

Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

Par F. Severi, Roma

L'algèbre et la géométrie algébrique, c'est-à-dire l'expression synthétique des relations formelles et fonctionnelles de l'algèbre, ont été à toute époque, même sous des dénominations différentes, les champs expérimentaux les plus importants et les plus utiles des mathématiques. Nous en avons vu des exemples expressifs dans ce même Congrès dans la brillante conférence de M. Julia.

Beaucoup des conceptions originaires des branches aujourd'hui les plus éloignées de l'algèbre, ont pris naissance de cette science, et l'imagination algébrique joue toujours un rôle fondamental dans le développement d'un très grand nombre de théories de l'analyse et de la géométrie, quoique ce rôle soit fréquemment méconnu en étant désormais dans la sous-conscience de tout mathématicien.

Un aperçu sur l'histoire de notre science nous rappelle de suite ce qui est très souvent oublié, quoique bien connu de tout savant même peu cultivé dans l'histoire.

L'idée même de fonction, une des idées-force des mathématiques modernes, est née de l'algèbre; et dans ce champ elle a commencé à s'affiner et à se développer, en révélant des propriétés et des rapports qui constituent la base de l'analyse infinitésimale.

Descartes se pose le problème de savoir quelles sont les courbes dont il doit être question dans la nouvelle science et il conclut qu'il faut se borner aux courbes algébriques. Opinion évidemment exagérée, refusée par Leibniz. Mais elle est juste en ce sens qu'il était nécessaire d'expérimenter d'abord les conceptions nouvelles sur les fonctions qu'on pouvait plus aisément dominer et manier.

L'invention du calcul infinitésimal ne peut pas être conçue si l'on fait abstraction de la préparation et de l'orientation des esprits données par l'algèbre et par la géométrie de Descartes. Cela est démontré, pour ainsi dire, par l'absurde, puisque le principe d'exhaustion des géomètres grecs était resté stérile pendant plusieurs siècles, jusqu'au moment de son union à la jeune et féconde algèbre.

On a déjà remarqué que lorsque, vers la fin du XVIII^e siècle, le programme ouvert par le calcul infinitésimal et par la géométrie analytique semblait près de l'épuisement, de sorte que Lagrange même se tournait vers la chimie, la géométrie de position et la géométrie descriptive, c'est-à-dire deux branches particulières de la géométrie algébrique, vinrent vivifier l'atmosphère et donner aux mathématiques d'autres éléments vitaux. Monge put alors éclaircir les propriétés fondamentales des

Grosse Vorträge

équations aux dérivées partielles au moyen de constructions géométriques et arriver à la création de la géométrie différentielle avec ses célèbres applications de l'analyse à la géométrie.

La géométrie projective, cette branche moderne de la géométrie algébrique, qui eut dans la première moitié du XIX siècle des périodes éclatantes de fortune et qui resta presque oubliée jusqu'à ces dernières années, a elle-même contribué puissamment au renouvellement de notre science.

L'idée de transformation et de correspondance et celle de groupe de transformations, dont chaque mathématicien fait désormais usage presque tous les jours, tirent leur origine de la géométrie projective. D'un autre côté les conceptions et les rapports fondamentaux sur les groupes de transformations ont trouvé leurs premiers aliments dans une théorie purement algébrique: celle des groupes de substitutions de Ruffini et de Galois.

Dans le champ étroitement algébrique la géométrie projective a provoqué la théorie générale des formes algébriques et des invariants. Les polaires réciproques de Poncelet et de Bobillier ont conduit Boole à la première notion de covariant.

