Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar, Matematikai Intézet

Laták Ivett

Gráfparaméterek

Matematika alapszakos szakdolgozat

Témavezető:
Fancsali Szabolcs Levente
Az ELTE-TTK Matematikai Intézet Geometriai Tanszékének
tanársegédje

2014. december 31.

Előszó

A gráfparaméterek rendszerezésének, a köztük fennálló kapcsolatok vizsgálatának és a függetlenséggel, lefedőséggel, dominanciával kapcsolatos és hozzájuk kapcsolódó paraméterek kiegészítésének ötlete Hermann Györgynek köszönhető, akit erre diákjai ihlettek. A Véges matematika 2 kurzus hallgatói gyakran úgy gondoltak a lefogó ponthalmazra, mintha az nem az éleket fogná le, hanem a gráf többi pontját (ez épp a domináló halmaz fogalma). Ekkor döntött úgy, hogy megtanítja a csoportjának a dominancia fogalmát is, hogy lássák a különbséget. Eztán kollégáját, Héger Tamást is bevonva azzal kezdett foglalkozni, hogy az érintett függetlenségi, lefedőségi (lefogósági) és dominanciával kapcsolatos paraméterek között párhuzamot vonjon, tételeket fogalmazzon meg és bizonyítson közöttük, további összefüggéseket fedezzen fel.

Szakdolgozatom célja a gráfparaméterek közül a matematika alapszakos képzés során is taníthatóaknak a bemutatása, rendszerezése és összefogása. A dolgozatot úgy szándékoztam megírni, hogy a következő évfolyamok hallgatói segédanyagként forgathassák a gráfparaméterek megismerése során.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Héger Tamásnak és Hermann Györgynek, amiért rendelkezésemre bocsátották még publikálatlan kutatási eredményeiket. Hálás köszönetem továbbá Fancsali Szabolcsnak, a témavezetőmnek, aki rengeteg segítséggel és tanáccsal látott el, és helyettem is optimista volt.

Székesfehérvár, 2014. december 31.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája a „gráfparaméterek”, amiket naiv módon úgy definiálhatunk, hogy „a gráfok halmazán” értelmezett olyan számértékű függvények, amelyek a gráfok izomorfizmusára érzéketlenek. (Egy gráfparaméter olyan függvény, amely két egymással izomorf gráfhoz ugyanazt a számértéket rendeli.)

Ennél a naiv definíciónál már rögtön az „összes gráfok halmaza” problémás fogalom: mivel általában egy gráf csúcsainak halmaza tetszőleges halmaz lehet, ezért az „összes lehetséges gráfok csúcshalmazainak halmaza” az „összes lehetséges halmazok halmaza” lenne, amiről megtanultuk, hogy létezésének feltételezése önellentmondásra vezet. (Ez a híres Russel-antinómia.) Első dolgunk tehát a „gráfparaméter” fogalmának matematikailag korrekt definiálása, és ehhez először az általunk vizsgált gráfok osztályát kell megszorítani.

A fentiek miatt az összes lehetséges gráfok helyett szakdolgozatomban többnyire csak véges egyszerű gráfokkal foglalkozom. Ezek közül is csak azokkal, amelyeknek csúcshalmaza az első n pozitív egész szám. Ez utóbbi azonban csak technikai jellegű megszorítás, hiszen bármely n csúcsú véges gráf pontjai megszámozhatók az első n pozitív egész számmal. Először tehát az általunk vizsgált véges egyszerű (irányítatlan) gráfok fogalmát fogom definiálni.

A dolgozatban igyekszem egy egységes jelölésrendszert kialakítani bizonyos gráfparaméterek esetében, emiatt a szakirodalomból átvett tételek olykor nem szó szerint, hanem az itt bevezetett jelölésekkel lesznek kimondva.

1.1. Definíció (Véges egyszerű gráf). Legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n pozitív egész szám halmaza, és legyen $E \subseteq \binom{V}{2}$ a V halmaz bizonyos kételemű részhalmazainak egy halmaza. Az ebből a két halmazból álló $G = (V, E)$ rendezett párt *véges egyszerű gráfnak* nevezzük. A $V = V(G)$ halmaz elemeit a G gráf *csúcsainak* (más néven *pontjainak*), az $E = E(G)$ halmaz elemeit a G gráf *éleinek* nevezzük. V és E az angol „vertex” és „edge” szavak rövidítései.

Szükségesnek tartom a nem feltétlenül egyszerű véges gráfok definiálását is, ugyanis néhány, a későbbiekben felbukkanó fogalomhoz szükséges lesz ismernünk ezeket is.

1.2. Definíció (Véges gráf). Legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n pozitív egész szám halmaza, és legyen $E = \binom{V}{1} \uplus \binom{V}{2}$ a V halmaz egy- és kételemű részhalmazainak a halmaza, valamint legyen $\varphi : E \to \mathbb{N}$ egy ezen a halmazon értelmezett függvény. A $G = (V, \varphi)$ rendezett párt *véges gráfnak* nevezzük, ahol a $V = V(G)$ halmaz elemei a G gráf *csúcsai* (más néven *pontjai*), a φ függvény pedig minden

$x \in V$ csúcsra megmondja, hogy azon hány úgynevezett *hurokél* (él, melynek két végpontja azonos) van, minden $\{x, y\}$ pontpárra pedig, hogy köztük hány él van. Ha egynél több, ezeket *többszörös éleknek* nevezzük.

Természetesen, ha a φ függvény értéke 0 a gráf összes pontjára (pontosabban $\binom{V}{1}$ minden elemére), akkor a gráf nem tartalmaz hurokéleket („hurokélmentes”). Ha φ kizárólag 0 vagy 1 értékeket vesz fel, akkor pedig a gráf nem tartalmaz többszörös éleket. Ha sem hurokéleket, sem többszörös éleket nem tartalmaz, akkor a gráf egyszerű.

Most már beszélhetünk az „összes véges egyszerű gráf” halmazáról (amit a továbbiakban $\mathcal{G}$-vel jelölhetünk), és az ezen a $\mathcal{G}$ halmazon értelmezett számértékű függvényekről.

A „gráfparaméter” fogalmát úgy akarjuk definiálni, hogy a pontszám (a gráf összes csúcsának száma, azaz a V halmaz mérete) és az élszám (a gráf összes éleinek száma, azaz az E halmaz mérete) mindenképpen gráfparaméternek számítsanak. Ezeket a következő latin betűkkel fogjuk jelölni: $|V(G)| = n(G)$, $|E(G)| = e(G)$. Tehát az n és az e a gráfok $\mathcal{G}$ halmazán értelmezett nemnegatív egészértékű függvények, ez lesz a két legegyszerűbb gráfparaméter (a konstans függvények után).

1.1. Gráfelméleti alapfogalmak

Emlékeztetőül összefoglalom azokat a gráfelméleti alapfogalmakat, amelyeket a szakdolgozatomban lépten-nyomon használni fogok. A $G = (V, E)$ gráfban a $v, w \in V$ csúcsokat *szomszédosnak* nevezzük, ha őket él köti össze, azaz ha $\{v, w\} \in E$.

Az összefüggések feltárásakor és bizonyítások során többször szükségünk lesz a komplementer gráf fogalmára. (Egyszerű gráfok esetén ezt lehet definiálni.)

1.3. Definíció (Komplementer gráf). A $G = (V, E)$ véges, egyszerű, irányítatlan gráf *komplementere* az a $\overline{G} = (V, \overline{E})$ gráf, aminek csúcshalmaza megegyezik a G gráf csúcshalmazával: $V(\overline{G}) = V(G)$, és két pont pontosan akkor van összekötve $\overline{G}$-ben, ha G-ben nincsenek összekötve, tehát $\overline{G}$ élhalmaza a G élhalmazának a komplementere (az összes lehetséges él halmazára mint alaphalmazra nézve): $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.

A $G = (V, E)$ gráfot *teljes gráfnak* nevezzük, ha $E(G) = \binom{V}{2}$, azaz ha minden csúcs minden másik csúccsal össze van kötve; a $G = (V, E)$ gráfot *üres gráfnak* nevezzük, ha $E = \emptyset$, azaz ha egyik csúcsa sincs másik csúccsal összekötve. Megjegyzendő, hogy a gráf csúcsainak halmaza általában nemüres halmaz. (Szükség esetén a $G = (\emptyset, \emptyset)$ „teljesen üres gráfot" is gráfnak lehetne tekinteni.) Az n csúcsú teljes gráfot K_n, az n csúcsú üres gráfot értelemszerűen $\overline{K_n}$ jelöli.

Az r osztályú teljes gráfot $K_{k_1,\ldots,k_r}$-rel jelöljük. Ebben a gráfban az n csúcsot $k_1, \ldots, k_r$ csúcsból álló halmazokba tudjuk szétosztani, és ezen halmazok (osztályok) mindegyikére igaz, hogy minden csúcsából vezet él a többi osztály minden csúcsába, de az osztályon belül nem vezet él.

1.4. Definíció (Fokszám). A $G = (V, E)$ gráf $v \in V$ csúcsának *fokszáma* a v szomszédainak számával, azaz az $\{e \in E : v \in e\}$ halmaz elemszámával egyenlő. A v csúcs fokszámát $d(v)$ jelöli.

Adott G gráf esetén csúcsainak fokszámai közül a legkisebbet $\delta(G)$, a legnagyobbat $\Delta(G)$ jelöli. A gráfparaméter fogalmának definiálása után látni fogjuk, hogy $\delta(G)$ és $\Delta(G)$ is gráfparaméterek. Ugyanígy a gráfban lévő csúcsok fokszámainak átlaga, az átlagos fokszám, $d(G)$ szintén gráfparaméter.

A gráf *r-reguláris*, ha minden fokszáma r; könnyen látható, hogy ez ekvivalens a $\delta = \Delta = r$ egyenlőség teljesülésével.

1.5. Definíció (Séta, vonal, út, kör). A *séta* a gráfban csúcsok és élek váltakozó $v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ sorozata, ahol mindegyik $e_i = \{v_{i-1} v_i\}$ él a sorozatban őt megelőző és őt követő csúcsokat köti össze; egyszerű gráf esetén elegendő a $v_0 v_1 \ldots v_k$ csúcssorozatot tekinteni, hiszen a gráf két pontja között nem haladhat egynél több él. A *vonal* olyan séta, amelyben egy él legfeljebb egyszer szerepelhet, az *út* pedig olyan vonal, amelyben minden csúcs is maximum egyszer szerepel. A séta, vonal vagy út *hosszának* nevezzük az ezek során érintett élek számát (a fenti példában a k számot). Megengedhetjük, hogy a séta, vonal vagy út hossza 0 legyen, tehát értelmes az a sorozat is, amely egyetlen v_0 pontból áll. A *kör* olyan vonal, amelyben a kezdőpont és a végpont megegyezik ($v_0 = v_k$), de további egybeesések nincsenek a pontjai között. Az egyetlen $n-1$ élű (n csúcsú) útból álló gráfot P_{n-1}, az egyetlen n csúcsú (és így n élű) körből álló gráfot C_n jelöli. Csillagnak nevezzük (és S_n jelöli) azt a gráfot, amiben egy pont van összekötve további $n-1$ csúccsal, és ezen felül nincs több éle.

A $G = (V, E)$ gráfot *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely $x \in V$ pontjából bármely $y \in V$ pontjába vezet $x = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = y$ út.

1.6. Definíció (Komponens). Legyen G nem feltétlenül összefüggő gráf. Az ő $V(G)$ ponthalmazának egy $C \subseteq V$ részhalmazát akkor nevezzük *összefüggőségi* *komponensnek*, ha teljesül rá, hogy bármely $x \in C$ pontból bármely $y \in C$ pontba vezet út, de semelyik $x \in C$ pontból sem vezet út $V \setminus C$ halmaz semelyik pontjába sem. A G gráf összefüggőségi komponenseinek számát $c(G)$ jelöli.

Egy G gráf tehát pontosan akkor összefüggő, ha $c(G) = 1$. Később szükség lehet a gráf *páratlan sok csúcsból álló* komponenseinek számára. Ezt jelöljük ezentúl $c_1(G)$-vel. Hasonlóan a *páros sok csúcsból álló* komponensek számát jelölje $c_0(G)$. Az összefüggőségi komponensek $c(G)$ száma, továbbá $c_0(G)$ és $c_1(G)$ is gráfparaméterek, mint azt később látni fogjuk.

1.2. Részgráfok és típusaik

1.7. Definíció (Részgráf). A $G = (V, E)$ gráf *részgráfja* egy olyan $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, azaz a gráf részgráfját az eredeti gráf pontjainak és éleinek valamilyen részhalmaza alkotja. Természetesen ha a részgráfban nem szerepel egy pont, a belőle kiinduló élek sem szerepelhetnek a részgráfban. Ha a G' részgráfja G-nek, azt a $G' \leq G$ relációs jellel fogjuk jelölni.

Ha a G gráf nem tartalmaz részgráfként kört (azaz „körmentes”), akkor *erdőnek* nevezzük. Ez az elnevezés abból ered, hogy az összefüggő és körmentes gráfot *fának* hívjuk, és így egy erdő összefüggő komponensei fák. Ha a gráf nem tartalmaz páratlan hosszú kört, akkor *páros körüljárású gráfnak*, röviden *páros gráfnak* nevezzük.

1.8. Definíció (Független élhalmaz). Ha a G gráf $P \leq G$ részgráfjában a maximális fokszám legfeljebb egy ($\Delta(P) \leq 1$), akkor ennek a részgráfnak az $E(P)$ élhalmazát *párosításnak* (más szóval *független élhalmaznak*) nevezzük, és ez a párosítás *teljes*, ha P-ben minden fokszám pontosan egy ($\delta(P) = \Delta(P) = 1$). A G-ben fellelhető legnagyobb párosítás méretét $\nu(G)$ jelöli, erről is látni fogjuk, hogy gráfparaméter.

Egy adott G gráf esetén érdekelhet minket, hogy *hány különböző* párosítás található benne, illetve az is, hogy hány különböző *teljes* párosítás található benne. Ez a két szám szintén gráfparaméternek fog bizonyulni.

A részgráfok egyik speciális alfaja az, amelyeket a kiválogatott csúcsok V' halmazával lehet jellemezni (az élei E' halmazát a V' már meghatározza). Ezek az úgynevezett feszített részgráfok:

1.9. Definíció (Feszített részgráf). A $G = (V, E)$ gráf *feszített részgráfja* egy olyan $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, és $\forall x, y \in V'$-re: $\{x, y\} \in E' \Leftrightarrow$

$\{x, y\} \in E$. Azaz a gráf feszített részgráfját az eredeti gráf pontjainak bizonyos részhalmaza alkotja, és igaz az, hogy akkor és csak akkor szomszédos két pont a feszített részgráfban, ha az eredeti gráfban is. A G gráf csúcsai halmazának $V' \subseteq V$ részhalmaza által feszített részgráfot $G[V']$ jelöli. Azt, hogy G' feszített részgráfja G-nek, $G' \trianglelefteq G$ fogja jelölni.

