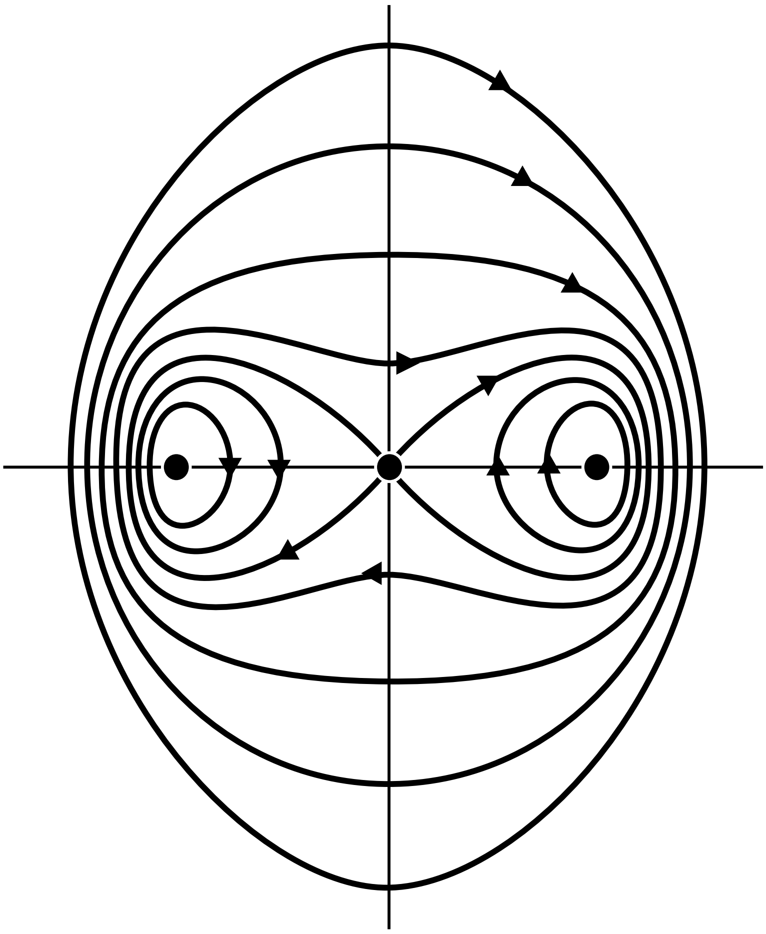
2008

apuntes de ecuaciones diferenciales I



Pepe Aranda

pparanda@fis.ucm.es

Métodos Matemáticos
Físicas Complutense

www.ucm.es/centros/webs/d215

Índice

Sobre las versiones de los apuntes

La primera versión de estos apuntes fue la de **1999**, adaptación de los apuntes de EDOs para la asignatura Métodos Matemáticos II de un viejo plan de estudios, en los que se trataban algunos temas más avanzados (la asignatura actual es de 2^o curso en lugar de 3^o, y tiene 6 créditos (4 horas semanales) en lugar de 7.5 (5 horas)). Desaparecieron resultados de prolongabilidad, estabilidad, soluciones periódicas, funciones de Lyapunov...

En la **versión 2000** sobre todo se introdujeron bastantes ejemplos nuevos en muchas secciones (en 1.1, 1.2, 2.2, 2.4, 2.5, 3.2, 3.3, 4.2, 4.3 y 4.4), pasaron a estar en 'letra pequeña' algunos temas (métodos numéricos o transformadas de Lapace de la δ, por ejemplo), apareció la ecuación de Hermite,... y como todos los cursos se modificaron los problemas incluyendo los de examen, se trasladaron otros a los adicionales...

En el año **2001** hubo pocas novedades (ligeras precisiones nuevas en un teorema, cambios de problemas, corección de erratas...) y casi lo mismo en el **2002**.

En la **versión 2003** principalmente se modificó la introducción a los apuntes y se reescribieron y se añadieron diferentes ejemplos a las secciones 1.3 y 1.4 (las que suelen tener mayor dificultad de comprensión). En **2004** no hubo cambios apreciables en la parte de teoría.

La **versión 2005** mantuvo los contenidos de las anteriores, pero se retocaron casi todas las secciones (y ejemplos), algunas ligeramente y otras bastante profundamente. Los mayores cambios fueron:

• En 1.1 se dio más sitio a las lineales. Se detallaron más las técnicas generales de dibujo en 1.2. En 1.3 se aclararó el uso de la ecuación equivalente. En 1.4 se insistió más en las lineales. 1.5, 1.6 y 1.7 cambiaron poco.

• 2.1 quedó casi igual. Algunos teoremas sobre sistemas en 2.2 cambiaron de sitio, se añadieron comentarios y se extendieron ejemplos. La sección 2.3 se dividió en dos y pasó 2.4 a contener la estabilidad. El nuevo 2.3 pasó a tratar primero las ecuaciones de orden n y luego los sistemas, y la estabilidad de 2.4 también se retocó (con nuevos ejemplos en los tres casos). En la transformada de Laplace (nuevo 2.5) se añadieron comentarios y ejemplos y se reordenaron otros. Las soluciones periódicas sólo tuvieron cambios cosméticos.

• 3.1 cambió poquito. 3.2 pasó a empezar por un ejemplo y se redactó de nuevo el teorema. En 3.3 se pasó a trabajar desde el principio en $t=0$, introduciendo antes la [e*], y la constante a del teorema de Frobenius pasó a llamarse d. Se sacaron del viejo 3.4 las alusiones al punto del infinito (formando una nueva seccioncilla 3.5) y se pasó a presentar la función gamma antes de tratar Bessel.

• 4.1, 4.3 y 4.4 casi no cambiaron. Se añadieron a 4.2 dos ejemplos lineales, la matriz de la aproximación lineal pasó a llamarse $\mathbf{M}$, se trató de argumentar de forma más sistemática dónde conviene evaluar el campo $\mathbf{v}$ y cómo hallar alguna solución del sistema, y se agruparon al final los ejemplos de ecuaciones.

Las introducciones a cada capítulo fueron todas retocadas. Y también algo la bibliografía.

Los problemas se reorganizaron bastante. Pasaron a existir 4 hojas de problemas, suficientes para controlar los aspectos básicos de la asignatura, y otras 8 con problemas adicionales. Las hojas eran las viejas hojas comunes de la asignatura a las que se añadieron unos cuantos problemas de temas que antes no contenían (no eran comunes a todos los grupos) y otros de exámenes del curso previo. Los adicionales incluyeron el resto de los elaborados a lo largo de los años: unos similares a los de las hojas y que no merece la pena incluir en ellas y otros que tratan de temas tangenciales a la asignatura (dependencia continua, cálculo numérico, ecuaciones con la δ, propiedades de funciones especiales, problemas con puntos no elementales, aplicaciones,...].

En la **versión 2007** (en el 06-07 no fui profesor de EDI) no se tocó la teoría. La portada pasó a incluir la nueva página del departamento y se cambiaron de sitio y contenido estas notas sobre las sucesivas versiones. Las 'hojas' de problemas pasaron a llamarse 'problemas', conteniendo ejercicios de examen del curso 05-06 y pasaron a estar numeradas continuando la teoría. Los problemas retirados de las hojas se fueron a los 'adicionales' y de estos (transcritos ya también a LaTeX desaparecieron algunos que (junto a otros) constituyeron los problemas para trabajar en grupo y entregar en el grupo piloto.

Hacia mayo de 2007 hice la transcripcion al **LaTeX** (utilizando letra 'palatino') de los apuntes de 2007, con bastantes pequeñas modificaciones para ajustar el texto anterior a los nuevos tipos y márgenes.

Y esta es la **versión 2008**, con muy abundantes pequeñas modificaciones:

• Para recuperar algo del estilo de los viejos apuntes en helvética, la letra es ahora la similar (sans serif) bitstream vera (paquete 'arev' en LaTeX) y se han ampliado los márgenes, intentando dar un aspecto menos denso a los apuntes. En la actualidad constan de 90 páginas de teoría, 4 de problemas y 8 de problemas adicionales.

• La sección 1.1 sólo tiene cambios de estilo, resaltando los grandes tipos de ecuaciones resolubles. En 2.2 se reordenan los ejemplos y se sustituye uno por el 5. En 2.3 se retrasa algún ejemplo y se añade el análisis de los de 2.2. En 2.4 se abrevia aún más la (en letra pequeña) dependencia continua. En 2.5 se incluyen los ejemplos autónomos de evolución de poblaciones de la sección 2.7 de 2007 (que desaparece). 2.6 permanece.

• 2.1 no cambia. En 2.2 y 2.3 se resaltan titulares de las subsecciones, se desarrolla más algún ejemplo de 2.2 y se amplían los ejemplos de ecuaciones en 2.3. En 2.5 se reordenan ejemplos. 2.4 y 2.6 casi igual.

• 3.1 igual. En 3.2 se retoca algún ejemplo. En 3.3 se añade el ejemplo 2 y se amplía el (ahora) 5. 3.4 y 3.5 se mantienen.

• 4.1 tiene pocos cambios. En 4.2, aparte de algunas reordenaciones y ligeros cambios, se resaltan las técnicas concretas de dibujo y cálculo de soluciones, y es nuevo el ejemplo 7. Son nuevos en 4.3 los ejemplos 3 y 5. En 4.4 aparece el ejemplo 4.

• Se han retocado y extendido todas las introducciones (la global y la de cada capítulo). La bibliografía no se modifica. Los problemas sí lo hacen bastante (incluyendo nuevos inventados para los problemas y parcialillos del piloto o para los exámenes finales). Los retirados han pasado a adicionales.

Bibliografía

Bd **Boyce-Di Prima**. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. (Limusa)

S **Simmons**. ECUACIONES DIFERENCIALES, con aplicaciones y notas históricas. (McGraw-Hill)

P **Plaat**. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. (Reverté)

R **Ross**. ECUACIONES DIFERENCIALES. (Reverté)

Br **Braun**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. (Interamericana)

E **Elsgoltz**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. (Mir)

H **Hirsch-Smale**. Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. (Alianza)

F **Fernández-Vázquez-Vegas**. Ecuaciones diferenciales y en diferencias. (Thomson)

G **Guzmán**. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. (Alhambra)

Las secciones 1.1 y 1.2 se pueden encontrar en casi todos los libros anteriores.

Hay resultados de existencia y unicidad (1.3) en todos los libros y varios demuestran el TEyU; la muy larga y avanzada demostración del TE está en G. La prolongabilidad sólo suele ser tratada en los libros más rigurosos (como F y G); algo se dice sobre el tema en R, P y H.

La teoría general de estabilidad (1.4) es propia de libros más avanzados, como el G, y se suele tratar en el marco más general de los sistemas de ecuaciones. La mayoría de los libros más elementales (por ejemplo Bd y P) se suelen limitar a tratar la estabilidad de soluciones constantes de sistemas autónomos (en los apuntes en el capítulo 4). Algunos de ellos (como F) estudian también la estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes (2.4 en los apuntes). De dependencia continua hablan R, E, H, F y G.

La sección 1.5 sigue, en general, al P. Ideas interesantes (más avanzadas) se dan en F.

Para ampliar el cálculo numérico (1.6) está muy bien el capítulo 8 del Bd; véanse también R y Br.

La mayoría de los libros incluyen aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a problemas reales; tal vez las más curiosas se encuentren en el Br.

Los teoremas generales de 2.1 se pueden estudiar en G.

Casi todos los libros empiezan estudiando directamente las ecuaciones lineales y después se ocupan de los sistemas, lo que tal vez resulte más pedagógico (los apuntes, para ahorrar tiempo, lo hacen al revés, pero es interesante leer alguna vez este otro camino). Además suelen incluir repasos, más o menos detallados, de la teoría de matrices (véase, por ejemplo, Bd, P, H o F), ocupándose algunos de la forma de Jordan.

La transformada de Laplace (2.5) se utiliza en Bd, Br, R, S y F.

Para ecuaciones con coeficientes periódicos (2.6), ver P.

La solución por medio de series (capítulo 3), tanto en torno a puntos regulares como en torno a singulares regulares, se puede consultar en Bd, S, Br y R. En S, por ejemplo, se puede ver alguna demostración no hecha en los apuntes. El mismo libro incluye un estudio sobre las propiedades de diferentes funciones especiales.

Los mapas de fases (capítulo 4) se tratan con detalle y rigor en el P (incluyendo la complicada demostración del teorema 1 de 4.2), aunque también son recomendables las diferentes formas de estudiarlos de Bd, Br, R y H. En varios de ellos se puede leer el estudio de las funciones de Lyapunov (para el análisis de la estabilidad de puntos críticos) y de los ciclos límite, no incluidos en los apuntes. Para resultados más avanzados sobre sistemas autónomos (bifurcación, caos...), consultar F.

Algunos libros pueden ser útiles para parte de Ecuaciones Diferenciales II. Bd, R, Br y S estudian los problemas de contorno para EDOs y el método de separación de variables para la resolución de EDPs lineales de segundo orden. Las EDPs de primer orden, lineales y no lineales, se tratan en E.

Hay un capítulo dedicado a la historia de las ecuaciones diferenciales en G, una pequeña sección en Bd y diversos apuntes históricos en S.

Otro tema relacionado con las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, se ve en E y S. Y las ecuaciones en diferencias ocupan casi la mitad del libro F.

Introducción

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita. Si tal función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria** (EDO). Si es de varias variables, la ecuación es en **derivadas parciales** (EDP).

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son:

[1] $y'(t)=-ay(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]

[2] $y'(t)=by(t)[M-y(t)]$ [describe la evolución de una población animal]

[3] $(1-t^2)x''(t)-2tx'(t)+p(p+1)x(t)=0$ [ecuación del Legendre]

[4] $x''(t)+d\,\mathrm{sen}[x(t)]=0$ [ecuación del péndulo]

[5] $x^{iv}(t)+\lambda x(t)=0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

[6] $u_x^2+u_y^2=1$, con $u=u(x,y)$ [ecuación eikonal o de la óptica geométrica]

[7] $u_t-k[u_{xx}+u_{yy}]=F(x,y,t)$, $u=u(x,y,t)$ [ecuación del calor en el plano]

[8] $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$, con $u=u(x,t)$ [ecuación de la cuerda vibrante]

(en las ecuaciones anteriores, a, b, M, p, d, λ, k y c son constantes y las funciones F son conocidas).

Se llama **orden** de una ecuación al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1] y [2] y la EDP [6] son de primer orden; [3] y [4] y las EDPs [7] y [8] de segundo orden, y la ecuación [5] es de cuarto orden. Una ecuación es **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas sólo aparecen como polinomios de grado uno. Según esto, son lineales [1], [3], [5], [7] y [8] (aunque las F de las dos últimas sean lo complicadas que se quiera) y no lo son las otras tres, [2], [4] y [6].

Solución de una EDO de orden n es una función, n veces derivable, que al ser llevada a la ecuación la convierte en una identidad. Así, $y(t)=\mathrm{e}^{-at}$ es solución de [1] pues $y'(t)=-a\mathrm{e}^{-at}=-ay(t)$. Más aún, también lo es toda función $y(t)=C\mathrm{e}^{-at}$ para cualquier constante C. A esta expresión, que, como veremos, recoge todas las soluciones de la ecuación, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** será necesario imponer además alguna **condición inicial** (al conjunto de la ecuación y el dato inicial se le llama **problema de valores iniciales**). Para [1], de primer orden, basta imponer el valor de la solución en un instante t dado: por ejemplo, $y(0)=7$ determina $y(t)=7\mathrm{e}^{-at}$. La solución general de una EDO de orden n contendrá n constantes arbitrarias y deberemos dar n datos iniciales (para [5], los valores de x, x', x'' y x''' en $t=0$ o en otro $t=t_o$; [5] más esos 4 datos será allí el problema de valores iniciales). [Las condiciones para aislar una solución única de una EDP son más complicadas y variadas].

Aunque sería nuestro principal deseo ante cualquier ecuación diferencial, **hallar su solución general sólo será posible en contadas ocasiones** (incluso para las EDOs de primer orden; será más difícil cuanto mayor sea su orden, más para las ecuaciones no lineales, y más aún para una EDP). Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales (la más desarrollada en estos apuntes) describe los escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación **sin necesidad de resolverla**: ¿cuándo tiene un problema de valores iniciales solución única?, ¿qué aspecto tiene la gráfica de las soluciones?, ¿cómo se comportan asintóticamente?, ¿cómo calcular (con un ordenador) sus valores aproximados?, ...

Estos apuntes estudian las EDOs. El **capítulo 1** se dedica a las **ecuaciones de primer orden** $y'=f(t,y(t))$. Comienza describiendo los escasos métodos elementales de integración y pasa pronto al resto de su teoría: dibujo aproximado de las soluciones, existencia y unicidad (si las funciones que aparecen en la ecuación son discontinuas o no derivables puede que no haya solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial), prolongabilidad (¿en qué intervalo está definida cada solución?), estabilidad (¿se parecen entre sí las soluciones con datos iniciales próximos para t grande?), ecuaciones autónomas (las de la forma $y'=f(y(t))$) y cálculo numérico.

El **capítulo 2** trata de los **sistemas de** n **ecuaciones de primer orden** y de las **ecuaciones de orden** n sobre los que más información se puede obtener y que más veces son resolubles: los **lineales**. Primero se generalizan las propiedades vistas de las ecuaciones de primer orden. Luego se tratan, para ir fijando ideas, los sistemas de 2 ecuaciones lineales y las ecuaciones lineales de orden 2 (siempre resolubles si los coeficientes son constantes). Se pasa después al orden n general (se podrán resolver ya menos veces), se estudia su estabilidad y se introduce la técnica de resolución mediante transformadas de Laplace. Hay una breve sección sobre soluciones periódicas de lineales.

El **capítulo 3** describe cómo resolver las EDOs lineales de segundo orden con coeficientes variables utilizando **series de potencias** (único método posible en la mayoría de las ocasiones), en torno a los llamados puntos regulares y a los singulares regulares, incluido el llamado punto del infinito. Se aplica este método a tres ecuaciones particulares de interés físico: la de Legendre, la de Hermite y la de Bessel.

El **capítulo 4** estudia los dibujos (llamados **mapas de fases)** de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones autónomas, sistemas en los que casi nunca se puede hallar su solución general (pero muchas de las propiedades de las soluciones estarán a la vista en el mapa de fases). Tras tratar las propiedades generales, clasifica los mapas de fase en las cercanías de los puntos proyección de soluciones constantes (basándose en los dibujos sencillos de los sistemas lineales), trata un tipo concreto de sistemas (los exactos) y acaba analizando casos dudosos de la clasificación citada.

1. Ecuaciones de primer orden

Este capítulo está dedicado a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la variable despejada, es decir, a las ecuaciones

$$[\text{e}]\ y'(t)=f(t,y(t))\text{, o como usualmente se escriben, } [\text{e}]\ \boxed{y'=f(t,y)}$$

(utilizaremos en la teoría la notación $y(t)$, intermedia entre las más usuales $y(x)$ ó $x(t)$, pues la y siempre aparece como variable dependiente y la t como variable independiente).

Primero intentaremos resolver [e]. Esto se consigue en muy escasas ocasiones, incluso para estas ecuaciones de primer orden, las más sencillas de todas. En la sección 1.1 hallaremos la solución de los pocos tipos de **ecuaciones resolubles**: separables, lineales, exactas y otras que se pueden reducir a ellas mediante cambios de variable (homogéneas $y'=f(y/t)$, de la forma $y'=f(at+by)$, de Bernouilli, de Riccati, factores integrantes...).

Dedicaremos el resto del capítulo a obtener información sobre las soluciones de [e] sin necesidad de resolverla. Como cada una de ellas es una función $y(t)$, el conjunto de las soluciones de [e] describirá una familia de curvas en el plano ty (una para cada constante arbitraria C). En la sección 1.2 veremos como hacer un **dibujo aproximado** de estas curvas a partir del 'campo de direcciones', conjunto de segmentos con pendiente proporcionada por la $f(t,y)$. Describiremos, en varios ejemplos, cómo dibujar este campo a través de las llamadas 'isoclinas', cómo hallar posibles rectas solución y localizar los puntos de inflexión..., e introduciremos el concepto de 'curva integral'.

En la sección 1.3 veremos la teoría de existencia y unicidad. Para un problema de valores iniciales (es decir, para una ecuación y un dato inicial dados):

$$[\text{P}]\ \boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$$

el **teorema de existencia y unicidad** (TEyU) asegurará que si la f y la derivada parcial f_y son continuas en un entorno del punto (t_o,y_0) existirá una única solución $y(t)$ de [P], definida al menos en un pequeño intervalo que contiene a t_o (gráficamente, por ese punto pasará una única curva solución). Si la f no es tan regular, podría no haber solución o existir más de una. Por ejemplo, las funciones $y\equiv 0$ e $y=t^3$ son soluciones distintas de la ecuación $y'=3y^{2/3}$ que cumplen el dato inicial $y(0)=0$ (f_y no es continua en $y=0$). Más complicado será determinar si el máximo intervalo en que dicha solución está definida es finito o infinito (**prolongabilidad**). Es posible, incluso para ecuaciones en las que f tenga muchas derivadas en todo el plano, que una solución no esté definida para todo t. Por ejemplo, la solución única de $y'=y^2$ con $y(-1)=1$, que es $y=-1/t$, sólo está definida en $(-\infty,0)$ [$y=-1/t$ define otra solución distinta para $(0,\infty)$].

En la 1.4 veremos que si f es buena la solución de [P] se parecerá siempre, cerca de t_o, a la de los problemas obtenidos variando un poco el dato inicial y_o. Pero no siempre las soluciones con datos próximos siguen cerca de ella en todo (t_o,∞) [cuando lo hacen, la solución de [P] se dirá **estable**, y **asintóticamente estable** si además la diferencia entre soluciones tiende a 0 cuando $t\to\infty$]. Por ejemplo, las soluciones $y\equiv 0$ e $y=y_o\mathrm{e}^t$ de $y'=y$, con y_o muy pequeño, que son muy próximas cerca de $t=0$, son muy distintas para grandes valores de t. Al estudio de la estabilidad (en general complicado), en especial para las ecuaciones **lineales** (para ellas es fácil), está dedicada principalmente la sección.

La sección 1.5 estudia las llamadas **ecuaciones autónomas** $y'=f(y)$ sobre las que es posible conseguir muchísima información sin conocer su solución: haremos fácilmente su dibujo aproximado hallando sus soluciones constantes y estudiando el signo de $f(y)$, y de él se deducirán inmediatamente, por ejemplo, las propiedades asintóticas de sus soluciones (para ecuaciones no autónomas, de un dibujo no se deduce la estabilidad). La sección nos dará, también, algunas ideas que se generalizarán en el estudio de los sistemas autónomos del capítulo 4.

En la sección 1.6 describiremos los más sencillos **métodos numéricos** programables (Euler, Euler modificado y Runge-Kutta), que (disponiendo de un ordenador) permiten hallar con bastante aproximación los valores numéricos de soluciones de problemas de valores iniciales. Aunque en estos apuntes ocupan un lugar secundario, no olvidemos que, como la mayoría de las ecuaciones diferenciales son no resolubles, será en el futuro necesario acudir a ellos (y a otros más precisos) en muchas ocasiones. Pero antes utilizarlos, convendrá hacerse una idea cualitativa de las soluciones (¿cómo deben ser las soluciones numéricas que nos salgan?, ¿serán estables?, ¿se irán a infinito en tiempo finito?, ...).

1.1 Métodos elementales de resolución

Ecuaciones separables.

Son las que se pueden escribir en la forma [s] $\boxed{y'=\frac{p(t)}{q(y)}}$.

Entonces $\int q(y)dy=\int p(t)dt+C$ y si podemos hallar P y Q primitivas de p y q:

$$Q(y)=P(t)+C\,.$$

Si pudiésemos despejar y de la última ecuación obtendríamos explícitamente la solución general; en caso contrario se diría que la solución viene dada implícitamente. Se dice que una ecuación es resoluble si se puede expresar su solución en términos de primitivas (aunque sean no calculables; según esto, una ecuación separable, siempre es resoluble). Para determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución general necesitaríamos imponer una condición inicial.

Ej 1. $\boxed{y'=ty^3}$ $\to \int y^{-3}\,dy=\int t\,dt+C \to -\frac{1}{2}y^{-2}=\frac{1}{2}t^2+C \to y=\pm[C^*-t^2]^{-1/2}$,

solución general (hemos llamado $C^*=-2C$; a partir de ahora, como se hace normalmente por comodidad en la escritura, no cambiaremos el nombre de las constantes arbitrarias que nos vayan apareciendo: todas ellas serán C).

Hallemos las soluciones que cumplen dos datos iniciales distintos (mientras no estudiemos existencia y unicidad, nos preocuparemos poco de si las funciones obtenidas son las únicas que los satisfacen):

$$y(0)=1 \to 1=\pm[C^*]^{-1/2} \to C^*=1 \to y=\left[1-t^2\right]^{-1/2}$$

pues, evidentemente, sólo nos sirve el signo + de la raíz ($y(0)=-1 \to y=-[1-t^2]^{-1/2}$).
Observemos que esta solución sólo está definida en el intervalo $(-1,1)$.

$$y(0)=0 \to 0=\pm[C^*]^{-1/2} \text{ que no se satisface para ningún } C^*.$$

Pero es claro que $y\equiv 0$ satisface la ecuación y esa condición inicial. No es raro que en el proceso de cálculo desaparezca alguna solución. El teorema de existencia y unicidad será de mucha ayuda en esos casos.

Ej 2. $\boxed{y'=\mathrm{e}^{y-t^2}}$ $\to \int \mathrm{e}^{-y}dy=\int \mathrm{e}^{-t^2}dt+C \to \mathrm{e}^{-y}=C-\int \mathrm{e}^{-t^2}dt$ (no calculable) $\to$

$$y=-\ln\left[C-\int \mathrm{e}^{-t^2}dt\right].$$

El símbolo $\int$ designa cualquiera de las primitivas del integrando. Si queremos imponer algún dato inicial debemos fijar una de ellas poniendo límites a la integral. Por ejemplo, la solución que cumple $y(0)=7$ es:

$$y=-\ln\left[C-\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2}ds\right] \to 7=-\ln[C-0] \to y=-\ln\left[\mathrm{e}^{-7}-\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2}ds\right],$$

función perfectamente definida (no sería demasiado complicado obtener alguna información sobre ella).

Hay ecuaciones que no son de la forma [s], pero que **se convierten en ecuaciones separables mediante un cambio de variable dependiente**. Los dos tipos fácilmente identificables son:

Ecuaciones homogéneas: $\boxed{y'=f\left(\frac{y}{t}\right)}$.

Se convierten en separables haciendo $z=\frac{y}{t}$, pues

$$y=tz \to y'=tz'+z=f(z) \to \frac{z'}{f(z)-z}=\frac{1}{t} \to \int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|t|+C$$

Ej 3. $\boxed{y'=\frac{t^3y+y^4}{t^4}}=\frac{y}{t}+\left(\frac{y}{t}\right)^4 \underset{z=y/t}{\to} tz'+z=z+z^4 \to z^{-3}=C-3\ln|t|=\frac{t^3}{y^3} \to y=\frac{t}{\left[C-3\ln|t|\right]^{1/3}}$.

[Las homogéneas típicas son aquellas en que $f(t,y)$ es un cociente de polinomios homogéneos del mismo grado].

Ecuaciones del tipo: $\boxed{y'=f(at+cy)}$ **, con** a **y** c **constantes**.

Se hace $z=at+cy$ y se tiene: $z'=a+cy'=a+cf(z) \to \int\frac{dz}{a+cf(z)}=t+C$.

Ej 4. $\boxed{y'=(y+2t)^{-2}-1}$ $z=y+2t \to z'=z^{-2}+1 \to \int\frac{z^2dz}{1+z^2}=z-\arctan z=t+C \to$

$y+t-\arctan(y+2t)=C$. No se puede despejar y .

La solución con $y(0)=1$ viene dada implícitamente por $y+t-\arctan(y+2t)=1-\frac{\pi}{4}$.

Ecuaciones lineales.

Son de la forma [l] $\boxed{y'=a(t)y+f(t)}$.

Si $f(t)\equiv 0$ la ecuación se dice **homogénea**: [h] $\boxed{y'=a(t)y}$,
y la sabemos resolver por ser separable:

$$\ln|y|=\int a(t)dt+C \to |y|=e^Ce^{\int a(t)dt} \to \boxed{y=C\,e^{\int a(t)dt}}$$

(al sustituir e^C por C hemos incluido las soluciones positivas y negativas del valor absoluto y además la solución $y\equiv 0$ que nos habíamos comido al dividir por y).

Para [l], ecuación **no homogénea**, hallamos su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función $C(t)$ (es el llamado método de variación de las constantes que es aplicable en situaciones más generales). Llevando nuestra conjetura a [l]:

$$y=C(t)e^{\int a(t)dt} \to C'e^{\int a}+aCe^{\int a}=aCe^{\int a}+f$$

$$\to C(t)=\int C'(t)dt=\int e^{-\int a(t)dt}f(t)dt+C$$

Así pues, la solución **general** de [l] es: $\boxed{y=Ce^{\int a(t)dt}+e^{\int a(t)dt}\int e^{-\int a(t)dt}f(t)dt}$.

Esta es la llamada **fórmula de variación de las constantes**. Nos irán apareciendo en el capítulo 2 otras con el mismo nombre y de aspecto similar (allí las exponenciales serán matrices). Aunque para resolver una ecuación lineal concreta se podría repetir el proceso de variar constantes, es conveniente memorizar esta fórmula ya que se utiliza muy a menudo.

Observemos que la solución general de una ecuación lineal no homogénea resulta ser la **suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la no homogénea** (lo mismo sucederá en las lineales de mayor orden). Si de alguna forma somos capaces de encontrar una solución cualquiera de [l], nos ahorramos el cálculo de alguna integral.

Si en vez de la solución general de [l] lo que queremos es la **solución particular que satisface** $y(t_o)=y_o$ (aunque podríamos simplemente hallar la solución general e imponer el dato), es inmediato comprobar que :

$$\boxed{y=y_o\,\mathrm{e}^{\int_{t_o}^{t}a(t)dt}+\mathrm{e}^{\int_{t_o}^{t}a(t)dt}\int_{t_o}^{t}\mathrm{e}^{-\int_{t_o}^{s}a(u)du}f(s)\,ds}$$

es la solución del problema de dicho problema de valores iniciales.

Si $a(t)\equiv a$, [l] se llama ecuación lineal con **coeficientes constantes** y su solución general adopta la forma:

$$\boxed{y=C\,\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{at}\int\mathrm{e}^{-at}f(t)\,dt}\ .$$

Ej 5. $\boxed{y'=-\frac{y}{t}+\mathrm{e}^{t}\quad\text{con}\quad y(1)=1}$.

Para aplicar la fórmula de variación de las constantes, como $\mathrm{e}^{\int a}$ aparece 3 veces, empezaremos siempre calculando esta exponencial:

$$\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{-\ln t}=\mathrm{e}^{\ln t^{-1}}=\tfrac{1}{t}\ \to\ y=\tfrac{C}{t}+\tfrac{1}{t}\int t\mathrm{e}^{t}dt=\tfrac{C}{t}+\mathrm{e}^{t}-\tfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}\ \overset{y(1)=1}{\to}\ y=\tfrac{1}{t}+\mathrm{e}^{t}-\tfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}\ .$$

O si queremos aplicar la fórmula para el problema de valores iniciales:

$$-\int_1^t\tfrac{dt}{t}=\mathrm{e}^{-\ln t}=\tfrac{1}{t}\ \to\ y=1\cdot\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{t}\int_1^t s\mathrm{e}^{s}ds=\tfrac{1}{t}+\mathrm{e}^{t}-\tfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}\ .$$

Ej 6. Hallemos la solución general de $\boxed{y'=2y-6}$.

Hay una solución que salta a la vista: $y_p=3$.

Como la general de la homogénea es $C\mathrm{e}^{2t}$, la solución general buscada es $y=C\mathrm{e}^{2t}+3$.

O bien, con la fórmula de variación de las constantes: $y=C\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t}\int 6\mathrm{e}^{-2t}dt=C\mathrm{e}^{2t}+3$.

[En el capítulo 2 describiremos cómo buscar soluciones particulares de las ecuaciones lineales de cualquier orden con coeficientes constantes tanteando de forma adecuada a la forma del 'término independiente' $f(t)$].

Hay otras **ecuaciones que se pueden reducir a lineales**:

Ecuación de Bernouilli: $\boxed{y'=a(t)y+f(t)y^{p}}$, $p\neq 1$

(p cualquier real, entero o no; si $p=1$, es lineal).

O sea, $y^{-p}y'=a(t)y^{1-p}+f(t)$. Haciendo $\boxed{z=y^{1-p}}$ se convierte en

$z'=(1-p)a(t)z+(1-p)f(t)$, que es lineal y ya hemos visto cómo resolverla.

Ej 7. $\boxed{y'=\frac{2y}{t}+\frac{t}{y}}$ que es de Bernouilli con $p=-1$.

Mejor que recordar las expresiones de arriba escribamos:

$2yy'=\frac{4}{t}y^2+2t$, para que aparezcan explícitamente la z y la z' . Haciendo $z=y^2$:

$z'=\frac{4z}{t}+2t$ lineal, con $\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{4\ln t}=t^4\ \to\ z=Ct^4+t^4\int\frac{2dt}{t^3}=Ct^4-t^2\ \to\ y=\pm t\sqrt{Ct^2-1}$.

$\Big[$También es homogénea: $\overset{z=y/t}{\to}\ tz'+z=2z+\frac{1}{z}\to\int\frac{2z}{z^2+1}=\int\frac{2dt}{t}+C\to z^2=Ct^2-1=(\frac{y}{t})^2\uparrow\Big]$.

Ecuación de **Riccati**: $\boxed{y'=a(t)y+b(t)y^2+f(t)}$.

Todas las ecuaciones anteriores eran resolubles (aunque pudieran aparecer primitivas no calculables). La de Riccati no lo es en general. **Sólo se puede resolver si se conoce una solución particular** y_p **de la ecuación** (y eso casi nunca será posible).

En ese caso, el cambio $\boxed{u=y-y_p}$ la convierte en una Bernouilli con $p=2$:

$$u' = y' - y_p' = [a(t)+2b(t)y_p(t)]u+b(t)u^2 + [a(t)y_p(t)+b(t)y_p^2(t)+f(t)-y_p'(t)]$$
$$u' = [a(t)+2b(t)y_p(t)]\,u + b(t)u^2 \quad \text{(ya que } y_p \text{ es solución)},$$

y sabemos que esta ecuación para la u se convierte en lineal con $\boxed{z=y^{-1}}$.

No hay métodos sistemáticos de búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones de Riccati. Si en la ecuación aparecen polinomios, se puede intentar tantear con polinomios; si funciones trigonométricas, podemos probar con senos y cosenos... pero lo normal es que estos tanteos no conduzcan a nada.

Ej 8. $\boxed{(1+t^3)\,y'+2ty^2+t^2y+1=0}$.

Es de Riccati ya que hay término en y, término en y^2 y una $f(t)$. Soluciones constantes salta a la vista que no tiene. Lo siguiente que podemos tantear en este caso son las rectas más sencillas $y=At$, pues vemos que quedarán potencias t^3 y constantes:

$$y=At \;\to\; A+At^3+2A^2t^3+At^3+1=0 \;\to\; \text{debe ser a la vez } A+1=0 \text{ y } 2A+2A^2=0\,.$$

Casualmente se dan ambas igualdades si $A=-1$, con lo que $y=-t$ es solución particular.
[Si en vez del último 1 de la ecuación hubiese, por ejemplo, un 2, ya no sería resoluble].

Haciendo $u=y+t$ debe desaparecer el término independiente y convertirse en Bernouilli:

$$u' = y'+1 = -\tfrac{2t}{1+t^3}(u-t)^2 - \tfrac{t^2}{1+t^3}(u-t) - \tfrac{1}{1+t^3} + 1 = \tfrac{3t^2}{1+t^3}u - \tfrac{2t}{1+t^3}u^2$$

Con $z=u^{-1}$ se llega a la lineal $z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z + \frac{2t}{1+t^3} \to z = \frac{C}{1+t^3} + \frac{1}{1+t^3}\int 2t\,dt = \frac{C+t^2}{1+t^3}$.

Y deshaciendo los cambios obtenemos la solución general: $y = \frac{1}{z} - t = \frac{1-Ct}{C+t^2}$.

Impongamos datos iniciales y veamos cuántas soluciones los satisfacen:

$y(1)=1 \to C=0$, $y=\frac{1}{t^2}$ (podíamos haber impuesto $u(1)=2$ ó $z(1)=\frac{1}{2}$).
$y(-1)=1 \to 1+C=1+C$, toda solución lo cumple (ya estudiaremos existencia y unicidad).

Ecuaciones exactas.

Consideremos una ecuación escrita en la forma: [e] $\boxed{M(t,y)+N(t,y)\,y'=0}$.

[e] es **exacta** si existe una función de dos variables $U(t,y)$ tal que $\boxed{M=U_t\,,\, N=U_y}$

[es decir, [e] lo es si existe función potencial U para el campo vectorial (M,N)].

En ese caso la solución general de [e] es $\boxed{U(t,y)=C}$, pues para cualquier función derivable $y(t)$ definida implícitamente por esta expresión es:

$$0 = \tfrac{d}{dt}U(t,y(t)) = U_t+U_y\,y' = M+N\,y'\ .$$

Un resultado clásico de cálculo asegura que para que U exista debe ser $\boxed{M_y \equiv N_t}$.

Una vez comprobado que U existe se puede hallar como en el ejemplo siguiente.

Ej 9. $\boxed{y'=-\frac{3t^2+6ty^2}{6t^2y+4y^3}}$, o sea, $(3t^2+6ty^2)+(6t^2y+4y^3)y'=0$. Es exacta: $M_y=12ty=N_t$.

La U debe cumplir: $\begin{array}{l} U_t=3t^2+6ty^2 \to U=t^3+3t^2y^2+p(y) \\ U_y=6t^2y+4y^3 \to U=3t^2y^2+y^4+q(t) \end{array} \to U=t^3+3t^2y^2+y^4$.

Y la solución general en forma implícita es $t^3+3t^2y^2+y^4=C$.

Si [e] no es exacta podríamos intentar encontrar una función $g(t,y)$, **factor integrante de** [e] , tal que $gM+gNy'=0$ **sí sea exacta**. Debería entonces cumplirse:

$$[gM]_y \equiv [gN]_t \text{ , es decir, } \quad [\bullet] \;\; Ng_t - Mg_y = \left[M_y - N_t\right]g$$

ecuación en derivadas parciales bastante más complicada que la inicial. Encontrar la g es, pues, un problema irresoluble en general, pero posible en ciertos casos especiales. Por ejemplo, si resulta ser $[M_y-N_t]/N$ una **función que sólo depende de** t, [e] admite un factor integrante $g(t)$ que es únicamente **función de la variable** t, pues [•] pasa a ser una ecuación ordinaria (lineal homogénea) que sabemos resolver :

$$g'(t)=\frac{M_y-N_t}{N}g(t) \to \; g(t)=\mathrm{e}^{\int [M_y-N_t]/N} \quad \text{(eligiendo } C=1\text{)}.$$

Análogamente se ve que si $[M_y-N_t]/M$ es **función de** y hay factor integrante $g(y)$ que **depende de** y .

Observemos que es mucha casualidad que $[M_y-N_t]$ sea idénticamente cero, o que al dividir esa expresión por N o por M quede una función sólo de una variable; pocas ecuaciones serán, pues, exactas, o admitirán factores integrantes $g(t)$ ó $g(y)$. Podría pensarse en buscar factores integrantes de la forma, por ejemplo, $g(t+y)$ ó $g(ty)$ (se obtendrían entonces para la g ecuaciones ordinarias como antes), pero no merece la pena el esfuerzo, porque, como se ha dicho, lo normal es que una ecuación sea no resoluble.

Ej 10. $\boxed{(t-t^2y)y'-y=0}$ $M=-y$, $N=t-t^2y$, $M_y-N_t=2ty-2\not\equiv 0$. No es exacta.

Sin embargo, $\frac{M_y-N_t}{N}=-\frac{2}{t} \to g(t)=\mathrm{e}^{-2\ln t}=\frac{1}{t^2} \to (\frac{1}{t}-y)y'-\frac{y}{t^2}=0$ es exacta.

Siguiendo como en el ejemplo anterior se tiene la solución general: $\frac{y}{t}-\frac{1}{2}y^2=C$.

Podemos también solucionar esta ecuación (y bastantes más) de una forma diferente: utilizando el hecho de que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función (si ambas son no nulas). Se observa que es complicada la expresión obtenida al despejar la $dy(t)/dt=y/(t-t^2y)$, pero que en cambio es integrable la ecuación que se obtiene al mirar la t como función de y :

$$\frac{d(t(y))}{dy}=\frac{t}{y}-t^2 \text{ (Bernouilli) } \overset{z=1/t}{\to} \frac{d(z(y))}{dy}=-\frac{z}{y}+1 \to z=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}=\frac{1}{t} \; .$$

1.2 Dibujo aproximado de soluciones

Consideremos la ecuación [e] $\boxed{y'=f(t,y)}$.

Cada una de sus soluciones es una función $y(t)$ cuya gráfica tiene en cada uno de sus puntos $(t,y(t))$ la pendiente dada por la conocida función $f(t,y)$. Podemos asociar a cada punto (t,y) del plano un segmento de pendiente $f(t,y)$ (a este conjunto de segmentos se le llama **campo de direcciones** de [e]). Una vez dibujado dicho campo (lo que se puede hacer sin resolver la ecuación), las soluciones de [e] serán las **curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones**.

Para dibujar este campo de forma organizada conviene, si es posible, trazar algunas **isoclinas**, es decir, curvas $f(t,y)=K$ en que la pendiente asignada por f es constante (si la f es complicada, también lo serán las isoclinas y no las podremos pintar), para unos cuantos valores de K. En particular intentaremos dibujar la isoclina con $K=0$ (segmentos horizontales, posibles **máximos** y **mínimos** de las soluciones) y la de '$K=\infty$' (segmentos verticales, en esos puntos las $y(t)$ no serán derivables). En el peor de los casos, aunque sea imposible pintar las isoclinas, podremos ir dibujando segmentos del campo en diferentes puntos (t,y).

Se puede dar más información sin necesidad de resolver [e]. Como las zonas de **crecimiento** y **decrecimiento**, regiones con $f(t,y)>0$ y $f(t,y)<0$. O las curvas de puntos de **inflexión**, viendo dónde se anula y'', calculable a partir de ecuación: $y''=f_t(t,y)+f_y(t,y)f(t,y)=0$. Buscaremos **rectas solución** de diferentes formas. El TEyU nos dirá dónde podrán tocarse las soluciones...

Aún cuando [e] sea resoluble, las ideas anteriores suelen dar más datos sobre el dibujo de sus soluciones que la expresión analítica (tal vez complicada, o definida implícitamente, o en función de primitivas,...).

Ej 1. Dibujemos aproximadamente las soluciones de $\boxed{y'=t-2y}$ $=K \rightarrow y=\frac{t}{2}-\frac{K}{2}$.

Las isoclinas son, pues, rectas de pendiente $\frac{1}{2}$, es decir, de la forma $y=\frac{t}{2}+b$.

Dibujamos algunas de estas isoclinas rectas para diferentes K y sobre cada una pintamos segmentos de pendiente K:

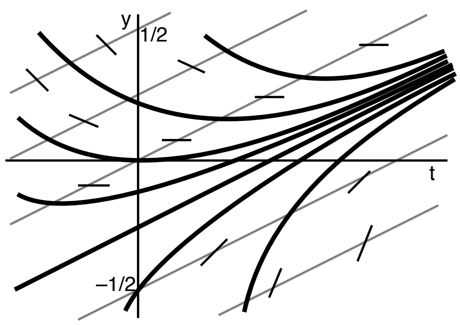
$$K=-1,\ -\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2}$$

(cortan $t=0$ respectivamente en

$$y=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{4}\ ).$$

[O bien tenemos esas rectas dando los valores

$$b=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ 0,\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{3}{4}\ ].$$



Para $K=\frac{1}{2}$, la recta y los segmentos sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto esa isoclina **es recta solución** de la ecuación (pues, desde luego, es tangente al campo de direcciones en cada punto). Aunque parece que las soluciones no cambian de concavidad, hallamos:

$$y''=1-2y'=1-2t+4y=0 \rightarrow y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4},$$ que es la recta solución ya calculada.

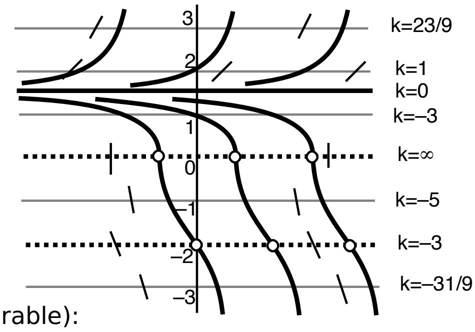
Si [e] **tiene rectas solución, aparecerán al hacer** $y''=0$, pues $(mt+b)''=0$.

Basándonos en los segmentos dibujados podemos hacernos una idea de las soluciones. Parece que todas tienden hacia la recta solución. Por ser $t-2y$ una función tan buena, el TEyU nos asegurará que, sin embargo, dos soluciones distintas nunca llegarán a tocarse. Podemos en este caso resolver la ecuación (es lineal) y comprobar (este ejemplo no es muy práctico, más interés tiene el dibujo aproximado de ecuaciones no resolubles). Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular que hemos encontrado:

$y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2t}$ (a lo mismo llegaríamos con la fórmula: $y=Ce^{-2t}+e^{-2t}\int te^{2t}dt$).

Es inmediato comprobar que **las isoclinas de las ecuaciones de la forma** $y'=f(at+cy)$ (la anterior es una de ellas) siempre son **rectas paralelas** (de la forma $y=-at/c+b$). En particular, esto ocurre para las ecuaciones **autónomas** $y'=f(y)$, donde son las rectas horizontales $y=b$. Veremos en 1.5 que dibujar a grandes rasgos las soluciones de las autónomas será muy fácil, pero si queremos precisar más el dibujo necesitaremos las ideas de esta sección, que son las que usaremos en el siguiente ejemplo:

Ej 2. $\boxed{y'=y-\frac{4}{y^2}}$. Las isoclinas son las rectas: $y=b \;\to\; y'=b-\frac{4}{b^2}=K$.



Si $K=0$ ($b=4^{1/3}\equiv b^*$) tenemos una solución constante. Por encima de ella crecen ($y'>0$) y por debajo decrecen. Sobre $y=0$ ($K=\infty$) las $y(t)$ no serán soluciones (no son derivables).

$$y''=[1+\tfrac{8}{y^3}]y'=\frac{(y^3+8)(y^3-4)}{y^3}$$

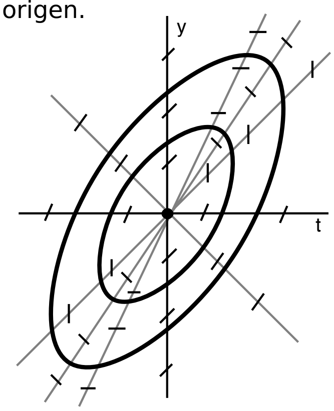
da la concavidad: las soluciones son $\cup$ en las regiones del plano con $y>b^*$ ó $y\in(-2,0)$, y son $\cap$ si $y\in(0,b^*)$ o si $y<-2$. Además, como debía ocurrir, $y''=0$ nos da la solución $y=b^*$.

La solución es también calculable (ecuación separable):

$$\int\frac{3y^2dy}{y^3-4}=3t+C \to\; y=[4+Ce^{3t}]^{1/3}$$

Esto aporta poco al dibujo aproximado, pero da datos que no se deducen de él: las soluciones con $y>b^*$ están definidas $\forall t$, las soluciones tienden hacia b^* si $t\to-\infty$, . . .

Ej 3. $\boxed{y'=\frac{2t-y}{t-y}}$ $=K \;\to\; y=\frac{2-K}{1-K}t$. Son rectas pasando por el origen.



Las isoclinas de toda ecuación homogénea $y'=f(\frac{y}{t})$ **son las rectas** $y=mt$ **, pues** $f(t,mt)=f(m)=K$.

Pintamos diferentes isoclinas para varios K :

$K=0\to y=2t$; $K=1\to t=0$; $K=-1\to y=\frac{3}{2}t$; . . .

O bien, como las isoclinas son $y=mt$, es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que queramos y trazar sobre ella segmentos de pendiente $K=f(t,mt)=\frac{2-m}{1-m}$:

$m=0\to K=2$; $m=1\to K=\infty$; $m=-1\to K=\frac{3}{2}$; . . .

Una recta con $K=f(m)=m$ **sería solución** (aquí no hay). Como no parece haber inflexión, no hallamos y'' .

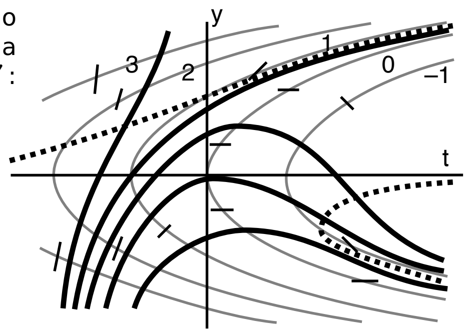
Las curvas tangentes al campo parecen cerradas o espirales poco abiertas. Resolvemos para salir de dudas. Ecuación homogénea $y'=\left[2-\frac{y}{t}\right]/\left[1-\frac{y}{t}\right]$ o exacta $(2t-y)+(y-t)y'=0$. Por los dos caminos se llega a $y^2-2ty+2t^2=C$. Las soluciones son elipses. Con más propiedad, para cada C esta expresión define **dos soluciones** distintas en $(-\sqrt{C},\sqrt{C})$: $y=t+\sqrt{C-t^2}$, $y=t-\sqrt{C-t^2}$ funciones definidas en $[-\sqrt{C},\sqrt{C}]$ y no derivables en $\pm\sqrt{C}$.

Ampliando el concepto de solución, llamaremos **curva integral** de [e] a una curva tangente en cada punto al campo de direcciones, aunque no esté descrita por una única función $y(t)$ o tenga tangente vertical en algún punto (como las elipses de antes). De forma más precisa, llamemos:

$$[e^*]\quad \boxed{\frac{dt}{dy}=\frac{1}{f(t,y)}}$$

a la ecuación obtenida mirando la t como función de y . **Una curva integral de** [e] **será una curva formada por soluciones** $y(t)$ **de** [e], **por soluciones** $t(y)$ **de** [e*] **o por ambas**. Como la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada es claro que [e] y [e*] tienen las mismas curvas integrales, aunque puede haber soluciones de una que no lo sean de la otra. Las elipses del ejemplo son funciones derivables $t(y)$ (soluciones, por tanto de [e*]) cerca de la isoclina $y=t$ de pendiente ∞ ; cerca de $y=2t$, donde hay buenas soluciones $y(t)$, no se puede poner la t como función derivable de y .

Ej 4. $\boxed{y' = y^2 - t} = K \rightarrow$ Las isoclinas son parábolas: $t = y^2 - K$. Dibujamos algunas.

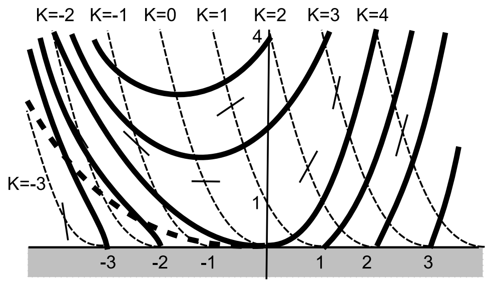


La de $K=0$ da los máximos de las soluciones (como $y'>0$ si $t<y^2$ e $y'<0$ si $t>y^2$ las soluciones crecen a su izquierda y decrecen a su derecha). Hallando y'':

$y'' = 2yy' - 1 = 2y^3 - 2ty - 1 = 0 \ \rightarrow\ t = y^2 - \frac{1}{2y}$

obtenemos la curva de puntos de inflexión (a puntos en la figura), curva en la que la $t \to +\infty$ $(-\infty)$ cuando $y \to 0^-$ (0^+), que se acerca a $t = y^2$ si $y \to \pm\infty$, y cuyo mínimo local (para la t) se puede calcular. Con estos datos dibujamos las soluciones aproximadas de esta ecuación (que no es resoluble elementalmente).

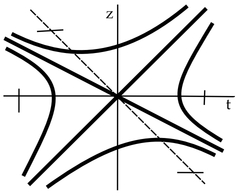
Ej 5. $\boxed{y' = \sqrt{y} + t} = K \rightarrow$ Isoclinas: $t = K - \sqrt{y}$ [o rama decreciente de $y = (t-K)^2$].



Ecuación definida sólo en el semiplano $y \geq 0$. Las soluciones crecen si $t \geq -\sqrt{y}$ y decrecen en el resto de $y \geq 0$.

$$y'' = \frac{\sqrt{y}+t}{2\sqrt{y}} + 1 \ \rightarrow\ t = -3\sqrt{y} \ \text{ inflexión.}$$

La ecuación no es de ninguno de los tipos resolubles de 1.1, pero hacemos $z = \sqrt{y}$ a ver qué pasa (en general los 'cambios ingeniosos' no nos llevan a nada, pero aquí sí):



$z = \sqrt{y} \ \rightarrow\ z' = \frac{z+t}{2z}$ (ecuación homogénea) $\xrightarrow{u=z/t} (u-1)^2(2u+1) = \frac{C}{t^3}$

$\rightarrow (z-t)^2(2z+t) = \boxed{C = (t-\sqrt{y}\,)^2(t+2\sqrt{y}\,)} = 0 \ \rightarrow\ \begin{matrix} t=\sqrt{y} \\ t=-2\sqrt{y} \end{matrix}$

De aquí sale una solución que pasa por $(0,0)$: $y = \begin{cases} t^2,\ t \geq 0 \\ t^2/4,\ t \leq 0 \end{cases}$.