Il serait très intéressant de construire l'arbre généalogique de chaque théorie mathématique: dans 90% des cas, j'en suis sûr, on trouverait une souche de race algébrique. L'algèbre est l'Eve, peut-être quelquefois sans Adam. La difficulté principale de la formation de ces arbres c'est que les mariages entre parents sont nombreux et le cas de polygamie très fréquent. Permettez-moi quelques exemples en style télégraphique:

- a) *Géométrie descriptive.* *Descendance* : géométrie différentielle, géométrie projective.
- b) *Géométrie projective.* *Descendance du 1^{er} degré* : théorie des transformations et des groupes. Théorie des invariants. Géométrie abstraite (Möbius, Plücker, Staudt). Géométrie à plusieurs dimensions développée dans le sens algébrique (Cayley, Klein, Veronese, Segre, etc.).
- c) *Descendance du 2^{me} degré* : Géométrie non-euclidienne, descendance directe de la géométrie projective et de la géométrie différentielle. Géométrie riemannienne. Analysis situs.
- d) *Descendance du 3^{me} degré* (moyennant le mariage parmi groupes, invariants, fonctions): groupes discontinus et continus; fonctions automorphes.
- e) *Descendance du 4^{me} degré* (moyennant le mariage parmi géométrie non-euclidienne, géométrie différentielle, forme algébrique): calcul différentiel absolu; relativité générale, parallélisme de Levi-Civita.
- f) *Descendance du 5^{me} degré* : Espace à connexion affine et projective de Cartan, Schouten, Weyl, Veblen, etc.

F. Severi: Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

J'ai laissé de côté plusieurs branches collatérales, en entendant seulement de donner un petit essai d'une classification qui serait fort intéressante. D'autre part nous devons revenir dans la suite sur des relations de l'espèce envisagée.

* * *

Parmi les théories contemporaines, deux surtout sont étroitement liées à la géométrie algébrique, quoique les liaisons ne soient pas toujours visibles au premier abord. Je parle de la topologie et de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

La topologie aura sans doute un rôle fondamental dans la mathématique de l'avenir, dont on aperçoit de plus en plus les caractères qualitatifs et intégraux.

Eh bien, les questions fondamentales de la topologie ont été posées par la géométrie algébrique. Il ne faut pas remonter à Riemann, Betti, Poincaré, Picard : il est suffisant de se rapporter aux remarquables progrès récents des écoles contemporaines. L'influence originaire de la géométrie projective sur la pensée de M. Veblen et de M. Weyl est presque évidente; comme le caractère algébrique de la formation intellectuelle de M. Alexander et de M. Lefschetz, qui eut plusieurs contacts avec l'école italienne, est certain. Il va sans dire, que pour ordonner l'Analysis situs en système déductif et pour élever la puissance de son esprit de généralité, la théorie des ensembles a rendu et rendra toujours de grands services. Mais dans la position et l'orientation des problèmes la géométrie algébrique continue et continuera sa fonction créatrice.

Il faut que je descende de ces affirmations générales à quelques réflexions un peu plus détaillées. Je considère comme un des exemples les plus significatifs la théorie des intersections des cycles sur une variété topologique, qui a commencé par une remarque importante de Kronecker, relative à la détermination du nombre des solutions de plusieurs équations analytiques dans un domaine donné, et qui a été conduite tout récemment à un haut degré de généralité et de perfection par M. Lefschetz.

Je ne veux pas dire que tout ce que l'on rencontre dans cette théorie ait son premier germe dans la géométrie algébrique. Voici une différence remarquable entre ce champ et un champ dans lequel on suppose seulement la continuité. Les intersections de deux cycles quelconques d'une variété topologique ont un signe qui n'est pas généralement le même pour chaque intersection; tandis que les intersections de deux cycles algébriques dans une riemannienne ont un signe constant.

Et j'ajoute que même s'il était vrai que toute idée topologique ait sa racine en algèbre, cela ne diminuerait point la génialité d'une intuition qui aperçoit des rapports généraux là où l'on n'a vu auparavant que des rapports particuliers.

