Démonstration. Soit $f_s : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(Q)$ définie par $f(n) := \{\, \delta(s,w) : w \in \Sigma^n \,\}$. Comme $\mathcal{P}(Q)$ est fini, alors il existe $a_s < b_s$ tels que $f(a_s) = f(b_s)$. Cela signifie qu'après lecture de mots de longueur a_s ou b_s, on tombe dans le même ensemble d'états possibles. Ainsi, si on continue à lire des mots plus longs, partant du même ensemble d'états possibles, l'ensemble des d'états possibles de mots de longueur $a_s + n$ est le même que l'ensemble des d'états possibles de mots de longueur $b_s + n$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_s + n) = f(b_s + n)$, donc f est ultimement périodique. Il suffit alors de voir que $\mathbf{1}_{L_s} = \mathbf{1}_{F_s}$ où $F_s = \{\, n \in \mathbb{N} : f(n) \cap F \neq \emptyset \,\}$ □

Lemme 9. *Soient $n, m, a, b, c, d \in \mathbb{N}^\star$ avec $n < m$ et k, l deux entiers multiplicativement indépendants. Alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $nl^{c+dq} \leq mk^{a+bp}$ et $(m+1)k^{a+bp} \leq (n+1)l^{c+dq}$.*

Démonstration. Il suffit de trouver p, q tels que :

$$\frac{nl^c}{mk^a} \leq \frac{(k^b)^p}{(l^d)^q} \leq \frac{(n+1)l^c}{(m+1)k^a}$$

Cela se démontre par application du théorème de Kronecker sur l'approximation diophantienne. On applique ce dernier dans un cas bien particulier, dont l'énoncé se réécrirait alors : si α est irrationnel, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $|p\alpha - u - q| < \varepsilon$.

Puisque k^b et l^d sont multiplicativement indépendants, alors $\log(k^b)$ et $\log(l^d)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, i.e. $\log(k^b)/\log(l^d)$ est irrationnel. En posant $\alpha = \log(k^b)/\log(l^d)$ et avec un bon choix des paramètres u et ε, on obtient l'inégalité annoncée :

$$\begin{aligned}
& |p\log(k^b)/\log(l^d) - u - q| < \varepsilon \\
\implies \quad & |\log((k^b)^p) - u\log(l^d) - \log((l^d)^q)| < \varepsilon \log(l^d) \\
\implies \quad & \frac{1}{l^{d\varepsilon}} \leq \frac{(k^b)^p}{(l^d)^q l^{du}} \leq l^{d\varepsilon} \\
\implies \quad & l^{d(u-\varepsilon)} \leq \frac{(k^b)^p}{(l^d)^q} \leq l^{d(u+\varepsilon)}
\end{aligned}$$

□

Lemme 10. *Soit $k \geq 2$ et X un ensemble k-automatique infini. Alors il existe $m, a, b \geq 1$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}, X \cap [mk^{a+bp}, (m+1)k^{a+bp}[\neq \emptyset$, où m peut être choisi arbitrairement grand.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma_k, \delta)$ reconnaissant (en base k) X. L'ensemble X est infini, donc il existe $m > 0$ aussi grand que l'on veut tel que $(m)_k$ est préfixe d'un nombre infini de mots de $(X)_k$. Soit s l'état obtenu après lecture de $(m)_k$: par le Lemme 8, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et $b > 0$ tels que $\mathbf{1}_{L_s}$ est b-périodique à partir du rang α.

Il existe un mot v tel que $|v| \geq \alpha$ et $(m)_k v \in (X)_k$ (simple conséquence de la définition de m). Soit $a = |v|$: on a alors $[mk^a, (m+1)k^a[$ qui contient un élément de X ($[(m)_k v]_k$). On conclut alors par la b-périodicité de $\mathbf{1}_{L_s}$ (puisque $a \geq \alpha$). □

Lemme 11. *Soit $l \geq 2$ et X un ensemble l-automatique infini reconnu (en base l) par l'automate émondé $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma_l, \delta)$ (i.e. tout état de $\mathcal{A}$ est accessible et co-accessible). S'il existe un état $s \in Q$ tel que $\mathbb{N} - L_s$ est infini, alors il existe $n, c, d \geq 1$ tels que $\forall q \in \mathbb{N}, X \cap [nl^{c+dq}, (n+1)l^{c+dq}[= \emptyset$.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que l'automate $\mathcal{A}$ possède au moins deux états (sinon on a soit $X = \emptyset$, soit $X = \mathbb{N}$, deux cas où le lemme est vérifié trivialement).

Soit $s \in Q$ tel que $\mathbb{N} - L_s$ est infini. Sans perdre de généralité, on peut supposer $s \neq q_0$ (et donc qu'il existe $n > 0$ tel que s est obtenu après lecture de n en base l, étant donné que $\mathcal{A}$ est accessible : on n'a pas besoin de la co-accessibilité en fait). Si $s = q_0$, il suffit de considérer les états $t \neq q_0$ tels que $t = \delta(q_0, a)$ pour un certain $a \in \Sigma_l$ (un tel t existe car l'automate à plus de 2 états qui sont tous accessibles). Si pour tous ces états t, $\mathbb{N} - L_s$ est fini, alors on aurait que $\mathbb{N} - L_s$ serait fini : contradiction.