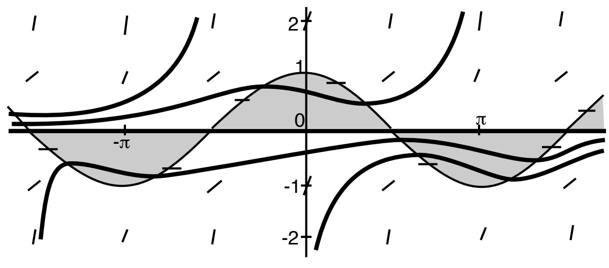
Los dibujos aproximados de ecuaciones homogéneas son sencillos:

$f(t,mt) = \frac{m+1}{2m} \ \rightarrow\ m=-1$ horizontal, $m=0$ vertical, $\frac{m+1}{2m} = m \ \rightarrow\ m = 1, -\frac{1}{2}$ soluciones.

Como la y es el cuadrado de la z, el dibujo de la izquierda corrobora el dibujo de arriba.

En el último ejemplo las isoclinas van a ser complicadas, y tendremos que dibujar segmentos en diferentes puntos del plano tras hallar su $f(t,y)$ organizándonos de otra forma:

Ej 6. $\boxed{y' = y^2 - (\cos t)y}$.



La única isoclina sencilla es la de $K=0$ que da la solución $y=0$ y la curva $y = \cos t$. Las soluciones decrecen si $y(y-\cos t)<0$, o sea, en las zonas grises (y es $y'>0$ fuera). Haciendo $y''=0$ se obtiene una curva difícil de dibujar (y, claro, la recta solución $y=0$).

Parece adecuado dibujar segmentos sobre las rectas $t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$f\Big(\tfrac{[2k-1]\pi}{2}, y\Big) = y^2 \ ;\ f(2k\pi, y) = y^2 - y \ ;\ f([2k-1]\pi, y) = y^2 + y \ .$$

Con todo lo anterior podemos ya esquematizar las soluciones.

La ecuación es de Bernouilli y resoluble:

$$y = z^{-1} \rightarrow z' = (\cos t)z - 1\,,\ z = e^{\operatorname{sen} t}\big(C - \textstyle\int e^{-\operatorname{sen} t}dt\big)\,,\ y = e^{-\operatorname{sen} t}\big(C - \textstyle\int e^{-\operatorname{sen} t}dt\big)^{-1},$$

pero, al ser la primitiva no calculable, es complicado obtener información a partir de esta solución sobre el dibujo.

Seguiremos haciendo dibujos aproximados en las secciones posteriores.

1.3 Existencia, unicidad, prolongabilidad

Consideremos el problema de valores iniciales [P] $\boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$.

Supondremos la f definida en un determinado subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$ y que $(t_o,y_o)\in D$.

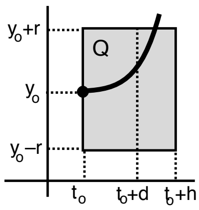
Precisamos con detalle la definición imprecisa de solución utilizada hasta ahora:

> Una **solución** de [P] es una función $y(t)$ **derivable en un intervalo** $I\ni t_o$ tal que $y(t_o)=y_o$ y tal que para todo $t\in I$ se cumple que $(t,y(t))\in D$ e $y'(t)=f(t,y(t))$.

Nuestro objetivo es estudiar en qué condiciones hay una única solución de [P]. El siguiente teorema (de **existencia y unicidad**, cuyas hipótesis serán, casi siempre, comprobables a simple vista y cuya larga demostración describiremos más adelante sin demasiados detalles) nos lo va a precisar para casi todas las ecuaciones que consideremos y para casi todos los datos iniciales que impongamos:

Teor 1. Sean f y f_y continuas en $Q=[t_o,t_o+h]\times[y_o-r,y_o+r]$. Entonces el problema [P] posee una única solución definida al menos en un intervalo $I=[t_o,t_o+d]$ con $d\le h$.

(o lo mismo para la izquierda de t_o , sustituyendo $[t_o,t_o+h]$ y $[t_o,t_o+d]$ por $[t_o-h,t_o]$ y $[t_o-d,t_o]$)



Observemos que el teorema asegura que existe solución única definida al menos en un intervalo (lo que se llama solución **local**) aunque este intervalo podría ser pequeño (aún menor que la base $[t_o,t_o+h]$ del Q en el que es continua f). Al final de la sección nos preocuparemos de cuál es el intervalo máximo de definición de las soluciones. Uniendo los resultados a izquierda y derecha, podemos abreviar el teorema y escribir el resultado que aplicaremos en la práctica casi todas las veces:

TEyU. f y f_y continuas en un entorno de (t_o,y_o) $\Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en un intervalo que contiene a t_o .

Mucho más larga es la demostración (que no daremos, puesto que exige resultados aún más avanzados de matemáticas) del teorema siguiente (de **existencia**), que asegura que si a f se le exige sólo la continuidad se garantiza que hay solución aunque puede fallar la unicidad:

TE. f continua en un entorno de (t_o,y_o) $\Rightarrow$ tiene [P] al menos una solución en un entorno de t_o .

Veamos varios ejemplos que ilustren lo que dicen (y lo que no dicen) los teoremas anteriores:

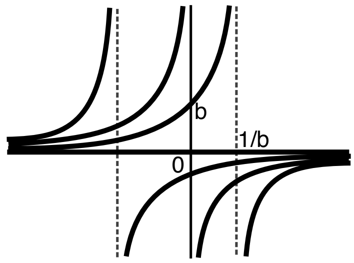
Ej 1. El problema $\boxed{\begin{cases} y'=\operatorname{sen}(t-\ln[y^2+e^t]) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ tiene solución única (que no sabremos calcular) para todo t_o y todo y_o pues f y f_y son continuas en un entorno de (t_o,y_o) (claramente son continuas en todo $\mathbf{R}^2$).

Ej 2. $\boxed{y'=\frac{y^2-1}{t}\,,\ y(1)=-1}$ tiene solución única local, al ser f , f_y continuas en un entorno de $(1,-1)$. Resolvemos e imponemos el dato para ver cuál es. Es separable (o Riccati):

$$\int\frac{2dy}{y^2-1}=\ln\frac{y-1}{y+1}=2\ln t+C\ \to\ \frac{y-1}{y+1}=Ct^2\ \to\ y=\frac{1+Ct^2}{1-Ct^2}\ \stackrel{y(1)=-1}{\to}\ -1+C=1+C$$

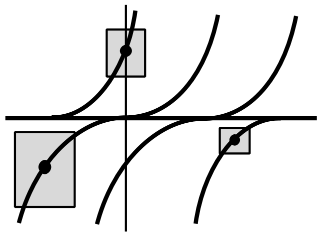
¡Ningún C lo satisface! Pero hay una según el TEyU (sin él pensaríamos que no). Se ve que $y\equiv-1$ es la solución perdida en el cálculo. Observemos que esta solución cumple $y(0)=-1$, a pesar de ser f discontinua en $(0,-1)$ [en rigor, $y\equiv-1$ no es solución en $t=0$ pues f no existe ahí, pero podríamos definir $f(0,y)=0$]. Los teoremas son sólo **condiciones suficientes**: puede ser f muy mala y haber solución, e incluso ser única. Podemos observar también que todas las soluciones (excepto $y\equiv-1$) cumplen $y(0)=1$.

Ej 3. $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=b \end{cases}}$ tiene solución única local que es $y=\frac{b}{1-bt}$ ($y=\frac{1}{C-t}$ + dato inicial).



El $Q=[0,h]\times[b-r,b+r]$ del teorema 1 puede ser lo gordo que queramos [pues f y f_y son continuas en todo $\mathbf{R}^2$]. Sin embargo el d resultante, para $b>0$, puede ser muy pequeño [por grande que sea h], pues la solución está sólo definida en $(-\infty,\frac{1}{b})$ [la expresión de la solución es válida $\forall t\neq\frac{1}{b}$, pero para $t>\frac{1}{b}$ define una solución distinta, definida en $(\frac{1}{b},\infty)$]. Si nos fijamos en los $b<0$ tenemos algo totalmente similar: las soluciones sólo llegan a la izquierda hasta la asíntota de $\frac{1}{b}$. Sólo si $b=0$ se tiene una solución definida $\forall t$: la $y\equiv 0$. Recordemos que el teorema solamente garantiza solución única **local**.

Ej 4. $\boxed{\begin{cases} y'=3y^{2/3} \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ $f=3y^{2/3}$ continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución $\forall(t_o,y_o)$ por el TE. $f_y=2y^{-1/3}$ continua en $\mathbf{R}^2-\{y=0\} \Rightarrow$ la solución es única si $y_o\neq 0$.



Cuando $y_o=0$, al no estar definida f_y, **puede** fallar la unicidad. Resolviendo e imponiendo $y(t_o)=0$ obtenemos $y=(t-t_o)^3$. Como puede haberla (sin el teorema no se nos ocurriría), buscamos otra solución con ese dato y la hallamos sin dificultad: $y\equiv 0$ también lo cumple (a las soluciones formadas por puntos en los que falla la unicidad (como esta $y\equiv 0$) se les llama soluciones singulares y no suelen estar recogidas por las soluciones generales).

Ej 5. $\boxed{\begin{cases} y'=3\sqrt{t}\,y^2 \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ (f no existe si $t<0$). f y $f_y=6\sqrt{t}\,y$ continuas en $\{t\geq 0\}$.

Existe solución $\forall t_o\geq 0$. Para $t_o>0$ esto se deduce del TEyU (pues f y f_y son continuas en todo un entorno de (t_o,y_o), pero para los puntos de la recta $t=0$ hay que utilizar el teorema 1, pues sólo son continuas en un **entorno a la derecha** de los puntos $(0,y_o)$. La ecuación es resoluble (separable) y se puede ver cuáles son estas soluciones:

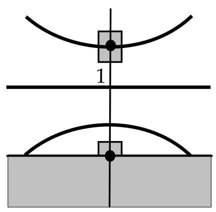
$$-\frac{1}{y}=2t^{3/2}+C \;\to\; y=\frac{1}{C-2t^{3/2}}\;,\; y(0)=y_o \;\to\; y=\frac{y_o}{1-2y_o t^{3/2}}\;.$$

[Que conste que los TEyU no exigen nada a la f_t (en este ejemplo es discontinua en $t=0$ pero no importa)]. [Observemos que, como en el Ej 3, aunque son continuas f y f_y en todo el semiplano $\{t\geq 0\}$, las soluciones no están definidas en todo $[0,\infty)$, pues sólo llegan (salvo la $y\equiv 0$) hasta la asíntota vertical de $t=1/(2y_o)^{2/3}$].

Ej 6. $\boxed{\begin{cases} y'=t(\sqrt{y}-1) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ f es continua en $\{y\geq 0\}$ y $f_y=\frac{t}{2\sqrt{y}}$ en $\{y>0\}$; f no existe si $\{y<0\}$.

Para $y_o>0$ el TEyU asegura solución única, pero para $y_o=0$ no dice nada. El TE tampoco nos informa sobre si al menos existe solución aunque no sea única en $(0,0)$, pues exige que f sea continua en **todo un entorno** del punto. No basta que f sea continua en el punto, o que lo sea (como sucede aquí) en un rectángulo por encima del punto (sí basta que lo sea en el entorno a la derecha o la izquierda del teorema 1, pero no es el caso). Para ver qué ocurre en $(0,0)$ es suficiente, en este ejemplo, analizar el signo de la y':

$y'=0 \to y=1$ (recta solución)
$y'>0$ (crece) en $(0,\infty)\times(1,\infty)$ o en $(-\infty,0)\times(0,1)$
$y'<0$ (decrece) en $(0,\infty)\times(0,1)$ o en $(-\infty,0)\times(1,\infty)$



Por $(0,0)$, por tanto, no puede pasar ninguna solución.
($y\equiv 0$ aquí no satisface, claramente, la ecuación).

[Comprobemos otra vez lo mentirosas que pueden ser las soluciones generales y los errores que se cometen si uno se fía de ellas. La ecuación es separable. Integrándola se obtiene:

$$\sqrt{y}+\log\left|\sqrt{y}-1\right|=\frac{1}{4}t^2+C$$

Parecería que no hay solución con $y(0)=1$ (es la única $y\equiv 1$ perdida) y que con $y(0)=0$ $\to C=0$ hay una única solución (y acabamos de ver que no existe; la expresión de la solución con $C=0$ se satisfará sólo si $y=t=0$].

Veamos qué conclusiones se pueden sacar de aplicar los TEyU a la

$$\text{‘ecuación equivalente’}\quad [e^*]\ \ \frac{dt}{dy}=\frac{1}{f(t,y)}\,.$$

Las **curvas integrales** eran soluciones tanto de [e] $y'=f(t,y)$, como de [e*]. El TEyU habla de existencia y unicidad de **soluciones**. Si por un punto pasa una única solución $y(t)$ de [e] evidentemente pasa también una única curva integral. Pero por un (t_o,y_o) tal que en un entorno suyo f ó $\partial f/\partial y$ no sean continuas pero tal que $1/f$ y $\partial(1/f)/\partial t$ sí lo sean pasará una única solución $t(y)$ de [e*] y, por tanto, una única curva integral (que en muchas ocasiones no será solución de [e]). **Sólo puede pasar más de una curva integral por los puntos en que falle el TEyU tanto para** [e] **como para** [e*] (y en esos puntos no se sabe).

En ocasiones, **el análisis de** [e*]**, informa también sobre la existencia o no de soluciones de nuestra ecuación inicial** [e], utilizando argumentos como los de los siguientes ejemplos.

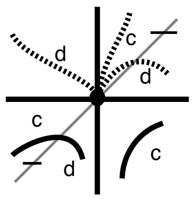
Ej 7. [e] $\boxed{\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t^2+y^2}}$ cuya equivalente es [e*] $\frac{dt}{dt}=t^2+y^2$ (ni una ni otra son resolubles).

El TEyU asegura que hay única solución $y(t)$ de [e] con $y(t_o)=y_o$ $\forall (t_o,y_o)\neq(0,0)$. Por $(0,0)$, al no tener problemas de unicidad la equivalente, pasa una **única curva integral**.

Como la solución $t(y)$ de [e*] que pasa por $(0,0)$ es creciente y su pendiente $t'(0)=0$ esta curva integral será de hecho también una función $y(t)$ pero con derivada ∞ (no es derivable en $t=0$). Concluimos que [e] **no tiene solución con el dato** $y(0)=0$.

Ej 8. Sea [e] $\boxed{\frac{dy}{dt}=\frac{y(y-t)}{t}}$ $\to$ [e*] $\frac{dt}{dy}=\frac{t}{y(y-t)}$. Su solución es (Bernouilli): $y=\frac{e^t}{C-\int t^{-1}e^t dt}$.

El TEyU dice que hay **única solución** $y(t)$ de [e] con $y(t_o)=y_o$ para todo $t_o\neq0$ y todo y_o, pero no precisa si hay ninguna, una, varias o infinitas satisfaciendo $y(0)=y_o$.



Por su parte [e*] tiene única solución $t(y)$ con $t(y_o)=t_o$ si $y_o\neq0$ y si $y_o\neq t_o$. En particular hay única $t(y)$ con $t(y_o)=0$, $y_o\neq0$. Por tanto, **por cada punto, salvo tal vez por** $(0,0)$**, pasa una única curva integral**. Por $(0,0)$ pasan al menos 2: $y=0$ y $t=0$ (soluciones a ojo de [e] y de [e*]). Como por $(0,y_o)$, $y_o\neq0$, sólo pasa la curva $t=0$ (que no es solución de [e]) **no hay solución** $y(t)$ **por esos puntos**. Pero los teoremas no aclaran qué sucede en $(0,0)$. Necesitamos más información. La solución e isoclinas son complicadas. Pero basta analizar crecimiento y decrecimiento para garantizar que **pasan infinitas curvas por** $(0,0)$ [las trazadas a puntos], pero no podemos decir si son soluciones (podrían tener ahí pendiente infinita).

[De la solución se deduce (es difícil) que $y'\to\infty$ si $t\to0$, y así la única solución $y(t)$ por el origen es $y\equiv0$, a pesar de no ser la f ni continua (no estar definida) en ese punto].

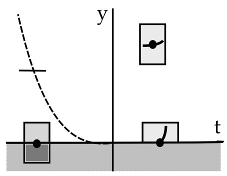
Ej 9. Sea [e] $\boxed{\frac{dy}{dt}=e^{y^{1/3}}}$. $f_y=y^{-2/3}e^{y^{1/3}}$. Para su equivalente [e*] $\frac{dt}{dy}=e^{-y^{1/3}}$ es $(\frac{1}{f})_t=0$.

[e] tiene solución en todo $\mathbf{R}^2$, única en $\mathbf{R}^2-\{y=0\}$. Como hay solución única $t(y)$ en todo $\mathbf{R}^2$, en $y=0$ la solución es también única. A diferencia del ejemplo 4, aunque fallaba el TEyU (no el de existencia) en $y=0$, hay solución única ahí. Y a diferencia de los ejemplos anteriores el considerar la [e*] nos ha dado unicidad y no inexistencia.

Ej 10. Estudiemos la unicidad de los seis ejemplos dibujados aproximadamente en 1.2.

1, 4 y 6, no presentan problemas: solución $y(t)$ única para cualquier $(t_o,y_o)\in\mathbf{R}^2$.

No hay solución $y(t)$ para 2 por $(t_o,0)$ y para 3 por (t_o,t_o), $t_o\neq0$, por razones como las del ejemplo 7: por esos puntos pasa una única curva integral de pendiente vertical. Para 3, por $(0,0)$, donde ni f ni $1/f$ eran continuas, no pasa ninguna curva integral.



Para 5 hay problemas en $(t_o,0)$ (no podemos aplicar ni el TE), pero [e*] tiene solución única $t(y)$ a la derecha de cada $(t_o,0)$, $t_o\neq0$ (con pendiente$\neq0$) y, por tanto, hay solución única $y(t)$ (a la derecha o izquierda) de ellos. De $(0,0)$ los TEyU no informan, pero del dibujo y solución de $z(t)$ se puede concluir que la única solución que pasa por el origen es la allí calculada.

Avancemos hacia el **resumen de la demostración del teorema 1**. En las hipótesis del enunciado de un teorema previo que veremos aparece el término que definimos aquí:

Diremos que una $f(t,y)$ es **lipschitziana respecto de la** y en $D\subset\mathbf{R}^2$ si existe L (constante de Lipschitz) tal que $|f(t,y)-f(t,y^*)|\le L|y-y^*|$ para todo $(t,y),(t,y^*)\in D$.

Pedir que una f sea lipschitziana es pedir algo menos que pedir que f y f_y sean continuas:

f y f_y continuas en $Q\subset\mathbf{R}^2$ compacto $\Rightarrow$ f lipschitziana respecto de la y en Q

Sean $(t,y),(t,y^*)\in Q$. Aplicando el teorema del valor medio a f, vista como función de y se tiene que $\exists c\in(y,y^*)$ con: $f(t,y)-f(t,y^*)=f_y(t,c)[y-y^*]\le L|y-y^*|$, donde L es el valor máximo de $|f_y|$ en Q, que existe por ser función continua en el compacto Q.

[$\Leftarrow$ **no es cierta** (aunque casi todas las f lipschitzianas que aparezcan tengan f_y continua):
$f(t,y)=|y|$ es lipschitziana en $\mathbf{R}^2$ pues $\big||y|-|y^*|\big|\le|y-y^*|\;\forall(t,y),(t,y^*)\in\mathbf{R}^2$ ($L=1$),
pero no existe f_y cuando $y=0$].

Para probar el teorema definimos el siguiente **operador** T (una función que transforma funciones y en funciones Ty):

$$Ty(t)=y_o+\int_{t_o}^t f(s,y(s))\,ds$$

Del teorema fundamental del cálculo integral se deduce fácilmente que:

$$y \text{ es solución de [P]} \iff y(t)=y_o+\int_{t_o}^t f(s,y(s))\,ds \iff Ty=y\,,$$

o, con otras palabras, si y es **punto fijo** del operador T. En una rama de las matemáticas, el análisis funcional, se prueban varios teoremas de punto fijo. Por ejemplo, el llamado **teorema de la aplicación contractiva** para un espacio E de **Banach** (espacio vectorial en el que hay definida una norma respecto de la cual es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy con esa norma tiene límite que pertenece a E (**R**, por ejemplo, lo es)):

Sea $T:E\to E$, E de Banach, tal que $\forall y,y^*\in E$ es $\|Ty-Ty^*\|\le\alpha\|y-y^*\|$, con $0\le\alpha<1$ $\Rightarrow$ existe un único punto fijo de T.

A partir de cualquier $y_0\in E$ definimos la sucesión: $y_1=Ty_0$, $y_2=Ty_1$, ..., $y_{n+1}=Ty_n$, ...

Probamos que $\{y_n\}$ es de Cauchy:

$$\|y_n-y_{n+1}\|=\|Ty_{n-1}-Ty_n\|\le\alpha\|y_{n-1}-y_n\|\le\alpha^2\|y_{n-2}-y_{n-1}\|\le\cdots$$
$$\Rightarrow\ \|y_n-y_{n+1}\|\le\alpha^n\|y_0-y_1\|\ \Rightarrow$$
$$\|y_n-y_{n+k}\|=\|y_n-y_{n+1}+y_{n+1}-\cdots-y_{n+k-1}+y_{n+k-1}-y_{n+k}\|$$
$$\le\|y_n-y_{n+1}\|+\cdots+\|y_{n+k-1}-y_{n+k}\|\le[\alpha^n+\alpha^{n+1}+\cdots+\alpha^{n+k-1}]\|y_0-y_1\|$$
$$=\tfrac{\alpha^n-\alpha^{n+k}}{1-\alpha}\|y_0-y_1\|\le\tfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_0-y_1\|\le\epsilon\ \ \forall\epsilon \text{ dado, si } n \text{ suficientemente grande.}$$

Puesto que E es completo $\{y_n\}\to y\in E$. Veamos que y es el punto fijo buscado.

Como T es continuo ($\|Ty-Ty^*\|$ es lo pequeño que queramos si $\|y-y^*\|$ es pequeño):

$$T(y)=T(\lim_{n\to\infty}y_n)=\lim_{n\to\infty}T(y_n)=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=y$$

Falta ver que y es único. Si y^* también cumple $Ty^*=y^*$ entonces:

$$\|y-y^*\|=\|Ty-Ty^*\|\le\alpha\|y-y^*\|\ \to\ y^*=y$$

$E=\{y:I\to\mathbf{R}/y \text{ continua}\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|y\|=\text{máx}\{|y(t)|:t\in I\}$

E es espacio vectorial (combinaciones lineales de continuas son continuas).
$\|y\|$ tiene las propiedades de una norma. Además:
$\{y_n\}$ de Cauchy $\to$ $\{y_n(t)\}$ de Cauchy $\forall t\Rightarrow$ $\{y_n(t)\}\to y(t)\,\forall t$
$\Rightarrow$ en norma, $\{y_n\}\to y$ continua (el límite es uniforme).

Para demostrar un teorema de existencia y unicidad bastará determinar un intervalo I que defina un E de estos, de modo que el operador T de arriba transforme funciones de E en funciones de E y tal que T sea contractivo.

Teor 1*. $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ continua y lipschitziana respecto de la } y \text{ en } Q=[t_o,t_o+h]\times[y_o-r,y_o+r] \Rightarrow \text{[P]} \\ \text{posee solución única definida al menos en } I=[t_o,t_o+d]\text{, con } d=\text{mín}\{h,\frac{r}{M},\frac{1}{2L}\}, \\ \text{siendo } M \text{ el máximo de } |f(t,y)| \text{ en } Q \text{ y } L \text{ la constante de Lipschitz.} \end{array}}$

[Probado este teorema queda probado el 1 pues vimos que sus hipótesis implican las del 1*; por la misma razón este teorema es más fuerte que aquel (se pide menos a la f) y es aplicable en (pocos) casos en que el 1 no funciona].

El I que define E es $I=[t_o,t_o+d]$. Probemos primero que la T de arriba es contractiva.

Si $y,y^*\in E$ entonces:

$$|(Ty-Ty^*)(t)| \le \int_{t_o}^{t}|f(s,y(s))-f(s,y^*(s))|\,ds \le L\int_{t_o}^{t}|y(s)-y^*(s)|\,ds$$

$$\le L\int_{t_o}^{t}\|y-y^*\|\,ds \le Ld\|y-y^*\| \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\| \quad \forall t\in I$$

$$\Rightarrow \|(Ty-Ty^*)(t)\| = \text{máx}\{|(Ty-Ty^*)(t): t\in I\} \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\|$$

Como la f sólo la suponemos continua en Q, dada $y\in E$ en principio Ty podría no ser continua. Pero si la gráfica de y se mueve en $[t_o,t_o+d]\times[y_o-r,y_o+r]$ sí podemos asegurar que lo es pues entonces $f(t,y(t))$ es continua y Ty, primitiva de continua, también lo será. Además Ty tiene también su gráfica contenida en Q, pues para todo $t\in I$ se tiene que:

$$|Ty(t)-y_o| \le \int_{t_o}^{t}|f(s,y(s))|\,ds \le M\int_{t_o}^{t}ds \le M(t-t_o) \le Md \le r \quad \text{si} \quad t\in I,$$

es decir, $(t,Ty(t))\in Q$

Así pues, son elementos de E las funciones de la sucesión $\{y_n\}$ obtenida aplicando indefinidamente T a la función constante $y_o(t)\equiv y_o$, es decir, la sucesión de funciones (llamadas **aproximaciones sucesivas de Picard**):

$$y_o(t)\equiv y_o\,,\quad y_1(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y_o)\,ds\,,\quad y_2(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y_1(s))\,ds\,,\ \ldots$$

Esta $\{y_n\}$, entonces, converge hacia el único punto fijo de T en E, es decir, hacia la solución única de [P].

Ej 11. $\boxed{y'=|t^2-7y|}$ f continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución para cualquier dato inicial.

f_y es continua si $7y\neq t^2$. El teorema 1 asegura la unicidad $\forall(t_o,y_o)$ con $7y_o\neq t_o^2$. Para las funciones definidas a trozos, como el valor absoluto, el teorema adecuado no es el 1, sino el 1*. Veamos que f es lipschitziana:

$$|f(t,y)-f(t,y^*)| = \Big|\,|t^2-7y|-|t^2-7y^*|\,\Big| \le \Big|(t^2-7y)-(t^2-7y^*)\Big|$$

$$=7|y-y^*| \quad \forall(t,y),(t,y^*)\in\mathbf{R}^2$$

Por tanto también hay solución única si $7y_o=t_o^2$, y eso no nos lo decía el teorema 1.

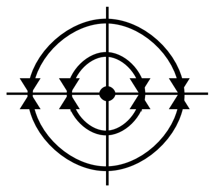
Tratemos ahora de la **prolongablidad** de las soluciones de [P]. Supongamos f y f_y continuas en $D\subset\mathbf{R}^2$ y que (t_o,y_o) es interior a D. Entonces hay una única solución local $y(t)$ definida al menos en $[t_o-d,t_o+d]$. Pero, ¿hasta dónde se puede prolongar?, es decir, ¿cuál es el máximo intervalo I en el que está definida? Sobre todo queremos saber si $y(t)$ llega hacia la derecha hasta $+\infty$ y si lo hace hacia la izquierda hasta $-\infty$ (en otras palabras, si está definida en $[t_o,\infty)$ y en $(-\infty,t_o]$).

Aunque sea $D=\mathbf{R}^2$ esto puede no suceder como vimos en el ejemplo 3 de esta sección. La solución de $y'=y^2$ con $y(0)=b$, sólo podía si $b>0$ prolongarse (hacia la derecha) al intervalo $[0,1/b)$, pues en $t=1/b$ tenía una asíntota y no llegaba hasta ∞. Si $b<0$, aunque llegaba hasta ∞ no llegaba a $-\infty$, pues sólo estaba definida en $(1/b,\infty)$.

Otra forma en que una solución $y(t)$ está definida sólo en un intervalo finito viene ilustrada por:

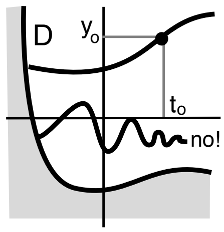
$$y'=-\frac{t}{y}\,,\ \text{de curvas integrales:}\quad t^2+y^2=C\,,$$

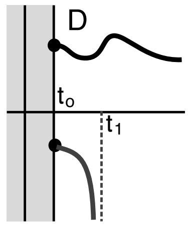
y con problemas de existencia y unicidad sobre $y=0$ que es precisamente donde van a morir cada una de las semicircunferencias solución.



El siguiente teorema, que no demostramos, resume las ideas de los dos ejemplos.

Teor 2. Si f y f_y son continuas en D la gráfica de la solución $y(t)$ de [P] no se para en el interior de D.
En particular, si D es el semiplano $\{t \geq t_o\}$ o bien $y(t)$ está definida en todo $[t_o, \infty)$ o bien existe $t_1 > t_o$ tal que $|y(t)| \underset{t \to t_1}{\to} \infty$.



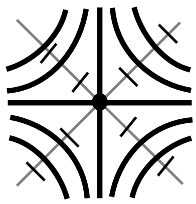


(resultado enteramente análogo a la izquierda de t_o)

La gráfica no para en un punto interior ya que, por el TEyU, existiría una solución local partiendo de dicho punto. Podríamos describir el teorema con otras palabras: la gráfica de las soluciones tienden hacia la frontera de D, entendiendo que si D es no acotado 'el infinito' pertenece a dicha frontera. El problema práctico (complicado en general) es distinguir entre las posibilidades que ofrece el teorema 2 si la ecuación no es resoluble (que, como sabemos, es lo normal). Demos alguna idea con ejemplos:

Ej 12. $\begin{cases} y' = -\frac{y^3}{t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Es fácil hallar su solución $t^{-2} + y^{-2} = C$, pero veamos qué podemos decir basándonos sólo en dibujos aproximados (que en otras ocasiones será lo único que tendremos). Las isoclinas de esta homogénea son rectas.

Los TEyU aseguran solución única en $\mathbf{R}^2 - \{t = 0\}$ y curva integral única para $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, y el crecimiento-decrecimiento prueba que por el origen sólo pasan las curvas integrales $y=0$ y $t=0$. Como la solución por $(1,1)$ decrece para $t \geq 1$ y no puede tocar (por unicidad) la solución $y=0$, no puede irse a $\pm\infty$ en tiempo finito y según el Teor2 está definida $\forall t \geq 1$. Por la izquierda no puede tocar $t=0$, con lo que debe tener una asíntota en un $t_1 \in (0,1)$. Necesitamos la solución $y = t/[2t^2-1]^{1/2}$ para ver que exactamente la tiene en $t_1 = 1/\sqrt{2}$.



Ej 13. $\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(t+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ La ecuación no es resoluble. f y f_y son continuas en $\mathbf{R}^2$.

Hay dos posibilidades, que la solución única llegue a $\pm\infty$ o que tenga una asíntota (que 'explote'). Si $y(t)$ explota, tanto ella como sus pendientes han de tender a ∞. Como es $|y'| \leq 1$, la solución está definida $\forall t$.

Identifiquemos dos problemas cuya prolongabilidad se reconoce a simple vista:

[Pl] $\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$, a y f **continuas en un intervalo** $I \ni t_o$
(I finito o infinito, cerrado o abierto).

Como tanto el segundo miembro de la ecuación como su derivada con respecto a y son continuas en un entorno del punto (t_o, y_o), [Pl] tiene solución única. Además, como vimos en la sección 1.1, esta solución viene dada por exponenciales e integrales de las funciones a y f, con lo que se tiene que:

La solución única de [Pl] **está definida** (al menos) **para todo** t **de** I.

$\begin{cases} y' = ay^n,\ a \neq 0,\ n = 2, 3, \ldots \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ Su solución es: $y = \dfrac{y_o}{\left[1 - a(n-1)y_o^{n-1}(t-t_o)\right]^{1/(n-1)}}$.

El denominador se anula si $t = t_o + \left[a(n-1)y_o^{n-1}\right]^{-1}$. Por tanto, salvo $y \equiv 0$, **todas las soluciones tienen una asíntota**. Para saber si la asíntota está a la derecha o izquierda de t_o basta mirar crecimiento y decrecimiento, o sea, el signo de ay^n.

1.4 Estabilidad

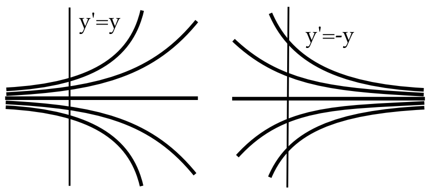
En lenguaje usual la posición de equilibrio de un objeto o la trayectoria de un móvil se dice estable si un pequeño cambio de sus condiciones iniciales modifica poco su evolución desde ese instante. El concepto matemático de estabilidad da rigor a esta idea. Definamos estabilidad para ecuaciones de primer orden (volveremos a tratarla en los capítulos 2 y 4).

Supongamos que [P] $\boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_o,\infty)$.

¿Se parecerán a ella $\forall t\geq t_o$ las soluciones $y^*(t)$ de datos iniciales similares? Hemos visto ya casos en que no sucedía. Por ejemplo, la solución de $y'=y^2$ con $y(0)=0$ (la constante $y(0)\equiv 0$) está definida $\forall t\geq 0$ y sin embargo la correspondiente a un dato inicial próximo $y(0)=y_o^*$ (que era $y=y_o^*/[1-ty_o^*]$) ni siquiera llega hasta ∞ cuando $y_o^*>0$, pues tiene una asíntota en $t=1/y_o^*$. Y aunque todas las soluciones estén definidas en $[t_o,\infty)$ pueden ser para t grande muy diferentes entre sí. Así, las de:

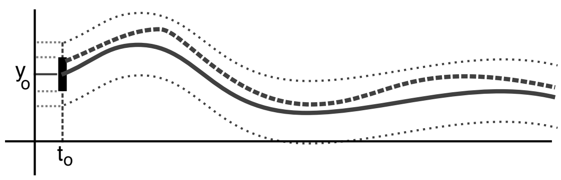
$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$ que son $y\equiv 0$ e $y^*=e^t y_o^*$

son muy diferentes para grandes t, pues y^* tiende a $+\infty$ o $-\infty$ (según el signo de y_o^*). En cambio, las de $y'=-y$, que con esos datos son $y\equiv 0$ e $y^*=e^{-t}y_o^*$, cumplen $y^*\to y$ si $t\to\infty$.



Si [P] tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ se dice que $y(t)$ es **estable** si $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución $y^*(t)$ con $\lvert y_o-y_o^*\rvert<\delta$ satisface: **1]** $y^*(t)$ existe y está definida en $[t_o,\infty)$, **2]** $\lvert y(t)-y^*(t)\rvert<\epsilon$ para todo $t\geq t_o$. Decimos que $y(t)$ es **asintóticamente estable** si además $y^*(t)$ satisface: **3]** $\lvert y(t)-y^*(t)\rvert\to 0$ cuando $t\to\infty$. Una solución que no es estable se dice **inestable**.

Gráficamente, y es estable si para cualquier banda de altura 2ϵ en torno a ella existe un segmento de altura 2δ en torno a y_o tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t\geq t_o$ dentro de la banda.

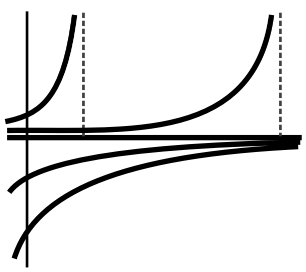


Para las ecuaciones de primer orden se puede probar que:

1] y **3]** $\Rightarrow$ **2]** (falso en sistemas y ecuaciones de orden n).

Así pues, para ver que la solución de una ecuación de primer orden es asintóticamente estable basta comprobar que toda solución que parte cerca de ella llega hasta ∞ y que la diferencia entre ambas tiende a 0 en el infinito, con lo que podemos evitar las acotaciones de **2]** que son siempre mucho más complicadas.

Ej 1. Analicemos la estabilidad de las soluciones de la conocida $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}}$.



Como las soluciones con $y_o>0$ explotan no tiene sentido hablar de su estabilidad. La $y=0$ es claramente inestable pues las que parten cerca de ella por arriba ni siquiera están definidas $\forall t\geq 0$ (las que parten por debajo sí se parecen a ella, pero esto debe suceder para toda solución que parta cerca). Cualquier solución con $y_o<0$ (definida $\forall t\geq 0$) es AE: si $\lvert y_o-y_o^*\rvert$ es pequeño y^* llega hasta ∞ y además:

$$\lvert y-y^*\rvert=\left\lvert\frac{y_o}{1-ty_o}-\frac{y_o^*}{1-ty_o^*}\right\rvert \underset{t\to\infty}{\to} 0 .$$

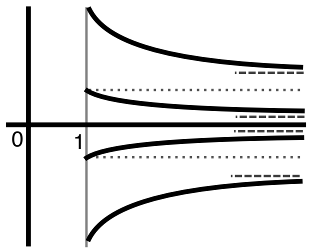
Ej 2. $\left\{\begin{array}{l} y'=-y^3/t^3 \\ y(1)=0 \end{array}\right.$ En 1.3 la dibujamos y resolvimos: $t^{-2}+y^{-2}=C$. La solución que cumple $y(1)=b$ es $y_b=bt\left[b^2(t^2-1)+t^2\right]^{-1/2}$.

Estamos analizando $y\equiv 0$. Todas las y_b están definidas $\forall b$ si $t\geq 1$, pero $y_b \underset{t\to\infty}{\to} b[b^2+1]^{-1/2} \neq 0$. Por tanto no es AE.

Estable sí lo es:

$\forall\epsilon$ tomando $\delta=\epsilon$ se tiene que si $|b|<\delta$ es $|y_b|\leq|b|<\epsilon$ $\forall t\geq 1$.

(La estabilidad se puede probar sin hallar y_b: como las soluciones decrecen en el primer cuadrante y crecen en el cuarto, a partir de $t=1$ se mueven entre las rectas $y=0$ e $y=b$, luego llegan hasta ∞ y es estable $y\equiv 0$).



El estudio de la estabilidad es, en general, bastante difícil. Como se pueden resolver muy pocas ecuaciones no será posible normalmente usar las soluciones. Pero en otros casos se podrán obtener conclusiones estudiando la propia ecuación. Veamos resultados en ese sentido para las **ecuaciones lineales**:

Sea [PI] $\left\{\begin{array}{l} y'=a(t)y+f(t) \\ y(t_o)=y_o \end{array}\right.$, con a y f continuas en $[t_o,\infty)$.

Como sabemos, para todo y_o, [PI] tiene solución única definida para todo $t\geq t_o$, de expresión conocida. La diferencia entre dos soluciones cualesquiera es

$$|y(t)-y^*(t)| = |y_o-y_o^*|\, e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \quad \text{y por tanto:}$$

Teor 1. La solución de [PI] es estable si y sólo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds}$ está acotada.
Es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Observemos que **la estabilidad no depende de** y_o **ni de** $f(t)$ [ni de t_o si a y f son continuas a partir de ese punto]. Para una lineal (no para otras tipos) tiene pues sentido hablar de la **estabilidad de la ecuación** pues o todas las soluciones son estables, o todas son asintóticamente estables, o todas son inestables. Esto era esperable pues las soluciones son suma de una solución particular más la general de la homogénea y es ésta la que nos dice si todas las soluciones se acercan o no a una dada. De hecho tenemos que una ecuación lineal es estable [asintóticamente estable] si y sólo si lo es la solución $y\equiv 0$ de la homogénea.

En particular, para las ecuaciones de **coeficientes constantes**, se deduce inmediatamente del teorema:

$y'=ay+f(t)$ es **AE**, **EnoA** o **I**, según sea, respectivamente, $a<0$, $a=0$ ó $a>0$.

(pues e^{at} tiende a 0, está acotada o no está acotada en cada caso).

Ej 3. $y'=-\frac{y}{t}+\cos[\ln(1+t^2)]$ Para $t>0$ es $e^{-\int dt/t}=\frac{1}{t}$ acotada y $\to 0$ cuando $t\to\infty$.

Por tanto, la solución que satisface cualquier dato inicial $y(t_o)=y_o$ con $t_o>0$ es asintóticamente estable. (Si $t_o<0$ las soluciones $y=C/t+y_p$ sólo llegan hasta $t=0$; el teorema se ha enunciado para el caso en que los coeficientes son continuos a partir de t_o).

Ej 4. $y'=\frac{y}{1+t^2}$ Todas sus soluciones son EnoA: $e^{\int a}=e^{\arctan t}$ es acotada, pero $\not\to 0$ si $t\to\infty$.

(Si no hay discontinuidades de a o f ni nos preocuparemos del t_o, pues es claro que el límite de la exponencial no depende de cual sea el límite inferior de la integral).

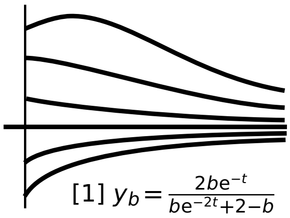
Ej 5. Estudiemos la estabilidad de la solución de $\left\{\begin{array}{l} y'=t-2y \\ y(1/2)=0 \end{array}\right.$ (ecuación resuelta y dibujada en 1.2).

Por ser lineal con coeficientes constantes, basta mirar el -2 para concluir que todas las soluciones (y esa en concreto) son AE. La solución particular con el dato inicial es $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}$ (que aunque $\to\infty$ es AE).

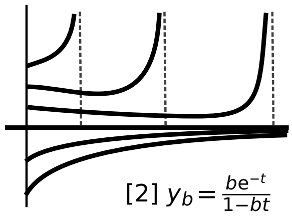
Podría pensarse que para una ecuación no lineal de la forma $y'=a(t)y+b(t)y^2+c(t)y^3+\cdots$ la estabilidad de su solución $y=0$ coincidirá con la de su 'aproximación lineal': $y'=a(t)y$ (hay teoremas que precisan esta idea y veremos uno de ese tipo en las autónomas de la sección 1.5). El siguiente ejemplo demuestra que la conjetura anterior, en general, es falsa:

Ej 6. Para las dos ecuaciones de Bernouilli: [1] $\boxed{y'=-y+e^{-t}y^2}$ y [2] $\boxed{y'=-y+e^{t}y^2}$,

la parte lineal de ambas ($y'=-y$) es AE. Sus dibujos y soluciones y_b con $y(0)=b$ son:



[1] $y_b=\frac{2be^{-t}}{be^{-2t}+2-b}$



[2] $y_b=\frac{be^{-t}}{1-bt}$

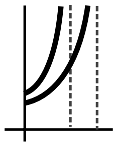
Ambas $y_b\to 0$ si $t\to\infty$. Aunque para [1] y_b está definida en $[0,\infty)$ si b cercano a 0, pero no para [2] (tiene asíntota en $t=\frac{1}{b}$). Por tanto $y\equiv 0$ es solución AE de [1] e I de [2].

Para acabar introducimos el concepto de **dependencia continua** (de datos y parámetros).

Supongamos que el problema [P] $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}$ describe un sistema físico.

Midiendo experimentalmente el dato inicial y_o cometeremos errores. Nuestra ecuación no sería útil para describir el sistema si a valores iniciales y_o^* parecidos no correspondiesen soluciones semejantes. Pero, por suerte, se puede demostrar (es largo y no lo haremos) que si f es buena hay siempre **dependencia continua de datos iniciales**, es decir, que la solución es función continua de y_o. Antes de precisarlo con teoremas veamos un ejemplo:

Ej 7. Sea $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=b \end{cases}}$ Su solución es, como sabemos, $y(t,b)=\frac{b}{1-bt}$.
[La podemos ver como función de t y además de b].



Sea, por ejemplo, $b>0$. Mirando sólo la solución para $t\geq 0$ vemos que está definida hasta $t_1=b^{-1}$. Para b^* próximos la solución tendrá un intervalo de definición similar. En un intervalo en el que estén definidas todas estas $y(t,b)$ cercanas (en que el denominador no se anule) es claro que $y(t,b)$ es continua en ambas variables.

Sean f, f_y continuas en un entorno de (t_o,y_o). Sabemos que entonces la solución de [P] $y(t,y_o)$ está definida al menos en un intervalo $I=[t_o,t_o+d]$. En estas condiciones se tiene:

Teor 2. Si $|y_o-y_o^*|$ es suficientemente pequeño, $y(t,y_o^*)$ está también definida en ese mismo I y además si $y_o^*\to y_o$ se tiene que $y(t,y_o^*)\to y(t,y_o)$ para todo $t\in I$.

Se puede escribir esto de otra forma para compararlo con la estabilidad:

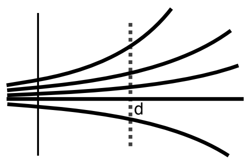
$\boxed{\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0 \text{ tal que si } |y_o-y_o^*|<\delta \text{ entonces } |y(t)-y^*(t)|<\epsilon \text{ para todo } t\in[t_o,t_o+d]\,.}$

Así que, en intervalos finitos, las soluciones (inestables incluidas) de toda ecuación siguen lo próximas que queramos si partimos suficientemente cerca. La distinción entre estables e inestables aparece al considerar intervalos infinitos. Comprobemos que se cumple la afirmación con $\epsilon-\delta$ de arriba para una de las soluciones inestables vistas:

Las soluciones $y\equiv 0$ de $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $y^*=e^t y_o^*$ de $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$,

en cualquier intervalo finito $[0,d]$ satisfacen

$$|y^*-y|=e^t|y_o^*|\leq e^d|y_o^*|<\epsilon \text{ si } |y_o^*-0|<\delta=e^{-d}\epsilon \quad \forall t\in[0,d]\,.$$



En nuestro sistema físico podría aparecer también un parámetro a: $[\mathrm{P}_a]$ $\begin{cases} y'=f(t,y,a) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}$.

Para que la ecuación sea útil a valores de a próximos deben corresponder soluciones similares. Se demuestra que si $f(t,y,a)$ es buena la solución es también función continua de a (es decir, hay **dependencia continua de parámetros**). Veamos un ejemplo para corroborarlo:

Ej 8. $\boxed{\begin{cases} y'=at^{-1}y-1 \\ y(1)=0 \end{cases}}$ $\to$ $y(t,a)=t^a\int_1^t s^{-a}ds=\begin{cases} (t-t^a)/(1-a) \text{ si } a\neq 1 \\ t\ln t \text{ si } a=1 \end{cases}$

f buena cerca de $(1,0)$ $\Rightarrow$ dependencia continua de a. Aunque no lo parezca es $y(t,a)$ también continua para $a=1$: si $a\to 1$ la expresión de arriba tiende a $t\ln t$ (L'Hôpital).

1.5 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente:

$$[a] \quad \boxed{y'=f(y)}$$

Suponemos que f' es **continua en todo R** con lo que hay solución única para cualquier condición inicial.

Como [a] es de variables separables, es fácil hallar su solución implícita:

$\int \frac{dy}{f(y)} = t+C$ (la primitiva puede ser no calculable o muy complicada).

Pero muchas características importantes de las soluciones se deducen fácilmente del estudio de la propia f. En particula, será muy fácil hacer dibujos aproximados y precisar la estabilidad de sus soluciones, gracias a los siguientes teoremas:

Teor 1. $\boxed{y(t) \text{ solución de [a] } \Rightarrow y(t+C) \text{ es también solución de [a].}}$

Sea $z(t)=y(t+C)$; entonces $z'(t)=y'(t+C)=f(y(t+C))=f(z(t))$.

Teor 2. $\boxed{\text{Si } a\in\mathbf{R} \text{ es tal que } f(a)=0 \Rightarrow y(t)\equiv a \text{ es solución de [a].}}$

(A estas soluciones constantes se les llama también soluciones de equilibrio).

La prueba es realmente trivial: $y'(t)=0=f(a)=f(y(t))$.

Teor 3. Cada solución de [a] es o constante, o estrictamente creciente, o estrictamente decreciente.

Sea y solución. Si existe un t_o para el que $y'(t_o)=0 \Rightarrow f(y(t_o))=0 \Rightarrow y(t)\equiv y(t_o)$ es solución (teorema 2), única que pasa por ese punto. Ninguna solución puede tener ni máximos ni mínimos si no es constante.

Teor 4. Toda solución acotada a la derecha de un t_o tiende hacia una solución de equilibrio cuando $t\to\infty$ [si lo está a la izquierda lo hace cuando $t\to-\infty$].

Probémoslo si $t\to\infty$ (análogo a la izquierda). Si $y(t)$ es constante, es evidente. Sea $y(t)$ monótona y acotada para $t\geq t_o$ (por el teorema de prolongabilidad $y(t)$ está definida en $[t_o,\infty)$ pues no puede irse a infinito en tiempo finito). Un resultado elemental de cálculo asegura que $y(t)$ tiende hacia un límite a si $t\to\infty$. Probemos que $f(a)=0$. Como f es continua, $y'(t)=f(y(t))$ también tiene límite si $t\to\infty$ y ese límite es $f(a)$. Aplicando el teorema del valor medio a la $y(t)$ en $[t,t+1]$ tenemos que existe un $c\in(t,t+1)$ tal que $y'(c)=y(t+1)-y(t)$. Por tanto: $f(a)=\lim\limits_{c\to\infty} y'(c)=\lim\limits_{t\to\infty}[y(t+1)-y(t)]=a-a=0$.

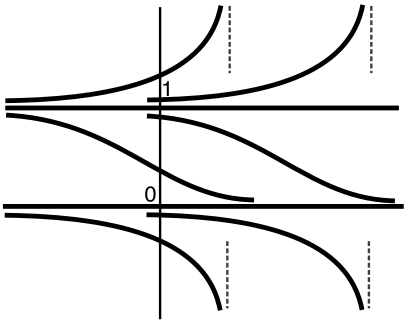
Teor 5. Si $f(y)/g(y)\to \text{cte}>0$ cuando $y\to\infty$ las soluciones no acotadas de $y'=f(y)$ tienen asíntotas si sólo si las tienen las de $y'=g(y)$. En particular, explotan todas las soluciones no acotadas de $y'=P(y)$ si P es un polinomio de grado mayor que 1.

Como la solución de [a] es $t+C=\int^y \frac{ds}{f(s)}$, decir que $y\to\pm\infty$ para t finito equivale a decir que $\int^{\pm\infty}\frac{ds}{f(s)}$ es una integral impropia convergente y esta lo es (por los criterios de impropias) si y sólo si lo es la integral de la $\frac{1}{g}$.

El caso particular es consecuencia de que explotan las soluciones no nulas de $y'=ay^n$, $n>1$ (lo vimos al final de 1.3).

Ej 1. $\boxed{y' = y^3 - y^2}$. Como $y^2(y-1)=0 \to y=0$, $y=1$, estas son las soluciones constantes.

Como $y^2(y-1)>0$ si $y>1$ e $y^2(y-1)<0$ si $y<0$ ó si $y\in(0,1)$, sabemos qué soluciones crecen o decrecen y las soluciones de equilibrio a que tienden (sin llegar a tocarlas). Las soluciones que están por encima de $y=1$ llegan hasta ∞ pues si estuviesen acotadas deberían tender hacia una solución constante y no la hay (según el teorema 5 lo hacen en tiempo finito). Tampoco están acotadas las de $y<0$ (también explotan). Sabiendo además que las trasladadas a derecha e izquierda de una solución lo son también completamos el dibujo.



(Podríamos además pintar alguna isoclina (son rectas $y=b$) y la recta de puntos de inflexión:

$$y'' = (y^3-y^2)(3y^2-2y) = 0 \to \ y = \tfrac{2}{3} \ \text{ y las rectas solución).}$$

(No es útil para el dibujo hallar la complicada solución: $\int \frac{dy}{y^3-y^2} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \frac{1}{y} = t+C$).

El estudio de la **estabilidad** de una ecuación cualquiera (incluso de primer orden) es difícil en general, pero en las autónomas, por los teoremas vistos, pasa a ser trivial: **el dibujo basta para precisar la estabilidad**.

Para el ejemplo 1 es inmediato ver que $y=0$ es inestable, pues las soluciones cercanas de abajo se van a $-\infty$ (no se necesita siquiera su prolongabilidad). $y=1$ también es I: las de arriba van a $+\infty$ y las de abajo a $y=0$. Cualquier solución entre 0 y 1 es AE: las soluciones cercanas están definidas $\forall t$ y la diferencia entre ellas tiende a 0 si $t\to\infty$ pues todas ellas tienden a la misma solución de equilibrio, según asegura el teorema 4.

Observemos que este teorema 4 no es cierto para ecuaciones no autónomas (por eso no es trivial la estabilidad) y que pueden existir soluciones que se aproximen a una solución constante y que no tiendan a ella, u otras que se alejen de ella, pero manteniéndose cerca (como muestran los ejemplos 2 y 4 de la sección anterior).

Damos un **criterio de estabilidad de soluciones constantes** que, aunque aquí no diga nada nuevo, es la versión sencilla del que veremos en el capítulo 4 cuando estudiemos los sistemas autónomos:

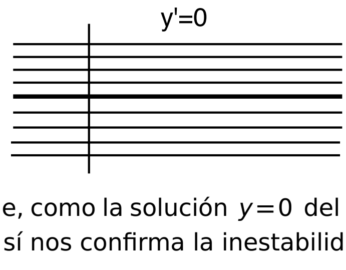
Teor 6. Sea $f(a)=0$. Si $f'(a)<0$, $y(t)\equiv a$ es asintóticamente estable. Si $f'(a)>0$, $y(t)\equiv a$ es inestable.