Dans la théorie des intersections des cycles, on donne une signification aux inter-

Grosse Vorträge

sections (qu'elles soient isolées ou non) qui élimine au premier abord toute difficulté découlant des positions particulières des cycles et qui en outre est invariante vis-à-vis des transformations biunivoques continues, c'est-à-dire des homéomorphismes. Ainsi on arrive à parler d'un nombre fini d'intersections de deux lignes simples, fermées de Jordan, dans le plan, même si les deux lignes ont en commun des arcs. Dans ce but on substitue à un des deux cycles un cycle approché convenable et l'on démontre l'invariance topologique, par rapport aux deux cycles donnés, de la définition des intersections trouvées au moyen du cycle approché.

Eh bien, cette conception existe déjà en géométrie algébrique, du moins pour ce qui se rapporte aux cycles algébriques, en toute rigueur et précision. Je crois bien de m'arrêter un instant sur la question. La plupart des mathématiciens qui ne connaissent pas à la fond la géométrie algébrique italienne et de ceux qui sont arrivés à s'occuper de ses résultats par l'intérêt de certaines questions collatérales, considèrent quelquefois nos méthodes comme quelque chose de mystérieux qui ne peut pas être manié sans danger en dehors d'un petit nombre d'initiés; et ils préférèrent pour cela créer ou perfectionner d'autres méthodes; ils croient même quelquefois devoir mettre au point des résultats que nous connaissons depuis longtemps avec précision.

Même en Allemagne, où les méthodes algébriques-géométriques ont eu d'importantes impulsions initiales à travers l'œuvre décisive de Brill et Noëther, continuateurs éminents de la tradition riemannienne, l'usage de ces méthodes a été interrompu pendant une longue période et ce n'est que dans ces derniers temps que de jeunes mathématiciens allemands très bien qualifiés reprennent avec entrain la glorieuse tradition.

M. Van der Waerden, dont j'estime beaucoup l'intéressante production, a écrit tout récemment que dans le problème des intersections les méthodes algébriques n'ont pas la même généralité que les méthodes analytiques, parce qu'ils ne peuvent pas s'appliquer à la géométrie sur une variété abstraite quelconque, car sur une telle variété il n'existe pas généralement un groupe continu de transformations birationnelles qui puisse jouer comme le groupe des homographies dans l'espace projectif. Suivant le même auteur les méthodes analytiques mêmes ne sont pas valables dans tous les cas et par suite on ne peut avoir une définition générale et complète du concept de multiplicité d'intersection en dehors de la topologie.

M. Lefschetz à son tour, tout en reconnaissant (comme il me l'a écrit en 1930) que mes anciennes recherches sur les fondements de la géométrie énumérative „se rapprochent remarquablement de la topologie“ (plus exactement de la partie de la topologie qui n'était pas encore créée) semble croire que la démonstration du principe de la conservation du nombre, que j'ai donnée sans aucune restriction en 1912, se rapporte seulement aux intersections de variétés à $n - 1$ dimensions dans une variété à n dimensions, tandis que pour la démonstration générale (de laquelle M. Van der

F. Severi: Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

Waerden s'est occupé) il faudrait, selon M. Lefschetz, avoir recours à la topologie, car on doit déterminer les intersections de deux cycles quelconques.

Je ne suis pas d'accord à ce sujet ni avec M. Van der Waerden ni avec M. Lefschetz. Je crois avoir déjà démontré estimer beaucoup la topologie et ses prophètes; mais on peut quelquefois trouver la santé même en dehors de la topologie. Notre géométrie possède, depuis longtemps, les moyens d'évaluer rigoureusement la multiplicité d'intersections de deux variétés ou cycles algébriques quelconques sur une variété algébrique; et la méthode qu'on a suivie en topologie n'est que le transport – conscient dans la première phase et peut-être inconscient dans la seconde – de ces moyens là.

Voyons. Je prends, pour ne pas compliquer le langage, le cas de deux courbes algébriques A , B sur une variété algébrique C , à trois dimensions, et je suppose que A , B ont un point commun O (en un point simple de C). Il faut donner un sens à la multiplicité d'intersection de A , B en O . Le fait que A et B ne sont pas variables sur C avec continuité, pourvu que cela soit vrai, ne me gêne pas; et par conséquent je n'ai aucunement besoin d'avoir sur C un groupe continu transitif de transformations.

