

Экскурс в теорию кос

В. О. Мантуров*

В настоящей статье мы расскажем о теории кос — замечательной теории, связывающей воедино перестановки и запутывание узлов, многочлены без кратных корней и многое другое. Эта теория находится на стыке алгебры, геометрии и топологии, являясь вместе с тем красивой и наглядной. Кроме того, посредством знаменитых *уравнений Янга – Бакстера* косы связаны с физикой, а в последние годы — с новым направлением, лежащим на стыке нескольких наук, — квантовыми компьютерами. Теория узлов, тесно связанная с теорией кос, за последние пару десятилетий претерпела существенные изменения, и теперь узлы занимают умы не только математиков, но и представителей других точных и естественных наук. Многие красивые и сильные результаты в теории кос, в том числе и связанные с распутыванием узлов, формулируются достаточно просто. Мы расскажем о некоторых из них.

Более детально познакомиться с современным состоянием теории узлов и кос, в частности, полные доказательства приведенных в настоящей статье теорем, можно, например, в [1]. Завершается настоящая статья геометрическим доказательством точности представления Бурау группы кос из трех нитей и построением точного представления Лоуренс – Крамера – Бигелю.

1. ВВЕДЕНИЕ

В различных математических вопросах большую роль играет понятие перестановки.

Попытаемся представить процесс перестановки n элементов как непрерывный. Рассмотрим два набора точек на плоскости $z = 1$ в трехмерном пространстве с координатами $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$ и $(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$ и будем двигать верхние точки вниз так, чтобы координаты z строго убывали. Потребуем также, чтобы траектории движения точек не пересекались, а в конце движения все точки заняли положения нижних точек $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$. В этом случае описанные траектории

*Автор поддержан грантом РФФИ №07-01-00648

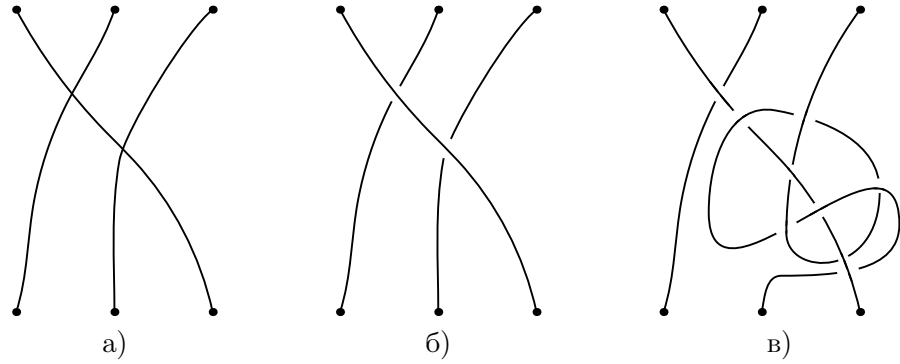


Рис. 1. а) Перестановка $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$; б) плоская диаграмма косы; в) тангл

будут задавать линии, строго идущие вниз и соединяющие точки из первого набора с точками из второго набора.

Спроектируем эти пути на плоскость Oxz . Если исходная перестановка не является единичной, то линии будут пересекаться. Укажем в каждой точке пересечения, у какой ветви координата y больше, а у какой — меньше. В результате мы получим объект, который называется *плоской диаграммой косы* (см. рис. 1б). Это название достаточно естественно: можно считать, что, располагая нити в пространстве в малой окрестности нашей плоскости Oxz , мы заплетаем из этих нитей косу. Точки на плоскости, в которых пересекаются проекции нитей косы, мы будем называть *перекрестками*. Коса, построенная по плоской диаграмме, лежит уже не на плоскости Oxz , а в трехмерном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Картинка, изображенная на рис. 1в, плоской диаграммой косы не является, так как одна из трех нитей на этой диаграмме не является строго нисходящей (она идет то вверх, то вниз).

Объекты, подобные тому, который нарисован на рис. 1в, называются *танглами* (от англ. *tangle*). Иногда в русскоязычной литературе их называют также *связками* или *плетениями*. Танглы играют важную роль в теории кос и узлов, являясь обобщениями одновременно как узлов, так и кос. С танглами и косами связаны несколько замечательнейших конструкций в теории узлов — интеграл Концевича, ассоциатор Дринфельда, алгебра Книжника — Замолотчикова, квантовые инварианты.

Вернемся к косам. Назовем *изотопными* такие косы, которые могут быть непрерывно (без разрывов и склеек) продеформированы в трехмерном пространстве одна в другую так, что в процессе деформации все нити косы идут строго вниз (т.е. коса остается косой на протяжении всей деформации). В частности это означает, что концы нитей остаются

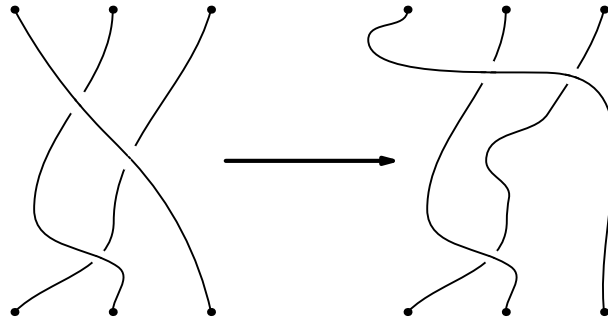


Рис. 2. Одинаковые (изотопные) косы

неподвижными, так как они с одной стороны должны двигаться непрерывно, а с другой стороны могут занимать лишь дискретное множество положений (с абсциссой $1, 2, \dots, n$ и ординатой 1 или 0). Определенная таким образом изотопия представляет собой отношение эквивалентности. Класс изотопных кос называется *изотопическим типом косы*. В каждом изотопическом типе содержатся все косы, изотопные некоторой фиксированной косе и только они. Очевидно, что *при изотопии косы не меняется соответствующая ей перестановка*.

Как могут изменяться при изотопиях плоские диаграммы кос?

Очевидно, что если мы пошевелим диаграмму косы так, чтобы не изменилось взаиморасположение ее дуг и перекрестков (см. рис. 2), то коса останется изотопной самой себе. Такими деформациями не исчерпываются изотопные преобразования кос. Существуют также и другие виды преобразований плоских диаграмм кос, меняющие взаиморасположение перекрестков косы, но не меняющие ее изотопический тип. О таких преобразованиях мы поговорим чуть позже.

2. ГРУППА КОС

2.1. ОБРАЗУЮЩИЕ ГРУППЫ КОС

Как и перестановки, косы из фиксированного числа нитей, рассматриваемые с точностью до изотопии, обладают естественной структурой группы. Действительно, предположим, что у нас есть две косы A и B из n нитей каждая. Определим произведение кос AB как косу, получаемую сжиманием кос A и B по вертикали и расположением косы A над косой B , см. рис. 3а.

Очевидно, что определенное таким образом умножение кос ассоциативно.

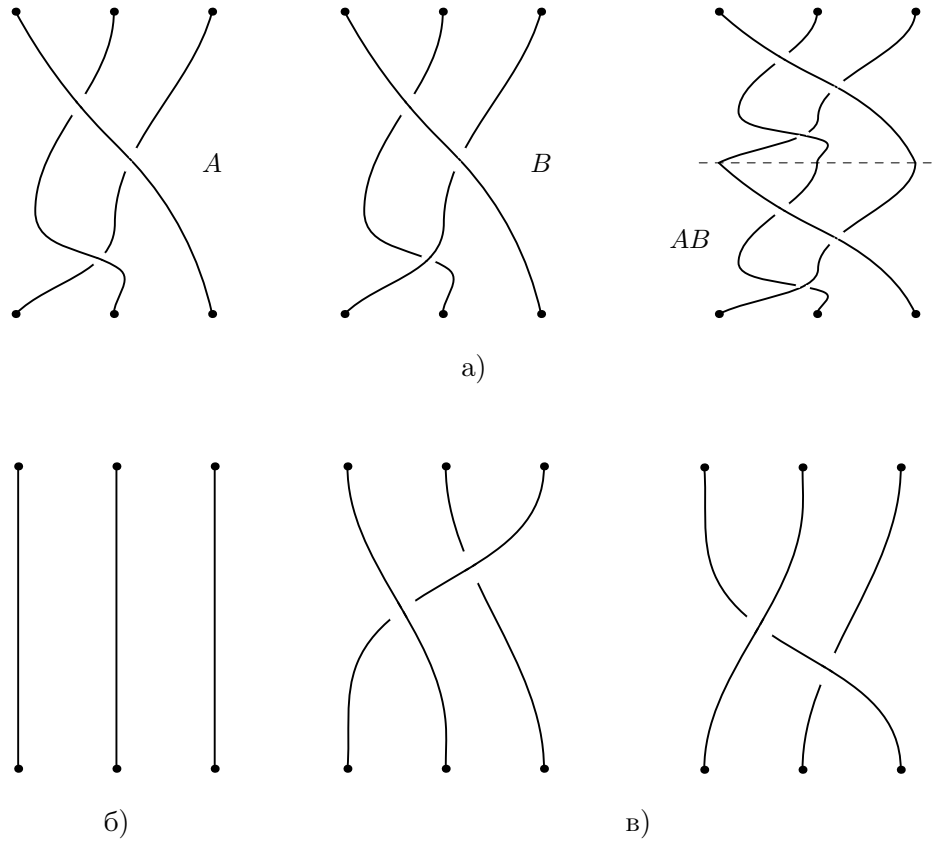


Рис. 3. Косы образуют группу: а) умножение; б) единичная коса; в) взятие обратного

При умножении кос, очевидно, перемножаются и соответствующие им перестановки. В качестве единичной косы можно взять косу, состоящую из вертикальных параллельных нитей, рис. 3б.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что в качестве косы, обратной заданной, можно рассмотреть зеркальное отражение относительно горизонтальной прямой, см. рис. 3в. Иными словами, произведение косы A и ее зеркального отражения A' изотопно тривиальной (единичной) косе.

Это зеркальное отражение, очевидно, обращает перестановку, соответствующую косе, т. е. взятию обратной для некоторой косы соответствует взятию обратной для ее перестановки.

Обе операции (умножение и взятие обратного) инвариантны относительно изотопии, т. е. если коса A_1 изотопна косе A_2 , а коса B_1 — косе B_2 ,

то произведение кос $A_1 \cdot B_1$ изотопно произведению кос $A_2 \cdot B_2$, а обратная коса A_1^{-1} — обратной косе A_2^{-1} .

Итак, для каждого натурального числа n мы построили группу кос (точнее, изотопических классов кос) из n нитей, которую мы обозначим через $Br(n)$ (от английского слова *braid* — коса). В этой группе изотопные косы считаются одинаковыми.

Опишем теперь некоторый набор образующих группы кос. Как и в случае с перестановками, где в качестве образующих можно взять транспозиции соседних элементов, в качестве образующих группы кос можно взять такие косы, которые переставляют два соседних элемента $j, j + 1$, где j — натуральное число от 1 до $n - 1$. При этом в отличие от группы перестановок нити можно переставить двумя разными способами (выбирая, какая нить идет ближе, а какая — дальше). В одном случае (см. рис. 4а) эта перестановка обозначается через σ_i . Для другого случая, изображенного на рис. 4б, никакого специального обозначения вводить не надо, так как эта коса является обратной к косе σ_i , и ее следует обозначать через σ_i^{-1} .