A definícióból adódik, hogy a gráf egy feszített részgráfját egyértelműen meghatározhatjuk csak csúcshalmaza megadásával is. Az összefüggőségi komponenst mi a ponthalmaz egy részhalmazaként definiáltuk, de ugyanilyen jogosan gondolhatunk egy gráf összefüggőségi komponensére mint az 1.6. Definícióban szereplő C ponthalmaz által feszített részgráfra.

1.10. Definíció (Klikk; Független ponthalmaz). Ha az $A \subseteq V$ ponthalmaz által feszített részgráf *üres*, akkor A-t független ponthalmaznak, ha teljes gráf, akkor a $G[A]$ részgráfot *klikknek* nevezzük. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$, a legnagyobb klikk méretét $\omega(G)$ jelöli. Ezekről szintén belátjuk majd, hogy a későbbiekben definiált „gráfparaméter” fogalomnak megfelelnek.

A feszített részgráfokhoz hasonlóan a részgráfok egy másik speciális alfaja lehetne az, ahol csak az élek E' részhalmazát kell kiválogatni (és a csúcsok V' részhalmazának kiválasztása ebből automatikusan következik). Csakhogy ezt kétféleképpen is lehet értelmezni. Az egyik lehetséges értelmezés szerint *minden* csúcs kiválasztott, és ezért elég a részgráf megadásához az élek részhalmaza; ezek az úgynevezett feszítő részgráfok:

1.11. Definíció (Feszítő részgráf). A $G = (V, E)$ gráf *feszítő részgráfja* egy olyan $G' = (V, E')$ gráf, ahol $E' \subseteq E$, azaz a gráf feszítő részgráfjában a gráf minden pontja szerepel, de az éleknek csak valamilyen részhalmaza alkotja. Azt, hogy G' feszítő részgráfja G-nek, $G' \sqsubseteq G$ fogja jelölni.

A másik lehetőség, ha a kiválasztott E' élhalmaz úgy határozza meg a V' csúcshalmazt, hogy pontosan azok a csúcsok kerülnek ebbe, amelyek valamelyik kiválasztott E'-beli élnek a végpontjai: $V' = \{v \in e : e \in E'\}$. Ezeknek tudomásom szerint nincs külön nevük, nevezhetnénk az E' élhalmaz által generált részgráfnak (hogy a feszített szó használatát és az ebből adódó esetleges félreértéseket elkerüljük).

1.12. Definíció (Generált részgráf). A $G = (V, E)$ gráfnak az élek $E' \subseteq E$ részhalmaza által *generált részgráfja* az a $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$ azon pontok halmaza, amelyek legalább egy $\{x', y'\} \in E'$ élben szerepelnek. Ezt a részgráfot $G[E']$ jelöli.

Ha a $G[E']$ részgráfhoz hozzávesszük az összes olyan pontot V-ből, amiket V' nem tartalmaz, akkor kapunk feszítő részgráfot.

1.13. Definíció (Lefedő élhalmaz). Ha $G[E']$ maga is feszítő részgráf, akkor az E' élhalmazt *lefedő élhalmaznak* nevezzük. A legkisebb méretű lefedő élhalmaz méretét $\rho(G)$ jelöli, már amennyiben egyáltalán létezik ilyen élhalmaz.

1.3. Erősen és gyengén domináló halmazok

A domináló halmazokkal kapcsolatos fogalmak pontosabb bevezetéséhez szükség lesz a zárt és nyílt szomszédság definíciójára.

1.14. Definíció (Nyílt szomszédság). A $G = (V, E)$ gráf egy $X \subseteq V(G)$ részhalmazának *nyílt szomszédsága* pontosan azon $y \in V(G)$ pontok halmaza, amelyekre létezik olyan $x \in X$ pont, hogy x-ből y-ba vezet pontosan 1-hosszú út. Az X halmaz nyílt szomszédságának jele: $N(X)$.

1.15. Definíció (Zárt szomszédság). A $G = (V, E)$ egy gráf $X \subseteq V(G)$ részhalmazának *zárt szomszédsága* pontosan azon $y \in V(G)$ pontok halmaza, amelyekre létezik olyan $x \in X$ pont, hogy x-ből eljutunk y-ba egy legfeljebb 1-hosszú úton (beleértve magát az X halmazt is, hiszen ennek minden csúcsa egy 0-hosszú úton is elérhető). Az X halmaz zárt szomszédságának jele: $N[X]$.

Ha ugyanazon csúcshalmazon két külön gráfról is beszélünk, s így nem egyértelmű, hogy melyik gráfon értelmezett szomszédságról van szó, akkor például egy G gráf esetén a gráf megjelölésére az $N_G(X)$ és $N_G[X]$ jelöléseket használhatjuk.

A későbbiekben előfordulhat, hogy szükség lesz egyetlen csúcs szomszédainak vizsgálatára is, ezt tekinthetjük egy 1-elemű halmaznak, így beszélhetünk a szomszédságáról.

1.16. Definíció (Gyenge domináló halmaz). A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy $D \subseteq V(G)$ részhalmazát *gyenge domináló halmaznak* (röviden csak *domináló halmaznak*) nevezzük, ha $N[D] = V(G)$, azaz a halmaz zárt szomszédsága a gráf összes csúcsát tartalmazza. A legkisebb méretű gyengén domináló csúcshalmaz méretét $\gamma(G)$ jelöli.

Tehát a D csúcshalmaz (gyengén) domináló, ha a gráf minden D-n kívüli csúcsa valamelyik D-belinek szomszédja.

1.17. Definíció (Erős domináló halmaz). A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy $D \subseteq V(G)$ részhalmazát *erős domináló halmaznak* nevezzük, ha $N(D) = V(G)$, azaz a halmaz nyílt szomszédsága a gráf összes csúcsát tartalmazza.

Láthatóan míg definíció szerint az erős domináló halmaz minden csúcsába kell vezessen él a halmazon belül, a gyenge domináló halmaz esetében megelégszünk azzal, hogy minden a halmazon kívüli csúcsba vezessen él a domináló halmazból. A szakdolgozat során domináló halmazon mindig gyenge domináló halmazt fogok érteni, ettől eltérő esetben külön jelölni fogom, hogy erős domináló halmazról van szó.

1.4. Gráfizomorfizmus és ekvivalenciaosztályai

A „gráfparaméter" egy olyan számértékű függvény a $\mathcal{G}$ halmazon, ami két izomorf gráfhoz ugyanazt az értéket rendeli. Ezen mondat értelmezéséhez definiálnunk kell a „gráfizomorfizmus" fogalmát. Mint általában, az izomorfizmus egy olyan homomorfizmus (két struktúra, jelen esetben két gráf közötti struktúratartó leképezés), ami bijekció is, továbbá az inverze is homomorfizmus. Először tehát definiáljuk a „gráfhomomorfizmus" fogalmát.

1.18. Definíció (Gráfhomomorfizmus). Adott $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfok esetén a $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt *gráfhomomorfizmusnak* nevezzük, ha minden $\{x, y\} \in E_1$ él esetén $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

Tehát gráfok esetén a struktúratartás azt jelenti, hogy két szomszédos csúcshoz két *különböző, szomszédos* csúcsot rendelünk. A φ függvény különböző pontokhoz rendelheti ugyanazt a V_2-beli csúcsot, de csak *össze nem kötött* pontokhoz. Ha a φ függvény különböző pontokat különbözőekbe visz, és nemcsak az teljesül, hogy szomszédos pontpárhoz szomszédos pontpárt rendel, hanem az is, hogy nemszomszédoshoz kifejezetten nemszomszédosat, akkor „gráfizomorfizmusról" beszélünk.

1.19. Definíció (Gráfizomorfizmus). Adott $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfok esetén a $\varphi : V_1 \to V_2$ függvényt *gráfizomorfizmusnak* nevezzük, ha

- a φ függvény *bijekció* V_1 és V_2 halmazok között; és
- minden $\{x, y\} \in E_1$ él esetén $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$ (azaz φ gráfhomomorfizmus); és
- minden $\{u, w\} \in E_2$ él esetén $\{\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)\} \in E_1$ (azaz a φ^{-1} inverzfüggvény is gráfhomomorfizmus).

Ebben az esetben a G_1 és G_2 gráfokat *izomorfnak* mondjuk, és ezt a tényt $G_1 \sim G_2$ jelöléssel jelöljük.

A gráfizomorfizmus tehát egy a gráfokon értelmezett bijektív, struktúratartó leképezés: a φ függvény és inverze (φ^{-1}) is a szomszédos csúcsokat egyaránt szomszédos csúcsokba (a nemszomszédosakat pedig nemszomszédosakba) képezi.

Az identitásfüggvény gráfizomorfizmus, ezért $G \sim G$. Gráfizomorfizmus inverze is gráfizomorfizmus, tehát ha $G_1 \sim G_2$ igaz, akkor $G_2 \sim G_1$ is igaz. Gráfizomorfizmusok kompozíciója szintén gráfizomorfizmus, így ha $G_1 \sim G_2 \sim G_3$, akkor $G_1 \sim G_3$. Gráfok izomorfiája tehát ekvivalenciareláció (melyet gráfizomorfiának nevezünk). Ennek az ekvivalenciarelációnak az ekvivalenciaosztályai a $\mathcal{G}$ halmazt diszjunkt részhalmazokra particionálják.

A gráfok izomorfizmus szerinti ekvivalenciaosztályai szintén halmazt alkotnak. Ezt a halmazt precízen $\mathcal{G}/_\sim$ szimbólummal kellene jelölnünk, de mivel a gráfok tulajdonságainak további taglalásakor egy G gráfról tett állítás igaz lesz minden vele izomorf gráfra is, ugyanúgy $\mathcal{G}$-vel jelölhetjük.

1.5. Kétféle részbenrendezés

A véges egyszerű gráfok halmaza, és így a gráfizomorfizmus szerinti ekvivalenciaosztályok halmaza is megszámlálható, így felsorolható. Léteznek bijekciók $\mathbb{N}$ és $\mathcal{G}$ között. Ha ezek között lenne olyan, ami „természetes” abban az értelemben, hogy a gráfok saját belső tulajdonságából kiszámolható lenne egy rá (illetve az ő ekvivalenciaosztályára) egyedileg jellemző természetes szám, akkor ez a bijekció (azaz felsorolás) megadna egy természetes rendezést is a $\mathcal{G}$ halmazon.

1.20. Definíció (Teljes rendezés). A $\mathcal{G}$ halmazon adott $\leq$ kétváltozós relációt *rendezésnek* nevezzük, ha

- bármely két $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ elem összehasonlítható, azaz $G_1 \leq G_2$ és $G_2 \leq G_1$ közül legalább az egyik teljesül;
- bármely $G \in \mathcal{G}$ elemre $G \leq G$ teljesül (reflexív);
- ha $G_1 \leq G_2$ és $G_2 \leq G_1$, akkor $G_1 = G_2$, tehát a reláció antiszimmetrikus; és
- ha $G_1 \leq G_2$ és $G_2 \leq G_3$, akkor $G_1 \leq G_3$, azaz a reláció tranzitív.

A véges egyszerű gráfok (illetve ezek izomorfia szerinti ekvivalenciaosztályainak) halmazán nem ismerek természetes módon definiálható teljes rendezést. Viszont ha a fenti definícióban az első feltételt (azt, hogy bármelyik két elem összehasonlítható legyen) elhagyjuk, akkor a részbenrendezés definícióját kapjuk, ilyet pedig már megadhatunk a véges egyszerű gráfok halmazán.

1.21. Definíció (Részbenrendezés). Egy $\mathcal{G}$ halmaz *részbenrendezett*, ha elemein definiálva van egy olyan $\leq$ reláció (részbenrendezés), amely reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

A véges egyszerű gráfok (illetve ezek izomorfia szerinti ekvivalenciaosztályainak) halmazán ilyen reláció lehet a $\leq$ jelöléssel ellátott „részgráfja" reláció.

1.22. Definíció (Részgráfja reláció). A G_1 és G_2 gráfokra akkor teljesül $G_1 \leq G_2$, ha G_2 gráfnak létezik olyan $G^* \leq G_2$ részgráfja, amely izomorf G_1-gyel.

Mivel minden gráf részgráfja saját magának ($G \leq G$) ezért a reláció reflexív. Véges gráfok esetén ha $G_1 \leq G_2$ és $G_2 \leq G_1$ egyszerre teljesül, akkor a két gráf csúcsszáma meg kell egyezzen, és ekkor a G_1 gráfnak G_2 gráffal izomorf részgráfja az egész G_1 gráf lesz, tehát $G_1 = G_2$ mint ekvivalenciaosztályok. Végül, ha $G_1 \leq G_2 \leq G_3$ akkor a G_3 gráfnak G_2 gráffal izomorf részgráfjában is létezik egy G_1 gráffal izomorf részgráf, azaz $G_1 \leq G_3$. Tehát ez valóban részbenrendezés.

Ez a $\leq$ részgráfja reláció természetes módon van értelmezve abban az értelemben, hogy az a tény, hogy $G_1 \leq G_2$ igaz-e vagy sem, pusztán G_1 és G_2 gráfok gráfelméleti tulajdonságaiból eldönthető (ha nem is gyors algoritmussal). Egy halmaz *rendezett*, ha amellett, hogy részbenrendezett, még az is teljesül rá, hogy a halmaz bármely két eleme összehasonlítható. Ez esetünkben nem áll fenn, hiszen találhatunk G_1 és G_2 gráfot, amelyek egyikében sem találjuk meg a másikat részgráfként, és így sem $G_1 \leq G_2$, sem $G_2 \leq G_1$ nem teljesül.

Egy másik természetes részbenrendezés a $\mathcal{G}$ halmazon a „feszítetten részgráfja" reláció.

1.23. Definíció (Feszített részgráfja reláció). A G_1 és G_2 gráfokra akkor teljesül $G_1 \trianglelefteq G_2$, ha G_2 gráfnak létezik olyan *feszített* $G^* \trianglelefteq G_2$ részgráfja, amely izomorf G_1-gyel.

Erről is könnyen látható, hogy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ez a feszített részbenrendezés *részrelációja* a részgráfja részbenrendezésnek: Ha $G_1 \trianglelefteq G_2$ teljesül, akkor nyilvánvalóan $G_1 \leq G_2$ is teljesül, hiszen a feszített részgráf az részgráf. Viszont előfordulhat, hogy $G_1 \leq G_2$ teljesül, míg $\trianglelefteq$ szerint a két gráf nem összehasonlítható. ($G_1 \neq G_2$ esetén nem fordulhat elő, hogy $G_1 \leq G_2$, de $G_1 \trianglerighteq G_2$.)

