UNIVERSITÉ Pierre et Marie CURIE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

Spécialité :

Mathématiques

présentée par

M. Jean Delcourt

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Paris VI

Sujet de la thèse :

Analyse et géométrie :

les courbes gauches de Clairaut à Serret et Frenet

soutenue le 19 décembre 2007

devant le jury composé de :

Christian GILAIN, Université Paris 6 (directeur de thèse)
Jeremy GRAY, The Open University, Angleterre (rapporteur)
Philippe NABONNAND, Université Nancy 2
Jim RITTER, Université Paris 8
Joël SAKAROVITCH, Université Paris 5 (rapporteur)
Bernard TEISSIER, CNRS

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier Christian Gilain d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse et de m'avoir guidé dans le choix du sujet qui m'a occupé pendant quatre années. Sans ses conseils, son impulsion et ses encouragements, je ne serais jamais parvenu à la conclusion de ce travail.

Je lui associe le groupe « Histoire des Sciences Mathématiques » de l'Institut Mathématiques de Jussieu, enseignants, chercheurs et doctorants, pour des séances de travail dont l'ouverture sur de nombreux champs de l'histoire des sciences et des mathématiques a considérablement élargi mon horizon. J'ai également bénéficié des exposés du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, exposés tout aussi divers et toujours passionnants.

Philippe Nabonnand et Klaus Volkert m'ont invité au colloque « Qu'est-ce que la géométrie aux époques moderne et contemporaine ? » (CIRM, 16-20 avril 2007) me procurant par là une intéressante confrontation à la recherche actuelle en histoire de la géométrie. À cette occasion, avec le soutien et les conseils de Catherine Goldstein et Jim Ritter, j'ai pu relancer de façon décisive des réflexions qui m'ont permis d'avancer dans mon travail : qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Elle s'adresse aussi fortement aux collègues et amis de l'Université de Cergy-Pontoise, qui m'ont encouragé et aidé, notamment Vladimir Georgescu, directeur de l'équipe.

On me permettra d'évoquer dans ces remerciements le nom de Dirk Jan Struik. Peut-être parce qu'il a enjambé trois siècles au cours de sa longue existence, Struik a su, plus qu'un autre, présenter les mathématiques dans une perspective historique. C'est par son petit livre passionnant [Struik 1950] que j'ai abordé la géométrie différentielle classique et eu envie de pénétrer plus avant dans son histoire, de connaître un peu mieux les mathématiciens ayant contribué à l'édifice.

Comme beaucoup de chercheurs je ne saurais excepter de ma dette les personnels et les conservateurs des bibliothèques ou centre d'archives pour leur aide patiente dans mes recherches de documentation : ceux de la Bibliothèque nationale de france, de l'Institut Poincaré, de la bibliothèque de la Sorbonne, du centre d'archives de l'École polytechnique, et surtout des archives de l'Académie des sciences. J'y ajoute une mention spéciale pour cette chère Gallica (et surtout pour ses ouvriers), pour les longues heures de recherche épargnées et pour les milliers de pages dont l'accès nous est désormais facilité. D'un point du vue technique, je suis reconnaissant aux nombreux contributeurs du langage LaTeX, et à Michel Bovani pour sa police

de caractères, fourier bien sûr.

Je réserve une pensée reconnaissante à mon entourage proche qui m'a soutenu, encouragé, aidé et parfois supporté, durant ces années de travail.

Je remercie enfin Jeremy Gray, Philippe Nabonnand, Jim Ritter, Joël Sakarovitch et Bernard Teissier qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Table des matières

Introduction

1 Un thème qui jalonne une longue période

Ce travail a pour but d'écrire l'histoire du développement mathématique de la théorie des courbes gauches. Nous avons choisi de nous limiter à l'étude locale de ces courbes, et le début de nos recherches concerne des textes parus dans la première moitié du dix-huitième siècle. Nous nous intéressons en particulier au premier traité exclusivement consacré à cette théorie, celui du très précoce Alexis-Claude Clairaut. Nous terminons non pas exactement par les formules de Frenet-Serret ou Serret-Frenet, qui constituent une sorte d'aboutissement, mais par la contribution de Darboux, qui en quelques pages résume les travaux de ses prédécesseurs, achève la démonstration du « théorème fondamental des courbes gauches[1] » et surtout, annonce et inaugure les méthodes nouvelles de la géométrie différentielle, notamment par le biais du trièdre mobile.

Une des raisons ayant suscité notre intérêt est le grand nombre d'éminents mathématiciens rencontrés sur ce problème : outre Clairaut, on retrouve au dix-huitième siècle les noms d'Euler, de Monge, de Fourier et de Lagrange et, pour le siècle suivant, ceux de Cauchy, Liouville, Serret et Darboux. Il est particulièrement intéressant d'étudier, chez des mathématiciens de haut vol (nous pensons en particulier à Cauchy) la façon dont ils abordent certains sujets mineurs, en tout cas par rapport au reste de leur œuvre. C'est une perspective inhabituelle sur une période dont on connaît par ailleurs la richesse en avancées théoriques et techniques.

D'autres noms moins connus, comme ceux de Pitot, Tinseau, Lacroix, Lancret, Olivier, Saint-Venant, Puiseux, Bertrand, Frenet, Paul Serret, Aoust... seront cités, soit pour marquer des contributions essentielles (Lancret ou Frenet), soit pour un rôle plus anecdotique joué dans le développement de la théorie. C'est un plaisir trop peu signalé que de découvrir une véritable *littérature* mathématique sur ces sujets de géométrie, obligeant la langue a faire preuve de toute sa richesse, une littérature où des géomètres produisent des trésors d'éloquence pour convaincre d'une propriété mathématique, argumenter sur une question de vocabulaire[2] et faire vivre dans notre imagination des objets que le dessin ne suffit pas toujours à faire comprendre. Sans doute trouverait-on ici quelques échantillons d'une rhétorique mathématique

[1] Pour entrer dans une mode récente, nous appellerons ainsi le théorème qui énonce qu'une courbe gauche est caractérisée, à déplacement près, par ses fonctions courbure et torsion.

[2] Voir en particulier les longs développements de Saint-Venant [1845a, p. 52-64], dont nous parlerons page 153.

méritant – peut-être avec quelque profit pour l'enseignement – d'être étudiée pour elle-même.

On remarquera la rareté des mathématiciens étrangers. En ce qui concerne le dix-huitième siècle, notamment sa seconde moitié, cette rareté n'est guère étonnante du fait de la prédominance de l'école française de mathématiques à cette époque. C'est un peu plus surprenant pour le début du dix-neuvième siècle, si l'on se souvient que d'autres écoles mathématiques, en particulier Outre-Rhin, se sont développées de façon spectaculaire. Il y a diverses explications possibles, l'une étant sans doute qu'après les travaux de Monge et Lancret, le sujet pouvait sembler sur sa fin. Les travaux de Gauss en géométrie différentielle, en particulier dans le célèbre *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [Gauss 1828] ne traitent que de la théorie des surfaces. Gauss est d'ailleurs lu assez tardivement en France[3]. Les études que l'on trouve en Grande-Bretagne portent plutôt sur des questions de géométrie algébrique, suivant la tradition de Newton avec sa classification des cubiques par projection. Il y a, par ailleurs, un poids évident des structures d'enseignement propres à la France avec en premier lieu, la création de l'École polytechnique, une influence du métier d'ingénieur dans le cursus mathématique[4] liée à cette école et et bien sûr le personnage de Monge. Celui-ci se trouve à la fois au centre de la théorie des courbes à double courbure et joue un rôle de premier plan dans tous bouleversements de l'enseignement, si bien que ce sont les élèves directs ou indirects du grand géomètre qui se sont naturellement intéressés au sujet. Comme le dit Karin Reich « Die Kurventheorie ist also in der Zeit zwischen Gauss und Riemann eine unbestrittene Domäne der französischen Gelehrten[5] », [Reich 1973, p. 285]

2 Pourquoi les courbes à double courbure ?

On ne peut nier que la théorie des courbes de l'espace a une place somme toute modeste dans le développement de la géométrie différentielle. La théorie des surfaces, dont on peut trouver les premiers résultats dans les travaux d'Euler, puis qui prend de l'ampleur avec Monge, Meusnier, Dupin et bien sûr Gauss, puis Riemann, offre comme on le sait une plus grande variété de problèmes, de situations, et certainement aussi d'applications : qu'on pense notamment au très important problème de la figure de la terre. La théorie des courbes planes a également été largement balisée par les géomètres du XVII^{e} siècle et du début du XVIII^{e} siècle et tout naturellement, ces deux parties de la géométrie différentielle ont fait l'objet de nombreuses recherches historiques.

Malgré tout, nous considérons que la place de la théorie des courbes à doubles courbure est exemplaire en ce sens que les évolutions méthodologiques ou théoriques qui jalonnent ses

[3] Liouville va publier le mémoire de Gauss, en latin, dans son édition de l'*Application de l'analyse à la géométrie* [Monge 1850, p. 505-546]. D'après [Reich 1973, p.291] et [Lützen 1990, p.739] c'est lui qui incite les jeunes mathématiciens français à en prendre connaissance.

[4] On peut trouver une analyse des particularités françaises dans l'Europe mathématique du XIX^{e} siècle dans [Gray 1996] et [Gispert 1996]. Le rôle de l'École polytechnique dans le développement de la géométrie est examiné dans [Taton 1964].

[5] « La théorie des courbes est ainsi, dans la période entre Gauss et Riemann, le domaine incontesté des savants français. »

progrès correspondent à une avancée parallèle dans le cadre plus général de la théorie des surfaces. Parfois elle les anticipe, parfois au contraire la théorie des courbes bénéficie de certaine idées novatrices de la théorie des surfaces. Ainsi par exemple, il y a une interaction entre la recherche des développées d'une courbe à double courbure et la théorie des géodésiques, restreinte aux surfaces développables. Mais la même étude des développées a conduit dans le cadre de la théorie des surfaces aux beaux résultats de Monge sur l'étude des lignes de courbure d'une surface et de la famille de leurs normales.

Nous verrons également, et ce sera un fil directeur tout au long de notre étude, que la vision leibnizienne des courbes comme polygones à une infinité de côtés offre, pour les courbes dans l'espace, peut-être plus d'avantages que pour les courbes planes. Elle permet d'éviter des calculs d'une sérieuse difficulté technique et donne à certains raisonnements une belle évidence. Elle est cependant parfois trompeuse, de même que l'utilisation des infinitésimaux s'avère pleine de pièges, surtout quand il s'agit de ceux d'ordre supérieur à un. Il y a évidemment un lien entre les deux types de méthodes. Nous verrons au cours de notre étude comment les choses évoluent et comment se fait peu à peu la distinction entre méthodes « géométriques » et méthodes « analytiques ».

Par ailleurs, des liens seront établis avec d'autres domaines : la théorie des surfaces et des équations aux dérivées partielles, la mécanique, en particulier la théorie de l'élasticité. Cependant, reconnaissons-le, la théorie des courbes à double courbure n'offre pas un grand champ d'applications.

Au cours de la période étudiée, les mathématiques deviennent de plus en plus une discipline d'enseignement. Le but principal des écoles militaires puis des écoles d'ingénieurs qui vont se créer au cours du XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle[6], est de former des ingénieurs ou officiers qui étudient de façon rigoureuse des problèmes pratiques, qui puissent concevoir et dessiner des plans de travaux publics et militaires. Cela conduira naturellement au succès de la géométrie descriptive, mais aussi, plus généralement, de toute la géométrie dans l'espace.

Les exigences de rigueur, qui deviennent de plus en plus prégnantes avec l'augmentation du niveau de formation, font qu'on ne peut plus se contenter de « recettes » telles qu'on pouvait les trouver dans les manuels pratiques des tailleurs de pierre. Cela conduit Monge à son invention de la géométrie descriptive et pousse l'ensemble des enseignants à fonder l'étude rigoureuse des objets de l'espace sur l'analyse. C'est ainsi que l'étude des courbes à double courbure tient une place importante, parfois avant, parfois après la théorie des surfaces dans les « Applications de l'analyse à la géométrie », qui suivent la présentation des fondements du calcul différentiel enseignés aux jeunes polytechniciens.

D'autres raisons peuvent justifier notre choix, cette fois dans un champ plus théorique. Les courbes gauches sont des objets mathématiquement *simples*, elles ont toutes la même géométrie intrinsèque. Dit autrement, toutes les courbes gauches sont isométriques localement au voisinage d'un point non singulier, ce qui n'est pas le cas des surfaces. Par opposition, la

[6] Outre Monge, bien sûr, et son rôle dans la création de l'École polytechnique, remarquons qu'un de nos auteurs, Théodore Olivier est à l'origine de la création de l'École centrale.

richesse de la géométrie intrinsèque d'une surface, la difficulté à la distinguer de la géométrie due à son plongement dans l'espace, ont fait que l'étude de la géométrie des surfaces a mobilisé l'ensemble de la communauté mathématique pendant une longue période.

Cette simplicité aurait dû permettre des avancées rapides, si les courbes à double courbure n'avaient concentré en même temps des difficultés liées au problème de la représentation plane de l'espace : projection du contact, des angles, des distances, etc. Par exemple, les droites de l'espace ont une géométrie plus riche que les droites du plan. Deux droites « consécutives » d'une famille peuvent être sécantes, parallèles ou non coplanaires, ce qui est très important pour l'étude des surfaces engendrées par des droites. C'est une des raisons pour lesquelles la théorie avance lentement : Clairaut (1731), Monge (1771), Lancret (1802), Frenet-Serret (1847-1851), quasiment quatre générations.

3 De quelles courbes s'agit-il ?

La théorie des courbes à double courbure dont nous allons parler fait partie de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie différentielle[7]. Il s'agit donc de l'étude des courbes paramétrées, applications d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans l'espace de dimension trois. On verra que pour beaucoup de nos auteurs, une courbe à double courbure est également donnée comme intersection de deux surfaces.

Chez nos auteurs, les conditions de régularité sont supposées implicitement « suffisantes » et toutes les fonctions sont suffisamment dérivables, autant de précisions absentes des travaux de presque tous les auteurs. Il y a une autre hypothèse implicite : on suppose que les points au voisinage desquels la courbe est étudiée sont réguliers. Cela ne signifie pas que les géomètres ignoraient l'existence des singularités – le cas des courbes planes était là pour les en convaincre – mais dans le cas des courbes gauches, ce n'était pas alors un objet d'étude.