Легко видеть, что немного пошевелив плоскую диаграмму любой косы, мы можем привести ее в *общее положение*, т. е. добиться того, чтобы все ее перекрестки были двойными (пересечениями ровно двух нитей косы) и лежали на разных уровнях. Тогда эту диаграмму косы можно легко разложить по образующим. Для этого мы просто идем сверху вниз и, встречая перекресток, пишем соответствующую ему букву σ_i или σ_i^{-1} , при этом буквы σ_i или σ_i^{-1} выбираются согласно рис. 4. Легко видеть, что верно и обратное утверждение: по записи косы в виде слова из образующих можно построить плоскую диаграмму этой косы однозначно с точностью до изотопии кос.

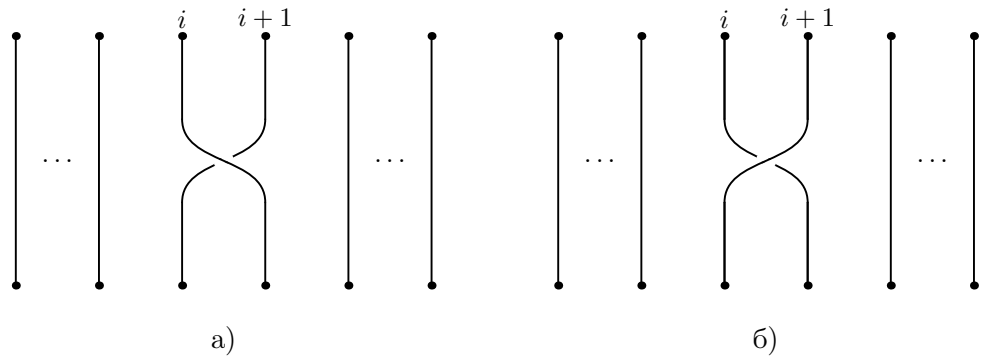


Рис. 4. а) Образующие σ_i ; б) обратные элементы σ_i^{-1}

2.2. Соотношения в группе кос

Как можно изменять запись кос по образующим, не меняя изотопического класса косы?

Во-первых, если есть два перекрестка, находящихся далеко друг от друга по горизонтали и близко по вертикали (т.е. нет ни одного перекрестка, находящегося выше одного из них, но ниже другого), то их можно поменять местами по вертикали, см. рис. 5 сверху. Ясно, что при таком преобразовании изотопический тип косы не изменится, однако изменится ее запись по образующим: порядок образующих σ_i, σ_j , соответствующих этим двум перекресткам, изменится на порядок σ_j, σ_i . Как уже сказано, числа i, j должны быть достаточно далеки друг от друга: модуль их разности должен быть не меньше двух.

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| \geq 2 \quad (1)$$

Это соотношение в группе кос называется *дальней коммутативностью*.

Есть и другие соотношения в группе кос. Представим себе, что на некоторой косе рядом находятся три точки попарных пересечений трех различных нитей косы, при этом одна нить косы проходит выше (или ниже) двух других. Тогда эту нить можно «протянуть» над (под) двумя остальными,

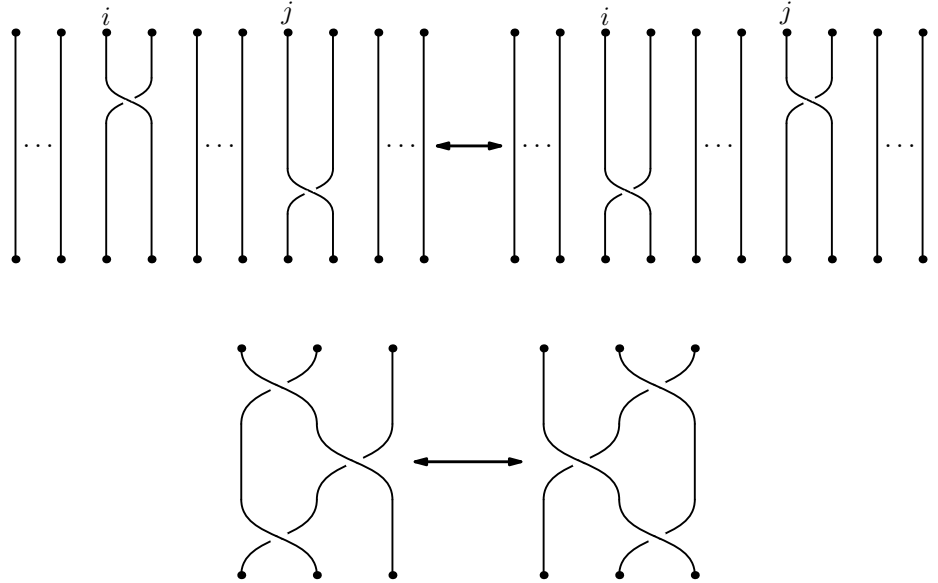


Рис. 5. Соотношения в группе кос

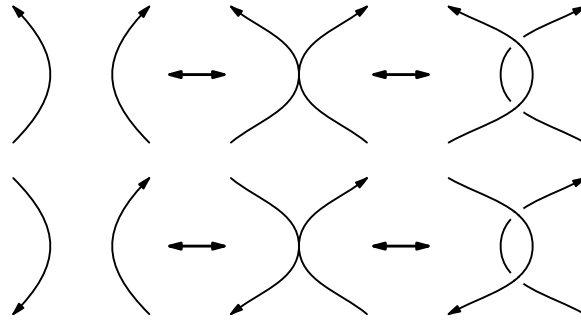


Рис. 6. Второе движение Рейдемейстера — сонаправленная и противоположенная версии

см. рис. 5 снизу. Очевидно, что полученная таким образом коса будет изотопна изначальной, хотя запись косы по образующим изменится. В случае, показанном на рисунке 5 снизу, это изменение будет записываться в виде соотношения

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ при } 1 \leq i \leq n - 2. \quad (2)$$

Такое движение в теории узлов называется *третьим движением Рейдемейстера*.

Наконец, при изотопии может произойти следующее. Пусть две нити косы находятся на близком расстоянии друг к другу и не пересекаются. Тогда одну из этих нитей можно «наложить» на другую, т. е. провести сверху от другой см. рис. 6, верхняя часть. После этого к диаграмме косы добавятся два перекрестка, но коса останется изотопной самой себе. Получившееся соотношение записывается в виде

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e, \quad (3)$$

где e обозначает тривиальную косу. Это соотношение выполняется в любой группе, так что его не нужно включать в список соотношений, определяющих группу кос.

Движение (3) в теории узлов также имеет свое название. Оно называется *вторым движением Рейдемейстера*.

Нижняя часть рисунка 6 также описывает второе движение Рейдемейстера — его противоположенную версию. Эта версия в теории кос не встречается, так как ветви косы все направлены «в одну сторону».

В теории узлов встречается также *первое движение Рейдемейстера*, которое состоит в добавлении/удалении малой петли. При непрерывной изотопии узла в трехмерном пространстве петля на его проекции возникает следующим образом: фрагмент проекции диаграммы узла в некоторый

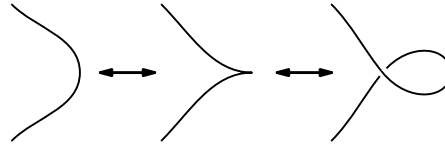


Рис. 7. Первое движение Рейдемейстера

момент перестает быть гладким, возникает клюв, который затем выпрямляется и дает петлю, см. рис. 7.

Это движение также не возникает при изотопиях кос.

Итак, мы выписали два набора соотношений (1) и (2), которые по простым геометрическим соображениям, приведенным выше, выполняются в группе кос. При этом можно доказать, что этими соотношениями все и исчерпывается.

ТЕОРЕМА 1 (АРТИН). *Две косы A и B , заданные своими записями по образующим, являются изотопными тогда и только тогда, когда коса A переводится в косу B посредством последовательного применения преобразований кос (1), (2) и (3).*

Доказательство теоремы Артина требует определенной техники, и мы его приводить не будем, см., например, [1].

ПРИМЕР. Пусть $A = \sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, $B = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$. Косы A и B являются изотопными, так как одна переводится в другую следующей последовательностью преобразований (1) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}(\sigma_3\sigma_1)\sigma_2\sigma_3 &\xrightarrow{\sigma_1\sigma_3=\sigma_3\sigma_1} (\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \\ &= \sigma_1(\sigma_3\sigma_2\sigma_3) \xrightarrow{\sigma_3\sigma_2\sigma_3=\sigma_2\sigma_3\sigma_2} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Хотя мы и имеем достаточный набор определяющих соотношений в группе кос, это не дает нам алгоритма, распознающего изотопность кос. Действительно, если даны две косы, мы можем сколь угодно долго применять соотношения (1) и (2) как к одной из них, так и к другой, и при этом не зная, можно ли остановиться и с уверенностью сказать: «Косы не являются изотопными» или же нужно еще продолжать в надежде на то, что все же удастся доказать, что две косы являются изотопными.

Для того, чтобы понять, изотопны косы A и B из одинакового числа n нитей или нет, можно сделать небольшое упрощение. Мы знаем, что косы из n нитей для каждого натурального числа n образуют группу. Это значит, что косы можно перемножать, а у каждой косы есть обратная коса. Таким образом, косы A и B изотопны тогда и только тогда, когда коса

AB^{-1} изотопна тривиальной. Следовательно, *распознавание кос сводится к распознаванию тривиальной косы.*

Стартуя с некоторой косы и применяя к ней соотношения (1) и (2) в надежде получить тривиальную косу, мы можем сколь угодно долго блуждать без должного результата и не знать, нужно ли остановиться или все еще стоит продолжать поиски.

Косы были впервые рассмотрены Э. Артином в [3]. В своей оригинальной работе он сразу привел алгоритм распознавания кос: по двум косам, заданным диаграммами, определяется, изотопны (эквивалентны) они или нет. Интересующегося читателя мы отсылаем к [3].

2.3. КРАШЕННЫЕ КОСЫ

Как мы знаем, при изотопии кос сохраняется неизменной перестановка, соответствующая косе. Это значит, что при распознавании тривиальной косы мы должны заведомо отбросить косы, которым соответствует неединичная перестановка, сказав: «Нет! Такие косы никак не могут быть тривиальными.»

Останутся лишь косы, которым соответствует тривиальная перестановка. Такие косы называются *крашенными* косами. Они называются так, потому что каждую их нить можно покрасить в свой цвет таким образом, чтобы точки сверху и снизу, имеющие одинаковую абсциссу, соединились (одной и той же) нитью одного цвета.

Как и все косы, крашеные косы также образуют группу относительно той же самой операции умножения (приставления одной косы снизу от другой). Очевидно, что при умножении крашеных кос мы снова получаем крашеную косу, так как при умножении кос умножаются и перестановки, а у крашеных кос они единичные. Обратная к крашеной косе будет крашеной косой, так как при обращении кос соответствующие перестановки также обращаются.

Следовательно, для каждого натурального числа n мы получаем группу $CB(n)$ *крашеных кос из n нитей*, которая является *подгруппой* группы кос из n нитей.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что подгруппа крашеных кос является нормальной в группе кос из n нитей и что факторгруппа по этой группе изоморфна группе перестановок из n элементов.

