

ЭККУРС В ТЕОРИЮ УЗЛОВ

В. О. МАНТУРОВ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

AN EXCURSUS TO KNOT THEORY

V. O. MANTUROV

The main concepts of knot theory: planar knot diagram, projection, Reidemeister move are described. Knot invariants: polynomials (based on skein relations) and coloring invariant are presented. The coding of knots by d-diagrams is described.

В статье описываются основные понятия теории узлов – плоская диаграмма, проекция, движение Рейдемейстера. Приводятся инварианты узлов: полиномиальные и инвариант раскрасок. Описывается кодирование узлов посредством d-диаграмм.

УЗЛЫ. ИЗОТОПИЯ УЗЛОВ. ПРИМЕРЫ

Мы предлагаем краткий обзор основных конструкций теории узлов. Более детально и глубоко с этой замечательной теорией можно познакомиться в [1, 2].

В обычном смысле под узлом понимается отрезок веревки, расположенный в трехмерном пространстве, а под развязыванием узла – выпрямление этого отрезка путем деформирования его в трехмерном пространстве. Однако если рассматривать узлы с такой точки зрения, то все узлы будут развязываемыми (один конец можно легко протащить через весь узел). Поэтому, для того чтобы иметь содержательную теорию, нужно каким-либо образом закрепить концы (например, взяв два конца в руки, в процессе деформации не выпускать их из рук). Поэтому под *узлом* будем понимать веревку в трехмерном пространстве, концы которой соединены. Простейший (незапутанный) узел, показанный на рис. 1, а, будем называть *тривиальным* узлом.

Если задан узел, то его можно шевелить (производить изотопию), двигая его в трехмерном пространстве, при этом не разрывая и не склеивая веревку ни в каких точках (в том числе и не разводя концы).

Возникает естественный вопрос (главный в теории узлов): как по двум заданным узлам понять, изотопны они или нет. Иными словами, можно ли один из них непрерывно продеформировать в другой. Частным случаем является вопрос о распознавании тривиальности того или иного узла, то есть о том, является ли заданный

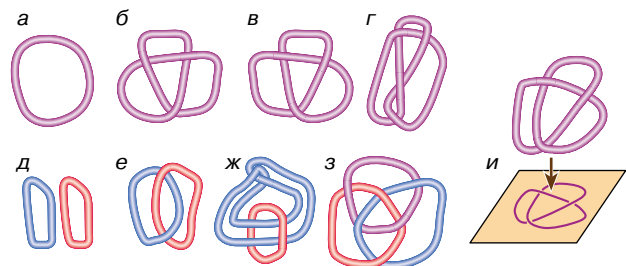


Рис. 1

journal.issep.rssi.ru

узел изотопным тривиальному узлу (то есть можно ли его развязать).

Этот вопрос чрезвычайно сложный. Над ним бьются многие великие ученые вот уже более полутора веков. Достаточно упомянуть имена К.Ф. Гаусса, лорда Кельвина, А. Пуанкаре, М. Дена, а в последнее время четырех филдсовских лауреатов Э. Виттена, В. Джонса, В. Дринфельда и М. Концевича, получивших свои медали за открытия, связанные с теорией узлов. Проблема распознавания узлов решена лишь частично — алгоритм, решающий ее, существует, но очень сложен и нереализуем на компьютере. Однако на пути решения этой задачи возникло много интересных результатов, о части которых мы расскажем в этой статье.

Теорией узлов занимались не только математики. Большая заслуга принадлежит здесь и физикам — начиная от лорда Кельвина, предложившего описывать химические элементы узлами, и кончая Э. Виттеном — единственным физиком — лауреатом филдсовской медали. Многие инварианты узлов (полином Джонса, а также инварианты конечного порядка, называемые также инвариантами Васильева) физики пытаются использовать в своих исследованиях, хотя пока еще рано судить о естественнонаучных успехах этих работ.

В последнее время узлы стали обсуждаться и в других естественных науках: в генетике в связи с зацеплением нитей молекул ДНК, в гидродинамике в связи с изучением устойчивых вихрей, образующих узлы, в ферромагнетизме, где возникают заузленные потоки магнитных полей.

Таким образом, эта замечательная и глубокая математическая теория способствует возникновению новых направлений в нематематических науках.