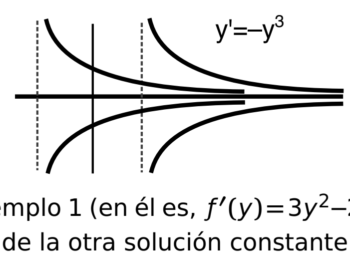
Si $f'(a)<0$, f decrece en a, luego $f(y)$, cerca de a, pasa de ser positivo a negativo al aumentar y; las soluciones pasan de ser crecientes a ser decrecientes, lo que unido al teorema 4 nos da la estabilidad asintótica. Si $f'(a)>0$ pasan de ser decrecientes a ser crecientes; las primeras se van a $-\infty$ o hacia otra solución constante y las segundas a ∞ o hacia otra constante; hay inestabilidad.

Este es uno de los casos en que sí hereda una ecuación no lineal la estabilidad de su aproximación lineal. En efecto, desarrollando por Taylor la $f(y)$ en torno a $y=a$ tenemos:

$$y'=f'(a)(y-a)+o(|y-a|)\ , \text{ es decir } \ z'=f'(a)z+o(|z|)\ , \text{ si } z=y-a\ ,$$

y el signo de $f'(a)$, como sabemos, da la estabilidad de la lineal $z'=f'(a)z$. No se puede afirmar nada sobre la no lineal si la lineal es simplemente estable, es decir, si $f'(a)=0$. En ese caso la solución constante puede ser estable o asintóticamente estable como sucede con la solución $y=0$ de $y'=0$ y de $y'=-y^3$:

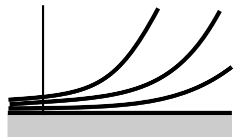




o ser inestable, como la solución $y=0$ del ejemplo 1 (en él es, $f'(y)=3y^2-2y$, $f'(0)=0$).
El teorema 6 sí nos confirma la inestabilidad de la otra solución constante: $f'(1)=1>0$.

Estudiemos ahora varias ecuaciones autónomas que describen modelos de crecimiento de una población animal (en ellas $y(t)$ representa la población que hay en el instante t y a, b, M son constantes positivas). La más sencilla (es también lineal) viene de suponer la velocidad de crecimiento de la población proporcional al número de animales existentes, o sea,

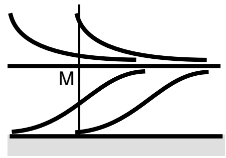
$$[1]\ \boxed{y'=ay}\ ,\ y(t_o)=y_o\ \rightarrow\ y=y_o\,e^{a(t-t_o)}.$$



Dibujamos sus soluciones sólo donde tienen sentido (en $y\geq 0$):

En [1] está implícita la suposición de que hay alimentos y espacio vital ilimitados. Si hay una población máxima M que admite el ecosistema, describirá mejor la evolución la llamada

ecuación logística: [2] $\boxed{y'=by(M-y)}$



de soluciones fáciles de pintar. La solución $y\equiv M$ es AE y hacia ella tienden todas las demás positivas para cualquier dato inicial: pasado el tiempo habrá en el ecosistema una población M. Para conocer la población en un instante t hay que hallar la solución con $y(t_o)=y_o$:

$$y=My_o\left[y_o+(M-y_o)e^{-bM(t-t_o)}\right]^{-1}\quad \text{(la ecuación es separable o Bernouilli)}$$

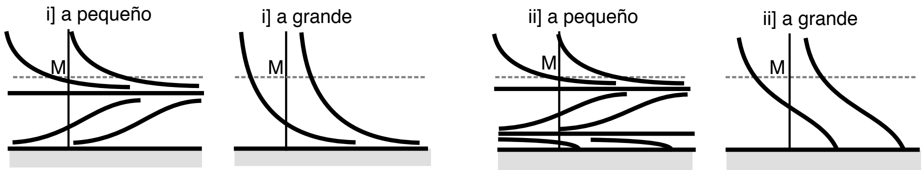
función que tiene el comportamiento asintótico previsto con las técnicas de autónomas.

Imaginemos ahora que [2] rige la población de truchas en un estanque y que una persona pesca truchas: **i]** a un ritmo proporcional al número de ellas existente, **ii]** a ritmo constante (independientemente de las que haya). Las técnicas de autónomas nos permiten predecir con facilidad el número de truchas que habrá en el estanque para grandes valores de t. Las ecuaciones que rigen la evolución de y en ambos casos son:

$$[2i]\ \boxed{y'=by(M-y)-ay}\qquad \text{y}\qquad [2ii]\ \boxed{y'=by(M-y)-a}$$

Las soluciones de equilibrio son para [2i] $y=0$ e $y=M-\frac{a}{b}$ y para [2ii] $y=\frac{M}{2}\pm\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{a}{b}}$.

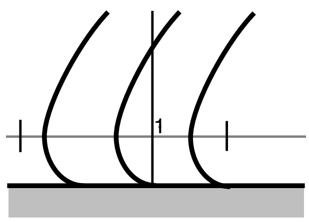
Si a es grande (pescador muy hábil) la segunda solución constante de [2i] pasa a ser negativa y las dos de [2ii] se convierten en complejas. Viendo el signo de y' se tiene:



Si el pescador es poco hábil el número de truchas se estabiliza en torno a un valor algo inferior al tope logístico M (salvo en ii] si inicialmente son muy pocas). Si es hábil las truchas siempre se extinguen (en tiempo finito en el caso ii]).

Para acabar, observemos que si $f(y)$ no es tan regular como exigimos al principio, de forma que no haya existencia y unicidad en todo el plano, también pueden fallar algunas de las propiedades que hemos demostrado basándonos en ese hecho:

Ej 2. $\boxed{y'=\frac{2\sqrt{y}}{y-1}}$ Ecuación definida sólo si $y\geq 0$, con solución única en $y>1$ e $y\in(0,1)$, y problemas en $y=0,1$.



$y=0$ es la única solución de equilibrio. Las soluciones son crecientes en $y>1$ y decrecientes en $y\in(0,1)$. Por cada punto de $y=1$ pasa una única curva integral de pendiente vertical. Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$t=\int\frac{y-1}{2\sqrt{y}}dy+C=\frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)+C\,,$$

lo que completa el dibujo.

Hay soluciones que no son estrictamente monótonas (primero decrecen y luego son constantes) y soluciones acotadas a la izquierda que mueren en $y=1$ y que por tanto no tienden hacia ninguna solución de equilibrio.

1.6 Métodos numéricos

Queremos calcular aproximadamente la solución del problema de valores iniciales:

$$[\mathrm{P}]\ \begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

(suponemos f suficientemente buena para que [P] tenga solución única $y(t)$ cerca de t_0).

Pocas ecuaciones de primer orden son resolubles y hacer un dibujo aproximado es difícil si la $f(t,y)$ no es sencilla. Pero, aunque f sea complicada, siempre podremos acudir a métodos numéricos (iterativos y fácilmente programables), como los que vamos a describir a continuación. En los tres iremos hallando valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ cercanos a los de la solución $y(t)$ en una serie de puntos $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$ separados entre sí una distancia (**paso**) h fija, es decir, $t_1=t_0+h$, $t_2=t_0+2h$, ..., $t_k=t_0+kh$, ...

El más sencillo (y menos preciso) de los métodos es el de **Euler**, que consiste en aproximar la solución desconocida por su tangente conocida. Es decir, si h es pequeño es de esperar que el valor de la solución $y(t_0+h)=y(t_1)$ sea próximo al valor de la recta tangente en ese mismo punto: $y_0+hf(t_0,y_0)$, que llamamos y_1. Como (t_1,y_1) se parece al desconocido $(t_1,y(t_1))$ podemos aproximar $y(t_2)$ por el y_2 que obtendremos de (t_1,y_1) de la misma forma que obtuvimos el y_1 a partir del (t_0,y_0) inicial. Prosiguiendo así vamos obteniendo los y_k aproximados (más inexactos según nos alejamos de t_0) dados por:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k)}$$

Es previsible que se mejore la aproximación si tomamos:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+\tfrac{h}{2}\left[f(t_k,y_k)+f(t_k+h,y_k+hf(t_k,y_k))\right]}$$ (método de **Euler modificado**)

es decir, si en cada paso elegimos, en vez de la pendiente en un extremo, el valor medio de las pendientes asociadas a dos puntos: el de partida y el previsto por el método de Euler.

El tercer método, muy utilizado y bastante más exacto, es el de **Runge-Kutta**, que exige un mayor número de operaciones (aunque a un ordenador no le llevará mucho más tiempo realizarlas) y que en cada paso toma el promedio ponderado de cuatro pendientes, cuyo significado geométrico ya no es fácil de intuir:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+\tfrac{h}{6}\left[f_{k1}+2f_{k2}+2f_{k3}+f_{k4}\right]}\ ,\quad \text{donde}$$

$$f_{k1}=f(t_k,y_k)\ ,\ f_{k2}=f(t_k+\tfrac{h}{2},y_k+\tfrac{h}{2}f_{k1})\ ,\ f_{k3}=f(t_k+\tfrac{h}{2},y_k+\tfrac{h}{2}f_{k2})\ ,\ f_{k4}=f(t_k+h,y_k+hf_{k3})$$

Ej 1. $\boxed{y'=t-2y}$ En la sección 1.2 hallamos su solución general: $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}+Ce^{-2t}$.

Resolvemos numéricamente con $y(0)=1$ (por los tres métodos) y comparamos con los valores exactos (para ese dato es $C=\frac{5}{4}$). Para $h=0.1$ listamos todos los resultados:

t	Euler	Euler-mod	Runge-Kutta	exacto
0	1	1	1	1
0.1	0.8	0.825	0.8234166667	0.8234134413
0.2	0.65	0.6905	0.6879053389	0.6879000575
0.3	0.54	0.58921	0.5860210311	0.5860145451
0.4	0.462	0.5151522	0.5116682856	0.5116612051
0.5	0.4096	0.463424804	0.4598565477	0.4598493015
0.6	0.37768	0.4300083393	0.4264998841	0.4264927649
0.7	0.362144	0.4116068382	0.4082530051	0.4082462049
0.8	0.3597152	0.4055176073	0.4023770104	0.4023706475
0.9	0.36777216	0.4095244380	0.4066294710	0.4066236103
1	0.384217728	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040

Comparamos ahora el resultado para $t=1$ con diferentes pasos:

paso	Euler	Euler-mod	Runge-Kutta	exacto
h=0.1	0.3842177280	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040
h=0.05	0.4019708182	0.4197780719	0.4191694105	0.4191691040
h=0.01	0.4157744449	0.4191920025	0.4191691045	0.4191691040
h=0.001	0.4188306531	0.4191693299	0.4191691040	0.4191691040
h=0.0001	0.4191352691	0.4191691063	0.4191691040	0.4191691040

(obsérvese, por ejemplo, como Runge-Kutta con $h=0.1$ da un valor más exacto que Euler con $h=0.0001$ [y son 40 frente a 10000 evaluaciones de la función $f(t,y)$]).

Se puede demostrar que el **error** local (cometido en cada paso) para cada uno de los tres métodos citados es proporcional, respectivamente, a h^2, h^3 y h^5, mientras que el error acumulado en sucesivas iteraciones es de orden h, h^2 y h^4. Como era de esperar los resultados mejoran al tomar h más pequeños (pero sólo hasta un límite ya que el error de redondeo de toda calculadora u ordenador hace que si disminuimos demasiado el paso h, aparte de incrementarse el tiempo de cálculo, puede aumentar el error).

Ej 2. $\boxed{y'=y^2-t}$ Hallemos numéricamente entre -1 y 3 la solución con $y(-1)=0$.

El dibujo aproximado de la sección 1.2 no aclara si se trata de una de las soluciones que van a infinito o de una de las que cruzan la isoclina de máximos. Empezamos con h=0.1. Los y_k obtenidos por los tres métodos están en la siguiente tabla (sólo hemos escrito los correspondientes a los t enteros para $t \geq 0$):

t	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**
−1	0	0	0
−0,9	0.1	0.0955	0.0953100738
−0,8	0.191	0.1826934847	0.1823176520
−0,7	0.2746481	0.2629009594	0.2623378481
−0,6	0.3521912579	0.3371304370	0.3363726607
−0,5	0.4245951261	0.4061567380	0.4051902841
−0,4	0.4926232282	0.4705749490	0.4693783604
−0,3	0.5568909927	0.5308364662	0.5293796824
−0,2	0.6179037505	0.5872727793	0.5855155255
−0,1	0.6760842550	0.6401101498	0.6379997588
0	0.7317932469	0.6894770720	0.6869456018
1	1.214197534	0.9357162982	0.9176486326
2	1.988550160	–0.1256257297	–0.1884460868
3	272.5279419	–1.528819223	–1.541258296

Aunque inicialmente los números son similares, los errores acumulados del método de Euler nos dan para t positivos unos valores de la solución ya totalmente diferentes a los reales, que serán más parecidos a los hallados por otros métodos más exactos (convendrá, siempre que se pueda, hacerse una idea de las soluciones que se están tratando antes de meterse con el cálculo numérico para estar avisados sobre las posibles anomalías). Repitiendo los cálculos con pasos más pequeños se obtiene si:

	t	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**
h=0.05:	0	0.7100063518	0.6875612633	0.6869451577
	3	–1.361623743	–1.538408604	–1.541275123
h=0.01:	0	0.6916677024	0.6869692560	0.6869451313
	3	–1.526589427	–1.541165493	–1.541276176

Observemos para acabar que la demostración del teorema 1* de existencia y unicidad nos da una forma de hallar funciones próximas a la solución de un problema de valores iniciales: en las hipótesis del teorema, las aproximaciones de Picard convergen uniformemente (lo hacen en norma) hacia la solución única.

Ej 2*. Hallemos las dos primeras aproximaciones de Picard para el ejemplo anterior.

(En este caso las integrales son sencillas, pero la mayoría de las veces las cosas no van a ir tan bien, pues nos pueden salir primitivas no elementales o complicadas de calcular; además, a diferencia de los métodos anteriores, éste no es programable).

$$y_o(t)=0 \;\to\; y_1(t)=0+\int_{-1}^{t}(0-s)ds=\tfrac{1}{2}[1-t^2] \;\to$$

$$y_2(t)=\int_{-1}^{t}\left(\tfrac{1}{4}[1-s^2]^2-s\right)ds=\tfrac{19}{30}+\tfrac{t}{4}-\tfrac{t^2}{2}-\tfrac{t^3}{6}+\tfrac{t^5}{20}\,.$$

Los valores de y_1 e y_2 para diferentes t están a la derecha. Comparando con los números de antes se ve que las aproximaciones son buenas para t cercano a -1, pero no tienen nada que ver con la realidad para valores grandes de t. Sin embargo, este método nos ha dado expresiones analíticas aproximadas de la solución.

t	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$
−1	0	0
−0,9	0.095	0.09530883333
−0,8	0.18	0.1822826667
−0,7	0.255	0.2620965
−0,6	0.32	0.3354453333
−0,5	0.375	0.4026041667
−0,4	0.42	0.463488
−0,3	0.455	0.5177118333
−0,2	0.48	0.5646506667
−0,1	0.495	0.6034995
0	0.5	0.6333333333
1	0	0.2666666667
2	–1.5	–0.6
3	–4	4.533333333

2. Sistemas y ecuaciones lineales

Si ya se podían resolver muy pocas ecuaciones de primer orden, menos aún se pueden resolver sistemas de tales ecuaciones o ecuaciones de orden $n>1$. Salvo escasas excepciones, sólo en el caso lineal se puede caracterizar la estructura de las soluciones y casi sólo si los coeficientes son constantes se pueden hallar explícitamente tales soluciones mediante métodos elementales.

En la sección 2.1 enunciaremos las **propiedades básicas** (muy similares a las de ecuaciones de primer orden) de los sistemas de n ecuaciones (lineales o no) y de las ecuaciones de orden n, que veremos que se pueden considerar como un caso particular de sistemas. No daremos las demostraciones (bastaría casi sustituir en las del caso $n=1$ los valores absolutos por normas). En la solución general de un sistema o ecuación de orden n aparecerán n constantes arbitrarias (así lo sugieren los ejemplos más sencillos de sistema: $x'=0$, $y'=0$, y de ecuación: $x''=0$). El problema de valores iniciales consistirá en hallar la solución que cumpla n condiciones en un instante $t=t_o$ (si los datos se dan en t distintos, el 'problema de contorno' tiene otras propiedades que se suelen estudiar en los cursos de EDPs). Será fácil ver cuando este problema tiene solución única local. También daremos un resultado de prolongabilidad y la definición de estabilidad. No generalizaremos, sin embargo, dos secciones del capítulo anterior: el dibujo aproximado y los métodos numéricos. En el primer caso, porque no se puede: las soluciones de un sistema son curvas en un espacio de dimensión mayor que dos (en el capítulo 4, para sistemas autónomos de segundo orden, sí nos preocuparemos del dibujo de las proyecciones de las soluciones sobre el plano $t=0$). Los métodos numéricos son tan parecidos al caso $n=1$ que no merece la pena tratarlos de nuevo.

La 2.2 trata ya en el caso **lineal** y, para ir fijando ideas, en el más sencillo $n=2$:

$$\boxed{[\mathrm{S}]\ \begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}}$$

Tendremos una **fórmula de variación de las constantes** que nos dará las soluciones de [S] si somos capaces de hallar lo que se llama una **matriz fundamental** $\mathbf{W}(t)$ (formada por soluciones del sistema homogéneo). Esta matriz sabremos calcularla (utilizando resultados de álgebra) en el caso de que las funciones a, b, c y d sean constantes (entonces $\mathbf{W}(t)$ será la exponencial de una matriz). De lo anterior deduciremos resultados para las **ecuaciones de segundo orden**:

$$\boxed{[\mathrm{e}]\ x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)}$$

Resolver [e] será especialmente sencillo para coeficientes constantes. Si son variables, veremos los pocos casos (ecuaciones de Euler $t^2x''+atx'+bx=h(t)$, si $b(t)\equiv 0$ y si conocemos una solución de la homogénea) en que aún se puede hallar su solución a través de integraciones (en el resto de los casos habrá que utilizar series, siguiendo el capítulo 3).

En la sección 2.3, y con pocas demostraciones, veremos los resultados para un n **general**. Aunque la teoría sea prácticamente la misma, los cálculos prácticos se complican y muchas veces se vuelven imposibles. Si los coeficientes son constantes seguirá siendo fácil dar la solución de ecuaciones homogéneas, en el caso excepcional de que podamos hallar las raíces (autovalores) de un polinomio (característico) de grado n. Para resolver un buen número de ecuaciones no homogéneas tendremos el método de **coeficientes indeterminados**. Para los sistemas, incluso conociendo los autovalores, aparecen dificultades algebraicas, salvo que la matriz del sistema sea diagonalizable (daremos varias ideas de cómo proceder aunque no sea el caso).

En 2.4 analizaremos la **estabilidad** de sistemas y ecuaciones lineales de cualquier orden, que se podrá precisar fácilmente en el caso de coeficientes constantes: bastará casi siempre con saber si la parte real de los autovalores es negativa o no. Y podremos decidir esto, utilizando el llamado 'criterio de Routh-Hurwitz', incluso aunque no se pueda resolver el sistema o la ecuación, por aparecernos polinomios de raíces no calculables.

La sección 2.5 introduce una técnica totalmente diferente para hallar soluciones particulares de un buen número de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes: la **transformada de Laplace**, que convierte ecuaciones diferenciales en otras sin derivadas. Esta técnica no permite resolver nada que no pudiésemos resolver con las secciones previas, pero a menudo nos da la solución de una forma más rápida y además nos permite abordar problemas para los que nuestros conocimientos algebraicos no nos basten. La transformada es especialmente útil cuando los términos no homogéneos tienen diferentes expresiones en diferentes intervalos o cuando contienen la 'función' $\delta(t-a)$.

La última sección (2.6) muestra como obtener información sobre el número de **soluciones periódicas** de sistemas y ecuaciones lineales de coeficientes periódicos, sin necesidad de resolverlos. Cuando la única solución periódica del homogéneo sea la trivial, el no homogéneo tendrá una sola solución periódica, y más complicado será decidir (no tendrá ninguna o tendrá infinitas) lo que ocurre si hay infinitas soluciones periódicas de la ecuación o sistema homogéneos.

2.1 Propiedades generales

Sea el **sistema de** n **ecuaciones de primer orden**: [S] $\boxed{\begin{cases} x_1' = f_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{cases}}$

Sus **soluciones** son conjuntos de n funciones $x_1(t),\dots,x_n(t)$, definidas y derivables en un intervalo común I, que convierten cada ecuación de [S] en una identidad. Llamaremos [P] al **problema de valores iniciales** formado por [S] y las n condiciones:

$$\boxed{x_1(t_o)=x_{1o}\,,\ \dots,\ x_n(t_o)=x_{no}}$$

En notación vectorial:

$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o} \end{cases}}$, con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{x_o}=\begin{pmatrix} x_{1o} \\ \vdots \\ x_{no} \end{pmatrix}$. Las soluciones $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

las podemos mirar entonces como funciones vectoriales de I en $\mathbf{R}^n$.

Llamaremos $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ (norma euclídea) y bola de centro $\mathbf{a}$ y radio r al conjunto $B(\mathbf{a},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$ (círculo en el plano, esfera en el espacio, ...).

Los **TEyU** y **prolongabilidad** son muy parecidos a los de $n=1$:

Teor 1. f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i,k=1,\dots,n$ continuas en $[t_o-h,t_o+h]\times B(\mathbf{x_o},r)$ $\Rightarrow$ [P] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_o.

(Y si sólo las f_i son continuas existe solución, aunque podría no ser única).

Teor 2. Si f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ continuas en $[t_o,\infty)\times\mathbf{R}^n$ o bien existe t_1 tal que $\|\mathbf{x}(t)\|\to\infty$ cuando $t\to t_1$ o bien la solución $\mathbf{x}(t)$ de [P] está definida $\forall t\geq t_o$.

(Y si son continuas en un $D\subset R^{n+1}$ las soluciones llegan hasta la frontera de D).

También hay dependencia continua de parámetros y datos iniciales y la definición de **estabilidad** es como la de primer orden, sustituyendo los valores absolutos por normas:

Una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ es **estable** si $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0$ tal que toda solución $\mathbf{x}^*(t)$ con $\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\|<\delta$ existe, está definida en $[t_o,\infty)$ y verifica $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|<\epsilon$ para todo $t\geq t_o$. Si además $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ cuando $t\to\infty$, se dice que $\mathbf{x}(t)$ es **asintóticamente estable**.

(pero para un sistema puede ocurrir que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ si $t\to\infty$ y sin embargo que no consigamos hacer que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|$ sea menor que cualquier ϵ prefijado)

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} x'=3tx^{1/3}+\ln y \\ y'=xy-t^3 \end{cases}}$ Posee solución con $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$ si $y_o>0$. Única si $x_o\neq 0$.

No sabemos, ni sabremos, hallar su solución general, ni ver qué soluciones están definidas $\forall t$, ni precisar su estabilidad (aunque se podrían hallar los valores aproximados para unos datos iniciales concretos por métodos numéricos). Es trivial comprobar que una solución del sistema es

$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (única con $x(1)=y(1)=1$, aunque tal vez haya más con $x(0)=0$, $y(0)=1$).

Consideremos ahora la **ecuación de orden** n: [E] $\boxed{x^{(n)}=g(t,x,x',\dots,x^{(n-1)})}$.

Sus **soluciones** son funciones $x(t)$ **derivables** n **veces** en un intervalo I que llevadas a [E] la convierten en una identidad. Llamamos [PE] al **problema de valores iniciales** consistente en hallar la solución de [E] que satisface las n condiciones:

$$\boxed{x(t_o)=x_o\,,\ x'(t_o)=x'_o\ ,\ \dots,\ x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)}}\ .$$

Toda ecuación de orden n **se puede convertir en un sistema** (**sistema equivalente)**:

Haciendo: $x=x_1\,,\ x'=x_2\,,\ \dots\,,\ x^{(n-1)}=x_n\ \rightarrow$

$$[\text{SE}]\ \boxed{\begin{cases} x_1'=x_2\\ x_2'=x_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n'=g(t,x_1,\dots,x_n)\end{cases}}\ .\ \ \text{Llamando}\ \ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \vdots\\ x^{(n-1)}\end{pmatrix},\ \ \mathbf{x_o}=\begin{pmatrix}x_o\\ \vdots\\ x_o^{(n-1)}\end{pmatrix},$$

es claro que x es solución de [E] si y sólo si $\mathbf{x}$ lo es de [SE].

Si además $\mathbf{x}$ cumple $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$, x es solución de [PE].

Gracias a esto, de cualquier resultado que obtengamos para sistemas podremos deducir consecuencias inmediatas para ecuaciones (aunque iremos viendo que éstas tendrán formas de resolverse más directas, con lo que casi nunca acudiremos al sistema equivalente para hallar soluciones). Por ejemplo, los teoremas 1 y 2 se pueden aplicar a ecuaciones. Veamos la forma particular que adopta el **TEyU**:

Teor 3. $g\,,\ \frac{\partial g}{\partial x}\,,\ \dots,\ \frac{\partial^{(n-1)}g}{\partial x^{(n-1)}}$ continuas en un entorno de $(t_o,x_o,x'_o,\dots,x_o^{(n-1)})$
$\Rightarrow$ [PE] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_o .

Por último, se dice que $x(t)$ **es solución estable o asintóticamente estable de** [PE] **si lo es la solución** $\mathbf{x}(t)$ **del sistema equivalente** (y por lo tanto se han de parecer tanto $x(t)$ y $x^*(t)$ como las $n-1$ primeras derivadas de las dos soluciones).

Ej 2. $\boxed{t^2x''-2tx'+2x=0}$. Posee solución única con $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$ si $t_o\neq 0$.

En la próxima sección veremos que su solución general es: $x=c_1t+c_2t^2$.

La única solución que satisface $x(1)=a$, $x'(1)=b$ es $x=(2a-b)t+(b-a)t^2$ (que, como debía, es función continua de los datos iniciales). Las infinitas soluciones $x=c_2t^2$ satisfacen $x(0)=0$, $x'(0)=0$, pero no hay ninguna satisfaciendo $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

La solución con $x(1)=x'(1)=1$ (o sea, $x=t$) es **I** pues para el sistema equivalente

$$\begin{cases} x'=y\\ y'=-2t^{-2}x+2t^{-1}y\end{cases}\ \ \text{es inestable}\ \ \mathbf{x}(t)=\binom{t}{1},\ \text{pues}\ \left\|\binom{t}{1}-\binom{(2a-b)t+(b-a)t^2}{(2a-b)+2(b-a)t}\right\|\rightarrow\infty\,,$$

para infinitos a y b tan cercanos como queramos a 1 .

(Escribir las soluciones del sistema equivalente a partir de las de la ecuación es muy sencillo: basta formar un vector cuyo primer elemento sea la solución de la ecuación, y los sucesivos de debajo sus derivadas; y si resolvemos una ecuación a partir del equivalente (poco útil como se ha dicho) lo que obtendremos es un vector en el que cada elemento es derivada del de arriba, y el primero es la solución de la ecuación).

2.2 Sistemas de 2 ecuaciones lineales y ecuaciones lineales de orden 2

Sea $\boxed{\begin{cases} x'=a(t)x+b(t)y+f(t) \\ y'=c(t)x+d(t)y+g(t) \end{cases}}$. O en forma vectorial:

$$[\mathrm{S}]\ \boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}\ \text{, con}\ \ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \ \mathbf{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Suponemos a, b, c, d, f, g funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ **continuas** (o sea, la matriz $\mathbf{A}(t)$ y la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ lo son) en un intervalo I (finito o infinito, abierto o cerrado) y sea $t_o \in I$. El teorema de existencia y unicidad asegura que entonces una única solución de [S] cumple cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$. Como ocurría en las lineales de primer orden, se puede probar que **la solución única está definida** $\forall t \in I$.

Consideremos primero el **sistema homogéneo**: [Sh] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$.

> Una matriz $\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ cuyas columnas $\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$
> son soluciones de [Sh] y tal que el determinante $|\mathbf{W}|(t_o)| \neq 0$
> se llama **matriz fundamental** de [Sh].

El siguiente teorema asegura que [Sh] está resuelto conocida una $\mathbf{W}(t)$ (pero no nos dice cómo calcularla):

Teor 1.

> El conjunto V de soluciones de [Sh] es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base de V es el conjunto $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$, soluciones que constituyen una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Por tanto, la solución general de [Sh] es:
> $$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x_1}+c_2\mathbf{x_2} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}\ ,\ \ \text{con}\ \ \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\ \text{arbitrario.}$$

Es muy fácil comprobar que cualquier combinación lineal de soluciones de [Sh] es también solución.

Además probamos que son base de V las soluciones $\mathbf{e_1}(t)$ y $\mathbf{e_2}(t)$ de [Sh] de valores iniciales respectivos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{e_1}(t)+c_2\mathbf{e_2}(t)\equiv\mathbf{0}\ \Rightarrow\ c_1\mathbf{e_1}(t_o)+c_2\mathbf{e_2}(t_o)=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ c_1=c_2=0\,.$$

Toda solución $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de ellas:

$\mathbf{z}(t)=x(t_o)\mathbf{e_1}(t)+y(t_o)\mathbf{e_2}(t)$ es solución con $\mathbf{z}(t_o)=\mathbf{x}(t_o) \underset{\text{unicidad}}{\Rightarrow} \mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{z}(t)\ \forall t\in I$.

Sean ahora $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ soluciones cualesquiera satisfaciendo $|\mathbf{W}|(t_o)| \neq 0$. Dichas soluciones son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{x_1}(t)+c_2\mathbf{x_2}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}\equiv\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ c_1=c_2=0\,.$$

Un sistema tiene infinitas matrices fundamentales $\mathbf{W}(t)$. A partir de cualquier de ellas podríamos calcular la solución de [Sh] con el dato inicial $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ simplemente resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{x_o}$, que tiene solución única por ser el determinante $|\mathbf{W}|(t_o)| \neq 0$. Pero lo podemos hacer también directamente a partir de la llamada 'matriz fundamental canónica':

Se llama $\mathbf{W_c}(t)$, **matriz fundamental canónica en** t_o, a la que satisface $\mathbf{W_c}(t_o)=\mathbf{I}$. Dada cualquier $\mathbf{W}(t)$, a partir de ella se puede hallar la canónica, pues $\mathbf{W_c}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{W^{-1}}(t_o)$. La solución $\mathbf{x}$ de [Sh] que cumple $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es:

$$\mathbf{x}=\mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o}=\mathbf{W}(t)\mathbf{W^{-1}}(t_o)\mathbf{x_o}\,.$$

Es claro que $\mathbf{W}(t)\mathbf{W^{-1}}(t_o)$ es la matriz unidad $\mathbf{I}$ en $t=t_o$ y además el producto de $\mathbf{W}(t)$ por la derecha por cualquier matriz constante no singular sigue siendo fundamental (sus columnas, como es fácil comprobar, son combinaciones lineales de soluciones, y por tanto son soluciones, y su determinante sigue siendo no nulo). Que la última expresión satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es evidente.

[Para casi todos los sistemas lineales, incluso para estos 2x2, va a ser imposible hallar ninguna $\mathbf{W}(t)$ (y, por tanto, tampoco las soluciones; cuando $\mathbf{A}$ sea constante, pronto veremos cómo calcular una, que precisamente va a ser la canónica). Esto es ya mucho más complicado que las lineales de primer orden que vimos en el capítulo 1. Allí la 'matriz fundamental' era simplemente un escalar, expresable siempre en términos de primitivas (era la exponencial de la $\int a$), y si a era constante esa 'matriz' era e^{at}].

Consideremos ahora el **sistema no homogéneo**: [S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$.

Teor 2.

i] Si $\mathbf{x_p}$ es cualquier solución de [S] y $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamental de [Sh], la solución general de [S] viene dada por $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}$.

ii] Una solución particular de [S] es $\mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W^{-1}}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt$.

iii] Si $\mathbf{W_c}(t)$ es la canónica en t_o la solución de [S] con $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es

$$\mathbf{x}=\mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o}+\mathbf{W_c}(t)\int_{t_o}^{t}\mathbf{W_c^{-1}}(s)\,\mathbf{f}(s)\,ds$$

[Como en las de primer orden, a las fórmulas de ii] y iii] se les llama de **variación de las constantes**].

i] Sea $\mathbf{x}$ solución de [S]. Entonces $[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]'=\mathbf{Ax}+\mathbf{f}-\mathbf{Ax_p}-\mathbf{f}=\mathbf{A}[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]$

Por tanto $\mathbf{x}-\mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para algún $\mathbf{c}$, pues satisface [Sh].

Así pues, toda solución se puede escribir así.

ii] Veamos que $\mathbf{W^{-1}}$ existe, es decir, que la $\mathbf{W}(t)$ es no singular $\forall t\in I$:

Si fuera $|\mathbf{W}|(t)=0$ para algún $s\in I$ existirían b_1, b_2 no ambos nulos tales que $b_1\mathbf{x_1}(s)+b_2\mathbf{x_2}(s)=\mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x}(t)=b_1\mathbf{x_1}(t)+b_2\mathbf{x_2}(t)$ sería solución con $\mathbf{x}(s)=\mathbf{0}$. Por unicidad sería $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ y por tanto sería $|\mathbf{W}|(t)=0$ para todo $t\in I$, en particular para t_o.

Y como matrices y vectores se derivan como las funciones de una variable:

$$\mathbf{x_p}'=\mathbf{W}'\int\mathbf{W^{-1}}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt+\mathbf{W}\mathbf{W^{-1}}\mathbf{f}=\mathbf{Ax_p}+\mathbf{f}\,,$$

pues $\mathbf{W}'=\mathbf{AW}$ por ser solución cada columna.

iii] Por i] y ii] es solución de [S]. Y además cumple el dato:

$$\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{W_c}(t_o)\mathbf{x_o}=\mathbf{I}\,\mathbf{x_o}=\mathbf{x_o}\,.$$

Así pues, **hallada cualquier $\mathbf{W}(t)$ está resuelto el sistema homogéneo y el no homogéneo** (y también el problema de valores iniciales). Pero sólo tendremos un método para calcular la $\mathbf{W}(t)$ en el caso que tratamos a continuación: si la matriz $\mathbf{A}$ es **constante**. Para ese cálculo necesitaremos algunas definiciones y resultados algebraicos previos cuya demostración se puede encontrar en los libros de álgebra.

Sistemas lineales de coeficientes constantes:

[C] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ y [Ch] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}}$, con $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matriz constante.

La **exponencial** de una matriz $\mathbf{B}$ se define: $e^{\mathbf{B}}=\mathbf{I}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2+\cdots$, serie convergente (sus elementos son series numéricas convergentes) para toda $\mathbf{B}$. Se tiene que $e^{\mathbf{B}}$ es no singular, que su inversa es $e^{-\mathbf{B}}$ y que $e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}}$ si $\mathbf{BC}=\mathbf{CB}$.

La exponencial de una matriz no se calcula directamente, sino a partir de su **forma J de Jordan** (la forma más sencilla en que se puede escribir la matriz haciendo cambios de base). Aunque en general sea complicado hallar la $\mathbf{J}$ asociada a una $\mathbf{A}$, en el caso $n=2$ que estamos tratando es fácil dar tanto $\mathbf{J}$ como la matriz $\mathbf{P}$ del cambio de base:

Sea $\mathbf{A}$ una matriz 2x2 y sean λ_1, λ_2 sus autovalores $\left[\text{raíces de } |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0\right]$.
Entonces hay una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A}=\mathbf{PJP^{-1}}$ donde:
i] Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ y $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ son vectores propios asociados [o sea, $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v_i}=\mathbf{0}$], $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \; \mathbf{v_2} \end{pmatrix}$, matriz cuyas columnas son $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$.
ii] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y sólo existe un vector propio $\mathbf{v}$ linealmente independiente asociado, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{w} \; \mathbf{v} \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}$ cualquier vector con $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}$.
iii] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ, entonces $\mathbf{A}$ es ya diagonal.

[Los autovalores de una $\mathbf{A}$ real pueden ser reales o complejos conjugados; en este último caso la $\mathbf{J}$ y la $\mathbf{P}$ serán complejas, pero $\mathbf{PJP^{-1}}$ será real].

Teor 3. $\boxed{\mathbf{W_c}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \text{ es la matriz fundamental canónica en } t_o \text{ de [Ch].}}$

En efecto, $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}=\mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^{k-1}}{(k-1)!}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$, admitiendo que se puede derivar la serie término a término (se puede justificar) y tomando $t_o=0$ por comodidad en la escritura. Es, pues, $e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ matriz fundamental pues cada una de sus columnas cumple también [Ch]. Como $e^{\mathbf{A}(t_o-t_o)}=\mathbf{I}$, es la canónica.

Hemos reducido el problema de resolver [C] al de hallar la exponencial de $\mathbf{A}t$ (del producto del escalar t por la matriz $\mathbf{A}$). Usando la $\mathbf{J}$ asociada a la $\mathbf{A}$ es fácilmente calculable, pues $e^{\mathbf{A}t}$ está relacionada con $e^{\mathbf{J}t}$ de la misma forma que la $\mathbf{A}$ con la $\mathbf{J}$:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\,\mathbf{P^{-1}}}\text{ , ya que}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{PJ}^k\mathbf{P^{-1}}t^k}{k!}=\mathbf{P}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}\,\mathbf{P^{-1}}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}},\text{ pues } \mathbf{A}^k=\mathbf{PJP^{-1}}\cdots\mathbf{PJP^{-1}}=\mathbf{PJ^kP^{-1}}.$$

Y $e^{\mathbf{J}t}$ es fácil de hallar en las dos posibles situaciones que ofrece Jordan para $n=2$:

i] Si $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, es $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$. **ii]** Si $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, es $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}$.

i] Utilizando la definición: $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 t^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 t^2 \end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

ii] Como $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{D}+\mathbf{N}$, $e^{\mathbf{J}t}=e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t}=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}$.

De lo anterior y del teorema 2 deducimos la **fórmula de variación de las constantes** para la solución de [C] que satisface el dato inicial $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}(t-t_o)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x_o}+\mathbf{P}\int_{t_o}^{t}e^{\mathbf{J}(t-s)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{f}(s)\,ds}$$

donde todas las matrices son calculables (hallada la $e^{\mathbf{J}t}$, basta cambiar t por $t-t_o$ o por $t-s$ para obtener las otras). Insistimos en que los λ y las matrices $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{-1}$ y $e^{\mathbf{J}t}$ pueden ser complejos, pero si $\mathbf{A}$ es real han de ser reales $e^{\mathbf{A}t}$ y la solución $\mathbf{x}$.

Para hacer los cálculos de esta fórmula es aconsejable efectuar las operaciones de derecha a izquierda, de forma que sólo haya que multiplicar matrices por vectores (y no matrices por matrices lo que es mucho más largo y mayor fuente de errores).

Si lo que se busca es la solución general nos podríamos ahorrar algunos cálculos, pues no necesitamos la canónica. Por ejemplo, $\mathbf{W}(t)=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}$ es matriz fundamental de [Ch] (es producto por la derecha de la matriz canónica por la $\mathbf{P}$ no singular) y de ella deducimos que la solución general del sistema homogéneo [Ch] es simplemente $\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c}$, con $\mathbf{c}$ arbitrario. Pero esta expresión puede ser inadecuada si los λ son complejos, pues queda $\mathbf{x}$ expresada en términos de funciones y constantes complejas (en ese caso mejor seguimos lo otros caminos que describiremos).

Ej 1. Resolvamos $\boxed{\begin{array}{l}\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=3x+4y+e^t\end{cases}\\ \text{con } x(0)=0,\ y(0)=1\end{array}}$, es decir, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

[Sabemos que dicha solución es única y que está definida para todo $t\in\mathbf{R}$].

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-6\lambda+5=0\ \to\ \lambda_1=5 \text{ y } \lambda_2=1.\ \text{ Por tanto, } \mathbf{J}=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix},\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^t\end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\quad(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P^{-1}}=\tfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}-1&-1\\-3&1\end{pmatrix}=\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

(**Escribir la inversa de una matriz 2x2 es casi inmediato:**

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P^{-1}}=\tfrac{1}{|\mathbf{P}|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

se cambian a **y** d **de sitio,** b **y** c **de signo y se divide por el determinante**).

Por tanto: $\mathbf{x}(t)=\tfrac14\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\tfrac14\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\e^s\end{pmatrix}ds$

$$=\tfrac14\mathbf{P}\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\tfrac14\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{5(t-s)}&0\\0&e^{t-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^s\\-e^s\end{pmatrix}ds=\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t}\\-e^t\end{pmatrix}+\tfrac14\mathbf{P}\begin{pmatrix}\int_0^t e^{5t-4s}ds\\-\int_0^t e^t ds\end{pmatrix}$$

$$=\tfrac14\begin{pmatrix}e^{5t}-e^t\\3e^{5t}+e^t\end{pmatrix}+\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14[e^{5t}-e^t]\\-te^t\end{pmatrix}=\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix}5e^{5t}-5e^t-4te^t\\15e^{5t}+e^t+4te^t\end{pmatrix}$$

Si queremos la **solución general**, los cálculos son algo más cortos. La solución general de la homogénea $\mathbf{x_h}$ se escribe rápidamente una vez hallados los autovalores y vectores propios:

$$\mathbf{x_h}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}e^{5t}&e^t\\3e^{5t}&-e^t\end{pmatrix}\mathbf{c}=c_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ \left[=c_1e^{\lambda_1t}\mathbf{v_1}+c_2e^{\lambda_2t}\mathbf{v_2}\right]$$

Para la solución particular de la no homogénea sí necesitamos hallar alguna inversa:

$$\mathbf{W^{-1}}(t)=\tfrac14\begin{pmatrix}e^{-5t}&e^{-5t}\\3e^{-t}&-e^{-t}\end{pmatrix},\ \mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W^{-1}}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt=\tfrac{1}{16}\mathbf{W}(t)\begin{pmatrix}e^{-4t}\\-4t\end{pmatrix}=\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix}-e^t-4te^t\\-3e^t+4te^t\end{pmatrix}.$$

Englobando los términos con e^t de la $\mathbf{x_p}$ en la constante c_2, obtenemos esta solución general del sistema:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x_h}+\mathbf{x_p}=c_1\,e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2\,e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\tfrac14\,t\,e^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Ej 2. Resolvemos $\boxed{\begin{cases} x' = x-y+2 \\ y' = x+y \end{cases}}$ con $\boxed{\begin{array}{c} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{array}}$ $\to\ \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = (\lambda-1)^2+1 = 0 \ \to\ \lambda = 1\pm i \ \to$$

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{t+it} & 0 \\ 0 & e^{t-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t[\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t] & 0 \\ 0 & e^t[\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t] \end{pmatrix}.$$

[Recordemos que $e^{a\pm ib} = e^a[\cos b \pm i\,\mathrm{sen}\,b]$ y que, por tanto, $e^{ib}+e^{-ib} = 2\cos b$, $e^{ib}-e^{-ib} = 2i\,\mathrm{sen}\,b$].

$$(\mathbf{A}-[1\pm i]\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \to \mathbf{v}_\pm = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P^{-1}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big[\text{comprobamos: } \mathbf{P}\,\mathbf{P^{-1}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Big].$$

$$\mathbf{x}(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}ds = \tfrac{1}{2}\,e^t\,\mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{pmatrix} + \mathbf{P}\int_0^t \begin{pmatrix} -ie^{(1+i)(t-s)} \\ ie^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix}ds$$

$$\Big[\ -i\int_0^t e^{(1+i)(t-s)}ds = \tfrac{i}{1+i}\big[e^{(1+i)(t-s)}\big]_0^t = \tfrac{i(1-i)}{1+1}\big[1-e^{(1+i)t}\big] \quad \text{y análoga la otra}\Big]$$

$$= e^t\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,t \\ \cos t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\begin{pmatrix} [1+i]\,[1-e^{(1+i)t}] \\ [1-i]\,[1-e^{(1-i)t}] \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,t \\ \cos t \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+[i-1]e^{(1+i)t}+[i-1]e^{(1-i)t} \\ 2-[1+i]e^{(1+i)t}-[1-i]e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t\,\mathrm{sen}\,t \\ e^t\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+e^t[\cos t+\mathrm{sen}\,t] \\ 1+e^t[-\cos t+\mathrm{sen}\,t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos t-1 \\ e^t\,\mathrm{sen}\,t+1 \end{pmatrix}$$

Está claro que trabajar con autovalores complejos complica mucho los cálculos. Por suerte conoceremos otros caminos para resolver estos sistemas: pronto veremos como convertirlos en ecuaciones de segundo orden (mucho más manejables) y en 2.5 dispondremos de la transformada de Laplace.

Para este ejemplo concreto (con $\mathbf{f}(t)$ **constante**) podíamos haber atajado buscando una solución del sistema no homogéneo que fuese también constante (no siempre existirá, pues será necesario que el determinante $|\mathbf{A}|\neq 0$, o lo que es lo mismo, que $\lambda=0$ no sea autovalor). Basta resolver el sistema

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \text{para obtenerla:} \quad x=-1\,,\ y=1 \ \to\ \mathbf{x_p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nos falta ya sólo sumar a $\mathbf{x_p}$ la solución general del homogéneo ($c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$ como vimos en ejemplo anterior), e imponer los datos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1\,i\,e^{t+it}-c_2\,i\,e^{t-it}-1 \\ c_1\,e^{t+it}+c_2\,e^{t-it}+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d.i.} \begin{array}{l} c_1\,i-c_2\,i=1 \\ c_1\,i+c_2\,i=0 \end{array} \to\ c_1 = \tfrac{1}{2i}\,,\ c_2 = -\tfrac{1}{2i} \ \to$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t[e^{it}+e^{-it}]-1 \\ \frac{1}{2i}e^t[e^{it}-e^{-it}]+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos t-1 \\ e^t\,\mathrm{sen}\,t+1 \end{pmatrix}$$

Si queremos la solución general en términos de funciones reales podemos hallar $\mathbf{P}^{-1}$ y calcular hasta el final la matriz canónica:

$$e^{\mathbf{A}t} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t+it} & 0 \\ 0 & e^{t-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -e^t\,\mathrm{sen}\,t \\ e^t\,\mathrm{sen}\,t & e^t\cos t \end{pmatrix} \to\ \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Con esta matriz fundamental real podríamos hallar una $\mathbf{x_p}$ (y no sólo en este caso de $\mathbf{f}$ constante) realizando integraciones de funciones reales. Pero esto tampoco ahorra tiempo porque, por ejemplo, es más rápido hallar una primitiva de $e^{(1+i)t}$ que de $e^t\cos t$ (hay que utilizar dos veces partes para volver a encontrar la integral inicial)].

Dejemos ya los sistemas de dos ecuaciones lineales y pasemos a estudiar las ecuaciones lineales de orden dos que, como dijimos en la sección 2.1, se pueden considerar como un caso particular de ellos. Será cuestión de ir viendo la forma que adoptan los resultados anteriores para el 'sistema equivalente' a una ecuación, aunque este no sea el camino más corto para estudiar las ecuaciones (sus teoremas se podrían probar sin necesidad de matrices).

Ecuaciones lineales de segundo orden:

Consideremos [e] $\boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)}$, con a, b y f continuas en I.

Sabemos que hay solución única definida en todo el intervalo I para cada par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $x'(t_o)=x'_o$ si $t_o\in I$. Haciendo $x'=y$ se tiene el sistema

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-b(t)x-a(t)y+f(t) \end{cases}$, cuyas soluciones serán funciones vectoriales $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Este sistema está resuelto conociendo una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Para ello basta hallar **dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación homogénea** asociada a [e] (pues la fila inferior de la matriz estará formada por las derivadas x'_1 y x'_2) tales que sea no nulo en algún $s\in I$ el llamado

$$\boxed{\textbf{determinante wronskiano de } x_1 \text{ y } x_2:\quad |\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}.}$$

La solución general de [e] será entonces la primera componente del vector:

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}dt\,,\quad \text{y como}\quad \mathbf{W}^{-1}(t)=\frac{1}{|\mathbf{W}|(t)}\begin{pmatrix} x'_2(t) & -x_2(t) \\ -x'_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix},$$

unas pocas operaciones nos permiten concluir de los teoremas para sistemas que:

Teor 4.

> **i]** Si x_1 y x_2 son dos soluciones de la homogénea tales que $|\mathbf{W}|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$ y x_p es cualquier solución particular de [e], la solución general de [e] es: $x=c_1x_1+c_2x_2+x_p$.
>
> **ii]** Una solución particular de [e] es: $x_p=x_2\int\frac{x_1 f}{|\mathbf{W}|}\,dt-x_1\int\frac{x_2 f}{|\mathbf{W}|}\,dt$.
>
> [**Fórmula de variación de las constantes**].

La expresión de las dos soluciones en términos de funciones elementales se podrá dar sólo en los pocos casos que vamos a describir (en el capítulo 3 resolveremos las ecuaciones del tipo [e] por medio de series).

Resolvamos la **ecuación con coeficientes constantes**: [c] $\boxed{x''+ax'+bx=f(t)}$.

Llamemos [ch] a la **ecuación homogénea** ($f\equiv 0$). La matriz del sistema asociado:

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, tiene por ecuación característica $\boxed{P(\lambda)\equiv\lambda^2+a\lambda+b=0}$.

Como los elementos del vector real $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$, solución general del sistema homogéneo, están formados por combinaciones lineales arbitrarias de los elementos de la matriz $e^{\mathbf{J}t}$, la **solución general de** [ch] es, según sean las raíces de $P(\lambda)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ reales, } x=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real), } x=(c_1+c_2t)e^{\lambda t} \\ \text{Si } \lambda=p\pm qi,\ x=(c_1\cos qt+c_2\,\mathrm{sen}\,qt)e^{pt} \end{array}}$$

pues $e^{\mathbf{J}t}$ es: $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}$ ó $\begin{pmatrix} e^{pt}[\cos qt+i\,\mathrm{sen}\,qt] & 0 \\ 0 & e^{pt}[\cos qt-i\,\mathrm{sen}\,qt] \end{pmatrix}$

[Se puede llegar a la solución por un camino directo sin pasar por el sistema equivalente: probando en [ch] soluciones del tipo $x=e^{\lambda t}$ se deduce que λ debe satisfacer la ecuación característica de arriba; si $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbf{R}$ es inmediato que el $|\mathbf{W}|$ de $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ es no nulo; si λ doble, se comprueba que $te^{\lambda t}$ también es solución y que es $\neq 0$ el $|\mathbf{W}|$ de ambas; y si $\lambda\in\mathbf{C}$ se utiliza que la parte real y la imaginaria de una solución compleja también lo son].

Para hallar la solución particular de la no homogénea [c] disponemos siempre de la fórmula de **variación de las constantes,** pero en muchas ocasiones será preferible utilizar el método de los **coeficientes indeterminados** que precisaremos en la próxima sección e iremos introduciendo en los ejemplos.

Ej 3. Resolvemos $\boxed{x''-2x'+x=6te^t \text{ con } x(1)=x'(1)=0}$.

$\lambda^2-2\lambda+1=0 \to \lambda=1$ doble, luego la solución de la homogénea es $x_h=(c_1+c_2t)\,e^t$.

$|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix}=e^{2t} \to x_p=6te^t\int\frac{e^t te^t}{e^{2t}}dt-6e^t\int\frac{te^t te^t}{e^{2t}}dt=t^3e^t \to x=(c_1+c_2t)e^t+t^3e^t.$

De los datos iniciales: $\left.\begin{array}{l} x(1)=[c_1+c_2+1]e=0 \\ x'(1)=[c_1+2c_2+4]e=0 \end{array}\right\} \to x=(2-3t+t^3)\,e^t$, solución buscada.

[Se puede hallar x_p con el **método de coeficientes indeterminados** que veremos; la idea es buscar una x_p 'similar' a $f(t)$; parece que una buena candidata a x_p es un polinomio multiplicado por e^t pues sus derivadas son del mismo tipo; como e^t y te^t ya figuran en x_h, el polinomio debe contener términos t^2e^t; la próxima sección dirá que la buena candidata es $x_p=t^2e^t[At+B]$, para A y B adecuados; para fijarlos llevamos x_p y sus derivadas $x_p'=e^t[At^3+(B+3A)t^2+2Bt]$ y $x_p''=e^t[At^3+(B+6A)t^2+(4B+6A)t+2B]$ a la ecuación, obteniendo $[6At+2B]e^t=6te^t$ y por tanto deben ser $B=0$, $A=1$; así hallamos de nuevo la $x_p=t^3e^t$; en este ejemplo parece más largo este camino que la variación de constantes, pero en muchos otros ahorra el cálculo de largas primitivas].

Aunque sea muy mal camino, repasemos las matrices resolviendo el sistema equivalente:

$\left\{\begin{array}{l} x'=y \\ y'=-x+2y+6te^t \end{array}\right.$, o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6te^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda=1$ doble $\to e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}e^t$

(nunca la matriz de un sistema proveniente de una ecuación puede ser diagonal).

El único (salvo producto por un escalar) vector $\mathbf{v}$ asociado al $\lambda=1$ doble es $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escogemos $\mathbf{w}$ tal que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{w}=\mathbf{v}$, por ejemplo $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P^{-1}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\int_1^t e^{t-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} t^3-3t+2 \\ t^3+3t^2-3t-1 \end{pmatrix}e^t$ (su x es la de antes y su y es la x').