2. Gráfparaméterek és általánosított gráfparaméterek

Most már értelmezhetjük a gráfparamétereket mint a (szóba jöhető) összes véges gráfok $\mathcal{G}$ halmazán (pontosabban a gráfizomorfia szerinti ekvivalenciaosztályok halmazán) értelmezett függvényeket, amelyek a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazából veszik fel értékeiket. Ez azonban még nem elég. Felsorolhatnánk például az összes véges egyszerű gráfot (természetesen az izomorfakat csak egyszer), majd a függvény értékeként megadhatnánk az adott gráf sorszámát. Az ilyet nem szeretnénk gráfparaméternek nevezni, hiszen az önkényesen felállított sorrenden kívül mást nem mond el a gráfról. Ezért a gráfparaméter definíciójánál kikötést szeretnénk tenni, hogy a gráfparaméter értékét akkor is kiszámolhassuk, amikor csak magát a gráfot ismerjük, a többi gráfon felvett értékét nem.

Elsősorban nemnegatív egész értékű függvényekkel fogunk foglalkozni, de az egyszerűség kedvéért egy gráfparaméter értékeiként megengedjük az összes valós számot.

2.1. Definíció (Gráfparaméter). A $\beta : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ függvényt *gráfparaméternek* nevezzük, ha $G_1 \sim G_2$ esetén $\beta(G_1) = \beta(G_2)$, és $\beta(G)$ értéke csak a G gráf ismeretében is kiszámolható.

Azt, hogy a gráfparaméter kiszámolható, úgy kell érteni, hogy egy G gráfból mint inputból egy véges sok utasításból álló algoritmussal véges sok lépésben kiszámolható. Sajnos az ilyetén definiálással sem sikerült kizárnunk, hogy a programunk minden meghívásakor maga generáljon egy felsorolást, és az inputként kapott gráfból az első vele izomorf gráf sorszámát adja ki (a gráf struktúrájából adódó érték kiszámítása helyett). Bár intuitíven értjük, mit szeretnénk gráfparaméternek tekinteni és mit nem, matematikailag korrektül ezt nem sikerült megfogalmazni. A 2.1. Definíció a gráfok ekvivalenciaosztályainak egy tetszőleges (önkényes) felsorolása esetén adódó $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények közül az összes algoritmikusan kiszámítható függvényt megengedi.

2.2. Megjegyzés (A gráfparaméterek vektortere). Az $\mathbb{R}$ valós számtest elemeivel pontonként megszorozva egy gráfparamétert ugyancsak gráfparamétert kapunk, hiszen ha az eredeti függvény algoritmikusan kiszámítható volt, akkor annak számszorosa is algoritmikusan kiszámítható. Ugyanígy adódik, hogy két gráfparaméter pontonkéni összege (és pontonkénti szorzata is) szintén gráfparaméter. Tehát gráfparaméterek halmaza az $\mathbb{R}$ valós test feletti vektortér (sőt, algebra) lesz. A műveletekre való zártságot láttuk, a további műveleti tulajdonságok pedig abból következnek, hogy valós értékű függvények pontonkénti műveleteiről van szó.

A továbbiakban ezért mindig próbáljuk elkerülni, hogy egy gráfparaméter végtelen értéket vehessen fel, és a tipikusan egész értéket felvevő gráfparamétereket is valósértékű függvénynek fogjuk tekinteni.

További általánosítási lehetőség lenne a további struktúrával rendelkező gráfok paramétereinek definiálása: legyen $\mathcal{G}_S$ azon gráfok halmaza, amelyek $\mathcal{G}$ bizonyos elemei, ellátva egy S típusú struktúrával. (Ez jelentheti például az $\mathbb{R}$ elemeivel történő élsúlyozást.) Ebben az esetben csak azokat a gráfizomorfizmusokat tekintjük izomorfizmusnak, amelyek (és inverzük) ezt a plusz struktúrát is megtartják. (Élsúlyozás esetén tehát azokat a függvényeket, amelyek nemcsak az összekötött pontpárhoz rendelnek összekötött pontpárt, hanem a k súlyú éllel összekötött pontpárhoz k súlyú éllel összekötött pontpárt.) Az ezen speciális (S típusú struktúrát megőrző) izomorfizmusok által meghatározott ekvivalenciarelációt $\sim_S$ jelöli.

2.3. Definíció (Általánosított gráfparaméter). A $\beta : \mathcal{G}_S \to \mathbb{R}$ függvényt *általánosított gráfparaméternek* nevezzük, ha $G_1 \sim_S G_2$ esetén $\beta(G_1) = \beta(G_2)$, és $\beta(G)$ értéke csak a G gráf ismeretében is kiszámolható.

Pozitív egész számokkal élsúlyozott gráfok esetén a minimális súlyú feszítőfa súlya például egy általánosított gráfparaméter. Irányított, pozitívan élsúlyozott, forrással és nyelővel ellátott aciklikus (irányított kört nem tartalmazó) gráfok esetén a maximális folyam mérete is egy általánosított gráfparaméter.

Általánosított gráfparaméterekkel ebben a szakdolgozatban nem fogok szisztematikusan foglalkozni, csak egyes esetekben bizonyos gráfparamétereket jellemző tulajdonságok megvilágításánál kerülhetnek elő mint egzotikus példák.

2.1. Kétféle monotonitás

Mivel a gráfparaméterek a részbenrendezett $\mathcal{G}$ halmazon vannak értelmezve, és az általunk tárgyalt gráfparaméterek valós (sőt, egész) értékeket vesznek fel, ezért értelmes megkérdezni, hogy az adott gráfparaméter mint függvény monoton-e.

2.4. Definíció (Monotonitás). A $\beta : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ gráfparaméter *monoton növő*, ha $\forall G_1 \leq G_2 : \beta(G_1) \leq \beta(G_2)$; és β *monoton fogyó*, ha $\forall G_1 \leq G_2 : \beta(G_1) \geq \beta(G_2)$.

A fenti definícióban a $G_1 \leq G_2$ a részgráfja reláció volt. Mivel a véges egyszerű gráfok ekvivalenciaosztályainak $\mathcal{G}$ halmazán értelmeztünk egy másik részbenrendezést is, azzal is érdemes definiálni a monotonitást.

2.5. Definíció (Feszített monotonitás). A $\beta : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ gráfparamétert *feszítetten monoton növőnek* mondjuk, ha $\forall G_1 \lhd G_2 : \beta(G_1) \leq \beta(G_2)$; és β *feszítetten monoton fogyónak*, ha $\forall G_1 \lhd G_2 : \beta(G_1) \geq \beta(G_2)$.

Mivelhogy a „feszített részgráfja" részbenrendezés részrelációja a „részgráfja" részbenrendezésnek, lehetnek olyan gráfparaméterek, amelyek a 2.4. Definíció szerint nem monotonok, viszont a 2.5. Definíció szerint feszítetten monotonok. Viszont ami monoton, az természetesen feszítetten is monoton lesz.

Azt is meg lehet vizsgálni, hogy egyetlen csúcs vagy él elhagyásával keletkező részgráfra az adott paraméter értéke sokat változik-e, vagy keveset. Ez egy újabb tulajdonsága lehetne a gráfparamétereknek. Például egy összefüggő gráfban egy elvágó él elvételével keletkező gráf legfeljebb két komponensre esik szét; míg elvágó csúcs elvételével tetszőlegesen sok komponensre eshet szét a gráf.

2.2. Strukturális gráfparaméterek

A szakdolgozat fő témáját a gráf szerkezetéből adódó és kiszámítható gárfparaméterek szolgáltatják. Speciális struktúrákat vizsgálunk, mint a gráfban lévő utak vagy körök, ezekből a legrövidebb vagy leghosszabb. Jellegében azonos vizsgálni például a gráfban lévő független, lefedő vagy lefogó halmazt (legyen az pont- vagy élhalmaz), azok közül legkisebb vagy legnagyobb elemszámút, szűkíthetetlent vagy bővíthetetlent. Az ilyen jellegű gráfparamétereket nevezzük intuitívan „strukturális gráfparamétereknek" szemben az olyan paraméterekkel, amelyek bár struktúrából fakadnak, de nem egy konkrét részstruktúra méretét adják meg; például hogy *hány különböző* párosítás (vagy hány különböző *teljes* párosítás) van a gráfban. A színezési vagy az összefüggőségi számot sem nevezzük „strukturálisnak", sőt, ilyen „nemstrukturálisnak" tekintett gráfparaméter lehet az is, hogy *hány lényegesen különböző* jó színezése van egy gráfnak.

Most, hogy már korrektül definiáltuk, mit értünk gráfparaméter alatt (és nem korrektül, de intuitívan körülírtuk, hogy mit értünk strukturális gráfparaméter alatt), állapítsuk meg, hogy a bevezető fejezetben előkerült, gráfokhoz számértékeket rendelő függvények tényleg gráfparaméterek, és vizsgáljuk meg, hogy vajon monotonok-e.

A szakdolgozat fő céljához kellő gráfparaméterek közül már majdnem mindről említést tettünk. Hadd említsem meg itt a maradékot is.

2.6. Definíció (Lefogó ponthalmaz). A $G = (V, E)$ gráf egy $T \subseteq V$ csúcshalmaza lefogó, ha a gráf minden élének legalább az egyik végpontja T-beli. A legkisebb lefogó csúcshalmaz méretét $\tau(G)$-vel jelöljük.

2.7. Állítás. *A csúcsok száma (n), az élek száma (e), a páros csúcsból álló, páratlan csúcsból álló és összes komponensek száma (c_0, c_1, c), a gráf csúcsainak fokszámainak minimuma (δ), maximuma (Δ) és átlaga (d), a gráfban lévő legnagyobb klikk mérete (ω), a gráfban található független csúcsok maximális száma (α), független élek maximális száma – azaz a gráfban lévő legnagyobb párosítás mérete (ν) – továbbá a legkisebb lefogó csúcshalmaz mérete (τ), a legkisebb domináló halmaz mérete (γ) és a lefedő élek minimális száma (ρ) gráfparaméterek.*

Bizonyítás: Mivel a gráfizomorfizmus szomszédos csúcsokat szomszédos csúcsokba, nem szomszédosakat pedig nem szomszédosakba visz, így független halmaz képe független, lefedő halmaz képe lefedő, domináló halmaz képe domináló, lefogó csúcshalmaz képe lefogó, ugyanígy az izomorfia klikket klikkbe visz, az összefüggő komponensek az izomorfia után is összefüggőek, a nem összefüggőek nem összefüggőek maradnak. A bijekciónak köszönhetően a csúcsok száma és az élek száma megegyezik izomorf gráfokban. Ezek pusztán a gráf ismeretében kiszámítható tulajdonságok. □

Monotonok-e ezek a függvények? A csúcsok n és élek e számáról könnyedén megállapíthatjuk, hogy monoton nőnek, hiszen ha egy gráf egy másikat részgráfként tartalmaz, biztosan legalább annyi csúcsból és élből áll, mint részgráfja. A többi gráfparaméterről is belátható a következő.

2.8. Állítás. *A csúcsok száma (n), az élek száma (e), legnagyobb fokszám (Δ), a legkisebb lefogó csúcshalmaz mérete (τ), a legnagyobb párosítás mérete (ν) és a legnagyobb klikk mérete (ω) monoton növő.*

A legnagyobb független ponthalmaz mérete (α) és a legkisebb lefedő élhalmaz mérete (ρ) nem monoton *függvények, viszont* feszítetten monoton növők.

A legkisebb fokszám (δ), az átlagos fokszám (d), az összes (illetve páros és páratlan) komponensek száma (c, illetve c_0 és c_1), továbbá a legkisebb domináló halmaz mérete (γ) egyik monotonitás fogalma szerint sem *monotonok.*

Bizonyítás: A legnagyobb Δ fokszám semmiképp sem lehet nagyobb a részgráfban, mint az eredeti gráfban, ellenben a legkisebb δ fokszám növekedhet vagy csökkenhet is függően attól, a gráfnak mely részgráfját tekintjük. Ezek miatt az átlagos d fokszám sem monoton függvény. Ha egy több komponensből álló (legalább egy élet tartalmazó) gráf egyetlen komponensét vesszük részgráfként, akkor a részgráf komponenseinek c száma kisebb, mint az eredeti gráfban, de ha például az eredeti gráf összes csúcsát tekintjük mint részgráfot (élek nélkül, vagy feszített részgráf képzésekor egy komponensen belül olyan csúcsokat, amelyek nincsenek éllel összekötve), a komponensek c száma növekedik. Ugyanígy nem állapítható meg monotonitás a páros vagy páratlan csúcsot tartalmazó komponensek c_1 illetve c_0 száma esetében sem.

Az, hogy a gráf részgráfjában bizonyos számú független csúcs van, nem mond el semmit arról, hogy a gráf egészében mennyi van ezekből, mivel két csúcs függetlenségét egy további éllel elronthatjuk vagy éppen növelhetjük számukat további, az eddigiektől független csúcsok hozzá vételével. Viszont ha egy ponthalmaz független egy feszített részgráfban, akkor független lesz az eredeti gráfban is (hiszen a feszített részgráf az eredeti gráf összes olyan élét tartalmazza, ami a részgráf pontjai között fut).

A független élek maximális száma megint monoton, mert azok az élek, amelyeknek nincs közös végpontjuk egy részgráfban, azoknak az eredeti gráfban sem lesz közös végpontjuk, tehát egy részgráf minden független élhalmaza az eredeti gráfnak is független élhalmaza.

A γ ellenben feszítetten sem monoton függvény. Attól függően, hogy domináló halmazbeli vagy egyéb csúcsot törlünk, csökkenhet vagy nőhet a részgráfban a domináláshoz szükséges csúcsok minimális száma.

A lefedő élek halmaza ugyan nem monoton, növekedhet és csökkenhet is számuk a részgráfban, például azzal, ha az 1-fokú csúcsok száma növekedik vagy csökken, hiszen ezek lefogására mindenképp külön élek kellenek (ha ezek nem éllel összekötött csúcspárok). Feszítetten viszont monoton nő. Vegyünk a gráfból néhány csúcsot. Az eredeti gráf lefedő élei közül azok bekerülnek az így feszített részgráfba, amelyeknek mindegyik végpontja szintén ott van a feszített részgráfban. Azokra a csúcsokra, amelyek lefedő éle nem került be, mert a másik végpont nincs a részgráfban, másik élet kell találnunk, amely lefedi. (Ha tartozik egyáltalán másik él a csúcshoz a részgráfban; ellenkező esetben nem értelmezzük a ρ-t a részgráfon.) Viszont minden lefedetlen csúcshoz csak egy új él kell, amely lefedi, így nem kellhet több él a feszített részgráfban a csúcsok lefedéséhez, mint amennyi az eredeti gráfban kellett.