Простейшие примеры нетривиальных узлов показаны на рис. 1, б, в, г. Они называются *левым трилистником*, *правым трилистником* и *восьмеркой* соответственно. В дальнейшем мы покажем, что каждый из них нетривиален, а также то, что трилистник (как правый, так и левый) неизотопен восьмерке.

ПЛОСКИЕ ДИАГРАММЫ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ. ДВИЖЕНИЯ РЕЙДЕМЕЙСТЕРА

Прежде чем пытаться развязывать узлы, нужно придумать разумный способ их задания (описывать узел параметрическим вложением окружности в трехмерное пространство очень неудобно). Для этого используем понятие *плоской диаграммы узла* (которое уже есть на рис. 1, а–г). Пусть дан узел в трехмерном пространстве. Рассмотрим какую-нибудь плоскость (которую в дальнейшем будем обозначать через Oxy) и спроектируем его на эту плоскость. Можно выбрать плоскость та-

ким образом, что на проекции будем иметь гладкую кривую с несколькими точками трансверсального самопересечения (то есть не касания кривых, а пересечения, при которой одна ветвь кривой проходит сквозь другую под углом), причем в каждой точке будут пересекаться ровно две ветви этой кривой. При этом в каждой точке пересечения нужно сказать, какая ветвь проходит выше (то есть имеет большую координату z), а какая ниже (см. рис. 1, и).

Легко видеть, что такой картинке (кривой на плоскости с двойными точками самопересечения и указанием в каждой точке, какая ветвь проходит выше (образует *переход*), а какая ниже (образует *проход*)) достаточно для того, чтобы задать узел (с точностью до изотопии).

Рядом с теорией узлов находится теория зацеплений.

Под *зацеплением* будем понимать несколько непересекающихся несамопересекающихся замкнутых веревок (кривых), вложенных в трехмерное пространство. При этом под *изотопией* зацеплений будем понимать непрерывную деформацию этих веревок в трехмерном пространстве, в процессе которой не происходит пересечений веревок (кривых) друг с другом и самопересечений. Аналогично случаю узлов можно рассмотреть *плоские диаграммы* зацеплений, которые определяются точно так же, как и плоские диаграммы узлов, с той лишь разницей, что на плоскости находится не одна, а несколько погруженных кривых.

Под *компонентой зацепления* понимается узел, представленный одной из окружностей данного зацепления.

Тривиальным зацеплением из n компонент называется зацепление, которое можно продеформировать (произотопировать) в набор из n тривиальных узлов, расположенных в n различных непересекающихся областях трехмерного пространства.

На рис. 1 показаны также плоские диаграммы простейших зацеплений: тривиальное зацепление из двух компонент (рис. 1, д), зацепление Хопфа (рис. 1, е), зацепление Уайтхеда (рис. 1, ж) и кольца Борромео (рис. 1, з). В дальнейшем будет показано, что зацепления на рис. 1, е–з не являются тривиальными.

Нашей следующей задачей является попытка распознать по двум заданным плоским диаграммам узлов (зацеплений), задают они изотопные узлы (зацепления) или нет. Обычно для ответа на такие вопросы используют два метода. Если мы хотим доказать, что два зацепления изотопны, то нужно попытаться разбить процесс изотопии на маленькие элементарные шаги из заданного списка (простейшие изотопии). Если же нужно показать неизотопность двух зацеплений, то можно попытаться найти функцию, которая принимает одинаковые значения на изотопных узлах и разные

на двух заданных. Такая функция называется *изотопическим инвариантом* зацеплений. Изотопический инвариант называется *полным*, если для любых двух неизотопных зацеплений дает разные значения. Это значит, что такой инвариант решает обе задачи, то есть всегда точно может сказать, изотопны данные два узла (зацепления) или нет. Нахождение полного инварианта — чрезвычайно трудная задача. До сих пор ни об одном найденном инварианте зацеплений не доказано, что он является полным.

Приступим к решению первой задачи, то есть к нахождению движений для плоских диаграмм зацеплений. Заметим, что любая деформация плоскости, не изменяющая типа картинки (то есть взаимного расположения перекрестков кривой и дуг, их соединяющих), не меняет изотопического типа зацепления. При этом существуют еще три движения, называемые *движениями Рейдемейстера* и обозначаемые через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, которые, изменяя расположение перекрестков, не меняют изотопического типа зацепления. Их список показан на рис. 2 сверху.