Par ailleurs, cette théorie des courbes gauches est alors une théorie locale : comme les mathématiciens de l'époque nous n'aborderons pas les questions liées à la figure globale formée par une courbe de l'espace, comme par exemple les propriétés topologiques des courbes fermées. De même, nous ignorerons les questions liées à la géométrie algébrique. La nature mathématique des équations définissant la courbe n'a pas non plus d'importance : les courbes envisagées seront donc géométriques ou mécaniques pour reprendre la terminologie de l'époque.[8]

Il est enfin remarquable que, dans la quasi totalité des textes que nous allons étudier, ce sont presque toujours les questions théoriques générales qui intéressent nos auteurs, et non des courbes particulières. Seule l'hélice circulaire qui combine à la fois les propriétés d'une droite et d'un cercle, sera un objet d'étude quasi paradigmatique.

[7] Cette expression n'apparaît pas avant la fin du dix-neuvième siècle.

[8] Rappelons ce que signifie ce vocabulaire. Les courbes se divisent en algébriques, qu'on appelle souvent avec Descartes courbes géométriques, et en transcendantes, que le même Descartes nomme « méchaniques ». Les courbes algébriques ou géométriques sont celles où la relation entre les coordonnées est ou peut être exprimé par une équation algébrique, les courbes transcendantes ou mécaniques sont celles qui ne peuvent être déterminées par une équation algébrique.

4 Les problèmes

Dressons ici la liste des principaux problèmes qui seront résolus au fur et à mesure que la théorie avancera.

a. Une courbe de l'espace est-elle plane ?

Comme nous le verrons et comme il est naturel, une courbe de l'espace[9] est parfois étudiée par ses projections sur des plans, parfois présentée comme intersection de surfaces, parfois définie par un procédé plus compliqué comme l'enroulement sur un cylindre d'une courbe dessinée sur un plan.

Une première question se pose naturellement : la courbe obtenue peut-elle être incluse dans un plan ou non ? C'est seulement dans ce dernier cas que Clairaut, par exemple, considère qu'on peut l'appeler « courbe à double courbure ». Ainsi, la riche étude des sections coniques, qui remonte aux géomètres de l'antiquité, n'entre pas dans ce cadre.

La résolution de ce problème ne sera pas immédiate, puisque la réponse définitive la plus efficace utilise la notion de torsion ; mais il y aura chez les premiers auteurs des réponses partielles, qui ne manqueront pas d'intérêt. Cela dit, ce retard ne constituera pas un obstacle. Il se trouve que tout calcul, toute formule adaptée à une courbe à double courbure fonctionne dans le cas des courbes planes. En définitive, les courbes planes seront considérées comme cas particuliers des courbes à double courbure. On verra par exemple comment Monge donne un éclairage nouveau à la notion de développée d'une courbe plane en la plongeant dans l'espace.

b. Qu'est-ce que la développée d'une courbe à double courbure ?

L'étude des développées des courbes planes, d'un intérêt pratique et théorique indéniable, est bien avancée quand débute l'étude des courbes à double courbure. C'est seulement en 1771 que Monge aborde la question des développées dans ce cas. Il se pose alors deux problèmes distincts : que sont les développées des courbes de l'espace ? Comment obtenir leurs équations ?

En ce qui concerne la première question, Monge montre que toute courbe admet une infinité de développées qui sont toutes situées sur une même surface. Il ne répond que partiellement à la seconde question et il faudra attendre Lancret et ses successeurs pour avoir une réponse complète. Comme pour le problème précédent, on sait le rôle décisif de la torsion dans la mise en évidence des équations de ces développées.

c. Qu'est-ce que la seconde flexion d'une courbe à double courbure ?

Si la notion de courbure apparaît très rapidement, accompagnée de celle de cercle osculateur, c'est qu'elle généralise de façon naturelle et assez immédiate la notion de courbure d'une

[9] Nous appellerons ainsi une courbe située dans l'espace, sans préjuger de ce qu'elle est plane ou non.

courbe plane[10]. Au contraire, la seconde courbure ou flexion dont parle Monge ne sera pas facilement définie et calculée, ni même nommée. C'est encore Lancret qui fournit les réponses quasi définitives.

d. Qu'est-ce qui caractérise les hélices ?

De même que le cercle et la droite sont caractérisés dans le plan par leur courbure constante, de même l'hélice circulaire a une courbure et une torsion constante. Il n'est pas immédiat de démontrer que cette propriété est caractéristique de l'hélice circulaire. Cette question est de celles qui intéressent les géomètres du début du XIX^{e} siècle et qui va aboutir aux formules de Serret-Frenet. Plus généralement, la recherche de courbes de l'espace satisfaisant diverses conditions en termes de courbure ou de torsion ressort du calcul intégral et offre en général une plus grande difficulté que la simple description des propriétés des courbes. Cette recherche conduit à la fin de notre période d'étude à l'énoncé puis à la démonstration du théorème fondamental des courbes à double courbure.

5 Plan de notre étude

Notre parcours est, dans l'ensemble, chronologique. Dans une première période, nous examinons comment naît la théorie des courbes à double courbure et comment les géomètres généralisent les notions de tangente et courbure à leur cas. Les difficultés spécifiques de la géométrie de l'espace sont mises en évidence et nous observons comment de nouveaux outils de calcul sont créés pour résoudre ces problèmes.

Dans une seconde période, où domine la figure de Monge, les courbes à double courbure montrent une spécificité, une originalité nouvelle. C'est la théorie des développées, la découverte de la torsion, c'est aussi une période où la géométrie est sur le devant de la scène.

Enfin la dernière période est celle où les problèmes théoriques vont être étudiés et résolus et où la géométrie traditionnelle va laisser place à l'analyse. Elle commence par l'exposé remarquable de Cauchy et s'achève avec les formules de Serret-Frenet et les travaux de Darboux qui annoncent une nouvelle géométrie.

[10] Même si, on le verra, le calcul du rayon de courbure d'une courbe de l'espace pose quelques difficultés.

Première partie

Du plan à l'espace

Dans cette première partie, nous allons voir comment les courbes de l'espace commencent à être en elles-mêmes un objet d'étude, au début du dix-huitième siècle, et comment elle se dégagent peu à peu de leur modèle, les courbes planes, héroïnes des mathématiques du dix-septième siècle.

Chapitre A

Avant Clairaut

Les géomètres grecs connaissaient bien sûr quelques exemples de courbes gauches. D'après Michel Chasles [1837], le pythagoricien Architas utilise une courbe gauche pour résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles ; il s'agit d'une courbe dessinée sur un cylindre. Il y a aussi Geminus (-100), qui étudie l'hélice circulaire. Citons également Pappus, qui introduit une spirale sphérique obtenue par composition : un point se meut uniformément sur un grand cercle, lequel tourne autour de son diamètre. Parmi les autres courbes, notons la spirale conique qui est l'intersection d'un cône avec un cylindre à base spirale d'Archimède. À part le cas de la spirale de Pappus, ces courbes sont très souvent introduites comme intersection de surfaces.

1 La géométrie de l'espace au XVII^{e} siècle

Le renouvellement de la géométrie va se faire principalement par l'utilisation du calcul algébrique, et l'on sait le rôle joué par la « Géométrie » de Descartes, un des ouvrages d'application du *Discours de la Méthode* [Descartes 1637]. La géométrie que décrit Descartes est plane, mais on trouve une allusion aux courbes à double courbure dans la dernière page du livre II :

> « Il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à toutes les courbes qu'on saurait imaginer formées par le mouvement régulier des points de quelque corps, dans un espace qui a trois dimensions. » [ibid., p. 368]

Descartes suggère de considérer la projection de la ligne courbe sur deux plans perpendiculaires, de même qu'une courbe du plan est projetée sur deux axes. Paradoxalement, la seule application qu'il donne est erronée : il nous dit qu'une normale à une courbe de l'espace s'obtient en relevant les normales des deux projections :

> « Même si on veut tracer une ligne droite qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tracer deux autres lignes droites dans les deux plans (une dans chacun) qui coupent à angles droits les deux lignes courbes, qui y sont, aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné.

> Ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. » [ibid., p. 369]

Cette inadvertance est signalé par les spécialistes de Descartes, Adam et Tannery, ainsi que par Chasles : « Cela peut se dire des tangentes, mais non des normales. » [1837, p. 140]

L'erreur de Descartes est typique des difficultés que l'on rencontre dans la géométrie à trois dimensions : on croit pouvoir se ramener simplement à la géométrie plane, en oubliant en l'occurrence que le projeté d'un angle droit n'est pas toujours droit. Il n'en reste pas moins que ce court passage du célèbre livre annonce un programme qui tardera à être abordé. C'est que la concurrence de l'étude des courbes planes est vive ; il faudra que cette étude s'apaise, s'épuise un peu pour qu'on s'intéresse de plus près à l'espace.

Nous n'allons pas résumer l'histoire de la géométrie des courbes planes au XVII^e^ siècle et au début du XVIII^e^ siècles, renvoyant pour cela à Coolidge [1940, 1948], Kline [1972] et Struik [1933]. Donnons néanmoins la liste des principaux contributeurs, qui sont parfois cités par les auteurs que nous allons étudier :

- Huygens (1629-1695) Ses recherches sur le pendule le conduisent à étudier les développées des courbes planes, dans *Horlogium Oscillatorium* [Huygens 1673].
- Newton (1642-1727) a étudié la notion de courbure d'une courbe plane et fait le lien avec la dérivée seconde. La démonstration est très soigneuse, à la manière des anciens, c'est-à-dire par encadrement.
- Parent (1666-1716) a obtenu l'équation de la sphère et du plan tangent à une surface.
- Viviani (1622-1703) qui cherche à percer des fenêtres quarrables sur une voûte hémisphérique. La célèbre « fenêtre de Viviani », bien connue des élèves de classe préparatoire, a également été étudiée par Roberval.
- Frans Van Schooten (1615-1660) a traduit *La géométrie* de Descartes en latin. On trouve, après le texte de Descartes, quelques commentaires avec, en particulier, des études des sections coniques, et l'utilisation de trois coordonnées dans l'espace.
- Henri Pitot (1695-1771).

C'est sur ce dernier auteur que nous porterons d'abord notre attention. En effet, c'est lui qui va donner leur nom aux « courbes à double courbure », suscitant la vocation précoce de Clairaut.

2 Pitot et l'hélice

Venons en donc à Henri Pitot (1695-1771)[1]. Peu connu comme mathématicien, il fut membre de l'Académie des sciences. On peut considérer que sa vision de la géométrie, telle qu'elle transparaît dans le mémoire que nous allons étudier, est orientée vers les applications. Cependant,

[1] Dans l'annexe A, page 203 et suivantes, nous donnons des éléments biographiques concernant les principaux contributeurs de la théorie des courbes à double courbure.

FIG. A.1 – Le pont Pitot à Montpellier

le problème qu'il se propose de résoudre est purement mathématique et c'est un problème plan : Pitot a l'idée de le plonger dans l'espace.

a. La quadrature de la sinusoïde

Ce mémoire de 1724 traite de la quadrature de la sinusoïde, qu'on appelle alors compagne de la cycloïde. Cette courbe a été définie et étudié par Roberval, « De Trochoide ejusque spatio » [1730]. La première partie du mémoire a été lue à l'Académie le 17 juillet 1724.

La définition de la compagne est illustré par les figures 1 et 2 du mémoire : voir la planche A.3. Partant du demi-cercle ADE, On note x la distance[2] AP, et M le point du cercle de même abscisse. Si on reporte en ordonnée la longueur de l'arc AM en deçà du point M, $AN = arc(AM)$, l'ensemble des points N décrit la cycloïde, c'est la figure 2. Par contre, sur la figure 1, on reporte $PN = arc(AM)$ et on obtient la compagne[3]. Les deux courbes ont même point de départ et même point d'arrivée, mais la compagne présente une inflexion.

Il s'agit donc de quarrer la compagne, c'est-à-dire de calculer l'aire de la région ACB. Pitot propose trois méthodes. Les deux premières sont classiques, elles font appel au calcul différentiel et aux propriétés de la cycloïde. La troisième fait intervenir des considérations de géométrie dans l'espace. C'est celle qui nous intéressera le plus, contrairement au secrétaire de l'Académie, Fontenelle, dans le commentaire qu'il fait du mémoire de Pitot :

> « Nous ne dirons rien d'une troisième preuve un peu plus compliquée, d'où M.Pitot tire une règle pour mesurer la force de la Vis. On peut pardonner à l'Art de passer quelquefois les bornes de la nécessité absolue. » [Fontenelle 1724, p. 67]

La première méthode est du pur calcul différentiel. Soit a le rayon AC, $x = AP$ la coupée et $PN = z$ l'ordonnée. On utilise les méthodes classiques pour aboutir à l'intégrale de zdx sous la

---

[2] x est l'abscisse, Pitot l'appelle la « coupée ».

[3] On a précisément, pour la figure 1, $PN = t$ et $EP = 1 + \cos t$ et pour la figure 2, $PN = t + \sin t$ et $EP = 1 + \cos t$, en prenant un rayon égal à 1

QUADRATURE DE LA MOITIÉ D'UNE COURBE DES ARCS, APPELLÉE LA COMPAGNE DE LA CYCLOIDE.

Par M. PITOT.

LA Courbe *ABK* eſt telle que chaque Ordonnée *PN* eſt égale à l'Arc correſpondant *AM* du demi-Cercle *ADE*. Cette Courbe eſt connuë des Geometres, mais perſonne, que je ſçache, n'a parlé de la Quadrature de l'eſpace *ACB*, renfermé par ſa moitié *AB*: cet eſpace eſt égal au quarré du Rayon *AC*; ce que je démontre par trois voyes differentes. 12 Juillet 1724. Fig. 1.

1.° Soit le Rayon $AC = a$, la Coupée $AP = x$, l'Arc *AM*, ou l'Ordonnée $PN = z$: on aura $z\,dx$ égale à la differentielle de l'eſpace *APN*, dont on trouvera l'integrale de $xz + a \times \sqrt{2ax - xx} - az$ par les methodes expliquées dans l'Analyſe démontrée pages 761 & 794; mais lorſque $x = a$, on a pour la quadrature de l'eſpace *ACB*, le quarré du Rayon $AC = aa$.