Ha egy részgráf tartalmaz egy élet az eredeti gráfból, rögtön (legalább) egy olyan csúcsot is tartalmaz, amely benne van az eredeti gráf lefogó csúcshalmazában, hiszen annak minden élet le kell fognia, így a τ monoton növő függvény.

Az ω szintén monoton nő, mivel a gráf részgráfja nem fog nagyobb klikket tartalmazni, mint amekkora az eredeti gráfban megtalálható. $\square$

2.3. Néhány további strukturális gráfparaméter

A szakdolgozat során behatóan tanulmányozni fogjuk ezeket és más tanult gráfparamétereket is. Mivel képtelenség lenne a létező összes gráfparamétert bemutatni (a gráfok rengeteg tulajdonságát vehetjük gráfparaméter alapjául, és ezek összege, különbsége ugyancsak gráfparaméter lesz), ízelítőül tekintsünk meg néhány új, érdekes fogalmat, amelyek a gráfelméletben használatosak, bár a szakdolgozatban nem, vagy ritkán fognak előkerülni.

A következőkben strukturális gráfparamétereket fogok bevezetni. Ezek némelyike elő fog kerülni gráfparaméterek értékeinek becslésekor. A $G = (V, E)$ gráfban az x és y csúcsok közötti lehető legrövidebb utat a két pont *távolságának* nevezzük, és $\operatorname{dist}(x, y)$-nal jelöljük. A $G = (V, E)$ gráf egy x csúcsából kiinduló lehető leghosszabb utat a csúcs *excentricitásának* nevezzük, $\operatorname{ecc}(x)$-szel jelöljük. A maximális excentricitású pontokat *periférikus csúcsoknak* hívjuk, a minimális excentricitású csúcsok alkotják *a gráf középpontját*. Könnyen beláthatjuk, hogy fának legfeljebb két középponti csúcsa lehet, míg egy csillag egyetlen középponttal rendelkezik.

2.9. Definíció (Rádiusz). A $G = (V, E)$ gráf $\operatorname{rad}(G)$ *rádiusza* az összes csúcsának excentricitásának minimuma.

2.10. Definíció (Átmérő). A $G = (V, E)$ gráf *átmérője* az összes csúcsának excentricitásának maximuma, azaz a gráfban lévő leghosszabb út. Jele: $\operatorname{diam}(G)$.

2.11. Tétel (Átmérőbecslés [3, Theorem 4]**).** *Ha a G gráf összefüggő, akkor*

$$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2\operatorname{rad}(G)$$

Bizonyítás: A $\operatorname{rad}(G)$ a gráf összes pontjára vonatkozó excentricitások minimuma, $\operatorname{diam}(G)$ ugyanezek maximuma, tehát köztük ez a viszony nyilván fennáll.

Van a gráfnak egy u pontja, aminek az excentricitása éppen $\operatorname{rad}(G)$. (Mivel $\operatorname{rad}(G)$ az $\operatorname{ecc}(v)$-k minimuma minden v-re, létezik ilyen csúcs.) Ha legalább három pontú a gráf, akkor létezik még két csúcs (v és w), és mind a kettő maximum $\operatorname{rad}(G)$ távolságra van u-tól. Ekkor v és w maximum $2\operatorname{rad}(G)$ távolságra lehet egymástól, hiszen ha messzebb lennének, u-ból is találnánk beléjük $\operatorname{rad}(G)$-nél hosszabb utat. (Ha a gráfban nincs másik két csúcs, akkor két pontból áll, ezek össze vannak kötve egy éllel. Ekkor $\operatorname{rad}(G) = \operatorname{diam}(G)$.) □

Ez a fenti 2.11. Tétel egy tipikus példája annak, hogy milyen állítások tehetők gráfparaméterek egymáshoz való viszonyáról.

2.12. Definíció (Derékbőség). A $G = (V, E)$ gráf girth(G) *derékbősége* a benne lévő legrövidebb kör hossza, ha a gráfban van kör.

Páros (egyszerű) gráfok derékbősége minimum 4, hiszen nem lehet bennük páratlan kör, sem párhuzamos élek.

Mi a helyzet akkor, ha a gráfban nincs kör, azaz ha a gráfunk erdő? A fenti definíció erre nem mond semmit, ez a gráfparaméter tehát egyelőre nem az egész $\mathcal{G}$ halmazon van értelmezve. Szokás az üres halmaz infimumát plusz végtelenként (szuprémumát pedig mínusz végtelenként) definiálni, ezért lehetne a körmentes gráf (erdő) derékbőségét plusz végtelenként meghatározni, hiszen a kört tartalmazó gráfok esetén a gráfban lévő körök hosszúságainak halmazának minimuma a girth; de mint írtuk, a végtelen értékű függvényeket szeretnénk elkerülni.

A későbbiekben előfordul majd, hogy a derékbőséget más gráfparaméterrel vetjük össze, és ezt az összefüggést szeretnénk majd körmentes gráfra is értelmessé tenni. Ezért végtelen helyett egy kellően nagy (de véges) számként fogjuk meghatározni a girth értékét erdőkre, olyan nagyként, amiről rögtön látszik, hogy a gráfnak nem lehet ez a derékbősége, de a képletben jól alkalmazható lesz.

2.13. Definíció (Kerület). A $G = (V, E)$ gráf circ(G) *kerülete* a benne lévő leghosszabb kör hossza. Ha a gráfban nincs kör, ez a szám nulla.

Vegyük észre, hogy ha a gráfban a kerület egyenlő a csúcsok számával, az azt jelenti, hogy a gráfban létezik olyan kör, amely minden csúcson áthalad. Ezt *Hamilton-körnek* nevezzük, és persze ha a gráfban van Hamilton-kör, akkor a gráf kerülete szükségképpen n.

3. Síkgráfok, tartományok száma

Rengeteg olyan összefüggést fogunk felállítani gráfparaméterek között – már láttunk is ilyet –, amely során az egyik paraméter értékét egy másik paraméter értékével becsüljük. Az ebben a fejezetben tárgyalt Euler-formula azonban olyan összefüggés, ami azt mondja ki, hogy gráfparaméterek közül néhányan *lineárisan összefüggenek* a gráfparaméterek vektorterében. Mivel az egyik gráfparaméter ezek közül a tartományok száma, és ezt (eltekintve a bonyolultabb felületekre való lerajzolhatóságtól) csak síkbarajzolható gráfok esetén értelmezzük, ez a formula nem az egész $\mathcal{G}$ halmazon értelmes, csak egy részhalmazán.

Ha egy gráfot élkeresztezés nélkül lerajzolunk a síkba (amennyiben ezt meg tudjuk tenni), az élek által körbekerített tartományok száma is egy jellemzője a gráfnak. Mint látni fogjuk, ez ugyancsak gráfparaméter lesz. Előbb azonban szükséges a síkbarajzolás definíciója.

3.1. Definíció (Síkbarajzolás). A $G = (V, E)$ gráf síkbarajzolása egy $r_V : V \to \mathbb{E}^2$ függvény, ami a G gráf csúcsainak $V(G)$ halmazát az euklideszi $\mathbb{E}^2$ sík pontjainak halmazába képezi; és egy r_E függvény, ami a G gráf minden $\{x, y\}$ éléhez hozzárendel egy folytonos, $r_V(x)$ kezdőpontú, $r_V(y)$ végpontú síkgörbét úgy, hogy a különböző élekhez rendelt síkgörbék belső pontjai nem metszik sem egymást, sem a gráf pontjainak képpontjait. Az euklideszi síkba a fenti módon lerajzolt gráfot *síkgráfnak* nevezzük. Egy gráfot *síkbarajzolhatónak* nevezünk, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei nem metszik egymást (azaz ha létezik síkbarajzolása).

3.2. Megjegyzés. Ha a G gráf éleinek megfeleltetett síkgörbékről nem várjuk el, hogy ne messék egymást, akkor csak a G gráfnak egy síkba lerajzolt reprezentációjáról beszélünk, ami nem feltétlenül „síkbarajzolás” a fenti definíció szerint.

3.3. Definíció (Keresztezési szám). Egy G gráf *keresztezési száma* az összes síkba rajzolt reprezentációi közül annak az éleinek metszéspontjainak száma, ahol ez a lehető legkevesebb. Ezt a számot $\mathrm{cr}(G)$ jelöli.

Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha a keresztezési száma nulla.

A síkgráf egy körét alkotó pontok és élgörbék két részre vágják a síkot. (Persze mindkét részt további részekre vághatják a további körök.) Ha a síkgráf minden körére elvégezzük a sík szétvágását, ennek az eljárásnak az eredményeként a sík véges sok darabját kapjuk, ezeket hívjuk a síkgráf tartományainak.

Ha egy *egyszerű* gráf síkbarajzolható, akkor a Fáry-Wagner Tétel [7, 2.5.10. Tétel] szerint van olyan síkbarajzolása is, ahol az éleinek megfeleltetett síkgörbék a csúcsaihoz rendelt képpontokat összekötő egyenes szakaszok. Ebben az esetben a gráf tekinthető úgy, mintha a V csúcshalmaz az $\mathbb{E}^2$ euklideszi sík pontjainak egy véges részhalmaza lenne, és az élek halmaza ezen csúcsokból álló bizonyos párok halmaza (hiszen egy egyenes szakaszt egyértelműen meghatároz a két végpontja).

3.4. Definíció (Tartományok). Egy $G = (V \subset \mathbb{E}^2, E)$ síkgráf élei mint síkgörbék az euklideszi síkot összefüggő *tartományokra*, más néven *lapokra* darabolják. Ezen tartományok számát $l(G)$ jelöli, de az angol szakirodalomban a „face” szóból $f(G)$ is jelölheti.

Az egyenes szakaszokkal lerajzolt (egyszerű) síkgráf tartományai tehát sokszögek.

3.5. Definíció (Duális gráf). A $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf *duálisa* az a gráf, amelynek csúcsai az eredeti gráf tartományai, és két csúcs akkor van összekötve, ha az eredeti gráfban a két tartomány szomszédos volt, méghozzá annyi éllel, ahány él mentén szomszédos volt a két tartomány.

A duális gráf tehát síkgráf, de nem feltétlenül egyszerű gráf. Vannak ráadásul olyan síkbarajzolható gráfok, amelyeket több (lényegesen különböző) módon is le lehet rajzolni a síkba. Lényegesen különböző síkbarajzolásnak azt nevezzük, ha a gráf két síkbarajzolt reprezentációjában az egyes tartományokat határoló élek száma között van két különböző. Ekkor a kétféleképpen lerajzolt gráfok duálisai különbözőek lesznek.

3.1. Az Euler-formula tetszőleges síkgráfra

Az alapszakon tanított Euler-formulát csak *összefüggő* síkgráfokra mondtuk ki, és az azt állította, hogy $n(G) + l(G) = e(G) + 2$, ahol $n(G)$ a csúcsok száma, $l(G)$ a tartományok száma, és $e(G)$ az élek száma. De ez a formula általánosítható nem feltétlenül összefüggő síkgráfokra is a következőképpen.

3.6. Tétel (Euler-formula). *Az $n(G)$ pontot és $e(G)$ élet tartalmazó, $c(G)$ összefüggőségi komponensből álló $G = (V \subset \mathbb{E}^2, E)$ síkgráf tartományainak $l(G)$ számára teljesül, hogy $n(G) + l(G) = e(G) + c(G) + 1$.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy minden korlátos tartományt a gráf egy köre határol. Így egy erdő egyetlen, korlátlan tartományra bontja a síkot. Az erdő éleinek száma $n(g) - c(G)$, így az Euler-formula igaz rá. Minden egyéb, kört tartalmazó gráfnál alkalmazhatjuk a következő eljárást: a gráf egy köréből vegyünk el egy élt. Ez az él addig határa volt egy a körön belüli és egy a körön kívüli tartománynak. Az elvételével eggyel csökkentettük az élek számát, és a lapok száma is eggyel kevesebb lett, mivel egyesítettük a kettőt. Így ha az új gráfra érvényes az Euler-formula, akkor a régire is az volt. Ezt az eljárást alkalmazzuk mindaddig a gráfra, amíg csak van benne kör. Ekkor a gráf egy feszítőerdejéhez jutunk, amire az előbbiek szerint igaz az Euler-formula, így az eredeti gráfra is. □

Mivel az Euler-formulában a csúcsok, az élek és az összefüggőségi komponensek száma mindannyian gráfparaméterek, ezért ezek $l(G) = e(G) + c(G) + 1 - n(G)$ kombinációja is olyan függvény, ami izomorf gráfokhoz ugyanazt a számot rendeli, így a síkgráf tartományainak száma szintén gráfparaméter (méghozzá az első három alapján kiszámítható). Az Euler-formula tehát gráfparaméterek közötti azonosság. Ez azt is jelenti, hogy bár a tartományok számának definíciójához szükség volt a síkbarajzolható gráf egy konkrét lerajzolására a síkban, a tartományok száma végső soron független a síkbarajzolás konkrét megvalósításától.

3.2. Élszámbecslések

Az ebben az alfejezetben közölt állítás és tétel az alapszakon tanult élszámbecslés kis általánosítása, amely Fancsali Szabolcsnak köszönhető. Bár csak egyenlőtlenséget ad a gráf paraméterei között (szemben Euler tételével), az előnye az, hogy a felhasznált paraméterek G-ből annak síkra rajzolása nélkül is könnyen kiolvashatók.

3.7. Állítás. *Egyszerű, nem körmentes G síkgráfra* $e(G) \leq \frac{(n(G)-c(G)-1)\,\mathrm{girth}(G)}{\mathrm{girth}(G)-2}$.

Bizonyítás: Egy olyan gráfban, amelyben a derékbőség, azaz a benne lévő legkisebb kör hossza $\mathrm{girth}(G)$, egy lapot legalább ennyi él határol (hiszen ez a duális megfelelő csúcsának fokszáma). Másfelől az összes lapot határoló élek összege (a duális gráf fokszámösszege) a gráf éleinek számának kétszerese, $2e$. Így $\mathrm{girth}(G) \cdot l \leq 2e$, azaz $l \leq \frac{2e}{\mathrm{girth}(G)}$. Ezt behelyettesítve az Euler-formulába: $e \leq n(G) + \frac{2e}{\mathrm{girth}(G)} - c(G) - 1$. Átrendezéssel, az egyenlőtlenség mindkét oldalának $\mathrm{girth}(G)$-vel való felszorzásával és kiemeléssel az állítás adódik. □

A girth persze nincs konkrétan definiálva erdőre. Viszont körmentes gráf (ami természetesen mindig síkbarajzolható) élszámára ismert az $e(G) = n(G) - c(G)$ összefüggés. Ha erdő derékbőségét akarjuk értelmezni, akkor az $n - c \leq \frac{(n-c-1)\,\mathrm{girth}}{\mathrm{girth}-2}$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell (ha azt akarjuk, hogy a 3.7. Állítás igaz maradjon erdőkre is). Ekkor $(n-c)\,\mathrm{girth} - 2(n-c) \leq (n-c)\,\mathrm{girth} - \mathrm{girth}$, ha $\mathrm{girth} \neq 2$, és így $\mathrm{girth} \leq 2(n-c)$ következik.