Каждое из трех движений Рейдемейстера изменяет диаграмму зацепления только внутри маленькой области. Это означает, что вне этой области диаграмма зацепления остается неизменной, а внутри изменяется так, как показано на рис. 2 сверху.

Теперь можно показать, что узел, показанный на рис. 2 снизу слева, тривиален (см. изотопию там же). Однако для того чтобы показать, что два зацепления неизотопны, просто применять движения Рейдемейстера недостаточно. Мы можем сколь угодно долго их применять, не получая одинаковых плоских картинок,

так и не зная, пора уже остановиться (то есть что зацепления неизотопны) или можно продолжать применять движения Рейдемейстера, пытаясь доказать их изотопность.

ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Перейдем к описанию инвариантов зацеплений. Будем рассматривать функции, заданные по диаграммам зацеплений, точнее, по взаимному расположению перекрестков на диаграммах зацеплений (чтобы эта функция была априори инвариантной относительно деформаций плоскости). Если такая функция построена, то достаточно лишь проверить ее инвариантность относительно движений Рейдемейстера.

Приведем пример такого инварианта.

Инвариант раскрасок

Рассмотрим диаграмму L некоторого зацепления. Назовем *дугой* зацепления часть кривой на плоской диаграмме зацепления, идущую все время сверху при прохождении перекрестков (иными словами, идущую от одного прохода до следующего, по ходу образуя лишь переходы). Так, у простейшей диаграммы правого трилистника таких дуг три (a, b, c) (рис. 3).

В каждом перекрестке C диаграммы L сходятся три дуги, две из которых имеют концы в C , а одна проходит через C (вообще говоря, где-то вдалеке эти дуги могут соединяться, образуя две различные или даже всего одну дугу).

Будем раскрашивать дуги в три цвета таким образом, чтобы в каждой вершине три дуги были покрашены либо в один цвет, либо в три разных цвета. Такие

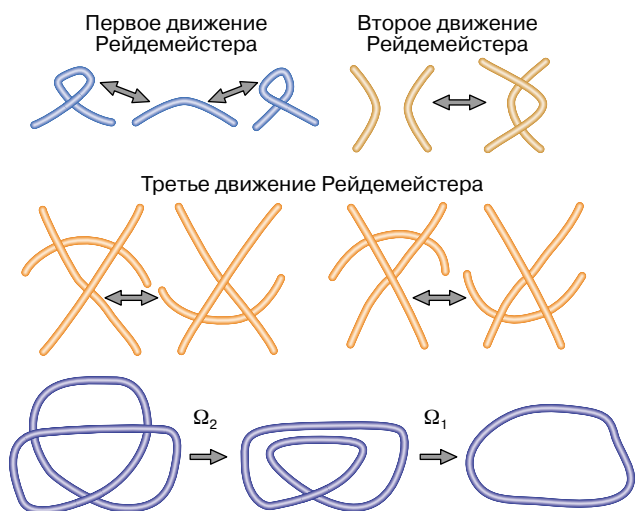


Рис. 2

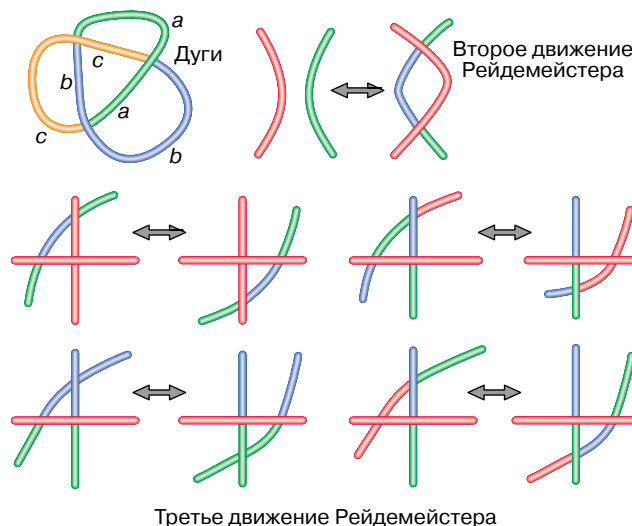


Рис. 3

раскраски назовем *правильными*. Количество правильных раскрасок диаграммы зацепления назовем значением *функции раскрасок* на данной диаграмме зацепления.