Ej 4. Hallemos la solución general de las dos ecuaciones: a) $\boxed{x''+x=e^t}$ y b) $\boxed{x''+x=\tan t}$.

En ambos casos es: $\lambda^2+1=0 \to \lambda=\pm i \to$ solución general: $x=c_1\cos t+c_1\operatorname{sen}t+x_p$.

Para hallar la x_p con variación de las constates: $|\mathbf{W}|(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen}t \\ -\operatorname{sen}t & \cos t \end{pmatrix}=1$, de dónde:

a) $x_p=\operatorname{sen}t\int e^t\cos t\,dt-\cos t\int e^t\operatorname{sen}t\,dt=\cdots=s\frac{1}{2}e^t[c+s]-c\frac{1}{2}e^t[s-c]=\frac{1}{2}[s^2+c^2]e^t=\frac{1}{2}e^t$.

[Mucho más corto será probar $x_p=Ae^t \to 2Ae^t=e^t \to A=\frac{1}{2}$, $x_p=\frac{1}{2}e^t$].

b) $x_p=\operatorname{sen}t\int\operatorname{sen}t\,dt-\cos t\int\frac{\operatorname{sen}^2t}{\cos t}dt=-\mathrm{sc}+\mathrm{sc}-\mathrm{c}\int\frac{dt}{c}\overset{u=s}{=}\int\frac{du}{1-u^2}=\cdots=-\cos t\ln\frac{1+\operatorname{sen}t}{\cos t}$.

[En esta ecuación ni el método de coeficientes determinados ni Laplace serían aplicables].

Aunque es perder el tiempo pasar de ecuaciones a sistemas, en cambio, **sí es práctico convertir un sistema dado en una ecuación de mayor orden**, sobre todo si los autovalores son complejos:

Ej 5. Pasando a una ecuación, volvamos a resolver el ejemplo 2 $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x'=x-y+2 \\ y'=x+y \end{array}\right.}$, $\boxed{\begin{array}{l} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{array}}$.

Despejemos la y de la segunda ecuación (más corta que la otra): $x=y'-y$.

Sustituyendo en la primera: $y''-y'=y'-y-y+2$, $y''-2y'+2y=2$.

La solución general de la homogénea la obtenemos de la ecuación característica (la misma que la de la matriz) y la solución particular en este caso salta a la vista $x_p=1$ (con la fórmula de variación de las constantes sería largo y el método de coeficientes indeterminados lo que sugerirá es probar una constante). Así pues:

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \to \lambda=1\pm i \to y=(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t)\,e^t+1$$

Imponiendo los datos iniciales: $y(0)=1$, $y'(0)=x(0)+y(0)=1$, obtenemos la y de antes:

$$y=e^t\operatorname{sen}t+1 .$$

Y simplemente sustituyendo esta y obtenemos la x: $x=y'-y=e^t\cos t-1$.

Consideremos otros tres casos de ecuaciones lineales de segundo orden [e], ahora con **coeficientes variables**, que son resolubles por métodos elementales.

i) Ecuaciones de Euler: [u] $\boxed{t^2x''+atx'+bx=h(t)}$, $t>0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $t=e^s$: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left[\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\right]$,

[u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{ds^2}+(a-1)\frac{dx}{ds}+bx=h(e^s) \ , \quad \text{de ecuación característica}$$

$$\boxed{Q(\lambda)\equiv\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0} \ .$$

Como conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para esta segunda ecuación, deshaciendo el cambio ($s=\ln t$), tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ reales, } x=c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2} \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real), } x=(c_1+c_2\ln t)t^{\lambda} \\ \text{Si } \lambda=p\pm qi \ , \ x=[c_1\cos(q\ln t)+c_2\,\text{sen}(q\ln t)]t^p \end{array}}$$

(observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma t^λ).

Para hallar la solución particular de la no homogénea dispondremos siempre de la **fórmula de variación de las constantes con** $f(t)=h(t)/t^2$ (y para la ecuación de coeficientes constantes en s del método de **coeficientes indeterminados** de 2.3, **si** $h(e^s)$ **es del tipo adecuado**).

Ej 6. Hallemos la solución general de $\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$.

La 'ecuación característica' es $\lambda^2+(1-1)\lambda-1=0 \to \lambda=\pm1 \to$

la homogénea tiene por solución general $x_h=c_1t+c_2t^{-1}$ (válida en este caso $\forall t\neq0$).

$|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2}\end{vmatrix}=-2t^{-1}$ y $f(t)=t^{-1} \to x_p=t^{-1}\int\frac{tt^{-1}dt}{-2t^{-1}}-t\int\frac{t^{-1}t^{-1}dt}{-2t^{-1}}=\frac{t}{2}\ln t-\frac{t}{4} \to$

la solución general de la no homogénea es $x=c_1t+c_2t^{-1}+\frac{t}{2}\ln t$ (englobado el $\frac{t}{4}$ en c_1t).

[La x_p se podría calcular utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $x''-x=e^s$ a la que conduce el cambio $t=e^s$; veremos que la x_p que deberíamos probar en la ecuación en s es $x_p=Ase^s$, o lo que es lo mismo, podríamos probar $x_p=At\ln t$ en la de Euler inicial); si lo hiciésemos, comprobaríamos que debe ser $A=\frac{1}{2}$ como antes].

ii) Si en la ecuación [e] **es** $b(t)\equiv0$: $\boxed{x''+a(t)x'=f(t)}$,

el cambio $x'=y$ **convierte dicha ecuación en una lineal de primer orden en** y , resoluble con la fórmula del capítulo 1. Integrando y obtendremos la x .

(Observemos que el cambio anterior reduce también una ecuación **no lineal** en la que no aparece la x en una de primer orden, tal vez resoluble: $x''=g(t,x') \to y'=g(t,y)$; este es uno de los pocos casos de ecuaciones no lineales que se pueden resolver elementalmente).

Ej 7. Calculemos la solución general de $\boxed{tx''-2x'=t\cos t}$.

$$x'=y \to y'=\frac{2y}{t}+\cos t \to y=Ct^2+t^2\int\frac{\cos t}{t^2}dt \to x=K+Ct^3+\int\left[t^2\int\frac{\cos t}{t^2}dt\right]dt$$

(primitivas que no son calculables elementalmente).

Es también de Euler ($a=-2$, $b=0$, $h(t)=t^2\cos t$) y se puede resolver como el ejemplo 6:

$\lambda^2-3\lambda=0 \to \lambda=0,3 \to x_h=c_1+c_2t^3$, solución de la homogénea. $|\mathbf{W}|(t)=3t^2 \to$

$x=c_1+c_2t^3+t^3\int\frac{\cos t}{3t^2}dt-\int\frac{\cos t}{3t}dt$, que debe poderse hacer coincidir con la de antes.

iii) Si conocemos una solución x_1 de la homogénea $x''+a(t)x'+b(t)x=0$, el cambio $\boxed{x=x_1\int u\,dt}$ lleva la ecuación [e] a lineal de primer orden en u.

[No son, por tanto, necesarias las dos soluciones que exigía el teorema 4; basta sólo hallar una; el problema es que en pocas ocasiones podremos encontrar esa solución: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces nos aparecerá cuando estemos resolviéndola por series].

En efecto, llevando x, $x'=x_1'\int u\,dt+x_1u$, $x''=x_1''\int u\,dt+2x_1'u+x_1u'$ a [e]:

$$x_1u'+(2x_1'+ax_1)u+(x_1''+ax_1'+bx_1)\int u\,dt=f(t) \to u'=-(2x_1'x_1^{-1}+a)u+f(t)x_1^{-1}$$

pues x_1 satisface la homogénea. El conocimiento de la x_1 permite hallar también (sin necesidad de hacer el cambio) una **segunda solución** x_2 **de la homogénea**, pues integrando la ecuación en u con $f(t)=0$:

$$u=e^{-\int a\,dt}x_1^{-2} \to \boxed{x_2=x_1\int \frac{e^{-\int a\,dt}}{x_1^2}\,dt}$$

[El a de la fórmula, desde luego, es el que queda cuando se escribe la ecuación en la forma de arriba $x''+ax'+\cdots$; utilizaremos bastantes veces esta fórmula en el capítulo 3, en el que trabajaremos, sobre todo, con homogéneas].

Ej 8. Resolvamos $\boxed{t^3x''-tx'+x=1}$.

Las únicas soluciones de la homogénea que pueden saltar a la vista son las rectas $x=t+b$ (pues entonces el término de la x'' no aparece y basta mirar los otros dos). En este caso $x_1=t$ es solución de la homogénea.

Para resolver la ecuación dada podemos ahora seguir dos caminos diferentes:

1) Efectuar explícitamente el cambio $x=t\int u$, $x'=\int u+tu$, $x''=2u+tu'$, para convertir la ecuación inicial en la lineal de primer orden no homogénea:

$$t^4u'+(2t^3-t^2)u=1 \to u'=(t^{-2}-2t^{-1})u+t^{-4}.$$

Resolver esta lineal: $u=c_2t^{-2}e^{-1/t}+t^{-2}e^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt=c_2t^{-2}e^{-1/t}-t^{-2}$.

Y deshacer el cambio: $x=t(c_1+c_2\int t^{-2}e^{-1/t}dt-\int t^{-2}dt)=c_1t+c_2te^{-1/t}+1$.

[No olvidemos la constante de integración; la solución general debe contener 2 constantes arbitrarias].

2) Hallar una segunda solución de la homogénea por la fórmula deducida antes:

$$x_2=t\int \frac{e^{-\int -t^{-2}dt}}{t^2}\,dt=te^{-1/t}$$

y calcular una x_p de la no homogénea con la fórmula de variación de constantes:

$$|\mathbf{W}|(t)=e^{-1/t} \to x_p=te^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt-t\int t^{-2}dt=t+1 \to x=c_1t+c_2te^{-1/t}+1$$

(El trabajo con la no homogénea ha sido absolutamente inútil y podíamos perfectamente habérnoslo ahorrado, porque la $x_p=1$ se veía también a simple vista).

2.3 Ecuaciones y sistemas lineales de orden n

Veamos, casi sin demostraciones, los resultados esenciales, análogos a los del caso $n=2$. Aquí empezamos tratando, en vez de los más complicados sistemas, las:

Ecuaciones lineales de orden n.

Sea [e] $\boxed{x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)}$ a_i, f continuas en I.

Tiene solución única, definida en todo el intervalo I, satisfaciendo:

$$x(t_o)=x_o,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)},\ \text{si } t_o\in I.$$

Teor 1. Si $x_1,\ldots,x_n$ son n soluciones de la homogénea, su wronskiano $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ es no nulo en algún $s\in I$ y x_p es solución de [e], la solución general de [e] es: $x=c_1x_1+\cdots+c_nx_n+x_p$.

[Con la teoría de sistemas que veremos luego se podría hallar una x_p a partir de las $x_1,\ldots,x_n$ (para $n=2$ obtuvimos la fórmula de variación de las constantes), pero como casi nunca se podrán hallar esas n soluciones, no nos ocuparemos de ello].

Nos vamos a centrar ya en las ecuaciones con **coeficientes constantes**:

Sea [c] $\boxed{L[x]\equiv x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)}$,

y llamemos [ch] a la homogénea $L[x]=0$.

Para resolver [ch] **basta hallar las raíces de un polinomio** $P(\lambda)$ **de orden** n (llamadas autovalores de la ecuación). Como se sabe, eso **en general es imposible** para $n\geq 3$ con lo que sólo se podrá dar la solución exacta en casos excepcionales. Como para $n=2$, el polinomio característico $P(\lambda)$ es el que aparece al probar soluciones del tipo $e^{\lambda t}$ en [ch]:

$$\boxed{P(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0}\quad\text{(ecuación característica)}$$

$P(\lambda)$ tendrá m raíces reales $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, de multiplicidades $r_1,..,r_m$, y $2k$ complejas $p_1\pm iq_1,\ldots,p_k\pm iq_k$ de multiplicidades $s_1,..,s_m$ [será $r_1+\cdots+r_m+2(s_1+\cdots+s_k)=n$].

Desde luego, todas podrían ser reales, o todas complejas; y perfectamente puede ser $r_k=1$ ó $s_k=1$ (autovalores simples). Necesitamos n soluciones, tantas como raíces de $P(\lambda)$. Este teorema dice cómo conseguirlas:

Teor 2. Las r funciones $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t},\ldots,$ $t^{r-1}e^{\lambda t}$ son soluciones linealmente independientes de $L[x]=0$, si λ es raíz real de P(λ)=0 de multiplicidad r. Lo mismo sucede con las $2s$ funciones $e^{pt}\cos qt$, $e^{pt}\operatorname{sen}qt$, $te^{pt}\cos qt$, $te^{pt}\operatorname{sen}qt,\ldots,$ $t^{s-1}e^{pt}\cos qt$, $t^{s-1}e^{pt}\operatorname{sen}qt$, si $p\pm iq$ son raíces complejas de multiplicidad s.

[No es difícil ver que $te^{\lambda t},\ldots,$ $t^{r-1}e^{\lambda t}$ son también soluciones de [ch] utilizando que λ es raíz de las primeras derivadas de $P(\lambda)$ y que si z es solución compleja de [ch] lo son también sus partes real e imaginaria; y hallando su wronskiano en $t=0$ se comprueba que son independientes].

[Si $r=1$, sólo hay la solución $e^{\lambda t}$, claro; y si $s=1$, sólo $e^{pt}\cos qt$ y $e^{pt}\operatorname{sen}qt$].

Ej 1. $\boxed{x^V - 4x'' + 3x' = 0}$ tiene por ecuación característica $P(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0$.

Las raíces son calculables. Es claro que $P(\lambda) = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda + 3)$. Probando con los divisores de 3 obtenemos el autovalor $\lambda=1$, es decir $\lambda^4-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3)$. $\lambda=1$ vuelve a ser raíz del polinomio: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)$. Y la ecuación de segundo grado es fácilmente resoluble: $\lambda=-1\pm i\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -3 & |\,0 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & |\,0 & \end{array}$$

En resumen los 5 autovalores son: $\lambda=0$, $\lambda=1$ doble y $\lambda=-1\pm i\sqrt{2}$, y el teorema 2 nos da las 5 soluciones reales independientes:

$$e^{0t}=1 \ , \ e^t \ , \ te^t \ , \ e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t \ \text{ y } \ e^{-t}\,\text{sen}\sqrt{2}\,t \ .$$

La solución general será una combinación lineal arbitraria de estas 5 soluciones:

$$x = c_1 + (c_2+c_3t)e^t + (c_4\cos\sqrt{2}\,t + c_5\,\text{sen}\sqrt{2}\,t)e^{-t} \ .$$

[Basta cambiar, por ejemplo, el 4 de la ecuación por un 5 para que no podamos resolverla; las fórmulas para las raíces de polinomios de grados 3 y 4 son muy poco prácticas].

Para la **no homogénea** [c] no dispondremos como dijimos de una fórmula como la de variación de constantes del caso $n=2$ para el cálculo de la x_p a partir de las soluciones de la homogénea (como largo último recurso podremos resolver el sistema equivalente mediante matrices). Pero si la $f(t)$ está formada por sumas y productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos podemos acudir al **método de los coeficientes indeterminados** (del tanteo organizado) del próximo teorema. La idea, como comentamos en la sección anterior, es probar en [c] una x_p similar a $f(t)$ con constantes arbitrarias que se determinan resolviendo simplemente sistemas algebraicos lineales:

Teor 3.

i] Si $f(t)=e^{\lambda t}p_k(t)$, con p_k polinomio de grado k, y λ no es autovalor de [ch] existe solución particular de [c] de la forma $x_p=e^{\lambda t}P_k(t)$, donde P_k es otro polinomio de grado k cuyos coeficientes se precisan llevando x_p a [c]. Si λ es autovalor de multiplicidad r, $x_p=t^r e^{\lambda t}P_k(t)$.

ii] Si $f(t)=e^{pt}[p_j(t)\cos qt+q_k(t)\,\text{sen}\,qt]$, p_j y q_k de grados j y k, y $p\pm iq$ no es autovalor hay $x_p=e^{pt}[P_m(t)\cos qt+Q_m(t)\,\text{sen}\,qt]$, con P_m y Q_m de grado $m=\text{máx}\{j,k\}$. Si $p\pm iq$ es autovalor de multiplicidad s existe $x_p=t^s e^{pt}[P_m(t)\cos qt+Q_m(t)\,\text{sen}\,qt]$.

iii] Si $f(t)=f_1(t)+\cdots+f_m(t)$ y $L[x_i]=f_i(t) \Rightarrow L[x_1+\cdots+x_m]=f(t)$.

[En particular, si $\lambda=0$, o sea, si $f(t)$ es un polinomio, bastará probar según **i]** un polinomio adecuado, y desde luego entendemos una constante como un polinomio de grado 0].

Ej 2. Hallemos una x_p de $\boxed{x'''+2x''+4x'+cx=t}$ para todos los valores de la constante c .

Hay solución particular de la forma $x_p=At+B$, si $\lambda=0$ no es autovalor (es decir, si $c\neq 0$)

$$\to \ 4A+c(At+B)=t \ \to \ A=\tfrac{1}{c} \ , \ B=-\tfrac{4A}{c}=-\tfrac{4}{c^2} \ \to \ x_p=\tfrac{t}{c}-\tfrac{4}{c^2} \ , \ \text{ si } c\neq 0 \ .$$

Si $c=0$, hay que 'engordar' la x_p con una t ($\lambda=0$ es simple):

$$x_p=At^2+Bt \to x_p=\tfrac{t^2}{8}-\tfrac{t}{8} \ , \ \text{ si } c=0 \ .$$

En este caso podemos además dar la solución general:

$$x = c_1 + (c_2\cos\sqrt{3}t + c_3\,\text{sen}\,\sqrt{3}t)e^{-t} + \tfrac{t^2}{8} - \tfrac{t}{8} \ .$$

No podemos hacer lo mismo $\forall c$, por no saber resolver $\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+c=0$. Sólo podemos para valores elegidos de c ; por ejemplo, si $c=3$ es $P(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+3) \to$

$$x = c_1e^{-t} + \Big(c_2\cos\tfrac{\sqrt{11}}{2}t + c_3\,\text{sen}\,\tfrac{\sqrt{11}}{2}t\Big)e^{-t/2} + \tfrac{t}{3} - \tfrac{4}{9} \ .$$

U otro ejemplo, si $c=8$ (valor que nos sugerirá, en el futuro, el estudio de la estabilidad):

$$P(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda^2+4) \ \to \ x = c_1e^{-2t} + (c_2\cos 2t + c_3\,\text{sen}\,2t) + \tfrac{t}{8} - \tfrac{1}{16} \ .$$

Ej 3. Resolvamos $\boxed{x^{IV}+3x''-4x=\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{sen}\,t}$, con $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

Los autovalores son calculables por tratarse de una ecuación bicuadrada:

$$\lambda^4+3\lambda^2-4=0 \ \to\ \lambda^2=\tfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=1,-4 \ \to\ \lambda=\pm 1,\pm 2i .$$

La solución general de la no homogénea será entonces:

$$x=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}+c_3\cos 2t+c_4\,\mathrm{sen}\,2t+x_p \ .$$

Los dos sumandos de nuestra $f(t)$ están incluidos en los casos **i]** y **ii]** del teorema. Como 1 es autovalor de multiplicidad 1, hay que 'engordar' la $A\mathrm{e}^t$ con una t, y, aunque $t\,\mathrm{sen}\,t$ sólo es un polinomio de grado 1 junto al seno, en la x_p también deben aparecer los cosenos. Lo anterior, unido al apartado **iii]**, nos lleva a probar en la ecuación:

$$x_p=At\mathrm{e}^t+(Bt+C)\cos t+(Dt+E)\,\mathrm{sen}\,t \ .$$

Derivándola con paciencia 4 veces y sustituyéndola en la ecuación obtenemos:

$$10A\mathrm{e}^t+(2D-6C-6Bt)\cos t-(2B+6E+6Dt)\,\mathrm{sen}\,t=\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{sen}\,t \ \to$$

$$A=\tfrac{1}{10} \ \text{ y } \ \begin{cases} 2D-6C=0 \\ 6B=0 \\ 2B+6E=0 \\ -6D=1 \end{cases} \to\ B=E=0\,,\ D=-\tfrac{1}{6}\,,\ C=-\tfrac{1}{18} \ \to\ x_p=\tfrac{t}{10}\mathrm{e}^t-\tfrac{1}{18}\cos t-\tfrac{t}{6}\,\mathrm{sen}\,t\,.$$

Sustituyendo esa x_p en la solución general e imponiendo en ella (ahora, no en la solución de la homogéna) los datos iniciales y resolviendo el sistema 4x4 resultante (todo esto también es bastante largo) se tiene

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3-\frac{1}{18}=0 \\ c_1-c_2+2c_4+\frac{1}{10}=0 \\ c_1+c_2-4c_3-\frac{7}{90}=0 \\ c_1-c_2-8c_4+\frac{3}{10}=0 \end{cases} \to\ c_1=-\tfrac{1}{25}\,,\ c_2=\tfrac{1}{10}\,,\ c_3=-\tfrac{1}{225}\,,\ c_4=\tfrac{1}{50}\ .$$

Resumiendo, la solución particular buscada es:

$$x=\tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}-\tfrac{1}{25}\mathrm{e}^t-\tfrac{1}{225}\cos 2t+\tfrac{1}{50}\,\mathrm{sen}\,2t+\tfrac{t}{10}\mathrm{e}^t-\tfrac{1}{18}\cos t-\tfrac{t}{6}\,\mathrm{sen}\,t\ .$$

Ej 4. Calculemos ahora una x_p de $\boxed{x''+x=f(t)}$ para diferentes $f(t)$.

Su solución general es $x=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+x_p$.

Si $\boxed{f(t)=t^3}$, hay $x_p=At^3+Bt^2+Ct+D$ (polinomio arbitrario de grado 3, pues $\lambda=0$ no es autovalor) $\to$

$6At+2B+At^3+Bt^2+Ct+D=t^3 \to A=1, B=0, C=-6A=-6, D=-2B=0\,,\ x_p=t^3-6t$.

Si $\boxed{f(t)=t\mathrm{e}^t}$, existe $x_p=\mathrm{e}^t(At+B)$, $x_p'=\mathrm{e}^t(At+B+A)$, $x_p''=\mathrm{e}^t(At+B+2A)$ $\to$

$\mathrm{e}^t[(At+B+2A)+(At+B)]=t\mathrm{e}^t \to A=\frac{1}{2}\,,\ B=-A=-\frac{1}{2} \to x_p=\mathrm{e}^t(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})$.

Si $\boxed{f(t)=\mathrm{e}^t\cos t}$, hay $x_p=\mathrm{e}^t(A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t)$ [hay $\lambda=\pm i$, no $1\pm i$, y debe estar $\mathrm{sen}\,t$]

$\to (A+2B)\cos t+(B-2A)\,\mathrm{sen}\,t=\cos t \to \begin{cases} A+2B=1 \\ B-2A=0 \end{cases} \to x_p=\mathrm{e}^t(\frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,t)$.

Si $\boxed{f(t)=\mathrm{sen}\,t}$, como $\pm i$ es autovalor simple (es decir, como [ch] ya tiene soluciones de esa forma): $x_p=t(A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t) \to 2B\cos t-2A\,\mathrm{sen}\,t=\mathrm{sen}\,t \to x_p=-\frac{t}{2}\cos t$.

Si $\boxed{f(t)=\cos^2 t}$, aparentemente no podemos utilizar coeficientes indeterminados, pero como $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t) \to$ existe $x_p=A+B\cos 2t+C\,\mathrm{sen}\,2t \to x_p=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2t$.

Si $\boxed{f(t)=(\cos t)^{-1}}$, tenemos que acudir a la fórmula de variación de las constantes:

$|\mathbf{W}|(t)=1 \to\ x_p=\mathrm{sen}\,t\int\frac{\cos t}{\cos t}\,dt-\cos t\int\frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t}\,dt=t\,\mathrm{sen}\,t+\cos t\ln(\cos t)$.

Pasemos ahora ya a tratar el caso general de los sistemas:

Sistemas de n ecuaciones lineales de primer orden.

[S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, [Sh] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$, con $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}$.

Suponemos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}$ continuas en I con lo que hay entonces solución única definida en todo I cumpliendo $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ si $t_o\in I$. Una matriz fundamental es

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{pmatrix},$$ cuyas columnas son soluciones de [Sh], si $|\mathbf{W}(t_o)|\neq 0$.

La $\mathbf{W_c}(t)$ fundamental canónica $\left[=\mathbf{W}(t)\mathbf{W^{-1}}(t_o)\right]$ será la que cumple $\mathbf{W_c}(t_o)=\mathbf{I}$.

De nuevo conocida cualquier $\mathbf{W}(t)$ el sistema homogéneo, el no homogéneo y el problema de valores iniciales están resueltos:

Teor 4.

La solución general de [Sh] es $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}$. La de [S] es $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}$, si $\mathbf{x_p}$ es cualquier solución de [S]. Una $\mathbf{x_p}$ viene dada por: $\mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt$. La solución de [S] que cumple $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es $\mathbf{x}=\mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o}+\mathbf{W_c}(t)\int_{t_o}^{t}\mathbf{W_c^{-1}}(s)\,\mathbf{f}(s)\,ds$.

Pero hallar $\mathbf{W}(t)$ en general es imposible, incluso para **coeficientes constantes**, a pesar de que la matriz fundamental canónica la sigue dando una exponencial:

[C] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, [Ch] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}}$, $\mathbf{A}$ matriz constante.

Teor 5. $\mathbf{W_c}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ es la matriz fundamental canónica en t_o de [Ch].

Ahora es complicado dar $e^{\mathbf{A}t}$ incluso en el caso excepcional de que podamos hallar los autovalores de $\mathbf{A}$, raíces de un polinomio de grado n (no es fácil hallar $\mathbf{J}$ y $\mathbf{P}$). Sólo es sencillo si los autovalores son calculables y la $\mathbf{J}$ resulta ser **diagonal**:

Teor 6. Si hay n vectores propios $\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_n}$ linealmente independientes (asociados a $\lambda_1,\dots,\lambda_n$) entonces:

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\mathbf{P^{-1}}, \text{ con } \mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{v_1}\dots\mathbf{v_n}\end{pmatrix}.$$

Esto sucede, desde luego, si los λ_i son simples, pero también puede pasar aunque haya λ múltiples. Si hay menos de n vectores propios independientes la $\mathbf{J}$ no será diagonal (aparecen unos en la diagonal inferior acompañando a algún λ múltiple, y, como para $n=2$, hay términos de la forma t^n en $e^{\mathbf{J}t}$). Si $\mathbf{A}$ es no diagonalizable, resolveremos [C] por otros métodos que iremos viendo (convertir el sistema en ecuación, Laplace,...). Como siempre, $e^{\mathbf{A}t}$ será real, aunque haya λ_i complejos.

Como en la sección anterior, para resolver el homogéneo podemos evitar el cálculo de la $\mathbf{P^{-1}}$, ya que la solución general de [Ch] es simplemente:

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c}=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{v_n}.$$

Lleguemos esta expresión por un camino más directo, que nos dará idea de cómo utilizar matrices incluso aunque $\mathbf{J}$ sea no diagonal. Comprobemos primero que:

λ autovalor de $\mathbf{A}$, y $\mathbf{v}$ vector propio asociado $\Rightarrow \mathbf{x}=e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es solución de [Ch].

Esto es cierto, ya que $\mathbf{x}'=\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}=\mathbf{A}e^{\lambda t}\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ y se cumple que $\lambda\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{v}$.

Así pues, si conseguimos hallar n vectores propios linealmente independientes, tendremos n soluciones de esa forma, que constituirán una matriz fundamental

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}\cdots e^{\lambda_n t}\mathbf{v_n}\end{pmatrix},$$ pues $|\mathbf{W}|(t)\neq 0$ por ser los $\mathbf{v_k}$ independientes.

Basta entonces escribir $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para obtener el resultado de arriba.

Ej 5. Hallemos la solución general de $\boxed{\begin{array}{l} x' = x+2y \\ y' = 2x+2y+2z \\ z' = 2y+3z \end{array}}$, o sea, de $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} \to$

$\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10=0 \to$

$\lambda=-1 \to \mathbf{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda=2 \to \mathbf{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda=5 \to \mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Para la solución general no necesitamos $\mathbf{P^{-1}}$ [sí para la $\mathbf{x_p}$, si fuese no homogénea]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\mathbf{c} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para fijar una solución, por ejemplo la que cumple $x(0)=6$, $y(0)=0$, $z(0)=-3$, podemos imponer los datos en la solución general y resolver el sistema de 3 ecuaciones resultante, o calcular $\mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y hacer el producto $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2e^{-t}+4e^{2t} \\ -2e^{-t}+2e^{2t} \\ e^{-t}+4e^{2t} \end{pmatrix}$

También podemos **convertir el sistema en una ecuación**, como hacíamos para $n=2$. Por desgracia, si $n=3,4,\dots$, los cálculos dejan de ser tan sistemáticos. No se puede dar ideas generales de qué ecuaciones conviene derivar, por dónde empezar a sustituir, no es raro que tras unos cálculos haya que volver a empezar... Pero, a pesar de estas dificultades, muchas veces sigue siendo mejor que utilizar matrices (λ complejos, sistemas no homogéneos, $\mathbf{J}$ no diagonal, ...). En este caso, por ejemplo, podemos proceder así:

De la 1^a ecuación $y=\frac{x'-x}{2}$, que llevado a la 2^a y despejando $z=\frac{x''-3x'-2x}{4}$.

Sustituyendo ambas en la 3^a: $x'''-6x''+3x'+10x=0 \to x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3e^{2t}$.

(el polinomio característico de la ecuación es el mismo que el de la matriz)

Hallemos directamente la particular. Debe ser:

$$x(0)=6\,,\ x'(0)=x(0)+2y(0)=6\,,\ x''(0)=x'(0)+4x(0)+4y(0)+4z(0)=18$$

$$\to x=2e^{-t}+4e^{2t} \to y=\frac{x'-x}{2}=2e^{2t}-4e^{-t} \to z=\frac{x''-3x'-2x}{4}=2e^{-t}-4e^{2t}.$$

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l} x' = 2y-3z \\ y' = 2x+3y-6z \\ z' = 2e^t-z \end{array}}$ con $\boxed{\begin{array}{l} x(0)=3 \\ y(0)=1 \\ z(0)=1 \end{array}}$ La z, 'desacoplada', se puede hallar primero: $z=c_1e^{-t}+e^t \xrightarrow[z(0)=1]{} z=e^t$

Queda sistema 2x2 que convertimos en ecuación:

$y=\frac{x'+3e^t}{2} \to x''-3x'-4x=-6e^t$; $\lambda=-1,4$; $x_p=Ae^t$, $A=1 \to x=c_2e^{-t}+c_3e^{4t}+e^t$

$x(0)=3,\ x'(0)=-1 \to x=2e^{-t}+e^t \to y=2e^t-e^{-t}$.

Mucho más largo: $\lambda=-1$ doble tiene 2 vectores propios linealmente independientes:

$\mathbf{v_{1,2}}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda=4, \mathbf{v_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}=\frac{1}{5}\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}e^s ds=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13e^{-t}+2e^{4t} \\ e^{-t}+4e^{4t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5e^t-3e^{-t}-2e^{4t} \\ 10e^t-6e^{-t}-4e^{4t} \\ 5e^t-5e^{-t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t}$$

Ej 7. $\boxed{\begin{array}{l} x' = x-2y+2z \\ y' = x-y \\ z' = y-2z \end{array}}$ con $\boxed{\begin{array}{l} x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=1 \end{array}}$ $\lambda=0$: $\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda=-1$ doble: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \mathbf{v_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

único vector propio. $\mathbf{A}$ no es diagonalizable. Para hallar la solución general necesitamos 3 soluciones linealmente independientes. Como $\mathbf{x}=e^{\lambda t}\mathbf{v}$ con λ autovalor y $\mathbf{v}$ vector propio es solución, ya tenemos 2. ¿Y la tercera? Lo que hemos visto de ecuaciones y Jordan para $n=2$ hace creíble probar en $\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}$ soluciones de la forma:

$\mathbf{x}=(\mathbf{w}+t\mathbf{u})e^{-t} \to (\mathbf{u}-\mathbf{w}-t\mathbf{u})e^{-t}=(\mathbf{Aw}+t\mathbf{Au})e^{-t} \to \begin{array}{l} (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0} \\ (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{u} \end{array} \to \mathbf{u}$ vector propio ($\mathbf{v_2}$)

y $\mathbf{w}$ tal que $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v_2}$, por ejemplo $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}=c_1\mathbf{v_1}+c_2e^{-t}\mathbf{v_2}+c_3e^{-t}(\mathbf{w}+t\mathbf{v_2})$ es la solución general.

Imponiendo los datos: $\left\{\begin{array}{l} c_1+c_3=1 \\ 2c_1+c_2+c_3=1 \\ c_1+c_3=1 \end{array}\right. \to c_1=1\,,\ c_2=0\,,\ c_3=-1 \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 2-e^{-t} \\ 2-e^{-t}-te^{-t} \\ 1-te^{-t} \end{pmatrix}$.

O bien, con una de las muchas formas de convertir el sistema en ecuaciones:

$y=z'+2z \to x=z''+3z'+2z \to z'''+2z''+z'=0 \to z=c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}$

con $z(0)=1$, $z'(0)=-1$, $z''(0)=x(0)-y(0)-2z'(0)=2 \to z=1-te^{-t}$

$\to y=z'+2z=2-e^{-t}-te^{-t} \to x=y'+y=2-e^{-t}$.

2.4 Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales.

Para $y'=a(t)y+f(t)$ la estabilidad la ecuación la daba la $e^{\int a}$, es decir, la 'matriz fundamental'. En general sucede lo mismo, pero pocas veces tendremos una $\mathbf{W}(t)$.

Estudiemos primero la estabilidad de las soluciones del sistema lineal general

[S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}$ continuas en $I=[t_o,\infty)$

con lo que todas las soluciones de [S] están definidas $\forall t\geq t_o$.

Definimos en 2.1 la norma de un vector, pero no la de una matriz. En los libros de análisis matemático se ve que hay varias posibles. Nosotros elegimos, por ejemplo:

$\|\mathbf{W}(t)\|$, **norma** de $\mathbf{W}(t)$, será la suma de los valores absolutos de sus elementos.

[Podríamos definir y utilizar otras normas, como el supremo de los valores absolutos (el determinante $|\mathbf{W}(t)|$ no es una norma); y se prueba que todas son 'equivalentes', es decir, que si una es grande o muy pequeña, las otras también lo son].

Si $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamental cualquiera y $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ son dos soluciones de [S] usando la fórmula de variación de las constantes, y el hecho de que en los libros de análisis se ve que la norma de un producto de matrices es menor que una constante por el producto de las normas de ambas, deducimos:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|=\|\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t)[\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)]\|\leq K\|\mathbf{W}(t)\|\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\| .$$

Como $\mathbf{x}(t)$ es estable (AE), si esta norma es pequeña (tiende a 0) para $t\geq t_o$ (cuando $t\to\infty$), si $\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\|$ es suficientemente pequeña, concluimos:

Teor 1. Todas las soluciones de [S] serán estables, asintóticamente estables o inestables dependiendo de que, respectivamente, la $\|\mathbf{W}(t)\|$ esté acotada, tienda a 0 cuando $t\to\infty$ o no esté acotada.

Esto significa que a partir de t_o todos los elementos de $\mathbf{W}(t)$ están acotados, que todos tienden a 0 o que al menos uno de sus elementos no está acotado.

Como ocurría para $n=1$ se puede hablar de la **estabilidad del sistema** [S] pues todas sus soluciones tienen la misma estabilidad [que no depende de la $\mathbf{f}(t)$].

Ej 1. $\boxed{t^3x''-tx'+x=1}$ (ej. 8 de 2.2). Una $\mathbf{W}(t)$ es $\begin{pmatrix} t & te^{-1/t} \\ 1 & (1+t^{-1})e^{-1/t}\end{pmatrix}$,

pues $x_h=c_1t+c_2e^{-1/t}$ era la solución de la homogénea. Como $\|\mathbf{W}(t)\|$ es no acotada (2 de los elementos de $\mathbf{W}(t)$ no lo están), la ecuación es inestable.

Ej 2. $\boxed{t^2x''+4tx'+2x=t^4}$ $\lambda(\lambda-1)+4\lambda+2=0$, $x_h=c_1t^{-1}+c_2t^{-2}\to\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-2} \\ -t^{-2} & -2t^{-3}\end{pmatrix}$.

Como $\|\mathbf{W}(t)\|\underset{t\to\infty}{\to}0$, todas las soluciones para $t>0$ son AE (la $x_p=\frac{t^4}{30}$ no influye nada).

Para **coeficientes constantes** [C] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ hay un resultado más directo:

Teor 2. Si todos los autovalores λ de $\mathbf{A}$ tienen $\mathrm{Re}\lambda<0$, el sistema [C] es asintóticamente estable. Si todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen $\mathrm{Re}\lambda\leq 0$ y para cada λ de multiplicidad m con $\mathrm{Re}\lambda=0$ existen m vectores propios linealmente independientes, [C] es estable. Si existe algún λ con $\mathrm{Re}\lambda>0$ o si existe λ de multiplicidad m con $\mathrm{Re}\lambda=0$ y menos de m vectores propios linealmente independientes, [C] es inestable.

[Los elementos de $\mathbf{W}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ son exponenciales $e^{\lambda t}$ tal vez multiplicadas (si $\mathbf{J}$ no diagonal) por polinomios en t; si $\mathrm{Re}\lambda<0$ cada elemento, y por tanto $\|\mathbf{W}(t)\|$, tiende a 0 si $t\to\infty$; si hay λ con $\mathrm{Re}\lambda=0$ y la parte de la $\mathbf{J}$ que los incluye es diagonal hay términos que son constantes, senos o cosenos y permanecen acotados sin tender hacia 0; si hay algún λ con $\mathrm{Re}\lambda>0$ o si los términos que vienen de un λ con $\mathrm{Re}\lambda=0$ están multiplicados por polinomios, habrá algún término de la exponencial no acotado y la norma de $\mathbf{W}(t)$ tampoco lo estará].

Así pues, **conocer** $\text{Re}\lambda$ **basta casi siempre para precisar la estabilidad de un sistema de coeficientes constantes** (y de una ecuación, que era estable si lo era su sistema equivalente y ambos tienen el mismo polinomio característico). Sólo si hay λ múltiples con $\text{Re}\lambda=0$ habrá que hallar los $\mathbf{v}$ asociados para distinguir entre estabilidad no asintótica e inestabilidad. Y esto ni siquiera será necesario en las ecuaciones, pues siempre aparecen potencias de t con los λ múltiples.

Ej 3. $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}0&2\\1&2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}}$ $\lambda^2-2\lambda-2=0$ $\lambda=1\pm\sqrt{3}\Rightarrow$ sistema inestable [la $\mathbf{f}(t)$ no influye].

Ej 4. $\boxed{x'''+3x''+3x'+x=e^t}$ $\to\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$, $\lambda=-1$ triple $\Rightarrow$ ecuación AE.

[Todas las soluciones se van a infinito, por la $x_p=Ae^t$, pero esto no tiene que ver con la EA; lo importante es que todas se parezcan entre sí; insistimos en que $f(t)$ no influye].

Ej 5. Hallemos la solución de $\boxed{\begin{array}{l}x'=x+y\\y'=-5x-y+z\\z'=-z\end{array}}$ con $\boxed{\begin{array}{l}x(0)=1\\y(0)=-2\\z(0)=5\end{array}}$ y precisemos su estabilidad.

z desacoplada: $z=Ce^{-t}\underset{z(0)=5}{=}5e^{-t}$, $y=x'-x\to x''+4x=5e^{-t}\underset{x_p=Ae^{-t}}{\to}x=c_1\cos 2t+c_2\,\text{sen}\,2t+e^{-t}$;

imponiendo $x(0)=1$, $x'(0)=x(0)+y(0)=-1\to$ $x=e^{-t}\to$ $y=-e^{-t}-e^{-t}=-2e^{-t}$.

La estabilidad de esta solución (y la de todo el sistema) viene dada por $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$ $\to$ $\lambda=-1,\pm 2i$. Como $\text{Re}\lambda\leq 0$ y los $\lambda=\pm 2i$ son simples, esta solución (y todas) es EnoA.

[Que la $\mathbf{x}\to\mathbf{0}$ no importa nada; EA no significa que tienda a $\mathbf{0}$ una solución dada, sino que lo haga la diferencia entre dos cualesquiera que partan cerca (todas en las lineales)].

Ej 6. $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1&6&7\\1&-6&-5\\-1&2&1\end{pmatrix}\mathbf{x}}$ $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0\to\lambda=-4$, $\lambda=0$ doble. Hay que ver si $\mathbf{J}$ es o no diagonal. Como el rango de $\mathbf{A}-0\mathbf{I}$ es 2, sólo existe un $\mathbf{v}$ independiente asociado a $\lambda=0$ y el sistema es inestable.

Ej 7. $\boxed{x'''+4x''=e^t}$ $\to$ $\lambda=-4$, $\lambda=0$ doble como en el ejemplo anterior. Pero podemos ahora decir directamente que la ecuación es **I** pues aparece seguro una t en la solución (y en cualquier $\mathbf{W}(t)$). Para ecuaciones siempre es fácil analizar el caso $\text{Re}\lambda=0$.

El problema es que para $n>2$, y a diferencia de los ejemplos anteriores, **normalmente los λ no son calculables** (sin métodos numéricos). Pero este hecho no nos va a impedir estudiar la estabilidad. El siguiente teorema nos permitirá precisar, sin necesidad de hallar los autovalores, cuándo hay estabilidad asintótica y muchas situaciones de inestabilidad:

Teor 3.

Sea $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

i] Si algún $a_i\leq 0$ (<0) $\Rightarrow$ existen raíces de $P(\lambda)$ con $\text{Re}\lambda\geq 0$ (>0).

ii] (Criterio de Routh-Hurwitz). Consideremos la matriz $n\times n$:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_1&1&0&0&0&\cdot\cdot&0\\a_3&a_2&a_1&1&0&\cdot\cdot&0\\a_5&a_4&a_3&a_2&a_1&\cdot\cdot&0\\\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot&\cdot\cdot\\0&0&0&0&0&\cdot\cdot&a_n\end{pmatrix}$$

Entonces todos los ceros de $P(\lambda)$ tienen $\text{Re}\lambda<0\Leftrightarrow$ son estrictamente positivos los n determinantes: a_1, $\begin{vmatrix}a_1&1\\a_3&a_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_1&1&0\\a_3&a_2&a_1\\a_5&a_4&a_3\end{vmatrix}$, ..., $|\mathbf{B}|$.

Y si alguno de esos n determinantes es $<0\Rightarrow\exists\lambda$ con $\text{Re}\lambda>0$.

i] es fácil: si todos los λ, reales o complejos, tienen $\text{Re}\lambda<0$ el polinomio tiene la forma: $P(\lambda)=(\lambda+a)^r\cdots(\lambda^2+b\lambda+c)^s\cdots$, con $a,\dots,b,c,\dots>0\Rightarrow a_i>0$ (y análogamente $\text{Re}\lambda\leq 0\Rightarrow a_i\geq 0$).

ii] es de muy complicada demostración y lo admitimos sin ella.

[Observemos que el coeficiente de λ^n debe ser 1; que la parte de $\text{Re}\lambda<0$ de **ii]** es un $\Leftrightarrow$ pero no el resto; que en $\mathbf{B}$ la diagonal está formada por los coeficientes $a_1,\dots,a_n$; que $|\mathbf{B}|$ es simplemente el anterior por a_n].

Ej 8. La ecuación $\boxed{x^{vi}+5x^{v}+6x^{iv}+7x'''+x''-2x'+3x=4}$ es inestable porque un $a_k<0$.

Ej 9. El sistema $\boxed{\begin{array}{l} x'=x-z \\ y'=3x-y \\ z'=x+y-z \end{array}}$ $\to \lambda^3+\lambda^2+3=0$ (sin raíces enteras) no es AE porque es 0 el coeficiente de λ. Será estable no asintóticamente o inestable. Veamos si hay λ con $\text{Re}\lambda=0$: $\lambda=qi$.

Debe ser $(3-q^2)-iq^3=0$. Esto no es posible para ningún q y sabemos que hay λ con $\text{Re}\lambda\geq 0 \Rightarrow$ hay λ con $\text{Re}\lambda>0 \Rightarrow$ es inestable.

[O de otra forma (Routh-Hurwitz): $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to 1>0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}<0$, $|\mathbf{B}|<0 \Rightarrow$ inestable].

Ej 10. $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t}$ $P(\lambda)=\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^2+8\lambda+4=0$ puede ser AE ($a_k>0$).

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Como todos los menores: $4>0$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}=24>0$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}=128>0$, $|\mathbf{B}|>0$

la ecuación es AE. De hecho sus autovalores son sencillos (aunque sea difícil encontrarlos):

$P(\lambda)=(\lambda^2+2\lambda+2)^2 \to \lambda=-1\pm i$ dobles $\to$ $x_h=(c_1+c_2t)e^{-t}\cos t+(c_3+c_4t)e^{-t}\operatorname{sen} t$.

(Y como $x_p=At+B \to x_p=t-2$, la solución general de la no homogénea es: $x=x_h+t-2$).

Ej 11. $\boxed{x^{iv}+2x'''+5x''+4x'+6x=7}$ puede ser AE ($a_k>0$).

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to 2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=6$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}=0$, $|\mathbf{B}|=0 \to$ no es AE.

Probamos $\lambda=qi \to q^4-5q^2+6+2(2-q^2)qi=0 \to q^2=2 \to P(\lambda)=(\lambda^2+2)(\lambda^2+2\lambda+3)$.
Como dos autovalores tienen $\text{Re}\lambda<0$ y los otros dos $\text{Re}\lambda=0$ y son simples, es **EnoA**.

Ej 12. $\boxed{x^{v}+6x^{iv}+7x'''+x''=e^{-t}}$. No es AE y no sabemos hallar todos sus λ.
Pero hay $\lambda=0$ doble $\to$ la solución de la homogénea es de la forma

$$c_1+c_2t+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5 \to \text{la ecuación es inestable}$$

pues no está acotada la $\mathbf{W}(t)$ formada por esas 5 soluciones y sus derivadas.

Ej 13. Discutamos la estabilidad de $\boxed{x'''+2x''+4x'+cx=t}$ $\to P(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+c=0$.
Si $c<0$ es inestable, porque es un $a_k<0$. Si $c=0$ no es AE por el $a_k\leq 0$.
Sólo podría ser AE si $c>0$. Veamos que nos dice Routh-Hurwitz:

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ c & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \to 2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ c & 4 \end{vmatrix}=8-c$, $|\mathbf{B}|=c(8-c) \to$ es **AE** $\Leftrightarrow 0<c<8$ y es **I** también si $c>8$.

Por ahora no sabemos si $c=0$ y si $c=8$ (¿estabilidad no asintótica? ¿inestabilidad?).

Probamos $\lambda=qi \to iq(4-q^2)+(c-2q^2)=0 \to$ o bien $q=0$ (y $c=0$) o bien $q=\pm 2$ (y $c=8$).

Para $c=0$ además de $\lambda=0$ es $\lambda=-1\pm i\sqrt{3}$; para $c=8$, $P(\lambda)=(\lambda^2+4)(\lambda+2) \to$ si $c=0,8$ la ecuación es **EnoA**.

[En el ejemplo 3 de 2.4 hallamos una solución particular de la no homogénea $\forall c$ (que una vez más decimos que no influye en la estabilidad) y la solución general para tres valores de c (0, 3 y 8). Por ejemplo, la de $c=3$ era:

$$x=c_1e^{-t}+\Big(c_2\cos\tfrac{\sqrt{11}}{2}t+c_3\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{11}}{2}t\Big)e^{-t/2}+\tfrac{t}{3}+\tfrac{4}{9},$$

donde, mirando la homogénea, se comprueba la EA que nos aseguraba R-H. Se ve además que para grandes valores de t, todas las soluciones se parecerán a una recta, pues los términos de la homogénea tienden a 0. Y esto mismo podemos decirlo para todos los c entre 0 y 8 (¡aunque no podamos calcular la solución!)].

2.5 Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función continua a trozos en $[0,\infty)$. Se llama **transformada de Laplace** de f a la función $Lf=F$ definida por

$$\boxed{F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt} \quad \text{para todo } s \text{ tal que la integral converge.}$$

Citamos sin demostraciones (la mayoría son simples ejercicios de integración), algunas de sus propiedades.

El operador $L: f \to F$ es claramente lineal. Dada una $F(s)$ puede que no exista una $f(t)$ tal que $L[f]=F$, pero si existe se prueba que hay una única f que es continua. Podemos, pues, definir el operador $L^{-1}: F\to f$. A $L^{-1}[F]=f$ le llamaremos **transformada inversa** de Laplace de F. Está claro que también L^{-1} es lineal.

Lo básico para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas lineales es el hecho de que la L transforma las derivadas de una $x(t)$ en una expresión en la que no aparecen las derivadas de $X(s)$:

Teor 1. $\boxed{L\big[x^{(n)}(t)\big]=s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-x^{(n-1)}(0)\,.}$

[En particular: $L[x'(t)]=sX(s)-x(0)$].

Necesitaremos también conocer la transformadas de las siguientes funciones:

Teor 2. $\boxed{L\big[t^n\big]=\frac{n!}{s^{n+1}}\ ;\ \ L\big[e^{at}\big]=\frac{1}{s-a}\ ;\ \ L\big[\operatorname{sen}at\big]=\frac{a}{s^2+a^2}\ ;\ \ L\big[\cos at\big]=\frac{s}{s^2+a^2}\ .}$

[En concreto, $L[1]=\frac{1}{s}$, $L[t]=\frac{1}{s^2}$, $L[t^2]=\frac{2}{s^3}$, ...].

Y las siguientes reglas para calcular otras transformadas a partir de ellas:

Teor 3. $\boxed{L\big[e^{at}f(t)\big]=F(s-a)\ ;\ \ L\big[t^nf(t)\big]=(-1)^nF^{(n)}(s)\ .}$

Con este teorema podemos calcular, por ejemplo:

$$L[e^{-3t}\cos 2t]=\frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad \text{ó} \quad L[t\operatorname{sen}2t]=-\frac{d}{ds}L[\operatorname{sen}2t]=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

La primera de las expresiones podría escribirse: $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]$.

Esto nos permite hallar otras transformadas inversas que aparecerán, como:

$$L^{-1}\Big[\frac{1}{(s-a)^k}\Big]=e^{at}L^{-1}\Big[\frac{1}{s^k}\Big]=e^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\ .$$

La transformada de un producto de dos funciones no es el producto de sus transformadas. Pero se tiene:

Teor 4. Se llama **convolución** de f y g a la función $f*g(t)=\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$. Se tiene que $f*g=g*f$ y que $L[f*g]=L[f]L[g]$.

Con sólo estos resultados se pueden resolver muchos sistemas y ecuaciones lineales con **coeficientes constantes** (aquellos en que la $f(t)$ sea producto de polinomios, exponenciales, senos y cosenos; es decir, los mismos en que se puede aplicar coeficientes indeterminados). La L es sobre todo útil cuando hay **datos iniciales**. Aplicando L convertiremos el problema diferencial en otro algebraico (con los datos ya incorporados como se ve en el teorema 1). Resuelto éste, bastará calcular alguna transformada inversa. Es muy habitual que para encontrar esta L^{-1} haya que **descomponer en fracciones simples** (la técnica que se usa en cálculo para hallar primitivas de funciones racionales). Sólo en contadas ocasiones habrá que utilizar el teorema 4 (el de la convolución).

Ej 1. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=2y-2e^{2t} & x(0)=0 \\ y'=4y-2x-2 & y(0)=1 \end{array}}$ Aplicando L a las 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} sX-0 = 2L[y]-2L[e^{2t}] = 2Y-\frac{2}{s-2} \\ sY-1 = 4L[y]-2L[x]-2L[1] = 4Y-2X-\frac{2}{s} \end{cases}$$

Despejando, por ejemplo, Y de la 1^a: $Y=\frac{2}{s}X+\frac{1}{s-2}$, que llevado a la 2^a nos da: $X=\frac{8}{(s-2)^3 s}$.

Para encontrar la L^{-1} descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{8}{(s-2)^3 s} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3} = \begin{array}{c}\text{[resolviendo}\\ \text{el sistema]}\end{array} = \frac{-1}{s}+\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{(s-2)^2}+\frac{4}{(s-2)^3} .$$

L^{-1} es lineal y conocemos la L^{-1} de cada sumando. Por tanto $x=-1+e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t}$.

[Podríamos haber hallado x mediante una convolución pues X es el producto de dos transformadas conocidas:

$$L^{-1}[X] = 4L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{2}{(s-2)^3}\right] = 4\left[1*t^2e^{2t}\right] = 4\int_0^t u^2e^{2u}du = \cdots$$

pero usalmente este segundo camino no es viable y si lo es suele ser mejor pasar a fracciones simples; sólo nos veremos obligados a usar la convolución cuando haya polinomios en el denominador del tipo $(s^2+as+b)^2$].

Para calcular la y lo más corto es volver al sistema y sustituir: $y = e^{2t}+\frac{x'}{2} = e^{2t}+2t^2e^{2t}$.