Erdő derékbőségét jó nagy pozitív egészként szerettük volna definiálni, de mint látjuk, ez nem lehet tetszőlegesen nagy. Sőt, ha sok komponensből áll, még csak azt sem érhetjük el, hogy legalább a pontszámnál nagyobb legyen (és ebből rögtön látszódjon, hogy nem lehet igazi körnek a hossza).

Viszont a fenti 3.7. Állításban igazából nem is a derékbőség szerepel, ha jól megfigyeljük, hanem egy másik paraméter: ez pedig a legkevesebb éllel határolt tartományt határoló élek száma. Ez utóbbi csak síkgráfra értelmes paraméter, ami viszont nem körmentes gráf esetén megegyezik a girth értékével, erdő esetén pedig megegyezik $2(n-c)$ értékkel.

Tehát a girth nincs értelmezve körmentes gráfokra, ez a fenti paraméter nincs értelmezve síkba nem rajzolható gráfokra, viszont ahol mindkettő értelmezve van, ott egyenlők. Ez adja a girth fogalmának természetes kiterjesztését minden véges egyszerű gráfra: Ha van a gráfban kör, akkor a legrövidebb kör hossza, ha pedig a gráf körmentes, akkor az élszámának kétszerese.

Most, hogy a girth derékbőséget minden gráfra értelmeztük, megfogalmazhatjuk a 3.7. Állítást tágabb érvényességi körben.

3.8. Tétel. *Minden egyszerű, nem csupán egyetlen élet tartalmazó G síkgráfra*

$$e(G) \leq (n(G) - c(G) - 1)\left(1 + \frac{2}{\operatorname{girth}(G) - 2}\right),$$

illetve minden egyszerű, összefüggő és legalább hárompontú G síkgráfra

$$e(G) \leq (n(G) - 2)\left(1 + \frac{2}{\operatorname{girth}(G) - 2}\right). \qquad \square$$

Vigyázni kell az egyetlen élet tartalmazó gráf esetén, amikor a komponensek száma pontosan eggyel kisebb, mint a pontszám, azaz $n - c = 1$, és így girth $= 2$. Ekkor nullával kellene osztanunk a fenti képletben, és így nullaszor végtelen jönne ki az egyetlen él számának felső becslésére. Sajnos ez a képlet így nem tudott teljesen általánossá lenni.

A 3.8. Tételből következik az általános és páros egyszerű síkgráfokra szóló lemma is, mivel előbbiben legkevesebb 3-hosszú kör szerepelhet, utóbbinak derékbősége legalább 4, hiszen páratlan kört nem tartalmazhat.

3.9. Következmény. *Tetszőleges G egyszerű (nem egyetlen élet tartalmazó) síkgráfra $e(G) \leq 3(n(G) - c(G) - 1) \leq 3n(G) - 6$. Tetszőleges G egyszerű (nem egyetlen élet tartalmazó), páros síkgráfra $e(G) \leq 2(n(G) - c(G) - 1) \leq 4n(G) - 8$.*

A végső $e(G) \leq 3n(G) - 6$ és $e(G) \leq 4n(G) - 8$ képleteket úgy kapjuk, ha az esetleg nem feltétlenül összefüggő gráfba még behúzunk annyi élet, hogy éppen összefüggő legyen. Ekkor a „nem egyetlen élet tartalmazó” kitétel „legalább három pontú” feltétellel helyettesíthető.

4. Strukturális gráfparaméterek mohó változatai

Ebben a fejezetben néhány strukturális gráfparamétert fogok általánosítani a következő módon: A bevezető fejezetekben megemlített strukturális gráfparaméterek bizonyos speciális tulajdonsággal rendelkező részstruktúrák (például lefogó ponthalmazok vagy utak) közül a legkisebbek, illetve legnagyobbak méretét adták meg (legkisebb lefogó ponthalmaz, leghosszabb út). De ilyen speciális tulajdonsággal rendelkező részstruktúrák egymásnak is lehetnek részei, így legkisebb méretű helyett beszélhetünk olyanokról, amelyeknek már nincs ugyanezzel a speciális tulajdonsággal rendelkező valódi része (például olyan lefogó halmaz, aminek minden valódi része már nem lefogó); illetve legnagyobb helyett beszélhetünk olyanról, amit nem tartalmaz nála nagyobb (ilyen például a bővíthetetlen út, aminél persze hosszabb út lehet a gráfban, csak őt már újabb éllel nem tudjuk meghosszabbítani).

Általában, amikor mohó módon (úgynevezett mohó algoritmussal) próbálunk speciális tulajdonságú részstruktúrát keresni, akkor valamikor megtaláljuk a legnagyobb (legkisebb) struktúrát (mint például feszítő fánál), van amikor pedig elakadunk egy tovább már nem bővíthető (tovább már nem szűkíthető) részstruktúránál, ami mégsem lesz a lehető legnagyobb (lehető legkisebb). Mohó algoritmussal keresett részstruktúránál a konkrét végeredményt általában az a sorrend határozza meg, amilyen sorrendben újabb és újabb elemekkel próbáljuk bővíteni (vagy szűkíteni) a kiinduló halmazunkat.

Emlékezzünk, hogy az 1.10. Definíció szerint a $G(V,E)$ gráf csúcsainak egy A halmaza *független*, ha az A által feszített részgráf nem tartalmaz élt. A 2.6. Definíció szerint csúcsok egy T halmaza *lefogó*, ha tetszőleges $e \in E$ élre e-nek legalább az egyik végpontja A-beli. Az 1.8. Definíció szerint a $G(V,E)$ gráf éleinek egy M halmaza *független*, ha az M beli élek végpontjai mind különbözők (M hurokéleket sem tartalmazhat). Az 1.13. Definíció szerint az élek egy R halmaza *lefedő*, ha tetszőleges $v \in V$ csúcsra v legalább egy R-beli élnek a végpontja. Az 1.16. Definíció szerint a csúcsok egy D halmaza *domináló*, ha tetszőleges $v \in V \setminus D$-beli csúcsnak legalább az egyik szomszédja D-beli.

Tetszőleges G gráfban $\emptyset$ független csúcshalmaz, V lefogó és domináló csúcshalmaz, továbbá $\emptyset$ független élhalmaz. Ezen felül, amennyiben G nem tartalmaz izolált csúcsot, E lefedő élhalmaz. (Ha G-ben van izolált csúcs, akkor nincs lefedő élhalmaza.)

Ha A független csúcshalmaz, akkor tetszőleges $A' \subseteq A$ részhalmaza is független, ha T lefogó csúcshalmaz, akkor a T-t tartalmazó tetszőleges $T' \supseteq T$ csúcshalmaz is lefogó; és ugyanez igaz az élekre: ha M független élhalmaz (párosítás), akkor ennek tetszőleges $M' \subseteq M$ részhalmaza is független, ha R lefedő élhalmaz, akkor az R-et tartalmazó tetszőleges $R' \supseteq R$ élhalmaz is lefedő. Továbbá, ha a D csúcshalmaz domináló, akkor a D-t tartalmazó tetszőleges $D' \supseteq D$ csúcshalmaz is domináló. Ezek indokolják az alábbi definíciókat:

4.1. Definíció. Az A független csúcshalmaz *bővíthetetlen*, ha tetszőleges $v \in V \setminus A$-ra $A \cup \{v\}$ nem független; a T lefogó csúcshalmaz *szűkíthetetlen*, ha tetszőleges $v \in T$-re $T \setminus \{v\}$ nem lefogó. A D domináló csúcshalmaz *szűkíthetetlen*, ha tetszőleges $v \in D$ esetén $D \setminus \{v\}$ nem domináló.

Ugyanígy, az M független élhalmaz *bővíthetetlen*, ha tetszőleges $e \in E \setminus M$-ra $M \cup \{e\}$ nem független; illetve az R lefedő élhalmaz *szűkíthetetlen*, ha tetszőleges $e \in R$-re $R \setminus \{e\}$ nem lefedő.

Adott G gráf esetén jelölje a bővíthetetlen független csúcshalmazok halmazát $\mathcal{A}(G)$, a szűkíthetetlen lefogó csúcshalmazok halmazát $\mathcal{T}(G)$, a szűkíthetetlen domináló csúcshalmazok halmazát $\mathcal{D}(G)$, a bővíthetetlen független élhalmazok halmazát $\mathcal{M}(G)$, a szűkíthetetlen lefogó élhalmazok halmazát pedig $\mathcal{R}(G)$. Ezek segítségével definiáljuk az alábbi gráfparamétereket, amelyek szisztematikus jelölését Hermann György vezette be. A végtelen értékek elkerülése érdekében $\underline{\rho}(G)$ és $\overline{\rho}(G)$ definiálásakor feltesszük, hogy a G gráf nem tartalmaz izolált csúcsokat.

4.2. Definíció (Hermann-jelölés [5]).

$$
\begin{aligned}
\underline{\alpha}(G) &= \min\{|A| : A \in \mathcal{A}(G)\} &\leq\quad& \overline{\alpha}(G) = \max\{|A| : A \in \mathcal{A}(G)\}\\
\underline{\tau}(G) &= \min\{|T| : T \in \mathcal{T}(G)\} &\leq\quad& \overline{\tau}(G) = \max\{|T| : T \in \mathcal{T}(G)\}\\
\underline{\gamma}(G) &= \min\{|D| : D \in \mathcal{D}(G)\} &\leq\quad& \overline{\gamma}(G) = \max\{|D| : D \in \mathcal{D}(G)\}\\
\underline{\nu}(G) &= \min\{|M| : M \in \mathcal{A}(G)\} &\leq\quad& \overline{\nu}(G) = \max\{|M| : M \in \mathcal{M}(G)\}\\
\underline{\rho}(G) &= \min\{|R| : R \in \mathcal{R}(G)\} &\leq\quad& \overline{\rho}(G) = \max\{|R| : R \in \mathcal{R}(G)\}
\end{aligned}
$$

Tehát az $\overline{\alpha}(G)$ a legnagyobb független csúcshalmaz, $\underline{\tau}(G)$ a legkisebb lefogó csúcshalmaz, $\underline{\gamma}(G)$ a legkisebb domináló csúcshalmaz, $\overline{\nu}(G)$ a legnagyobb független élhalmaz, $\underline{\rho}(G)$ pedig a legkisebb lefedő élhalmaz mérete. Azaz ezek megfelelnek a szokásos $\alpha(G)$, $\tau(G)$ $\gamma(G)$, $\nu(G)$ és $\rho(G)$ jelöléseknek. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a későbbiekben az új jelöléseket fogjuk használni. A definíciók alapján az is nyilvánvaló, hogy $\underline{\alpha}(G) \leq \overline{\alpha}(G)$, $\underline{\tau}(G) \leq \overline{\tau}(G)$, $\underline{\gamma}(G) \leq \overline{\gamma}(G)$, $\underline{\nu}(G) \leq \overline{\nu}(G)$ és $\underline{\rho}(G) \leq \overline{\rho}(G)$.

4.1. Gallai-típusú tételek

Ebben a fejezetben kimondom Gallai klasszikus tételeit, és bemutatom, hogy ezeknek a tételeknek az érvényességét hogyan terjesztette ki Héger Tamás és Hermann György a mohó gráfparaméterekre.

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy ha A független csúcshalmaz, akkor $T = V \setminus A$ lefogó és viszont, ha T lefogó, akkor $A = V \setminus T$ független; sőt, az is látszik, hogy bővíthetetlen független halmaz komplementere szűkíthetetlen lefogó, és szűkíthetetlen lefogó halmaz komplementere bővíthetetlen független. Tehát $\underline{\alpha}(G) + \overline{\tau}(G) = n(G)$ és $\overline{\alpha} + \underline{\tau}(G) = n(G)$. Az utóbbi egyenlőséget a szokásos jelölések mellett $\alpha + \tau = n$ alakban írhatjuk, ez Gallai tétele hurokélmentes gráfokra.

4.3. Tétel (Gallai [6, 2.5.6. Tétel] **és általánosítása** [5]**).**

$$\overline{\alpha}(G) + \underline{\tau}(G) = n(G)$$
$$\underline{\alpha}(G) + \overline{\tau}(G) = n(G).$$

minden hurokélmentes G gráfra.

Gallai egy másik tétele – mely szerint $\nu + \rho = n$ – akkor fogalmazható meg, ha a gráfban nincsenek izolált pontok.

4.4. Tétel (Gallai [6, 2.5.7. Tétel]**).** $\overline{\nu}(G) + \underline{\rho}(G) = n(G)$ *minden gráfra, amelyben nincs izolált pont.*

Bizonyítás: Legyen R egy legkisebb méretű lefogó élhalmaz, ekkor R komponensei legalább kétpontú csillagok (esetleg nem egyszerű gráf esetén még hurokélek). Legyen M egy olyan élhalmaz, amely minden csillagnak pontosan egy élét tartalmazza, ekkor M független, és $|R| + |M| = |V|$.

Indirekt tegyük fel, hogy van M-nél nagyobb független élhalmaz. Legyen ez M', és ennek mérete legyen maximális. Ekkor ha a gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor tetszőleges M' által fedetlen v pontra csak hurokél vagy olyan él illeszkedik, amelynek másik végpontja M' által fedett (különben lenne M'-nél nagyobb független élhalmaz). Minden csúcsra választva egy ilyen élt lefedő élhalmazt kapunk, legyen ez R'. Ekkor $|R'| = |M'| + |V \setminus V(M')| = |M'| + |V| - 2|M'| = |V| - |M'| < |V| - |M| = |R|$, ami ellentmondás. □

A Hermann György által bizonyított, a fentihez analóg tétel érvényes a $\underline{\gamma}$ és $\overline{\rho}$ gráfparaméterekre:

4.5. Tétel (Hermann [5]**).** $\underline{\gamma}(G) + \overline{\rho}(G) = n(G)$, *amennyiben az utóbbi értelmes, azaz G-ben nincs izolált csúcs.*

Bizonyítás: Legyen D szűkíthetetlen domináló csúcshalmaz, és legyen R egy olyan élhalmaz, amelynek minden éle D és $V \setminus D$ között fut, továbbá minden

$v \in V \setminus D$-re pontosan egy olyan R-beli él van, amely lefogja v-t. Ekkor R szűkíthetetlen lefogó. Vegyük észre, hogy D minimalitása miatt minden $u \in D$-re létezik $v \in V \setminus D$, hogy $uv \in R$. Tehát R egy erdő, amelynek a komponensei legalább egy élt tartalmazó csillagok. Mivel a komponensek száma éppen $|D|$, így $|D| + |R| = |V|$.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan R' szűkíthetetlen lefogó élhalmaz, amelyre $|R| < |R'|$. Ekkor R' nem tartalmaz három élből álló utat, így a komponensei csillagok. Ezen csillagok középpontjai egy szintén egy D' domináló csúcshalmazt alkotnak, így $|D'| + |R'| = |V|$, amiből $|D'| = |V| - |R'| < |V| - |R| = |D|$ adódik, ez viszont ellentmond D minimalitásának. Így R maximális szűkíthetetlen lefogó élhalmaz, azaz a $|D| + |R| = |V|$ egyenlőség éppen a tétel állítását adja. □

A fenti „Gallai-típusú” tételek „komplementerpárokba” rendezik a gráfparamétereket: $\underline{\alpha} + \overline{\tau} = \overline{\alpha} + \underline{\tau} = \underline{\gamma} + \overline{\rho} = \overline{\nu} + \underline{\rho} = n$. Jegyezzük meg, hogy $\overline{\gamma}$ és $\underline{\nu}$ paramétereknek nincs komplementerpárjuk a fent definiált paraméterek között.