2.4. ЦЕНТР ГРУППЫ КОС. ГРУППА КОС ИЗ ТРЕХ НИТЕЙ

Как мы знаем из теории перестановок, единственная перестановка, которая коммутирует со всеми перестановками, — тривиальная. Поскольку отображение кос в перестановки является гомоморфизмом, любая коса,

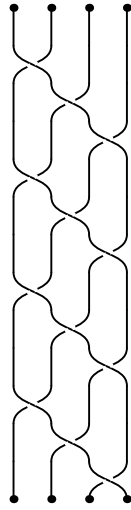


Рис. 8. Центральный элемент Σ группы кос

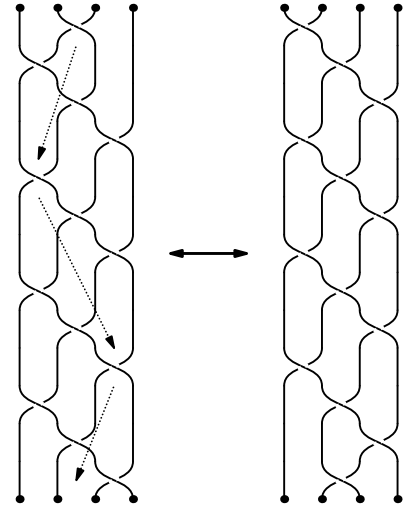


Рис. 9. Элемент Σ коммутирует с образующими группы кос

лежащая в *центре* группы кос, должна быть крашеной косой. Рассмотрим крашеную косу из n нитей, заданную образующими по формуле $\Sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$. Эта коса представляет собой «полный поворот всех нитей на 2π », см. рис. 8.

Легко проверяется, что эта коса *коммутирует со всеми косами u , следовательно, лежит в центре группы $Br(n)$* . Действительно, достаточно проверить, что она коммутирует с образующими группы кос, что продемонстрировано на рис. 9.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что при $n > 2$ центр группы кос из n нитей состоит из косы Σ и ее степеней.

Указание. Используйте индукцию по количеству нитей.

В случае трех нитей соответствующий элемент Σ имеет вид

$$\Sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2.$$

Введем другое представление для группы кос из трех нитей: пусть $b = \sigma_1 \sigma_2$, $a = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$. Тогда, очевидно, имеет место соотношение $a^2 = b^3$. Легко проверяется, что это определяющее соотношение — единственное, и группа кос может быть записана в виде $\langle a, b : a^2 = b^3 \rangle$, ибо образующие σ_1 и σ_2 легко выражаются через a, b .

В такой записи очевидно, что элемент $a^2 = b^3$ и только он лежит в центре: он коммутирует с обеими образующими.

3. КОСЫ И УЗЛЫ

Одной из наиболее ярких и быстро развивающихся в последние годы топологических теорий является теория узлов. *Узлом* называют как гладкое вложение окружности в трехмерное пространство, так и образ этого вложения. Говорят, что узел *ориентирован*, если на окружности выбрана одна из двух возможных ориентаций. Как и косы, узлы интересно рассматривать с точностью до изотопии (для ориентированных узлов требуют, чтобы изотопия сохраняла ориентацию), т. е. до сохраняющих ориентацию деформаций пространства на себя. При таких деформациях окружность может растягиваться, но не может разрываться и склеиваться (самопересекаться). Как и в случае кос, такие движения называются *изотопиями*. Можно спроектировать узел на некоторую плоскость и в хорошем случае, которого можно добиться малым шевелением, проекция узла будет представлять собой плоскую кривую, все точки самопересечения которой являются двойными, причем в каждой точке самопересечения указано, где узел идет выше, а где — ниже (*переход и проход*). При этом понятия «выше» и «ниже» определяются следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что плоскостью проекции является плоскость Oxy со стандартной ориентацией. В этом случае мы будем говорить, что нить проходит «выше», если она имеет большую координату z в прообразе точки пересечения и ниже в противном случае. Такая диаграмма называется *плоской диаграммой узла*. Аналогично узлам можно рассматривать зацепления, которые представляют собой набор непересекающихся несамопересекающихся окружностей в трехмерном пространстве. Каждая из этих окружностей представляет собой узел, который называется *компонентой зацепления*. Для зацеплений также можно рассматривать плоские диаграммы с проходами и переходами. Каждое зацепление можно ориентировать, задав направление обхода каждой его компоненты. В таком случае говорят об *ориентированных зацеплениях (узлах)*.

Тривиальным узлом назовем узел в трехмерном пространстве, изотопный узлу, допускающему плоскую диаграмму без перекрестков.

Тривиальное зацепление из n компонент — это зацепление, каждая компонента которого является тривиальным узлом, причем трехмерное пространство можно разделить на непересекающиеся между собой области, так чтобы каждая компонента лежала в своей области. Тривиальное зацепление изотопно зацеплению, имеющему плоскую диаграмму без перекрестков, состоящую из непересекающихся окружностей.

Естественно искать связи между теорией кос и теорией узлов в связи с похожестью способов их изображения. И такая связь есть.

Рассмотрим некоторую плоскую диаграмму B некоторой косы из n нитей. У этой диаграммы помимо проходов и переходов есть еще свободные

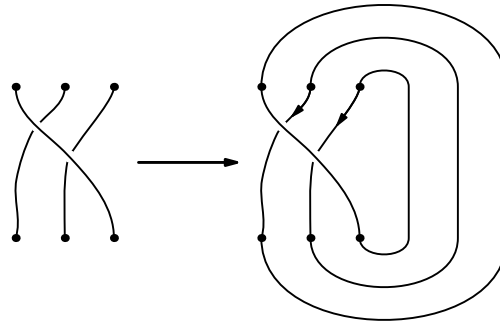


Рис. 10. Коса и ее замыкание

концы — по n штук сверху и снизу. Эти концы можно замкнуть, соединяя каждый конец сверху с нижним концом косы, имеющим ту же абсциссу, при этом не создавая лишних перекрестков, см. рис. 10.

Очевидно, что мы таким образом получим диаграмму узла или зацепления. Назовем получившееся зацепление *замыканием косы* B и обозначим его $Cl(B)$. Это зацепление естественным образом ориентированно: мы ориентируем все нити косы сверху вниз и далее продолжаем ориентацию на замыкание.

Понятно, что если две косы являются изотопными, то и соответствующие им зацепления также являются изотопными. Более того, изотопия, которой одно такое зацепление переводится в другое, затрагивает лишь нити косы, но не их замыкания. Обратное утверждение неверно, ибо легко можно построить косу из любого числа нитей, замыкание которой задает тривиальный узел.

Следовательно, появляются два важных вопроса:

1. Какие узлы и зацепления могут быть получены замыканием кос?
2. В каком случае два узла (зацепления), соответствующие неизотопным косам, являются изотопными?

3.1. Трюк АЛЕКСАНДЕРА

Начнем с ответа на первый вопрос. Попытаемся разобраться, какой должна быть плоская диаграмма зацепления, чтобы она могла быть получена замыканием некоторой косы.

Рассмотрим некоторую косу B и ее замыкание $Cl(B)$. Все нити этой косы и их замыкания можно ориентировать, т. е. задать направление обхода, следующим образом. Внутри косы B будем считать, что нити идут от верхних точек к нижним, а на остальных участках замыкания ориентация зацепления направлена от нижних точек косы к верхним точкам.

Выберем точку A , расположенную между диаграммой косы и набором линий, замыкающих ее, см. рис. 11а.

Если смотреть на замыкание косы $Cl(B)$ из точки A , то мы видим круговое вращение косы против часовой стрелки, т. е. точка, двигаясь по замыканию косы вдоль ориентации, всегда оборачивается в одну сторону относительно точки A . В этом случае говорят, что зацепление $Cl(B)$ *обвивается как коса* вокруг точки A .

Верно и обратное утверждение. Если ориентированное зацепление L обвивается как коса вокруг некоторой точки A , то L (точнее, зацепление, изотопное зацеплению L) можно представить как замыкание косы. Для этого нужно выпустить из точки A два близких луча-радиуса. Если эти радиусы настолько близки, что образуемый ими угол не содержит перекрестков зацепления L , то внутри угла, образованного радиусами, зацепление L представляет собой набор из n криволинейных отрезков, ориентированных в одинаковом направлении. Легко видеть, что если выкинуть эти отрезки, а затем распрямить получившееся, мы в точности получим косу, замыкание которой и есть зацепление L , см. рис. 11б.

Следовательно, для того, чтобы у зацепления была диаграмма, задаваемая замыканием косы, нужно, чтобы эта диаграмма обвивалась вокруг некоторой точки как коса. Оказывается, что для любого зацепления (точнее, у любого изотопического класса зацепления) существует такая плоская диаграмма. Этот факт носит название *теоремы Александра* в честь знаменитого американского тополога первой половины двадцатого века Дж. Александра и может быть доказан с помощью так называемого *трюка Александра*. Расскажем об этом более подробно.

Рассмотрим некоторую диаграмму L зацепления и ориентируем ее произвольным образом. Выберем некоторую точку A на плоскости P диаграммы L , не принадлежащую проекции зацепления. Из этой точки можно «рассматривать» зацепление L и видеть, в каком месте оно оборачивается по часовой стрелке вокруг точки A , а в каком — против. Разобьем наше зацепление на очень маленькие кусочки (можно считать их прямолинейными) так, чтобы каждый кусочек содержал не более одного перекрестка, при этом проекция каждого кусочка поворачивалась либо по часовой стрелке вокруг A , либо против, см. рис. 12 слева.

В интересующем нас случае все кусочки должны быть ориентированы против часовой стрелки. Предположим, что это не так, и какой-то кусочек вращается по часовой стрелке относительно точки A . Предположим, что этот кусочек начинается в точке B и кончается в точке C . Рассмотрим такую точку D , что криволинейный треугольник BCD , у которого кривой является лишь сторона BC , содержит точку A внутри (см. рис. 12 справа).

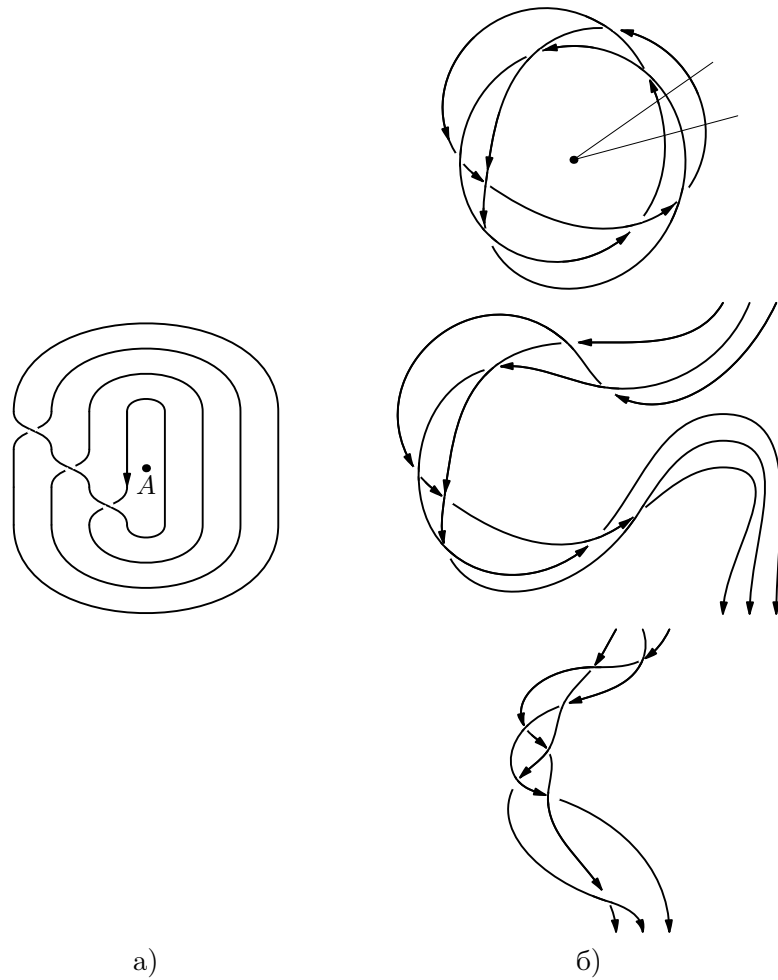


Рис. 11. а) Замыкание косы; б) построение косы по зацеплению

Легко видеть, что стороны этого треугольника BD и DC оборачиваются вокруг точки A уже против часовой стрелки.