Покажем, что функция раскрасок является инвариантом, то есть не меняется при применении к диаграмме зацепления движений Рейдемейстера. Действительно, будем сопоставлять каждой раскраске диаграммы до применения движения Рейдемейстера раскраску диаграммы после применения движения Рейдемейстера. Одноцветным раскраскам (то есть раскраскам, при которых все дуги имеют один цвет) очевидным образом сопоставим одноцветные раскраски в тот же цвет. Для первого движения Рейдемейстера сохранение количества раскрасок очевидно: при добавлении петли в точке, в которой эта петля образуется, сходятся не три различные дуги, а лишь две, поэтому любая правильная раскраска должна сопоставлять этим дугам один и тот же цвет. Этот цвет можно сопоставить дуге, на которой образуется петля.

Каждой неодноразноцветной раскраске до применения того или иного движения Рейдемейстера сопоставим соответствующую ей (однозначным образом) раскраску после применения второго и третьего движений Рейдемейстера так, как показано на рис. 3 (здесь используются цвета красный, синий и зеленый). При этом для дуг, не участвующих в движении Рейдемейстера, цвет остается тем же. Этого можно добиться, так как дуги, выходящие на границу области применения движения Рейдемейстера, сохраняют цвет. Таким образом, зная инвариант, мы можем установить неизотопность некоторых узлов и зацеплений.

Пример. Инвариант раскрасок от тривиального узла равен трем (все раскраски одноцветные), от трилистника (как правого, так и левого) — девяти (помимо одноцветных раскрасок существуют раскраски трех дуг в три разных цвета — всего $3! = 6$). Следовательно, ни один из трилистников не является тривиальным узлом.

Упражнение. 1) Посчитайте число раскрасок от зацепления Хопфа и покажите, что оно нетривиально.

2) Посчитайте инвариант раскрасок от колец Борромео и покажите, что они неизотопны тривиальному трехкомпонентному зацеплению.

Однако мы видим, что этот инвариант не отличает правый трилистник от левого, а также то, что он не отличает восьмерку от тривиального узла (на восьмерке его значение также равно трем — любая правильная раскраска является одноцветной). Это побуждает нас искать более сильный инвариант.

Полином Конвея

Наряду с обычными зацеплениями можно рассматривать ориентированные зацепления, то есть зацепле-

ния, на каждой компоненте которых задана ориентация — направление обхода. Для них точно так же определяются плоские диаграммы (с добавлением стрелочек, указывающих ориентацию компонент), а также движения Рейдемейстера (с согласованными ориентациями до и после движения).

Перейдем теперь к построению инвариантов ориентированных зацеплений. Рассмотрим три диаграммы ориентированных зацеплений, которые совпадают вне некоторой малой окружности, а внутри нее отличаются так, как показано на рис. 4 сверху. Обозначим такие тройки диаграмм через L_+ , L_- , L_0 .

Можно показать, что существует единственный инвариант узла C со значениями в полиномах от одной переменной x , равный единице на тривиальном узле, нулю на тривиальном зацеплении из двух или более компонент и для каждой тройки диаграмм L_+ , L_- , L_0 удовлетворяющий соотношению

$$C(L_+) - C(L_-) = C(L_0),$$

называемому соотношением типа Конвея. Такой инвариант называется *полиномом Конвея*.

Полином Конвея удобен для вычисления. Пусть дана диаграмма L зацепления с n перекрестками. Тогда, изменяя типы некоторых перекрестков (с прохода на переход и наоборот), можно превратить эту диаграмму в тривиальную. Это делается так. Рассмотрим проекцию одной из компонент зацепления и будем прокладывать веревку вдоль нее начиная с некоторой точки. В каждой вершине будем располагать второй виток веревки выше первого (то есть будем класть веревку каждый раз поверх себя). В итоге получим узел, который, очевидно, будет тривиальным (покажите это!). Далее

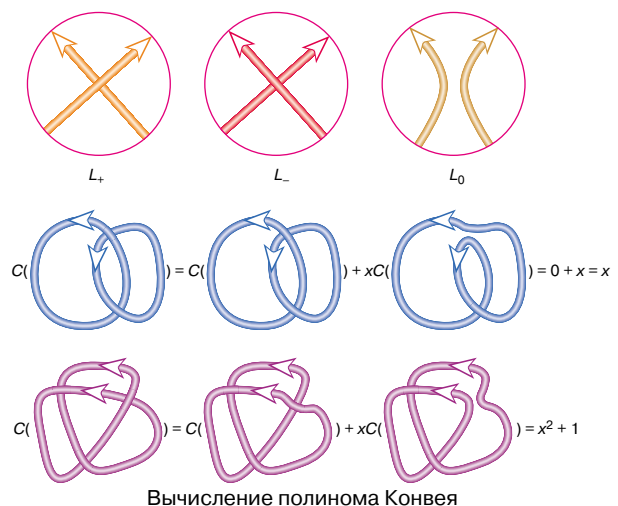


Рис. 4

расположим различные компоненты зацепления одна под другой. Получим диаграмму тривиального зацепления.