También podríamos (aquí sale fácil, pero usualmente es más largo) hallar la Y y su L^{-1}:

$Y = \frac{4}{(s-2)^3}+\frac{1}{s-2}$ cuya L^{-1} es esa y (normalmente habría que volver a descomponer).

[El único camino que podría competir en rapidez sería convertir el sistema en ecuación:

$y = e^{2t}+\frac{x'}{2} \to x''-4x'+4x=4e^{2t}-4$, $x_p=At^2e^{2t}+B$, $\begin{array}{l} x=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+2t^2e^{2t}-1 \\ x(0)=x'(0)=0 \end{array}$ $\cdots$].

Ej 2. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=x-y+2 & x(0)=0 \\ y'=x+y & y(0)=1 \end{array}}$ (ej. 2 y 5 de 2.2) $\to \begin{cases} sX = X-Y+\frac{2}{s} \\ sY-1 = X+Y \end{cases} \to X=(s-1)Y-1 \to$

$(s^2-2s+2)Y=s-1+\frac{2}{s}$ [el polinomio que acompaña a la Y es precisamente el característico].

Pasamos a fracciones simples: $\frac{s^2-s+2}{s[s^2-2s+2]} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+2} = \frac{[A+B]s^2+[C-2A]s+2A}{s[s^2-2s+2]} = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2-2s+2}$.

El segundo denominador no tiene raíces reales. Para hallar la inversa completaremos el cuadrado y utilizaremos el teorema 3:

$$y = 1+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right] = 1+e^tL^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = 1+e^t\operatorname{sen}t \;\to\; x=y'-y=e^t\cos t-1 .$$

O bien: $X = \frac{(s-1)(s^2-s+2}{s^3-2s^2+2s}-1 = \frac{-s^2+2s-2}{s[s^2-2s+2]} = \cdots = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s}$, llegando a lo mismo.

Ej 3. $\boxed{x'''+x'=2\operatorname{sen}t ,\;\; x(0)=x'(0)=0 ,\, x''(0)=-1}$ $\to [s^3+s]X+1=\frac{2}{s^2+1}$, $X=\frac{1-s^2}{s(s^2+1)^2}$.

$$\frac{1-s^2}{s(s^2+1)^2} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{Ds+E}{(s^2+1)^2} = \frac{A(s^2+1)^2+(Bs+C)(s^2+1)s+(Ds+E)s}{s(s^2+1)^2} \to \begin{cases} A+B=0,\; C=0, \\ 2A+B+D=-1, \\ C+E=0,\; A=1. \end{cases}$$

$$\to A=1,\, B=-1,\, D=-2,\, C=E=0 \;\to\; x = 1-\cos t-L^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right] .$$

La última transformada no aparece en los teoremas (con mucha vista: dentro del corchete está la derivada cambiada de signo de $L[\operatorname{sen}t]$). Es situación típica de convolución:

$$L^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]*L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = 2\operatorname{sen}t*\cos t = 2\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\cos u\,du$$

$$= \operatorname{sen}t\int_0^t 2\cos^2u\,du-\cos t\int_0^t 2\operatorname{sen}u\cos u\,du = t\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}t\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t-\cos t\operatorname{sen}^2 t = t\operatorname{sen}t .$$

Alternativamente se podría seguir el camino de la sección 2.3:

$\lambda^3+\lambda=0 \to x=c_1+c_2\cos t+c_3\operatorname{sen}t+x_p$, $x_p=t[Ac+Bs] \to$

$x_p'=Ac+Bs+t[-As+Bc]$, $x_p''=-2As+2Bc-t[Ac+Bs]$, $x_p'''=-3Ac-3Bs+t[As-Bc]$

$x_p'''+x_p' = -2A\cos t-2B\operatorname{sen}t = 2\operatorname{sen}t \to A=0 ,\, B=-1 \to x_p=-t\operatorname{sen}t$.

Imponiendo los datos y resolviendo el sistema 3x3 se vuelve a obtener $x=1-\cos t-t\operatorname{sen}t$.

Con la L hemos hallado la solución directamente, ahorrándonos el cálculo de la general, de una x_p y la determinación de las constantes a partir de los datos; a cambio, hemos tenido que sufrir la pesada descomposición en fracciones simples y, en este caso, el cálculo de una integral de convolución. En ambos procesos de cálculo hemos necesitado hallar las raíces de $s^3+s=0$ (del polinomio característico que, como es fácil comprobar, acompaña siempre a la X al trabajar con Laplace). Por tanto, si no podemos hallar los autovalores de la ecuación (o sistema), tampoco podremos resolver nada mediante la L.

Ej 4. $\boxed{x''-2x'+x=6te^t \text{ con } x(1)=x'(1)=0}$ (ejemplo 3 de 2.2).

Como Laplace pide datos en $t=0$ hacemos: $t=u+1 \to$

$$x''-2x'+x=6(u+1)e^{u+1}\,,\ x(0)=x'(0)=0$$
$$\to (s-1)^2X=6e\big(L[ue^u]+L[e^u]\big)=6e\big[\tfrac{1}{(s-1)^2}+\tfrac{1}{s-1}\big]$$
$$\to x=6\,e\,L^{-1}\big[\tfrac{1}{(s-1)^4}\big]+6\,e\,L^{-1}\big[\tfrac{1}{(s-1)^3}\big]=e\,e^uL^{-1}\big[\tfrac{6}{s^4}\big]+3\,e\,e^uL^{-1}\big[\tfrac{2}{s^3}\big]$$
$$=e^{u+1}[u^3+3u^2]=e^t[t^3-3t+2]\ .$$

Ej 5. Otra utilidad de la convolución. Hallemos la solución general de $\boxed{x'''+x'=f(t)}$.

La solución general es de la forma (ejemplo 3): $x=c_1+c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}\,t+x_p$.

Hallamos una x_p . Como sólo queremos una, escogemos los datos más sencillos para L :

$$x(0)=x'(0)=x''(0)=0 \to s^3X+sX=L[f(t)]=F(s) \to X=\tfrac{F(s)}{s(s^2+1)}=\big[\tfrac{1}{s}-\tfrac{s}{s^2+1}\big]F(s)$$
$$\to x_p=[1-\cos t]*f(t)=\int_0^t[1-\cos(t-u)]f(u)\,du\ .$$

Con matrices es mucho más largo. Sólo tenemos la fórmula de variación de constantes para ecuaciones si $n=2$, así que tendremos que resolver el sistema equivalente a partir la teoría general de sistemas, utilizando una $\mathbf{W}(t)$:

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}1&c&s\\0&-s&c\\0&-c&-s\end{pmatrix}\to \mathbf{W^{-1}}(t)=\begin{pmatrix}\bullet&\bullet&1\\\bullet&\bullet&-c\\\bullet&\bullet&-s\end{pmatrix}\to x_p=\text{ primer elemento de } \mathbf{W}(t)\int\mathbf{W^{-1}}(t)\begin{pmatrix}0\\0\\f(t)\end{pmatrix}dt$$

$\to\ x_p=\int f(t)\,dt-\cos t\int\cos t\,f(t)\,dt-\mathrm{sen}\,t\int\mathrm{sen}\,t\,f(t)\,dt$, que coincide con lo de arriba.

Ej 6. $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t \text{ con } x(0)=-1,\ x'(0)=0,\ x''(0)=0,\ x'''(0)=2}$

En el ej. 10 de 2.4 dimos su solución general: $x=(c_1+c_2t)e^{-t}\cos t+(c_1+c_2t)e^{-t}\mathrm{sen}\,t+t-2$.

Imponiendo los datos y resolviendo el sistema 4x4 (largo camino): $x=e^{-t}\cos t+t-2$.

Usemos ahora la L:

$$s^4X+s^3-2+4s^3X+4s^2+8s^2X+8s+8sX+8+4X=\tfrac{4}{s^2}\to X=\tfrac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^4+4s^3+8s^2+8s+4]}\ .$$

Para descomponer en fracciones simples necesitamos factorizar el denominador. En 2.4 observamos que el corchete es el cuadrado de un polinomio de segundo grado (si se sabe como hallar raíces múltiples de polinomios este era el momento de utilizarlo):

$$\tfrac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^2+2s+2]^2}=\tfrac{A}{s}+\tfrac{B}{s^2}+\tfrac{Cs+D}{s^2+2s+2}+\tfrac{Es+F}{[s^2+2s+2]^2}=[\text{largo sistema}]=\tfrac{2}{s}+\tfrac{1}{s^2}+\tfrac{s+1}{s^2+2s+2}\ .$$

$$L^{-1}\big[\tfrac{s+1}{s^2+2s+2}\big]=L^{-1}\big[\tfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\big]=e^{-t}L^{-1}\big[\tfrac{s}{s^2+1}\big]=e^{-t}\cos t\to x=L^{-1}[X]=-2+t+e^t\cos t\,.$$

Los siguientes ejemplos son los 6 y 7 de 2.3, así que podemos seguir comparando la rapidez de los métodos (matrices, convertir en ecuación y el actual Laplace). En el segundo de ellos (con $\mathbf{J}$ no diagonal) la L evita preocupaciones matriciales.

Ej 7. $\boxed{\begin{array}{ll}x'=2y-3z & x(0)=3\\ y'=2x+3y-6z & y(0)=1\\ z'=2e^t-z & z(0)=1\end{array}}$
$$\begin{cases} sX-3=2Y-3Z\to\ Y=\tfrac12(sX+3Z-3)\downarrow\\ sY-1=2X+3Y-6Z \qquad (s^2-3s-4)X=\tfrac{3s^2-13s+4}{s-1}\\ sZ-1=\tfrac{2}{s-1}-Z\to \qquad Z=\tfrac{1}{s-1}\uparrow,\ z=e^t\end{cases}$$

$$X=\tfrac{(s-4)(3s-1)}{(s+1)(s-4)(s-1)}=\tfrac{3s-1}{(s+1)(s-1)}=\tfrac{2}{s+1}+\tfrac{1}{s-1}\to x=2e^{-t}+e^t\to y=\tfrac{x'+3z}{2}=2e^t-e^{-t}\ .$$

Ej 8. $\boxed{\begin{array}{ll}x'=x-2y+2z & x(0)=1\\ y'=x-y & y(0)=1\\ z'=y-2z & z(0)=1\end{array}}$
$$\begin{cases} sX-1=X-2Y+2Z\\ sY-1=X-Y \qquad X=(s+1)(s+2)Z-s-2\\ sZ-1=Y-2Z\to Y=(s+2)Z-1\nearrow\end{cases}$$

$$\to Z=\tfrac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}=\tfrac{A}{s}+\tfrac{B}{s+1}+\tfrac{C}{(s+1)^2}\to A=1,\ B=0,\ C=-1\to z=1-te^{-t}$$
$$\to y=z'+2z=2-e^{-t}-te^{-t}\to x=y'+y=2-e^{-t}\,.$$

Ej 9. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=2x+y+z & x(0)=1 \\ y'=x+2y+z & y(0)=2 \\ z'=x+y+2z & z(0)=-3 \end{array}}$ $\left\{\begin{array}{ll} sX-1=2X+Y+Z \to & Z=(s-2)X-Y-1 \downarrow \\ sY-2=X+2Y+Z & \qquad Y=X+\frac{1}{s-1}\downarrow \\ sZ+3=X+Y+2Z & [s^2-5s+4]X=s-4\to \end{array}\right.$

$X=\frac{1}{s-1}\ [x=e^t] \to Y=\frac{2}{s-1}\ [y=2e^t] \to Z=\frac{s-2-2-s+1}{s-1}=\frac{-3}{s-1}\ [z=-3e^t]$ (ó $z=x'-2x-y$).

[La sencillez de los cálculos se debe a que los datos iniciales están ajustados para que se simplifiquen cosas; con otros distintos habría que descomponer en fracciones simples].

Por matrices:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \to \underset{\text{doble:}}{\lambda=1} \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.\ \lambda=4:\ \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\ \mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix},\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{4t}\end{pmatrix}\to \mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}-2e^t\\3e^t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t\\2e^t\\-3e^t\end{pmatrix}.$$

Quizás es más rápido escribir la solución general, imponer los datos y resolver un sistema:

$$\mathbf{x}=c_1e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\to\left\{\begin{array}{l}c_1+c_2+c_3=1\\-c_1+c_3=2\\-c_2+c_3=-3\end{array}\right.\to c_1=-2,c_2=3,c_3=0\to\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^t\\2e^t\\-3e^t\end{pmatrix}.$$

Y ahora, derivando. Lo más corto, con un poco de vista:

$[x+y+z]'=4[x+y+z]$, $[x+y+z](0)=1+2-3=0 \to x+y+z=0,\ z=-x-y\to$

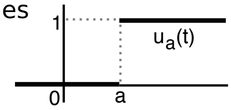
$\left\{\begin{array}{l} x'=x,\ x(0)=1\to x=e^t \\ y'=y,\ y(0)=2\to y=2e^t \end{array}\right. \to z=-3e^t$. O con menos vista:

$x''=2x'+y'+z'=2x'+2x+3[y+z]=5x'+4x \to x=c_1e^t+c_2e^{4t} \xrightarrow{x(0)=1x'(0)=1} x=e^t$

$\to z=-y-e^t \to y'=e^t+2y-y-e^t=y \to y=ce^t \xrightarrow{y(0)=2} y=2e^t \to z=-3e^t.$

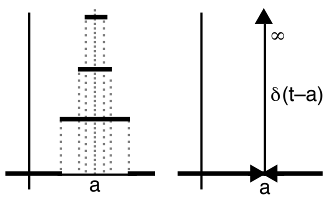
[Para soluciones generales (de homogéneos con λ reales) conviene usar matrices o derivar. Con la L se hace $x(0)=a$, $y(0)=b$, $z(0)=c$ y quedan las 3 constantes arbitrarias (trabajando de más: no sólo hallamos la general, sino la particular que cumple unos datos iniciales dados)].

La L simplifica los cálculos si aparecen $f(t)$ que tienen varias expresiones o son discontinuas, como la **función paso**: $\boxed{u_a(t)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } t<a\\1 \text{ si } t\geq a\end{array}\right.}$



o la 'función' **delta** $\delta(t-a)$, cuya definición rigurosa exige la 'teoría de distribuciones', pero que es fácil de manejar formalmente. La $\delta(t-a)$ se puede definir intuitivamente como el

'límite' cuando $n\to\infty$ de $f_n(t)=\left\{\begin{array}{l}n \text{ si } t\in[a-\frac{1}{2n},a+\frac{1}{2n}]\\0 \text{ en el resto}\end{array}\right.$



Para utilizar la $\delta(t-a)$ necesitaremos sólo estas propiedades:

$$\boxed{\delta(t-a)=0 \text{ si } t\neq a;\quad \frac{d}{dt}u_a(t)=\delta(t-a);\quad \int_b^c f(t)\,\delta(t-a)\,dt=\left\{\begin{array}{l}f(a) \text{ si } a\in[b,c]\\0 \text{ si } a\notin[b,c]\end{array}\right.}$$

[En particular, se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\,dt=1$;
el rectángulo 'de base 0 y altura ∞' definido por la δ tiene 'área=1',
lo mismo que las f_n de las que es 'límite'].

Para resolver por Laplace ecuaciones en las que aparecen funciones definidas a trozos o la δ (como los dos últimos ejemplos que veremos en la sección) sólo es necesario hacer uso de este nuevo teorema:

Teor 5. $\boxed{\text{Si } a>0:\ L[u_a(t)]=\frac{1}{s}e^{-as}\ ,\ L[\delta(t-a)]=e^{-as}\ ,\ L[u_a(t)f(t-a)]=e^{-as}F(s)}$

[es decir: $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)f(t-a)$].

[Como veremos, estos últimos ejemplos se pueden resolver sin la L, pero hay que ser bastante sutil en los argumentos para 'empalmar' soluciones de distintos intervalos].

Ej 9. $\boxed{x''' + x'' = f(t) = \begin{cases} 6t \text{ si } 0 \le t < 1 \\ 0 \text{ si } 1 \le t \end{cases} \quad \text{con } x(0)=-1\,,\ x'(0)=3\,,\ x''(0)=-6}$

Lo primero es escribir $f(t)$ en términos de funciones conocidas y de funciones paso.

$f(t) = 6\big[t - tu_1(t)\big]$ (pues vale $6t$ hasta $t=1$ y después se anula).

Para calcular la $L[f(t)] = 6L[t] - 6L[tu_1(t)]$ podemos aplicar el teorema 3 o el 5:

$$L[tu_1] = -\tfrac{d}{ds}L[u_1] = -\tfrac{d}{ds}\big[\tfrac{e^{-s}}{s}\big] = e^{-s}\big[\tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s^2}\big] \quad \text{ó}$$

$$L[(t-1)u_1 + u_1] = e^{-s}L[t] + L[u_1] = e^{-s}\big[\tfrac{1}{s} + \tfrac{1}{s^2}\big]$$

y por tanto: $s^3X + s^2 3s + 6 + s^2X + s - 3 = \frac{6}{s^2} - 6e^{-s}\big[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\big] \to X = \frac{-s^4 + 2s^3 - 3s^2 + 6}{(s+1)s^4} - e^{-s}\frac{6}{s^4}$.

La descomposición del primer sumando es: $-\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^4}$.

Para invertir el otro, usamos el teorema 5: $L^{-1}\big[\frac{6}{s^4}\big] = t^3 \to L^{-1}\big[e^{-s}\frac{6}{s^4}\big] = u_1(t)(t-1)^3$.

$$\to x = -1 + 3t - 3t^2 + t^3 - u_1(t)(t-1)^3 = \begin{cases} (t-1)^3 \text{ si } t \le 1 \\ 0 \text{ si } 1 \le t \end{cases}$$

Resolvamos el problema de forma totalmente diferente. Hallamos la solución general x_1 para $t \le 1$ [$f(t) = 6t$] y x_2 para $t \ge 1$ [$f(t) = 0$] y utilizamos el hecho de que, como f es una función integrable, la solución va a tener dos (pero no tres) derivadas continuas en $t=1$ (resolver una ecuación diferencial de tercer orden viene a equivaler a integrar tres veces; no será pues, estrictamente hablando, solución en $t=1$):

Para $t \le 1$, $x_p = At^2 + Bt^3 \to x_1 = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + t^3 - 3t^2 \xrightarrow{\text{datos en t=0}} x_1 = (t-1)^3$.

A partir de $t=1$ es $x_2 = c_4 + c_5 t + c_6 e^{-t}$. No tiene sentido aplicarle los datos de $t=0$. Pero al ser la solución una función de clase 2 los valores de x, x' y x'' a la derecha de $t=1$ han de coincidir con los que proporciona x_1 a la izquierda. Imponemos pues a x_2 que $x_2(1) = x_1(1) = 0$, $x_2'(1) = x_1'(1) = 0$, $x_2''(1) = x_1''(1) = 0 \ \to\ x_2 \equiv 0$, si $t \ge 1$.

Ej 10. $\boxed{\begin{matrix} x' = -x + e^{-1}\delta(t-1) & x(0)=0 \\ y' = x - y & y(0)=1 \end{matrix}} \to \begin{matrix} sX = -X + e^{-1}e^{-s} \\ sY - 1 = X - Y \end{matrix} \to X = \frac{e^{-1}e^{-s}}{s+1}\,,\ Y = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-1}e^{-s}}{(s+1)^2}$

$L^{-1}\big[\frac{1}{s+1}\big] = e^{-t}$, $L^{-1}\big[\frac{1}{(s+1)^2}\big] = te^{-t} \to L^{-1}\big[\frac{e^{-s}}{s+1}\big] = u_1(t)e^{-t+1}$, $L^{-1}\big[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\big] = u_1(t)(t-1)e^{-t+1}$

$$\to\ x = u_1(t)e^{-t} = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1 \\ e^{-t} \text{ si } t \ge 1 \end{cases} \ ,\ \ y = e^{-t} + u_1(t)(t-1)e^{-t} = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ te^{-t} \text{ si } t \ge 1 \end{cases} \ ,$$

(la x debía ser discontinua en $t=1$ para que al derivarla salga la δ; en rigor no es solución en ese punto).

Resolvamos por otros caminos. Como la matriz del sistema ya está en forma de Jordan es fácil utilizar la fórmula de variación de las constantes (que funciona, aunque nosotros la vimos para $f(t)$ continuas):

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{s-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1}\delta(s-1) \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + e^{-1}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{s-t} \\ (t-s)e^{s-t} \end{pmatrix} \delta(s-1)\, ds\ .$$

Esta integral es $\mathbf{0}$ si $t<1$ y vale $\begin{pmatrix} e^{1-t} \\ (t-1)e^{1-t} \end{pmatrix}$ si $t \ge 1 \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ si $t<1$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$ si $t \ge 1$.

O bien. Resolvemos la ecuación en x: es $x = c_1 e^{-t}$ si $t<1$ y si $t>1$ y la x debe dar en $t=1$ un salto de altura e^{-1} para que al derivarla aparezca $e^{-1}\delta(t-1)$:

$$x(0)=0 \to x \equiv 0 \text{ si } t<1 \to x(1^-)=0 \to x(1^+) = e^{-1} \to x = e^{-t} \text{ si } t>1\,.$$

Llevando esta x a la otra ecuación: $y' = -y + u_1(t)e^{-t}$, que podemos resolver por ejemplo:

Si $t<1$: $y = c_1 e^{-t}$, $y(0)=1 \to y = e^{-t}$.

Si $t \ge 1$: $y_p = Ate^{-t} \to y = c_2 e^{-t} + te^{-t} \to y = te^{-t}$, pues $y(1^+) = y(1^-) = e^{-1}$.

O también:

$$y = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^s e^{-s} u_1(s)\, ds \to y = e^{-t} + 0 \text{ si } t<1\,,\ y = e^{-t} + e^{-t}\int_1^t 1\, ds = te^{-t} \text{ si } t \ge 1\,.$$

2.6 Soluciones periódicas de ecuaciones lineales

Sean [S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ y [Sh] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$ con $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}$ continuas y de periodo T [es decir, $\mathbf{A}(t+T)=\mathbf{A}(t)$; $\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{f}(t)$] (sus soluciones son únicas y definidas $\forall t$).

Teor 1. $\boxed{\mathbf{x}(t)\text{, solución de [S], es de periodo } T \Leftrightarrow \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)}$

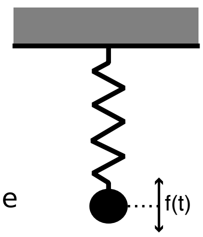
La $\Rightarrow$ es trivial. La $\Leftarrow$ no es cierta, evidentemente, para funciones cualesquiera, pero esa condición es suficiente para las soluciones del sistema [S]:
Sea $\mathbf{x}(t)$ solución con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)$. Entonces $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)$ es también solución $\big[$pues $\mathbf{z}'(t)=\mathbf{x}'(t+T)=\mathbf{A}(t+T)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t)+\mathbf{f}(t)\big]$ y satisface $\mathbf{z}(0)=\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Por unicidad, $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ para todo t.

Teor 2. El sistema [S] tiene una única solución T-periódica $\Leftrightarrow$ el sistema [Sh] tiene como única solución T-periódica la trivial $\mathbf{x}\equiv\mathbf{0}$.

Sea $\mathbf{x}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}(t)$ la solución general de [S]. $\mathbf{x}(t)$ es T-periódica (teorema 1) si y sólo es $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{x_p}(T)-\mathbf{x_p}(0)$. Este sistema algebraico tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{0}$ tiene sólo la solución $\mathbf{c}=\mathbf{0}$ y esto equivale a que el [Sh] tenga sólo $\mathbf{x}\equiv\mathbf{0}$ como solución T-periódica.

Si [Sh] tiene más soluciones periódicas la situación se complica. Para precisar lo que ocurre hay que conocer las soluciones del homogéneo, lo que, en general, no se puede. Sólo tratamos un caso particular de interés físico: las oscilaciones de un **sistema muelle-masa** con o sin rozamiento proporcional a la velocidad, sometido a fuerzas externas de periodo T. Es decir:

[c] $\boxed{x''+ax'+\omega^2x=f(t)}$, $a\geq 0$, $\omega\neq 0$, f continua y T-periódica.



El x representa entonces la separación de la masa de la posición de equilibrio. ¿En qué condiciones es el movimiento de periodo T?

En 2.2 vimos que la homogénea [ch] tiene soluciones periódicas no triviales si y sólo si hay autovalores de la forma $\lambda=\pm qi$. Esto sólo ocurre cuando $a=0$. Entonces la solución general de [ch] es:

$x=c_1\cos\omega t+c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t$, todas periódicas de periodo mínimo $\frac{2\pi}{\omega}$. (No tienen que ser de periodo T).

Sabemos que [c] tiene una **única** solución T-periódica si [ch] tiene como **única** solución T-periódica la trivial, es decir, si $a\neq 0$ o si $a=0$, pero $T\neq\frac{2n\pi}{\omega}$. Además:

Teor 3.

Si $a=0$ y $T=\frac{2\pi n}{\omega}$ para algún $n\in\mathbf{N}$
(si **todas** las soluciones de [ch] son T-periódicas) entonces:

a] Si $\int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt=\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,dt=0$, **toda** solucion de [c] es T-periódica.

b] Si alguna de las integrales no es 0, **ninguna** solución de [c] es T-periódica.

La fórmula de variación de las constantes nos da la solución general de [c] :

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t+\frac{1}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t\int_0^t f(s)\cos\omega s\,ds+\frac{1}{\omega}\cos\omega t\int_0^t f(s)\,\mathrm{sen}\,\omega s\,ds$$

Entonces $x(T)-x(0)=-\frac{1}{\omega}\int_0^T f(s)\,\mathrm{sen}\,\omega s\,ds$ y $x'(T)-x'(0)=\int_0^T f(s)\cos\omega s\,ds$.

El teorema 1 asegura que si las dos integrales son 0 cualquier x es T-periódica. Si alguna no es 0, no hay soluciones T-periódicas.

Si $a>0$, es decir, **si hay rozamiento**, los dos autovalores tienen $\mathrm{Re}\lambda<0$, con lo que la ecuación [c] tiene una única solución T-periódica. Como hay estabilidad asintótica todas las soluciones se acercarán a ella, con lo que, en la práctica, se verá al cabo del tiempo oscilar a la masa con el periodo de la fuerza externa (matemáticamente, el movimiento no sería periódico, pues, salvo que los datos iniciales proporcionen la única solución periódica, existen otros términos con exponenciales decrecientes).

Si $a=0$ (**no hay rozamiento**), la situación puede ser más complicada.

Suponemos por comodidad que $b=1$, es decir, que la ecuación es

$$\text{[d]}\ x''+x=f(t) \quad \to \quad x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+x_p$$

es su solución general. Impongamos fuerzas externas periódicas de diferentes tipos:

$f(t)=\operatorname{sen}^5(\pi t)$. Su periodo mínimo es 2. Como la homogénea no tiene soluciones de ese periodo (salvo, como siempre, $x\equiv 0$) hay una única solución 2-periódica de [d]. Sólo para aquellos datos iniciales que nos den $c_1=c_2=0$ obtendremos esa solución de periodo 2. Las demás soluciones serán sumas de funciones de diferentes periodos y no serán periódicas (ni siquiera asintóticamente).

$f(t)=\cos t$. De periodo mínimo 2π. Como las soluciones de la homogénea son todas de ese mismo periodo es necesario evaluar las integrales:

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\cos t\,dt=0 \quad , \quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\neq 0$$

con lo que [d] no tiene soluciones 2π-periódicas. Podemos, en este caso, hallar una x_p por coeficientes indeterminados: $x_p=t\operatorname{sen} t/2$, y comprobar que todas las soluciones oscilan con creciente amplitud (resonancia).

$f(t)=e^{\operatorname{sen} t}$. Periodo mínimo 2π. Ahora hay que ver si son 0 las integrales:

$$\int_0^{2\pi}e^{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} t\,dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi}e^{\operatorname{sen} t}\cos t\,dt$$

La segunda se calcula fácilmente: es 0. La otra no tiene primitiva elemental. Sin embargo analizando la gráfica del integrando (o numéricamente) es fácil ver que no se anula. No hay por tanto soluciones 2π-periódicas (ni de otro periodo porque la segunda integral es no nula en cualquier intervalo $[0,2k\pi]$). Y en este caso no podríamos hallar explícitamente la solución (si lo intentásemos por variación de constantes nos encontraríamos la integral de antes).

$f(t)=\operatorname{sen}^2 t$. Periodo mínimo π. Hay una única solución de [d] de periodo π porque la homogénea no tiene soluciones no triviales de ese periodo. Como

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3 t\,dt=0 \quad , \quad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt=0$$

todas son 2π-periódicas, aunque para afirmarlo no era preciso evaluar esas integrales: si x_p es de periodo π todas las $c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+x_p$ son de periodo 2π pues x_p lo es.

$f(t)=\operatorname{sen}(2t)$ si $t\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$ y 0 en el resto. Tiene periodo mínimo 2π.

$$\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{sen} t\,dt=\int_0^{\pi}\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} t\,dt=0 \ , \ \int_0^{2\pi}f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\pi}\operatorname{sen} 2t\cos t\,dt=0\,.$$

Por tanto la masa se mueve periódicamente para cualquier posición y velocidad iniciales a pesar de aplicarle una fuerza del mismo periodo que el libre del muelle.

3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior vimos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables

$$[e] \quad \boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=0}$$

Este capítulo trata una forma general de atacarla: **suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes**.

En la sección 3.1 recordaremos la definición de función **analítica** (función descrita por una serie de potencias convergente) y algunas manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas.

Cuando a **y** b **son analíticas en** t_o (punto **regular**, sección 3.2) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de [e] en forma de serie de potencias por el siguiente camino: llevando una serie a la ecuación conseguiremos expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1, que serán las dos constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de cualquier ecuación de segundo orden (algunas veces podremos dar la expresión general del c_k, pero otras nos deberemos limitar a ir calculando coeficiente a coeficiente). Un teorema, que aceptaremos sin demostración, nos asegurará que las series solución son convergentes al menos en el intervalo en que las series de a y b lo eran. Imponer datos iniciales en t_o será inmediato, pues tendremos que $x(t_o)=c_0$ y $x'(t_o)=c_1$.

Si a y b son 'casi' analíticas en t_o, es decir, si $(t-t_o)a(t)$ y $(t-t_o)^2b(t)$ lo son (t_o es **singular regular**), también se pueden utilizar series para resolver [e] de una forma sólo algo más complicada (es el **método de Frobenius** de la sección 3.3). Calcularemos primero una solución x_1 que (si $t_o=0$) será siempre de la forma $t^r\sum$ (siendo r una de las raíces del llamado **polinomio indicial**) y a continuación otra x_2, linealmente independiente de la anterior, que unas veces (según sea la diferencia entre las raíces del polinomio indicial) será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln t$. De nuevo un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayan apareciendo.

El cálculo de los coeficientes de las series es sencillo (aunque algo pesado). El problema básico de utilizar series para resolver ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones que se encuentran (y más cuando no podamos hallar su término general). Sin embargo ecuaciones del tipo [e] surgen a menudo en problemas reales y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso existen libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Hermite, Bessel, Laguerre, Tchebycheff, ...). Una pequeña muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de **Legendre, Hermite** y **Bessel** que se citan en la sección 3.4.

Las soluciones por serie en torno a cualquier punto (salvo que sean identificables con una función elemental) no dan ninguna información sobre el comportamiento de las soluciones cuando $t\to\infty$. En la sección 3.5, para estudiar para grandes valores de t las soluciones, introduciremos el llamado **punto del infinito** de una ecuación, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $t=1/s$ en la inicial.

3.1 Funciones analíticas

$f(t)$ es **analítica** en $t=t_o$ si viene dada por una **serie de potencias** cerca de t_o:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_o)^k = c_0+c_1(t-t_o)+c_2(t-t_o)^2+\cdots$$

A partir de ahora, $t=0$ (si no, con $t-t_o=s$ estaríamos en ese caso): $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:

Si $R=0$, la serie sólo converge en $t=0$. Si $R=\infty$, converge para todo t.

Si $0<R<\infty$, converge si $|t|<R$ y diverge si $|t|>R$ (en $t=\pm R$ no sabemos).

Además, si $0<t_o<R$, la serie converge uniformemente en $[-t_o,t_o]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones aplicando el criterio del **cociente**:

Sea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ y $p=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Entonces si $p<1$ la $\sum$ converge, y si $p>1$ diverge.

Propiedad básica de las series de potencias es que, para $|t|<R$ (si $R>0$), **se pueden derivar e integrar término a término**:

$$f'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_kt^{k-1}=c_1+2c_2t+\cdots, \qquad (\Rightarrow f^{(k)}(0)=k!c_k)$$
$$f''(t)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kt^{k-2}=2c_2+6c_3t+\cdots, \quad \ldots$$
$$\int\sum_{k=0}^{\infty} c_kt^k = C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}t^{k+1} = C+c_0t+\frac{c_1}{2}t^2+\cdots \text{ si } |t|<R$$

También pueden sumarse, multiplicarse,... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k \text{ si } |t|<R_f \text{ y } g(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_kt^k \text{ si } |t|<R_g \Rightarrow \text{ Si } |t|<\min\{R_f,R_g\},$$
$$f(t)+g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k+b_k]t^k,\ f(t)g(t)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)t+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)t^2+\cdots$$

(también f/g es analítica si tiene límite en $t=0$;
ya veremos en ejemplos como hacer su desarrollo).

Caso importante de estas series son las de **Taylor**:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}}{k!}t^k, \quad \text{para } f \text{ con infinitas derivadas en } 0.$$

La mayoría de las funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de la serie. Por ejemplo:

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}, \quad \operatorname{sen} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{2k}}{(2k)!},$$
$$\operatorname{sh} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall t\in\mathbf{R}.$$
$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k, \quad \ln(1+t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{k+1}}{k+1}, \quad \arctan t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{2k+1}}{2k+1},$$
$$[1+t]^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots, \quad \text{si } |t|<1.$$

Aunque f sea $C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall t$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(t)=e^{-1/t^2}, f(0)=0$ (que cumple $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$, con lo que su serie de Taylor es $\sum 0\cdot t^k=0$ y, por tanto, f no es analítica). Para que una f lo sea, es necesario que tenga infinitas derivadas en el punto, pero no es suficiente.

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$.

$$f(t)=-\tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{1+t}\to\tfrac{1}{(1+t)^2}=-\tfrac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,k\,t^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,t^k \quad \text{si } |t|<1\,.$$

Otra forma:

$$(1+t)^{-2}=1-2t+\tfrac{-2(-2-1)}{2!}t^2+\tfrac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}t^3+\cdots=1-2t+3t^2-4t^3+\cdots\,,\ |t|<1\,.$$

Multiplicando: $f(t)=[1-t+t^2-\cdots][1-t+t^2-\cdots]$

$$=[\,1+(-1-1)t+(1+1+1)t^2+\cdots]=1-2t+3t^2-\cdots \ \text{ si } |t|<1\,.$$

También podemos ‘dividir’: buscar una serie $\sum c_k t^k$ tal que:

$$[c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots]\,[t^2+2t+1]=1\ ;$$

así se va obteniendo:

$$c_0=1\ ;\ \ 2c_0+c_1=0\to c_1=-2c_0=-2\ ;\ \ c_0+2c_1+c_2=0\to c_2=-c_0-2c_1=3\ ;\ \dots$$

[**El radio** R **del desarrollo de un cociente** P/Q**, con** P **y** Q **polinomios, simplificados los factores comunes, y** $Q(0)\neq0$ **es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de** Q **más próxima**].

Y con un caso sencillo de ‘composición’ de series:

$$\tfrac{1}{1+(2t+t^2)}=1-(2t+t^2)+(2t+t^2)^2-(2t+t^2)^3+\cdots=1-2t+(-1+4)t^2+\cdots$$

3.2 Puntos regulares

Sea la ecuación [e] $\boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=0}$.

Se dice que $t=t_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $t=t_o$. En caso contrario se dice que $t=t_o$ es **punto singular** de [e].

Sea $t=0$ regular y llamemos R al menor de los radios de convergencia de a y b. Se podrá, pues, escribir:

$$a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k \quad , \quad b(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^k \quad \text{para } |t|<R\,.$$

Si sus coeficientes son analíticos, se puede esperar que cualquier solución de [e] lo sea también, es decir que también se pueda escribir como una serie de potencias para $|t|<R$. Empecemos con un ejemplo:

Ej 1. $\boxed{(1+t^2)x''+2tx'-2x=0}$, es decir, $x''+\frac{2t}{1+t^2}x'-\frac{2}{1+t^2}x=0$,

$a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=0$ (regular) con $R=1$ ($t=\pm i$ ceros del denominador).

Llevemos una solución en forma de serie arbitraria (junto con sus derivadas) a la ecuación inicial (mejor que a la segunda, pues deberíamos desarrollar a y b) y tratemos de calcular sus coeficientes:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k \ ,\ \ x'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k t^{k-1} \ ,\ \ x''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k t^{k-2} \to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k t^{k-2}+k(k-1)c_k t^k]+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_k t^k-\sum_{k=0}^{\infty}2c_k t^k=0$$

[No es falso poner $k=0$ como índice inferior de sumación en las tres series, pues se ve que se anularía el primer término en la de $k=1$ y los dos primeros en la de $k=2$, pero así está claro la potencia con la que empieza cada serie].

La solución final de esta lineal de segundo orden deberá contener dos constantes arbitrarias así que una buena estrategia puede ser **intentar escribir los** c_k **en función de los dos primeros** c_0 y c_1. Como para que una serie de potencias se anule han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de t, deducimos:

$$t^0:\ \ 2\cdot1\cdot c_2-2\cdot c_0=0 \to c_2=c_0$$

$$t^1:\ \ 3\cdot2\cdot c_3+[2-2]c_1=0 \to c_3=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t^k:\ \ (k+2)(k+1)c_{k+2}+[k(k-1)+2k-2]c_k=0$$

[Hemos escrito aparte los primeros términos porque cada serie empieza a aportar términos para distintos k; como potencia general hemos escogido t^k porque era la más repetida, pero también podríamos haber tomado t^{k-2}].

De la última expresión deducimos la **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, queda el c_{k+2} en función sólo de c_k, pero en otros pueden aparecer varios); para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** calculando sus raíces:

$$c_{k+2}=-\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}\,c_k=-\frac{k-1}{k+1}\,c_k\ ,\ \ k=0,1,\ldots$$

Si preferimos tener el c_k (en vez del c_{k+2}) en términos de los anteriores, basta cambiar k por $k-2$ en la expresión anterior:

$$c_k=-\frac{k-3}{k-1}\,c_{k-2}\ ,\ \ k=2,3,\ldots$$

A partir de la regla de recurrencia escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos ejemplos esto no será posible, pero aquí sí):

$$c_4 = -\tfrac{1}{3}c_2 = -\tfrac{1}{3}c_0\ ,\quad c_6 = -\tfrac{3}{5}c_4 = \tfrac{1}{5}c_0\ ,\quad c_8 = -\tfrac{5}{7}c_6 = -\tfrac{1}{7}c_0\ ,\ \ldots$$

$c_5=0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7=c_9=\cdots=0$.

Por si no está aún clara la expresión de los c_{2k}, usamos la recurrencia 'desde arriba':

$$c_k = -\tfrac{k-3}{k-1}c_{k-2} = \tfrac{k-3}{k-1}\tfrac{k-5}{k-3}c_{k-4} = \tfrac{k-5}{k-1}c_{k-4} = -\tfrac{k-7}{k-1}c_{k-6} = \cdots$$

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador es $2k-1$ y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k} = (-1)^{k+1}\tfrac{1}{2k-1}c_0\ ,\quad k=2,3,\ldots$$

Agrupamos los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan indeterminados) y obtenemos por fin:

$$x = c_0\left[1+t^2-\tfrac{1}{3}t^4+\tfrac{1}{5}t^6+\cdots\right]+c_1t = c_0\Big[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{t^{2k}}{2k-1}\Big]+c_1t = c_0x_1+c_1x_2$$

Esta expresión tiene la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $t=0$, y además x_1 y x_2 han de ser linealmente independientes. Esto es lo que sucede. La serie de x_1 (como muestra el criterio del cociente) converge para $|t|<1$ y la 'serie' de x_2 (truncada a partir de su segundo término) converge para todo t. Y además el wronskiano de ambas soluciones en $t=0$ resulta ser 1 (pues $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$).

Si, en vez de la solución general, la que queremos es la que cumple $x(0)=x_o$, $x'(0)=x_o'$ (existe y es única por ser a y b analíticas) dada la forma de las series de x_1 y x_2 es inmediato que debe tomarse $c_0=x_o$, $c_1=x_o'$.

[Esta ecuación se podía haber resuelto sin usar series. Era fácil darse cuenta de que $x_2=t$ era una solución, y podríamos haber calculado la x_1 siguiendo la sección 2.2:

$$x_1 = x_2\int x_2^{-2}\,e^{-\int a}\,dt = t\int t^{-2}\,e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = t\int t^{-2}(1+t^2)^{-1}dt = -1-t\arctan t\ ,$$

cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegura el siguiente teorema que no demostraremos.

Teor 1. Si $t=0$ es regular, la solución general de [e] es

$$x = c_0x_1+c_1x_2 = c_0\left[1+\sum\right]+c_1\left[t+\sum\right]\ ,$$

con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que contienen potencias t^k con $k\geq 2$, convergen, al menos, para $|t|<R$. Los coeficientes de estas series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en la ecuación (con las funciones $a(t)$ y $b(t)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k, para $k\geq 2$, en función de c_0 y c_1. La solución única de [e] con $x(0)=x_o$, $x'(0)=x_o'$ se obtiene simplemente sustituyendo $c_0=x_o$, $c_1=x_o'$.

[El desarrollo de a y b, desde luego, no será necesario si esas funciones son polinomios].

Para estudiar las soluciones de [e] en un entorno de otro t_o regular, el **cambio de variable** $s=t-t_o$ lleva a una ecuación en s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad \Big[\text{es decir,}\ \ x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_o)^k\ \Big].$$

Ej 2. $\boxed{x''+(t-2)x=0\ ,\ x(0)=2\ ,\ x'(0)=1}$

$t=0$ regular puesto que $a(t)=0$ y $b(t)=t-2$ son analíticas en todo **R**.

El primer ejemplo era demasiado sencillo. En general, y como en este, las cosas serán más complicadas. Llevando una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación e igualando a 0 los coeficientes de cada t^k :

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k \to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k t^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[c_k t^{k+1}-2c_k t^k\right]=0 \to$$

$$t^0:\ 2\cdot1\cdot c_2-2\cdot c_0=0\to c_2=c_0\ ;\quad t^1:\ 3\cdot2\cdot c_3+c_0-2\cdot c_1=0\to c_3=-c_0+c_1\ ;\ \ldots$$

$$t^{k-2}:\ k(k-1)c_k+c_{k-3}-2c_{k-2}=0\ \to\ c_k=-\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3}+\tfrac{2}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\ k=3,4,\ldots$$

(regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos). Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1 :

$$c_4=-\tfrac{1}{12}c_1+\tfrac{2}{12}c_2=\tfrac{1}{6}c_0-\tfrac{1}{12}c_1\ ;\ c_5=-\tfrac{1}{20}c_2+\tfrac{2}{20}c_3=-\tfrac{1}{15}c_0+\tfrac{1}{30}c_1$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$x=c_0\left[1+t^2-\tfrac{1}{6}t^3+\tfrac{1}{6}t^4-\tfrac{1}{15}t^5+\cdots\right]+c_1\left[t+\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{1}{30}t^5+\cdots\right]$$

Y la particular pedida: $x=2+t+2t^2+\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{15}t^5+\cdots$, convergente $\forall t$ según el teorema.

Para calcular unos pocos términos (pero no para hallar muchos o para buscar la expresión del término general) de una serie solución cerca de un punto regular se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $t=0$ en la ecuación: $x''(0)+(0-2)x(0)=0\to x''(0)=4$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $t=0$:

$$x'''+(t-2)x'+x=0\to x'''(0)=2x'(0)-x(0)=0$$

Derivando otra vez: $x''''+(t-2)x''+2x'=0\to x''''(0)=2x''(0)-2x'(0)=6$, ...

Por tanto: $x(t)=x(0)+x'(0)t+\frac{x''(0)}{2}t^2+\frac{x'''(0)}{6}t^3+\cdots=2+t+\frac{4}{2}t^2+\frac{0}{6}t^3+\frac{6}{24}t^4+\cdots$

Si ahora queremos unos términos de la solución de la ecuación con $\boxed{x(2)=6\ ,\ x'(2)=0}$,
la solución general de arriba, dada por series en $t=0$, claramente no sirve para imponer datos en $t=2$. Debemos resolver en torno a este punto:

$$s=t-2\to \tfrac{d^2x}{ds^2}+sx=0\ ,\ s=0 \text{ regular}\to x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k\to\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k s^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^{k+1}=0\to$$

$$s^0:\ 2c_2=0\ ;\quad s^1:\ 6c_3+c_0=0\ ,\ c_3=-c_0\ ;\quad \ldots\ ;$$

$$s^{k-2}:\ k(k-1)c_k+c_{k-3}=0\ \to\ c_k=-\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3}\ ;\ k=3,4,\ldots\ \to$$

$$c_5=c_8=\cdots=0\ ;\ c_4=-\tfrac{1}{4\cdot3}c_1\ ;\ c_6=-\tfrac{1}{6\cdot5}c_3=\tfrac{1}{6\cdot5\cdot3\cdot2}c_0\ ;\ c_7=-\tfrac{1}{7\cdot6}c_4=\tfrac{1}{7\cdot6\cdot4\cdot3}c_1\ \to$$

$$x=c_0\left[1-\tfrac{1}{6}s^3+\tfrac{1}{120}s^6+\cdots\right]+c_1\left[s-\tfrac{1}{12}s^4+\tfrac{1}{504}s^7+\cdots\right]\xrightarrow{\text{datos}}$$

$$x=6-s^3+\tfrac{1}{20}s^6+\cdots=6-(t-2)^3+\tfrac{1}{20}(t-2)^6+\cdots$$

(Aquí sí podemos expresar el término general, aunque no nos queda tan compacto como en el ejemplo 1:

$$x=c_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^{3k}}{2\cdot5\cdots(3k-1)\cdot3\cdot6\cdots(3k)}\right]+c_1\left[t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^{3k+1}}{3\cdot6\cdots(3k)\cdot4\cdot7\cdots(3k+1)}\right]\ ).$$

3.3 Puntos singulares regulares

Supondremos en esta sección que para [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ es $t=t_o$ un **punto singular**, es decir, que o $a(t)$ o $b(t)$ o las dos no son analíticas en $t=t_o$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa precisamente en muchas ocasiones conocer el comportamiento de las soluciones de [e] en las cercanías de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los **singulares regulares** que vamos a definir.

Suponemos a partir de ahora que el punto singular que tratamos es $t=0$. Sabemos que esto no supone pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_o\neq 0$ el cambio $s=t-t_o$ traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s.

Conviene escribir [e] de otra forma. Multiplicándola por t^2 y llamando $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$ obtenemos:

$$[e^*]\quad \boxed{t^2x''+t\,a^*(t)x'+b^*(t)x=0}$$

$t=0$ **es punto singular regular de** [e] - [e*] **si** $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$ **son analíticas en** $t=0$.

Ej 1. $\boxed{t(t-1)^2x''-tx'+(t-1)x=0}$, es decir,

$$[e]\ x''-\frac{1}{(t-1)^2}x'+\frac{1}{t(t-1)}x=0\ ,\quad [e^*]\ t^2x''-t\frac{t}{(t-1)^2}x'+\frac{t}{t-1}x=0\ .$$

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás son regulares).

Como $a^*(t)=-\frac{t}{(t-1)^2}$ y $b^*(t)=\frac{t}{t-1}$ son analíticas en $t=0$, el punto es singular regular.

Con $t-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)x''-(s+1)x'+sx=0$, es decir, $s^2x''-s\frac{1}{s}x'+\frac{s}{s+1}x=0$

(estas derivadas son con respecto a s, pero las hemos dejado tal cual, pues $\frac{ds}{dt}=1$).

Como $-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 (aunque $\frac{s}{s+1}$ sí lo sea), $t=1$ ($s=0$) es singular no regular.

[En torno a $t=1$ no sabremos resolver la ecuación por series (la teoría es complicada)].

Ej 2. $\boxed{t^2x''+\operatorname{sen}t\,x'+t^{5/3}x=0}$ $\to$ $x''-\frac{\operatorname{sen}t}{t^2}x'+t^{-1/3}x=0$ ó $t^2x''+t\frac{\operatorname{sen}t}{t}x'+t^{5/3}x=0$.

$a(t)$ y $b(t)$ no son ni continuas en $t=0$ (no es punto regular). Tampoco es singular regular: $a^*(t)=\frac{\operatorname{sen}t}{t}=\frac{t-\frac{1}{6}t^3+\cdots}{t}=1-\frac{1}{6}t^2+\cdots$ sí es analítica en $t=0$ (con radio $R=\infty$), pero no lo es $b^*(t)=t^{5/3}$ (es continua y derivable, pero ya no existe la derivada segunda en 0).

Los $t_o\neq 0$ son puntos regulares de la ecuación, por ser $a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=t_o$.

[Escribir sus desarrollos en ese punto se podría hacer con un poco de trabajo; por ejemplo, en torno a $t=1$: $t=s+1\ \to\ x''+\frac{\cos 1\operatorname{sen}s+\operatorname{sen}1\cos s}{(s+1)^2}x'+(1+s)^{-1/3}x=0\ \ldots$].

Queremos resolver [e*] cerca de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en ese punto, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|t|<R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$\boxed{a^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*\,t^k=a_0^*+a_1^*t+\cdots\ ,\quad b^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*\,t^k=b_0^*+b_1^*t+\cdots}\ ,\ |t|<R\,.$$

[Normalmente será $a_0^*=a^*(0)$ y $b_0^*=b^*(0)$ salvo para funciones como $\frac{\operatorname{sen}t}{t}$].

[e*] se resolverá con el **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. No lo probaremos, pero intentemos hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo [e*] es la de Euler (en ella $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que hay soluciones de Euler de la forma t^r se podría pensar que [e*] posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos t^r.

Probemos por tanto en [e*] la solución $x = t^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \cdots$.

Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r}\Big) = 0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden (t^r) debe anularse:

$$[r(r-1)+a_0^*\,r+b_0^*]c_0 = 0\,.$$

Si la serie ha de empezar por términos t^r, debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $t^r\sum$ son las raíces del polinomio:

$$\boxed{Q(r) \equiv r(r-1)+a_0^*\,r+b_0^*}\ ,$$ llamado **polinomio indicial** de [e*].

Esto es coherente con las ecuaciones de Euler. Para ellas, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2, dos soluciones independientes de la ecuación eran t^{r_1} y t^{r_2}. Pero si la raíz era doble sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln t$; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] pueden aparecer problemas que no se presentan en el caso particular de las de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a t^{r+k} tenemos:

$$[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a_0^*+b_0^*]c_k + [(r+k-1)a_1^*+b_1^*]c_{k-1} + \cdots = 0$$

donde los puntos representan los términos con c_{k-2}, c_{k-3}, ... De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es $Q(r+k)$, no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k)\neq 0\ \forall k$. Pero si r_2 es la menor, y r_1-r_2 es un entero positivo n, el $Q(r_2+k)=0$ si $k=n$, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de t^{r_2+n} y no pueden existir soluciones $t^{r_2}\sum$.

Enunciamos ya el **teorema de Frobenius** (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del Q, nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

Teor 1.

> Supongamos que el polinomio indicial $Q(r)= r(r-1) + a_0^* r + b_0^*$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1 \geq r_2$.
>
> Entonces siempre existe una solución x_1 de [e*] de la forma
>
> $$x_1 = t^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\ ,\ c_0\neq 0\,.$$
>
> La segunda solución x_2 linealmente independiente es, según los casos:
>
> **a]** Si r_1-r_2 no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\ ,\ b_0\neq 0$.
>
> **b]** Si $r_1=r_2$, $x_2 = t^{r_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t$.
>
> **c]** Si $r_1-r_2=1,2,3,\ldots$, $x_2 = t^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.
>
> Todas las soluciones están definidas al menos para $0<t<R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas en $-R<t<0$ sin más que sustituir $\ln t$ por $\ln|t|$ y las expresiones de la forma t^r que preceden a las series por $|t|^r$. En el caso **c]** la constante d puede ser perfectamente 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes de la forma $t^r\sum$.

Ej 3. $\boxed{2tx''+x'+tx=0}$, o sea, $t^2x''+t\frac{1}{2}x'+\frac{t^2}{2}x=0 \to a^*(t)=\frac{1}{2}$, $b^*(t)=\frac{t^2}{2}$.

$a^*(t)$ y $b^*(t)$ analíticas ($R=\infty$) $\Rightarrow$ $t=0$ singular regular. Como $a_0^*=\frac{1}{2}$ y $b_0^*=0$, el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2}) \to r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$, con $r_1-r_2 \notin \mathbf{N}$.

Las dos series solución linealmente independientes son, pues:

$x_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2}$, $c_0\neq 0$ y $x_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $b_0\neq 0$ (convergen $\forall t\in\mathbf{R}$, según el teorema).

Llevando x_1 a la ecuación inicial (las series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{1}{2})c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+3/2}=0$$

(ahora las 3 series empiezan por $k=0$ pues no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t:

$t^{-1/2}$: $\left[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right]c_0=0\cdot c_0=0$ y c_0 queda indeterminado como debía.