On démontre aisément et élémentairement qu'il est possible de conduire par la courbe A une hypersurface algébrique F d'un ordre suffisamment élevé, de l'espace ambiant, appartenant à un système linéaire n'ayant pas des points bases hors de A , de sorte qu'en donnant à F un petit déplacement, l'hypersurface déplacée G , ait exactement s intersections simples avec la courbe B voisines de O , qui aboutissent en O , lorsque G revient en F . Le nombre s est le même quelle que soit la manière de faire la construction, sous les conditions posées, et il donne la multiplicité d'intersection de A , B en O . En outre s est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles pour lesquelles O n'est pas exceptionnel et il est le même que celui qu'on obtient par une projection générale de A , B sur un plan. A défaut de cette conception nous n'aurions jamais pu parler des caractères virtuels d'une variété tracée sur une autre: ni construire la théorie générale des correspondances algébriques; etc.

Comme on le voit dans l'exemple précédent, il s'agit de substituer à un cycle convenable à quatre dimensions, conduit par le cycle à deux dimensions A , un cycle approché: c'est-à-dire exactement la même chose qu'on fait en topologie.

Les problèmes d'équivalence, lorsque deux variétés se coupent suivant des variétés infinies de dimension plus grande que la dimension normale, peuvent être traités de la même manière. P. ex. pour évaluer le nombre des intersections de trois surfaces A , B , C de l'espace ordinaire, absorbées par une courbe D commune à ces surfaces, on donnera à l'une d'entr'elles, A , un déplacement arbitraire, de sorte que B , C et la surface déplacée se coupent en un nombre fini de points distincts (égal au produit de leurs ordres) et, parmi ces intersections, l'on évaluera celles qui sont voisines de D .

Grosse Vorträge

Je n'insisterai pas davantage sur des problèmes de cette espèce et je terminerai ces considérations en rappelant deux sortes de questions topologiques liées aux questions précédentes.

On sait que, d'après MM. Poincaré et Birkhoff, certaines propriétés qualitatives des intégrales des équations différentielles conduisent à des problèmes topologiques de détermination du nombre des points unis d'un homéomorphisme d'une variété topologique V en soi-même. Il s'agit, même dans ce cas, d'un problème d'intersection. En effet sur la variété produit de V avec soi-même, les homéomorphismes (en particulier l'identité) de V sont représentés par des cycles et il s'agit de déterminer les intersections d'un de ces cycles avec le cycle qui représente l'identité. Ce point de vue, emprunté à la théorie des correspondances sur une variété algébrique, a été transporté en topologie par M. Lefschetz et la conception même de produit topologique de deux variétés dérive de ma théorie des correspondances algébriques.

Il me semble qu'un des plus importants problèmes topologiques qu'on peut se poser en ce moment, est de chercher à élargir la connaissance des invariants topologiques, pour arriver à caractériser, au point de vue des homéomorphismes, une variété topologique: soit p. ex. une variété riemannienne.

On sait très bien qu'une surface fermée bilatère est caractérisée seulement par la valeur du genre, c'est-à-dire par sa connexion linéaire. Les choses se passent d'une façon très différente et bien cachée même pour les variétés à trois dimensions, pour lesquelles le problème n'est pas résolu. Les travaux classiques de Poincaré ne font que montrer sa difficulté.

Il est certain qu'il y a nombre d'invariants topologiques qui n'ont pas été considérés et qui sont indépendants des invariants connus. Ainsi p. ex. les intersections de groupes de cycles pourront donner des invariants nouveaux en posant certaines conditions de minimum pour le nombre de ces intersections. On peut aussi considérer des groupes plus généraux que le groupe d'équivalence de Poincaré, se rapportant aux cycles de dimension quelconque, dont on a fixé un sous-cycle (en particulier un point): j'ai donné la définition de ces groupes au Séminaire mathématique de Rome en 1931. Peut-être faudra-t-il les étudier.

