F. GONSETH et G. JUVET

SUR LA RELATIVITÉ À CINQ DIMENSIONS ET SUR UNE INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

L'exposé présenté au Congrès avait pour but de faire connaître les recherches des auteurs, résumées tout d'abord dans quatre notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1), développées ensuite dans un mémoire, alors sous presse, et devant paraître aux Helvetica physica Acta (2), et de montrer en outre les nouvelles conséquences qu'une approximation plus poussée a permis d'obtenir.

Nous nous bornerons ici à résumer très brièvement le mémoire en question et à donner ensuite avec plus de détails les nouveaux résultats que nous avons obtenus depuis sa rédaction.

1. - Après avoir montré que les équations du mouvement d'une particule électrisée conduisent nécessairement à la considération d'un déplacement parallèle dans un espace à cinq dimensions dont la connexion ne peut être rattachée à un ds^2 non dégénéré, on peut faire voir, qu'un léger changement de la connexion affine qu'on était tout d'abord amené à introduire, confère à cet espace à cinq dimensions une métrique dont le ds^2 est de la forme suivante:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k + 4\varphi_i dx^i dx^4 + \psi^2 dx^4 dx^4,$$

où x^0, x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées de temps et d'espace et où x^4 est la cinquième variable introduite par la relation

$$dx^4 = \frac{e}{m} ds,$$

valable sur la ligne de l'Univers E_5 de la particule en mouvement dont m est la masse et e la charge.

Les g_{ik} sont en première approximation les potentiels du champ gravifique einsteinien de l'Univers E_4 de la théorie classique; les φ_i sont les potentiels du champ électro-magnétique; ψ^2 est, contrairement à l'hypothèse faite par les

(1) C. R., tome 185, p. 341, 412, 448, 535.

(2) Vol. I, fasc. 6, p. 421-436. (Manuscrit déposé le 28-VI-1928).

savants qui ont traité de l'électromagnétisme à cinq dimensions, une fonction et non pas une constante.

Les lignes d'Univers (dans E_5) d'un point matériel chargé sont les géodésiques de ce ds^2.

Dans les approximations que nous avons étudiées, nous n'avons jamais tenu compte des dérivées par rapport à x^4 des fonctions précédentes; nous les avons toujours négligées vis-à-vis des autres grandeurs, car jusqu'ici on ne connaît pas de phénomènes qui fassent intervenir une variation de la charge des particules électrisées en mouvement.

2. - La première approximation que nous avons étudiée concerne le cas où les φ_i sont nuls, et où l'on se place dans une région de l'Univers où ne se trouve aucune masse. Pour déterminer les coefficients g_{ik} et ψ^2, nous sommes partis des équations einsteiniennes:

$$R_{\alpha\beta}=0 \tag{1}$$

où les $R_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann contracté, attaché au ds^2 proposé. Dans ce cas, les équations (1) pour α, $\beta=0, 1, 2, 3$ se trouvent être les équations d'Einstein définissant les seuls g_{ik}, pour $\alpha=4$, $\beta=0, 1, 2, 3$, les équations (1) sont identiquement satisfaites et pour $\alpha=\beta=4$, on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre qui n'est autre que l'équation de Schrödinger.

3. - En deuxième approximation, nous avons introduit les φ_i en supposant qu'on peut les négliger, ainsi que leurs dérivées, seulement vis-à-vis de ψ. Les équations du champ ne peuvent plus être de la forme (1), mais au contraire, à cause de la présence des φ_i, elles sont

$$R_{\alpha\beta}=\mu\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}T\right) \tag{2}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est un tenseur qui généralise le tenseur impulsion-énergie d'Einstein, et qu'on pourrait appeler le tenseur *impulsion-énergie-charge*; μ est une constante qui se réduit à la constante k d'Einstein lorsque les φ_i sont seuls.

Les équations (2) donnent alors:

pour α, $\beta=0, 1, 2, 3$, les équations du champ électro-magnétique [un des groupes des équations de Maxwell; l'autre groupe étant donné par des identités auxquelles satisfont les symboles de Christoffel, comme l'a montré M. KALUZA];

pour $\alpha=4$, $\beta=4$ on a une équation de Schrödinger en ψ (1).