4.2. Egyenlőtlenségek mohó gráfparaméterek között

Ebben a fejezetben ismertetem a strukturális gráfparaméterek közötti összefüggéseket, amelyeket az alapképzés során megtanultunk. Héger Tamás és Hermann György ezeket általánosították a taglalt gráfparaméterek mohó változataira, az ő eredményeiket is itt ismertetem.

4.6. Tétel ($\nu \leq \tau$ [6, 2.5.4 Tétel]). *Minden G gráfra $\overline{\nu}(G) \leq \underline{\tau}(G)$.*

Bizonyítás: Legyen M egy $\overline{\nu}(G)$ méretű független élhalmaz G-ben, R pedig egy $\underline{\tau}$ méretű lefogó ponthalmaz. Mivel M minden éléhez egy külön csúcs szükséges, hogy lefogja azt (nincs az éleknek közös végpontja, hiszen függetlenek), $\overline{\nu}(G) = |M| \leq |R| = \underline{\tau}$ adódik. □

Hasonlóan látható be a következő tétel is.

4.7. Tétel ($\alpha \leq \rho$ [6, 2.5.5 Tétel]). *Minden G gráfra $\overline{\alpha}(G) \leq \underline{\rho}(G)$, ha utóbbi értelmes, azaz G nem tartalmaz izolált pontot.*

A következő Héger Tamás tétele, amellyel megkezdődik a szűkíthetetlen domináló csúcshalmaz minimális számának beolvasztása az alapszakon tanult független és lefogó csúcs- és élhalmazokra vonatkozó gráfparaméterek közé, és megnyílik az ezek között fennálló összefüggések sora.

4.8. Tétel (Héger [4]). *Minden G gráfra $\overline{\gamma}(G) \leq \underline{\rho}(G)$, ha utóbbi értelmes, azaz G nem tartalmaz izolált pontot.*

Bizonyítás: Legyen D domináló halmaz. Egy $v \in D$ csúcsra jelölje $\Gamma(v)$ azon csúcsok halmazát, amiket $D \setminus \{v\}$ nem dominál. Ekkor a definícióból adódik, hogy

1. v dominálja $\Gamma(v)$-t;
2. $\Gamma(v) \cap \Gamma(v) = \emptyset$ minden $u, v \in D$, $u \neq v$-re.
3. $\Gamma(v) \cap D \subseteq \{v\}$;
4. $v \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v$ izolált csúcs a D által feszített részgráfban;
5. D akkor és csak akkor szűkíthetetlen, ha minden $v \in D$-re $|\Gamma(v)| \geq 1$;

Legyen D szűkíthetetlen domináló halmaz a $G = (V, E)$ gráfban. Legyen R egy szűkíthetetlen lefedő élhalmaz G-ben. Jelölje rendre R_0, R_1 és R_2 azon R-beli élek halmazát, melyeknek 0,1, illetve 2 pontja van D-ben. Az R_0, R_1 és R_2 halmazok particionálják R-et.

Legyenek $G' = (V, R)$ összefüggőségi komponensei $S_1, \ldots, S_t$. Minden i-re $(1 \leq i \leq t)$ S_i csillag. S_i ponthalmazát jelölje V_i, középpontját c_i, annak fokszámát pedig d_i. Amennyiben S_i egyetlen élből áll, c_i legyen eme él tetszőlegesen választott egyik végpontja.

Feltehető, hogy pontosan az első k csillag pontjai vannak teljes egészében D-ben, azaz $|V_i \cap D| = d_i + 1 \Leftrightarrow 1 \leq i \leq t$. Legyen $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$.

Mivel R lefedő, D minden pontja valamelyik csillagban van. Legyen $v \in D \cap S_i$. Ha $v \neq c_i$ (azaz v nem középpontja S_i-nek), akkor v-ből pontosan egy R-beli él indul ki; rendeljük ezt az élt v-hez. Ha $v = c_i$ és $i > t$, akkor S_i-nek van olyan u levele, ami nincs D-ben (mivel S_i-nek van D-n kívüli csúcsa); rendeljük ezt az $uv \in R$ élt v-hez. Eddig $D \setminus C$ minden pontjához rendeltünk egy élt $R_1 \cup R_2$-ből, és ez a hozzárendelés injektív, tehát $|D \setminus C \ \leq |R_1 \cup R_2$.

Legyen v levél S_i-ben valamely $1 \leq i \leq k$-ra, v egyetlen szomszédját S_i-ben jelölje z. Vigyázat: ha S_i kétpontú, $v = c_i$ is előfordulhat. D szűkíthetetlen, ezért létezik $u \in \Gamma(v)$ csúcs. Mivel z dominálja v-t, így $v \notin \Gamma(v)$, tehét $u \notin D$. Mivel R lefedő, u-ból indul R-beli él. Ennek másik végpontja sem lehet D-ben, hiszen $u \in \Gamma(v)$ miatt az csak v lehetne, de v-n egyetlen R-beli él a vz. Tehát azt kaptuk, hogy $\Gamma(v)$ minden pontján van R_0-beli él.

Legyen L azon csúcsok halmaza, melyek levelek valamely S_i-ben, ahol $i \leq i \leq k$, és tekintsük a $W = \bigcup_{v \in L} \Gamma(v)$ csúcshalmazt. Ekkor $|W| = \sum_{v \in L} \Gamma(v) \geq$

$|L| \geq 2k$, hiszen minden csillagnak legalább két levele van. Másrészt, a fenitek szerint R_0 fedi W minden csúcsát, következésképp $|R_0| \geq |W|/2 \geq k = |C|$. Összegezve, $|D| = |D \setminus C| + |C| \leq |R_1 \cup R_2| + |R_0| = |R|$, amiből $\overline{\gamma} \leq \rho$ adódik. □

Az alfejezet további részében Hermann György tételei következnek további relációkkal és annak bizonyításával, hogy az említett paraméterek között csak ezek az összefüggések állapíthatóak meg.

4.9. Tétel (Hermann [5]**).** *A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy* $\overline{\nu}(G) \leq \dfrac{n(G)}{2} \leq \underline{\rho}(G)$.

A fenti tétel második egyenlőtlensége persze csak akkor érvényes, ha egyáltalán értelmes, azaz ha G-ben nincs izolált csúcs. Fennállnak ezen felül az alábbi egyenlőtlenségek is:

4.10. Tétel (Hermann [5]**).** $\underline{\gamma}(G) \leq \underline{\alpha}(G)$, *ha G nem tartalmaz hurokéleket.*

Bizonyítás: Legyen A egy bővíthetetlen független csúcshalmaz. Ha valamely $v \in V \setminus A$ pontot A nem dominálná, v független lenne A-tól, így $A \cup \{v\}$ nagyobb független csúcshalmaz lenne, ami ellentmondás, ezért $\underline{\gamma} \leq \underline{\alpha}$. □

4.11. Tétel (Hermann [5]**).** $\overline{\alpha}(G) \leq \overline{\gamma}(G)$, *ha G nem tartalmaz hurokéleket.*

Bizonyítás: Legyen A maximális független csúcshalmaz. Ez domináló is, ugyanakkor szűkíthetetlen, így a legnagyobb szűkíthetetlen domináló csúcshalmaz mérete legalább $|A|$, azaz $\overline{\alpha} \leq \overline{\gamma}$. □

A most következő tétel már korábban is szerepelt Héger Tamás által bizonyítva (4.8. Tétel). Most közlök egy időrendben későbbi, de rövidebb bizonyítást.

4.12. Tétel (Hermann [5]**).** $\overline{\gamma}(G) \leq \underline{\rho}(G)$, *ha az utóbbi értelmes, azaz G-ben nincs izolált csúcs.*

Bizonyítás: Legyen R egy minimális lefogó élhalmaz, ekkor a komponensei legalább kétpontú csillagok, valamint hurokélek, ha G-ben nincs izolált csúcs. Egy szűkíthetetlen domináló halmaz egy csillagnak nem tartalmazhatja minden pontját, így a mérete legfeljebb R élszáma lehet, azaz $\overline{\gamma} \leq \underline{\rho}$. □

4.13. Tétel (Hermann [5]**).** $\underline{\gamma}(G) \leq \overline{\nu}(G)$, *ha G minden komponense legalább két pontból áll.*

Bizonyítás: Legyen M egy $\overline{\nu}$ méretű független élhalmaz, ekkor egy M által fedetlen csúcsnak van M által fedett szomszédja, így az M végpontjaiból álló csúcshalmaz domináló. Ugyanakkor, ha valamely $uv \in M$ élre léteznének olyan M által fedetlen $x \neq y$ csúcsok, hogy $ux, vy \in E$, akkor $M \cup \{xu, yv\} \setminus \{uv\}$ nagyobb független élhalmaz lenne. Így egy minimális domináló csúcshalmaz egy maximális független élhalmaz minden élének csak egyik végpontját tartalmazhatja, tehát $\underline{\gamma} \leq \overline{\nu}$. □

4.14. Tétel (Hermann [5]). *$\overline{\tau}(G) \leq \overline{\rho}(G)$, ha utóbbi értelmes, azaz G nem tartalmaz izolált pontot.*

Bizonyítás: Vegyünk egy T szűkíthetetlen lefogó ponthalmazt. Ekkor tetszőleges $t \in T$ pontra vagy van hurokél, vagy olyan él, amelynek a másik végpontja $V \setminus T$-ben van. Vegyünk minden t-re egy ilyen élt, az így kapott élhalmaz kiegészíthető szűkíthetetlen lefogóvá, tehát $\overline{\tau} \leq \overline{\rho}$. □

A $\underline{\gamma}(G) \leq \underline{\alpha}(G) \leq \overline{\alpha}(G) \leq \underline{\rho}(G)$ és $\underline{\gamma}(G) \leq \underline{\tau}(G) \leq \overline{\tau}(G) \leq \overline{\rho}(G)$ egyenlőtlenségek teljesüléséhez elég feltenni, hogy G-ben nincsenek izolált pontok. Észrevehető továbbá, hogy a komplementer gráfparaméterekre vonatkozó egyenlőtlenségekhez nem azonos feltételek tartoznak.

Az alábbi táblázatban szépen szemléltethető, hogy a többi gráfparaméter között nem állíthatók fel általános esetben a fentiekhez hasonló relációk. Ehhez előbb néhány speciális gráf jelölésének bevezetése szükséges.

4.15. Definíció (Hermann [5]). Itt $H_{s,t}$ azt a fát jelöli, amelyben a leveleken kívül egy s és egy t fokú csúcs van. $|V(H_{s,t})| = s + t$, $|E(H_{s,t})| = s + t - 1$.

	$\underline{\gamma}$		$\underline{\nu}$		$\overline{\gamma}$		$\overline{\nu}$		$\overline{\alpha}$		$\underline{\tau}$		$\underline{\rho}$
K_n	1	$<$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$>$	1	$<$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$>$	1	$<$	$n-1$	$>$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
$H_{s,s}$	2	$>$	1	$<$	$2s-2$	$>$	2	$<$	$2s-2$	$>$	2	$<$	$2s-2$

4.16. Definíció (Hermann [5]). $B_{s_1,\ldots,s_k}$ az a gráf, amelynek $v_1, \ldots, v_k$ csúcsai egy teljes gráfot alkotnak, továbbá a v_i csúcsra egy s_i élből álló cseresznye van ragasztva. Speciálisan $B_{s,t} = H_{s-1,t-1}$-gyel. $|V(B_{s_1,\ldots,s_k})| = k + \sum_i s_i$, $|E(B_{s_1,\ldots,s_k})| = \binom{k}{2} + \sum_i s_i$.

Ezzel a jelöléssel $\underline{\alpha}(B_{2,2,2}) = 5$, $\overline{\tau}(B_{2,2,2}) = 4$ míg n pontú csillagra $\underline{\alpha}(S_{n-1}) = 1$, $\overline{\tau}(S_{n-1}) = n - 1$.

4.3. Kőnig-tételek és egyenlőtlenségek páros gráfokra

A Kőnig-típusú tételek Kőnig tételének az általánosításai mohó gráfparaméterekre. Kőnig tétele azt mondja ki, hogy páros gráfban a független élek maximális $\overline{\nu}(G)$ száma megegyezik a lefogó pontok minimális $\underline{\tau}(G)$ számával. Ennek bizonyításához szükséges a deficites Hall-tétel, aminek bizonyítása megtalálható például ELEKES GYÖRGY [1] könyvében.

4.17. Tétel (deficites Hall-tétel [1, 12.1.1. Tétel]**).** *A $G(V_1 \uplus V_2, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik $|V_1| - h$ független él, ha minden $X \subseteq V_1$ esetén $|N(X)| \geq |X| - h$.*

4.18. Tétel (Kőnig [1, 12.1.5. Tétel]**).** *Ha a G páros gráf, akkor $\overline{\nu}(G) = \underline{\tau}(G)$.*

Bizonyítás: A 4.6. Tételből tudjuk, hogy $\overline{\nu}(G) \leq \underline{\tau}(G)$, így elég belátni, hogy $\overline{\nu}(G) \geq \underline{\tau}(G)$ is igaz.