O ij

FIG. A.2 – La première page du mémoire de Pitot [1724]

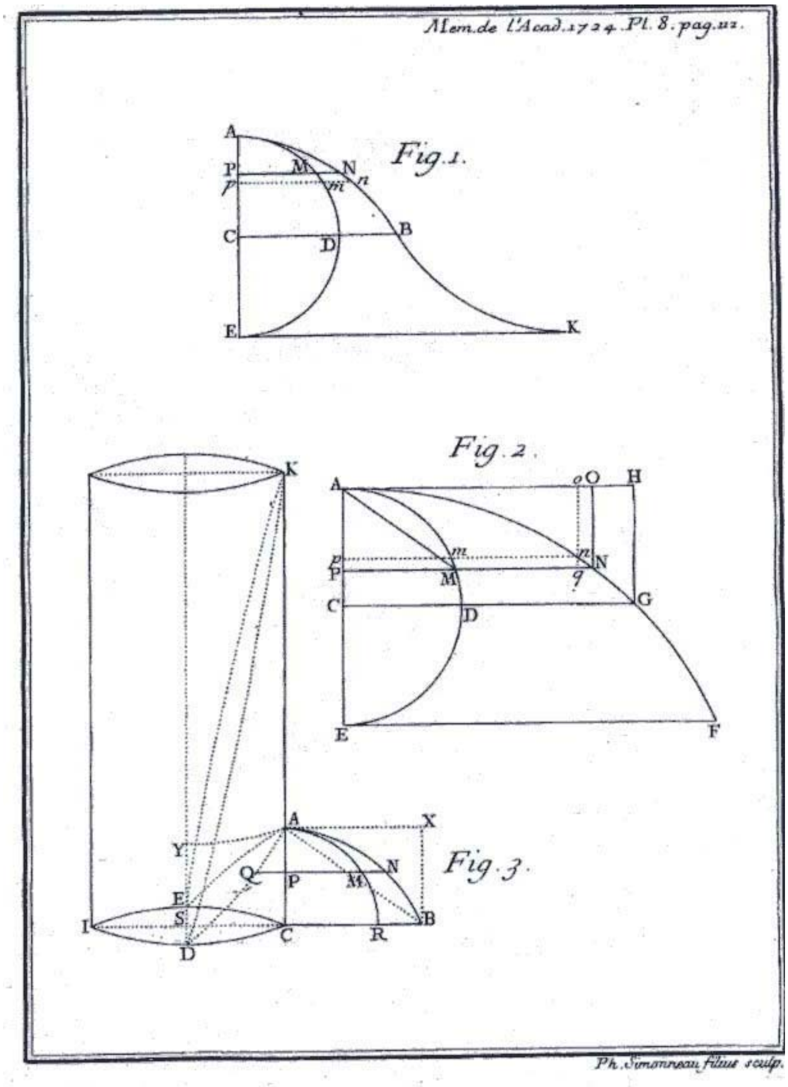


FIG. A.3 – La première planche de [Pitot 1724] (figure 1,2,3) forme $xz + a\sqrt{2ax - xx} - az$, expression non satisfaisante car il reste l'ordonnée z. Le calcul est seulement suggéré[4].

Pitot obtient pour l'aire de l'espace ACB l'expression a^2, carré du rayon.

La seconde méthode consiste à observer que l'aire recherchée est aussi l'aire de la région ADG comprise entre la roulette et le quart de cercle (fig.2). Cela est justifié par un argument à la manière de Cavalieri : on fait « glisser » les segments PN de la figure 1 et on obtient la figure 2.

Pitot utilise alors une propriété de la tangente à la cycloïde. On trouvera une justification de cette propriété dans l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital, Section II, proposition 2, Exemple 2, corollaire [L'Hospital 1696, p. 17]. Précisément, cette proposition étudie des propriétés de la tangente à une courbe qui, comme la roulette se déduit d'une autre courbe en déroulant un fil, mais en gardant une direction fixe, orthogonale à la base.

En utilisant alors des triangles semblables, Pitot montre que (fig.2) $Oo : NO = pP : MP$ et donc que l'aire de AGH est celle du quart de cercle. Par soustraction, on retrouve que l'aire ADG est le carré du rayon. Ce résultat a en fait été obtenu par Roberval vers 1640, dans le « Traité des indivisibles, explication de la roulette », [Roberval 1730], mais la publication en a été très tardive.

b. Utilisation de la troisième dimension

Parlons plus précisément de la troisième preuve. Voilà comment procède Pitot, comme le montre la figure 3 dans la planche A.3. Si on coupe un cylindre par un plan (incliné à 45°) et si on déplie le cylindre, l'ellipse ADQ donne la « compagne » ANB inscrite dans un rectangle. L'aire recherchée est donc la moitié de celle de l'onglet ADC.

Cette dernière aire se calcule par proportionnalité, en la comparant à l'aire d'un onglet de hauteur CK égale au périmètre de la base du cylindre : l'aire de cet onglet est égale à celle de la sphère inscrite dans le cylindre, soit $4\pi a^2$. Comme notre onglet est de hauteur a, on trouve une aire égale à $2a^2$, et notre demi onglet donne bien a^2. Une remarque : si on veut vérifier cette propriété de l'aire de l'onglet, que Pitot considère comme faisant partie des connaissances com-

[4] Donnons une déduction possible :

$$\begin{aligned} z\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(xz) - x\,\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}(xz) - ax\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax - x^2}} \\ &= \mathrm{d}(xz) + a\frac{a-x}{\sqrt{2ax - x^2}}\mathrm{d}x - a\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}(xz) + a\mathrm{d}(\sqrt{2ax - x^2}) - a\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

On a utilisé $\mathrm{d}z = Mm$, $\mathrm{d}x = Pp = Mm'$ (avec m' projection de M sur pM). Donc $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{CM}{PM} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$, en utilisant des triangles semblables. En intégrant, et en tenant compte de la valeur en 0,

$$I = xz + a\sqrt{2ax - x^2} - az$$

résultat annoncé par Pitot. Il ne reste plus qu'à prendre la valeur pour $x = a$.

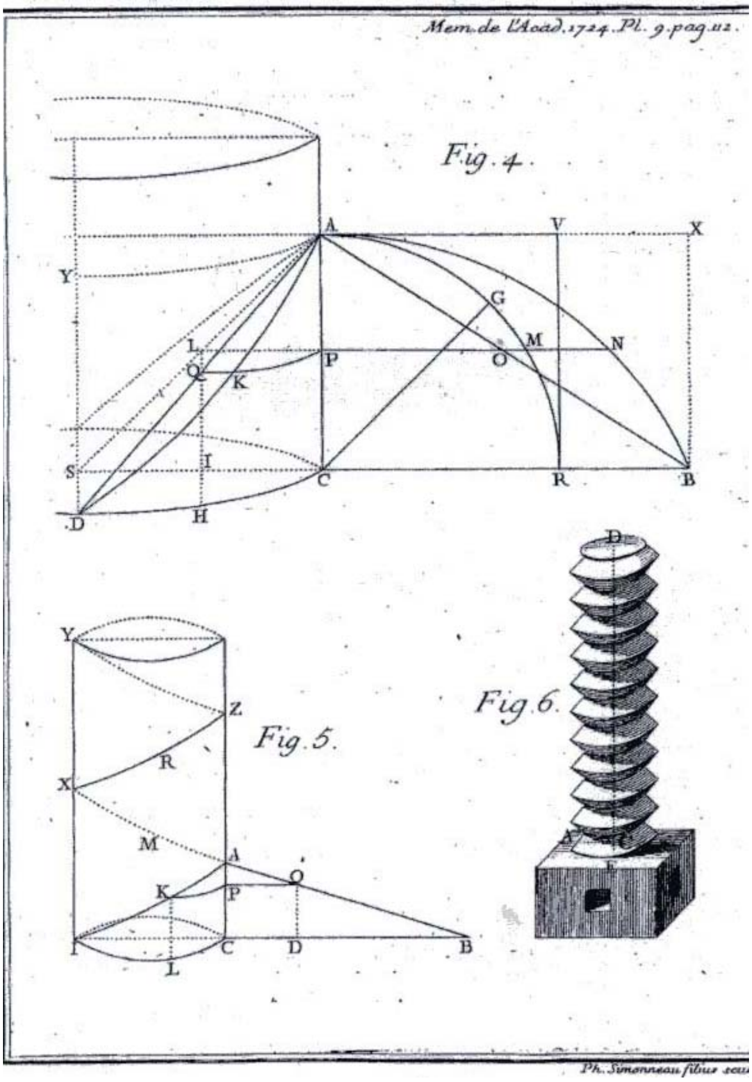


FIG. A.4 – La seconde planche de [Pitot 1724]

munes (« les Géomètres savent... »), il semble que l'on soit amené à évaluer l'intégrale d'une fonction de la forme zdx, comme dans le cas de la première méthode.

C'est en fait dans une « suite » au mémoire qu'on trouve les choses les plus intéressantes. Ce prolongement fut présenté à l'Académie le 17 février 1725 : « Suite du Mémoire que j'ay donné sur la quadrature... », mais, lors de la publication, les deux parties du mémoire ont été réunies.

Pitot commence cette seconde partie par un *Avertissement*, rapportant qu'on avait fait des objections à la suite de la lecture de son mémoire. On peut les résumer ainsi : si l'on enroule un rectangle sur un cylindre (le rectangle $ACBX$), la diagonale du rectangle doit y représenter la section par le plan, donc l'ellipse dessinée sur le cylindre. Autrement dit, l'ellipse ne se développe pas selon la compagne de la cycloïde, mais suivant une droite, et cela invalide entièrement le calcul de Pitot. C'est donc pour répondre à cette objection que Pitot fait une seconde intervention devant l'Académie. Dans le manuscrit trouvé dans la pochette de séance, il reconnaît :

> « Nous n'avons pas prouvé suffisamment que chaque PQ (fig.1) est égal à l'arc correspondant AM et à l'ordonnée PN. Nous avons reconnu depuis qu'il était important de donner cette démonstration, pour faire voir que tous les points Q forment une ellipse, ou qu'ils sont toujours sur la section du cylindre. »

Henri Pitot fournit alors une argumentation détaillée, claire, s'appuyant sur des figures précises, pour justifier la première affirmation. C'est ce que l'on voit sur la figure 3 de la première planche, bien que cette figure ne soit pas parfaite par manque de perspective : le point N s'applique bien sur le point Q et le calcul fait par Pitot est correct. La figure 4 (voir la seconde planche A.4), plus précise, permet d'ailleurs de mieux suivre sa démonstration. Il suffit de remarquer que, puisque le plan est incliné à 45^o, on a $AP = PL$ et donc la longueur de l'arc AM se retrouve sur l'arc AQ, et on a bien $\text{arc}(AQ) = PN$. La sinusoïde correspond bien à l'ellipse lorsqu'on enroule le rectangle sur le cylindre.

c. L'étude de l'hélice

Saisissant l'occasion, Pitot poursuit sa réflexion en faisant quatre remarques concernant la courbe obtenue en enroulant la diagonale AB sur le cylindre. Sur la figure 4 de la seconde planche, c'est donc la courbe AKD.

Dans la première remarque, Pitot compare des aires dessinées sur le cylindre ou sur le rectangle. En particulier il annonce, sans autre justification que l'opération d'enroulement, que l'aire de la région du cylindre entourée par $ACHDKA$ est égale à l'aire du triangle ACB (voir toujours la figure 4).

Dans la seconde remarque, Pitot observe cette fois qu'en enroulant encore la diagonale d'un rectangle (ce n'est plus le même, voir la figure 5 de la seconde planche A.4) sur le cylindre, on obtient la proportionnalité de la cote LK d'un point de la courbe IKA avec l'arc IL.

La troisième remarque permet de faire la rectification de cette courbe, et aboutit à la proportionnalité avec l'arc. La quatrième remarque fait le lien avec la vis :

> « Il est facile de voir par la seconde remarque, que la courbe $IKAM$,&c est la même que celle des filets ou spires de la vis » [ibid., p. 112]

Pitot rappelle alors comment on peut calculer la « force » de la vis : c'est le rapport de la longueur d'un arc d'hélice sur la hauteur du pas.

En conclusion du mémoire, on peut lire :

> « Les Anciens ont nommé cette Courbe Spirale ou Hélice ; parce que la formation sur le cylindre suit la même analogie que la formation d'une spirale ordinaire sur un plan ; mais elle est bien différente de la spirale ordinaire, étant une des courbes à double courbure, ou une des lignes qu'on conçoit tracée sur la surface des Solides. Peut-être que ces sortes de courbes à double courbure, ou prises sur la surface des Solides, feront un jour l'objet des recherches des géomètres. Celle que nous venons d'examiner est, je crois, la plus simple de toutes. » [ibid., p. 113]

d. Un début décisif ?

Ce court mémoire ne manque pas d'intérêt. Bien que son objet ne soit pas à proprement parler les courbes à double courbure, il nous paraît important. Peut-être en premier lieu, et c'est pour cela qu'il est le plus souvent cité, par exemple par Struik [1933, p. 1000], parce qu'il introduit une terminologie, *courbes à double courbure*, qui aura un grand succès pendant plus d'un siècle. Pitot ne donne pas de justification précise a son appellation, mais puisqu'il parle de « courbes prises sur la surface des solides », on peut penser qu'il considère que la courbure de la courbe s'ajoute à la courbure de la surface. Nous verrons que Clairaut sera plus clair quant à ces deux courbures.

Au delà de cette dénomination et du programme de recherche qu'il propose aux mathématiciens, ce texte met l'accent sur plusieurs points importants pour notre étude :

- La difficulté du passage à la dimension trois. L'objection que l'on a faite à Pitot provient sans doute d'une idée naturelle : l'ellipse qui est la section du cylindre par un plan, se projette en un segment sur le plan du fond. Il paraît normal qu'elle soit aussi obtenue par l'enroulement d'un segment sur le cylindre. On notera de plus que la perspective imparfaite des figures, celles qu'on peut voir sur le manuscrit de Pitot tel qu'on le trouve dans la pochette de séance, mais aussi dans la planche des mémoires, pouvait conforter les idées fausses. La figure est, dans l'espace, d'un moindre secours que dans le plan. Comme le dit Pitot : *« C'est pourquoi j'ai cru qu'il était à propos de lever ces apparences trompeuses, puisqu'elles ont séduit même des géomètres de premier ordre.*[5] »
- Le rôle important des surfaces développables pour la théorie des courbes à double courbure. Cette façon d'obtenir des propriétés géométriques par enroulement ou déroulement sur des plans ou des surfaces développables va permettre à Monge de prouver ses plus beaux résultats.
- Enfin la figure de l'hélice, déjà bien connue depuis l'antiquité, va continuer à jouer le rôle de courbe à double courbure-type.