* * *

Je vais parler d'un autre ordre de questions dans lequel la géométrie algébrique et peut-être ma théorie de la base pourront rendre d'utiles services. Je fais allusion aux propriétés arithmétiques des courbes et des variétés algébriques, c'est-à-dire aux problèmes classiques de la théorie des nombres, concernant la solution des équations algébriques indéterminées, à coefficients rationnels, en nombre entiers ou rationnels. Les plus anciennes recherches sur ce sujet, qui s'appuient sur la géométrie sur une courbe et qui ont porté sur des équations particulières, sont de MM. Hilbert,

F. Severi : Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

Hurwitz (1896), Poincaré, B. Levi (1905—1907); les plus récentes (après 1922) qui considèrent aussi des types très généraux d'équations, appartiennent à MM. Mordel, André Weil, Nagell, Thue, Siegel, etc. Il faut avant tout remarquer que le résultat de Hilbert-Hurwitz-Poincaré concernant la possibilité de réduire une courbe rationnelle à coefficients rationnels, à une droite ou bien à une conique sans points rationnels, est virtuellement contenu dans un théorème donné en 1870 par Max Noëther, concernant la possibilité de réduire birationnellement toute courbe rationnelle à une droite ou à une conique, sans introduire des irrationnalités arithmétiques, suivant que l'on connaît ou non un point de la courbe. Je crois devoir rendre cet hommage au souvenir du grand savant allemand, dont les travaux ont été quelquefois méconnus et que les géomètres italiens considèrent comme un des leurs maîtres.

Le résultat le plus expressif a été obtenu en 1930 par M. Siegel en se basant sur les résultats obtenus précédemment par le jeune mathématicien français M. André Weil, et sur les méthodes d'approximation diophantique. Le résultat dont il s'agit est le suivant : Dans un corps algébrique donné les solutions en nombres entiers de toute équation à deux variables de genre > 0 , sont en nombre fini et il est aisé de déterminer les équations de genre 0, qui admettent une infinité de solutions entières. Le problème de savoir quelles équations à deux variables possèdent une infinité de solutions entières est ainsi complètement résolu; et il est vraisemblable que même le nombre des solutions rationnelles d'une équation à deux variables de genre > 1 , est fini. Tout cela nous fait approcher notablement de la démonstration du grand et célèbre théorème de Fermat.

* * *

Je vais maintenant parler des relations entre la géométrie algébrique et la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables qui s'est développée remarquablement dans les derniers temps.

Les propriétés sur la divisibilité des fonctions algébroides, en tant qu'elles sont liées aux théorèmes d'existence des fonctions implicites, n'introduisent pas d'éléments nouveaux par rapport à ceux qui existent déjà dans l'admirable théorie des fonctions analytiques d'une variable créée par Cauchy, Riemann et Lagrange-Weierstrass. C'est encore à la géométrie algébrique qu'on doit l'introduction des premières idées essentiellement nouvelles.

Clebsch et Noëther avaient défini en 1869 les intégrales doubles de première espèce et M. Picard avait introduit en 1884 les intégrales simples attachées à une surface algébrique. C'est là que commence la théorie nouvelle.

La définition de Clebsch-Noëther supposait un concept qu'on n'avait pas encore avec précision. Mais comme quelquefois la science a besoin de nébuleuses qui contiennent en formation les étoiles, cette indétermination même rendait nécessaires

Grosse Vorträge

d'autres recherches importantes, qui furent achevées en 1886 par Poincaré. A ce grand géomètre remonte la définition rigoureuse d'intégrale multiple dans le champ complexe et l'extension du théorème relatif à l'intégrale de Cauchy. Cette extension fut déterminée par des problèmes géométriques concernant les périodes et les résidus des intégrales multiples.