Заметим теперь, что дугу BC можно заменить на две дуги BD и DC . При этом если на дуге BC был единственный перекресток, и она проходила его сверху, то и ее перебрасывание через точку A можно проводить сверху, а если единственный перекресток она проходила снизу, то перебрасывание следует проводить снизу. Если же на этой дуге вообще не было перекрестков диаграммы L , то перебрасывание можно проводить как сверху, так и снизу. Каждое такое перебрасывание будет представлять собой изотопию в трехмерном пространстве. В итоге после всех таких изотопий мы

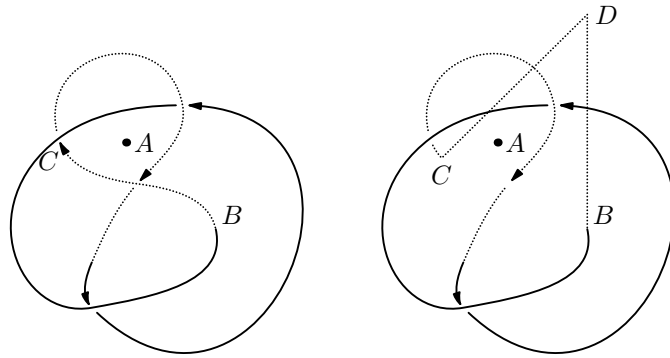


Рис. 12. Трюк Александера

получим диаграмму L' зацепления, изотопного изначальному, в котором количество ребер, ориентированных «плохо», станет на единицу меньше.

Описанная выше операция и называется *трюком Александера*.

Если у диаграммы зацепления L' остались кусочки, ориентированные по часовой стрелке, мы опять применим трюк Александера, и т. д. В итоге получим плоскую диаграмму зацепления, изотопного изначальному, которая будет обвиваться вокруг точки A как коса. Значит, наше зацепление (точнее, некоторое, изотопное ему) представимо замыканием косы.

3.2. ТЕОРЕМА МАРКОВА

Попытаемся теперь ответить на вопрос о том, когда замыкания двух кос задают изотопные зацепления.

Начнем с двух примеров.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим косу a из n нитей и косу c из того же количества нитей, полученную из косы a сопряжением: $c = bab^{-1}$. Тогда замыкание косы c задает тот же изотопический класс зацепления, что и замыкание косы a .

Действительно, рассмотрим зацепление $Cl(c)$, получающееся замыканием косы c . Выделим ту часть, которая соответствует косе b^{-1} снизу и протащим ее наверх вдоль линий замыкания, см. рис. 13, верхняя часть. Получим замыкание косы $b^{-1}ba$, которое, очевидно, изотопно зацеплению $Cl(a)$, так как изотопными являются сами косы a и $b^{-1}ba$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим косу a из n нитей. К ней справа можно добавить еще одну $(n + 1)$ -ю нить и перекресток между n -й и $(n + 1)$ -й нитями (при этом нам неважно, какая нить идет сверху, а какая снизу

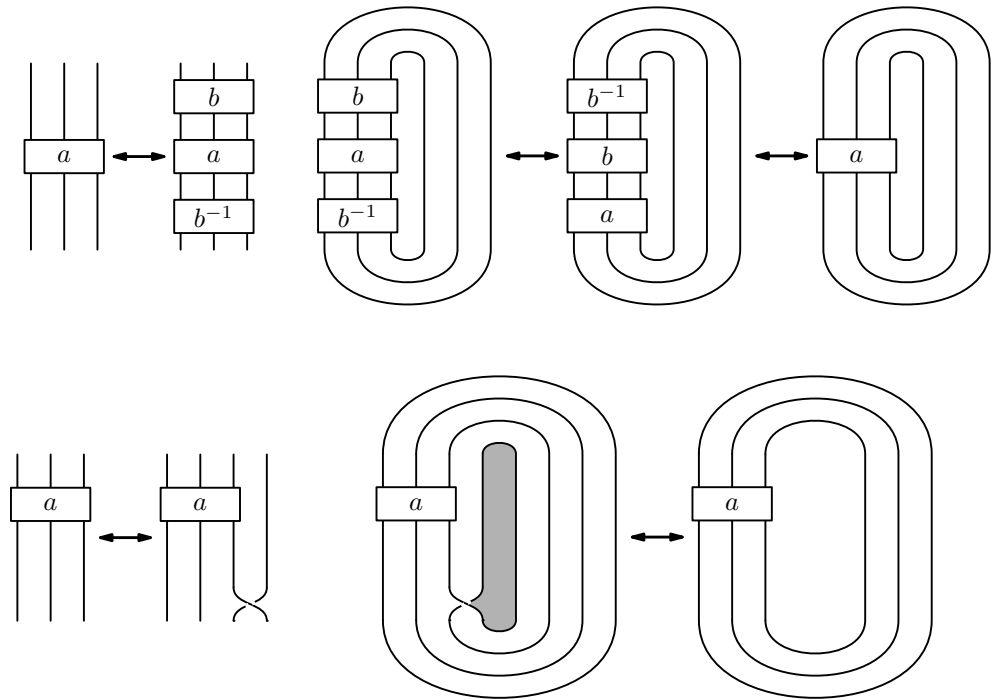


Рис. 13. Изотопные замыкания кос

в добавленном перекрестке). Получим косу a' . Тогда замыкание косы a изотопно замыканию косы $a'' = a \cdot \sigma_n^{\pm 1}$ из $(n + 1)$ нити.

Действительно, замыкание косы a'' отличается от замыкания косы a наличием петли, см. рис. 13 снизу (на рисунке петля выделена). Очевидно, что добавление или удаление такой петли переводит зацепление в изотопное ему зацепление.

В теории узлов добавление (удаление) петли называется *первым движением Рейдемейстера*. Отметим, что первое движение Рейдемейстера меняет число нитей косы, замыкание которой представляет данный узел.

Движения, описанные в примерах 1 и 2, носят название *движений Маркова*.

ТЕОРЕМА 2 (МАРКОВ). *Любые две косы (из произвольного числа нитей), задающие изотопные зацепления, переводятся одна в другую последовательностью движений, каждое из которых есть либо изотопия кос, либо первое движение Маркова (сопряжение), либо второе движение Маркова, либо движение, обратного второму движению Маркова.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве этой теоремы, опубликованном Марковым, были пробелы. Строгое доказательство этого замечательного факта достаточно сложно и было получено лишь в 60-е годы двадцатого века Дж. Бирман [5].

Отметим, что, как и в случае распознавания изотопности кос, наличие таких движений не дает алгоритма проверки изотопности двух зацеплений, задаваемых замыканиями кос.

4. КОСЫ, МНОГОЧЛЕНЫ И ПУТИ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. ЗАМКНУТЫЕ ПУТИ НА ПЛОСКОСТИ

Напомним, что коса соединяет точки с координатами $(k, 0, 1)$ и $(k, 0, 0)$. На каждой плоскости $\{z = t\}$ коса оставляет свой след — неупорядоченный набор из n различных точек. Параметр движения t (вместо него обычно берут возрастающий при движении t от единицы к нулю параметр $u = 1 - t$) можно считать *временем*.

Таким образом, каждую косу из n нитей можно трактовать как одновременное движение по плоскости *неупорядоченного* набора из n точек, такое, что ни в какой момент времени эти точки не совпадают, а в начальный и конечный момент времени они имеют координаты $x = 1, 2, \dots, n$, $y = 0$. Здесь неупорядоченность означает, что нам неважно, в каком порядке точки вернутся на свои места. В случае, когда каждая точка, выйдя из своего начального расположения, вернется в него же (будет иметь ту же абсциссу), мы получим крашеную косу.

Можно проделать и обратную операцию: по одновременному движению n точек на плоскости с начальными и конечными положениями $x = 1, 2, \dots, n$, $y = 0$, построить косу из n нитей.

При этом изотопия кос легко описывается в терминах путей на плоскости. Две косы A и B из n нитей являются изотопными тогда и только тогда, когда одновременный маршрут всех n точек, соответствующий косе A , можно непрерывно продеформировать в маршрут, соответствующий косе B таким образом, чтобы в каждый момент деформации каждые два маршрута были непересекающимися.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В топологии говорят, что такие маршруты задают путь в конфигурационном пространстве наборов из n различных неупорядоченных точек на плоскости, причем две косы, задаваемые таким образом, изотопны в том и только том случае, когда соответствующие этим косам пути гомотопны.

4.2. МНОГОЧЛЕНЫ БЕЗ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Представим теперь, что плоскость, по которой движутся точки, — это плоскость комплексных чисел. Тогда каждая точка на этой плоскости — просто комплексное число. А набор из n различных точек с координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ — это набор различных комплексных чисел $z_j = x_j + iy_j$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Эти различные числа можно считать корнями многочлена степени n от переменной z , задаваемого по формуле:

$$P = \prod_{j=1}^n (z - z_j). \quad (5)$$

Многочлен P не имеет кратных корней, поскольку числа z_j различны. Старший коэффициент этого многочлена равен единице.

Согласно основной теореме алгебры, любой многочлен степени n над комплексными числами имеет n корней с учетом кратностей. Если старший коэффициент многочлена равен единице, то многочлен разлагается на n сомножителей первой степени вида $(z - z_j)$, $j = 1, \dots, n$. Если у многочлена нет кратных корней, то все эти сомножители различны. При этом, естественно, нельзя сказать, какой корень является первым, какой — вторым, и т. д. Это и означает неупорядоченность корней многочлена. Поэтому для фиксированного натурального числа n множество наборов различных n точек на плоскости находится в однозначном соответствии с множеством многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, и без кратных корней.

Понятно, что если два набора точек близки друг к другу, то и соответствующие им многочлены также близки. Следовательно, можно говорить о пространстве многочленов степени n со старшим коэффициентом единица без кратных корней и о топологии на этом пространстве. Как раз это пространство и будет совпадать с конфигурационным пространством неупорядоченных наборов точек на плоскости.

Таким образом, мы можем трактовать каждую косу как непрерывное изменение многочлена в классе многочленов без кратных корней, при котором в начальный и в конечный моменты многочлен равен $\prod_{i=1}^n (z - z_i)$.