$t^{1/2}$: $\left[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\right]c_1=0 \to c_1=0$,

$t^{k-1/2}$: $\left[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})\right]c_k+c_{k-2}=0 \to c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\cdots=0$, $c_2=-\frac{1}{2\cdot 5}c_0$, $c_4=-\frac{1}{4\cdot 9}c_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}c_0$, ... y la primera solución es:

$$x_1=t^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 5\cdot 9\cdots(4m+1)}\,t^{2m}\Big] \text{ (eligiendo, por ejemplo, } c_0=1\text{).}$$

Para la otra raíz del polinomio indicial: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2k(k-1)b_k t^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty} k b_k t^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1}=0 \to$

t^0: $b_1=0$, t^1: $[4+2]b_2+b_0=0 \to b_2=-\frac{1}{6}b_0$.

t^{k-1}: $[2k(k-1)+k]b_k+b_{k-2}=0 \to b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,3,\ldots \to$

$b_3=b_5=\cdots=0$, $b_4=-\frac{1}{4\cdot 7}b_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}b_0$, $\ldots \to x_2=1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 3\cdot 7\cdots(4m-1)}\,t^{2m}$

El criterio del cociente prueba que, como debían, las series convergen $\forall t$. La x_2 vale $\forall t$, pero x_1 sólo si $t>0$ (en $t=0$ no derivable). Una x_1 válida $\forall t\neq 0$ es $x_1=|t|^{1/2}[1+\sum]$.

Ej 4. $\boxed{t^2x''+2t^2x'+(t^2+\frac{1}{4})x=0}$ $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2+\frac{1}{4}$ analíticas en $\mathbf{R}$.

$t=0$ singular regular; $r(r-1)+\frac{1}{4}=0 \to r=\frac{1}{2}$ doble $\to$

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2} \to \sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2c_kt^{k+1/2}+(2k+1)c_kt^{k+3/2}+c_kt^{k+5/2}\right]=0,$$

$$\to c_1=-c_0,\quad c_k=-\tfrac{2k-1}{k^2}c_{k-1}-\tfrac{1}{k^2}c_{k-2},\ k=2,3,\ldots$$

$$\to c_2=\tfrac{1}{2}c_0,\ c_3=-\tfrac{1}{6}c_0,\ \ldots,\ c_k=(-1)^k\tfrac{1}{k!}c_0 \to x_1=t^{1/2}e^{-t}$$

Como la raíz es doble, la otra solución necesariamente contiene un logaritmo:

$$x_2=t^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k+x_1\ln t \to x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})b_kt^{k+1/2}+\tfrac{1}{t}x_1+x_1'\ln t,$$

$$x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})(k+\tfrac{1}{2})b_kt^{k-1/2}-\tfrac{1}{t^2}x_1+\tfrac{2}{t}x_1'+x_1''\ln t \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k^2+2k+1)b_kt^{k+3/2}+(2k+3)b_kt^{k+5/2}+b_kt^{k+7/2}\right]+\ln t\left[t^2x_1''+2t^2x_1'+(t^2+\tfrac{1}{4})x_1\right]=0$$

El último corchete es 0 por ser x_1 solución (lo que acompaña a $\ln t$ siempre se anula).

$$\to b_0=b_1=b_2=\cdots=0 \to x_2=t^{1/2}e^{-t}\ln t$$

[Para comprobarlo podemos hacer $y=re^tx \to t^2y''+\frac{1}{4}y=0$ (Euler) $\to y=c_1t^{1/2}+c_2t^{1/2}\ln t$; o también, una vez hallada la x_1, se puede calcular otra solución con la fórmula de 2.2:

$x_2=t^{1/2}e^{-t}\int\frac{e^{-2t}}{te^{-2t}}\,dt=t^{1/2}e^{-t}\ln t$, exactamente la misma x_2 hallada con las series].

Como se ha visto en el ejemplo anterior, son más largas las cuentas para el cálculo de la x_2 en el caso **b]** del teorema que en el **a]**. Y también son más complicadas las del **c]**, caso al que pertenecen los tres siguientes ejemplos.

Ej 5. $\boxed{t^2x''+2t^2x'-2x=0}$ $t=0$ singular regular, $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=-2$ analíticas en **R**.

El polinomio indicial $r(r-1)+0\,r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}\ ,\ c_0\neq 0\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_kt^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)c_kt^{k+3}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kt^{k+2}=0$$

$$\to\ c_0 \text{ indeterminado},\quad c_k=-\tfrac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1}\ ,\ k=1,2,\dots$$

$$\to\ c_1=-c_0\ ,\ c_2=\tfrac{3}{5}c_0\ ,\ c_3=-\tfrac{4}{15}c_0\ ,\ \dots,$$

$$c_k=(-1)^k\,\tfrac{2(k+1)}{k(k+3)}\,\tfrac{2k}{(k-1)(k+2)}\,\tfrac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\cdots c_0=\tfrac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,6c_0$$

Por tanto, eligiendo $c_0=\frac{1}{6}$, $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,t^{k+2}\ \to\ x_1'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)(k+2)}{(k+3)!}\,t^{k+1}$

La segunda solución (caso **c]** del teorema) es

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1}+dx_1\ln t\ ,\ b_0\neq 0\ ,\ d \text{ constante (quizás nula)}\to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-1)(k-2)b_kt^{k-1}+2(k-1)b_kt^k-2b_kt^{k-1}\big]$$
$$+\,d\big[(-1+2t)x_1+2tx_1'\big]+d\ln t\big[t^2x_1''+2t^2x_1'-2x_1\big]=0$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser x_1 solución. Sustituyendo las series de x_1 y x_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de t:

$$-2b_0-2b_1-2b_2t+\big[2b_3+2b_2-2b_3-\tfrac{d}{6}+\tfrac{2d}{3}\big]t^2+\cdots=0\ \to$$
$$b_1=-b_0\ ,\ b_2=0\ ,\ d=0\ ;\ \ b_0\ ,\ b_3 \text{ indeterminados.}$$

Como $d=0$, en la expresión de x_2 no aparece el $\ln t$. Sabíamos que debía ser $b_0\neq 0$. El hecho de que también b_3 quede indeterminado se debe a que proporciona potencias t^2, comienzo de la serie de x_1. Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular x_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4=b_5=\cdots=0$.

Concluimos que: $x_2=\frac{1}{t}(1-t)=\frac{1}{t}-1$ [es fácil comprobar que satisface la ecuación].

[De esta solución x_2 sacaríamos otra con: $x_1^*=\frac{1-t}{t}\int\frac{t^2e^{-2t}}{(1-t)^2}dt$. La primitiva no parece calculable, pero esto no impide desarrollar e integrar para obtener una serie solución:

Lo más corto para desarrollar el integrando (se podría hacer un cociente) es:

$$\tfrac{1}{(1-t)^2}=\tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{1-t}\ \to\ t^2[1-2t+2t^2+\tfrac{4}{3}t^3+\cdots][1+2t+3t^2-4t^3+\cdots]=t^2+t^4+\tfrac{2}{3}t^5+\cdots$$
$$\to\ x_1^*=[\tfrac{1}{t}-1][\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{9}t^6+\cdots]=\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^4-\tfrac{4}{45}t^5+\cdots.$$

Aunque no lo pareciese, la primitiva sí se puede hallar: $u=t^2e^{-2t}$, $dv=\frac{1}{(1-t)^2}\ \to$
$$\int\tfrac{t^2e^{-2t}}{(1-t)^2}dt=\tfrac{t^2e^{-2t}}{1-t}-\int 2te^{-2t}dt=\tfrac{1}{2}\tfrac{1+t}{1-t}e^{-2t}\ \to\ x_1^\bullet=(1+\tfrac{1}{t})\,e^{-2t}.$$

x_1 no es exactamente ni x_1^* ni $x_1^\bullet$ (es $3x_1^*$ y una combinación lineal de x_2 y $x_1^\bullet$)].

[En este ejemplo, si, en vez de partir de la raíz mayor de la ecuación indicial, hubiésemos sustituido la x_2, habríamos obtenido las dos series de un tirón; pero esto ocurriría por que casualmente resulta ser $d=0$; si fuera $d\neq 0$ sólo obtendríamos la solución trivial $x=0$ y deberíamos empezar de nuevo desde el principio].

Para distinguir en el caso **c]** del teorema de Frobenius si aparecen logaritmos o no (es decir, si es o no $d\neq 0$) no es necesario hallar la expresión del término general, bastan con los primeros términos de la x_1. Esto es lo que haremos en los dos últimos ejemplos.

Ej 6. Estudiemos cuántas soluciones analíticas linealmente independientes tiene:

$$\boxed{2tx''+(t-2)x'+3x=0}\ , \text{ es decir, } \ t^2x''+t(\tfrac{t}{2}-1)x'+\tfrac{3t}{2}x=0\ .$$

$t=0$ singular regular. $r(r-1)-r=0\to r_1=2$, $r_2=0$. Es seguro analítica $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}$

$$\to \sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k+2)(k+1)c_kt^{k+1}-2(k+2)c_kt^{k+1}+(k+2)c_kt^{k+2}+3c_kt^{k+2}\big]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)kc_kt^{k+1}+(k+5)c_kt^{k+2}]=0\ .$$

Calculemos, por ejemplo, los tres primeros términos de esta primera serie:

t^1: $0c_0=0$, c_0 indeterminado ; t^2: $6c_1+5c_0=0$, $c_1=-\frac{5}{6}c_0$;

t^3: $16c_2+6c_1=0$, $c_2=-\frac{3}{8}c_1=\frac{5}{16}c_0$; . . . →

$$x_1=t^2-\tfrac{5}{6}t^3+\tfrac{5}{16}t^4+\cdots\ \big[\to x_1'=2t-\tfrac{5}{2}t^2+\tfrac{5}{4}t^3+\cdots\ \big]$$

La $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+dx_1\ln t$ será analítica si $d=0$ y no lo será si $d\neq0$. Hay que trabajar:

$$x_2'=\sum_{k=1}^{\infty}kb_kt^{k-1}+dx_1'\ln t+\tfrac{d}{t}x_1\ ;\ \ x_2''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-2}+dx_1''\ln t+\tfrac{2d}{t}x_1'-\tfrac{d}{t^2}x_1\ \to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}[kb_kt^k-2kb_kt^{k-1}]+\sum_{k=0}^{\infty}3b_kt^k+4dx_1'-\tfrac{4d}{t}x_1+dx_1=0\ \to$$

t^0: $-2b_1+3b_0=0\to b_1=b_0$;

t^1: $4b_2+b_1-4b_2+3b_1+8d-4d=0\to d=-b_1=-\frac{3}{2}b_0\neq0$.

Por tanto, la segunda solución contiene el $\ln t$ y no es analítica en $t=0$:

$$x_2=1+\tfrac{3}{2}t+\cdots-\tfrac{3}{2}x_1\ln t\ .$$

[No es analítica, pero sí es continua en $t=0$, pues $x_1\ln t\underset{t\to0}{\to}0$ (si $a>0$, $t^a\ln t\underset{t\to0}{\to}0$)].

Ej 7. $\boxed{tx''+2e^tx'=0}$. Sabemos resolverla siguiendo 2.2, pero utilicemos Frobenius:

$t=0$ es singular regular [$a^*(t)=2e^t$ y $b^*(t)\equiv0$ analíticas en todo **R**]. $r_1=0$, $r_2=-1$.

La $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ se ve (¡a ojo!) que es $x_1\equiv1$. La otra es: $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1}+d\ln t\ \to$

$$x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_kt^{k-2}+\tfrac{d}{t}\ ,\ \ x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_kt^{k-3}-\tfrac{d}{t^2}\to$$

$$2b_0t^{-2}+2b_3t+\cdots-dt^{-1}+\big[2+2t+t^2+\tfrac{1}{3}t^3+\cdots\big]\big[dt^{-1}-b_0t^{-2}+b_2+2b_3t+\cdots\big]=0\to$$

t^{-2}: $2b_0-2b_0=0\to b_0$ indeterminado como debía.

t^{-1}: $-d+2d-2b_0=0\to d=2b_0$ (aparecen, pues, logaritmos).

t^0: $2d-b_0+2b_2=0\to b_2=\frac{1}{2}b_0-d=-\frac{3}{2}b_0$.

t^1: $2b_3+d-\frac{1}{3}b_0+2b_2+4b_3=0\to b_3=\frac{2}{9}b_0$.

....

$$\to\quad x_2=2\ln t+\tfrac{1}{t}-\tfrac{3}{2}t+\tfrac{2}{9}t^2+\cdots$$

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $x'=v\ \to\ v'=-\frac{2e^t}{t}v\ \to$

$$v=Ce^{-\int2t^{-1}e^tdt}=Ce^{-\int(-2/t-2-t-t^2/3+\cdots)dt}=Ct^{-2}e^{-2t-t^2/2-t^3/9+\cdots}=$$
$$=Ct^{-2}\big[1+(-2t-\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{9}t^3-\cdots)+\tfrac{1}{2}(-2t-\tfrac{1}{2}t^2-\cdots)^2+\tfrac{1}{6}(-2t-\cdots)^3+\cdots\big]\to$$

$$x=K+C\int\big[t^{-2}-2t^{-1}+\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{9}t+\cdots\big]dt\ =\ K-C\big[2\ln t+\tfrac{1}{t}-\tfrac{3}{2}t+\tfrac{2}{9}t^2+\cdots\big]\ .$$

3.4 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel

La ecuación de **Legendre** es [L] $\boxed{(1-t^2)x''-2tx'+p(p+1)x=0}$, $p\geq 0$.

Resolvemos primero en torno a $t=0$ que es punto regular. Como $a(t)=-2t/(1-t^2)$ y $b(t)=p(p+1)/(1-t^2)$ son analíticas en $|t|<1$ la ecuación tiene series solución que convergen al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \to \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_kt^{k-2}-k(k-1)c_kt^k\right]-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}p(p+1)c_kt^k=0 \to$$

$$c_k=-\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\dots \to c_2=-\frac{p(p+1)}{2\cdot 1}c_0\ ,$$

$$c_3=-\frac{(p-1)(p+2)}{3\cdot 2}c_1\ ,\ c_4=\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}c_0\ ,\ c_5=\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}c_1\ ,\dots\to$$

$$x_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}t^{2n}$$

$$x_2=t+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$, x_1 se reduce a un polinomio de grado $2m$:

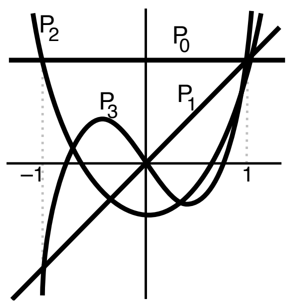
$$p=0\to x_1=1\ ,\quad p=2\to x_1=1-3t^2\ ,\quad p=4\to x_1=1-10t^2+\tfrac{35}{3}t^4\ ,\dots$$

Si p impar, $p=2m+1$, es x_2 quien se convierte en un polinomio de grado $2m+1$:

$$p=1\to x_2=t\ ,\quad p=3\to x_2=t-\tfrac{5}{3}t^3\ ,\quad p=5\to x_2=t-\tfrac{14}{3}t^3+\tfrac{21}{5}t^5\ ,\dots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado** n al polinomio P_n solución de [L] con $p=n\in\mathbf{N}$, $P_n(1)=1$, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0=1\ ,\ \ P_1=t\ ,\ \ P_2=\tfrac{3}{2}t^2-\tfrac{1}{2}\ ,\ \ P_3=\tfrac{5}{2}t^3-\tfrac{3}{2}t\ , \\ P_4=\tfrac{35}{8}t^4-\tfrac{15}{4}t^2+\tfrac{3}{8}\ ,\ \ P_5=\tfrac{63}{8}t^5-\tfrac{35}{4}t^3+\tfrac{15}{8}t\ ,\dots \end{array}}$$



Como $P_n(-t)=(-1)^nP_n(t)$, los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. Observemos que los P_{2m+1} y las derivadas P'_{2m} se anulan en 0. Se pueden probar además las siguientes propiedades de los P_n:

$$P_n(t)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$, fórmula de **Rodrigues**.

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$. Los P_n son **ortogonales**:

$$\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dt=0\ ,\ \text{si}\ m\neq n\quad ;\quad \int_{-1}^{1}P_n^2\,dt=\frac{2}{2n+1}$$

Para las aplicaciones de la ecuación [L] a las EDPs se necesitará saber cuáles de sus soluciones están acotadas en $[-1,1]$. Se demuestra que, salvo constantes, **las únicas soluciones de** [L] **acotadas a la vez en** $t=1$ **y** $t=-1$ **son los polinomios de Legendre**.

Para intentar comprobar esto resolvemos la ecuación en torno a $t=1$, haciendo $s=t-1$:

$$[\mathrm{L}_1]\quad s(s+2)x''+2(s+1)x'-p(p+1)x=0$$

Para $[\mathrm{L}_1]$ es $s=0$ singular regular, y $a^*(s)=\frac{2(s+1)}{s+2}$, $b^*(s)=-\frac{p(p+1)s}{s+2}$ analíticas para $|s|<2$.

Es $r=0$ doble $\forall p$. Por tanto sus soluciones linealmente independientes son:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad \text{y}\quad x_2=|s|\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k+x_1\ln|s|\ ,\quad c_0=1$$

y las series convergen al menos si $|s|<2$. Sin hallar ningún coeficiente podemos ya afirmar que x_1 siempre está acotada en $s=0$ ($t=1$), mientras que x_2 no lo está ($\to-\infty$ si $s\to 0$).

Calculemos x_1 y comprobemos que si $p=n$ obtenemos los P_n [pues $x_1(1)=1$]. Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_ks^k+2k(k-1)c_ks^{k-1}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2kc_ks^k+2kc_ks^{k-1}\right]-\sum_{k=0}^{\infty}p(p+1)c_ks^k=0$$

$$\to\ c_k=\frac{(p+1)p-k(k-1)}{2k^2}c_{k-1}\ ,\quad k=1,2,\ldots\ \to$$

$$x_1(s)=1+\frac{(p+1)p}{2}s+\frac{(p+1)p[(p+1)p-2\cdot 1]}{16}s^2+\cdots+\frac{(p+1)p[(p+1)p-2\cdot 1]\cdots[(p+1)p-n(n-1)]}{2^n(n!)^2}s^n+\cdots$$

Si $p=n$ la regla de recurrencia nos dice que c_{n+1} y lo siguientes se anulan. En particular:

$$p=0\to x_1=1\ ;\ p=1\to x_1=1+s=t\ ;\ p=2\to x_1=1+3s+\frac{6[6-2]}{16}s^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\ ;\ \ldots$$

Faltaría probar que si $p\neq n$ la x_1 no está acotada cuando $s\to -2$ ($t\to -1$) para comprobar que no hay más soluciones de [L] acotadas en $t=\pm 1$ que los P_n.

Otra ecuación ligada a problemas físicos es la de **Hermite**: [H] $\boxed{x''-2tx'+2px=0}$.

Tiene solución analítica ($t=0$ regular), convergente en todo **R**. Resolvemos:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\to\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kt^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}2pc_kt^k=0\to c_k=2\frac{k-2-p}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\quad k=2,3,\ldots$$

$$\to x=c_1\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(-p)(2-p)\cdots(2n-2-p)}{(2n)!}t^{2n}\right]+c_2\left[t+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(1-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n+1)!}t^{2n+1}\right]$$

Como para Legendre, [H] posee solución polinómica cuando $p=n\in N$. Si $p=2m$, la primera solución x_1 pasa a ser un polinomio de grado $2m$, y si $p=2m+1$ es la otra x_2 la que se convierte en un polinomio de ese mismo grado:

$$p=0\to x_1=1\ ;\ p=1\to x_2=t\ ;\ p=2\to x_1=1-2t^2\ ;\ p=3\to x_2=t-\frac{2}{3}t^3\ ;\ \ldots$$

Los **polinomios de Hermite** $H_n(t)$ son las soluciones polinómicas de [H] tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma 2^nt^n, es decir:

$$\boxed{H_0=1\ ;\quad H_1=2t\ ;\quad H_2=4t^2-2\ ;\quad H_3=8t^3-12t\ ;\quad\ldots}$$

Citemos, también sin prueba, algunas propiedades de los H_n que serán útiles, por ejemplo, cuando aparezcan en física cuántica. Una forma de generarlos todos es:

$e^{2ts-s^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(t)s^n$ (a esa exponencial se le llama **función generatriz** de los H_n).

[Nos limitamos a comprobarlo para los 4 que ya hemos calculado:

$$(1+2ts+2t^2s^2+\frac{4t^3}{3}s^3+\cdots)(1-s^2+\frac{1}{2}s^4-\cdots)=1+2ts+(2t^2-1)s^2+(\frac{4t^3}{3}-2t)s^3+\cdots\ ].$$

De la función generatriz sale otra fórmula de **Rodrigues**: $H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$.

$$\left[\text{Pues } H_n(t)=\frac{\partial e^{2ts-s^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=e^{t^2}\frac{\partial e^{-(t-s)^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=(\,t-s=z,\ \frac{\partial}{\partial s}=-\frac{\partial}{\partial s}\,)=(-1)^ne^{t^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big|_{z=t}\right].$$

En cuántica no aparece [H], sino $u''+(2p+1-t^2)u=0$. Haciendo $u=xe^{-t^2/2}$ en ella se llega a [H]. Se prueba (no es fácil hacerlo), que las **únicas soluciones** u **de la inicial que** $\to 0$ **si** $|t|\to\infty$ son las de la forma $u_n(t)=e^{-t^2/2}H_n(t)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n. Sólo estas u_n interesan físicamente.

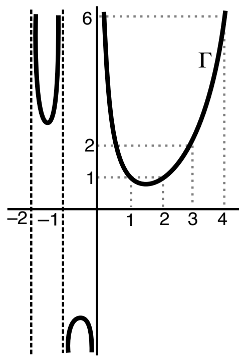
Como los P_n, se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty,\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_nu_m\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}H_nH_me^{-t^2}dt=0\ ,\text{ si } m\neq n\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty}u_n^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2e^{-t^2}dt=2^nn!\sqrt{\pi}\ .$$

[Lo comprobamos exclusivamente cuando $n=0,1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_0u_1=\int_{-\infty}^{\infty}2te^{-t^2}=0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}=\sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_1^2=-2te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-t^2}=2\sqrt{\pi}\ ].$$

Para expresar en forma compacta las soluciones de la última ecuación de interés físico que vamos a tratar (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (función que generaliza el factorial para números no enteros) definida por la siguiente integral impropia convergente:



$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \text{ si } s>0 ,$$

y extendida a $s<0$ mediante:

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\cdots(s+1)s} \text{ si } -n<s<-n+1 ,\ n\in\mathbf{N} .$$

Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1 ;\ \Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi} ;\ \Gamma(s+1)=-e^{-x}x^s\Big|_0^\infty+s\Gamma(s)=s\Gamma(s)$$

$$\rightarrow\ \Gamma(s+n)=(s+n-1)\cdots(s+1)s\,\Gamma(s)\ \rightarrow\ \Gamma(n+1)=n! ,\ n\in N$$

La ecuación de **Bessel** es: [B] $\boxed{t^2x''+tx'+t^2-p^2]x=0}$, $p\geq 0$.

$t=0$ es singular regular con polinomio indicial r^2-p^2, $r_1=p$, $r_2=-p$. Entonces

$$x_1=t^p\sum_{k=0}^\infty c_kt^k ,\ t>0 ,\ \ \text{(acotada en } t=0\ \forall p)$$

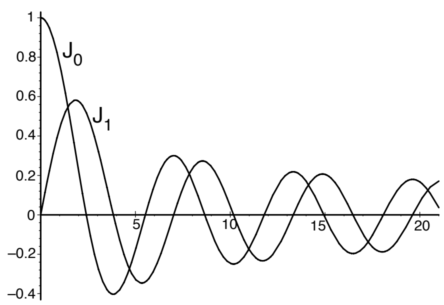
es una solución definida por una serie que converge en todo **R**. Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^\infty\big[k(2p+k)c_kt^{p+k}+c_kt^{p+k+2}\big]=0 ;\ c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)} ,\ k=2,3,\ldots ;\ \ c_1=0\rightarrow c_3=\cdots=0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)} ;\ c_4=\frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)} ;\ \ldots\rightarrow x_1=c_0\,t^p\Big[1+\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^mt^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\cdots(p+m)}\Big]$$

Eligiendo $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ $\rightarrow$ $\boxed{J_p(t)\equiv\big[\frac{t}{2}\big]^p\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\frac{t}{2}\big]^{2m}}$ **[función de Bessel de primera especie y orden p]**

En particular son: $J_0(t)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\big[\frac{t}{2}\big]^{2m}$, $J_1(t)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\big[\frac{t}{2}\big]^{2m+1}$,



cuyas gráficas son las de la izquierda. Se prueba que, al igual que J_0 y J_1 , todas las J_p son oscilatorias y que para t grande se parecen a:

$$J_p\sim\cos\big[t-(2p+1)\tfrac{\pi}{4}\big]$$

Cada J_p tiene un infinitos ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, . . . ;
los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...

Para hallar una solución linealmente independiente de [B] (necesariamente no acotada en $t=0$), Frobenius nos dice que si $r_1-r_2=2p\neq 0,1,\ldots$ la x_2 es de la forma:

$$x_2=t^{-p}\sum_{k=0}^\infty b_kt^k ,\ t>0\ \Big(\text{llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(t)\equiv\big[\tfrac{t}{2}\big]^{-p}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\tfrac{t}{2}\big]^{2m}\Big).$$

Si $p\notin\mathbf{N}$, pero $2p\in\mathbf{N}$ ($p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots$), podría x_2 contener un $\ln t$ pero no es así (caso **c]** de Frobenius con $d=0$). De hecho, haciendo $p=\frac{1}{2}$ en $J_{\pm p}$ se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{t}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^mt^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\mathrm{sen}\,t}\ ,\ J_{-\frac{1}{2}}(t)=\cdots=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t}\ ,$$

soluciones que son linealmente independientes (la expresión asintótica es exacta para $p=\frac{1}{2}$). Como veremos que $J_{p+1}=\frac{2p}{t}J_p-J_{p-1}$, **todas las $J_{\frac{2n+1}{2}}$, $n\in\mathbf{Z}$, son funciones elementales** (las demás J_p no lo son).

Para $p=n\in\mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues es fácil ver que cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n}=(-1)^n J_n$]. Tendríamos que hallar las x_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln t$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba obteniendo:

$$x_2(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\big[1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{m}\big]\big[\tfrac{t}{2}\big]^{2m}+J_0(t)\ln t\equiv K_0(t)\ ,\ t>0$$

[**función de Bessel de segunda especie y orden** 0]

Pero en muchos problemas físicos en los que surge la ecuación [B] es necesario que las soluciones estén acotadas, y para ellos no servirá de nada el conocimiento de estas complicadas segundas soluciones.

Lo que sí puede ser útil en el futuro será conocer las siguientes propiedades de las derivadas de las J_p:

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\big[t^pJ_p(t)\big]=t^pJ_{p-1}(t)\ ,\ \tfrac{d}{dt}\big[t^{-p}J_p(t)\big]=-t^{-p}J_{p+1}(t)}\ \Big(\text{En particular, } \begin{matrix}[tJ_1]'=J_0\\ [J_0]'=-J_1\end{matrix}\Big).$$

(Son inmediatas: $\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p}}{2^{2m+p}m!\Gamma(p+m+1)}=t^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1}m!\Gamma(p+m+1)}$ y similar la otra).

Derivando y despejando la J_p' en ambas:

$$J_p'=J_{p-1}-\tfrac{p}{t}J_p=-J_{p+1}+\tfrac{p}{t}J_p\ \Rightarrow\ \boxed{J_{p+1}=\tfrac{2p}{t}J_p-J_{p-1}}\ ,$$

relación de recurrencia citada, que expresa cada J_{p+1} en función de las anteriores.

3.5 El punto del infinito

Nos preocupamos por el comportamiento de las soluciones de una lineal de segundo orden para grandes valores de t. Pocas ecuaciones son resolubles elementalmente. Por otra parte, las soluciones en forma de serie (salvo que se puedan identificar con funciones elementales) no dan ninguna información para grandes t, incluso aunque converjan $\forall t$. Si queremos ver qué sucede cuando $t\to\infty$, la idea natural es efectuar el **cambio de variable** $t=1/s$ y estudiar el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación cuando $s\to 0^+$, que será fácil de precisar si $s=0$, llamado **punto del infinito** de la ecuación inicial, es punto regular o singular regular de esta ecuación.

A diferencia del cambio $s=t-t_o$ que no modifica las derivadas, hacer $t=1/s$ exige usar la regla de la cadena. Denotando las derivadas respecto a s con puntos:

$$t=\tfrac{1}{s}\to x'=\dot{x}\,\tfrac{ds}{dt}=-\tfrac{1}{t^2}\,\dot{x}\ ;\ x''=\tfrac{1}{t^4}\,\ddot{x}+\tfrac{2}{t^3}\,\dot{x}\to\ \boxed{x'=-s^2\,\dot{x}\ ,\quad x''=s^4\,\ddot{x}+2s^3\,\dot{x}}$$

Ej 1. $\boxed{(1+t^2)x''+tx'-x=0}$. Estudiemos su comportamiento para grandes valores de t:

$$t=\tfrac{1}{s}\to\ (1+\tfrac{1}{s^2})s^4\ddot{x}+(1+\tfrac{1}{s^2})2s^3\dot{x}-\tfrac{s^2}{s}\dot{x}-x=s^2(1+s^2)\ddot{x}+s(1+2s^2)\dot{x}-x=0\ .$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r=\pm1$. Sus soluciones para $s>0$ son:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^{k+1}=c_0s+c_1s^2+\cdots\ ,\ c_0\neq0\ ;\ \ x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^{k-1}+dx_1\ln s\ ,\ b_0\neq0\ .$$

Si $s\to0^+$, la solución $x_1\to0$, mientras que la $x_2\to\infty$ (si $b_0>0$, sea $d=0$ ó $d\neq0$), con lo que deducimos, sin necesidad de resolver nada, que hay soluciones de la ecuación inicial que, cuando $t\to\infty$, tienden a 0, mientras que otras tienden a ∞.

Como la ecuación es resoluble elementalmente pues $x_1=t$ es solución que salta a la vista, podemos en este caso concreto hallar su solución general y comprobar:

$$x_2=t\int t^{-2}e^{-\int a dt}dt=t\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}\ \to\ x=c_1t+c_2\sqrt{1+t^2}\ .$$

Hay soluciones que claramente $\to\infty$ y las de la forma $C(t-\sqrt{1+t^2})=\frac{-C}{t+\sqrt{1+t^2}}\underset{t\to\infty}{\to}0$.

De paso observemos que $x_1=t=\frac{1}{s}$ es la x_2 que obtendríamos arriba (es $d=0$).

Para Hermite y Bessel este camino parece adecuado para estudiar sus soluciones para t gordo, pero por desgracia, se comprueba que $s=0$ en ambos casos es singular no regular. Aunque para **Legendre** lo interesante físicamente es lo que sucede en $[-1,1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 3.4 obtuvimos sus series solución en torno a $t=0$ [que hablan sólo de lo que ocurre en $|t|<1$] y en torno a $t=1$ [hablan de $t\in(-1,3)$].

$$[\mathrm{L}]\ (1-t^2)x''-2tx'+p(p+1)x=0\ \overset{t=1/s}{\to}\ [\mathrm{L}_\infty]\ s^2(s^2-1)+2s^3+p(p+1)x=0\ .$$

Para $[\mathrm{L}_\infty]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$, $b^*(s)=p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de $[\mathrm{L}_\infty]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de [L] para $|t|>1$. Como el polinomio indicial de $[\mathrm{L}_\infty]$ tiene por raíces $1+p$ y $-p$ y como para todo $p\geq0$ es $r_1=1+p>0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de [L] que tienden a 0 si $t\to\infty$.

$$\Big[\text{Pues } x_1(s)=s^{1+p}\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\to0 \text{ si } s\to0^+\text{; o sea, } x_1(t)=t^{-(1+p)}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{-k}\underset{t\to\infty}{\to}0\Big].$$

Resolvamos por series $[\mathrm{L}_\infty]$ si $p=0$ (único p para el que $s=0$ es regular): $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\to$

$$c_k=\tfrac{k-2}{k}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\ldots\to x=c_0+c_1[s+\tfrac13s^3+\tfrac15s^5+\cdots]=c_0+c_1[t^{-1}+\tfrac13t^{-3}+\tfrac15t^{-5}+\cdots]\ ,$$

serie (no de potencias) que describe las soluciones para $|t|>1$, que es donde converge.

De otra forma: $(1-t^2)x''+2tx'=0\to x'=\frac{c_1}{1-t^2}\to x=c_0+c_1\ln|\frac{1+t}{1-t}|=c_0+c_1\ln|\frac{1+s}{1-s}|$, $t,s\neq\pm1$.

4. Mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales casi nunca se pueden resolver. Pero para los **sistemas autónomos en el plano**, es decir, para los sistemas de la forma

$$\boxed{[\mathrm{S}] \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}}$$

es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas **órbitas**) de estas soluciones sobre el plano xy o plano de fases (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente y pueden aparecer las llamadas soluciones caóticas). Este capítulo está dedicado a describir las diferentes técnicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado de la forma [S] sobre el plano de fases (su **mapa de fases**).

En la sección 4.1 se estudian las **propiedades básicas** de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la **ecuación diferencial de las órbitas** (que a veces es resoluble y da la expresión de dichas órbitas) y el **campo vectorial v** tangente a las órbitas (que siempre nos ayudará al pintar los mapas).

Se llaman **puntos críticos** de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema (obtenidas haciendo $f=g=0$). La sección 4.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (**nodos**, **puntos silla**, **focos**, **centros**,...) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será en casi todos los casos similar a la de la **aproximación lineal,** sistema lineal (de órbitas fácilmente dibujables una vez hallados sus autovalores) obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor en torno al punto crítico del sistema inicial [S]. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la matriz de la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si algun $\lambda=0$ (puntos no elementales). En la sección se estudiarán además las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de **ecuaciones autónomas** de segundo orden $x''=g(x,x')$. En diversos ejemplos se mostrará como organizar adecuadamente toda la información anterior para dibujar las órbitas de sistemas concretos (clasificar los puntos críticos, intentar hallar las órbitas, localizar las curvas de pendiente horizontal y vertical, determinar los valores del campo adecuados, analizar como se deforman las 'separatrices' de los puntos silla...). Se verá también en esta sección que la **estabilidad** de las soluciones constantes es fácil de precisar (la de las no constantes es complicada) y se comprobará cómo (excepcionalmente) se pueden hallar algunas soluciones del sistema [S].

Un tipo particular de sistemas [S] que poseen propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los **exactos** (aquellos con $f_x+g_y\equiv 0$), tratados en la sección 4.3. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos elementales sólo podrán ser **puntos silla o centros** (lo que evita las dudas de la última situación). En el caso particular de las **ecuaciones exactas** $x''=g(x)$ veremos que podemos dibujar su mapa de fases a partir, simplemente, del conocimiento de la llamada **función potencial**.

En la sección 4.4 daremos algunas otras ideas sobre cómo abordar el problema de ver si en el sistema no lineal sigue o no siendo un **centro** un punto crítico cuya aproximación lineal lo sea (análisis de **simetrías** de las órbitas y utilización de las coordenadas **polares**).

4.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que f y g y sus derivadas parciales son continuas en todo $\mathbf{R}^2$. Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$ (es decir $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x_o}$).

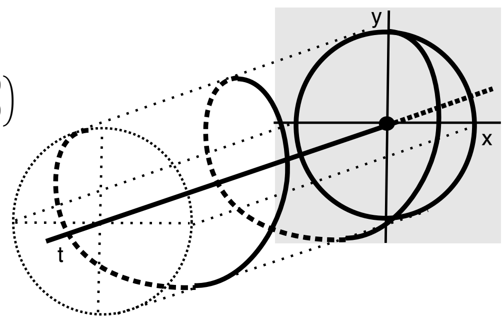
Los siguientes resultados, semejantes a los de las autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Si $f(x_o, y_o) = g(x_o, y_o) = 0$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ es solución (constante o de equilibrio) de [S]. Si $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $k \in \mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+k) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k) \end{pmatrix}$ es también solución de [S].

[Otros de los teoremas de 1.5 no se pueden trasladar directamente; por ejemplo las soluciones, en general, no son monótonas y las soluciones acotadas no tienden necesariamente hacia soluciones constantes].

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] es una curva en el espacio txy, pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita paramétricamente en función de t. Esta segunda curva, a la que llamaremos **órbita** de la solución, es la proyección de la primera sobre el plano de fases. El objetivo de este capítulo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas de [S], es decir, el **mapa de fases** de [S]. Comencemos con un ejemplo:

Ej 1. Sea $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ (es decir $x''+x=0$).

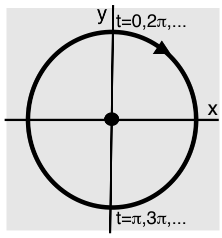


La solución que cumple $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y la que satisface $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo, y sus proyecciones sobre xy son el punto y la circunferencia del inferior [a un punto del mapa de fases, proyección de solución constante, se le llama **punto crítico** o **punto singular**].

Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t, por el punto de coordenadas $x=x(t)$, $y=y(t)$. La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.



Si imponemos $\mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t-\pi) \\ \cos(t-\pi) \end{pmatrix}$.

La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para diferentes valores de t. Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (pero no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si $x=x(t)$, $y=y(t)$ son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es $x=x(t+k)$, $y=y(t+k)$ para cualquier k (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.

Normalmente no conoceremos las soluciones del sistema [S]. Para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g. Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando la t del sistema obtenemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

$$[\text{o}] \quad \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)}}$$

(pues $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$, si lo permite el teorema de la función inversa).

Las curvas integrales de [o], quizás resoluble por los métodos de la sección 1.1 y dibujables por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (y al revés: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las ideas de esta sección para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t, si dibujamos las órbitas sólo a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero será fácil orientarlas utilizando el campo $\mathbf{v}$ que pronto introduciremos.

Resolviendo la ecuación [o] para el ejemplo 1 (lo que en este caso es posible) obtenemos de forma mucho más rápida sus órbitas:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \;\rightarrow\; x^2+y^2=C$$

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial** $\mathbf{v}$ dado en cada punto del plano por

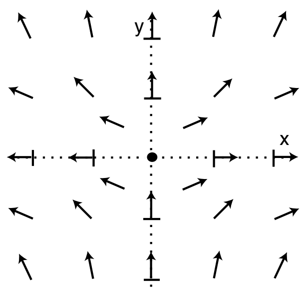
$$\boxed{\mathbf{v}(x,y)=\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y)\end{pmatrix}}$$

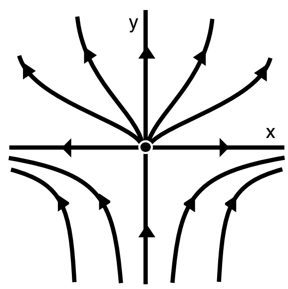
$\big[$coincide con $\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$, vector tangente a la órbita en el punto $(x,y)\big]$.

Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo $\mathbf{v}$ (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos). Generalmente usaremos el campo $\mathbf{v}$ para completar otras informaciones, pero aunque fallen todas las demás técnicas del capítulo siempre podremos dibujar algunos vectores de $\mathbf{v}$ y hacernos una idea del mapa de fases.

Ej 2. Repasemos lo visto con un ejemplo poco práctico por ser el sistema resoluble:

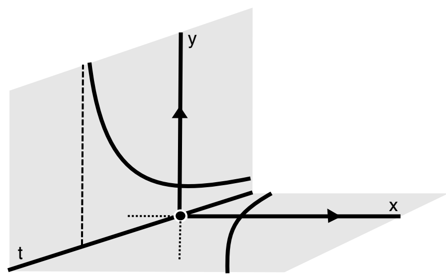
$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y^2 \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}, \quad \mathbf{v}(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y^2\end{pmatrix}$$





El origen es el único punto crítico. Algunos vectores de $\mathbf{v}$ (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Podemos también resolver la ecuación [o] :

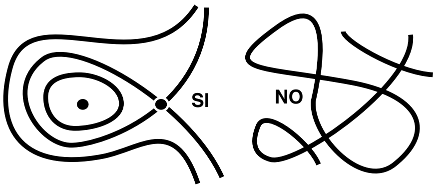
$$y=[c-\ln|x|]^{-1}\text{ , o sea, } x=ce^{-1/y}.$$



Con ello completamos el mapa de fases de la derecha. Cada órbita nos da los valores que toman la x y la y de la solución de la que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los toman. Por ejemplo, la $x(t)$ de la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que la $y(t)=29$ para un $t>0$, pero sólo podemos hallar este t calculando $y(t)$ ($y(t)\to\infty$ pues si tendiese a un valor constante α se tendría, como en las autónomas de primer orden, que $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv\alpha$ sería una solución constante, lo que es imposible por no existir más puntos críticos). Tampoco podemos saber si esta $y(t)$ está definida para todo $t\geq 0$. Pero resolviendo se tiene $y(t)=1/(1-t)$, que explota en $t=1$ (sin embargo la solución $x(t)=e^t$, $y(t)=0$, con otra órbita recta similar a la anterior, está definida para todo valor de t).

Demostremos otras propiedades generales de las órbitas:

Teor 2. Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de [S]. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.



(las órbitas no pueden cruzarse unas a otras, ni a sí mismas; sólo pueden ser de 3 tipos: puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples (asociadas a soluciones constantes, periódicas y no periódicas); varias órbitas pueden confluir en un punto crítico, lo que no viola la unicidad: corresponderán a soluciones que tienden a la solución constante cuando t tiende a + o $-\infty$, pero que no la alcanzan en tiempo finito).

Dado un $\mathbf{x_o}$, sea $\mathbf{x}(t)$ la solución con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x_o}$. Si para otra $\mathbf{x}^*(t)$ su órbita pasa por el mismo punto, debe ser $\mathbf{x}^*(t^*)=\mathbf{x_o}$ para algún t^*. Como $\mathbf{x}^*(t+t^*)$ es también solución y toma en $t=0$ el mismo valor que $\mathbf{x}(t)$ es, por unicidad, $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*(t+t^*)$, o sea, $\mathbf{x}(t-t^*)=\mathbf{x}^*(t)$ $\forall t$. Por tanto, $\mathbf{x}^*(t)$ es trasladada de $\mathbf{x}(t)$ y sus órbitas coinciden.

Sea $\mathbf{x}(t)$ solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T>0$ en el que vuelve a ser $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Utilizando la unicidad en $t=0$ se tiene que para todo t es $\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ y la solución es T-periódica y su órbita se repite cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

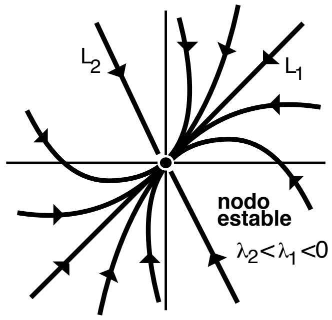
Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto $\mathbf{x_o}$ del plano xy no depende del t_o en el que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la que es proyección satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empecemos a contar el tiempo, como era esperable al no depender f y g de t). Insistimos en que para un sistema no autónomo esto es falso, y no tiene sentido hablar de su mapa de fases.

4.2 Clasificación de puntos críticos

La mejor información sobre un mapa de fases nos la dará el conocimiento de la forma de sus órbitas cerca de un punto crítico. Tratamos primero los **sistemas lineales** (siempre resolubles y con mapas de fases fácilmente dibujables) y después, basándonos en ellos, los no lineales.

Sea: [L] $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$, o sea, $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

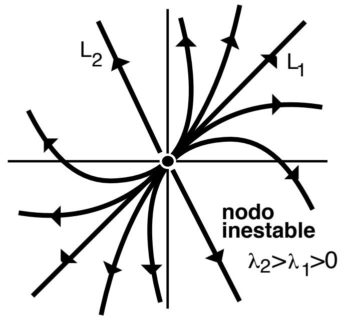
Supondremos $|\mathbf{A}|\neq 0$ (con lo que $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ será el único punto crítico de [L] y $\lambda=0$ no será autovalor). Clasificamos el origen según los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz $\mathbf{A}$:



Si λ_1 y λ_2 son **reales y distintos**, la solución general es:

$\mathbf{x}(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_i}$ vector propio asociado a λ_i .

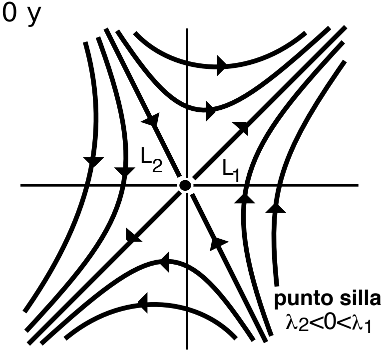
Llamemos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$. Cada L_i está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i=0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del λ_i .



El vector unitario tangente a las órbitas $\left[\,\mathbf{t}=\frac{\mathbf{x}'(t)}{||\mathbf{x}'(t)||}\,\right]$ es:

$$\mathbf{t}=\frac{c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}}{\left[c_1^2\lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t}||\mathbf{v_1}||^2+c_2^2\lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t}||\mathbf{v_2}||^2+2c_1c_2\lambda_1\lambda_2 e^{2(\lambda_1+\lambda_2)t}\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\right]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2<\lambda_1<0$, todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector $\mathbf{t}\to\mathbf{v_1}/||\mathbf{v_1}||$ (si $c_1\neq 0$) cuando $t\to\infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el **vector propio asociado al λ más cercano a** 0 y el punto crítico se llama **nodo estable**.



Si $\lambda_2>\lambda_1>0$, se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

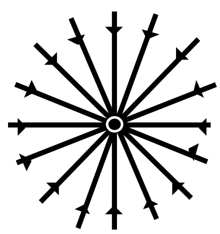
Si $\lambda_2<0<\lambda_1$, las órbitas sobre L_2 se aproximan al origen y se alejan sobre L_1 . Las demás tienden asintóticamente a L_1 o L_2 según tienda t a $+\infty$ ó $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo de la derecha (no tienen por qué ser exactamente hipérbolas) y tenemos un **punto silla**.

Si λ es **doble** y $\mathbf{A}$ diagonal la solución es:

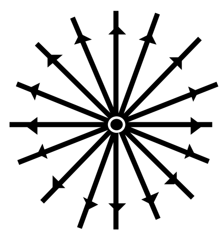
$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Entonces, si $\lambda<0$ ($\lambda>0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) a $\mathbf{0}$ según una recta diferente y se dice que el punto es un **nodo estelar estable** (**inestable**).

nodo estelar estable
λ doble < 0, **A** diagonal



nodo estelar inestable
λ doble > 0, **A** diagonal



[En este caso hubiera sido muy sencillo hallar las órbitas utilizando la ecuación [o]:

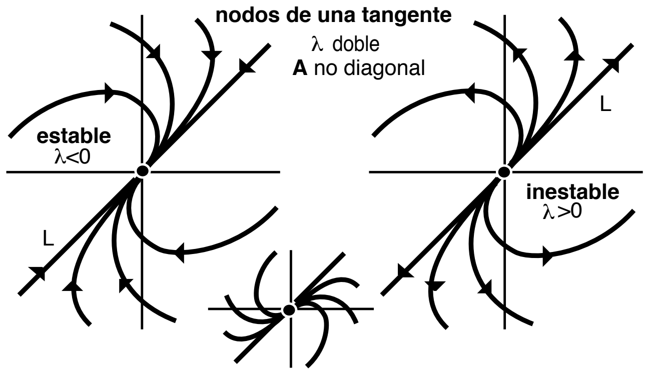
$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \to \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \to y=Cx\,].$$

Si λ es **doble** y **A** no es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{w} + (c_1 t + c_2)\mathbf{v}]\, e^{\lambda t} ,$$

con **v** único vector propio asociado a λ .

Si $c_1 = 0$ estamos sobre la recta L generada por **v**. Se ve, calculando el **t**, que todas las demás órbitas entran en el origen siendo tangentes a una u otra de las semirrectas que forman L.



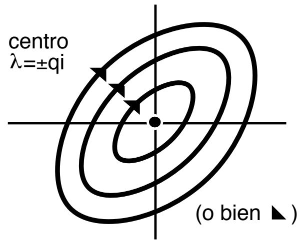
Si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto crítico, que se llama **nodo de una tangente estable** (**inestable**). En los dos casos las órbitas pueden ser como en el dibujo pequeño (se distingue entre las dos posibilidades fácilmente mirando el campo **v**).

Si los autovalores son **complejos** $\lambda = p \pm qi$, la solución es

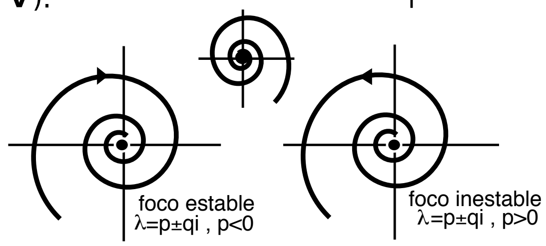
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \operatorname{sen} qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \operatorname{sen} qt \end{pmatrix} e^{pt} \ , \ c_i \text{ constantes}$$

reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

Si $p = 0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas rodeando el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo **v**).



Si $p < 0$, la exponencial decreciente obliga a las órbitas a cerrarse en espiral cuando $t \to \infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**. Si $p > 0$, las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



La forma de las espirales podría ser también la del dibujo pequeño (como siempre esto se precisará a la vista del campo **v**).

Dibujar las órbitas de sistemas lineales es muy sencillo con la clasificación anterior. Bastará (para nodos y sillas) con trazar las semirrectas órbitas orientadas y precisar el campo **v** sobre algunas rectas que pasen por el origen, que son isoclinas de

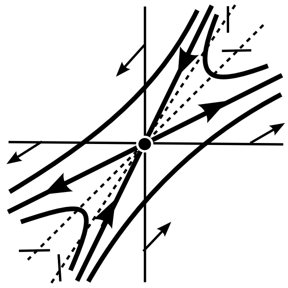
$$[\text{o}] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by} \ , \quad \text{ecuación homogénea.}$$

Por ejemplo, sobre los ejes, o sobre las rectas que nos proporcionen pendiente horizontal o vertical. Con esto (también en caso de centro o foco) basta para pintar el mapa de fases en todo el plano. Aunque, por ser [o] homogénea, sabemos que las órbitas son siempre calculables, normalmente no merecerá la pena cálcularlas (pueden además salirnos expresiones no sencillas de dibujar).

Los sistemas que se han visto son homogéneos. Si hay términos no homogéneos (constantes para ser autónoma) y $|\mathbf{A}| \neq 0$ seguirá habiendo un punto crítico $\mathbf{x_o}$, que haciendo el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x_o}$ se trasladaría al origen manteniendo la matriz **A** , con lo que, para analizarlo, basta hallar sus autovalores. Las isoclinas serán las rectas que pasen por $\mathbf{x_o}$.

A pesar de su facilidad, la teoría de mapas de fases no es de especial interés para los sistemas lineales, pues podemos hallar sus soluciones. Pero la gran importancia de lo anterior es que nos permitirá deducir la forma de las órbitas cerca de los puntos críticos de los no lineales. Pero antes de hacer esto, dibujemos dos mapas de fases de lineales para ir practicando y dando algunos nombres:

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}}$ $\lambda = -1 \rightarrow \binom{1}{2}$, $\lambda = 2 \rightarrow \binom{2}{1}$: punto silla.



Completamos esta información con el campo $\mathbf{v}$:

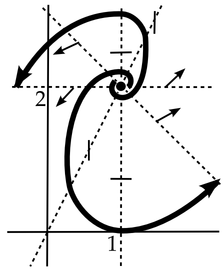
$\mathbf{v}$ es **vertical** ($x'=0$) si $y=\frac{3x}{2}$ y **horizontal** ($y'=0$) si $y=x$.

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x,0)=x\binom{3}{2}$, $\mathbf{v}(0,y)=-2y\binom{1}{1}$.

[Resolviendo [o] se obtiene: $(2y-x)^2(y-2x)=C$, órbitas de aspecto hiperbólico, pero que no son hipérbolas].

A las órbitas que entran y salen de un punto silla se les llama separatrices, nombre natural, pues 'separan' comportamiento de las soluciones totalmente distintos. Por ejemplo, aquí las soluciones cuyas órbitas parten por debajo de $y=2x$ cumplen que su $x(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, mientras que $x(t) \rightarrow -\infty$ si parten por encima de la separtriz (sobre ella $x(t) \rightarrow 0$). Y algo análogo sucede con la otra separtriz $y = x/2$. Del mapa de fases (sin resolver el sistema) podríamos deducir también, por ejemplo, que para la solución que cumple $x(7)=1$, $y(7)=0$ tanto su x como su y tienden hacia ∞ cuando $t\rightarrow\infty$ y tienden hacia $-\infty$ cuando $t\rightarrow-\infty$: basta observar la forma de su órbita.

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=2x-2 \end{cases}}$ El punto crítico es $x=1 \rightarrow y=2 \rightarrow \binom{1}{2}$.



Como $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda=1\pm i$, es un foco inestable.

$\mathbf{v}$ es **vertical** si $y=2x$ y **horizontal** si $x=1$.

Además: $\mathbf{v}(x,2)=2(x-1)\binom{1}{1}$, $\mathbf{v}(x,3-x)=(x-1)\binom{3}{2}$.

[O, si se prefiere, es el mapa de $\mathbf{x'}=\mathbf{Ax}$ trasladado al punto].