Il est bon de répéter ici une constatation qui me paraît instructive : ce fut précisément l'extension du théorème de Cauchy qui donna l'occasion à M. Volterra, en 1887, d'introduire des conceptions nouvelles de calcul fonctionnel, duquel, comme tout le monde le sait, il a été un des plus éminents créateurs. Voici donc démontré encore une fois la fécondité de l'association d'idées en apparence très éloignées et l'opportunité de nous rafraîchir souvent, dans nos voyages vers l'inconnu mathématique, à une source riche et limpide comme l'algèbre.

Pour étudier les fonctions analytiques dans leur champ complet d'existence, il faut fixer avant tout la manière d'introduire l'infini dans le domaine de variabilité de plusieurs variables complexes. On doit chercher une indication précise et naturelle à ce propos dans notre géométrie, en tant qu'elle considère toujours des fonctions qui s'étendent à l'infini, comme les fonctions rationnelles et algébriques et leurs intégrales : les fonctions hyperelliptiques, abéliennes, etc. Eh bien, notre géométrie envisage toujours l'infini au point de vue projectif, de sorte que les définitions du comportement des fonctions à l'infini, demeurent invariants par rapport aux changements les plus simples de variables : c'est-à-dire aux substitutions linéaires.

J'ai montré que ce point de vue est le seul qui conduit à identifier le domaine de plusieurs variables complexes avec une variété topologique réelle, la plus simple possible, fermée et partout homogène.

L'homogénéité topologique est essentielle si l'on ne veut pas rencontrer fréquemment des paradoxes, qu'on réussit à peine à éviter par des analyses inutilement fatigantes.

Il est bien évident que la substance des choses ne peut changer d'une façon ou de l'autre que l'on envisage l'infini, pourvu que l'interprétation finale soit correcte. Mais voilà une raison de plus de saisir le point de vue le plus simple.

On doit donc prendre comme un modèle topologique du champ complet de variabilité de n variables complexes, la riemannienne de l'espace projectif complexe à n dimensions. On peut aisément construire pour chaque riemannienne des modèles algébriques réels. Pour l'espace projectif on a ainsi une variété remarquable, qui a été découvert par Corrado Segre, mon regretté et éminent maître. J'ai trouvé que cette variété a le plus petit ordre parmi les variétés algébriques réelles qui représentent la même riemannienne. Elle est donc, à un certain point de vue, un modèle qui ne peut pas être remplacé.

Dans le cas d'une variable on retombe ainsi sur la sphère ou sur une quadrique

F. Severi: Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

à points elliptiques; dans le cas de deux variables sur une variété V elliptique du sixième ordre de l'espace à huit dimensions. Une projection de V , analogue à la projection stéréographique de la sphère, ramène la représentation de deux variables complexes sur l'espace euclidien réel à quatre dimensions. Dans cette représentation il existe nécessairement des éléments exceptionnels. En effet, il y a une congruence linéaire elliptique C de droites exceptionnelles à l'infini, chacune d'elles représentant un seul point de V . La représentation cesse d'être homogène. Les droites directrices a, b de la congruence C sont imaginaires conjuguées.

J'ai exposé ces détails parce qu'ils constituent le fondement d'une méthode géométrique pour étudier les fonctions analytiques de deux variables. Cette méthode a été développée par moi-même et par mon élève M. Beniamino Segre.

Je donnerai, en peu de mots, quelques renseignements sur le sujet. Une surface caractéristique de l'espace S à quatre dimensions (c'est-à-dire, suivant la dénomination de M. Levi-Civita, une surface représentant une relation analytique entre x, y) est caractérisée géométriquement par la propriété que ses plans tangents – qui sont évidemment caractéristiques – s'appuient sur les droites a, b , les intersections étant les points cycliques de ces plans. Cela rend évident p. ex. qu'une surface caractéristique ne peut pas se renverser, avec changement de ses deux côtés entr'eux, par une variation continue qui la laisse toujours caractéristique. En effet les points cycliques de ses plans tangents se meuvent séparément sur a, b et ne peuvent pas s'échanger entr'eux. On a ici l'extension aux courbes analytiques d'une propriété donnée par M. Lefschetz pour les courbes algébriques.