---

(1) Cfr. notre mémoire des Helv. Phys. Acta, p. 435 où nous indiquons en quoi notre équation dite de Schrödinger diffère de celle qu'a proposée M. SCHRÖDINGER.

4. - Ce qui caractérise notre extension à l'Univers à cinq dimensions de la relativité einsteinienne, c'est que d'une part, elle donne une base étonnamment, solide pour fonder l'existence de l'équation de Schrödinger et que, d'autre part elle permet de rattacher d'une manière très simple la théorie des bicaractéristiques de M. HADAMARD et celle qu'a édifiée M. VESSIOT de la propagation des ondes attachées à un système dynamique, à la mécanique ondulatoire de M.M. L. DE BROGLIE et SCHRÖDINGER. Nous croyons bien que nous avons fait ainsi la première tentative pour donner à la mécanique ondulatoire une justification qui ne soit pas fondée uniquement sur le succès, mais qui le soit sur des bases théoriques formant une doctrine complètement cohérente, dont un grand avantage, par surcroit, est de fournir la géométrisation de l'électromagnétisme.

5. - Si l'on cherche les conséquences des équations (2) dans le cas très général où les g_{ik}, les φ_i et ψ ont des dérivées par rapport à x^4 dont les valeurs ne soient plus négligeables, on trouve naturellement des expressions très compliquées où les φ_i et ψ ne peuvent plus être séparés des g_{ik}, ou pour mieux dire, on trouve des équations du champ où les g_{ik} ne peuvent pas être isolés pour être calculés tout d'abord, les φ_i et ψ se calculant ensuite; de plus la belle simplicité des relations entre les géodésiques du ds^2 et les bicaractéristiques de l'équation de Schrödinger a disparu.

6. - C'est à l'équation (2) où $\alpha=\beta=4$ que nous allons consacrer notre attention. C'est encore une équation aux dérivées partielles du second ordre en ψ. Elle contient les dérivées du second ordre linéairement, mais les coefficients de ces dérivées dépendent de ψ. Par conséquent [1], les caractéristiques, et par suite, les bicaractéristiques de cette équation ne seront bien définies que pour une intégrale déterminée de l'équation: elles ne dépendent plus de la seule équation du second ordre.

Les termes du second ordre sont en effet:

$$\sum_0^3 a_{ik}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^k}+\sum_0^3 b_i\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^4}$$

avec

$$a^{ik}=\gamma^{ik}\psi^2-4G^{ik,rs}\varphi_r\varphi_s,\qquad b_i=-2\varphi_i$$

où γ^{ik}= mineurs des g_{ik} de $d\sigma^2$, divisés par le déterminant $|g_{ik}|$ de ds^2; où $d\sigma^2$ est la partie $g_{ik}dx^idx^k$ du ds^2 et où les $G^{ik,rs}$ sont des expressions dépendant des seuls g_{ik}.

Il serait intéressant de rechercher la signification physique du fait analytique que nous venons de signaler. A quelles particularités physiques se rattache la

[1] Cf. HADAMARD: *Propagation des ondes*, p. 268.

distinction entre les équations des ondes dont la forme seule détermine les caractéristiques et celles pour lesquelles il faut avoir une intégrale déterminée pour que les caractéristiques soient définies.

7. - Une remarque importante qu'il convient de faire, c'est que l'équation en ψ ne contient pas de termes en $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^4 \partial x^4}$. Dès lors, il y a une différence entre les géodésiques du ds^2 et les bicaractéristiques de l'équation en ψ. Les rayons de l'onde attachée au mouvement d'un point matériel ne sont plus les trajectoires de ce point matériel, il y a une certaine *aberration* des ondes de DE BROGLIE. Si l'on peut se permettre une manière très elliptique de parler: les lignes les plus droites de l'Univers ne sont plus, dans le cas général, les lignes les plus courtes.

On peut voir facilement que cette aberration est liée à la variabilité de la charge, puisque cette variabilité doit être prise en considération dès l'instant où, dans les équations proposées, on tient compte des dérivées par rapport à x^4.

Notre théorie mathématique dépasse donc le cadre des phénomènes physiques connus.