[5] On ignore qui est concerné ; étaient présents, lors de la lecture du premier mémoire, entre autres Saurin, de Mairan, Nicole, Maupertuis. [RMAS, séance du 12 juillet 1724]

Chapitre B

Clairaut

Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) est notre vrai point de départ : l'ampleur de son travail sur les courbes à double courbure et le fait qu'il y consacre tout un traité, le premier paru sur le sujet, le justifie. Nous ne trouverons pourtant pas chez lui de résultats très novateurs, de notions vraiment nouvelles qui, par exemple, détachent nettement l'étude des courbes de l'espace de celle des courbes planes. Clairaut est un exemple parfait de ce que nous allons retrouver fréquemment : la théorie des courbes de l'espace est construite par des mathématiciens jeunes (oh combien pour Clairaut...) qui y voient une occasion d'exercer leur talent avant de s'attaquer à des travaux plus ambitieux.

1 Le mémoire de Clairaut

Donnons tout d'abord un aperçu général de l'ouvrage de Clairaut [1731] qui compte environ 120 pages. Il est intitulé : *Recherches sur les courbes à double courbure* et a été publié à la suite d'un rapport favorable de Mairan et Nicole :

> « La Compagnie à jugé que cet Ouvrage contenait beaucoup de choses curieuses et nouvelles sur ces sortes de courbes et montrait de l'invention dans l'Auteur, qui n'est âgé que de seize ans. » [RMAS, 23 août 1729], dans [Clairaut 1731, p. V]

Le mémoire avait, en effet, été lu devant la docte assemblée le 16 juillet 1729. Dans la préface, Clairaut présente ainsi l'objet de son étude :

> « Les courbes dont on traite dans cet ouvrage sont celles qui ne se peuvent décrire que sur les surfaces des solides courbes, telles que seroient par exemple celles que l'on formeroit en faisant tourner un compas sur la surface d'un cylindre ou de telle autre surface courbe qu'on voudra. [...] » [ibid., p. I]

Cette première définition et ce premier exemple ne permettent pas encore de donner une interprétation de l'expression courbe à double courbure[1]. Clairaut introduit ensuite ce qu'il appelle

[1] La confusion existe néanmoins ; dans un article présentant le livre de Clairaut, le *Cahier des savants* (Octobre 1731) se réfère à cette description pour dire :« [...] formées par le mouvement d'un compas sur la surface d'un Solide-Courbe, elles participent toujours de la courbure de deux Courbes. »

FIG. B.1 – Alexis-Claude Clairaut

les « courbes de projection » formées sur les trois plans d'un « angle droit solide » (deux projections suffisent en fait) et écrit :

> « J'ai crû devoir appeler ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parce qu'en les considérant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes, et c'est même le nom qu'on leur donne dans un mémoire de l'Académie Royale des Sciences où on les propose comme objet digne des recherches des Géomètres. » [ibid., p. II]

On a donc une dénomination dont l'origine paraît claire : Clairaut se réclame de Pitot, mais pour lui l'expression « double courbure » fait référence aux courbures de deux projections.

Dans sa préface, Clairaut annonce également qu'il se limitera aux courbes géométriques, en excluant les courbes transcendantes. Il précise cependant que les méthodes employées se peuvent appliquer dans l'un ou l'autre cas. Les très nombreux exemples qu'il va proposer dans la suite de son ouvrage auront presque toujours des équations algébriques.

Entrons maintenant dans le corps de l'ouvrage.

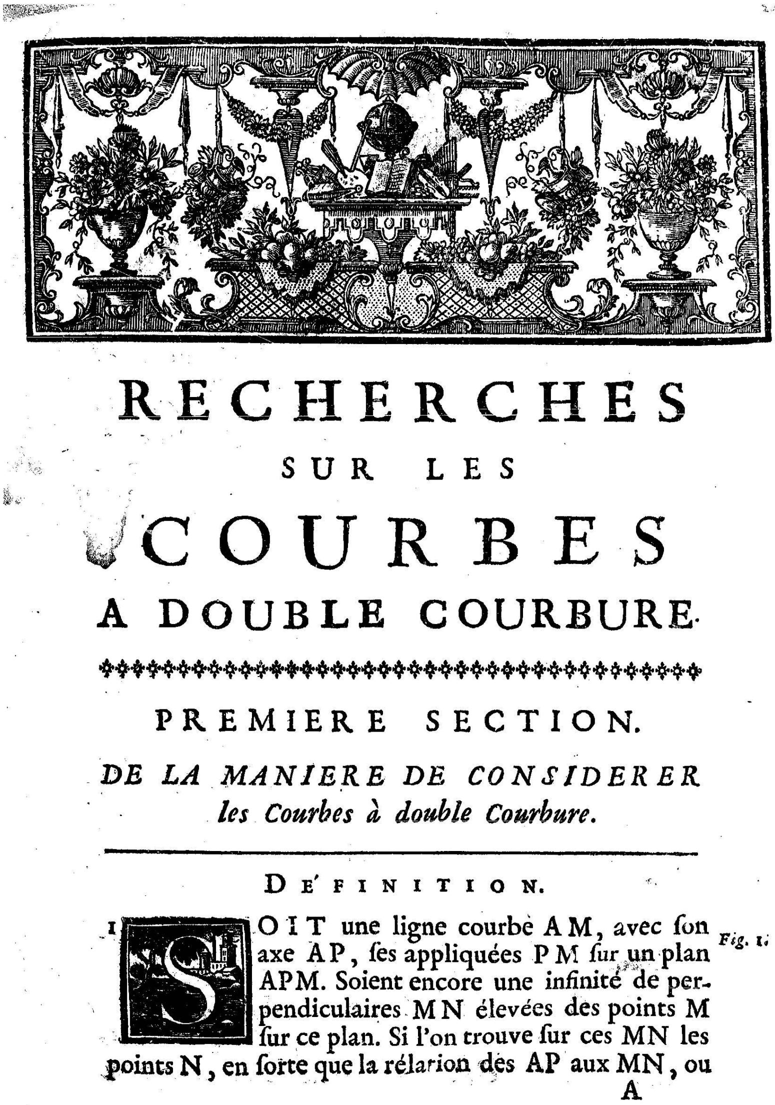
a. De la manière de considérer des courbes à double courbure

L'examen des deux premières figures (voir la figure 1 sur la planche b.) permet de comprendre le point de départ. On peut considérer une courbe à double courbure de la façon suivante : partant d'une courbe plane AM, avec son axe AP, ses ordonnées[2] PM, on élève une infinité de perpendiculaires MN :

> « Si l'on trouve sur ces MN, les points N, en sorte que la relation des AP aux MN, ou des MN aux PM soit exprimée par une équation quelconque passant le premier degré, tous ces points formeront une courbe à double courbure ANN. » [ibid., p. 1]

Cette question de degré est intéressante : clairement, Clairaut veut éviter que, dessinée dans l'espace, la courbe soit néanmoins plane, ce qui serait bien sûr le cas si la troisième coordonnée

[2] Clairaut dit « appliquées ».



RECHERCHES
SUR LES
COURBES
A DOUBLE COURBURE.

PREMIERE SECTION.

DE LA MANIERE DE CONSIDERER les Courbes à double Courbure.

DÉFINITION.

1 SOIT une ligne courbe AM, avec ſon axe AP, ſes appliquées PM ſur un plan APM. Soient encore une infinité de perpendiculaires MN élevées des points M ſur ce plan. Si l'on trouve ſur ces MN les points N, en ſorte que la rélation des AP aux MN, ou *Fig. 1.*

A

FIG. B.2 – Première page du traité de Clairaut [1731] était fonction affine d'une des autres. C'est pourquoi il rejette cette possibilité. Pour autant, la restriction que fait Clairaut ne suffit évidemment pas à assurer que la courbe sera non plane, nous y revenons plus bas.

Clairaut continue en montrant que la courbe à double courbure peut alors également être décrite à l'aide de deux projections sur ce qu'on appelle maintenant les plans de coordonnées. Une courbe est données par deux équations, et Clairaut insiste : une seule équation entre les trois coordonnées représente une surface, non une courbe, c'est même l'objet de son premier théorème.

Constamment, Clairaut raisonne par analogie avec la géométrie plane :

> « De même que les équations à deux variables qui passent le premier degré expriment toujours des lignes courbes, de même les équations à trois variables qui passent aussi le premier degré expriment toujours des surfaces courbes. » [ibid., p. 6]

Dans une remarque, Clairaut revient sur le caractère plan ou non plan d'une courbe de l'espace. Une telle courbe étant donnée par deux équations à trois variables :

> « On a vu que si des équations d'une courbe à double courbure, l'on en formoit une seule à trois variables, elle exprimeroit une surface sur laquelle elle pourroit être décrite. Ainsi, si de ces équations l'on en pouvoit former une du premier degré, il est clair que cette courbe pourrait alors être décrite sur le plan que cette équation détermineroit, et par conséquent elle ne seroit plus appelée à double courbure. » [ibid., p. 7]

Cette remarque est tout à fait intéressante : elle montre bien que Clairaut refuse le nom de courbe à double courbure pour une courbe de l'espace qui serait contenue dans un plan. C'est pour cela, nous l'avons vu, qu'il fait une restriction sur l'expression de la troisième coordonnée en fonction des autres. De plus, Clairaut exprime l'idée qu'une combinaison de deux équations d'une courbe à double courbure représente une surface qui contient la courbe à double courbure. Il ne précise pas ce qu'il entend précisément par cette combinaison (il dit « soit en les multipliant, soit en les ajoutant »)[3], mais l'idée est intéressante en ce qu'elle laisse entendre qu'une courbe à double courbure peut être considérée comme dessinée sur une infinité de surfaces. Il ajoute que si, dans ces combinaisons, il y a une expression du premier degré, la courbe est plane. Cela semble fournir ainsi une sorte de procédure qui permettrait de reconnaître si une courbe est plane. Cependant, on se rend bien compte que cette procédure est idéale plutôt qu'effective. On sait que, même dans le cas d'équations polynômiales, le problème n'est pas simple.

Le problème de la reconnaissance des courbes de l'espace qui sont planes, signalé en introduction, est donc identifié, mais pas encore résolu.

[3]Peut-être parlerait-on aujourd'hui de l'idéal engendré par les deux équations...

La première section de l'ouvrage se termine par la justification de l'équation de très nombreuses surfaces particulières, sphères ou cônes, ou de surface de « circonvolution » (c'est-à-dire de révolution).

b. Usage du calcul différentiel dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs tangentes et à leurs perpendiculaires.

Après ces préliminaires, Clairaut commence à utiliser le calcul différentiel. Il faut commencer par définir la tangente. La démarche est la même que pour une courbe plane et Clairaut fait la description suivante :

> « On conçoit ici une courbe à double courbure AN, comme composée d'une infinité de petits côtez Nn, de même qu'une courbe qui serait décrite sur un plan, ce qui fait que le prolongement d'un de ces petits côtez Nn est la tangente dans le point N ou n de cette courbe à double courbure. » [ibid., p. 40]

Voici donc l'apparition, dans l'espace cette fois, de la courbe-polygone, comme nous l'appellerons. Cette conception des courbes fait partie du langage des géomètres du XVIII^e^ siècle. Citons la « demande » que l'on trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* :

> « On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite ; ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'il font entre eux la courbure de la ligne. » [L'Hospital 1696, p. 3]

Pour préciser par le calcul la position de la tangente, Clairaut commence par calculer la distance Mt (voir la figure 25 dans la planche b.), qu'il appelle sous-tangente, à l'aide des différentielles dx, dy et dz pour les grandeurs Pp, mH et nh. La figure est assez claire, avec une perspective plutôt réussie et le calcul se fait comme d'ordinaire avec des triangles semblables ; l'enchaînement est écrit à la manière habituelle :

> « Ainsi les triangles semblables nNh, NMt donneront $nh(dz)$, $Nh = Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})$ :: $Mn(z), Mt$ qui fera $\dfrac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}$, valeur de la sous-tangente. » [Clairaut 1731, p. 41]

On exprime tout en fonction par exemple de x pour finir le calcul. Le même type de raisonnement donne la sous-perpendiculaire et la perpendiculaire. Clairaut montre également comment obtenir une construction géométrique de la tangente à partir des tangentes à deux courbes de projection (c'est la même figure 25). Il démontre également que la tangente à la courbe est aussi l'intersection des deux plans tangents aux deux surfaces cylindriques déterminées par les courbes projections.

Clairaut étudie ensuite des exemples particuliers de courbes à double courbure données par les équations de leurs projections ou des considérations plus géométriques.

Il énonce et résout également de petits problèmes de construction comme celui de mener une droite à la fois perpendiculaire à une courbe à double courbure et tangente à une surface qui la contient[4] et enfin des problèmes de lieux géométriques (« courbe des rencontres des tangentes de la courbe à double courbure, avec le plan de la base »). Ces problèmes sont illustrés par de nombreuses figures, et suivis d'exemples variés où sont détaillés les calculs. Ils ne font intervenir que la notion de tangente et n'utilisent donc que le calcul différentiel du premier ordre.

c. Usage du calcul intégral dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs rectifications et à la quadrature des espaces qu'elles déterminent

On aborde maintenant la troisième section de l'ouvrage. Cette fois les problèmes étudiés vont faire intervenir le calcul intégral. Clairaut commence par établir que la longueur d'un élément de la courbe est $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Il utilise pour cela de « petits » triangles rectangles et applique cette formule à certains cas particuliers. Les exemples sont choisis de sorte que l'intégration soit aisée.

Clairaut calcule ensuite quelques aires de surfaces limitées par des courbes à double courbure et leurs projections (donc des surfaces cylindriques) et obtient des expressions à intégrer de la forme $z\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Il faut, avant d'effectuer le calcul, exprimer cette expression en fonction de la variable x et de la différentielle dx.

Cette partie est encore un recueil de problèmes et d'exemples. Pour les calculs et recherches de primitives, qui ne sont pas toujours immédiats, il y a parfois des références à « L'Analyse démontrée », [Reyneau 1708], manuel très utilisé en ce début de siècle et qui est également cité par Pitot. On retrouve la compagne de la cycloïde[5] en « dépliant » une courbe à double courbure dessinée sur un cylindre. D'autres calculs, cette fois de volumes de solides, vont suivre. Ils sont toujours illustrés par des exemples ad hoc.

d. Quelques principes généraux pour trouver des courbes à double courbure et pour en trouver la nature.

Clairaut continue dans cette section à résoudre divers problèmes, comme la recherche de courbes menées sur une surface avec un compas d'ouverture constante. On se rappelle l'allusion à cette situation dans le début de la préface : il s'agit bien sûr de rechercher l'intersection d'une sphère avec la surface. On trouve également dans cette partie l'étude de la surface formée par les tangentes menées d'un point donné à une surface donnée.