Теперь у нас есть точный алгоритм вычисления полинома Конвея: мы выбираем диаграмму L тривиального зацепления, получаемую из диаграммы L заменой некоторых типов перекрестков. Далее мы поочередно изменяем тип перекрестка в каждом из них и записываем соответствующее соотношение типа Конвея (в котором начальная и измененная диаграммы играют роль L_+ и L_- , а роль диаграммы L_0 играет диаграмма с $n - 1$ перекрестком). В итоге мы получаем, что значение полинома Конвея $C(L)$ равно значению полинома $C(L)$, то есть нулю или единице в зависимости от числа компонент, плюс сумма значений (со знаками плюс или минус) полинома Конвея на диаграммах с $n - 1$ перекрестком. Таким образом, мы свели вычисление значения полинома Конвея на диаграмме с n перекрестками к вычислению на диаграммах с $n - 1$ перекрестком. Продолжая в этом направлении, мы сведем это вычисление к диаграммам с 0 перекрестков, которые являются тривиальными узлами или зацеплениями.

Проиллюстрируем приведенный алгоритм на зацеплении Хопфа, а затем на правом трилистнике (см. рис. 4 внизу).

Упражнение. Найдите полином Конвея от восьмерки и покажите, что восьмерка неизотопна правому трилистнику.

К сожалению, на левом трилистнике значение полинома Конвея также равно $1 + x^2$, то есть полином Конвея не различает правый и левый трилистник.

Между тем существует много других инвариантов I (гораздо более мощных, чем полином Конвея), равных единице на тривиальном узле и основанных на соотношениях (также называемых соотношениями типа Конвея) вида

$$aI(L_+) + bI(L_-) = cI(L_0),$$

где a, b, c — некоторые функции от одной или двух переменных. В случае полинома Конвея $a = 1, b = -1, c = x$. В частности, такие инварианты позволяют отличить левый трилистник от правого. Приведем список наиболее известных из этих инвариантов:

- полином Джонса от одной переменной

$$a = q^{-1}, \quad b = -q, \quad c = \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}};$$

- полином HOMFLY от двух переменных

$$a = x, \quad b = -t, \quad c = 1.$$

Наиболее сильный из этих инвариантов — полином Джонса от двух переменных λ, q , в котором

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{q}}, \quad b = -\sqrt{\lambda}\sqrt{q}, \quad c = \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

d-ДИАГРАММЫ

Помимо способа задания узлов плоскими диаграммами с проходами и переходами есть еще один более наглядный и более удобный способ (например, для компьютерного задания).

В теории узлов важную роль играют хордовые диаграммы. Назовем *хордовой диаграммой* ориентированную окружность, на которой проведены несколько хорд, все концы которых различны. Хордовые диаграммы рассматриваются как комбинаторный объект, то есть на окружности важно лишь взаимное расположение точек, соединяемых хордами.

Назовем *d-диаграммой* хордовую диаграмму, хорды которой могут быть разбиты на два семейства таким образом, чтобы хорды из одного семейства не пересекались. Так, хордовые диаграммы на рис. 5, а, б являются *d-диаграммами*, а хордовые диаграммы на рис. 5, в, г нет.