On utilise alors un raisonnement similaire au Lemme 11. Par le Lemme 8, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et $a > 0$ tels que $\mathbf{1}_{L_s}$ est d-périodique à partir du rang α. Puisque $\mathbb{N} - L_s$ est infini, il existe $c \geq \alpha$ tel qu'aucun mot v de longueur c n'est tel que $\delta(s,v) \in F$, i.e. on arrive dans un état final en lisant v depuis l'état s. Autrement dit, $[nl^c,(n+1)l^c[$ ne contient aucun élément de X. Encore une fois, on conclut par la d-périodicité de $\mathbf{1}_{L_s}$. ☐

Lemme 12. *Soient $l > k \geq 2$ deux entiers multiplicativement indépendants, et X un ensemble k- et l-automatique. Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma_l, \delta)$ un automate émondé reconnaissant X en base l. Alors, pour tout $r \in Q$, L_r est cofini.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit r tel que $\mathbb{N} - L_r$ est infini, alors on lui applique le Lemme 11 : il existe $n, c, d \geq 1$ tels que $\forall q \in \mathbb{N}, X \cap [nl^{c+dq},(n+1)l^{c+dq}[= \emptyset$.

Par le Lemme 10, il existe $m, a, b \geq 1$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}, X \cap [mk^{a+bp},(m+1)k^{a+bp}[\neq \emptyset$, et on peut prendre $m > n$ (car on peut le prendre aussi grand que l'on veut).

Or d'après Le lemme 9, on a $[mk^{a+bp},(m+1)k^{a+bp}[\subseteq [nl^{c+dq},(n+1)l^{c+dq}[$, donc $X \cap [mk^{a+bp},(m+1)k^{a+bp}[\subseteq X \cap [nl^{c+dq},(n+1)l^{c+dq}[$, ce qui nous mène à une contradiction. ☐

Preuve de la Proposition 2. Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma_l, \delta)$ un automate émondé reconnaissant X en base l. On définit $q_n := \delta(q_0,(n)_l)$. Par le Lemme 12, on sait que L_{q_n} est cofini. Donc $\forall n, \exists C_n, \forall p \geq C_n, p \in L_{q_n}$. Or C_n ne dépend que de $q_n \in Q$ fini, donc $C = \sup_n C_n$ est fini.

Ainsi, pour tout $n > 0$, il existe $w_n \in \Sigma^C$ tel que $(n)_l w_n \in (X)_l$, ce qui traduit en termes d'entiers signifie que $\forall n > 0, \exists t_n \in [0, l^C[, nl^C + t_n \in X$, donc tout intervalle de longueur $2l^C$ contient au moins un élément de X : X est syndétique. ☐

3 Démonstration du théorème de Cobham

On dispose maintenant de tous les outils pour démontrer le Théorème 1 de Cobham. Nous présentons ici la suite de la preuve exposée dans [AS03] qui aboutit à ce résultat.

On démontre tout d'abord un résultat très proche du Théorème 1, et qui porte à nouveaux sur les ensembles automatiques.

Lemme 13. *Si $X \subseteq \mathbb{N}$ est un ensemble simultanément k et l automatique, alors sa suite caractéristique est ultimement périodique.*

Idée de la preuve. On peut supposer X infini sinon le Lemme est évident.

L'idée générale de la preuve est la suivante : si ρ_k désigne l'équivalence de Nérode sur l'automate minimal reconnaissant X en base k, alors X est l'union de certaines classes d'équivalences pour ρ_k. En particulier, il suffit de montrer que $v = v_0v_1...$ est ultimement périodique, avec v_i classe d'équivalence de i (pour ρ_k).

On montre alors cette ultime périodicité en considérant les sous-mots récurrents de v (i.e. les mots qui ont un nombre infini d'occurrences dans v). En effet, s'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que le nombre de sous-mots récurrents de taille m soit borné par m, alors v est ultimement périodique. ☐

Démonstration. Considérons d'abord les sous-mots récurrents de longueur 2. Si $w = w_1w_2$ est un tel mot, alors l'ensemble des n tel que $v_n = w_1, v_{n+1} = w_2$ est à la fois k et l automatique, donc syndétique de constante $c_w > 0$ par la Proposition 2. On obtient ainsi $d > 0$ tel que toute paire d'occurrences consécutives d'un sous-mot récurrent de longueur 2 soit à une distance $\leq d$ (en prenant le max des c_w par exemple).

k et l étant multiplicativement indépendants, on en déduit p, q tel que $\frac{l^q}{k^p}$ soit arbitrairement proche de 1. Plus précisément, pour $\epsilon > 0$, on pose p, q tel que $1 < \frac{l^q}{k^p} < 1 + \frac{\epsilon}{d}$. Posons alors $K = k^p, L = l^q$.