[4] C'est donc une des normales à la courbe
[5] donc une courbe mécanique

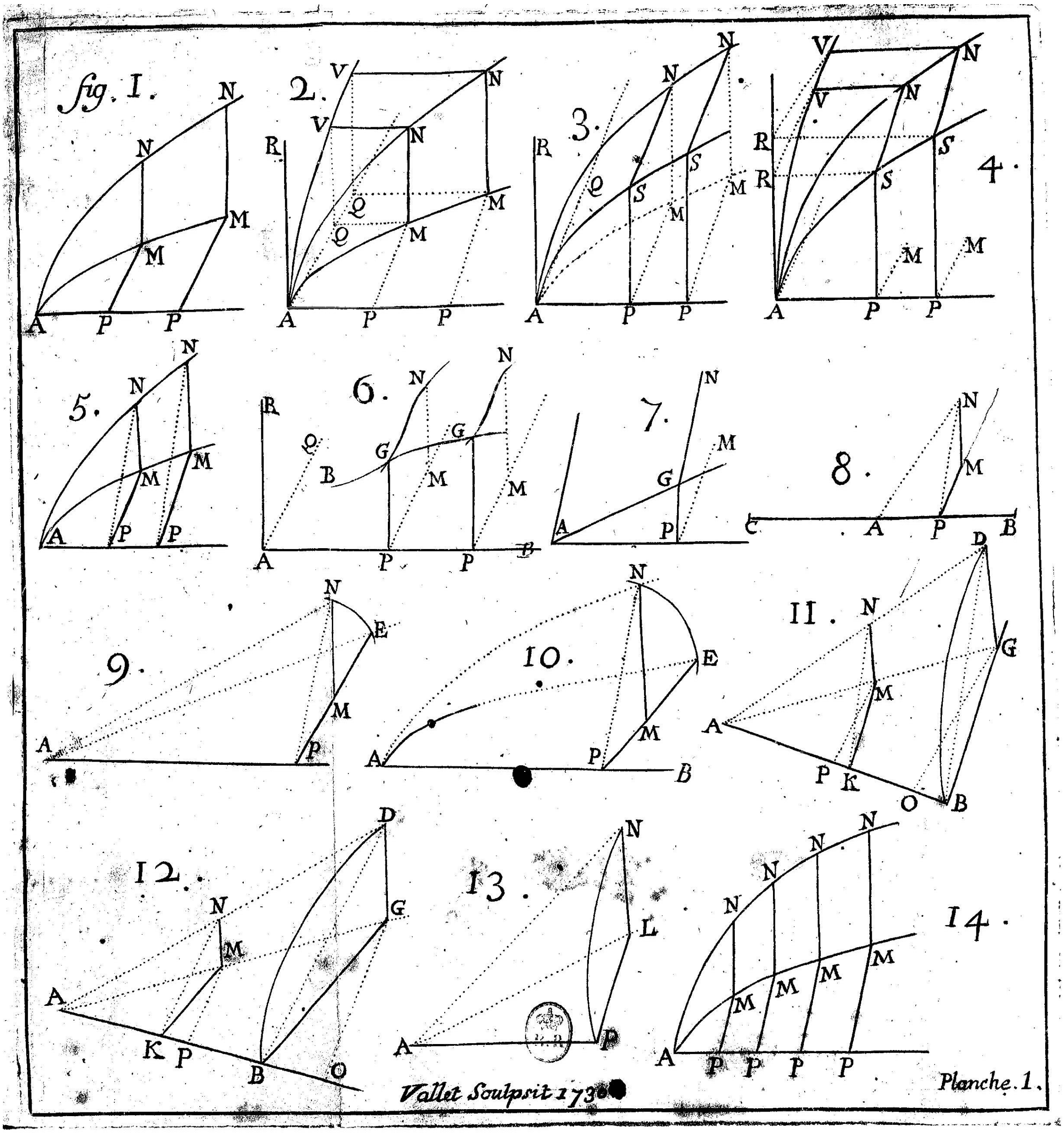


FIG. B.3 – Planche 1 de [Clairaut 1731], (figures 1-14)

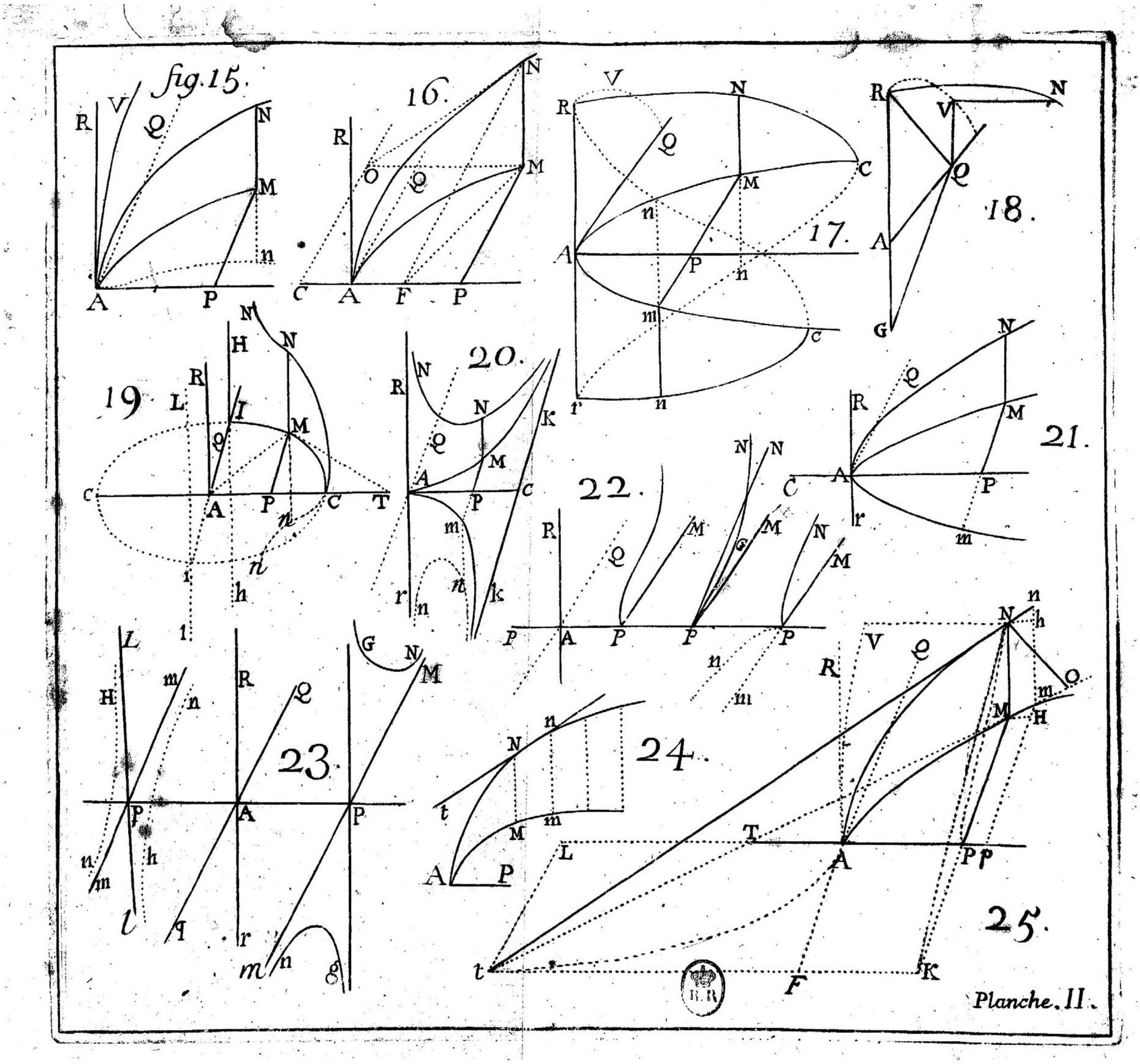


FIG. B.4 – Planche 2 de [Clairaut 1731], (figures 15-25)

2 Les autres textes de Clairaut

Avant de faire un bilan, donnons un petit aperçu des autres travaux de Clairaut qui concernent le domaine des courbes à double courbure.

En 1732, Clairaut, Bernoulli et d'autres géomètres comme Nicole et Maupertuis, étudient les épicycloïdes sphériques, courbes obtenues en faisant rouler un cercle mobile sur un cercle fixe, le plan du cercle mobile faisant un angle constant avec le plan du cercle fixe. On montre facilement que ces courbes sont dessinées sur une sphère. L'objectif de leurs recherches est de trouver celles qui sont algébriques et rectifiables algébriquement. C'est pour répondre au problème posé par Offenburg en 1718 : déterminer sur une voûte sphérique des « fenêtres » dont on puisse calculer la longueur algébriquement, problème proche de celui résolu par la fenêtre de Viviani (voir page 22). Dans son mémoire, intitulé « Des épicycloïdes sphériques » [1732], Clairaut commence par considérer une épicycloïde sphérique quelconque, et obtient le calcul d'un élément d'arc par des considérations géométriques assez simples, mais sans utiliser des projections sur deux plans comme dans [Clairaut 1731]. Il remarque qu'on obtient une longueur donnée par une fonction algébrique lorsque $r = an$, où r est le rayon du grand cercle, a celui du petit et n le cosinus de l'angle entre les deux plans. Si de plus n est rationnel, l'épicycloïde sera algébrique. Clairaut prolonge son article par un calcul d'aire, pour montrer que :

> « Les épicycloïdes sphériques résoudroient aussi le Problème de M.Viviani où il faut trouver sur la sphère des espaces quarrables géométriques, à l'occasion duquel M.Offenburg avoit proposé celui des courbes rectifiables. » [Clairaut 1732, p. 294]

En comparaison, Bernoulli va plus loin dans l'article [Bernoulli 1732] : s'il aboutit aux mêmes résultats concernant la rectifiabilité, il prouve l'unicité de la solution et caractérise de façon plus géométrique les épicycloïdes qui sont solutions du problème : le cercle fixe étant un petit cercle quelconque d'une sphère, le cercle mobile doit être un grand cercle de cette sphère. Et il donne l'exemple, sur la voûte céleste, du tropique et de l'écliptique.

Dans la même année, Clairaut, jeune académicien, donne deux autres mémoires qui résolvent de semblables problèmes de géométrie, comme la recherche des courbes rectifiables dessinées sur un cône.

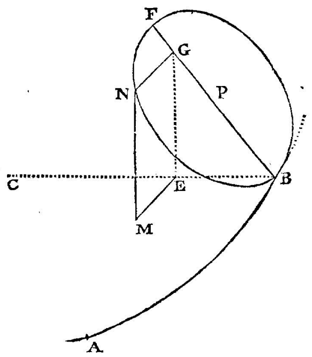
Ces quelques exemples sont les rares études de courbes à double courbure particulières que l'on rencontre dans la littérature mathématique de l'époque. Ces recherches de courbes rectifiables ou quarrables algébriquement nous paraissent actuellement avoir une portée limitée, mais elles permettaient aux géomètres d'entrer en compétition et de montrer leur virtuosité dans le calcul différentiel.

On peut citer également le mémoire [Clairaut 1733], lié au fameux problème de la figure de la terre. Clairaut y examine des propriétés des lignes de plus courte distance[6] sur une surface de révolution. Il démontre en particulier que pour une telle ligne, « *les sinus qu'elle fait avec*

[6] On appelait ainsi les lignes qui minimisent la distance entre deux points sur une surface, lignes que l'on appelle maintenant géodésiques.

DES ÉPICYCLOIDES SPHÉRIQUES.

Par M. CLAIRAUT.



I. SOIT un cercle NB roulant ſur un autre cercle AB, enſorte que ſon plan NGB faſſe toûjours le même angle avec le plan CAB du cercle AB, & ſoit N un des points de la circonférence NB qui décrit pendant ce roulement la courbe que l'on appelle *Epicycloïde ſphérique*. Je me propoſe d'abord de trouver l'expreſſion algébrique des arcs de cette courbe, ou, ce qui revient au même, la valeur d'un de ſes éléments quelconques.

Pour cela je mene NG perpendiculaire au diametre FPB du cercle roulant, GE perpendiculaire à CB, rayon du cercle AB, j'abbaiſſe auſſi l'ordonnée NM de l'Epicycloïde ſphérique, & je tire ME qui ſe trouve perpendiculaire à BC. Il eſt clair que l'élément cherché eſt la racine du quarré de l'élément de la courbe de projection, plus le quarré de la différence de NM. Le Probleme ſe réduit donc à trouver l'élément de la courbe de projection & l'ordonnée NM exprimée par la même variable.

La variable que je ferai entrer dans l'une & l'autre de ces expreſſions ſera BG que je nommerai x, & elle me donnera, en nommant auſſi FB, $2a$, CB, r, BE qui doit être en

FIG. B.5 – Le mémoire [Clairaut 1732]

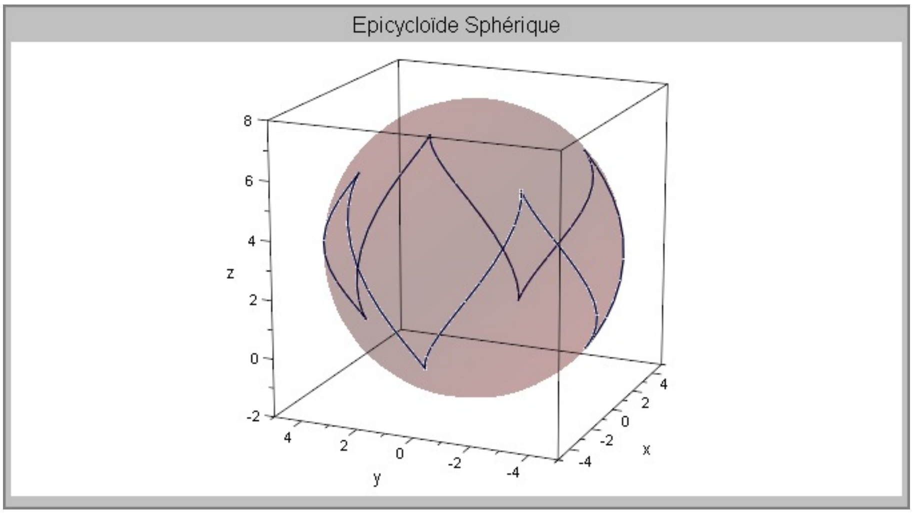


FIG. B.6 – Une solution

les méridiens sont toujours en raison renversée des ordonnées de ces méridiens. » Il est alors possible d'appliquer ce résultat pour décider de la forme de la surface (sphéroïde aplati ou sphéroïde allongé), et d'évaluer le rapport des axes. La méthode employée est semblable à celle qu'utilise Bernoulli [1728] dans un cadre plus général : il faut minimiser la distance entre deux points infiniment proches. Voir pour plus de précisions [Teixeira 1909, p. 459-460].