По *d-диаграмме* можно построить зацепление следующим образом. Вложим окружность данной диаграммы в плоскость так, чтобы ориентация окружности была против часовой стрелки. Выберем произвольное разбиение хорд на два семейства непересекающихся и

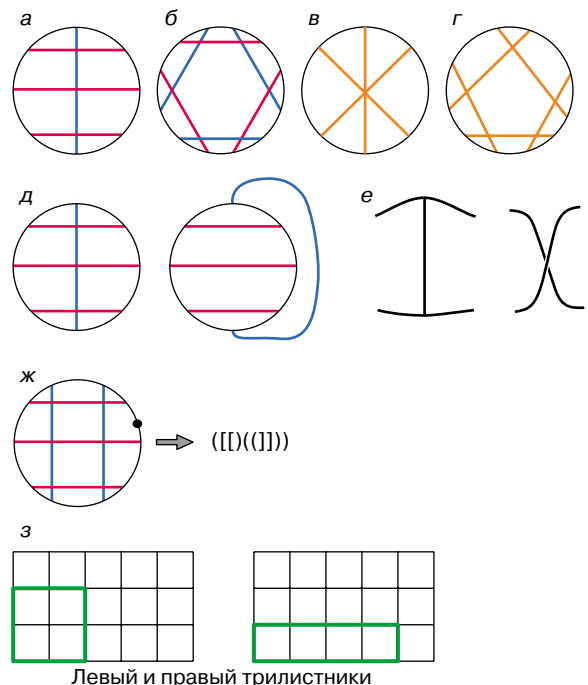


Рис. 5

расположим хорды первого семейства внутри окружности, а хорды второго семейства вне окружности (как криволинейные отрезки) так, чтобы никакие две хорды не пересекались (см. рис. 5, *д*).

Затем заменим каждую хорду вместе с парой дуг у ее концов на две кривые, расположенные одна под другой так, как показано на рис. 5, *е*. Получим плоскую диаграмму некоторого зацепления.

Можно показать, что полученный изотопический класс зацепления не зависит от выбора разбиения хорд на два семейства непересекающихся, а также то, что все изотопические классы зацеплений задаются некоторыми d -диаграммами.

Пусть теперь дана d -диаграмма D , хорды которой уже разбиты на два семейства непересекающихся хорд, и выбрана некоторая точка A на ее окружности, отличная от конца хорды. Начнем движение вдоль по ориентации окружности от точки A и будем записывать слово в алфавите из четырех скобок (,), [,] по следующему правилу: встречая конец хорды из первого семейства, будем писать круглую скобку, а встречая конец хорды из второго семейства — квадратную. Причем открывающиеся скобки соответствуют первому прохождению данной хорды (началу), а закрывающиеся — второму (концу) (см. рис. 5, *ж*). Получим слово, являющееся *правильной двухскобочной структурой*, то есть слово, в котором круглые скобки образуют между собой правильную структуру и квадратные скобки образуют также правильную структуру.

Пример. Слово [()] является правильной двухскобочной структурой, а слово [] (нет).

Легко видеть, что по каждой правильной двухскобочной структуре можно восстановить d -диаграмму. Действительно, в каждой правильной двухскобочной структуре понятно, какая скобка какой закрывается. Это значит, что можно распознать, какие пары скобок составляют хорды.

Таким образом, все изотопические классы зацеплений кодируются правильными двухскобочными структурами — словами в конечном алфавите.

Пример. Правый трилистник задается словом (((([])))], а левый — словом (([]))]. Более того, для таких слов есть полный список соотношений, переводящий слово-зацепление в любое другое изотопное ему.

Приведем еще одну наглядную интерпретацию кодирования узлов с помощью d -диаграмм. Каждое зацепление может быть задано с помощью прямоугольной ломаной петли внутри первого квадранта плоскости Ox . Петля выходит из точки $(0, 0)$ и входит в $(0, 0)$, все ее звенья являются единичными отрезками, горизонтальными или вертикальными. При этом каждая такая петля задает некоторое зацепление.

Действительно, каждую такую правильную двухскобочную структуру можно трактовать как ломаную такого вида, при этом скобка (означает один шаг вправо, скобка) — влево, скобка [— вверх, а скобка] — вниз. При этом правильность двухскобочной структуры означает то, что данная ломаная петля не выйдет за пределы первого квадранта плоскости и вернется в точку $(0, 0)$.

Пример. Правый трилистник, задаваемый словом (((([])))], может быть задан как прямоугольник 4×1 , левый (([]))] — как квадрат 2×2 (см. рис. 5, *з*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мантуров В.О. Лекции по теории узлов и их инвариантов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 304 с.
2. Manturov V.O. Knot Theory. Chapman and Hall / CRC, 2004. 416 p.

Рецензент статьи Ю.П. Соловьев

* * *

Василий Олегович Мантуров, кандидат физико-математических наук, сотрудник механико-математического факультета МГУ. Область научных интересов — маломерная топология, теория узлов. Автор более 40 статей и двух книг.