Так, например, простейшая коса из двух нитей может быть записана как следующая деформация многочлена:

$$P_t = z^2 - 3z + 2.25 - 0.25(\cos 2\pi t + i \sin(2\pi t)). \quad (6)$$

Этот многочлен, очевидно, имеет корни, равные $1.5 + 0.5(\cos \pi t + i \sin \pi t)$ и $1.5 - 0.5(\cos \pi t + i \sin \pi t)$. Таким образом, при пробегании переменной t значений от 0 до 1, пара корней многочлена будет вращаться по окружности с центром в точке 1.5 радиуса 0.5, при этом в начальный и в конечный моменты эти корни будут равны 1 и 2. В итоге мы получаем косу σ_1^{-1} из двух нитей.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ КОС

Представлением группы G называется гомоморфное отображение группы в группу матриц: каждому элементу группы G сопоставляется некоторая матрица $n \times n$, при этом умножение в матрицах соответствует умножению в G . Представление называется *точным*, если оно не имеет ядра.

На рубеже 20–21 веков было найдено точное представление группы кос из произвольного числа нитей (Лоуренс [8], Крамер, Бигелю). Это *точное* представление задает *полный* инвариант группы кос: так как ни для какой нетривиальной косы представляющая ее матрица не равна единичной матрице, а косы образуют группу, матрицы, представляющие различные косы, различны, следовательно матрица (набор ее элементов) задает полный инвариант кос.

Мы опишем два подхода к построению точных представлений групп кос — формальный алгебраический (где мы ищем такие матрицы, соответствующие образующим, чтобы выполнялись соотношения группы кос) и геометрический.

При этом для доказательства точности мы будем использовать лишь геометрический подход. Мы начнем с представления Бурау [6], появившегося в 30-х годах 20-го века.

5.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ И ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ КОС НА ПЛОСКОСТИ С ВЫКОЛОТЫМИ ТОЧКАМИ

Наиболее естественным путем для поиска представлений группы кос является следующий. Можно попытаться представить косы из n нитей матрицами размера $n \times n$. Более точно, можно связать с элементом σ_i блочно-диагональную матрицу с блоком 2×2 , расположенным в двух строках $(i, i+1)$ и двух столбцах $(i, i+1)$, и остальными блоками размера (1×1) , равными 1 и расположенными на главной диагонали. Очевидно, что для такой матрицы должны выполняться некоторые соотношения коммутирования между образами σ_i, σ_j , где $|i - j| \geq 2$. Если взять матрицы, соответствующие σ_i с одинаковыми (2×2) -блоками (но на разных местах), то останется только проверить соотношения $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ для матриц размера 3×3 . Если матрицу размера 2×2 , соответствующую образующей σ , обозначить через A , то соотношение для матриц 3×3 будет выглядеть (для блочно-диагональных матриц) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (7)$$

На этом пути получается представление, в котором блок матриц размера 2×2 выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Это представление называется представлением *Бурау* группы кос. Оно было предложено Бурау в [6].

Точность (т. е. мономорфность) этого представления была открытым вопросом на протяжении долгого времени. Джоан Бирман [5] впервые доказала точность этого представления для группы кос из трех нитей.

В 1991 году Муди построил первый пример нетривиального элемента из ядра представления Бурау (группы кос с большим, чем три, количеством нитей).

К настоящему времени проблема точности представления Бурау решена положительно для $n \leq 3$ и отрицательно для $n \geq 5$ (Бигелу). Случай $n = 4$ до сих пор открыт.

Мы приведем доказательство точности представления Бурау при $n = 3$ геометрическими методами, а затем покажем, как можно развить эту геометрическую технику для построения точного представления группы кос из произвольного числа нитей.

5.2. ПРИВЕДЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ

Заметим, что представление Бурау *приводимо*: все образы кос в этом представлении имеют общий собственный вектор $(1, \dots, 1)$ с собственным значением 0. Таким образом, существенным является *приведенное* представление Бурау, которое отображает группу кос из n нитей в матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$. Дальнейшая геометрическая интерпретация относится именно к *приведенному представлению Бурау*.

Приведенное представление Бурау выглядит следующим образом. Рассмотрим исходный базис пространства, в котором действует неприведенное представление Бурау: x_1, \dots, x_n . Как мы заметили, вектор $x_1 + \dots + x_n$ является собственным вектором относительно всех матриц представления Бурау. Опишем дополнительное собственное пространство к этому вектору. Пусть $y_i = tx_i - x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-2$. Тогда мы имеем:

$$y_i = tx_i - x_{i+1} \xrightarrow{\sigma_i} -t^2x_i + tx_{i+1} = -ty_i.$$

Аналогично:

$$y_{i-1} = tx_{i-1} - x_i \xrightarrow{\sigma_i} tx_{i-1} - (1-t)x_i - x_{i+1} = y_{i-1} + y_i;$$

$$y_{i+1} = tx_{i+1} - x_{i+2} \xrightarrow{\sigma_i} t^2x_i - x_{i+2} = ty_i + y_{i+1}.$$

При $j < i-1$ или $j > i+2$ имеем $\sigma_i y_j = y_j$. Таким образом, матрицы σ_i имеют вид блочно-диагональных с почти всеми единицами на диагонали.

В случае, когда $i > 1$ и $i < n$ матрица σ_i имеет один блок размера 3×3 , который выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В случае трех нитей представление будет двумерным и действовать на векторах y_1 и y_2 . В этом базисе косы σ_1 и σ_2 будут представлены матрицами:

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Легко проверяется, что матрица $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а ее квадрат будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Последняя матрица является образом центрального элемента Σ . Отметим, что никакая степень этой матрицы не является единичной.

5.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУРАУ

Говоря, что группа кос B_n представима матрицами $n \times n$, мы тем самым утверждаем, что группа кос *действует* на столбцах длины n : каждая матрица $B(\alpha)$, соответствующая косе α посредством какого-либо представления B , действует на векторах посредством умножения слева: $B(\alpha): x \mapsto B(\alpha) \cdot x$.

Верно и обратное: если группа G *линейно действует* на некотором линейном пространстве V , т. е. каждый элемент группы задает линейное преобразование на V , при этом единичный элемент действует тождественно и выполнено естественное свойство ассоциативности, $(g_1g_2)v = g_1(g_2v)$, $g_1, g_2 \in G$, $v \in V$, то это действие задает линейное представление группы G . При этом пространство V может иметь произвольную природу.

Рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию группы кос и представления Бурату.

Обозначим через D_n единичный круг на комплексной плоскости с n отмеченными точками (проколами) x_1, \dots, x_n в нем, расположенными подряд на вещественной оси.

На этом проколоте диске можно рассмотреть линейное пространство V_n *гомологических классов ориентированных замкнутых петель*, не задевающих проколы: у каждой петли можно посчитать, сколько раз она

обходит вокруг первого прокола (обходы по часовой стрелке считаются со знаком плюс), обходы вокруг второго прокола и т. д.

Таким образом, каждой ориентированной петле мы сопоставляем набор ее «координат»: x_1, \dots, x_n . Петли можно умножать (или, правильнее сказать, складывать, так как речь идет о линейном пространстве): можно пройти одну петлю, а затем после нее вторую петлю. Естественно, что при этом координаты петель будут складываться.

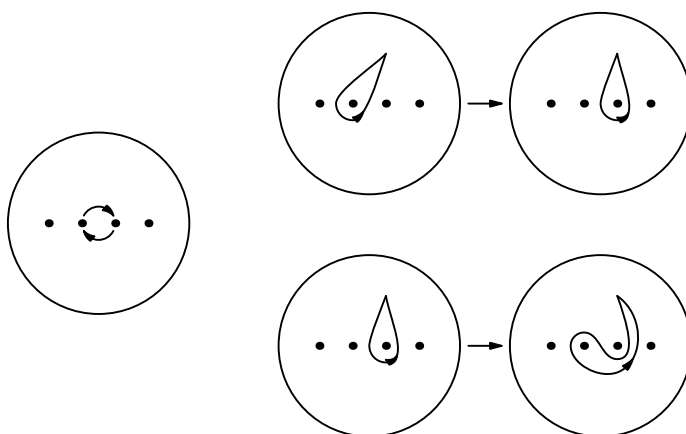
Это подводит к понятию *первой группы гомологий для диска с проколотыми точками* $H_1(D_n) = V_n$: данное линейное пространство V_n (скажем, над полем \mathbb{Q} рациональных чисел) представляет собой первую группу гомологий диска с проколотыми точками. Эта группа изоморфна группе \mathbb{Q}^n , где образующие соответствуют петлям, обходящим вокруг проколов.

Оказывается, что косы *естественно действуют на D_n и, следовательно, на линейном пространстве V_n* . Опишем это действие более подробно. Каждая коса b из n нитей представляет собой движение набора точек в трехмерном пространстве, при котором в начальный и в конечный моменты точки занимают одно и то же положение. Без ограничения общности можно считать, что это положение — это набор x_1, \dots, x_n и что за все время движения точки не выходят за пределы единичного круга.

Теперь можно представить, что вместе с набором точек x_1, \dots, x_n видоизменяется (движется по себе) весь диск D_n , при этом его граница остается на месте: представляя, что диск сделан из гибкого материала, жестко закрепленного на крае, с проколами в точках x_1, \dots, x_n , можно начать двигать проколотые точки согласно некоторой косе β , пока они в конце не встанут на свои места (в порядке, согласованном с косой β). Естественно, что *изотопные косы задают изотопные движения диска*: то есть, если деформировать косу непрерывно, то непрерывно будет меняться и вся история преобразования диска. Если же рассмотреть единичную косу, то есть держать все время проколотые точки на своих местах, то мы можем деформировать диск, но эта деформация будет оставаться *изотопной тождественной*. Это означает, что *множество всех автоморфизмов проколотого диска с точностью до изотопии* изоморфно группе кос $B\pi(n)$.

Отметим, что *изотопия кривой не меняет ее класса гомологий*: количество раз, сколько кривая обходит вокруг того или иного прокола, не меняется при малом шевелении кривой, которое не задевает проколов.

Следовательно, косы *действуют на $H_1(D_n) = V_n$* . Это действие устроено очень просто: коса σ_i переставляет местами точки x_i и x_{i+1} , следовательно, она переставляет i -ю и $(i+1)$ -ю координаты. Тем самым мы видим, что *представление группы кос на V_n получается из представления группы перестановок*: от косы остается лишь информация, как она переставляет точки, и соответствующая матрица состоит из единиц, переставленных в

Рис. 14. Действие образующей σ_2 на петли

соответствующем порядке. При этом группа крашенных кос, разумеется, переходит в единичную матрицу и образует *ядро представления*. Так что данное представление не точно.

Попробуем извлечь больше информации из действия группы кос на D_n . Переходя к *гомологиям*, мы сильно упростили задачу: в пространстве V_n мы от петель оставляем лишь информацию о том, *сколько раз* они обходят вокруг проколов, но совершенно игнорируем то, *в каком порядке* они обходят вокруг проколов. Так, например, две петли, изображенные на рис. 15, задают одинаковые элементы из V_n , но они *не гомотопны* в D_n : одну из них нельзя перетянуть в другую, не задев проколов.

На самом деле можно рассматривать *все возможные гомотопические классы петель с отмеченной точкой* — их будет счетное множество, и на них построить точное действие группы кос и, следовательно, точное представление группы кос. Но это представление будет бесконечномерным, а мы ищем конечномерные представления групп кос.