3 Un bilan : ce qui manque...

Nous pouvons faire maintenant un bilan de la situation de la théorie après l'ouvrage de Clairaut. Indicutablement, le travail de Clairaut forme un tout cohérent et correspond à l'adaptation aux courbes à double courbure des méthodes de Descartes. Il contient en définitive beaucoup de développements de géométrie analytique, étudie de nombreuses surfaces (ou du moins en donne les équations). Cependant, en ce qui concerne les courbes à double courbure, il en reste aux problèmes du premier ordre. En particulier, les notions de plan osculateur, de courbure, ne sont pas encore dégagées.

Clairaut caractérise les courbes à double courbure de plusieurs manières :

- ce sont des courbes de l'espace non planes (cependant Clairaut ne propose pas de moyen efficace pour déceler si c'est bien le cas) ;
- ce sont des courbes déterminées par deux relations entre coordonnées (en général une relation entre x et y et une relation entre y et z) ;
- ou bien, ce qui revient au même, ce sont des courbes déterminées par leurs deux projections sur des plans perpendiculaires, et donc également les intersections des deux surfaces cylindriques correspondantes.
- Plus généralement, une courbe à double courbure est l'intersection de deux surfaces, ce de différentes façons.

Revenons sur un des points qui ne sera jamais discuté par les auteurs du XVIII^{e} siècle : est-il sûr que toute courbe est intersection de deux surfaces ? On sait qu'une courbe algébrique, n'est pas forcément l'intersection de deux surfaces algébriques mais ce fait ne semble pas avoir été remarqué avant la fin du XIX^{e} siècle. Il n'est pas vrai non plus qu'une courbe gauche soit l'intersection des deux cylindres menés sur ses projections. Cette intersection peut contenir d'autres morceaux de courbes, que l'on songe par exemple à une hélice. Toutes ces considérations ne sont pas pertinentes pour les géomètres de l'époque, au moins dans le cadre que nous avons fixé, celui d'une étude locale. De même, il n'est pas tenu compte des cas particuliers qui peuvent se produire quand on étudie l'intersection de deux surfaces. C'est seulement à la toute fin de la période que nous étudions que certains géomètres se préoccuperont de ces cas : par exemple, dans son manuel de calcul différentiel [1868], Joseph-Alfred Serret remarque que s'il arrive qu'en un point de contact entre deux surfaces le plan tangent aux deux surfaces est le même :

> « on est en présence d'un point singulier. Nous nous bornerons à cette simple indication que nous ne pourrions développer sans sortir des limites que nous nous sommes fixées. » [Serret 1868, p. 371]

L'ouvrage de Clairaut marque donc un début. Il est important mais il reste encore beaucoup à faire.

> « Clairaut joue, en effet, dans un champ encore inexploré, le rôle sacrifié d'un pionnier. Ses successeurs utilisèrent largement ses travaux, mais il ne pouvait lui être donné d'arriver à des résultats définitifs. » (Tannery)

Et, comme le dit Kline :

> « Though Clairaut had taken a few steps in the theory of space curves, very little had been done in this subject or in the theory of surfaces by 1750. » [Kline 1972, p. 557]

Chapitre C

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) a marqué tout le dix-huitième siècle. Sa contribution à la géométrie la plus connue est son introduction de la notion de courbure d'une surface, par le biais de l'étude des courbures des sections normales et ce sont déjà des travaux tardifs, puisqu'ils datent de 1760. Les travaux qu'Euler fait sur les courbes à double courbure sont postérieurs et sa première étude est un appendice mathématique à un mémoire de mécanique. Reconnaissons que, par opposition aux autres mathématiciens qui ont contribué à l'étude des courbes à double courbure, les travaux d'Euler ne sont pas des travaux de jeunesse... Ses recherches sur le sujet sont contemporaines de celle de Monge : les deux mémoires que nous allons examiner furent présentés à l'Académie de Saint-Petersbourg en 1774 et de 1775, et publiés en 1775 et 1786, alors que Monge a lu son mémoire fondamental [Monge 1785] en 1771. Rien n'indique cependant que ce mémoire, publié très tardivement, ait été porté à la connaissance d'Euler. Par ailleurs, les méthodes utilisées par Euler sont dans la continuité de celles qu'on trouve appliquées dans la théorie des courbes planes, mise à part, dans le second mémoire, la nouveauté qu'apporte la trigonométrie sphérique.

1 Les textes

Les textes qui vont nous intéresser, spécifiques aux courbes à double courbure, sont donc au nombre de deux. D'emblée, il y a une opposition de style avec les autres auteurs de notre étude, en particulier ceux de l'école de Monge : Euler n'est pas un géomètre (au sens moderne du terme). On peut s'en rendre compte en considérant les figures qu'il utilise. Elles sont souvent peu claires, notamment par absence de perspective[1] : voir, par exemple la figure C.2. De même, Euler ne donne pas l'impression qu'il a une vision dynamique des objets qu'il étudie. Dans ses textes, l'observation des configurations est très rapidement suivie du calcul.

[1]Nuançons ces remarques : au moment où il signe ses mémoires, Euler est à Saint-Pétersbourg pour son second séjour et on sait qu'à cette époque il est pratiquement aveugle. Il n'en reste pas moins que, pour Euler, une figure est plutôt un schéma permettant de mémoriser les notations. Par ailleurs, dans l'édition des œuvres complètes, certaines figures ne correspondent pas au texte. Il ne nous a pas été possible de consulter celles de l'édition originale.

FIG. C.1 – Léonard Euler

En revanche le calcul différentiel est l'outil qu'il a contribué à développer. Il le maîtrise complètement, en connaît les pièges, et les calculs qu'il va développer dans ses mémoires sont d'une grande élégance. Dans son second mémoire (plus théorique et développé que le premier), il nous prévient du danger lié aux différentielles secondes : leur emploi raisonné nécessite de savoir quelle est la « variable indépendante ». Euler choisit alors la longueur d'arc, ce qui là encore permettra de développer les calculs de façon extrêmement efficace. Pour autant, la vision géométrique d'Euler n'est pas absente : dans le second mémoire, on rencontre une des premières fois sans doute l'utilisation d'une sphère de centre fixe à laquelle sont ramenées les directions de toutes les tangentes, outil pratique pour évaluer les angles et peut-être préfiguration des idées qui ont conduit Gauss et d'autres à introduire l'indicatrice sphérique pour étudier des variations de direction.

a. Le premier texte

Venons-en au détail des textes. Le premier « De motu turbinatorio chordarum musicarum ubi simul universa theoria tam aequilibrii quam motus corporum flexibilimum simulque etiam elasticorum breviter explicatur » [Euler 1775] fut présenté à l'Académie de Saint-Petersbourg le 10 novembre 1774. Il s'agit de résoudre un problème de mécanique : une tige prend la forme d'une courbe gauche quand on presse sur ses extrémités. En utilisant la méthode des moments, Euler cherche à obtenir des indications sur la position d'équilibre. Sa première hypothèse est que la condition d'équilibre fait intervenir les rayons de courbure des projections. Après examen Euler rejette cette hypothèse et fait appel au rayon de courbure proprement dit de la courbe à double courbure. Il lui faudra donc calculer la longueur de ce rayon de courbure ainsi que sa position, ce qui l'amènera à déterminer l'orientation du plan osculateur[2].

C'est dans un supplément à ce mémoire de mécanique qu'Euler cherche donc à calculer ce rayon, en un point quelconque. Ce supplément est titré « Supplementum continens analysin pro incurvatione fili in singulis punctis invenienda ». Puisque ce texte est assez court, nous en proposons une traduction en annexe B.

La courbure, le plan osculateur

Commençons par examiner ce qu'Euler entend par rayon de courbure d'une courbe à double courbure[3]. C'est tout simplement la généralisation à l'espace du rayon de courbure d'une courbe plane. Euler considère un élément d'arc ds, l'angle de contingence $d\omega$ entre deux éléments consécutifs et définit le rayon d'osculation (*radius osculi*) par $\frac{ds}{d\omega}$. Il ne parle pas au début du texte de cercle osculateur. Il introduit également le plan qui contient deux éléments consécutifs du fil et qui est déterminé par les deux tangentes consécutives ZT et zt. Ce plan, dans lequel le fil prend sa courbure (« in quo fit ista fili incurvatio »), Euler le nomme *plan de courbure*. Il va déterminer l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal.

Rappelons que nous n'avons pas rencontré d'étude de ce plan dans le traité de Clairaut [1731]. La notion de plan osculateur est cependant antérieure. C'est en effet en 1728 que Johann Bernoulli définit et nomme le plan qui passe par trois points consécutifs :

> « Voco autem *planum osculans*, quod transit per tria curvae quaesitae puncta infinite sibi invicem propinqua. » [Bernoulli 1728]

Ce plan est évoqué à l'occasion de la recherche des lignes de plus courte distance sur une surface, lignes que Bernoulli caractérise comme celles qui ont leur plan osculateur perpendiculaire au plan tangent à la surface. C'est donc dans le contexte de l'étude des surfaces qu'on le rencontre et ses propriétés ne semblent pas avoir été étudiées dans le cadre d'une courbe prise isolément. Pour Euler, le plan de courbure est manifestement, si on pense à l'utilisation qu'il en fait, le plan qui contient le cercle de courbure et il a besoin d'en connaître l'inclinaison par rapport aux axes de référence pour l'application qu'il envisage.

Les calculs

Euler, dans cet article, commence par utiliser des arguments géométriques élémentaires. Il fait intervenir des triangles infinitésimaux semblables, de façon tout à fait similaire à la démarche que l'on prend dans le cas d'une courbe plane. Son choix initial est de repérer un point du fil par ses trois coordonnées, x, y et z et d'utiliser librement les différentielles dx, dy et dz qui représentent les accroissement infinitésimaux des coordonnées. Puis il décide d'introduire

[2]La partie « mécanique » du mémoire est étudiée dans [Truesdell 1960, p. 374-376].

[3]Dans ce premier texte, issu d'un problème de mécanique, Euler dit « fil » au lieu de courbe.

364—365] DE MOTU TURBINATORIO CHORDARUM MUSICARUM 175

SUPPLEMENTUM CONTINENS ANALYSIN PRO INCURVATIONE FILI IN SINGULIS PUNCTIS INVENIENDA

29. Consideretur fili elementum quodcunque Zz (Fig. 5), pro cuius terminis Z et z sint ut supra ternae coordinatae

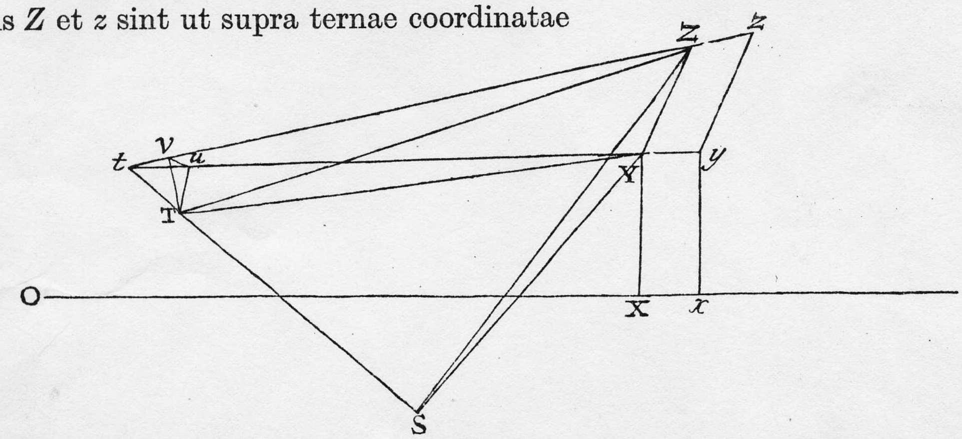


Fig. 5

$OX=x, \quad XY=y$ et $YZ=z$; $Ox=x+dx, \quad xy=y+dy$ et $yz=z+dz$.

In plano autem tabulae sit elementum

$$Yy = du = \sqrt{dx^2 + dy^2} \;,$$

cuius in plano tabulae ducantur tangentes proximae YT et yt, quibus ipsius fili tangentes ZT et zt occurrant in punctis T et t. Quo facto binae istae tangentes ZT et zt definient planum, in quo bina fili elementa proxima incurvantur ; unde elementum tT productum designabit intersectionem plani istius cum plano tabulae. Quare si ex Y in hanc rectam demittatur perpendiculum YS iungaturque recta ZS, angulus ZSY metietur inclinationem utriusque plani ; tum vero bina fili elementa proxima a se invicem declinabunt angulo TZt, qui si vocetur $= d\omega$, erit radius osculi in puncto Z $= \dfrac{ds}{d\omega}$.

30. Nunc primo ad positionem tangentium YT et yt in plano tabulae inveniendam sit angulus $XYT = \varphi$, ita ut sit $\operatorname{tang} \varphi = \dfrac{dx}{dy}$ eiusque differentiale $d\varphi$ exprimet angulum TYt. Porro quia recta ZT tangit filum in puncto Z, erit YT subtangens $= \dfrac{zdu}{dz}$; ipsa vero tangens $ZT = \dfrac{zds}{dz}$. Hinc igitur pro situ proximo erit

$$yt = \frac{zdu}{dz} + d.\,\frac{zdu}{dz} = \frac{zdu}{dz} + du + zd.\,\frac{du}{dz}\,,$$

FIG. C.2 – Première page du *Supplementum* de [1775] de nouvelles grandeurs[4] p et q introduites par

$$dx = pdz, \qquad dy = qdz.$$

Autrement dit, Euler considère x et y comme fonction de z, p et q étant les coefficients différentiels respectifs. Dans un second temps, il élimine ces coefficients pour revenir aux différentielles (première et seconde cette fois) des trois variables en ne supposant aucune variable constante (*si nullum horum differentialum pro constante assumamus*).

Il obtient ainsi les deux expressions

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}$$

puis

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}}$$

en utilisant une réduction algébrique.