Consideremos ya el sistema **no lineal** [S] $\begin{cases} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{cases}$ y sea $\mathbf{x_o}=\binom{x_o}{y_o}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor f y g en torno a $\mathbf{x_o}$ y llevando luego este punto al origen con el cambio $u=x-x_o$, $v=y-y_o$ (o lo que es lo equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando después en $u=v=0$) se tiene:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_o,y_o)u + f_y(x_o,y_o)v + R_f(u,v) \\ v' = g_x(x_o,y_o)u + g_y(x_o,y_o)v + R_g(u,v) \end{cases} \quad \text{con } R_f\,, R_g = o(\sqrt{u^2+v^2}) \text{ si } u,v\rightarrow 0$$

Como R_f y R_g son pequeños esperamos que (cerca del origen que es ahora punto crítico) sean similares las órbitas de este sistema y las de la **aproximación lineal** obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema precisará que esto es cierto si el lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

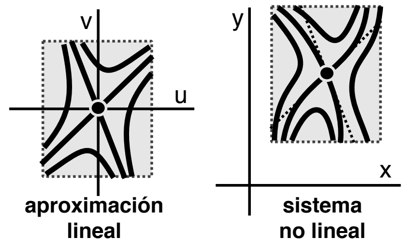
Llamemos [L] al sistema $\mathbf{u'}=\mathbf{Mu}$, con $\mathbf{u}=\binom{u}{v}$ y $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} f_x(x_o,y_o) & f_y(x_o,y_o) \\ g_x(x_o,y_o) & g_y(x_o,y_o) \end{pmatrix}$.

Suponemos $|\mathbf{M}| \neq 0$. Diremos entonces que $\mathbf{x_o}$ es **punto crítico elemental** de [S]. El teorema de la función implícita asegura que $\mathbf{x_o}$ es **aislado** (hay un entorno de $\mathbf{x_o}$ en el que no hay más puntos críticos; un punto con $|\mathbf{M}|=0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen de [L], no aislado).

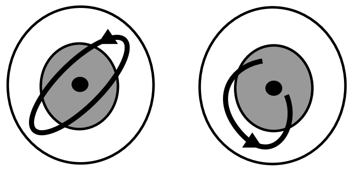
Teor 1. Si el origen es **nodo**, **punto silla** o **foco** de [L] entonces $\mathbf{x_o}$ es un punto crítico del mismo tipo y la misma estabilidad de [S]. Si el origen es **nodo estelar** o **de una tangente** de [L] y las funciones f y g tienen derivadas parciales de segundo orden continuas entonces $\mathbf{x_o}$ es nodo del mismo tipo (y estabilidad) del sistema no lineal [S]. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de [L] llegan o salen del origen se deforman, en general, en curvas de [S] que llegan o salen de $\mathbf{x_o}$, pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios de [L]. Si el origen es **centro** de la aproximación lineal y las funciones f y g son analíticas entonces $\mathbf{x_o}$ es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

La demostración del teorema es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos críticos elementales que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los $\lambda=\pm qi$ del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separar dos λ iguales, pero si f y g son regulares esto no sucede (si no lo son puede cambiar el nodo en uno de otro tipo o en un foco).

Así pues, analizando sistemas lineales sabemos, casi siempre, cómo son las órbitas de uno no lineal en un entorno de cada punto crítico (lejos de él serán totalmente diferentes de las del lineal). Este es el paso principal hacia el dibujo del mapa de fases de [S]. En muchos problemas físicos, además, precisamente lo que se busca es el comportamiento de sus soluciones cerca de las de equilibrio. Para ver en cada caso cómo se deforman las órbitas de la aproximación lineal en el no lineal (por ejemplo, el sentido en el que se doblan las separatrices de un punto silla) y obtener datos sobre el mapa global habrá que utilizar el campo **v** (y las órbitas en el caso excepcional de que sean calculables). En los ejemplos iremos viendo cómo organizar este trabajo.



Es fácil extraer del teorema conclusiones sobre la **estabilidad de las soluciones de equilibrio**, muy parecidas a las vistas para las ecuaciones autónomas de primer orden. El significado geométrico sobre el plano de fases de esta estabilidad es claro: $\mathbf{x_o}$ es estable si las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio prefijado. Es asintóticamente estable si además tienden a $\mathbf{x_o}$ cuando $t\to\infty$.



Teor 2. Si los autovalores de **M** tienen $\text{Re}\lambda<0$, $\mathbf{x_o}$ es solución de equilibrio asintóticamente estable de [S]. Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva, $\mathbf{x_o}$ es inestable.

Como siempre queda la duda de qué pasa si $\text{Re}\lambda=0$ (para un punto con un $\lambda=0$ y otro $\lambda>0$ se prueba que es inestable, aunque esto no se deduzca del teorema 1). La inestabilidad de algunas soluciones no constantes es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad no se ve en el dibujo: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes (por ejemplo las órbitas de un sistema lineal con un punto silla se pegan entre sí y sin embargo todas las soluciones son inestables).

Pasemos ya a hacer ejemplos de dibujo de mapas de fases de sistemas no lineales (los de centros de la aproximación lineal se verán en las dos secciones siguientes).

Primero hallaremos los posibles **puntos críticos** resolviendo $f(x,y)=g(x,y)=0$ (en los ejemplos que siguen se podrá hacer, pero podría ser sistema no resoluble). Evaluaremos la matriz **M** en cada punto para clasificarlo y dibujaremos en torno a cada silla o nodo rectas con la pendiente dada por los vectores propios.

Si podemos resolver la ecuación diferencial de las **órbitas**, dibujaremos algunas de ellas (al menos las más sencillas y nos esforzaremos con las separatrices).

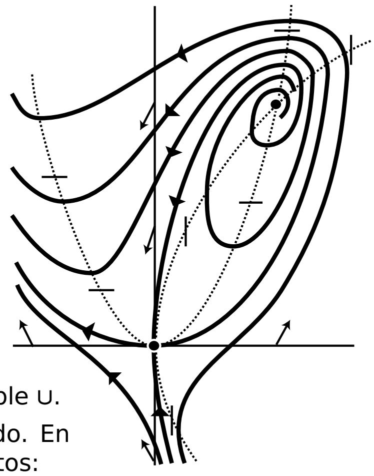
Utilizaremos el campo **v** para completar la información anterior. Habitualmente:

- Buscaremos las curvas en que **v** es **horizontal** o **vertical** ($g=0$ y $f=0$).
- Evaluaremos **v** en los **ejes** (es muy fácil hacer $x=0$ ó $y=0$) y en **rectas que pasan por los puntos críticos** (no es raro que adopten formas sencillas, pues en los puntos críticos es donde se anulan tanto f como g).
- Para ver **cómo se deforman las separatrices** miraremos **v** sobre las rectas que indica la aproximación lineal.
- Por último, daremos valores sueltos de **v** en zonas en que haya pocos datos.

Ej 3. $\boxed{\begin{cases} x'=8x-y^2 \\ y'=-6y+6x^2 \end{cases}}$ $\begin{array}{l} x(8-x^3)=0 \\ y=x^2 \uparrow \end{array}$ $\to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2y \\ 12x & -6 \end{pmatrix}$ en cada punto es:

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & -6\end{pmatrix}$ es silla con $\lambda=8\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=-6\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}8 & -8\\24 & -6\end{pmatrix}$ es foco inestable ($\lambda=1\pm i\sqrt{143}$).



Completamos la información local con el campo **v** (las órbitas no son calculables). El campo es **horizontal** y **vertical** en este caso en

$$y=x^2\ ,\quad 8x=y^2\ ,\quad \text{respectivamente.}$$

Para las **separatrices** hallamos **v** sobre las rectas dadas por la aproximación lineal, que aquí son los ejes:

$$\mathbf{v}(x,0)=2x\begin{pmatrix}4\\3x\end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{v}(0,y)=-y\begin{pmatrix}y\\6\end{pmatrix}\ .$$

Según esto, la separatriz estable se deforma $\subset$ y la inestable $\cup$.

El **v** sobre los **ejes** en este ejemplo ya lo hemos hallado. En **rectas que pasan por** $(2,4)$ y en un punto con pocos datos:

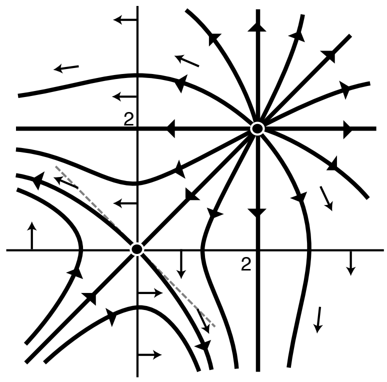
$$\mathbf{v}(x,4)=2(x-2)\begin{pmatrix}4\\3x+6\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{v}(2,y)=(4-y)\begin{pmatrix}4+y\\6\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{v}(-2,-2)=4\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}\ .$$

Los vectores dibujados precisan también el sentido en el que se abre el foco y con todo ello tenemos un mapa de fases más o menos como el de arriba. No sabemos resolver el sistema, pero están a la vista propiedades básicas de las soluciones (por ejemplo, que las soluciones constantes son inestables, lo que estaba claro desde que hallamos los λ).

Ej 4. $\boxed{\begin{cases} x'=y(x-2) \\ y'=x(y-2) \end{cases}}$ $\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ críticos. Aproximación lineal $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$ en cada uno:

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}\to\lambda=2\to\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\lambda=-2\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$: silla.

$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\to\ \lambda=2$ doble y nodo estelar inestable.



Usamos ahora **v** (órbitas calculables, pero complicadas):

v es **vertical** si $y=0$ o si $x=2$ ($\Rightarrow x=2$ órbita recta (más exactamente: está formada por tres órbitas)).

v es **horizontal** si $x=0$, $y=2$ ($\Rightarrow y=2$ órbita). Además:

$\mathbf{v}(x,x)=x(x-2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} y=x \\ \text{órbita}\end{array}$ $\mathbf{v}(x,-x)=-x\begin{pmatrix}x-2\\x+2\end{pmatrix}$ (se curva)

$\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}0\\-2x\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0,y)=\begin{pmatrix}-2y\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(1,3)=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3,1)=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$,

$\mathbf{v}(-1,3)=\begin{pmatrix}-9\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3,-1)=\begin{pmatrix}-1\\-9\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3,4)=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(4,3)=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

Excepcionalmente, la separatriz $y=x$ del lineal se conserva, aunque la otra se deforma.

Veamos algunas propiedades de las **soluciones** que se deducen del mapa de fases:

El segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución **definida** $\forall t$ (ya que está acotada y no puede irse a infinito en tiempo finito). Esta solución es **inestable**, pues mientras ella tiende a **0** la x o la y de algunas cercanas $\to -\infty$.

No podemos saber de casi todas las soluciones no constantes si están o no definidas $\forall t$ ni precisar su estabilidad, pues **no tenemos la solución general**.

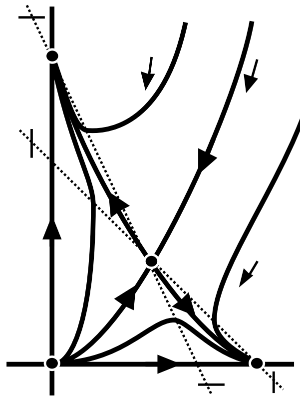
Sí **podemos hallar soluciones asociadas a órbitas sencillas**. Por ejemplo, si buscamos la que cumple $x(0)=1$, $y(0)=2$, empezamos encontrando la órbita que pasa por $(1,2)$ (o sea, que cumple $y(x=1)=2$). Es claro aquí que esa órbita es $y=2$, que llevada a la primera ecuación nos da $x'=2x-4$, $x(0)=1\to x=2-e^{2t}$, $y=2$, definida $\forall t$, aunque no sabemos si es estable por no conocer las cercanas. En cambio, la solución con $x(0)=y(0)=3\to y=x\to x'=x^2-2x$, explota en tiempo finito (por la potencia x^2; podríamos hallarla).

[La solución general de un sistema no lineal casi nunca se tendrá pues han de darse muchas casualidades: **que las órbitas sean calculables**, **que se pueda despejar** de ellas la x o la y, y **que se pueda hallar explícitamente la solución** de la autónoma que queda al sustituir].

Ej 5. $\boxed{\begin{cases} x'=x(2-x-y)\\ y'=y(3-y-2x)\end{cases}}$ Puede describir la evolución de la población de dos especies en competición. En ausencia de la otra especie cada una de ellas sigue una ecuación logística, y además la presencia de cada una influye negativamente en el crecimiento de la otra (términos en xy de cada ecuación); dibujamos sólo en el primer cuadrante, que es donde las órbitas tienen sentido.

$x(2-x-y)=0 \to \begin{cases} x=0\to y=0,3\\ y=2-x\to x=2,1\to y=0,1\end{cases} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ puntos críticos.

La aproximación lineal $\begin{pmatrix}2-2x-2y & -x\\ -2y & 3-2y-2x\end{pmatrix}$ en cada punto:



$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\to$ nodoI: $\lambda=2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (captura la tangencia) , $\lambda=3\to\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0\\-6&3\end{pmatrix}\to$ nodoE: $\lambda=-1\to\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$(tangencia), $\lambda=-3\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&-2\\0&-1\end{pmatrix}\to$ nodoE: $\lambda=-1\to\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$(tangencia), $\lambda=-2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&-1\end{pmatrix}\to\lambda=-1\pm\sqrt{2}\to\begin{pmatrix}1\\\mp\sqrt{2}\end{pmatrix}\to$ punto silla.

v es **vertical** si $x=0$ o si $y=2-x$ ($\Rightarrow x=0$ órbita).
v es **horizontal** si $y=0$, $y=3-2x$ ($\Rightarrow y=0$ órbita).

Valores de **v** sobre rectas que contienen puntos críticos:

$$\mathbf{v}(x,3)=-x\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix},\ \mathbf{v}(2,y)=-y\begin{pmatrix}2\\y+1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}(x,1)=(1-x)\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{v}(1,y)=(1-y)\begin{pmatrix}1\\3y\end{pmatrix}.$$

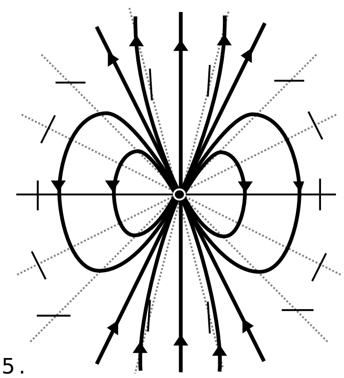
Si los datos iniciales están por encima de la separatriz estable de la silla, la especie y tiende hacia su tope logístico y la x se extingue; lo contrario sucede si están por debajo.

Si los términos de competición (los $-\alpha xy$) fuesen más pequeños las dos especies podrían coexistir (los nodos estables se vuelven sillas y pasa a existir un nodo estable en $x,y>0$ hacia el que tienden todas las soluciones del primer cuadrante; esto sucede, por ejemplo, en el sistema $x'=x(2-x-y/2)$, $y'=y(3-y-x)$, para el que $x=1$, $y=2$ es nodo estable).

Las únicas soluciones calculables serían las asociadas a $x=0$ o a $y=0$, es decir, a la ausencia de una de las dos especies. Aparece entonces la ecuación logística cuyas soluciones son coherentes con las órbitas sobre los ejes.

Un ejemplo con punto no elemental (como no tenemos teoría para ver como son las órbitas cerca del punto, nos tendremos que basar en la ecuación de sus órbitas y en el campo **v**):

Ej 6. $\boxed{\begin{cases} x'=3xy\\ y'=4y^2-4x^2\end{cases}}$ Único punto crítico: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.



Por tanto es un punto no elemental. La ecuación [o]:

$\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-4x^2}{3xy}$ es resoluble (homogénea o Bernouilli) $\to$

$y^2=4x^2+Cx^{8/3}$ (si $C=0$ se tienen las rectas $y=\pm 2x$).

Mejor que dibujar estas curvas, usamos las isoclinas, que son (ecuación homogénea) rectas $y=mx$ pasando por el origen. La pendiente de las órbitas sobre ellas es:

$K=\frac{4m^2-4}{3m}\to$ para $m=0,\pm\frac{1}{2},\pm 1,\pm 2,\pm 4$ es $K=\infty,\pm 2,0,\pm 2,\pm 5$.

Orientamos las órbitas viendo que $\mathbf{v}(0,y)$ apunta hacia arriba (esto además nos da las órbitas verticales no recogidas en la solución general). Hay órbitas (llamadas elípticas) que salen y llegan al punto crítico, situación imposible en uno elemental.

[Un punto no elemental aislado es o un centro o un foco o hay en torno a él sectores formados por órbitas elípticas, parabólicas (las de un nodo o las demás del ejemplo) o hiperbólicas (como las de un punto silla)].

Alguna conclusión sobre las soluciones: **0** es inestable (viendo el dibujo); la solución con $x(0)=1$, $y(0)=2$ (de órbita $y=2x$) no está definida $\forall t>0$, pues para ella se tiene $x'=6x^2$, $y'=3y^2$; la que cumple $x(0)=1$, $y(0)=0$ (no calculable) sí lo está por ser acotada, pero ¿será estable? (su diferencia con las soluciones cercanas tiende a **0** si $t\to\infty$, pero esto no basta en sistemas).

Todo lo dicho sobre sistemas se puede, desde luego, aplicar al caso particular de las **ecuaciones autónomas** (su mapa de fases es el del sistema equivalente):

Sea [e] $\boxed{x'' = g(x,x')}$, o escrita en forma de sistema: [SE] $\boxed{\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x,v) \end{cases}}$

(usamos la variable v porque en muchos problemas físicos será una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix}$, evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo $\mathbf{v}$ tienen la forma:

$$[\text{o}] \ \boxed{v\frac{dv}{dx} = g(x,v)} \quad , \quad \boxed{\mathbf{v}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x,v) \end{pmatrix}}$$

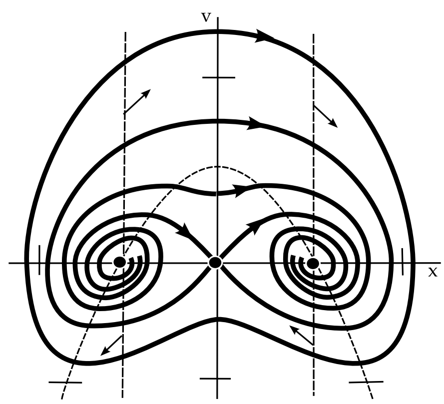
Las propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones son inmediatas:

- Los puntos críticos de [e] están sobre el eje $v=0$
  [y las x de esos puntos son los ceros de $g(x,0)$].
- Las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior.
- Las órbitas que cortan el eje $v=0$ lo hacen perpendicularmente.
- Las ecuaciones no poseen nodos estelares.
- Un vector propio asociado a un autovalor λ es $\binom{1}{\lambda}$.

Ej 7. Dibujemos el mapa de fases de la ecuación: $\boxed{x'' = x - x^3 - xx'}$.

$\begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{matrix} v=0 \\ x=0,\pm 1 \end{matrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-v & -x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \pm 1 \nearrow \\ 0 \searrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} \lambda = \frac{1}{2}\left[\mp 1 \pm i\sqrt{7}\right] \ \begin{matrix}\text{focoE} \\ \text{focoI}\end{matrix} \\ \lambda = \pm 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \text{ silla} \end{matrix}$



El campo es horizontal si: $v = 1 - x^2$ o si $x=0$.
[Es vertical si $v=0$ (como en toda ecuación)].

$\mathbf{v}$ será sencillo sobre $x=\pm 1$: $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm v \end{pmatrix}$,

Para analizar la deformación de las separatrices:

$\mathbf{v}(x, \pm x) = x \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \mp x - x^2 \end{pmatrix}$ (los $\mathbf{v}$ con x pequeño indican que se curvan según el dibujo).

[La parábola de pendiente horizontal ya nos lo aseguraba para las separatrices de $v > 0$].

La ecuación de las órbitas $\frac{dv}{dx} = \frac{x - x^3}{v} - x$ no es de ningún tipo resoluble conocido.

Los vectores del campo $\mathbf{v}$ son simétricos respecto al eje v (por ser g impar en x, sus pendientes en $(-x,v)$ y en (x,v) tienen signo opuesto). Entonces sus órbitas también serán **simétricas** respecto a $x=0$. Esta simetría obliga a las órbitas a cerrarse.

Gracias al mapa de fases deducimos que hay dos tipos esenciales de soluciones de esta ecuación no resoluble: unas son periódicas y otras tienden a ± 1 cuando $t \to \pm\infty$. Pero sin las órbitas no podemos, por ejemplo, decir exactamente para qué datos iniciales son de uno u otro tipo, o dar una expresión que nos permita calcular los periodos.

Los dos ejemplos siguientes (a diferencia del anterior), pueden describir sistemas físicos. Dibujaremos su mapa de fases e interpretaremos algunas de sus órbitas. Incluso aunque la ecuación sea lineal (como el primero que veremos) y, por tanto, resoluble, se pueden sacar conclusiones muy rápidas sobre las soluciones a partir de las órbitas.

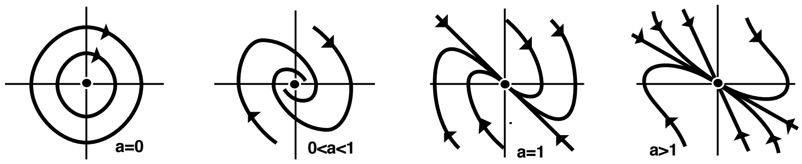
Ej 8. $\boxed{x''+2ax'+x=0}$, con $a\geq 0$ [sistema muelle-masa con rozamiento (si $a>0$)].

$\begin{cases} x'=v \\ v'=-x-2av \end{cases}$. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ único punto crítico $\forall a$. $\lambda^2+2a\lambda+1=0$: $\lambda=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ →

Si $a=0$, el origen es un centro ($\lambda=\pm i$ y el sistema es lineal).
Si $0<a<1$, es un foco estable (autovalores complejos con $\mathrm{Re}\lambda<0$).
Si $a=1$, es un nodo de una tangente estable (con $\lambda=-1$ doble).
Si $a>1$, es un nodo estable ($\lambda_2=-a-\sqrt{a^2-1}<-1<\lambda_1=-a+\sqrt{a^2-1}<0$).

Con alguna información más (el campo **v** sobre $x=0$ y los puntos en que es horizontal $x=-2av$) podemos ya dibujar los mapas de fases. Como en todo sistema lineal se pueden hallar las órbitas, pero son complicadas y dicen poco. Un pequeño dato adicional es que no hay puntos de inflexión (se ve que esto ocurre para todo sistema lineal):

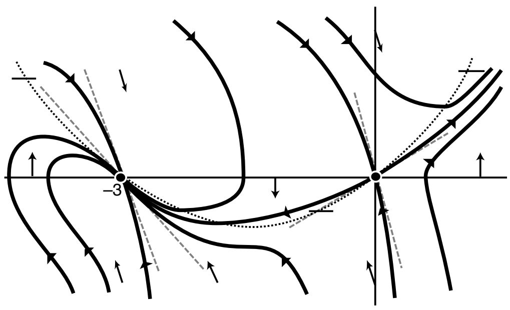
$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{v^2+2axv+x^2}{v^3}=0 \;\;\rightarrow\;\; v=(-a\pm\sqrt{a^2-1})x \text{ , órbitas rectas.}$$



En cada caso el origen representa la solución trivial asociada a la posición de equilibrio estable de la masa en reposo en $x=0$. Si $a=0$ (no hay rozamiento), cada órbita cerrada describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno a $x=0$: si, por ejemplo, la masa está inicialmente en $x=0$ con velocidad $v>0$, empieza a aumentar x hasta su valor máximo en el instante en que $v=0$; disminuye después la x (el valor absoluto $|v|$ tiene un máximo y luego decrece cuando el movimiento es contra la fuerza del muelle); avanza hasta llegar a $x=0$ con la misma velocidad inicial y repite indefinidamente el movimiento. Si $0<a<1$ (rozamiento escaso), pasa infinitas veces por $x=0$, pero la amplitud de la oscilación va tendiendo a 0 con el tiempo. Si $a\geq 1$ (fuerte rozamiento), las órbitas describen movimientos que tienden hacia $x=0$, pero no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posición y velocidad iniciales, o la masa tiende indefinidamente hacia la posición de equilibrio sin llegar a superarla, o la cruza una sola vez.

Ej 9. $\boxed{x''=x^2+3x-4x'}$ Puede describir el movimiento de una partícula sobre el eje x, sometido a una fuerza x^2+3x que sólo depende de su posición y con un rozamiento $-4x'$ proporcional a su velocidad. En forma de sistema:

$\begin{cases} x'=v \\ v'=x^2+3x-4v \end{cases}$ → $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2x+3 & -4\end{pmatrix}$.



Evaluando la aproximación lineal en los dos puntos críticos que hay se tiene:

$\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\lambda=-1,-3$ nodo E.

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\lambda=-2\pm\sqrt{7}$, silla.

v horizontal sobre la parábola $v=\frac{x^2+3x}{4}$.

Más valores de **v** (rectas con puntos críticos y puntos sobre rectas del nodo lineal):

$\mathbf{v}(-3,v)=v\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-4,1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-4,3)=\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-2,-1)=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-2,-3)=\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix}$

Sabemos ya como se curvan las rectas del nodo. Evaluando $\mathbf{v}(x,\lambda x)$ se ve, tras unos cálculos, que las separatrices se deforman de la forma indicada y completamos el dibujo.

El sentido de las fuerzas es: → –3 ← 0 → (por eso –3 es estable y 0 inestable). Supongamos la partícula inicialmente entre –3 y 0 y discutamos su movimiento según su velocidad v_o inicial. Si $v_o<0$, tiende hacia el equilibrio estable. Si $v_o>0$ y pequeño, no puede superar la fuerza que se opone, llega a un x máximo, regresa y tiende hacia –3. Si $v_o>0$ y gordo consigue cruzar $x=0$ y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (¿en tiempo finito?) mientras aumenta su velocidad. Si $v_o>0$ es tal que estamos sobre la separatriz del punto silla tenemos un movimiento imposible en la práctica: acercarse sin cesar al equilibrio inestable. El problema (las órbitas no son calculables) es que es imposible hallar exactamente este último v_o (y sería importante porque para valores superiores e inferiores de la velocidad los movimientos son radicalmente diferentes).

Ej 10. Discutamos, según los valores de b, la estabilidad de la solución $x=0$ de la ecuación

$$\boxed{x''=bx-2x'+(x')^2}\ .$$

Como asegura el teorema 2, la estabilidad de una solución constante hereda (salvo las excepciones de los centros o los puntos no elementales), la de su aproximación lineal, dada por la parte real de sus autovalores. En nuestro caso tenemos:

$$\begin{cases} x'=v \\ v'=bx-2v+v^2 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix}\ ,\ \text{aproximación lineal en el origen.}$$

$$\lambda^2+2\lambda-b=0 \ \to\ \lambda=-1\pm\sqrt{1+b}\ \to$$

Si $b>0$ el origen es **inestable**, pues hay $\lambda>0$ (y el otro es <0; es un punto silla).

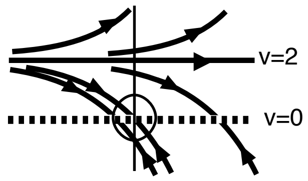
Si $b<0$, los dos autovalores tienen parte real negativa, con lo que $x=0$ es **asintóticamente estable** (de hecho, si $b<-1$ es un foco E, si $b=-1$ es un nodo de una tangente E y si $-1<b<0$ es un nodo E).

[Que conste que el criterio de Routh-Hurwitz aplicado a $\lambda^2+a\lambda+b=0$ dice que sus raíces tienen $\text{Re}\lambda<0$ si y sólo si ambos coeficientes son estrictamente positivos, con lo que nos podíamos haber ahorrado hasta el cálculo de los λ].

Si $b=0$ aparece un $\lambda=0$ y el teorema 2 no nos dice nada. Intentamos verlo haciendo el dibujo de sus órbitas:

Para $\begin{cases} x'=v \\ v'=-2v+v^2 \end{cases}$ la recta $v=0$ está formada por puntos críticos (no elementales, claro, pues los elementales son aislados).

Pero sus órbitas son muy sencillas: $\frac{dv}{dx}=v-2 \to v=2+Ce^x$.



De ellas, del sentido de las ecuaciones (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo) y de los puntos críticos hallados se deduce el dibujo de su mapa de fases. Y como se puede observar en él, el origen (y cualquiera de los otros) es punto crítico **estable no asintóticamente** (las órbitas que parten lo suficientemente cerca no se salen de un entorno, pero no tienden [salvo 2] hacia el punto).

4.3 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ se llama **exacto** si $\boxed{f_x(x,y)+g_y(x,y)\equiv 0}$.

(suponemos que f y g son de clase 1 en todo $\mathbf{R}^2$ como hicimos en la sección 4.1).

Si [S] es exacto, la ecuación diferencial de sus órbitas

$$[\text{o}]\ \frac{dy}{dx}=\frac{g(x,y)}{f(x,y)}, \quad \text{es decir,} \quad -g(x,y)+f(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

es también exacta, y por tanto resoluble:

> Existe $H(x,y)$ tal que $f=H_y$ y $g=-H_x$, y las órbitas de [S] vienen dadas por $H(x,y)=C$.

Además se tiene el siguiente resultado sobre sus puntos críticos:

Teor 1. Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

Como $f_x+g_y\equiv 0$, los λ de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{\mathbf{x_o}}$ en cualquier punto $\mathbf{x_o}$ crítico vienen dados por $\lambda^2+|\mathbf{M}|=0$, con lo que o bien (si $|\mathbf{M}|<0$) tiene dos raíces reales de distinto signo y $\mathbf{x}_o$ es un punto silla (tanto del sistema lineal como del no lineal) o bien (si $|\mathbf{M}|>0$) las raíces son imaginarias puras y se tiene un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x,y)=H(x_o,y_o)$ contiene además del punto $\mathbf{x}_o$ todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a $+\infty$ o $-\infty$, con lo que el sistema [S] no puede tener focos (pues sería $H\equiv$cte y $\mathbf{M}\equiv\mathbf{0}$ en todo un entorno y el punto no sería aislado) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

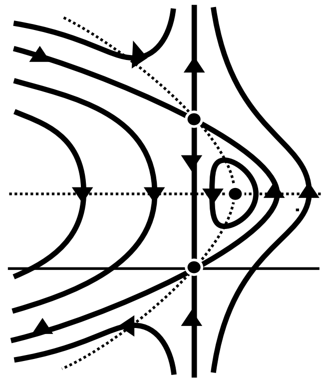
Ej 1. $\boxed{\begin{cases} x' = x-2xy \\ y' = x-y+y^2 \end{cases}}$ $=0 \to x=0\,;\ y=\frac{1}{2} \downarrow$ $y=0,1\,;\ x=\frac{1}{4}$. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1-2y & -2x \\ 1 & 2y-1 \end{pmatrix}$ en cada punto:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 1 & \mp1 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm1$: sillas; $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$: centro de la aproximación lineal.

Como sabemos este centro podría conservarse o ser un foco E o I de nuestro sistema. Pero como es exacto: $f_x+g_y=1-2y-1+2y\equiv 0$, sigue siendo centro del no lineal.

$$H_x=-x+y-y^2\,,\ H_y=x-2xy \to H(x,y)=xy-xy^2-\frac{x^2}{2}=C \text{ son las órbitas.}$$

Dibujar todas las curvas $H=C$ es complicado (aunque se podría despejar la x o la y de la ecuación de segundo grado). Pero para $C=0$ obtenemos dos muy sencillas $x=0$ y $x=2(y-y^2)$, cada una de ellas formada por cinco órbitas distintas, entre ellas todas las separatrices.

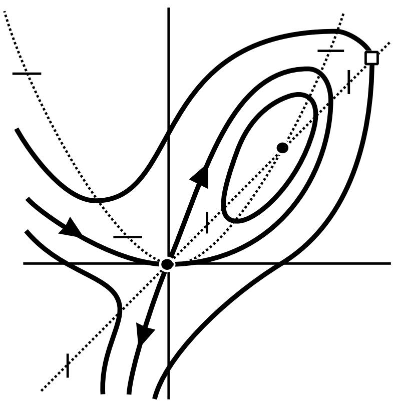


El campo $\mathbf{v}$ es horizontal sobre $x=y-y^2$ y vertical en la órbita $x=0$ y en la recta $y=1/2$.

Podemos dibujar ya las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar algún valor a $\mathbf{v}$ o fijarse en algún vector propio de los puntos sillas. Por ejemplo, podemos hallar:

$$\mathbf{v}(x,0)=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{v}(x,1)=x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y - x^2 \end{cases}}$ Dibujemos su mapa de fases y estudiemos si es periódica la solución con $x(0)=y(0)=2$.



$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$. Puntos críticos: $\begin{array}{l} y=x \to x-x^2=0 \\ \quad \to x=y=0,1 \end{array}$.

$\binom{0}{0}$ es silla $\big[\lambda=\pm 1 \to \binom{1}{2},\binom{1}{0}\big]$ y $\binom{1}{1}$ es centro del lineal. Como $f_x+g_y=-1+1=0$, el sistema es exacto y el centro se conserva.

Las órbitas son: $\begin{array}{l} H_x=x^2-y \\ H_y=y-x \end{array} \to \frac{x^3}{3}-xy+\frac{y^2}{2}=C.$

$\mathbf{v}$ es horizontal sobre $y=x^2$ y vertical en $y=x$.

Las separatrices (curvas por $(0,0) \to C=0$) son:

$$y^2-2xy+\tfrac{2}{3}x^3=0 \to y=x\pm x\sqrt{1-\tfrac{2x}{3}}\,,$$

definidas para $x \leq \frac{3}{2}$ (para $x=\frac{3}{2}$ se juntan en $y=x$).

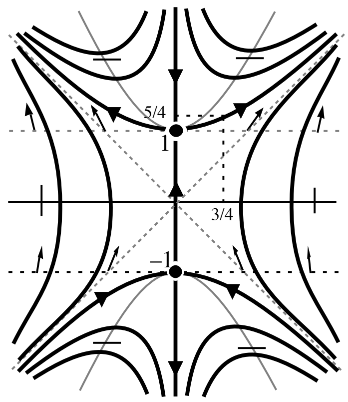
Como la órbita que pasa por $(2,2)$ está fuera del lazo que forma la separatriz, la solución de la que es proyección **no** es periódica.

[Como siempre, la información que se obtiene de la aproximación lineal es sólo local: en un entorno del centro hay seguro órbitas cerradas, pero lejos de él dejarán normalmente de serlo, como en este ejemplo (y el anterior)].

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} x' = 2xy \\ y' = 1+3x^2-y^2 \end{array}}$ Puntos críticos: $\binom{0}{\pm 1}$. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 6x & -2y \end{pmatrix}$.

$\mathbf{M}$ en $\binom{0}{1}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm 2 \to \binom{1}{0},\binom{0}{1}$, silla.

$\mathbf{M}$ en $\binom{0}{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm 2 \to \binom{0}{1},\binom{1}{0}$, silla.



Las órbitas se hallan fácilmente por ser exacto:

$$\begin{array}{l} H=xy^2-x^3-x+p(y) \\ H=xy^2+q(x) \end{array} \to xy^2-x^3-x=C.$$

[También es de Bernouilli (más largo):

$2yy'=-\frac{y^2}{x}+\frac{1+3x^2}{x} \xrightarrow{z=y^2} z'=-\frac{z}{x}2+\frac{1+3x^2}{x}$, $z \overset{\uparrow}{=} \frac{C}{x}+1+x^2$].

Las separatrices se obtienen para $C=0$ con lo que son $x=0$ y la hipérbola $y^2-x^2=1$.

[$\mathbf{v}(x,\pm 1)=\binom{\pm 2x}{3x}$ confirma la deformación de las separatrices].

Pendiente horizontal en la hipérbola $y^2-3x^2=1$. Vertical en la separatriz $x=0$ y en $y=0$.

[Simetría respecto a ambos ejes: H depende de y^2 y cambiando x por $-x$ sale la órbita $H=-C$].

Hallemos alguna solución. Para los sistemas exactos el primer paso hacia la solución general (tener las órbitas) siempre se puede dar (salvo primitivas no calculables). En este caso se puede también despejar alguna de las variables, pero de ahí no pasamos:

$$y=\pm\sqrt{\tfrac{C}{x}+1+x^2} \to \frac{dx}{dt}=\pm 2x\sqrt{\tfrac{C}{x}+1+x^2}\,, \text{ no integrable.}$$

Como en otras muchas ocasiones, se puede intentar hallar alguna solución asociada a órbitas sencillas. Por ejemplo busquemos la que cumple $x(0)=3/4$, $y(0)=5/4$:

$$\text{Por } \left(\tfrac{3}{4},\tfrac{5}{4}\right) \text{ pasa la órbita de } C=\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{25}{16}-\tfrac{9}{16}-1\right)=0 \to y^2-x^2=1 \to$$

$$x'=2x\sqrt{1+x^2}\,,\ x(0)=\tfrac{3}{4}\,, \text{ o mejor } y'=2y^2-2\,,\ y(0)=\tfrac{5}{4} \to 2t=\int_{5/4}^{y}\frac{ds}{s^2-1}\,.$$

Hallado la primitiva y despejando obtendríamos la $y(t)$ [y de ella y la órbita, la $x(t)$].

Pero no olvidemos que hay propiedades de las autónomas de primer orden que se ven sin necesidad de integrar: $y(t) \to 1$ si $t \to -\infty$, $y(t)$ explota para un $t_1>0$ ...

Caso particular son las **ecuaciones exactas**:

$$\boxed{x''=g(x)} \;\to\; \begin{cases} x'=v \\ v'=g(x) \end{cases} \;\to\; [\mathrm{o}]\;\; v\frac{dv}{dx}=g(x) \;\to$$

Sus órbitas vienen dadas por:

$$H(x,v)=\frac{v^2}{2}-\int g(x)\,dx=C\;,\;\; \text{o sea,}\;\; \boxed{\frac{v^2}{2}+V(x)=C\;,\;\; \text{si}\;\; V(x)=-\int g(x)\,dx}$$

(si la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, H es la energía total, $v^2/2$ es la cinética y $V(x)$ es la potencial).

A la vista de la solución está claro que las órbitas son simétricas respecto al eje x y que la órbita u órbitas asociadas a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x)\le C$ y que cortan dicho eje en los x tales que $V(x)=C$. Con esto y el teorema siguiente **podremos dibujar el mapa de fases conociendo simplemente la gráfica de la función potencial** $V(x)$.

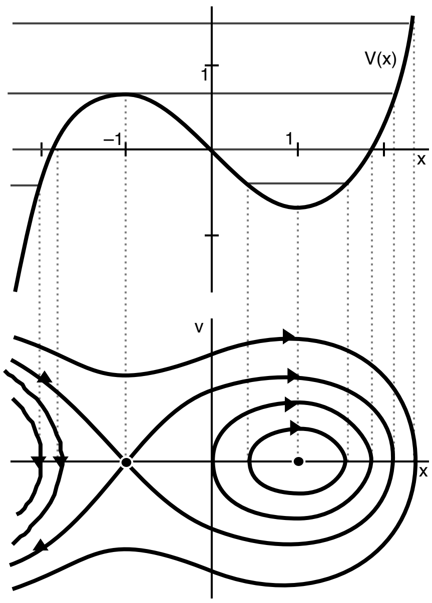
Teor 2. Si V tiene un mínimo en x_o entonces $\mathbf{x_o}=\binom{x_o}{0}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, $\mathbf{x_o}$ es un punto silla.

Si V tiene un extremo en x_o es $V'(x_o)=-g(x_o)=0$ y $\mathbf{x_o}$ es punto crítico.

La ecuación de autovalores en $\mathbf{x_o}$ es $\lambda^2+V''(x_o)=0$ y así se trata de un centro si $V''(x_o)>0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_o)<0$ (máximo de V).

[El teorema es válido también aunque $\mathbf{x_o}$ sea no elemental ($V''(x_o)=0$)].

Ej 4. $\boxed{x''=1-x^2}$ $\to V(x)=-x+\frac{1}{3}x^3$.



Usando sólo la gráfica de $V(x)$ del dibujo superior deducimos el mapa de fases del inferior: como V posee un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=1$ el mapa de fases tiene el punto silla y el centro dibujados abajo. Trazamos ahora diferentes rectas $V=C$ y las órbitas asociadas: $v^2/2+V(x)=C$. Para $C=0$, $V(x)\le 0$ si $0\le x\le\sqrt{3}$ (y la órbita, que es una curva simétrica definida en ese intervalo y que corta $v=0$ en sus extremos, se trata de una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x\le-\sqrt{3}$ (la órbita sólo corta $v=0$ en $x=-\sqrt{3}$ y por tanto es abierta). Similares son las dos órbitas dibujadas para un $C<0$. La $V=C$ que pasa por el máximo de V nos da una curva del mapa de fases que corta $v=0$ en dos puntos uno de los cuales es el punto silla (nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él y las separatrices de la izquierda). Para un C mayor se tiene la otra órbita.

La orientación es la de toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).

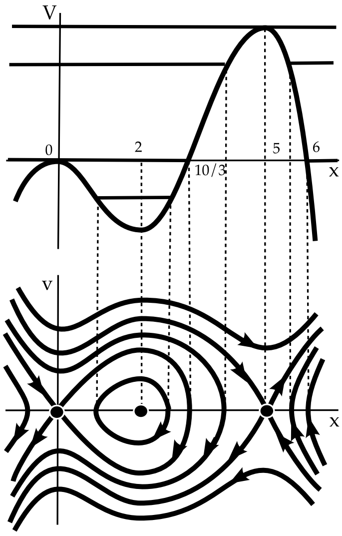
Podríamos precisar el dibujo usando las técnicas generales de las secciones anteriores (vectores propios del punto silla, puntos de pendiente horizontal (serán siempre las rectas verticales que contienen a los puntos críticos, pues se obtienen de $g(x)=0$), ...), pero las principales características de las órbitas ya se ven en el dibujo anterior.

Como para una ecuación exacta tenemos unas órbitas bastante sencillas, parece que se podría conseguir hallar su solución general:

$$v=\pm\sqrt{2}\sqrt{C-V(x)}=\frac{dx}{dt} \;\to\; \pm\int\frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{C-V(x)}}=t+K\,,$$

pero es muy raro que esta primitiva se pueda hallar. Por ejemplo, en este caso aparece la 'integral elíptica' no calculable $\pm\int\left[2x-\frac{2}{3}x^3+2C\right]^{-1/2}dx=t+K$.

Ej 5. Dibujemos las órbitas de $\boxed{x'' = x^3 - 7x^2 + 10x}$ y precisemos cuáles de sus soluciones son periódicas.



El mapa de fases se deduce de la función potencial:

$$g(x)=0 \;\to\; x=0,\, x=2,\, x=5\ .$$

$$V(x) = -\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{7x^3}{3} - 5x^2\ .$$

$$V(x)=0 \;\to\; x=0,\, x=\tfrac{10}{3},\, x=6\ .$$

$$V(0)=0\ ,\ V(2)=-\tfrac{16}{3}\ ,\ V(5)=\tfrac{125}{12}\ .$$

Las soluciones periódicas no triviales corresponden a órbitas cerradas del mapa de fases (asociadas a segmentos entre las paredes del potencial). En nuestro mapa se ve que lo son todas las órbitas que están dentro de la separatriz que entra y sale del origen.

Preocupémonos en concreto para qué valores a es periódica la solución con $x(0)=a$, $x'(0)=0$ (dónde hay que dejar en reposo la partícula para que oscile).

Se ve que esto ocurre si $a\in\left(0,\tfrac{10}{3}\right)$.

[Además, si $a=0$, $a=2$, $a=5$, la solución es periódica trivialmente, pues es constante, pero si atinamos a dejar la partícula en los inestables $x=0$ ó $x=5$, un pequeño soplo nos va a convertir el movimiento en uno no periódico].

Intentemos calcular el periodo T de una solución, por ejemplo, si $a=3$. Su órbita es:

$$C=-\tfrac{81}{4}+63-45=-\tfrac{9}{4} \;\to\; \tfrac{v^2}{2}=\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{7x^3}{3}+5x^2-\tfrac{9}{4}\,,\ \ v=\pm\tfrac{\sqrt{3x^4-28x^3+60x^2-27}}{\sqrt{6}}=\tfrac{dx}{dt}$$

Además de en 3 la órbita cerrada corta $v=0$ en otro punto que exige ordenador:

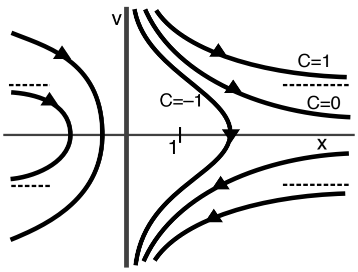
$$3x^4-28x^3+60x^2-27=(x-3)(3x^3-19x^2+3x+9)=0 \to x=3,\ x_1\approx 0.835\ \left(\text{y}\ \begin{matrix}x_2<0\\ x_3>6\end{matrix}\right).$$

Por simetría el periodo será el doble de lo que tarda en ir de x_1 a 3:

$$T=2\sqrt{6}\int_{x_1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3x^4-28x^3+60x^2-27}}\approx 2.85\ \text{(de nuevo usando el ordenador).}$$

[A diferencia de los sistemas lineales, el periodo de cada solución es distinto. Se puede probar que el T de las oscilaciones de pequeña amplitud ($a\sim 3$) se parece al de la aproximación lineal, y que $T\to\infty$ cuando $a\to 0$ (ó $10/3$)].

Ej 6. $\boxed{x'=-x^{-2}}$ Sus órbitas son $x=\frac{2}{v^2-C} \to v=\pm\sqrt{C+\frac{2}{x}}$.



Sin puntos críticos. Puede describir, para $x>0$, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas. La interpretación física del mapa es sencilla: Si $x(0)=2$ (por ejemplo), $x'(0)=v_o$ y $v_o<1$, la partícula cae al origen; $v_o=1$ es la llamada velocidad de escape: para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente (a una velocidad que tiende a cte).

Determinemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en $x=2$, en llegar hasta el origen. Su órbita [$v(x=2)=0$] es la de $C=-1$. Así pues:

$$T=\int_0^T dt=-\int_2^0\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2-x}}=\Big[\sqrt{x}\sqrt{2-x}+2\arctan\sqrt{\tfrac{2}{x}-1}\,\Big]_2^0=\pi\ .$$

4.4 ¿Centro o foco?

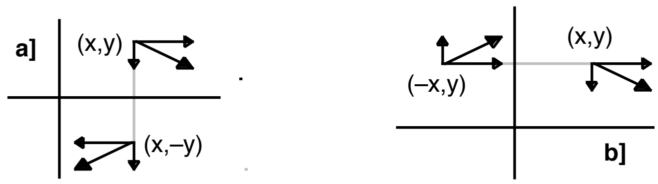
Vimos en la sección 4.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental $\mathbf{x_o}$ de un sistema no lineal

$$\boxed{[\mathrm{S}] \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}}$$

es el caso en que el lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras técnicas para atacar el problema: el estudio de las posibles simetrías y la utilización de las coordenadas polares.

Desde luego se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por $\mathbf{x_o}$ (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es o centro o foco, necesariamente será centro). El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las propias órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo $\mathbf{v}$. Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

Teor 1. Si $\mathbf{x_o}$ es punto crítico de [S], la aproximación lineal posee un centro y o bien **a]** $\mathbf{x_o}$ está sobre el eje x, $f(x,-y)=-f(x,y)$, $g(x,-y)=g(x,y)$, o bien **b]** $\mathbf{x_o}$ está sobre el eje y, $f(x,-y)=f(x,y)$, $g(x,-y)=-g(x,y)$, entonces $\mathbf{x_o}$ es un centro del sistema no lineal [S].



Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y en el **b]** que lo son respecto a $x=0$ (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ocurrir en un centro). De ello se deduce el resultado.

Observemos que en el caso particular de las ecuaciones las condiciones sobre f se satisfacen automáticamente, con lo que basta comprobar las condiciones sobre g: debe ser par en y o, si $\mathbf{x_o}$ es el origen, impar en x.

[Conocer las simetrías de un sistema no sólo es útil para distinguir entre centro y foco. Nos da bastante información sobre un mapa de fases, según vimos en algún ejemplo de secciones anteriores (como el 7 de 4.2, el 3 de 4.3 o las ecuaciones exactas)].

Ej 1. $\boxed{x'' = \operatorname{sen}(x+[x']^2)}$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = \operatorname{sen}(x+v^2) \end{cases}$.

Clasifiquemos sus puntos críticos. Estos resultan ser

$$\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con aproximación lineal } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+v^2) & 2v\cos(x+v^2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

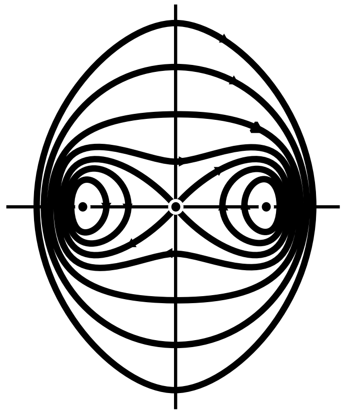
Por tanto, si k es par son puntos silla (del lineal y no lineal como siempre) y si k es impar son centros de la aproximación lineal. Como g es par en v, estos centros lo son también del sistema no lineal (y las órbitas son simétricas respecto al eje x).

Ej 2. $\boxed{x''=x-x^3-x(x')^2}$ $\to \begin{cases} x'=v \\ v'=x-x^3-xv^2 \end{cases} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ silla ($\lambda=\pm 1$), $\begin{pmatrix}\pm 1\\0\end{pmatrix}$ centros del lineal.

Los centros se conservan, pues también se cumple el apartado **a]** del teorema 1. Pero aquí no era necesario, pues podemos hallar sus órbitas explícitamente:

$$\frac{dv}{dx}=-xv+\frac{x-x^3}{v} \text{ (Bernouilli)} \to v^2 = Ce^{-x^2}+2-x^2$$

y comprobar su simetría respecto de ambos ejes.



Con las órbitas podemos hacer un preciso mapa de fases. La separatriz ($C=-2$) corta $y=0$, además de en $x=0$, en los x tales que:

$$2e^{-x^2} = 2-x^2 \quad (x\approx\pm 1.26 \text{ con ordenador})$$

y para $C>-2$ todas las órbitas son cerradas (si $C=0$ circular). El campo es horizontal sobre $x^2+v^2=1$ y sobre $x=0$ (y vertical como en toda ecuación sobre $y=0$).

Así se genera el dibujo de la portada de los apuntes.

Ej 3. $\boxed{\begin{cases} x'=x(1-y) \\ y'=y(x-1) \end{cases}}$ [Este sistema es, para unos parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies animales en relación predador-presa].

Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ punto silla y $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ centro de la aproximación lineal.

¿Seguirá el centro siendo un centro del sistema no lineal? Podríamos trasladarlo al origen haciendo $u=x-1$, $v=y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero el sistema en uv que resulta no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones. Sin embargo, podemos calcular las órbitas (ecuación separable) y obtener:

$$\ln y-y+\ln x-x=C.$$

Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y, las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro se mantiene en el no lineal.

[En el teorema 1 nos hemos limitado a localizar las posibles simetrías respecto a los ejes, pero se podrían dar condiciones sobre $\mathbf{v}$ que asegurasen la simetría respecto a $y=x$ u otras rectas].

En algunas ocasiones podremos precisar que el centro se transforma en un foco estable o inestable analizando el sistema escrito en **coordenadas polares** (aunque en la mayoría de los casos aparezca un sistema más complicado que el inicial).

Derivando las relaciones $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$ se obtiene

$$\begin{cases} r'\cos\theta-\theta' r\operatorname{sen}\theta=f(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta) \\ r'\operatorname{sen}\theta+\theta' r\cos\theta=g(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta) \end{cases} \to$$

$$\boxed{\begin{cases} r'=\cos\theta\, f(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)+\operatorname{sen}\theta\, g(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta) \\ \theta'=\frac{1}{r}\left[\cos\theta\, g(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)-\operatorname{sen}\theta\, f(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)\right] \end{cases}}$$

En vez de seguir con resultados generales pasamos a analizar ejemplos concretos:

Ej 4. Precisemos la estabilidad de las soluciones constantes de $\boxed{\begin{cases} x'=x^3-y \\ y'=x+y^3 \end{cases}}$.

$y=x^3 \to x(1+x^8)=0 \to x=0 \to y=0$. El único punto crítico es $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ con $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Hay, pues, un centro en la aproximación lineal, y todavía no conocemos su estabilidad. Como no es exacto ni presenta simetrías (a pesar de ello, aún podría ser un centro) pasamos a polares y obtenemos:

$$\begin{cases} r'=r^3(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta) \\ \theta'=1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta) \end{cases}. \quad \text{Como} \quad \cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta>0 \ \forall\theta,$$

r crece con el tiempo y, por tanto, el origen (la solución trivial) es (foco) **inestable**.

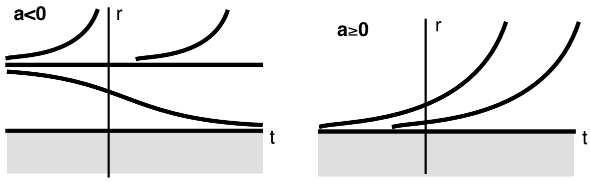
Ej 5. $\boxed{\begin{cases} x' = ax - 2y + x^3 \\ y' = 2x + ay + 2x^2y + y^3 \end{cases}}$ Clasifiquemos el origen para todo valor de a.

La matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$, con lo que:

si $a<0$ es foco estable, si $a>0$ es foco inestable y si $a=0$ es centro del lineal.