Legyen a G páros gráf két osztálya A és B. Legyen X olyan A-beli ponthalmaz, amelyre annak deficitje, *def*(X) maximális (*def*$(X) = |X| - |N(X)|$). Ekkor a 4.17. Tétel miatt létezik $|A| -$ *def*(X)-élű M független élhalmaz. Legyen $T_1 = A - X$, és legyen $T_2 = N(X)$. Az $T = T_1 \cup T_2$ ponthalmaz lefogó, mert X-ből csak T_2-be megy él. Ekkor $|T| = |T_1| + |T_2| = |A| - |X| + |N(X)| = |A| -$ *def*$(X) = |M|$. □

4.19. Tétel (Kőnig [6, 2.5.6. Tétel]**).** *Ha G páros, és nem tartalmaz izolált pontot, akkor $\overline{\alpha}(G) = \underline{\rho}(G)$ is teljesül.*

Bizonyítás: Gallai tételei miatt $\overline{\nu}(G) + \overline{\rho}(G) = \overline{\alpha}(G) + \overline{\tau}(G)$. Mivel páros gráfban $\overline{\nu}(G) = \overline{\tau}(G)$, szükségképpen $\overline{\alpha}(G) = \overline{\rho}(G)$ is teljesül. □

Páros gráfokra, amelyekben nincs izolált pont, a következő összefüggések is érvényesek, ezek könnyen beláthatóak:

4.20. Állítás (Hermann [5]**).** *A $G = (A \uplus B, E)$ páros gráfra*

$$\underline{\alpha}(G) \leq \min\{|A|, |B|\} \leq \max\{|A|, |B|\} \leq \overline{\tau}(G)$$

4.21. Állítás (Hermann [5]**).** *A $G = (A \uplus B, E)$ páros gráfra*

$$\begin{aligned} \underline{\nu}(G), \underline{\gamma}(G) \leq \overline{\nu}(G) = \underline{\tau}(G) \leq \min\{|A|, |B|\} & \\ \leq \max\{|A|, |B|\} \leq \overline{\alpha}(G) = \overline{\gamma}(G) = \underline{\rho}(G) \leq \overline{\rho}(G) & \end{aligned}$$

Ha G páros, akkor a Kőnig-tétel alapján $\overline{\nu}(G) = \underline{\tau}(G)$. Következésképpen, ha G nem tartalmaz izolált pontot, akkor $\overline{\alpha}(G) = \overline{\gamma}(G) = \underline{\rho}(G)$ is fennáll. Ezen felül, ha G nem tartalmaz izolált pontot, triviálisan igaz az alábbi (általános gráfok esetén nem feltétlenül érvényes) egyenlőtlenség: $\underline{\alpha}(G) \leq \min\{|A|, |B|\} \leq \max\{|A|, |B|\} \leq \overline{\tau}(G)$.

Az alábbi táblázat ugyanakkor mutatja, hogy ennél több itt sem mondható. Feltehetjük, hogy $s \leq t$.

	$\underline{\gamma}$	$\underline{\nu}$	$\overline{\nu} = \underline{\tau}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\tau}$	$\overline{\alpha} = \overline{\gamma} = \underline{\rho}$	$\overline{\rho}$
$H_{s,t}$	2	1	2	s	t	$s+t-2$	$s+t-2$
$K_{s,t} - e$	2	s	s	2	$s+t-2$	t	$s+t-2$

Összefoglalva a fentieket, az alábbiak állnak fenn hurokélmentes és izolált pontot nem tartalmazó gráfokra: $\underline{\nu}(G) \leq \overline{\nu}(G) \leq \dfrac{n(G)}{2} \leq \underline{\rho}(G)$, továbbá:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underline{\gamma} & \leq & \underline{\alpha} & \leq & \overline{\alpha} & \leq & \overline{\gamma} & \leq & \underline{\rho} & \leq & \overline{\rho} \\
+ & & + & & + & & + & & + & & + \\
\overline{\rho} & \geq & \overline{\tau} & \geq & \underline{\tau} & \geq & ? & \geq & \overline{\nu} & \geq & \underline{\gamma} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
n & & n & & n & & n & & n & & n
\end{array}$$

A kérdőjel helyén álló gráfparaméter a $\overline{\gamma}$ komplementer párja lenne, de sajnos egyelőre nem ismerünk olyan részstruktúrát a gráfban, amire vonatkozó (esetleg mohó) strukturális gráfparaméterként tudnánk őt definiálni.

4.4. Az epszilon kiküszöbölése

A Fundamentals of Domination in Graphs [3] definiál még egy érdekes paramétert, erről is szeretnék néhány szót ejteni, majd egy tétel következik, amelynek bizonyítása nem szerepelt a könyvben, így magam bizonyítottam.

4.22. Definíció (ϵ). Jelöljük ϵ-nal a gráfban a levelekbe vezető élek (levélszárak) számát a lehető legtöbb levélbe vezető élet tartalmazó feszítőerdőben.

4.23. Tétel. [3, Theorem 1.4] *Minden véges, egyszerű, G gráfra, amelyben nincs izolált csúcs* $\underline{\gamma}(G) + \epsilon(G) = n(G)$

Bizonyítás: Vegyünk a gráfban egy legtöbb levélszárat tartalmazó feszítő erdőt. $n - \epsilon$ a feszítőerdő levelein kívüli összes csúcs számát jelenti (illetve, ha a feszítőerdő egyik fája egyetlen él, akkor a két végpontja közül az egyik (levél) is ide tartozik). Ezek biztosan dominálják tehát a gráfot, hiszen magukon kívül minden kihagyott csúcsot (minden levélt) dominálnak (kimondhatjuk, hogy nincs izolált csúcs; egy ilyen csúcsot hozzácsatolhatunk a meglévő feszítőerdőhöz, és ezzel a levélszárak számát semmiképp sem csökkentjük). A legkisebb domináló halmaz maximum ekkora lehet, tehát $\underline{\gamma} \leq n - \epsilon$.

Most vegyünk a gráfban egy legkisebb méretű domináló halmazt. A halmazon kívüli csúcsok mindegyikébe vezetnek élek. Válaszunk mindegyik csúcshoz egyetlen ilyen élet. A gráf egy megfelelő feszítőerdejében ezek levélszárak lehetnek: a kinti pontok között ne vegyünk egyáltalán éleket, így mindegyik kinti csúcs levél. Tehát ezek és a domináló halmaz pontjai kiadják a gráf csúcsainak számát, több levelet tartalmazó feszítőfa létrehozása esetén az összeg ennél csak nagyobb lehet, $\underline{\gamma} + \epsilon \geq n$ teljesül. □

A következő tétel a fentiből, és a Hermann György által bizonyított 4.5. Tételből következik, de álljon itt egy másik bizonyítás is rá:

4.24. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra, amelyben nincs izoltál csúcs* $\overline{\rho}(G) = \epsilon(G)$

Bizonyítás: Először legyen egy szűkíthetetlen lefedő élhalmazunk. Ez bizonyosan diszjunkt csillagok uniója. Így ebben minden él levélszár, tehát ennél a legnagyobb levélszárszámot tartalmazó feszítőfa már csak nagyobb lehet; $\overline{\rho} \leq \epsilon$.

Most induljunk ki egy legtöbb levélszárat tartalmazó feszítőerdőből (persze lehetnek benne izolált csúcsok mint egypontú fák). Ehhez vehetünk hozzá úgy éleket, hogy ne maradjon izolált csúcs. Ezzel nem csökkentjük a levélszárak számát (ha levélhez kapcsoljuk, ő lesz az újabb levél; nemlevélhez nem tudjuk csatolni, mert akkor eggyel több levélszárat alkottunk volna) Az így képzett részgráfból elhagyhatok úgy csúcsokat, hogy nem csökken a levélszárszám, de minden csúcsot lefedünk élekkel: ha van felesleges él – aminek mindkét végpontja amúgy is fedett –, elvehetem. 4-hosszú (vagy nagyobb) utak nyilván nincsenek a gráfban, mert az egyik középső élet elvéve eggyel több levélszárat képezhetnénk; hármas utak közepét kivéve nem csökken a levélszárak száma. Így képeztünk egy kizárólag levélszárakból álló szűkíthetetlen élhalmazt. □

Tehát az ϵ definiálásával nem egy új gráfparaméterhez jutottunk, mivel ez valójában $\overline{\rho}$, így az ϵ jelölésre nem is lesz szükségünk.

4.5. Egyenlőtlenségek és becslések gammára

4.25. Tétel (Ore [3, Theorem 2.1]). *Ha a gráfban nincs izolált csúcs, akkor* $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Ez rögtön következik a következő tételből:

4.26. Tétel. [3, Theorem 1.3] *Ha a G gráfnak nincsenek izolált csúcsai, akkor minden D szűkíthetetlen domináló csúcshalmazára $V \setminus D$ domináló.*

Bizonyítás: Legyen D egy tetszőleges szűkíthetetlen domináló halmaz G-ben. Tegyük fel, hogy egy $u \in D$ nincs dominálva $V \setminus D$ által. Mivel G-ben nincsenek izolált csúcsok, u szükségképpen dominálva van legalább egy csúcs által $D \setminus \{u\}$-ban. Tehát $D \setminus \{u\}$ domináló halmaz, ami ellentmond annak, hogy D szűkíthetetlen domináló halmaz. Mivel minden D-beli csúcs dominálva van legalább egy csúcs által $V \setminus D$-ből, $V \setminus D$ domináló halmaz. □

4.27. Tétel. [3, Theorem 2.11] $\left\lceil \frac{n(G)}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n(G) - \Delta(G)$ *igaz minden véges, egyszerű G gráf esetén.*

Bizonyítás: Legyen S egy legkisebb szűkíthetetlen domináló csúcshalmaz G-ben. Minden csúcs legfeljebb önmagát és még $\Delta(G)$ csúcsot dominál, így $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \rceil$. Másfelől legyen v egy $\Delta(G)$ fokszámú csúcs. Ekkor v dominálja $N[v]$-t, a többi $V \setminus N[v]$ dominálja önmagát. Tehát $V \setminus N(v)$ egy $n - \Delta(G)$ számosságú domináló halmaz, így $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$. □

5. Néhány további mohó gráfparaméter

Mely paramétereket lehet még mohó eljárás útján megtalálni? Ilyen lehetne például a $\text{diam}(G)$, a gráfban található leghosszabb út, és az előzőek mintájára pedig definiálhatnánk az $\underline{\text{diam}}(G)$ paramétert, amely a mohó módon keresett leghosszabb utak legkevésbé szerencsés kimenetele volna: a gráfban lévő legrövidebb bővíthetetlen út. Egy útkereső mohó eljárásban első lépésben veszünk egy csúcsot, majd ameddig az út valamely végpontjának van olyan szomszédja, amely még nem része az útnak, azzal bővíthetjük.

Látszik, hogy $\underline{\text{diam}}(G) \neq \text{rad}(G)$, vegyünk például egy 4-hosszú utat a végéhez egy cseresznyét ragasztva. Ebben a gráfban a leghosszabb út, $\text{diam}(G) = 5$, a legrövidebb bővíthetetlen út, $\underline{\text{diam}}(G) = 2$, míg az egy csúcsból kiinduló leghosszabb utak közül a legrövidebb, $\text{rad}(G) = 3$.

Az útkereső mohó algoritmus azonban csak ritkán találná meg a keresett értékeket, így nem érdemes vele foglalkozni. Ebben a fejezetben további érdekes paramétereket próbálunk hasonlóképpen megfogni.

Az alapszakos képzésen tanult gráfparaméterek közül az első, ami „nem strukturális” gráfparaméternek lehetne nevezni, az a kromatikus (színezési) szám volt. A $G(V,E)$ gráf $V(G)$ csúcsainak *színezése* egy $f : V(G) \to \mathbb{N}$ függvény, ahol a különböző természetes számokat különböző színeknek tekintjük. Akkor nevezünk egy színezést *jó színezésnek*, ha $\{x,y\} \in E(G)$ esetén $f(x) \neq f(y)$, tehát két szomszédos csúcsot nem színezünk ugyanazzal a színnel. Az élszínezés hasonlóan definiálható.

5.1. Definíció (Kromatikus szám). A $G = (V,E)$ gráf *kromatikus száma* $\chi(G)$ ha csúcsai $\chi(G)$ színnel jól kiszínezhetőek, de kevesebbel már nem.

Az egyféle színezésben azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztálynak* nevezzük. Ha a gráfban hurokél lenne, természetesen nem lehetne jó színezést találni. Páratlan hosszú kör kromatikus száma 3, páros köré 2. Az n csúcsú teljes gráf kromatikus száma n, hiszen minden pont minden pontnak szomszédja, így különböző színeket kell kapniuk. Emiatt ha K_n részgráfja G-nek, akkor $\chi(G) \geq n$.

5.2. Tétel. $\chi = 2$ *pontosan akkor, ha G-ben nincs páratlan hosszú kör, és van legalább egy éle.*

Bizonyítás: Ha a gráfnak nincs éle, pontjai egy színnel jól színezhetőek. Ellenkező esetben G komponenseit színezzük két színnel (egy csúcs minden szomszédja legyen azonos színű és így tovább). Ugyanolyan színű csúcsok között további élek nem mehetnek, mert akkor páratlan hosszú kör keletkezne. □

5.3. Definíció (Élkromatikus szám). A $G = (V,E)$ gráf *élkromatikus száma* avagy *kromatikus indexe* $\chi'(G)$ ha élei $\chi'(G)$ színnel jól kiszínezhetőek, de kevesebbel már nem.

Hasonlóan a kromatikus számhoz, páratlan kör kromatikus indexe 3; $\chi'(K_n) = n-1$, ha n páros, és $\chi'(K_n) = n$, ha n páratlan.

5.1. Mohó színezések

A színezési szám nem egy speciális tulajdonságú részstruktúra mérete. Mégis megpróbálhatjuk egy olyan általánosítását, ami hasonlít ahhoz, amit a „legkisebb bővíthetetlen", illetve a „legnagyobb szűkíthetetlen" halmazok esetében végeztünk. Az ötlet pedig a következő. Az alul- és felülvonásos gráfparamétereket úgy is megkaphattuk, mint egy alkalmas sorrendhez tartozó mohó algoritmussal kapott értéket. Definiáljuk hát a *mohó színezés* fogalmát.

5.4. Definíció (Mohó színezés). Legyen σ a G gráf csúcsai $V(G)$ halmazának egy adott felsorolása (permutációja). A színeket az $\mathbb{N}$ elemeiből választjuk, és az eljárás során végigmegyünk a σ sorrendet követve a $V(G)$ halmaz elemein. Egy csúcsnak az első olyan színt (legkisebb olyan természetes számot) adjuk, amelyik nem szerepel a szomszédai között.

Definiáljuk $\underline{\chi}$-t úgy, hogy ez az a legkisebb szám, ahány színnel mohó színezési eljárással a gráfot kiszínezhetjük. $\underline{\chi}(G)$ megegyezik $\chi(G)$-vel, hiszen a gráfok csúcsait vehetjük olyan sorrendben, hogy a gráf egy $\chi(G)$ színnel vett színezése színosztályainak csúcsai egymás után következzenek. Ekkor a mohó eljárás során is $\chi(G)$-t fogjuk megkapni.

5.5. Definíció. Legyen $\overline{\chi}(G)$ az a legnagyobb szám, amennyi színre szükség lehet, ha a gráf csúcsait mohó színezési eljárással színezzük ki.

Tehát $\overline{\chi} \geq \underline{\chi}$; ez az a szám, amelyet a „legszerencsétlenebb” sorrendű mohó színezési eljárás végén kapunk.