Soit w un sous-mot récurrent de taille $\leq K$. On étudie sa position dans un sous-mot de la forme $v[xK..(x+2)K-1]$. Notons que ρ_k est k*-stable*, *i.e.* si $x \sim_{\rho_k} y$, alors $xk^j + t \sim_{\rho_k} yk^j + t$ pour tout $j \geq 0, t \leq k^j$. En particulier, $v[x, x+1]$ détermine complètement $v[xK..(x+2)K-1]$. Certains $v[x, x+1]$ sont donc nécessairement récurrents par récurrence de w. Pour un tel $v[x, x+1]$ on peut donc écrire $v[xK..(x+2)K-1] = w'ww''$, et par syndéticité, on a une suite croissante $(x_n)_n$ avec $x_{n+1} - x_n \leq d$ tel que pour tout n, $v[x_nK..(x_n+2)K-1] = w'ww''$. On obtient ainsi la configuration de la Figure 1.

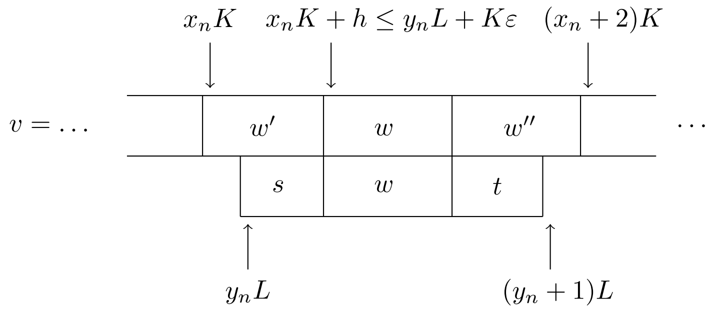


FIGURE 1 – Illustration de la preuve

Un résultat technique sur la syndéticité nous donne alors une nouvelle suite $(y_n)_n$ telle que $v[y_nL..(y_n+1)L-1] = rwt$ avec $|r| \leq \epsilon K$.

Il reste alors à borner le nombre de sous-mots récurrents (distincts) de taille m. On s'intéresse dans un premier temps aux sous-mots (pas nécessairement récurrents) de taille m dans $v[yL..(y+1)L-1]$.

Considérons alors la relation d'équivalence θ raffinement l-stable de ρ_k (qui existe puisque s est à la fois k et l automatique), et $u = u_0u_1...$ avec u_i classe d'équivalence de i (pour θ).

θ étant un raffinement de ρ_k, le nombre de sous-mots de taille m dans $v[yL..(y+1)L-1]$ est inférieur au nombre de sous-mots de taille m dans $u[yL..(y+1)L-1]$. Mais par l-stabilité, $u[yL..(y+1)L-1]$ est complètement déterminé par $u[y]$ qui est borné par le nombre c de classes d'équivalence de ρ_k puisque θ est un raffinement de ρ_k.

Enfin, puisque $|r| \leq \epsilon K$, on a ϵK positions de départ possibles pour w sous-mot récurrent. De sorte que le nombre de sous-mots récurrents de taille m dans $v[yL..(y+1)L-1]$ est inférieur à $c\epsilon K$. En fixant ϵ de sorte que $c\epsilon/(1-\epsilon) < 1/2$ et $m = \lfloor K(1-\epsilon)\rfloor$, on a que le nombre de sous-mots récurrents de taille m est inférieur à :

$$c\epsilon K \leq \frac{K(1-\epsilon)}{2} \leq \frac{m+1}{2} \leq m$$

v est donc ultimement périodique. □

On démontre enfin le Théorème 1 de Cobham, en passant des ensembles aux suites automatiques.

Preuve du Théorème 1. Soit $\underline{a} = a_0a_1a_2\cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ une suite simultanément k et l automatique.

Pour toute lettre $a \in \Sigma$ (on rappelle que Σ est fini), l'ensemble $S_a = \{n \in \mathbb{N} : s_n = a\}$ est k et l automatique. D'après le Lemme 13, sa suite caractéristique $\underline{w_a}$ est donc ultimement périodique. Or, $\underline{a} = \sum_{a\in\Sigma} a\underline{w_a}$. Donc $\underline{a}$ est ultimement périodique. □

4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce rapport une preuve complète du Théorème 1 de Cobham. Bien que celle-ci soit plus simple que la preuve originale détaillée dans [Cob69], nous avons pu voir qu'elle nécessite une démonstration soigneuse afin de ne pas commettre d'erreurs semblables à celle présentée Partie 2.1.

Enfin, nous avons pu constater de grandes similarités entre le travail de [AS03], [RW09] et [Cob69]. L'utilisation des ensembles syndétiques a permis d'expliciter certains résultats de [Cob69], et de séparer la preuve en deux parties distinctes et d'avantages compréhensibles.

Références

[AS03] J.P. Allouche and J. Shallit. *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations.* Cambridge University Press, 2003.

[Cob69] Alan Cobham. On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata. *Mathematical systems theory*, 3(2) :186–192, 1969.

[Han82] G Hansel. A propos d'un théorème de Cobham. *Actes de la Fête des Mots*, pages 55–59, 1982.

[RW09] Michel Rigo and Laurent Waxweiler. A note on syndeticity, recognizable sets and Cobham's theorem. *CoRR*, abs/0907.0624, 2009.