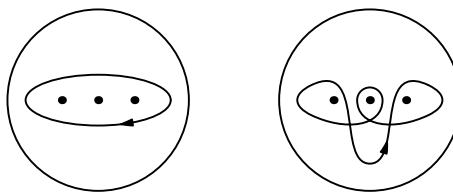


Рис. 15. Две не гомотопные, но гомологичные петли

Рассмотрим произвольную петлю $\gamma \subset D_n$. Пусть $\text{ind}(\gamma)$ обозначает суммарное количество раз, которое коса γ обходит вокруг проколов. Сосчитаем сумму координат петли γ в V_n : это будет общее количество оборотов вокруг всех точек.

Нетрудно заметить, что если подействовать любой косой b на D_n , то это общее число оборотов не изменится: $\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(b(\gamma))$. Действительно, каждая образующая группы кос переставляет образующие группы V_n , так что сумма координат вектора из V_n не меняется при действии группы кос.

Таким образом, у каждой петли γ имеется *целочисленный инвариант действия группы кос* $\text{ind}(b(\gamma))$. Это приводит к тому, что имеется *естественное накрытие* $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$ со структурной группой \mathbb{Z} , на котором действует группа кос из n нитей.

Накрытие одного пространства другим — это отображение, которое локально является гомеоморфизмом, т. е. каждую малую окрестность прообраза оно взаимно однозначно отображает на соответствующую малую окрестность образа. Разумеется, накрытие не является *глобально однозначным отображением*: над каждой точкой z в образе может «висеть» несколько точек из прообраза y_1, \dots, y_k , в нее переходящих, при этом прообразом малой окрестности $U(z)$ является набор окрестностей $\bigcup U_i(y_i)$. При этом накрытие $f: A \rightarrow B$ имеет *структурную группу* \mathbb{Z} , если имеется естественное действие группы \mathbb{Z} на всем пространстве A (обозначаемое $p: z \rightarrow t^p z, p \in \mathbb{Z}, z \in A$) такое, что $f(z) = f(t^p z)$ для любого p . Иными словами, на полном прообразе каждой точки из B можно делать сдвиги вверх (умножать на t^p при p положительном) и вниз (умножать на t^{-p}), при этом правило сдвига непрерывно зависит от точки.

Построим накрытие $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$ с действием группы \mathbb{Z} на \tilde{D}_n . Соединим в диске D_n каждый прокол с краем диска отрезком, идущим вниз от прокола. Если диск D_n разрезать вдоль таких отрезков, то он станет *односвязным*, т. е. любая петля в нем будет стягиваться в точку, а петли на D_n , обходящие вокруг проколов, будут пересекать разрезы. Представим себе, что у нас имеется счетный набор плоскостей $\{z = c \in \mathbb{Z}\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , и на каждой плоскости мы имеем по одному экземпляру разрезанного диска D_n . Рассмотрим замкнутые петли на D_n . Мы хотим, чтобы каждая петля, имеющая индекс k , соответствовала поднятию на k этажей вверх. Поэтому будем считать, что при пересечении разреза справа налево путь поднимается на этаж вверх, а при пересечении слева направо — опускается на этаж вниз. Чтобы завершить конструкцию \tilde{D}_n , склеим вдоль разрезов каждый правый отворот с соответствующим левым, находящимся на один уровень выше, см. рис. 16.

Отображение накрытия $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$ определим как проекцию вдоль оси z .

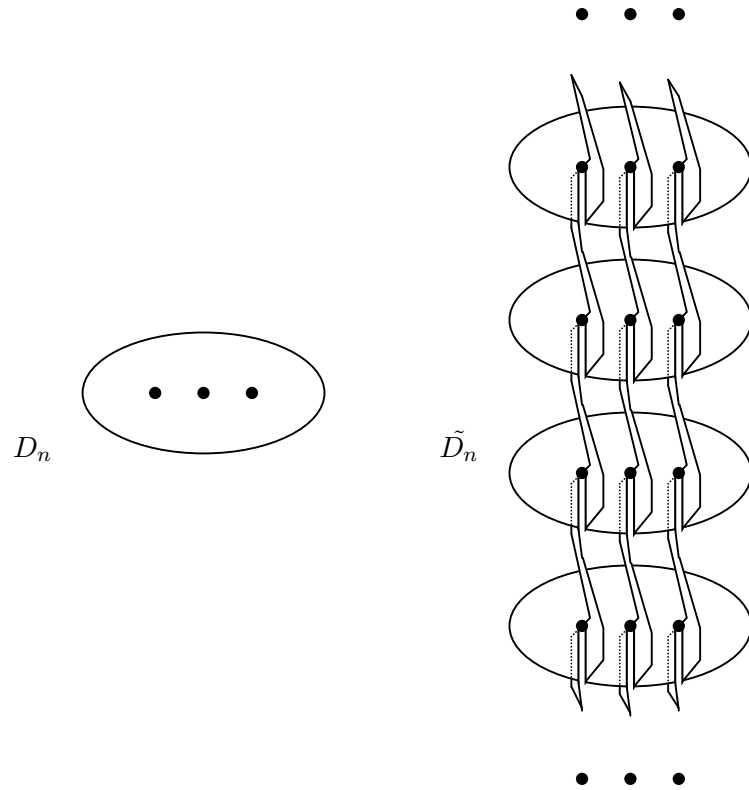


Рис. 16. Накрытие $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$

Рассмотрим множество замкнутых петель на \tilde{D}_n . Среди них имеются замкнутые петли, начинающиеся и заканчивающиеся на нулевом этаже: они соответствуют петлям γ на D_n с нулевым индексом. Подпространство пространства V_n , порождающее такие петли, будет $(n - 1)$ -мерным пространством V'_n : от пространства V_n нужно оставить лишь подпространство, соответствующее нулевой сумме координат. Таким образом, *бесконечномерное линейное пространство всех петель на \tilde{D}_n , рассматриваемых с гомологической точки зрения, можно представить как конечномерный модуль¹⁾ над $\mathbb{Q}[t]$* . Здесь мы говорим *модуль* вместо линейного пространства, так как $\mathbb{Q}[t]$ является не полем, а лишь кольцом: скажем, мы не можем делить на элемент $(1 - t) \in \mathbb{Q}[t]$. Эти элементы по-прежнему считают обходы вокруг проколотых точек, только точки на нулевом уровне

¹⁾Модулем называется пространство, элементы которого можно складывать (как векторы) и умножать на элементы кольца: например, множество целочисленных точек на плоскости представляет собой двумерный модуль над \mathbb{Z} .

соответствуют обычным координатам x_1, \dots, x_n , а точки на k -м уровне — координатам $t^k x_1, \dots, t^k x_n$. Таким образом, мы видим, что *первая группа гомологий* $H_1(\tilde{D}_n)$ *представляет собой* $(n - 1)$ -*мерный модуль над* $\mathbb{Q}[t]$ (одну образующую мы потеряли за счет того, что мы потребовали равенство нулю индекса петли).

Кроме рассмотренных, имеются еще петли, получаемые из петель V'_n сдвигами вверх и вниз. Разумеется, мы получаем бесконечномерное пространство: на каждом этаже имеется свой базис. Но мы можем ввести удобное обозначение: пусть петля γ лежит на нулевом этаже. Тогда петля, получаемая поднятием γ на k этажей будет обозначаться через $t^k \gamma$.

Здесь нужно сделать одну оговорку. Очевидно, что если мы сначала обойдем прокол с номером i по часовой стрелке, а затем обойдем тот же прокол против часовой стрелки, то мы сначала поднимемся на этаж вверх (скажем, с нулевого на первый), а затем спустимся на этаж вниз. Путь, пройденный нами, будет тривиальным, т. е. должен записываться как 0. Таким образом, если мы записываем первую часть пути как x_i , вторая часть пути должна записываться как $-x_i$, т. е. любой путь $-x_j$ спускается с первого этажа на нулевой (а не с нулевого на минус первый).

Поэтому при записи того или иного пути по образующим и определении степени переменной t пути с положительным знаком отсчитывать от нулевого уровня, а пути с отрицательным знаком — от первого уровня. Соответственно, путь, начинающийся на нулевом уровне обходом вокруг точки i против часовой стрелки, будет в своей записи иметь $-t^{-1}x_i$.

На рис. 17 изображена следующая образующая z_i . Петля сначала идет против часовой стрелки вокруг прокола с номером $i + 1$ с первого уровня на нулевой, а затем — по часовой стрелке вокруг прохода с номером i с нулевого уровня на первый, т. е. суммарно мы имеем $x_i - x_{i+1}$ и ее

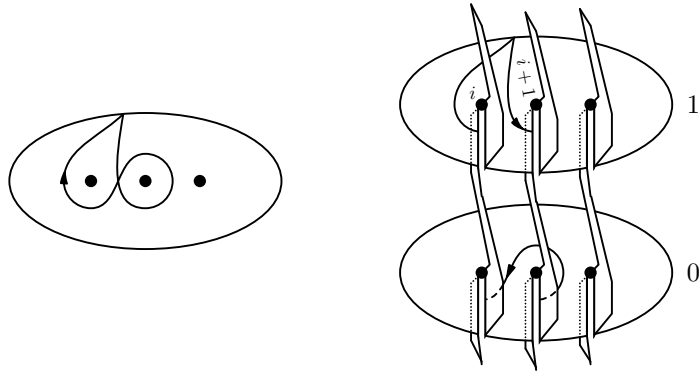


Рис. 17. Образующая $z_i = x_i - x_{i+1}$ и ее поднятие на \tilde{D}_n

поднятие, которое также будет записываться в виде $x_i - x_{i+1}$. Они будут образовывать базис в V'_n .

Так как действие кос на D_n сохраняет индекс петель, оно *продолжается на \tilde{D}_n* : замкнутые петли на \tilde{D}_n переходят в замкнутые. Более того, это действие согласовано с умножением на t : если умножить петлю γ на t , а затем подействовать на эту петлю косой b , получится тот же результат, что и в результате умножения на t результата действия косы b на γ .

Действие кос на образующие из V'_n можно записать в виде матрицы $(n-1) \times (n-1)$. Отметим, что представление Бурау, взятое при $t=1$, задает как раз представление кос перестановками, переход от петель на D_n к петлям на \tilde{D}_n соответствует потере одной образующей (у которой все координаты равны между собой и которая является собственным вектором неприведенного представления Бурау), а дальнейшее введение переменной t соответствует переходу от D_n к \tilde{D}_n .

Покажем, что это геометрическое представление совпадает с приведенным представлением, заданным на матрицах (где фигурируют переменные y_j вместо «геометрических» переменных z_j). Геометрически это показано на рис. 18 для образующих z_i : образующая σ_i меняет местами проколы x_i и x_{i+1} , вращая их оба вокруг их центра против часовой стрелки. Все образующие y_j при $j < i-1$ или $j > i+2$, очевидно, остаются на месте. Действие на z_{i-1}, z_i, z_{i+1} изображено на рисунке.

Образующая z_{i-1} переходит в петлю, разбивающуюся в сумму двух петель: сначала мы обходим вокруг $i+1$ -го прокола отрицательно, а после i -го — положительно, а после — отрицательно вокруг i -го прокола и положительно вокруг $i-1$ -го прокола. В итоге мы получаем сумму $z_i + z_{i-1}$.