Une surface caractéristique $f(x, y) = 0$ qui n'a que des points simples et des points multiples algébroides, s'étend nécessairement à l'infini et si f est uniforme dans un domaine à quatre dimensions comprenant à l'intérieur la surface, celle-ci est toujours la riemannienne d'une courbe algébrique. (Lorsque la condition posée pour f n'est pas satisfaite le théorème n'est pas toujours vrai). Ce théorème contient la proposition classique de Weierstrass-Hurwitz, relative à la rationalité d'une fonction analytique de plusieurs variables partout méromorphe.

Si une fonction analytique d'une variable complexe et d'une variable réelle, qu'on peut représenter sur un hyperplan de l'espace S , est holomorphe sur une surface fermée simple de cet hyperplan, elle est aussi holomorphe à l'intérieur de la surface. De là s'ensuit immédiatement le théorème de M. Hartogs, affirmant la régularité, à l'intérieur d'une cellule finie à quatre dimensions, d'une fonction analytique de deux variables complexes, qui est holomorphe à la frontière de la cellule. Ce théorème – comme le dit justement M. Osgood – est le plus frappant de toute la théorie.

Il est de même aisé de déduire, au point de vue géométrique, les théorèmes de M. E. E. Levi sur les hypersurfaces qui peuvent être frontières des champs d'existence des fonctions de deux variables, etc.

Grosse Vorträge

A propos du théorème de Hartogs, on doit rappeler dans ce lieu que la première des propriétés surprenantes des singularités des fonctions de plusieurs variables (c'est-à-dire l'inexistence de points singuliers isolés) fut énoncée ici, à l'occasion du I. Congrès international des mathématiciens, par Adolf Hurwitz, le maître regretté de l'École polytechnique de Zurich, qui a laissé de très importants travaux même dans le domaine algébrique.

Je veux signaler encore un problème surtout à cause de ses relations avec le théorème d'existence des fonctions algébriques de deux variables. J'ai nommé le problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques, c'est-à-dire pour les fonctions qui sont les parties réelles (ou imaginaires) des fonctions analytiques de deux variables complexes. Poincaré en 1883 s'était borné à remarquer qu'on ne peut pas choisir arbitrairement la fonction déterminée sur la frontière d'une cellule à quatre dimensions par une fonction biharmonique régulière, comme on peut le faire (sous certaines conditions qualitatives) dans le problème ordinaire de Dirichlet pour les fonctions harmoniques. M. Levi-Civita en 1905, en face de cette impossibilité, s'était borné à étendre aux fonctions de deux variables le point de vue local de Cauchy.

J'ai pu en 1931 résoudre le problème intégral, en écrivant explicitement les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à la frontière de la cellule pour déterminer univoquement une fonction biharmonique ou analytique holomorphe à l'intérieur. Ces conditions sont étroitement différentielles, de sorte que les relations à la frontière entre les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique holomorphe dans la cellule, sont elles-mêmes différentielles. Cela constitue un résultat inattendu, car dans le problème analogue pour les fonctions d'une variable on a des relations purement intégrales. M. Fubini a retrouvé récemment le théorème en restant dans le champ réel.

J'ai établi aussi un théorème d'unicité qui réduit énormément le choix des éléments arbitraires pour la détermination d'une fonction analytique de deux variables, holomorphe dans la cellule. En effet il est nécessaire de connaître au plus deux fonctions analytiques d'une variable réelle le long d'un petit arc, choisi d'une façon générale sur la frontière à trois dimensions. Il faudrait démontrer que ces éléments sont effectivement nécessaires, ce qui résoudrait la question d'existence corrélative.