Euler obtient de même les cosinus des trois angles que fait le plan « de courbure » avec les plans de coordonnées. Dans l'annexe, nous avons donné en notes quelques indications pour suivre ses calculs.

b. Le second texte [Euler 1786]

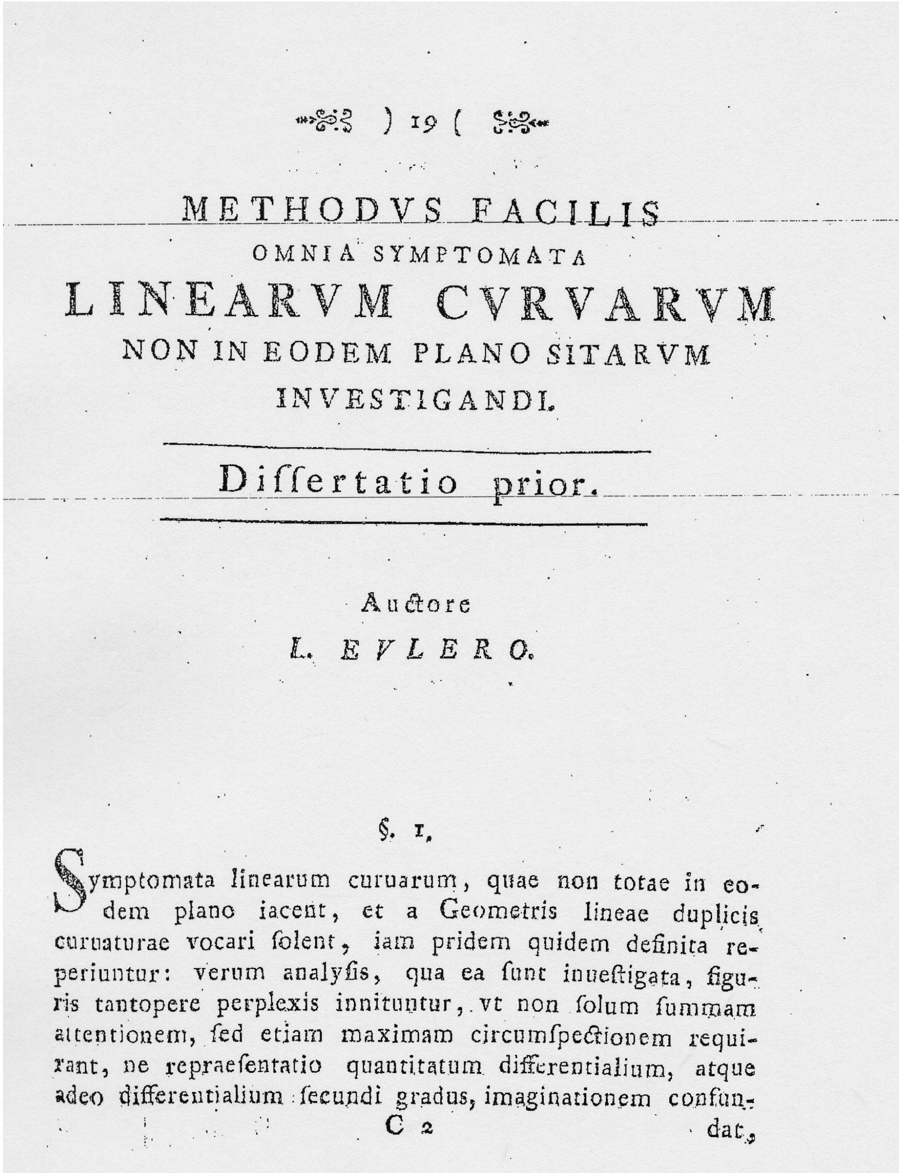
Le second texte est entièrement consacré à l'étude des courbes à double courbure. Il est intitulé « Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi » [Euler 1786] et a été présenté le 28 mai 1775, moins d'un an donc après le premier. Il n'est publié qu'en 1786 et nous proposons une traduction des premiers paragraphes dans l'annexe B.

Introduction

Ce second texte est beaucoup plus long que le précédent. Euler commence par se donner un programme d'étude et une sorte de méthodologie. Il ne s'agit plus seulement de faire un calcul annexé à un mémoire de mécanique mais de traiter les courbes à double courbure comme un problème de mathématique, un problème abstrait. De façon significative, il ne parle plus de fil mais reprend le vocabulaire du temps : courbes à double courbure.

Il insiste cette fois sur la méthode qu'il va utiliser. Sur le plan du calcul différentiel, il annonce qu'il va se méfier des différentielles secondes et utiliser des différentielles premières : introduisant le coefficient différentiel p dans $dy = pdx$, il pourra différentier p, ce qui évite dans un premier temps d'utiliser les différentielles secondes de x et de y.

[4]À ne pas confondre avec les notations p et q de Monge qui représentent les dérivées partielles de z, fonction des deux variables x et y.



) 19 (

METHODVS FACILIS
OMNIA SYMPTOMATA
LINEARVM CVRVARVM
NON IN EODEM PLANO SITARVM
INVESTIGANDI.

Diſſertatio prior.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Symptomata linearum curuarum, quae non totae in eodem plano iacent, et a Geometris lineae duplicis curuaturae vocari ſolent, iam pridem quidem definita reperiuntur: verum analyſis, qua ea ſunt inueſtigata, figuris tantopere perplexis innituntur, vt non ſolum ſummam attentionem, ſed etiam maximam circumſpectionem requirant, ne repraeſentatio quantitatum differentialium, atque adeo differentialium ſecundi gradus, imaginationem confun-

C 2 dat,

FIG. C.3 – Première page du second mémoire d'Euler [1786]

Sur le plan géométrique, il annonce qu'il va utiliser la trigonométrie sphérique, outil qu'il maîtrise... puisqu'il a beaucoup contribué à le développer.

Enfin Euler précise un dernier point méthodologique. Il décide de choisir comme variable indépendante la longueur d'arc, faisant jouer aux trois coordonnées un rôle symétrique. C'est un point important ; dans la plupart des autres textes étudiés, ce choix est rarement fait dès le début du calcul.

Le contenu : premier exposé

La méthode d'Euler est la suivante : si Z est un point de la courbe, z le point suivant, alors l'élément $Zz = ds$ a pour direction la direction de la tangente. Euler considère alors une sphère de centre Z, et nomme Za, Zb et Zc les trois rayons parallèles aux axes de coordonnées. Il précise que le rayon de la sphère est l'élément ds mais qu'il peut aussi être pris égal à l'unité. Euler nomme ensuite z' le point de la sphère tel que Zz' soit la tangente correspondant à l'élément suivant : *radius Zz' positio sequentis elementi curvae*. Mais alors l'arc zz' représente l'angle infiniment petit entre deux tangentes (qu'Euler notait $d\omega$ dans le premier mémoire) et le rayon de courbure R est donné par :

$$R = \frac{ds}{zz'}$$

Il ne reste plus qu'à calculer la longueur zz', ce qu'Euler fait de façon très habile. De par le choix de la variable indépendante s, le point z est repéré par les trois angles az, bz et cz qui ont pour cosinus respectifs $p = \frac{dx}{ds}$, $q = \frac{dy}{ds}$ et $r = \frac{dz}{ds}$, expression que l'on appellera plus tard « cosinus directeurs de la tangente ». Euler utilise un point auxiliaire (noté aussi s), et un peu de trigonométrie sphérique, des règles de différentiation (en l'occurence des fonctions arccosinus et arctangente) pour arriver à

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}.$$

Euler continue le calcul sous l'hypothèse qu'aucune variable n'est constante, retrouvant ainsi la formule du premier mémoire

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}}$$

dont il dit qu'elle est communément obtenue par un calcul laborieux, ce qui est confirmé par la méthode exposée dans son premier mémoire.

Continuant son examen de la situation, Euler précise la position du plan osculateur (« in quo bina curvae elementa proxima sunt sita »), dont il étudie la trace sur la sphère, et termine son exposé par quatre théorèmes de trigonométrie sphérique : le premier est tout simplement que la somme des carrés des trois cosinus directeur d'un rayon est égale à 1.

Second exposé

Le mémoire ne s'arrête pas là. Euler commence un nouvel exposé (Dissertatio Altera), destiné à ceux qui ne goûtent pas totalement la trigonométrie sphérique et se propose d'obtenir les mêmes résultats par des méthodes plus classiques. Il continue de noter p, q et r les grandeurs définies par :

$$dx = pds, \qquad dy = qds, \qquad dz = rds$$

En écrivant l'équation du plan osculateur sous la forme

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

il tient alors compte de ce que le point suivant $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est sur le même plan, puis que l'élément suivant également. Cela le conduit à écrire que les inconnues u, v et w doivent satisfaire le système

$$\begin{cases} \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1 \\ \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0 \\ \frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 1 \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir l'équation

$$x(rdq - qdr) + y(pdr - rdp) + z(qdp - pdq) = t$$

où t se détermine en écrivant que le plan passe par le point courant de la courbe. Euler calcule ensuite le rayon de courbure d'une façon nouvelle : se plaçant dans ce plan osculateur, il considère la projection de la courbe, introduisant deux nouvelles coordonnées X et Y pour la décrire, et calcule le rayon de courbure de cette projection en appliquant la formule classique dans le plan

$$z\Omega = -\frac{dX(1+PP)^{3/2}}{dP}$$

où $dY = PdX$. Il se ramène alors aux grandeurs u, v et w, puis à p, q et r, retrouvant ainsi les résultats du premier exposé. Remarquons qu'il ne justifie pas clairement que le rayon de courbure de la projection sur le plan osculateur coïncide avec le rayon de courbure de la courbe.

Dans le dernier paragraphe de son exposé, il résume ainsi la situaton géométrique

Soit OP, OQ et OR les trois côtés d'un parallélépipède :

- si $OP = x$, $OQ = y$ et $OR = z$, alors la diagonale donne la position du point de la courbe par rapport à l'origine, sa longueur étant la distance par rapport à l'origine ;
- si $OP = p$, $OQ = q$ et $OR = r$, alors la diagonale donne la position de la tangente en z, sa longueur étant 1 ;
- si $OP = \frac{dp}{ds}$, $OQ = \frac{dq}{ds}$ et $OR = \frac{dr}{ds}$, alors la diagonale donne la direction du rayon de courbure au point z, sa longueur est l'inverse du rayon de courbure ;
- si $OP = \frac{rdq-qdr}{ds}$, $OQ = \frac{pdr-rdp}{ds}$ et $OR = \frac{qdp-pdq}{ds}$, alors la diagonale sera normale au plan

qui contient deux éléments consécutifs, donc le plan de courbure ou, pour nous, le plan osculateur.

On voit donc que, dans cette conclusion, Euler présente les trois directions d'un repère attaché à chaque point de la courbe (tangente, rayon de courbure, normale au plan osculateur), repère que l'on appelle aujourd'hui repère de Frenet. En substance, son troisième item est ce qu'on appelle maintenant la première formule de Serret-Frenet, reliant les dérivées des cosinus directeurs de la tangente au rayon de courbure lorsque la variable indépendante est la longuer d'arc.

2 Conclusion

Euler a donc apporté des nouveautés importantes par rapport à Clairaut : le calcul explicite du rayon de courbure, la position du plan osculateur. Entrons un peu plus dans le détail.

a. Le rayon de courbure, le plan osculateur

Pour Euler, le rayon de courbure[5] est le rapport de l'élément d'arc sur l'angle de contingence entre deux tangentes infiniment proches. Par ailleurs, la définition du plan osculateur n'est pas tout à fait la même que chez Bernoulli, plan passant par trois points consécutifs, puisqu'Euler dit que ce plan contient deux éléments successifs. Il le définit aussi en disant que c'est le plan où la courbe s'incurve. Pour le dire de façon un peu différente : la tangente contient un élément, c'est le lieu où la courbe est droite, la plan osculateur représente l'étape suivante, c'est le lieu où la courbe est arc de cercle. Nous ne pensons pas trahir Euler en faisant cette présentation : cela justifie que, pour lui, il est naturel de se placer sur le plan osculateur pour calculer le rayon de courbure.

b. Des question de méthodes

Les résultats obtenus par Euler ne constituent pas l'essentiel de son apport. Remarquons qu'ils sont postérieurs aux travaux de Monge qui lui aussi calcule le rayon de courbure et étudie le plan osculateur dans [Monge 1785]. Ce mémoire, objet central du chapitre suivant a en effet été lu à l'Académie en 1771 mais fut publié tardivement.

En revanche, les méthodes employées par Euler sont tout à fait originales, notamment dans le second mémoire. Sur le plan géométrique, Euler utilise des méthodes très traditionnelles dans son premier texte, mais dans le second il innove. L'utilisation du déplacement d'un point sur une sphère pour étudier la variation d'une direction constitue une nouveauté importante. De façon significative, dans un traité tardif comme celui de Serret [1868], c'est l'élégante méthode d'Euler, débarrassée de la trigonométrie sphérique, qui est utilisée.

On peut aussi considérer avec intérêt la façon habile dont il écrit l'équation d'un plan dans le second exposé de son second mémoire, et le travail assez systématique qui le conduit à déga-

[5] Euler le nomme *radius osculi*, on devrait parler de rayon d'osculation.

ger les trois directions privilégiées attachées à un point : celle de la tangente, celle de la normale principale et la direction orthogonale au plan osculateur.

Sur le plan du calcul infinitésimal, Euler montre qu'il maîtrise les difficultés liées au différentielles d'ordre supérieur à un et aux changements de variables[6]. Sa méthode est efficace, et l'utilisation systématique de la symétrie des coordonnées rend les calculs plus clairs que ceux que nous allons trouver dans l'école française.

Avec la contribution d'Euler, ses écrits aux calculs limpides, la précision de ses raisonnements[7], s'achève une première phase de l'étude des courbes à double courbure : tout ce qui concerne les courbes planes comme la tangente, la notion de courbure, a été adapté aux courbes à double courbure, grâce à une amélioration des outils de la géométrie analytique et du calcul différentiel.

[6] On pourra consulter [Ferraro 2004] pour plus de précisions.

[7] Même s'il est très clair et explicite, il n'est pas toujours facile à suivre, n'hésitant pas à nommer s, p, q des points qui n'ont rien à voir avec les fonctions de même nom.

Deuxième partie

Monge et son école

« Il n' y a aucune opération d'analyse en trois dimensions qui ne soit l'écriture d'un mouvement opéré dans l'espace et dicté par elle. Pour apprendre les mathématiques de la manière la plus avantageuse, il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celles de la géométrie : il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture. »

GASPARD MONGE *Géométrie descriptive* [Monge 1799, p. 62]

Chapitre A

Monge

Monge a été très tôt été enseignant et avant de le suivre sur le devant de la scène arrêtons-nous à l'un de ses premiers élèves dont la contribution constitue un travail préparatoire, un prérequis aux mémoires importants du maître.

1 Tinseau

Charles de Tinseau (1748-1816) a été l'élève de Monge à Mézières et n'a laissé que peu de travaux mathématiques, hormis deux mémoires [1780a, 1780b] dont nous allons évoquer le premier.