Далее, на среднем рисунке изображено действие на образующую z_i : обход вокруг $i+1$ -го прокола в положительном направлении записывается как tx_{i+1} , после чего мы находимся на первом уровне; далее обход в отрицательном направлении вокруг i -го прокола записывается как $-tx_i$, т. е. в целом мы получаем элемент $-ty_i$.

Наконец, образ элемента z_{i+2} выглядит так: обходим вокруг прокола $i+2$ отрицательно, получаем $-tx_{i+2}$, далее обходим (стартуя с первого уровня) вокруг прокола номер $i+1$ положительно, получаем tx_{i+1} , далее положительно обходим вокруг прокола номер i , получаем x_i и, наконец, обходим отрицательно вокруг обхода номер $i+1$, получая $-x_{i+1}$. В итоге мы имеем $t(x_{i+1} - x_{i+2}) + (x_i - x_{i+1}) = tz_{i+1} - z_i$. В итоге мы получаем в точности матрицу из формулы (9).

5.4. Точность представления Бурау для трех нитей

Как оказывается, представление Бурау точно для трех нитей. У этого факта есть много доказательств, но мы приведем геометрическое доказа-

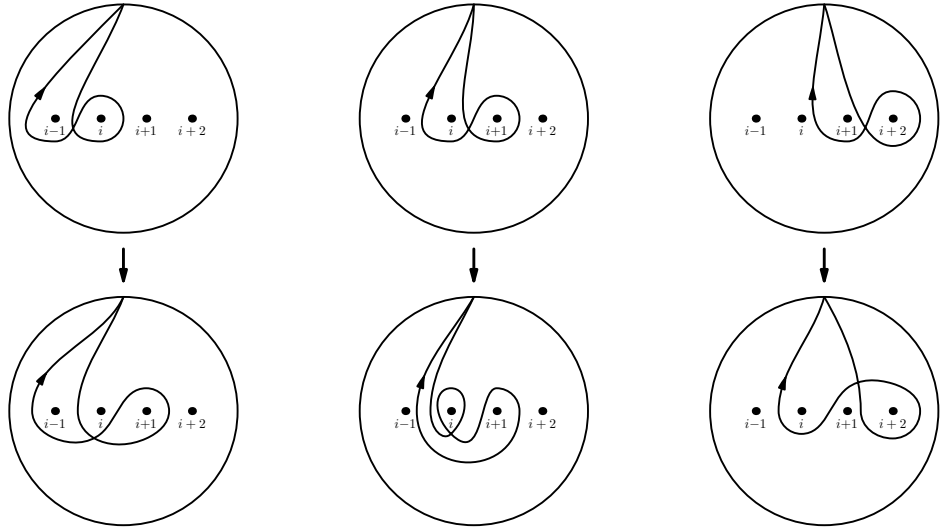


Рис. 18. Действие σ_i на образующие в приведенном представлении Бирау

тельство, впервые полученное Бигелой. Это доказательство *основывается на арифметических свойствах числа три*, и заведомо не проходит для большего числа нитей: для пяти и более нитей представление Бирау вообще не точно. Однако два геометрических утверждения (*ключевая лемма* и *основная лемма*) позволяют модифицировать конструкцию представления, чтобы получить точное представление группы кос из произвольного числа нитей (Бигелой).

Нам нужно показать, что любая нетривиальная коса из трех нитей в представлении Бирау дает матрицу, отличную от единичной. Это можно переформулировать так: для отображения D_n на себя, неподвижного на крае и не гомотопного тождественному, найдется элемент из $H_1(\tilde{D}_n)$, который переходит в другой элемент из $H_1(\tilde{D}_n)$.

Для доказательства точности представления Бирау нам понадобятся два вспомогательных понятия: *вилки* и *стебля*, см. рис. 19.

Выберем в качестве отмеченной точки на крае ∂D_n проколотого диска D_n нижнюю точку $-i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Вилкой* F назовем вложение графа с четырьмя вершинами d_0, p_i, p_j, z в единичный круг D такое, что:

1. Вилка F не содержит проколов, кроме p_i, p_j .
2. F пересекается с краем диска D_n только в точке d_0 .
3. Все три ребра дерева F имеют z в качестве вершины.

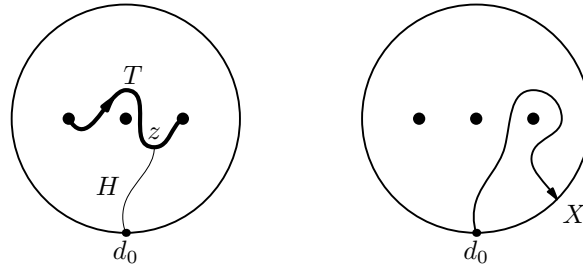


Рис. 19. Вилка и стебель

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ребро дерева F , содержащее d_0 , называется *ручкой* H вилки F . Объединение оставшихся двух ребер можно считать одним ребром; назовем его *зубцом* вилки F и обозначим его через $T(F)$. Ориентируем зубец $T(F)$ таким образом, чтобы ручка вилки F располагалась справа от зубца $T(F)$.

На рис. 19 зубец T изображен жирной линией, а ручка H — тонкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Стеблем* назовем ориентированный отрезок N в D_n такой, что:

1. Стебель N ориентирован от d_0 к некоторой другой точке X из ∂D_n .
2. $N \cap \partial D_n = \{d_0, X\}$.
3. Одна из двух связных компонент множества $D_n \setminus N$ содержит ровно одну отмеченную точку.

Дальнейшее доказательство опирается на понятие *спаривания*. Под *спариванием* ориентированных кривых на двумерной поверхности понимается способ сопоставления парам таких кривых целых чисел посредством подсчета алгебраического числа их точек пересечения. Знак точки пересечения двух ориентированных кривых γ и δ , трансверсально пересекающихся в точке X , определяется как $+1$, если в этой точке базис $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ положителен и как -1 , если он отрицателен. При *гомотопии* кривых точки трансверсального пересечения могут появляться и исчезать парами, при этом знаки пересечений у двух появляющихся (исчезающих) точек одинаковые, см. рис. 20.

Спаривание, которое мы собираемся ввести, помимо знаков будет содержать переменную t , т. е. каждый перекресток будет вносить вклад $\pm t^k$, где знак определяется стандартным образом, а степень переменной t будет зависеть от тех уровней на \tilde{D}_n , на которые поднимаются две ветви, пересекающиеся на \tilde{D}_n .

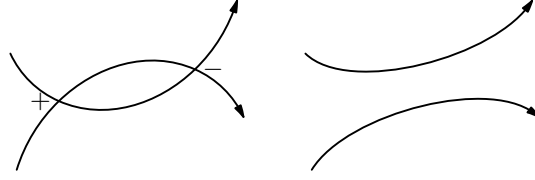


Рис. 20. Сокращение знаков у пары перекрестков

У вилки и зубца можно посчитать число точек пересечения (со знаками и с учетом степеней t , см. ниже). Любая коса, действуя на D_n , переводит вилку в вилку, а стебель — в стебель. Оказывается, что если коса действует простым образом, сохраняя форму пересечения, то она может быть тривиальна.

Пусть F и N — вилка и стебель соответственно. Определим спаривание $\langle N, F \rangle \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что $T(F)$ пересекает стебель N трансверсально (т.е. в каждой точке их пересечения касательные векторы не коллинеарны). Пусть z_1, \dots, z_k — точки пересечения $T(F)$ и N (порядок нумерации несущественен). Для каждого $i = 1, \dots, k$ обозначим через γ_i дугу в D_n , которая идет от d_0 к z_i вдоль F и затем обратно к d_0 вдоль N . Эта дуга на диске D_n замкнута, а ее поднятие на \tilde{D}^n поднимается (опускается) на несколько этажей вверх (вниз). Обозначим через a_i это число этажей (взятое с соответствующим знаком), а через ε_i — знак пересечения стебля N и вилки F в точке z_i . Положим

$$\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i t^{a_i}. \quad (13)$$

Попросту говоря, мы считаем точки пересечения в D_n со знаками, а степени переменной t считают, насколько этажей отстоят друг от друга «поднятия» точек пересечения на N и на F : если начать рисовать две кривые на D_n , исходящие из одной точки и одновременно рисовать такие же кривые на \tilde{D}_n , то те точки, в которых эти кривые пересекаются повторно на D_n , на \tilde{D}_n могут лежать на разных этажах.

Можно легко проверить, что введенное отношение не зависит от предварительной изотопии (которая позволяла считать пересечение зубца $T(F)$ и стебля N трансверсальным): если мы непрерывно изменяем N или $T(F)$, оставляя концы фиксированными, то точки пересечения могут возникать или исчезать лишь парами: положительная и отрицательная, при этом соответствующие пересечения будут лежать на одном и том же этаже.

Доказательство точности представления Бурау следует из двух лемм.

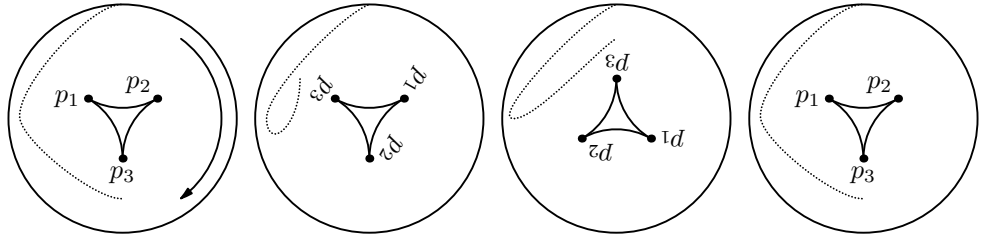


Рис. 21. Полный оборот оставляет на месте треугольник $p_1p_2p_3$

ЛЕММА 1 (ОСНОВНАЯ ЛЕММА). Пусть коса $\beta: D_n \rightarrow D_n$ лежит в ядре представления Бурау. Тогда $\langle N, F \rangle = \langle N, \beta(F) \rangle$ для любого стебля N и вилки F .

Смысл этой леммы — в том, что представление Бурау полностью определяет, с какими коэффициентами (из $\mathbb{Q}[t]$) пересекаются кривые (в частности — вилки и стебли).

ЛЕММА 2 (КЛЮЧЕВАЯ ЛЕММА). В случае $n = 3$ равенство $\langle N, F \rangle = 0$ имеет место в том и только в том случае, если зубец $T(F)$ изотопен дуге, не пересекающей N .

Выведем теперь точность представления Бурау для кос из трех нитей из этих двух лемм. Предположим, что коса β лежит в ядре представления Бурау. Покажем, что β — тривиальная коса.

Пусть N — стебель. Без ограничения общности можно выбрать N горизонтальной линией в D_n такой, что выколотые точки p_1 и p_2 лежат выше N , а p_3 лежит ниже N . Пусть F — вилка, такая что $T(F)$ представляет собой отрезок прямой от p_1 до p_2 , не пересекающий стебля N . Тогда $\langle N, F \rangle = 0$. По основной лемме мы имеем $\langle N, \beta(F) \rangle = 0$. Согласно ключевой лемме дуга $\beta(T(F))$ изотопна некоторой дуге, не пересекающей N . Применяя изотопию к β , можно считать, что $\beta(T(F)) = T(F)$.