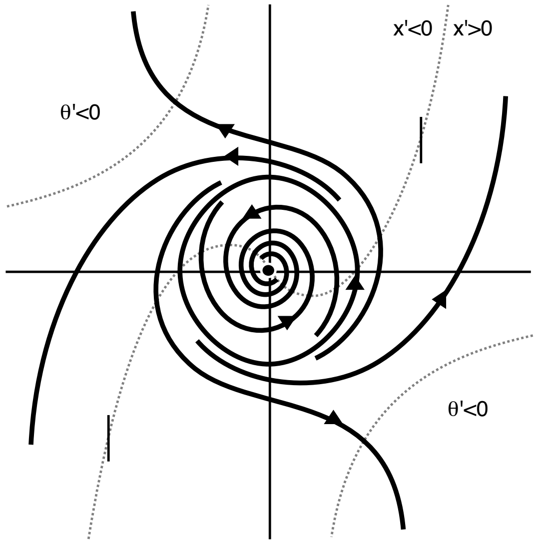
Como no es exacto ni simétrico hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar + r^3 \\ \theta' = 2 + r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



Por suerte hemos obtenido una sencilla ecuación independiente de θ para la r fácil de dibujar. Como crece la distancia al origen con t podemos asegurar para $a=0$ que el origen, que no sabíamos si era centro o foco, es un foco inestable.

Utilicemos la expresión en polares para dibujar el mapa de fases para un valor de a concreto: $a=-1$. La ecuación autónoma $r'=-r+r^3$ tiene entonces la única solución de equilibrio $r=1$ en $r>0$ (además tiene la $r=0$ que nos da otra vez el punto crítico y la $r=-1$ carece de sentido en coordenadas polares).



Para $r=1$ se tiene $\theta'=2+\operatorname{sen}2\theta/2>0$. Hay por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r=1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [a una órbita cerrada aislada como esta se le llama **ciclo límite**]. Como se ve en la ecuación autónoma todas las demás órbitas tienden hacia ella cuando $t \to \infty$.

Podemos también asegurar que no hay más puntos críticos que el origen (es difícil verlo con la expresión cartesiana) pues no tiene otras soluciones $r'=\theta'=0$ (para una solución constante tanto la r como la θ deben permanecer constantes).

Dibujando además la curva de puntos con $x'=0$ y $\theta'=0$ ($y=(x^3-x)/2$ y $xy=-2$, respectivamente) se puede ya dar el mapa de fases.

Es fácil precisar qué soluciones del sistema están definidas para todo t: las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas; llegan a infinito en tiempo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se deduce de la ecuación para r'.

Problemas 1.

1.1. Integrar las ecuaciones siguientes:

a) $y' = y - (2+2\cos t)y^2$; b) $y' = \frac{2ty-y^2}{t^2}$; c) $y' = 1 - \frac{2}{t+y}$; d) $y' = \frac{t+2y}{t}$;

e) $(5x+2y-3)y' = 9-12x-5y$; f) $y' = x + \frac{x}{y}$; g) $y' = y + \operatorname{sen} x$; h) $y' = \frac{y}{x+y^3}$;

i) $y' = y^2 - t(t-2)$; j) $y' = y\frac{y+2t-1}{t+y}$; k) $y' = \frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}$; l) $(y')^2 = 9y^4$.

1.2. Integrar mediante cambios de variables: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+m}{cx+dy+n}\right)$. Resolver en particular $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+2}{y-2x+6}$.

1.3. Sea $y' = -3y + 3ty^{2/3}$. Hallar su solución general y una o dos soluciones (si hay) con: i) $y(1)=0$ ii) $y(0)=1$.

1.4. Imponer un dato inicial para el que $y' = \frac{y}{t} + \operatorname{sen} t$ tenga: i) solución única, ii) infinitas soluciones.

1.5. Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2+2y^2}$. Probar que tiene un factor integrante que sólo depende de y. Hallar todas las soluciones que sean rectas. Hallar la o las soluciones (si hay) que satisfacen i) $y(1) = 0$, ii) $y(1) = 1$.

1.6. Dibujar aproximadamente las soluciones de $y' = \sqrt{y/x}$ y determinar cuántas de ellas satisfacen cada uno de los siguientes datos iniciales: i) $y(-1)=-1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(1)=1$.

1.7. Sea $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$. Resolverla como homogénea, como exacta y como Bernouilli. Precisar dónde crecen y decrecen sus soluciones y si alguna recta es solución. Hallar la expresión explícita de la o las soluciones (si es que existen) que satisfacen: i) $y(1)=-3$, ii) $y(1)=0$.

1.8. Sea $y' = 1 + \frac{2}{y-x}$. Hallar su solución general y la o las soluciones (si existen) que satisfagan $y(1)=-1$. Dibujar aproximadamente sus curvas integrales.

1.9. Resolver $y' = \frac{3(y-y^{2/3})}{x}$. Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(-1)=1$, ii) $y(0)=1$, iii) $y(1)=0$.

1.10. Sea $y' = -[y+t]^2$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Resolverla como Riccati y por otro camino diferente. Hallar la solución (si existe) con i) $y(0)=1$, ii) $y(0)=-1$.

1.11. Sea $y' = |t| - y$. Precisar cuántas soluciones cumplen $y(0) = 0$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Escribir la solución con $y(0)=1$ para todos los valores de t para los que esté definida.

1.12. Sea $y' = \frac{y^2}{t}$. Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. Hallar (si existen) todas las soluciones que cumplen: i) $y(-1)=1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(0)=1$.

1.13. Estudiar existencia y unicidad, resolver si se puede y dibujar isoclinas y curvas integrales:

a) $y' = \cos(x-y)$ b) $y' = x^2+y^2$ c) $y' = x^2-y^2$ d) $y' = y^{2/3} - y$ e) $y' = x - \frac{1}{y}$

f) $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ g) $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ h) $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$ i) $y' = 1 + y^{2/3}$ j) $y' = x - |y|$

1.14. Sea $y' = e^t - y$. Hallar la solución con $y(0)=0$ y precisar su estabilidad. Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y aproximadamente las soluciones.

1.15. Sea $y' = y - y^3$. Hallar su solución general. Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-1$. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Ver si es estable la que cumple $y(0)=1$.

1.16. Sea $y' = y^2 - 2t^{-2}$. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y hallar las que pasen por el origen. Probar que hay soluciones de la forma $y = \frac{A}{t}$. Determinar en qué intervalo está definida la solución con $y(1) = 0$ y estudiar su estabilidad.

1.17. Dibujar aproximadamente las soluciones y precisar la estabilidad de la que cumple $y(1) = 1$:

a) $y' = 1 - ty$; b) $y' = \frac{y}{t^2}$; c) $y' = y^2 - 2y^3$; d) $y' = \frac{y^2-y}{t}$; e) $y' = e^{t-y}$

1.18. Sea la familia de circunferencias $x^2+y^2 = 2Cx$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales. Hallar las trayectorias ortogonales a ellas (las curvas que las cortan perpendicularmente). Resolver el mismo problema para las parábolas $y^2+2Cx = C^2$.

1.19. Sea $y' = \frac{t-2y}{t}$. Resolverla, estudiar existencia y unicidad y dibujar sus curvas integrales. Precisar la estabilidad de la solución con i) $y(1)=0$, ii) $y(-3)=-1$. Hallar una recta que corte perpendicularmente a las soluciones de la ecuación.

Problemas 2.

2.1. Resolver los problemas de valores iniciales:

a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.2. Hallar la solución de:

a) $\begin{cases} x' = x-2y-t \\ y' = 2x-3y-t \\ x(0)=y(0)=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = y-2 \\ y' = 2x-y \\ x(0)=0, y(0)=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 3x+2y \\ y' = -6x-4y+t\cos t \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = 2x-y \\ y' = x+|2-t| \\ x(0)=0, y(0)=-1 \end{cases}$

2.3. Hallar la solución general de las ecuaciones:

a) $x''-x=e^{2t}$, b) $x''+x=t\,e^t\cos t$, c) $x'''+2x''+5x'=5t$, d) $x^{IV}+4x=t\,e^t\cos t$,
e) $x''+x=\cos^3 t$, f) $t^2x''-3tx'+3x=9\log t$, g) $(t+1)x''-x'=(t+1)^2$, h) $t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=t^3$.

2.4. Resolver $tx''+2x'=t$: i) como ecuación de Euler, ii) haciendo $x'=y$, iii) haciendo $x=\frac{y}{t}$. Discutir cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$.

2.5. Resolver:

a) $\begin{cases} x''+x=2\cos^{-3}t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x''+x' = \begin{cases} t+1, & t\le 1 \\ 3-t, & t\ge 1 \end{cases} \\ x(0)=-1, x'(0)=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'''+5x''+8x'+4x=-8e^{-2t} \\ x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=9 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x''+2tx'=2t \\ x(1)=x'(1)=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} t^2x''+4tx'+2x=e^t \\ x(1)=x'(1)=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} t^3x'''+t^2x''-2tx'+2x=t^3 \\ x(1)=x'(1)=x''(1)=1 \end{cases}$.

2.6. Hallar la solución general de $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, si $\mathbf{A}$ es: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. Hallar la solución que se indica de los siguientes sistemas y precisar su estabilidad:

a) $\begin{cases} x'=-2z \\ y'=x \\ z'=x-2z \\ x(0)=z(0)=1, y(0)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x-4y+2z \\ y'=x-3y+z \\ z'=x-2y+1 \\ x(0)=2, y(0)=z(0)=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x'=y \\ y'=4x+z \\ z'=-z+4e^{-2t} \\ x(0)=1, y(0)=-1, z(0)=-4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x'=y-2z \\ y'=-z \\ z'=4x-5z \\ x(0)=y(0)=0, z(0)=1 \end{cases}$

2.8. Hallar **una** solución de $x'''+x''+2x'+8x=e^{at}$ para i) $a=1$, ii) $a=-2$, y precisar la estabilidad de la solución hallada en cada caso.

2.9. Sea $x'''+5x''+4x'+cx=t$. i) Hallar una solución particular para todo valor de c . ii) Hallar la solución general para $c=-10$. iii) Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de c .

2.10. Sea $x^{IV}+ax''+4x=e^t$. i) Hallar una solución particular para todo a y la solución general si $a=-5$. ii) Dar un valor de a , si existe, para el que sea: a) inestable, b) asintóticamente estable.

2.11. Sea $x^{IV}+2x'''+6x''+ax'+5x=4\cos t$, $a\in\mathbf{R}$. Discutir la estabilidad. Hallar una solución para cada $a\neq 2$. Si $a=10$, hallar la solución general. Si $a=-14$, escribir dos soluciones distintas. Si $a=6$, describir las soluciones para t grande. Si $a=2$, precisar el número de soluciones periódicas.

2.12. Sea $x^{(n)}+6x'+20x=\mathrm{e}^t$. i) Resolverla si $n=3$. ii) Estudiar su estabilidad para $n=2,3,4$.

2.13. Estudiar la estabilidad de $x^{(n)}+x=\cos t$ según los valores de $n\in\mathbf{N}$. Para $n=2006$, precisar si la homogénea y la no homogénea poseen alguna solución periódica.

2.14. Sea $\begin{cases} x'=2-y \\ y'=-2y+cz \\ z'=2x-y \end{cases}$ a) Discutir la estabilidad del sistema según los valores de la constante c .
b) Para $c=-1$ hallar la solución con $x(0)=y(0)=0, z(0)=-4$.

2.15. Sea $\begin{cases} x'=z-t^2 \\ y'=-2ay-w \\ z'=-x+ay \\ w'=y+az \end{cases}$ i) Si $a=0$, hallar la matriz fundamental $\mathbf{W_c}(t)$ con $\mathbf{W_c}(0)=\mathbf{I}$ y la solución del sistema con $x(0)=1$, $z(0)=-2$, $y(0)=w(0)=0$.
ii) Hallar **una** solución del sistema homogéneo para $a=-2$.
ii) Estudiar para qué a el sistema es AE. ¿Es estable si $a=0$?

2.16. Hallar $K(t)$ de forma que la solución de $\begin{cases} \ddot{x}+2\dot{x}+2x=f(t) \\ x(0)=\dot{x}(0)=0 \end{cases}$ se escriba $x(t)=\int_0^t K(t-s)f(s)ds$.

2.17. Hallar y dibujar las soluciones con $x(0)=\dot{x}(0)=0$ de: i) $\ddot{x}+x=|\operatorname{sen} t|$, ii) $\ddot{x}+4x=|\operatorname{sen} t|$. Estudiar si tienen o no soluciones periódicas.

Problemas 3.

3.1. Hallar la solución en forma de serie en torno a $t=0$:

a) $x''+tx=0$, b) $(1+t^2)x''-2x=0$, c) $\cos t\,x''+(2-\operatorname{sen} t)x'=0$.

3.2. Sea $x''+[2-2t]x'+[1-2t]x=0$. Hallar el desarrollo hasta t^4 de la solución con $x(0)=0$, $x'(0)=1$. Sabiendo que $x=e^{-t}$ es otra solución, hallar esta solución en términos de una integral y comparar.

3.3. Hallar el desarrollo en torno a $t=0$ de la solucion de $(1-t)(1-2t)x''+2tx'-2x=0$ con $x(0)=x'(0)=1$. ¿Dónde converge la serie solución? Hallar las raíces del polinomio indicial para cada punto singular regular. Estudiar cuántas soluciones satisfacen $x(1)=0, x'(1)=1$.

3.4. Sea $2\sqrt{t}\,y''-y'=0$. Precisar si $t=0$ es punto singular regular de la ecuación. Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en serie en torno a $t=1$ de la solución que cumple $x(1)=x'(1)=1$.

3.5. Sea $4t^2x''-3x=t^2$. a) Calcular el desarrollo hasta orden 4 en torno a $t=1$ de la solución de la homogénea que cumple $x(1)=0, x'(1)=1$. b) Hallar la solución general de la no homogénea.

3.6. Sea $3(1+t^2)x''+2tx'=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrorro de una solución que se anule en $t=0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

3.7. Sea $2t^2x''+t(t+1)x'-(2t+1)x=0$. Hallar una solución no nula de la ecuación que sea analítica en $t=0$. ¿Están acotadas todas las soluciones de dicha ecuación en un entorno del origen?

3.8. Sea $3tx''+(2-6t)x'+2x=0$. Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $t=0$.

3.9. Hallar, para $t>0$, el desarrollo de una solución de $4tx''+2x'+x=0$ que no se anule en $t=0$ y la solución general de la ecuación en términos de funciones elementales. Hacer un cambio de variable independiente de la forma $s=t^r$ y comprobar el resultado.

3.10. Sea $ty''+y=0$. Hallar el término general del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $t=0$. Calcular el valor de la constante del término que contiene el $\ln t$ en la segunda solución.

3.11. Hallar la solución general de $t^2x''+t(4-t)x'+2(1-t)x=0$, desarrollando en torno a $t=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.

3.12. Sea $t(1+t)x''+(2+3t)x'+x=0$. Hallar el desarrollo de una solución no nula acotada en $t=0$ y probar que hay soluciones no analíticas en $t=-1$. Comprobarlo utilizando que $x=\frac{1}{t}$ es solución.

3.13. Calcular las soluciones en el punto $t=0$ de la ecuación $(1-t^2)x''-tx'+p^2x=0$ (Chebyshev), y determinar para qué valores de p las soluciones son polinomios.

3.14. Sea $tx''+(1-t^2)x'+ptx=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $t=0$, todos los valores de p para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.

3.15. Resolver $t^2y''+ty'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ i) mediante un cambio de la forma $y=t^ru$, ii) por series.

3.16. Sea $t^2(1+t)x''+t(3+2t)x'+x=0$. Hallar, trabajando por series en $t=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln t$. Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

3.17. Sea $[t^4+t^2]x''+[5t^3+t]x'+[3t^2-1]x=0$. Escribir la ecuación para su punto del infinito. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $t\to 0$, ii) $t\to\infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $t\to 0$ como cuando $t\to\infty$?

3.18. Sea $t^4x''+2t^3x'-x=1$. Determinar si $t=0$ y $t=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $x(1)=0, x'(1)=1$.

3.19. Hallar una solución linealmente independiente de P_1 para la ecuación de Legendre con $p=1$, sin recurrir a series. Comparar su desarrollo con el de la teoría. Hacer $t=\frac{1}{s}$, resolver y comparar.

3.20. Sea $(1-t^2)x''-2tx'+x=0$ (Legendre con $p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=1$. Ver si hay soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando i) $t\to -1$, ii) $t\to\infty$.

3.21. Sea $t(t-1)x''+x'-px=0$. Deteminar para qué valores de p posee solución polinómica. Porbar que si $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando $t\to\infty$.

Problemas 4.

4.1. Dibujar el mapa de fases de los sistemas lineales: a) $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=x-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y-x \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x+1 \end{cases}$.

4.2. Sea (S) $\begin{cases} x'=4x+2y \\ y'=x+5y \end{cases}$. Dibujar el mapa de fases de (S). Hallar la solución de (S) que satisface $x(0)=2,\ y(0)=-1$. Hallar la expresión de las órbitas de (S).

4.3. Sea [S] $\begin{cases} x'=x+2y-3 \\ y'=4x-y-3 \end{cases}$. Hallar sus órbitas y dibujar su mapa de fases. ¿Para qué valores de a la $y(t)$ de la solución de [S] con $x(7)=0$, $y(7)=a$ tiende a $-\infty$ si $t\to\infty$?

4.4. Resolver [e] $(1+x^3y)+(x^4+x^3y)\frac{dy}{dx}=0$. Precisar cuántas soluciones de [e] cumplen $y(1)=1$ y dar su expresión explícita. Dibujar el mapa de fases de $x'=x^4+x^3y$, $y'=-1-x^3y$.

4.5. Sea $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2+x^4 \end{cases}$. Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. [Ayuda: $y=\pm x^2$ son soluciones de la ecuación de las órbitas].

4.6. Dibujar el mapa de fases de los sistemas:

a) $\begin{cases} x'=y(x+1) \\ y'=x(y^3+1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=4x-2y \\ y'=2x-xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} x'=x-x^2y \\ y'=y-x^3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x'=ye^x \\ y'=e^x-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'=x^2y \\ y'=x^4-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x-y-3x^2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x'=x^2-2xy \\ y'=y^2-2xy \end{cases}$ h) $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=y-x \end{cases}$

4.7. Dibujar el mapa de fases de las ecuaciones:

a) $x''=-4x'-4x$; b) $x''=x(1-x-x')$; c) $x''=x-x^3$; d) $x''=(1-x^2)x'-x$.

4.8. Dibujar el mapa de fases y estudiar qué soluciones están definidas para todo $t\in\mathbf{R}$:

a) $\begin{cases} x'=1-x+3y \\ y'=x+y-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=\operatorname{sen} y \\ y'=\operatorname{sen} x \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=1-x^2+y^2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x'=x+2xy \\ y'=y^2-1 \end{cases}$.

4.9. Clasificar los puntos críticos de $x''=\operatorname{sen}(ax+x')$, $a>0$, y dibujar el mapa de fases para $a=2$.

4.10. a) Sea $x''=ax-(x')^2$. Discutir la estabilidad de su solución $x\equiv 0$ [para $a=0$ dibujar el mapa de fases]. b) Hallar para $a=0$ la solución de la ecuación que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

4.11. Clasificar, en función de los valores de $k\geq 0$, los puntos críticos de $\ddot{x}=1-x^2-k\dot{x}$. Dibujar el mapa de fases para $k=0$, $k=1$ y $k=3$ y dar una interpretación física de las órbitas.

4.12. Una partícula se mueve por el eje x según $\ddot{x}=-x(x^2+9)^{-2}$. Dibujar e interpretar el mapa de fases. Si la partícula pasa por el origen con velocidad $v=\frac{1}{3}$, ¿qué velocidad tiene cuando pasa por $x=4$? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a $x=4$?

4.13. Sea [S] $\begin{cases} x'=x+x^2 \\ y'=2x+y \end{cases}$. a) Precisar la estabilidad de la solución de $x'=x+x^2$ con $x(0)=-2$. b) Hallar órbitas y dibujar el mapa de fases de [S]. c) Hallar la solución de [S] con $x(0)=y(0)=-1$. d) Hallar $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$, si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es la solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.14. Dibujar el mapa de fases de $x''=(x')^2-x$ y hallar la solución que cumple $x(2)=\frac{1}{2}$, $x'(2)=1$.

4.15. Dibujar el mapa de fases de (E) $x''=2x^3-2x$. ¿Para qué valores de b es periódica la solución $x(t)$ de (E) que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=b$? Hallar la solución $x(t)$ de (E) con $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

4.16. a) ¿Para qué a y b podemos asegurar que $x''+x+ax^2+bxx'=0$ tiene un centro en el origen? b) Si $a=b=-1$, dibujar el mapa de fases. ¿Qué sugiere el dibujo sobre la estabilidad de $x=0$?

4.17. Dibujar el mapa de fases tras escribir el sistema en coordenadas polares:

a) $\begin{cases} x'=y+x(1-x^2-y^2) \\ y'=-x+y(1-x^2-y^2) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=-2x \\ y'=x^2+y^2-2y \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=x^2-xy-2y \\ y'=xy-y^2+2x \end{cases}$.

4.18. Precisar la estabilidad de las soluciones constantes de:

a) $\begin{cases} x'=x \\ y'=x^2-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x'=y+x^3+xy^2 \\ y'=-x+x^2y+y^3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x'=x^2-y \\ y'=xe^y \end{cases}$.

4.19. Sea $\begin{cases} x'=y-xy \\ y'=x^2-x \end{cases}$. Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de sus puntos críticos. Precisar las órbitas asociadas a soluciones periódicas y calcular su periodo.

Problemas adicionales 1

1. Hallar las soluciones particulares que cumplen los datos que se indican:

$y'=\frac{3y^2-t^2}{2ty}$, $y(1)=2$ $\qquad$ $y'=1+\cos^2(y-t)$, $y(0)=\pi$ $\qquad$ $e^y-2t+te^y y'=0$, $y(1)=0$

$y'=\frac{y\,\mathrm{sen}\,t}{\ln y}$, $y(0)=e$ $\qquad$ $t^2+y^2+t+tyy'=0$, $y(1)=1$ $\qquad$ $y'=\cos t-y-\frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos^2 t}y^2$, $y(0)=0$

2. Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de t y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de dicha ecuación.

3. Comprobar que $y'=t^{n-1}f(y+at^n)$ se convierte en una ecuación de variables separadas haciendo $z=y+at^n$ y utilizarlo para resolver $y'=2t(y+t^2)^2$. Resolverla después considerándola como una ecuación de Riccati.

4. Resolver $3y^2-t+2y(y^2-3t)\frac{dy}{dt}=0$, sabiendo que tiene factor integrante de la forma $g(t+y^2)$.

5. Sea $y'=\sqrt{y+\frac{t^2}{2}}$. Dibujar isoclinas, inflexión y soluciones. Resolverla haciendo $u=\sqrt{y+\frac{t^2}{2}}$.

6. Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las curvas integrales de:

$y'=1-y^2$ $\qquad$ $y'=t^2+y$ $\qquad$ $y'=1-\frac{t}{4y}$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{2}[y-t]^3$ $\qquad$ $y'=\frac{3ty+2y^2}{t^2+ty}$ $\qquad$ $y'=\frac{t^2-y}{t+y^2}$

7. Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales y dibujar aproximadamente:

$y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\qquad$ $y'=|y-t|$ $\qquad$ $y'=1-\frac{1}{y^2}$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\qquad$ $y'=\frac{2}{t}\sqrt{y}$ $\qquad$ $y'=y\ln|t|$

8. Estudiar existencia, unicidad, prolongabilidad y hacer el dibujo aproximado de las soluciones de

$y'=1-\frac{y}{t}$ $\qquad$ $y'=\frac{y}{y-t}$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{t^2+y^2}$ $\qquad$ $y'=y^4+y$ $\qquad$ $y'=-ye^{-y^2}$ $\qquad$ $y'=\frac{y}{\mathrm{sen}\,t}$ $\qquad$ $y'=e^{-y/t}$

9. Sea $y'=\frac{2t(1-y)}{y+t^2}$. Hallar la solución (simplificada al máximo) con i) $y(0)=1$, ii) $y(0)=-1$. Estudiar si existe solución satisfaciendo $y(1)=-1$.

10. Sea $y'=(y-t+1)^2$. Hallar su solución general. Dibujar aproximadamente sus soluciones. Precisar cuántas soluciones satisfacen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-2$.

11. Sea $y'=\begin{cases} t & \text{si } y\geq t \\ y & \text{si } y\leq t\end{cases}$. Estudiar existencia y unicidad de soluciones. Dibujar estas soluciones. Hallar para todo t la que satisface $y(-3)=3$.

12. Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{ay^2-x^2}$. Para todo a, resolverla y precisar el número de curvas integrales que pasan por cada punto del plano. Dibujar sus soluciones para $a=3$.

13. Resolver la ecuación $ty'=(1-t)y+t^2$. Discutir cuántas soluciones cumplen $y(a)=0$, $\forall a\in\mathbf{R}$. Precisar la estabilidad de la solución con $y(1)=1$. Localizar los puntos del plano en los que $y''=0$.

14. Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=a$, según los valores de a:

$y'=\mathrm{sen}\,y$ $\qquad$ $y'=2t^{-3}y+\cos^3 t$ $\qquad$ $y'=1-e^y$ $\qquad$ $y'=-\frac{y}{2t}+t^3$ $\qquad$ $y'=y^2-y\cos t$

15. Resolver $y'=\frac{t^2+y^2}{2ty}$. Dibujar isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano. Estudiar la estabilidad de la solución que cumple $y(1)=1$.

16. Estudiar la estabilidad de la solución de $y'=1-y-y^3$ con $y(0)=0$.

17. Dibujar aproximadamente las soluciones de las siguientes ecuaciones y estudiar la estabilidad de la solución que satisface la condición inicial que se indica :

$y'=-\frac{2y}{t}+4t$, $y(1)=1$ $\qquad$ $y'=y^3+2y^2$, $y(0)=-2$ $\qquad$ $y'=\frac{y^2}{t^2}-2$, $y(1)=1$ $\qquad$ $y'=-\frac{t}{y}-ty$, $y(1)=1$ $\qquad$ $y'=-\frac{y}{2t}+y^3$, $y(1)=0$

18. Sea la ecuación $y'=\frac{ay}{t}+\frac{y^3}{t^3}$. a) Estudiar existencia y unicidad.
b) Resolver por dos métodos diferentes para todo a.
c) Dibujar el campo de direcciones y las soluciones para $a=-1$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$ y $a=1$.
d) Estudiar la estabilidad de todas las rectas solución que tenga para todo a.

19. Comprobar que las soluciones $y(t,a)$ de i) $y'=-y+e^{at}$, ii) $y'=\cos^2 ay$ que satisfacen $y(0)=0$ son funciones continuas del parámetro a.

20. Calcular el valor aproximado en $t=0.2$ de la solución de i) $y'=y^2$, $y(0)=1$; ii) $y'=t^2+y^2$, $y(0)=0$ a partir de la segunda aproximación de Picard. Comparar con Euler y Runge-Kutta para $h=0.1$.

21. Integrar numéricamente entre 0 y 1 los problemas $y'=t+y$, $y(0)=2$; $y'=t-y$, $y(0)=2$, mediante los métodos de Euler, Euler modificado y Runge-Kutta, para $h=0.2$, $h=0.1$ y $h=0.05$. Resolver las ecuaciones y comparar con los valores exactos.

22. Sea $y'=y-\frac{1}{t}$. Estudiar existencia y unicidad y dibujar las curvas integrales. Sea y_a la solución con $y(1)=a$. ¿Para algún a está y_a acotada $\forall t\geq 1$? Aproximar este a con métodos numéricos.

23. Sea $y'=2ty+t^2y^2$. Resolverla y dibujar aproximadamente sus soluciones. Aproximar las que cumplen $y(0)=1$, $y(0)=-1$, $y(10)=-0.2$ con diferentes métodos numéricos y diferentes pasos.

24. Un cuerpo de masa m es lanzado con velocidad inicial v_o a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre mg (suponemos g constante) y otra fuerza $-kv$ debida a la resistencia del aire. Hallar la velocidad límite del cuerpo cuando $t\to\infty$. Modificar el ejemplo anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a v^2.

25. Supongamos que tenemos un gramo de un extraño material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

26. Un cuerpo a 80^o de temperatura se coloca en el instante $t=0$ en un medio cuya temperatura se mantiene a 20^o y al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta los 50^o. Suponiendo que su enfriamiento sigue la ley de Newton (su temperatura varía proporcionalmente a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio) determinar: a) la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos; b) el instante en que dicha temperatura será de 30^o.

27. Un cuerpo se coloca en un medio con temperatura $T(t)=\operatorname{sen} t$ en el instante t. Comprobar que, si sigue la ley de Newton, la temperatura del cuerpo tiende a oscilar periódicamente.

28. Supongamos que la ecuación $y'=y[1-h(t)y]$, $h(t)>0$, describe la evolución de una población animal con tope logístico variable. Estudiar el comportamiento de las soluciones para grandes valores de t si: i] $h(t)\to\infty$ cuando $t\to\infty$, ii] $h(t)\to$ cte cuando $t\to\infty$. Interpretar el resultado.

29. $y'=y(1-e^{\operatorname{sen} t}y)$ puede describir una población de truchas con tope periódico. Estudiar dónde crecen y decrecen sus soluciones y dibujarlas a grandes rasgos. Encontrar, utilizando métodos numéricos, el valor del dato inicial $y(0)$ para el que se tiene una solución periódica ($y(0=y(2\pi)$). Si suponemos que hay un pescador que pesca truchas a velocidad constante $y'=y(1-e^{\operatorname{sen} t}y)-a$, estudiar utilizando Runge-Kutta con $h=0.01$: i) si $a=0.1$, para qué valores iniciales las truchas se extinguen; ii) si $y(0)=3$, para qué valores de a se extinguen.

Problemas adicionales 2

1. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$xx'''-x'x''-2x^2=\tan t$ $\quad (1-t^2)x''-2tx'+x=0$ $\quad \begin{array}{l} x'=tx+\ln t \\ y'=x\sqrt{t}-y \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'=x+\operatorname{sen} y \\ y'=tx^{2/3}-y \end{array}$

2. i) Utilizando matrices y ii) convirtiendo los sistemas en ecuaciones de segundo orden, resolver:

$\begin{array}{l} x'=x+2y \\ y'=-2x+y \\ x(0)=y(0)=1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'=2x-3y \\ y'=x-2y-2e^{-t} \\ x(0)=0, y(0)=1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'=3x+y+te^{2t} \\ y'=-x+y \\ x(0)=1, y(0)=-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'=x+2y \\ y'=4x-y+9t \\ x(0)=3, y(0)=2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'=2x+y \\ y'=3x+4e^{3t} \\ x(0)=y(0)=0 \end{array}$

3. Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad y hallar la solución general de:

$x''+x=t\operatorname{sen}2t-1$ $\quad x''+2x'+2x=te^{-t}$ $\quad x''-x=2(1+e^t)^{-1}$ $\quad x^V+2x'''+x'=t$

$x^{iv}+x=\operatorname{sen}t$ $\quad t^2x''-2x=t^2$ $\quad t^2x''+5tx'+4x=t^{-2}$ $\quad (1+t^2)x''+2tx'=2t^{-3}$

4. Hallar la solución general sabiendo que la x_1 que se indica es solución de la homogénea:

$\begin{array}{l} tx''-(t+1)x'+x=t^2e^t \\ x_1=e^t \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} (t^2-1)x''-2x=0 \\ x_1=t^2-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} t^2x''-2tx'+(2-t^2)x=2t^3\operatorname{ch}t \\ x_1=t\operatorname{sh}t \end{array}$

5. Hallar para todo a la solución x_a de $tx''+ax'=1$ con $x_a(1)=x_a'(1)=0$.
¿Es x_a función continua de a?

6. Hallar la matriz fundamental canónica en $t=0$ del sistema asociado a las siguientes ecuaciones:

$x''+2x'+x=0$ $\quad x'''+x''+x'+x=0$ $\quad 2(t+1)^2x''+3(t+1)x'-x=0$ $\quad (1-t)x''+tx'-x=0$

7. Sean x_1, x_2 soluciones de [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ y llamemos $w(t)$ a su wronskiano $|\mathbf{W}|(t)$.
Comprobar que $(\frac{x_2}{x_1})'=\frac{w(t)}{x_1^2}$. Hallar $w'(t)$ y utilizando [e] concluir que $w(t)=w(0)e^{-\int a(s)ds}$.
Deducir la fórmula para x_2 en función de x_1 hallada en teoría mediante reducción de orden.

8. Resolver $t^2(t+3)x'''-3t(t+2)x''+6(t+1)x'-6x=0$ sabiendo que $x_1=t^2$ es solución de la ecuación.

9. Sea $t^3x'''-3t^2x''+6tx'-6x=f(t)$. Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente y utilizarla pra encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

10. Calcular la solución particular que se indica y precisar si es estable o no:

$\begin{array}{l} x''-2x'+2x=e^t\cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x'''+x'-10x=36te^{-t} \\ x(0)=0, x'(0)=-3, x''(0)=2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x^{iv}-16x=8t^2 \\ x(0)=-1, x'(0)=-2, x''(0)=3, x'''(0)=-8 \end{array}$

11. Resolver $\left\{\begin{array}{l} x'=x-y \\ y'=2x-y+t \end{array}\right.$ con $x(0)=0$, $y(0)=1$. ¿Es estable esta solución?

12. Determinar si son estables las soluciones de la ecuación $x^{iv}+x'''+3x''+2x'+3x=0$.

13. Hallar una solución de $x'''+x'+x=\cos t+te^{-t}$ y determinar si dicha solución es estable.

14. Sea $x'''+ax''+3x'+9x=e^{3t}$. Resolverla si $a=-5$ y si $a=3$. Discutir su estabilidad.

15. Sea $x'''+2x''+2x'+ax=5\cos t$. Hallar una solución de la ecuación para todo valor de a. Hallar la solución general para los a para los que sea estable no asintóticamente.

16. Sea $x'''+3x''+4x'+bx=2$. Discutir su estabilidad según los valores de b. Hallar una solución particular para todo valor de b. Hallar si $b=2$ la solución con $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$.

17. Sea $x'''+ax''+bx'+abx=1$. Discutir su estabilidad según los valores de las constantes a y b.
Para $a=-1$, $b=1$, hallar la solución con $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.
Determinar para qué valores de a y b ninguna solución está acotada en todo $(-\infty,\infty)$.

18. Sea $x^{IV}+4x'''+cx''+4x'+x=16e^t$. i) Discutir su estabilidad según los valores de c. ii) Para $c=6$, hallar la solución con $x(0)=x''(0)=0$, $x'(0)=x'''(0)=2$. iii) Hallar una solución para cada c.

19. Hallar la solución de $\left\{\begin{array}{l} x'=2x+y \\ y'=-4x+2z \\ z'=4-2z \end{array}\right.$ con $x(0)=0$, $y(0)=-1$, $z(0)=2$.

20. Determinar un a para el que el sistema $\left\{\begin{array}{l} x'=-2x+y \\ y'=x-2y+az \\ z'=ay-z \end{array}\right.$ sea
i) asintóticamente estable
ii) estable no asintóticamente
iii) inestable

21. Sea $\begin{cases} x' = 4y + z \\ y' = z - 4 \\ z' = az - 2x \end{cases}$ i) Para $a = 5$ hallar la solución con $x(0) = -2, y(0) = 3, z(0) = 0$.
[Ayuda: el sistema tiene una solución constante].
ii) Discutir la estabilidad del sistema según los valores de la constante a.

22. Sea $\begin{cases} x' = z - ax \\ y' = 4u - 3 \\ z' = -4x \\ u' = t - y \end{cases}$. a) Discutir, en función del parámetro real a, la estabilidad del sistema.
b) Para $a=5$, hallar la solución con $x(0)=y(0)=z(0)=u(0)=0$.

23. Sea $t^2x'' - 6x = (a-3)t^a$, con $x(1)=0$, $x'(1)=1$.
Hallar su solución para todos los valores de la constante a y determinar su estabilidad.

24. Estudiar existencia y unicidad y resolver las ecuaciones no lineales $2tx'x''=(x')^2-1$, $x''=4t\sqrt{x'}$.
Determinar la estabilidad de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

25. Hallar por Laplace las soluciones pedidas en los problemas 2 , 10 , 11 , 16 y 18 .

26. Resolver $y'=-y+\begin{cases} t, & t \le 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$ con $y(0)=-1$. ¿Cuántas derivadas tiene la solución en $t=2$?

27. Resolver:
$\begin{cases} x'' + x = u_\pi(t) \\ x(0)=1, x'(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'' - x = 2\delta(t-1) \\ x(0)=1, x'(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x''' - 3x'' + 2x' = f(t) \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=2 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 2e[2t-3], & t \ge 1 \end{cases}$

28. Hallar la 'solución' de $x''' + 6x' + 20x = 18\delta(t-\pi)$ con $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ y escribir su valor para $t=\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{13\pi}{12}$. ¿Cuántas derivadas posee dicha 'solución' en $t=\pi$?

29. Resolver los sistemas: $\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=x-y+2\delta(t-1) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'=-y+f(t) \\ y'=x+f(t) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

30. Sea $x^{iv} + 4x''' + cx'' + 4x' + x = \operatorname{sen} t$. Discutir cuántas soluciones periódicas posee.

31. Determinar si existen soluciones 2π-periódicas:
$x''+x = \cos^3 t$ $\quad x''-x'+2x = \operatorname{sen} t$ $\quad 4x''+x = \cos t$ $\quad x''=\operatorname{sen} t|\cos t|$ $\quad x'' + x = \operatorname{sen}(t+1)$

32. Sea $x'' + x = f_c(t)$ $(c>0)$ donde i) $f_c(t) = \operatorname{sen} ct$, ii) $f_c(t) = \delta(t-\frac{2\pi}{c}) + \delta(t-\frac{4\pi}{c}) + \cdots$
Hallar la solución general para todo c . Si $c=1$ y $c=2$, estudiar si hay soluciones 2π-periódicas y dibujar la solución con $x(0)=x'(0)=0$, comparando con $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Interpretar físicamente.

33. Sea $x''+x'+x = \operatorname{sen} ct$, $c>0$. Hallar la solución periódica $y^*(t,c)$ a la que tienden a acercarse todas las soluciones y escribirla para cada c en la forma $y^* = A\operatorname{sen}(ct+B)$. Estudiar como varía A en función de c . ¿Para qué valor de c se obtiene la amplitud máxima? Interpretarlo físicamente.

Problemas adicionales 3

1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:
$(2t-t^2)x''+x'-x=0 \quad t^2x''+2x'+4x=0 \quad tx''+e^tx'+3\cos tx=0 \quad t\,\mathrm{sen}\,tx''+3x'+tx=0$

2. Hallar las raíces del polinomio indicial en los puntos singulares regulares de las ecuaciones:
$a)$ $(2t^2+t^3)x''-x'+x=0\,,$ $\quad b)$ $t(t-1)^2x''+\ln|t|\,x=0\,,$ $\quad c)$ $\mathrm{sen}\,t\,x''+tx'=0\,.$

3. Escribir una ecuación que: i) tenga un punto singular regular en $t=0$ y en él las raíces de su polinomio indicial sean $\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{3}$, ii) tenga en $t=1$ un punto singular que no sea regular.

4. Resolver por medio de series en torno a $t=0$:

$(1+t^2)x''-2tx'+2x=0$	$x''-e^tx=0$	$t^2x''-5tx'+3(t+3)x=0$	$tx''+(1-t)x'+x=0$
$(t^2-t)x''-tx'+x=0$	$x''+t^2x=0$	$3t^2(1+t)x''+t(5+2t)x'-x=0$	$(t^2-1)x''-2x=0$
$(t^2-1)x''+3tx'+tx=0$	$2tx''+x'-x=0$	$t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=0$	$(1-\cos 3t)x''-2x=0$

5. Discutir para qué valores de a es $t=0$ punto singular regular de $t^ax''+4tx'+2x=0$. Si $a=2$, hallar el desarrollo en serie de la solución con $x(1)=1$, $x'(1)=-1$ en $t=1$ hasta tercer orden.

6. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en $t=1$ de la solución de $x''-\ln|t|x'=0$ con $x(1)=0$, $x'(1)=1$. Determinar qué puntos son regulares o singulares regulares.

7. Sean las ecuaciones $t^2x''+x'=0$ y $t^3x''+tx'-x=0$. Hallar la solución general por métodos elementales y estudiar la estabilidad. ¿Se podrían resolver por series en torno a $t=0$? Calcular hasta orden 3 el desarrollo en serie de potencias en torno a $t=1$ de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

8. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial de $tx''-x'+4t^3x=0$ que se anule en $t=0$ y expresarla en términos de funciones elementales. Hallar la solución general de la ecuación. Hacer un cambio de variable de la forma $s=t^n$ y comprobar el resultado.

9. Hallar una solución no trivial de $tx''-(3t+1)x'+9x=0$.
¿Es cierto que todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando t tiende a 0?

10. Sea $(t-1)x''+2tx'+(t+1)x=0$. a) Comprobar que tiene una solución de la forma e^{at} y escribir la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=0$ en términos de funciones elementales. b) Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución utilizando directamente el método de series. c) ¿Es estable la solución que satisface $x(\pi)=x'(\pi)=1$?

11. Sea $2t^2(1+t^2)x''-t(3+7t^2)x'+2(1+2t^2)x=0$. Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$. Calcular la solución general de la ecuación en términos de funciones elementales.

12. Sea $t^2x''+t^2x'+(t-2)x=0$. Comprobar que $x=\frac{1}{t}$ es solución. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$.

13. Sea $t^2x''+(1-e^t)x'+tx=0$. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$.

14. Sabiendo que $x=t$ es solución de $tx''-tx'+x=0$, determinar si es posible escribir el desarrollo en torno a $t=0$ de otra solución linealmente independiente sin que aparezcan logaritmos.

15. Sea $2t^2x''+t(1+t^2)x'-x=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución no analítica en $t=0$. ¿Cuántas soluciones satisfacen: i) $x(0)=x'(0)=3$; ii) $x(3)=x'(3)=0$?

16. Hallar el desarrollo hasta orden 5 de una solución de $t^2x''-3t^4x'-(3t^3+2)x=0$ que esté acotada en $t=0$ [puede ser útil saber que $x=1/t$ es solución].

17. Estudiando las vibraciones de una molécula diatómica se llega a $u''+u'-(e^{-x}-1)^2u=0$. Hallar hasta x^4 el desarrollo en serie de una solución. ¿Están todas las soluciones acotadas en $x=0$?

18. Probar que $2\ln t\,x''+x'+2x=0$ tiene un punto singular regular en $t=1$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de una solución. ¿Dónde converge, al menos, la serie obtenida?

19. Dar un valor de b para el que la solución general por series de $tx''+be^{\mathrm{sen}\,t}x'=0$ en torno a $t=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.

20. Determinar si contiene logaritmos la solución general por series en $t=0$ de $tx''+2\cos t\,x'=0$.

21. Sea $t^2x''+tx'+(t-\frac{1}{4})x=0$. Hallar el desarrollo de una solución acotada en $t=0$. Determinar si hay soluciones linealmente independientes de la anterior que no contengan el $\ln t$.

22. Sea $(1-t^2)x'' - tx' + x = 1-t^2$. Resolver la homogénea por series y hallar la solución de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar haciendo el cambio $t=\cos s$.

23. Hallar la solución general de $(t^3+1)x'' - 3t^2x' + 3tx = (t^3+1)^2$.

24. Sea $t^2x''-3tx'+3x = t^3$. Hallar la solución general de la no homogénea. Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en i] $t=0$, ii] $t=1$.

25. Sean $t^2x'' - 2tx' + [2+t^2]x = t^3\cos t$, $t^2x'' - 4tx' + [t^2+6]x = t^4$
Hallar la solución general de la homogénea en forma de series en tono a $t=0$.
Hallar la solución general en términos de funciones elementales.

26. Hallar la solución general de la ecuación $\operatorname{sen} t\, x''-3\cos t\, x' = 2\operatorname{sen} t\cos t$. Determinar qué puntos t son regulares o singulares regulares, y hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $t=0$ de una solución de la homogénea que no sea constante.

27. Sea $t(1-t)x''+(1-2t)x'+\alpha x = 0$. Hallar todos los valores de α para los que su solución analítica en $t=0$ es un polinomio. Calcular para $\alpha=20$ una solución acotada en $t=0$.

28. Hallar una solución de $tx''+2x'+p^2tx = 0$ que esté acotada en $t=0$. Hacer $x=\frac{y}{t}$ y comprobar.

29. Deducir de la fórmula de Rodrigues: $nP_n = tP_n - P'_{n-1}$, $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)tP_n - nP_{n-1}$.

30. Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado n se puede escribir como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios de Legendre: $Q_n = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$. Probar que $c_k = \int Q_n(t)P_k(t)dt$. Escribir $Q_4(t)=t^4$ como combinación lineal de $P_0, \dots, P_4$.

31. Obtener los polinomios H_4 y H_5 de Hermite a partir de: i) la serie general de los apuntes, ii) la función generatriz, iii) la fórmula de Rodrigues.

32. Desarrollar hasta orden 3 en $t=1$ la solución de $t^2x''+tx'+(t^2-\frac{1}{4})x = 0$ con $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

33. Calcular la solución de $t^2x''+tx'+(t^2-\frac{1}{4})x = t^{3/2}$ con $x(1)=1$, $x'(1)=-\frac{1}{2}$.

34. Hallar las funciones de Bessel $J_{5/2}$ y $J_{7/2}$.

35. Calcular las siguientes primitivas: $\int uJ_0(u)\,du$, $\int u^3J_0(u)\,du$, $\int u[J_0(u)]^2\,du$.

36. Sea $(t^2-t)y'' + (4t-2)y' + 2y = 0$. Probar que existe una solución analítica en torno a $t=0$ y calcularla. Estudiar si todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando $t\to\infty$.

37. Comprobar que las ecuaciones de Hermite y Bessel tienen un punto singular en el infinito.

38. Hallar una solución de la forma $t^r\,\Sigma a_nt^n$ de $t^2x''+(3t-1)x'+x = 0$ y discutir su validez.

39. Adaptar la teoría de este capítulo a la resolución por series de las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes analíticos (o ’poco’ no analíticos). Hallar por este camino la solución de algunas ecuaciones de los problemas del tema 1 resolubles por series y comparar resultados.

Problemas adicionales 4

1. Dibujar el mapa de fases:

$x''+x'=2x+x^2$ $\quad x''=1$ $\quad x''=x^{-3}-x^{-2}$ $\quad x''=x[(x')^2-1]$ $\quad 2x''-(x')^2+x(x-2)=0$

$\begin{cases} x'=xy-y \\ y'=x-y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=xy \\ y'=x+y^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=y-y^2 \\ y'=x-x^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=2y+2xy \\ y'=2x-x^2-y^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=2x \\ y'=y(1-y)+x^2 \end{cases}$

2. Sea [S] $\begin{cases} x'=a(y-x)+1 \\ y'=a(y-x)+x \end{cases}$. Hallar sus órbitas y estudiar la estabilidad de sus soluciones $\forall a$. Para $a=-1$, $a=0$ y $a=1$ dibujar el mapa de fases de [S]. Para $a=-1$, calcular la solución de [S] que satisface $x(0)=y(0)=0$.

3. Estudiar los mapas de fases de los sistemas lineales autónomos que tienen algún autovalor 0.

4. Dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=y^2-x^2-4 \end{cases}$.
Identificar la órbita asociada a la solución con $x(0)=2,\ y(0)=0$ y describir la $x(t)$ de esta solución.

5. Sea [S] $\begin{cases} x'=x(1-y) \\ y'=y-x^3 \end{cases}$. i) Dibujar el mapa de fases de [S]
ii) Calcular la solución de [S] que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$.

6. Sea $x''=-x[x^2+(x')^2]$. Hallar la órbita de su mapa de fases que pasa por el punto $(-1,0)$.
¿Es periódica la solución de la ecuación que satisface $x(\pi)=-1$, $x'(\pi)=0$?

7. Sea $\begin{cases} x'=3y^2-3 \\ y'=6x+4x^3 \end{cases}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. Determinar para qué valores de a es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=a$.

8. Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de las ecuaciones: (i) $x''=xe^{-x^2}$, (ii) $x''=-xe^{-x^2}$.
Precisar en cada caso si es periódica la solución que verifica $x(1)=0$, $x'(1)=2$.

9. Sean: a) $\begin{cases} x'=x(x-2) \\ y'=(x-2y)(x-1) \end{cases}$, b) $\begin{cases} x'=1+y-x^2 \\ y'=2xy \end{cases}$, c) $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=1-x^2-y^2 \end{cases}$.
Hallar sus órbitas, dibujar el mapa de fases y precisar si están definidas $\forall t$ las soluciones cuyas proyecciones sean semirrectas. Hallar para cada sistema la solución que cumple los datos iniciales que se indican: i) $x(1)=2$, $y(1)=0$, ii), $x(0)=3$, $y(0)=0$, iii) $x(0)=\sqrt{3}$, $y(0)=0$.

10. a) Resolver (E) $\frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{v}$ y dibujar sus curvas integrales.
b) Dibujar el mapa de fases de $x''=x^3-x-xx'$. [Ayudas: Hay órbitas que son parábolas. Haciendo en la ecuación de las órbitas $u=[x^2-1]/2$ se obtiene (E)].

11. Sea $x''=(ax-x')(2+x')$. a) Clasificar sus puntos críticos elementales según los valores de a.
b) Para $a=3/2$, dibujar el mapa de fases y hallar la solución $x(t)$ con $x(1)=0, x'(1)=-2$.

12. Sea $\begin{cases} x'=2x-4y+ax^3+by^2 \\ y'=2x-2y \end{cases}$. Elegir a y b (no ambos cero) para los que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas asociadas a soluciones i] inestables, ii] definidas para todo t.

13. Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución $x=0$ de las ecuaciones:

$x''=a\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ $\quad x''+ax'+e^x=1$ $\quad x''+x=a\,\mathrm{sen}(x')$ $\quad x''+ax^n=0$, $n\in\mathbf{N}$

14. Sea $\begin{cases} x'=ay+bx^3 \\ y'=ax+by^3 \end{cases}$. i) Discutir según los valores de a y b la estabilidad de la solución $x=y=0$.
ii) Discutir si existen soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$.

15. Sea [S] $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2 \end{cases}$. i] Hallar sus órbitas, localizar sus puntos de inflexión y dibujar el mapa de fases. ii] Hallar la solución de [S] con $x(0)=y(0)=2$. ¿Es estable?
¿Lo es la órbita $y(x)$ que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

16. Sea [S] $\begin{cases} x'=x^2 \\ y'=x-y+x^2 \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas.
Dibujar isoclinas y curvas integrales de [o] y el mapa de fases de [S].
Precisar si es estable el origen de [S] y si lo es la solución $y(x)$ de [o] que satisface $y(1)=1$.

17. Sea [S] $\begin{cases} x'=x^2+3y^2 \\ y'=-2xy \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas.
Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de [o] y el mapa de fases de [S]. ¿Está definida $\forall t$ la solución de [S] con $x(2)=1$, $y(2)=0$? ¿Es estable la solución de [S] con $x(2)=y(2)=0$?

18. Dibujar el mapa de fases de $\begin{cases} x' = (x-y)(1-x^2+y^2) \\ y' = (x+y)(1-x^2+y^2) \end{cases}$ tras escribir el sistema en polares.

19. Sean: i) $3x'x'' = 1$, ii) $x^2x'' = x'(xx'-2)$.
Hallar la solución general y la particular con $x(0)=x'(0)=1$.

20. Comparar las órbitas y las soluciones de los sistemas $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ y $\begin{cases} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{cases}$.

21. Sea [e] la ecuación: a) $x'' = 4x - 3x'$, b) $x'' = x[1-(x')^2]$, c) $x'' = 2x^3$. Para los tres casos:
i] Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases. ii] Si en $t=0$ es $x=x'=1$, ¿en que instante es $x=10^{10}$? iii] Estudiar la prolongabilidad de la solución $x(t)$ de [e] que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

22. Clasificar los puntos críticos de la ecuación del péndulo rotatorio $x'' = \operatorname{sen} x(-1+w^2\cos x)$, según los valores de w . Dibujar el mapa de fases para $w=0$ (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$.

23. Un péndulo se desplaza un ángulo $x\in(0,\pi)$ de su posición de equilibrio estable y se abandona. Hallar el periodo de la oscilación en función de una integral (se supone $g/l=1$).

24. Supongamos que $\begin{cases} x'=x(2-x-y) \\ y'=y(3-y-2x) \end{cases}$ describe la evolución de una población de truchas (x) y salmones (y) en un mismo estanque y que un pescador pesca sólo truchas a una velocidad proporcional al número de ellas existente. Indicar, dibujando varios mapas de fases, como influye en la evolución de ambas poblaciones su mayor o menor habilidad pescadora.

25. a) Supongamos que $\begin{cases} x' = x(3-y) \\ y' = y(-1+x) \end{cases}$ describe la evolución de dos poblaciones animales en relación preadadora: x moscas, y murciélagos, por ejemplo. Dibujar e interpretar el mapa de fases. Comprobar que (según este modelo) es contraproducente emplear insecticida si éste mata también una proporción fija de los murciélagos existentes.
b) Si suponemos que hay un tope de población para las moscas la primera ecuación se convierte en $x'=x(3-ax-y)$. Dibujar e interpretar ahora el mapa de fases para $a=1$, $a=2$ y $a=4$.