Les rapprochements entre les questions indiquées et le théorème d'existence des fonctions algébriques de deux variables, deviennent évidents, lorsqu'on rappelle les relations entre le problème ordinaire de Dirichlet et le théorème d'existence de Riemann. Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables, au point de vue algébrique-géométrique, on a des recherches intéressantes de MM. Enriques, Zariski, B. Segre; mais la question est loin d'être achevée.

En traitant des fonctions analytiques je laisse de côté les questions relatives à la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire aux trans-

F. Severi: Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

formations que j'appelle pseudoconformes, car elles ont été traitées par M. Carathéodory dans sa conférence magistrale. Il s'agit d'un domaine qui va à présent s'élargir de plus en plus, surtout en Allemagne et en France, et où l'on a bien des résultats brillants et importants dûs à M. Carathéodory même et à Poincaré, Almer, Reinhardt, Blaschke, Behnke, Bergmann, Elie et Henri Cartan, Thullen, etc. Au point de vue géométrique une transformation pseudoconforme en x, y est caractérisée par la condition de transformer chaque plan imaginaire de l'espace à quatre dimensions passant par l'une des droites a, b , dans un plan analogue. Cela, comme l'a montré M. B. Segre, éclaircit notablement le problème de Poincaré, pour l'équivalence des cellules à quatre dimensions vis-à-vis des transformations susdites. Le problème, au point de vue local, a été résolu par M. Elie Cartan dans des travaux qui viennent de paraître.

* * *

En m'approchant de la fin, j'ajoute quelques mots sur les relations entre notre géométrie et les problèmes d'intégration des équations différentielles dans le domaine analytique.

On connaît les profondes recherches de M. Painlevé sur les équations du 2^e ordre à points critiques fixes. Un théorème donné à ce propos et qui achève presque complètement la connaissance de ces équations, a été aisément démontré, il y a quelques années, par mon élève M. Tricomi, comme application de la géométrie sur une surface algébrique. En conséquence toute équation du type envisagé se ramène de suite, à deux équations du premier ordre très simples.

L'intégration des équations différentielles du premier ordre où la dérivée de la fonction inconnue y est égale à une fonction algébrique quelconque de la variable x , c'est-à-dire égale à une fonction rationnelle d'un point (x, y, z) d'une surface algébrique, lorsqu'il a un multiplicateur rationnel en x, y, z , se ramène à l'étude des intégrales picardiennes attachées à la surface. Dans mes anciennes recherches sur ces intégrales j'ai démontré p. ex. que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration puisse s'effectuer seulement avec des opérations rationnelles et logarithmiques, est que la surface soit régulière (en particulier rationnelle). On voit ici l'extension du théorème classique relatif aux intégrales des fonctions rationnelles d'une variable, mais l'analogie se borne simplement à l'énoncé.

Certains résultats géométriques de MM. De Franchis, Comessatti, Zariski, donnent d'une façon semblable la réponse au problème d'intégration pour le cas où la dérivée de y est une fonction rationnelle de x, y et de la racine n -ième d'une fonction rationnelle de x, y .

M. Kähler, en ayant toujours égard aux problèmes d'intégration, a étendu la notion d'intégrale simple sur une surface, en introduisant les intégrales hypera-

Grosse Vorträge

béliennes, liées aux fonctions hyperabéliennes de M. Picard, dont les fonctions modulaires de MM. Hilbert et Hecke sont des cas particuliers, et il a montré l'utilité de ces fonctions dans l'intégration des équations du 1^{er} ordre du type général envisagé ci-dessus. Je saisis l'occasion pour ajouter que M. Kähler a donné tout récemment des liaisons très intéressantes entre la géométrie sur une variété algébrique et les formes différentielles et tensorielles de M. Elie Cartan; mais cela m'entraînerait trop loin.

Mon but principal était d'affirmer l'importance du rôle de l'algèbre et de sa géométrie dans le développement général des mathématiques. Peut-être cette thèse m'a-t-elle forcé quelquefois la main et j'ai vu trop d'algèbre où il y en a seulement un peu. Ce sont les dangers des amours passionnées. Je vous en demande pardon.