Аналогичным образом можно доказать, что каждое из трех ребер треугольника с вершинами p_1, p_2, p_3 сохраняется под действием β . Таким образом, если β нетривиальна, то она представляет собой некоторое количество полных оборотов диска D , см. рис. 21. Однако как мы видели такие косы (представляющие собой центр группы кос из трех нитей) не лежат в ядре представления Бурау (соответствующие матрицы являются диагональными, но не единичными). Таким образом, представление Бурау для кос из трех нитей точно.

Перейдем к самой красивой и важной части доказательства точности представления Бурау для кос из трех нитей — ключевой лемме.

Доказательство ключевой леммы. Основной идеей является нахождение вилки, изотопной данной, зубец которой пересекает N в минимальном (ненулевом) количестве точек. Мы покажем, что это невозможно, если соответствующее спаривание нулевое.

Напомним, что, согласно определению (13), мы имеем $\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i t^{a_i}$.

Применяя при необходимости гомеоморфизм проколотого диска D_3 на себя, можно считать, что N — это горизонтальный отрезок прямой, лежащий в D_3 , с двумя выколотыми точками с верхней стороны и одной выколотой точкой с нижней стороны. Здесь мы немного отошли от прежней договоренности считать, что выколотые точки лежат на действительной оси, продеформировав слегка наше множество $D_3 \subset D$. Пусть D_3^+ , D_3^- обозначают верхнюю и нижнюю части множества $D_3 \setminus N$ соответственно. Перенумеруем выколотые точки таким образом, чтобы D_3^+ содержало точки p_1, p_2 , а множество D_3^- содержало точку p_3 . Рассмотрим теперь пересечение $T(F)$ с D_3^- . Оно состоит из несвязного набора дуг с концами в N (возможно, что у одной дуги одна конечная точка совпадает с p_3). Дуга $T(F) \cap D_3^-$, у которой оба конца лежат в N , должна отделять (вместе с частью горизонтального диаметра, расположенной между концами дуги) точку p_3 ; в противном случае ее можно удалить вместе с парой точек пересечения (что противоречит предположению о минимальности). Таким образом, множество $T(F) \cap D_3^-$ должно состоять из набора «параллельных» дуг, отделяющих точку p_3 , и, возможно, одной дуги, имеющей конец в точке p_3 .

Аналогичным образом, всякая дуга в $T(F) \cap D_3^+$ либо отделяет одну из точек p_1, p_2 , либо имеет конец в одной из точек p_1 или p_2 . Не может быть дуги в $T(F) \cap D_3^+$, отделяющей обе точки: в этом случае самая внешняя

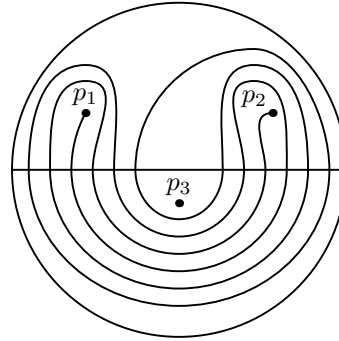


Рис. 22. Зубцы вилки и стебель в D_3

такая дуга вместе с самой внешней дугой в нижней части образовывали бы замкнутую петлю, т. е. «зубец» имел бы циклическую связную компоненту.

Посчитаем аккуратно число пересечения и убедимся, что все слагаемые, взятые при $t = -1$, имеют один и тот же знак.

Действительно, пусть z_i и z_j — две точки пересечения между $T(F)$ и N , соединенные дугой в $T(F) \cap D_3^+$ или в $T(F) \cap D_3^-$. Эта дуга вместе с частью дуги N ограничивает область, содержащую выколотую точку. Таким образом, $a_j = a_i \pm 1$. Кроме того, два знака точек пересечения противоположны: $\varepsilon_j = -\varepsilon_i$. Следовательно, $\varepsilon_j(-1)^{a_j} = \varepsilon_i(-1)^{a_i}$. Рассуждая также и впредь, мы заключаем, что все слагаемые для $\langle N, F \rangle$, взятые при $t = -1$, имеют один и тот же знак. Следовательно, $\langle N, F \rangle$ не равно нулю.

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРАМЕРА – БИГЕЛОУ

Поиск точного линейного представления группы кос из произвольного числа нитей был важной алгебраической задачей, которая была решена лишь к концу двадцатого века. Точное представление дает явный полный инвариант группы кос. В развитие той идеи, что представление Бурау происходит из некоторого накрытия, Стивен Бигелу предложил более изощренное накрытие, которое порождает другое представление. Бигелу доказывает точность этого представления, используя технику «вилки и стебля». Мы начнем с формального определения, следуя работе Даана Крамера [7]. После этого мы (не вдаваясь в подробности) скажем о геометрическом смысле представления (Бигелу [4]) и о причинах его точности.

6.1. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОУРЕНС – КРАМЕРА

Пусть n — натуральное число, а R — коммутативное кольцо с единицей над \mathbb{R} , порожденное элементами $q, t \in R$. Пусть V — линейное пространство над кольцом R размерности $\frac{n(n-1)}{2}$, порожденное некоторыми элементами $x_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

Определим действие группы кос $Br(n)$ на пространстве V по следующему правилу:

$$\sigma_k(x_{i,j}) = \begin{cases} x_{i,j} & k < i - 1 \text{ или } k > j; \\ x_{i-1,j} + (1-q)x_{i,j} & k = i - 1; \\ tq(q-1)x_{i,i+1} + qx_{i+1,j} & k = i < j - 1; \\ tq^2x_{i,j} & k = i = j - 1; \\ x_{i,j} + tq^{k-i}(q-1)^2x_{k,k+1} & i < k < j - 1; \\ x_{i,j-1} + tq^{j-i}(q-1)x_{j-1,j} & i < k = j - 1; \\ (1-q)x_{i,j} + qx_{i,j+1} & k = j; \end{cases} \quad (14)$$

где σ_k , $k = 1, \dots, (n - 1)$, суть образующие группы кос. Непосредственно проверяется, что указанные формулы действительно задают представление группы кос.

Обозначим пространство представления Лоуренс – Крамера – Бигелоу группы кос $Br(n)$ через L_n . Поскольку базис пространства L_n является частью базиса пространства L_{n+1} , мы имеем $L_n \subset L_{n+1}$. Из формул (14) следует, что L_n является инвариантным пространством относительно действия представления (14) группы $Br(n + 1)$ в пространстве L_{n+1} .

Из формул (14) следует, что представление группы $Br(n + 1)$, примененное к косам из $Br(n)$, совпадает с прямой суммой представления группы $Br(n)$, задаваемого по формулам (14), и тривиальным представлением, действующим на дополнительные образующие, относящиеся к $(n + 1)$ -й нити. Таким образом, можно говорить о бесконечномерном линейном представлении стабильной группы кос.

Мы не будем доказывать точность этого представления, поскольку такое доказательство требует рассмотрения многих причудливых конструкций. Детали см. в оригинальной работе Крамера [7].

6.2. КОНСТРУКЦИЯ БИГЕЛОУ И ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Представление Бурау кос из n нитей является $(n - 1)$ -мерным. Это связано с тем, что мы рассматриваем пространство D_n , его накрытие \tilde{D}_n и группу гомологий последнего, которая представляет собой $(n - 1)$ -мерный модуль.

Конструкция Бигелоу приводит к $\frac{n(n - 1)}{2}$ -мерному представлению группы кос из n нитей, упомянутому в предыдущем разделе. Идея построения этого представления такова. Вместо D_n мы рассматриваем *конфигурационное пространство неупорядоченных пар точек на D_n* . Так как группа кос действует на D_n , то она действует и на множестве $B_2(D_n)$ пар точек из D_n .

Это пространство — четырехмерное, и нужно рассматривать его *двумерные гомологии*. Не давая точного определения двумерных гомологий в общем случае, скажем, что эти гомологии соответствуют *парам петель, обходящих вокруг различных проколотых точек*. Так как мы имеем n точек, число пар точек равно $C_n^2 = \frac{n(n - 1)}{2}$, следовательно, пространство действия группы кос будет $\frac{n(n - 1)}{2}$ -мерным. Разумеется, оно будет сводиться лишь к *действию группы перестановок*: каждая коса, переставляя точки, переставляет и пары точек.

Далее Бигелоу переходит к накрытию данного пространства $B_2(D_n)$ другим пространством \tilde{B}_n . Это накрытие связано уже с двумя инвариантами. Один из них получается из индекса петель, а второй связан с вращением двух точек из D_n друг вокруг друга.

В итоге возникает $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерное пространство группы кос из n нитей уже с двумя параметрами t и q .

Доказательство Бигелоу точности представления основано на тех же идеях, которые использовались при доказательстве точности представления Бурау для группы кос из трех нитей. Именно, оно разделяется на три шага.

1. Основная лемма.
2. Ключевая лемма.
3. Вывод точности представления из этих двух лемм.

Вывод точности представления из двух лемм повторяет вывод точности представления Бурау для кос из 3 нитей. Вводится спаривание вилок и стеблей (на этот раз уже с двумя параметрами), после чего основная лемма (с аналогичной формулировкой) следует из тех же соображений, что и основная лемма для доказательства точности представления Бурау.

Наконец, ключевая лемма вытекает из геометрических соображений. Ее доказательство технически довольно сложно. Как и в случае представления Бурау для трех нитей доказывается, что в случае нулевого индекса пересечения вилку и стебель можно «развести»: предполагая, что их развести нельзя и рассматривая минимальное количество точек пересечения, мы приходим к противоречию: оказывается, что для такого минимального геометрического пересечения индекс ненулевой. Только в случае представления Бурау это следует из арифметических свойств числа три, а в случае представления Лоуренс – Крамера – Бигелоу — из дополнительной «степени свободы», доставляемой второй переменной: многочлен двух переменных «реже» равен нулю, чем многочлен одной переменной.

Заинтересованного читателя мы отсылаем к оригинальным работам, книге [1] или замечательному обзору В. Г. Тураева [9].

Таким образом мы построили точное представление группы кос, коэффициентами матриц которого являются полиномы от двух переменных. Из классических теорем теории чисел следует, что существует пара вещественных чисел, при подстановке которых вместо переменных мы получим точное представление с *вещественными коэффициентами*. Следовательно, все группы кос $Br(n)$ линейны.

Выражаю благодарность М. Н. Вялому за полезные замечания, способствовавшие улучшению стиля изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.О. Мантуров. *Теория узлов*. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая Динамика, 2005. 512 с.
- [2] В.О. Мантуров. *Экскурс в теорию узлов* // Соросовский образовательный журнал. Т. 8, №1, 2004. С. 122–127.
- [3] E. Artin. *Theorie der Zöpfe* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. 4, 1925. S. 27–72.
(Англ.: E. Artin. *Theory of braids* // Annals of Mathematics. Vol. 48, no 2, 1947. P. 101–126.
- [4] S. Bigelow. *Braid groups are linear* // J. Amer. Math. Soc. Vol. 14, 2001. P. 471–486.
- [5] J.S. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974.
- [6] W. Burau. *Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrillte Verkettungen* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. Bd. 11, 1936. S. 179–186.
- [7] D. Krammer. *Braid groups are linear* // Annals of Mathematics. Vol. 155, no 1, 2002. P. 131–156.
- [8] R. Lawrence. *Homological Representations of the Hecke Algebra* // Commun. Math. Phys. Vol. 135, (1990). P. 141–191.
- [9] V.G. Turaev. *Faithful linear representations of the braid group* // Séminaire Bourbaki. Vol. 42, 1999-2000, n. 878.