Most nézzünk néhány összefüggést az eddig megtanult strukturális gráfparaméterek és a színezési számok között. Érdekes kérdés lehet, vajon a χ-re kimondott becslések mikor vonatkoznak valójában $\overline{\chi}$-re, és mikor becslik ténylegesen χ-t. Azok az összefüggések, amelyek alulról becsülik a színezési számot, nyilván ennek alulvonottjára érvényesek, de észrevehető, hogy a kromatikus (és élkromatikus) szám felső becslései olykor valójában az újonnan megfogalmazott $\overline{\chi}$ (vagy $\overline{\chi'}$) paraméterre vonatkozó becslések.

5.6. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra $\underline{\chi}(G) \geq \omega(G)$.*

Bizonyítás: $\omega(G)$ a gráf legnagyobb teljes részgráfjának méretét jelöli. Ennek csúcsainak kiszínezéséhez szükség van éppen $\omega(G)$-nyi színre. Tehát az eredeti gráf csúcsszínezési száma legalább ennyi. □

5.7. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra $\overline{\chi}(G) \leq n(G) - \overline{\alpha}(G) + 1$.*

Bizonyítás: Legyen A egy $\overline{\alpha}(G)$ méretű független csúcshalmaz, és legyenek egy mohó színezési eljárás után kialakult színosztályok $X_1, \ldots, X_k$. Tegyük fel indirekt, hogy $k \geq n - \overline{\alpha} + 2 = |V \setminus A| + 2$. Tehát legalább két színosztály van, amelyek kizárólag A-beli elemeket tartalmaznak, legyenek ezek X_i és X_j ($i < j$). Viszont a mohó színezési eljárás során ahhoz, hogy j színnel színezhessem X_j elemét, kellett, hogy legyen egy i színű szomszédja. Ez nem lehetséges, mert a színosztályba nem tartozik más A-n kívüli csúcs, X_i elemétől pedig ez a csúcs független. □

5.8. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra* $n(G) \leq \underline{\chi}(G) \cdot \overline{\alpha}(G)$.

Bizonyítás: Egy gráfban egy színnel maximum $\overline{\alpha}$-nyi csúcsot tudunk kiszínezni. Ha nem így lenne, és $\overline{\alpha} + 1$-et is ki tudnánk színezni ugyanazzal a színnel, akkor a gráf független csúcsainak maximális száma $\overline{\alpha} + 1$ lenne. Tehát a gráf csúcsainak száma maximum annyiszor $\overline{\alpha}$, amekkora a kromatikus száma. □

5.9. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra* $\overline{\chi}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy a gráf egyszerű és összefüggő. Járjuk be G csúcsait valamilyen sorrendben, és mohón színezzünk. Az első jó színt kapja a csúcs, ha nincs ilyen színű szomszédja. Minden csúcsnak $\leq \Delta$ szomszédja van, tehát lesz olyan szín, amely nem fordul elő a szomszédoknál; erre színezzük a csúcsot. □

5.10. Tétel (Brooks [6, 2.7.1. Tétel]**).** *Ha G egyszerű, összefüggő, és nem teljes gráf, valamint nem páratlan hosszúságú kör, akkor* $\underline{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Arra, hogy a Brooks-tétel $\underline{\chi}$-re egy jobb becslést ad $\overline{\chi}$-nél, egy egyszerű példával rá lehet világítani. Vegyünk egy 6-hosszú kört, és a mohó színezési eljárásban először egy tetszőleges csúcsát, majd a következő lépésben a vele nem szomszédos csúcsot színezzük. Ezek mindegyike ugyanazt, az első színt kapja. Ezután színezzük valamelyikük tetszőleges szomszédját (ez kapja a második színt), következőleg pedig ez utóbbi, és a másik csúcs közös szomszédját (mely a harmadik színt kapja, lévén két különböző színű szomszédja). A körben a legnagyobb fokszám 2, a Brooks tétel szerint tehát 2 színnel színezhető, de találtunk ennél szerencsétlenebb kimenetelű színezést.

5.11. Tétel (Vizing [6, 2.7.4 Tétel]**).** *Ha G egyszerű gráf, akkor* $\Delta(G) \leq \underline{\chi}'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ennél a tételnél szintén lehet olyan – valamelyest bonyolultabb – gráfot konstruálni, amelyből kitűnik, hogy $\overline{\chi'}$-re már nem igaz az állítás. Egy ilyen példa a következő. A gráf $1, 2, 3, 4, 5$ és $6, 7, 8, 9, 10$ csúcsai alkossanak egy-egy ötszöget. Ezután kössük össze az 1 és 6, a 2 és 7, a 3 és 8, valamint az 5 és 9 pontokat. Az így készített gráf legnagyobb fokszáma 3, élein bizonyos sorrendben haladva, mohón színezve elérhetjük, hogy 4-nél több színnel tudjuk csak színezni a gráfot.

Emellett a kromatikus indexre és a független élek maximális $\overline{\nu}$ számára kimondhatók a színezési szám és a független csúcsok maximális száma közötti összefüggéshez hasonlók, és ezek a fenti 5.7. és 5.8. Tételhez hasonló módon bizonyíthatók.

5.12. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra* $\overline{\chi}(G) \leq e(G) - \overline{\nu}(G) + 1$.

5.13. Tétel. *Minden véges, egyszerű G gráfra* $e(G) \leq \underline{\chi}'(G) \cdot \overline{\nu}(G)$.

5.2. Összefüggőségi számok mohó változata

Végül próbáljuk meg a mohó gráfparaméter fogalmát bevezetni a pontösszefüggőségi és az élösszefüggőségi számok esetében is.

5.14. Definíció (Szétvágó ponthalmaz). A $G = (V, E)$ gráf $Y \subset V(G)$ részhalmazát *szétvágó (szeparáló) ponthalmaznak* nevezzük, ha annak csúcsait és az általuk lefogott éleket G-ből törölve a gráf nem lesz összefüggő.

Egy gráfot k-szorosan pontösszefüggőnek nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és tetszőleges $k-1$ csúcsa elhagyásával a gráf összefüggő marad. Vegyük észre, hogy a K_n teljes gráfból k csúcsot törölve egy K_{n-k} teljes gráfot kapunk, ezt tehát csúcs elhagyásával nem lehet szeparálni, de megegyezés alapján a teljes gráf $n-1$-szeresen összefüggő.

5.15. Definíció (Pontösszefüggőségi szám). A $G = (V, E)$ összefüggő gráf *pontösszefüggőségi száma* az a legkisebb $\kappa(G)$ szám, amelyre teljesül, hogy létezik G-nek $\kappa(G)$ elemszámú szétvágó ponthalmaza, vagy ha ilyen nincs, akkor $\kappa(G) = n-1$.

Egy nem összefüggő gráfnak nyilván ez az értéke 0. Egy útnak bármely nem 1 fokú csúcsa szétvágó, a gráf pontösszefüggőségi száma tehát ebben az esetben 1. Egy 3-nál hosszabb körnek bármely két nem szomszédos csúcsa szeparáló, de egy csúcs törlésével még összefüggő marad, a 3-nál hosszabb köröknek így a pontösszefüggőségi száma 2.

5.16. Definíció (Szétvágó élhalmaz). A $G = (V, E)$ gráf $Y \subset E(G)$ részhalmazát *szétvágó (szeparáló) élhalmaznak* nevezzük, ha ezt a gráfból törölve a gráf nem marad összefüggő.

5.17. Definíció (Élösszefüggőségi szám). A $G = (V, E)$ összefüggő gráf *élösszefüggőségi száma* az a legkisebb $\kappa'(G)$ szám, amelyre teljesül, hogy a gráfnak létezik $\kappa'(G)$ elemszámú szétvágó élhalmaza.

Egy gráf k-szorosan élösszefüggő, ha éleinek semelyik $k-1$ elemű részhalmaza nem szeparáló. Akárcsak a csúcsösszefüggőségi számnál, ha G nem összefüggő, akkor $\kappa'(G) = 0$. Egy útnak bármely éle szétvágó, ezen gráfok élösszefüggőségi száma tehát 1. Egy körből legalább két élet kell törölnünk, hogy több komponensre essen szét, ezért körök élösszefüggőségi száma 2. A teljes gráf élösszefüggőségi száma megegyezik csúcsainak fokszámával, hiszen legkevesebb él törlésével akkor jutunk több komponensből álló gráfhoz, ha töröljük az egy csúcsba vezető összes élet. $\kappa'(K_n) = n - 1$.

Értelmes-e itt szűkíthetetlen halmazokról beszélnünk? Azt úgy kéne elképzelni, hogy a szűkíthetetlen szétvágó ponthalmazunkat törölve a gráf több komponensre esne szét, de a pontok bármelyikét meghagyva a gráf összefüggő maradna. A legkisebb ilyen ponthalmaz mérete nyilván κ. A legnagyobb szűkíthetetlen szétvágó ponthalmaz mérete azonban (a teljes gráf esetét kivéve) mindig $n - 2$ volna, amennyiben van a gráfban feszített részgráfként 2-hosszú út. Ekkor az úton kívüli összes csúcsot, valamint az út középső csúcsát törölve a gráf legalább két komponensre esik szét, és a halmaz szűkíthetetlen, mert nem igaz az, hogy a pontok bármelyikét visszavéve a gráf összefüggő maradna.

Az sem teljesül, hogy bármely olyan halmaz, amelynek a szétvágó ponthalmaz részhalmaza, szintén szétvágó volna, ahogy ezt korábban láttuk a lefogó ponthalmaznál és lefedő élhalmaznál (illetve bővíthetetlen független halmazok esetében is a független halmaz minden részhalmaza is független volt). Könnyen elképzelhető, hogy egy szétvágó ponthalmazhoz hozzávéve a gráfból még egy csúcsot, éppen olyan csúcsot választunk, amely elvételével a gráf ismét összefüggő.

A pontösszefüggőségi számból ezzel a módszerrel tehát nem sikerült egy új, érdekes gráfparamétert létrehoznunk. Mi a helyzet az élösszefüggőségi számmal? Itt már állíthatjuk, hogy ha egy élhalmaz elvágó, akkor minden olyan élhalmaz is szeparálja a gráfot, amely ezt tartalmazza.

5.18. Definíció (Szűkíthetetlen szétvágó élhalmaz). A $G = (V, E)$ gráf $Y \subset E(G)$ részhalmaza *szűkíthetetlen szétvágó élhalmaz*, ha

- Y-t törölve a gráf több komponensre esik szét; de
- Y elemeinek bármelyikét meghagyva a gráf összefüggő marad.

Nyilván a legkisebb ilyen szűkíthetetlen szeparáló élhalmaz mérete a már tanult élösszefüggőségi szám: $\underline{\kappa'} = \kappa'$.

5.19. Definíció ($\overline{\kappa'}$). A legnagyobb szűkíthetetlen szétvágó élhalmaz méretét jelölje $\overline{\kappa'}$.

A legnagyobb szűkíthetetlen szétvágó ponthalmaz természetesen legalább akkora, mint a legkisebb méretű szétvágó ponthalmaz, azaz $\kappa' \leq \overline{\kappa'}$.

Emellett igaz az is, hogy ha a G gráf k-szorosan öszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is, így $\kappa \leq \kappa'$. Ennek belátásához vegyünk egy szeparáló élhalmazt. Ezek eltávolításával gráfunk két komponensre esik szét, minden élnek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik komponensbe tartozik. Ha élek helyett az élek egy-egy végpontját távolítanánk el, ügyelve arra, hogy ne mind származzon ugyanabból a komponensből, akkor az eredeti szeparáló élek végpont híján törlődnének a gráfból, a gráf két komponensre esne szét, és természetesen mindkét komponensben maradna is csúcs.

Tehát a most bevezetett paraméterek között fennáll a következő egyenlőtlenség.

5.20. Állítás. *Minden G véges, egyszerű gráfra $\kappa(G) \leq \underline{\kappa'}(G) \leq \overline{\kappa'}(G)$.*

Hivatkozások

[1] Elekes Gy. Véges matematika. Egyetemi jegyzet, felelős kiadó: az ELTE TTK dékánja, Budapest. 2002.

[2] Hajnal P. Gráfelmélet. Typotex Kiadó, Szeged. 2003.

[3] Haynes, T. W., Hedetniemi S. T., Slater, P. J. Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker Inc., New York. 1998.

[4] Héger T. kiadatlan kézirat

[5] Hermann Gy. kiadatlan kézirat

[6] Katona Gy., Recski A. Bevezetés a véges matematikába. Egyetemi jegyzet, felelős kiadó: Dr. Kiss Ádám, Budapest. 1993.

[7] Katona Gy., Recski A., Szabó Cs. A számítástudomány alapjai. Typotex Kiadó, Budapest. 2007.

[8] Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K. Diszkrét matematika. Typotex Kiadó, Budapest. 2010.

Gráfparaméterek értékei néhány konkrét gráfon

Álljanak itt taglalt mohó paramétereink értékei néhány ismert speciális gráfra és azok komplementereire. Ezen eredmények belátásához könnyű okoskodáson kívül nincs szükség másra, mint Gallai a szakdolgozatban 4.3. és 4.4. számmal ellátott két tételére (egyúttal előbbi ugyanott közölt általánosítására); Hermann 4.5. tételére, és a következő lemmára.

0.21. Lemma. *Szűkíthetetlen lefedő élhalmaz mindig diszjunkt csillagok uniója.*

Bizonyítás: Ha nem így lenne, azaz a lefedő élhalmaz nem csillagokból állna, szerepelne benne legalább 3 hosszú út. Ekkor az út egy középső élével szűkíthetnénk a halmazt, és továbbra is lefedő maradna. □

0.22. Megjegyzés. A diszjunkt csillagok által feszített részgráf élszáma n mínusz a csillagok száma. (Minden csillag élszáma a benne szereplő csúcsok számánál eggyel kevesebb.) Legtöbb éle így a lehető legkevesebb csillagból álló részgráfnak van.

	α	$\underline{\alpha}$	τ	$\overline{\tau}$	ν	$\underline{\nu}$	ρ	$\overline{\rho}$	γ	$\overline{\gamma}$
K_n	1	1	$n-1$	$n-1$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-1$	1	1
C_n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
P_{n-1}	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$n-\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n-1}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$
S_n	$n-1$	1	1	$n-1$	1	1	$n-1$	$n-1$	1	$n-1$
$\overline{K_r}$	n	n	0	0	0	0			n	n
$\overline{C_n}$	2	2	$n-2$	$n-2$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-2$	2	2
$\overline{P_{n-1}}$	2	2	$n-2$	$n-2$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-2$	2	2
$\overline{S_n}$	2	2	$n-2$	$n-2$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$			2	2

Ahol K_n az n csúcsú teljes gráf, C_n az n csúcsú kör, P_{n-1} az $n-1$ hosszú (n csúcsú) út és S_n az n csúcsú ($n-1$ élű) csillag.