Ce mémoire, « Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des Surfaces Courbes & des courbes à double courbure » [Tinseau 1780a] fut présenté à l'Académie des sciences le 7 décembre 1771[1] et publié en 1780. Il reflète sans doute très précisément l'enseignement et les idées de Monge et se présente comme une succession de problèmes :

(1) trouver l'équation du plan tangent à une surface courbe ;

(2) on mène des tangentes issues d'un point à une surface, déterminer la courbe à double courbure lieu de ces points ;

(3) équation d'un cône connaissant le sommet et une courbe par laquelle passe une surface ;

(4) équation de la courbe à double courbure suivant laquelle une surface est touchée par une infinité de lignes parallèles à une direction connue ;

(5) équation d'un cylindre qui s'appuie sur une courbe à double courbure ;

(6) équation de la surface formée par toutes les tangentes d'une courbe à double courbure ;

(7 et 8) déterminer les points d'inflexion linéaire et d'inflexion plane d'une courbe à double courbure ;

(9) recherche de l'inclinaison du plan osculant sur un des plans de coordonnées ;

(10) quarrer la surface des tangentes ;

[1] L'année 1774 indiquée dans le texte publié est donc erronnée.

(11) trouver la plus grande ou la moindre ordonnée d'une courbe à double courbure ;

(12) trouver la plus grande et la moindre ordonnée d'une surface courbe.[...]

On voit d'après ces énoncés, que Tinseau s'intéresse tant aux surfaces qu'aux courbes à double courbure. Les problèmes étudiés ressemblent à ceux que se posait Clairaut mais sont d'un niveau plus élevé.

Le problème (6) est, d'après Tinseau, un outil de première importance. On en déduit en effet une méthode pour savoir si une courbe à double courbure est plane ou non, un des problèmes qu'avait posé Clairaut et qu'il n'avait qu'imparfaitement résolu. L'idée de Tinseau est la suivante : si l'intersection de cette surface (celle qu'on nomme surface des tangentes) avec un plan de coordonnées est une droite, alors la surface est plane, et la courbe à double courbure l'est également. Remarquons que cette affirmation ne va pas de soi : pour compléter l'argument, il faut dire que la surface des tangentes est une surface développable, elle est plane si elle contient une droite autre que les génératrices.

Les problèmes suivants (7) et (8) représentent une nouveauté par rapport à Clairaut. Tout d'abord, que représentent ces deux inflexions ? Tout est dit dans un Scholie, que l'on retrouvera presque mot pour mot dans le mémoire de Monge, ce qui nous incite encore davantage à lire la parole du maître dans les écrits de l'élève :

> « Une courbe plane n'est susceptible que d'une espèce d'inflexion qui a lieu quand deux ou plusieurs éléments de cette courbe se trouvent en ligne droite ; mais outre cette espèce d'inflexion, les courbes à double courbure en admette une autre qui a lieu quand trois ou en général un plus grand nombre d'éléments consécutifs de la courbe à double courbure se trouvent dans un même plan. J'appellerai *inflexion plane* cette seconde espèce d'inflexion pour la distinguer de la première, l'*inflexion linéaire*. » [Tinseau 1780a, p. 604]

Pour trouver les points d'inflexion plane, la méthode utilisée par Tinseau est assez simple. Elle est également basée sur l'examen de l'intersection $\mathscr{C}$ du plan de base avec la surface des tangentes : Tinseau considère des éléments consécutifs de la courbe DN, $N\delta$ et $\delta\psi$; s'ils sont coplanaires alors, h, h' et h'', intersection respectives de DN, $N\delta$ et $\delta\psi$ avec le plan, sont en ligne droite. Il suffit donc, connaissant les équations de $\mathscr{C}$, d'en déterminer les points d'inflexion. Dans le problème 8, Tinseau recherche les points d'inflexion linéaire. Il envisage encore les projections de deux éléments consécutifs sur les trois plans de coordonnées ; si la courbe est (localement) droite, elles doivent être alignés dans les trois cas.

Ce petit recueil de problèmes annonce bien le style de Monge : une vision de l'espace très sûre et une intervention minimale du calcul différentiel. Cependnat il reste dans l'esprit de Clairaut : une courbe à double courbure s'étudie de façon privilégiée en considérant ses projections sur des plans. Tinseau étudie cependant de nouveaux objets : les deux flexions, et dans le problème (9), le plan osculateur :

> « J'appelle plan osculant le plan qui passe par deux éléments consécutifs de la courbe à double courbure. » [Tinseau 1780a, p. 606]

FIG. A.1 – Gaspard Monge

2 Gaspard Monge

Gaspard Monge (1746-1818) est sans doute le géomètre le plus important de la fin du dix-huitième siècle. Pour notre sujet, il joue un rôle de tout premier plan en donnant dans un mémoire un éclairage nouveau et original, en résolvant des problèmes qu'il est le premier à imaginer, en montrant le lien fondamental qu'il y a entre les courbes à double courbure et les surfaces développables. Son œuvre scientifique est considérable mais son influence en tant qu'enseignant et chef d'une École l'est tout autant.

a. Le mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure [Monge 1785]

Ce texte a été imprimé dans les *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'académie royale des Sciences par divers savants, et lus dans ses assemblées*, tome X, avec deux planches de figures. Monge, en effet, n'était pas encore académicien[2], et son mémoire ne pouvait être publié dans les Mémoires de l'Académie royale des sciences. C'est le texte le plus important de Monge sur le thème des courbes à double courbure. Il a été présenté le 31 août 1771[3] (donc un peu avant le mémoire de Tinseau que nous venons d'évoquer) mais n'est publié qu'en 1785 donc après le mémoire consacré aux surfaces développables [Monge 1780], bien après également le mémoire de Tinseau. Dans ce volume, il est immédiatement précédé par le célèbre mémoire de Meusnier (autre élève de Monge) sur la courbure des surfaces qui fut présenté à l'Académie en 1776.

C'est un mémoire assez long, le second présenté par Monge à l'Académie alors qu'il n'est

[2]Il sera élu adjoint-géomètre en 1780.
[3]Voir en annexe, page 225, le rapport écrit par Duséjour et Vandermonde.

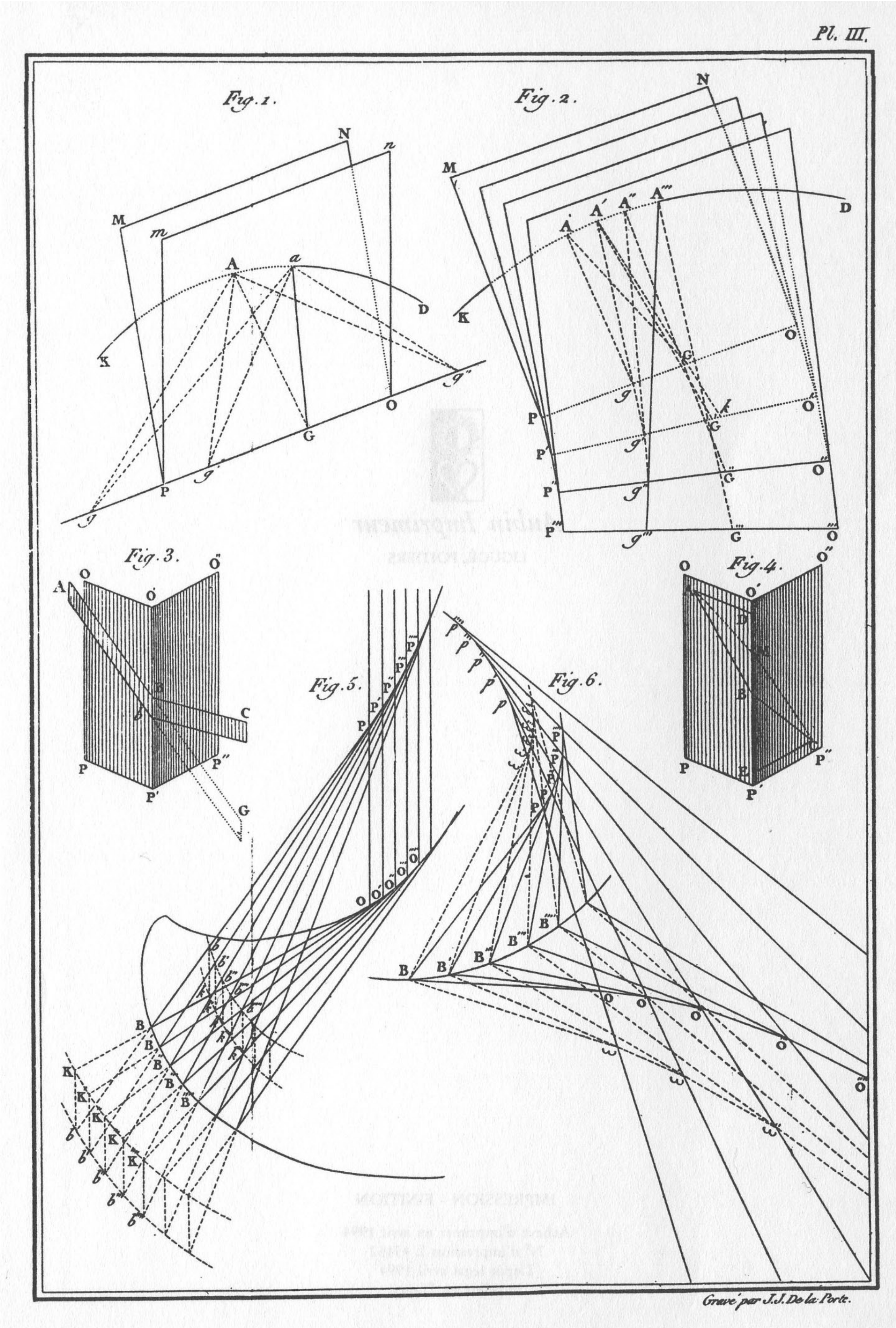


FIG. A.2 – Première planche de [Monge 1785] (figures 1 à 6) âgé que de vingt-cinq ans. Cependant, les idées qu'il développe datent sans doute des années 1768-1769. René Taton cite une lettre de Monge à l'abbé Bossut, datant du début 1769 :

> « En réfléchissant dernièrement sur ce qui arrive à plusieurs surfaces courbes que l'on fait mouvoir les unes sur les autres pour engendrer des épicycloïdes sur toutes sortes de surfaces, je suis parvenu à trouver les développées des courbes à double courbure. » [Taton 1951, p. 166]

La suite de la lettre contient l'essentiel de ce qui sera dans le mémoire.

Donnons les principaux éléments et la logique de sa démarche, la première partie est purement géométrique, puis intervient l'analyse.

La partie géométrique

L'objectif de Monge est d'étudier les développées des courbes de l'espace. Le problème n'a semble-t-il jamais été examiné pour les courbes à double courbure. Monge annonce que non seulement les courbes à double courbure ont une développée, mais qu'elles en ont une infinité et que c'est aussi le cas des courbes planes.

Classiquement, la développée d'une courbe plane peut être définie comme la courbe dont les tangentes sont les normales à la courbe initiale, autrement dit c'est l'enveloppe des normales. Mais on peut dire également que c'est l'ensemble des centres de courbure, centre des cercles osculateurs, ceux qui sont les plus proches de la courbe. La notion est ancienne, puisqu'elle date de Huygens [1673], et on sait que les deux points de vue sont équivalents.

Si on veut généraliser à une courbe qui se situe dans l'espace, la première difficulté est qu'il y a alors une infinité de normales en un point : d'une certaine façon, il convient de les remplacer par leur ensemble qui forme le plan normal, perpendiculaire à la tangente. Décrivons maintenant la démarche de Monge.

L'axe polaire.
Dans une longue introduction, il décrit l'axe polaire d'un cercle, droite perpendiculaire au plan du cercle et passant par le centre, et fait observer son importance : c'est l'ensemble des points équidistants de tous les points du cercle.

Cette figure apparemment banale est cruciale dans la suite du développement. Monge va l'insérer au voisinage de chaque point de la courbe à double courbure. Pour retrouver l'axe polaire, à la place des deux normales consécutives qu'on envisage pour une courbe située dans le plan, Monge considère deux plans normaux consécutifs :

> « Par un point A de cette courbe, soit mené un plan $MNOP$ perpendiculaire à la tangente en A ; par le point a infiniment proche, soit pareillement mené un plan $mnOP$ perpendiculaire à la tangente en a, ces deux plans se couperont quelque part en une droite OP qui sera l'axe du cercle, dont le petit arc Aa de la courbe peut être censé faire partie, de manière que si des points A & a on abaisse deux perpendiculaires sur cette droite, ces perpendiculaires, égales entre elles, la ren-

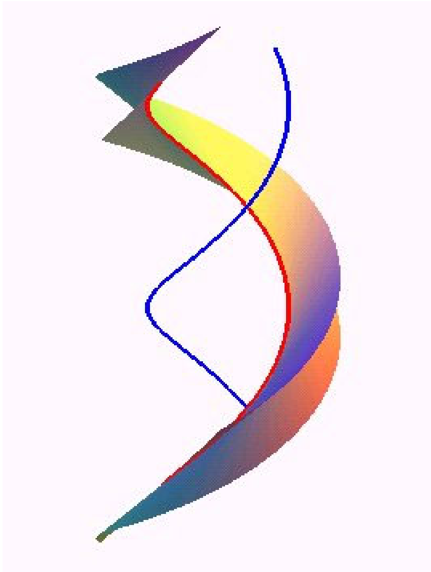


FIG. A.3 – Surface polaire d'une hélice

> contreront en un même point G qui sera le centre de ce cercle. » [Monge 1785, p. 512]

Monge observe ensuite que si on part d'un point quelconque g de l'axe, qu'on le relie au point A, en faisant tourner ce segment sans altérer l'angle qu'il fait avec l'axe, on décrit l'élément Aa. C'est bien caractéristique du style géométrique de Monge : la description qu'il fait est une sorte d'animation, qui anticipe ici l'idée que le point g pourrait faire partie d'une développée.

La surface polaire.
Lorsqu'on fera varier le point A sur la courbe à double courbure, les axes polaires formeront une surface. Monge fait alors une observation essentielle : cette surface, qu'il appelle *surface des pôles*, a la propriété particulière de pouvoir être développée sur un plan, comme les surfaces coniques ou cylindriques, *sans duplicature ni solution de continuité.* C'est ce qu'il appelle une surface développable. La démonstration de Monge ne paraîtra peut-être pas convaincante. Ses arguments sont proches de la mécanique, l'idée étant que la surface polaire est formée de « rubans » (hèdres) infiniment étroits, mais que deux rubans consécutifs ont une arête commune puisque deux axes polaires consécutifs sont coplanaires comme on le voit en considérant trois plans normaux consécutifs. On peut donc déplier l'un pour le mettre en continuité avec l'autre : voir la figure A.2 extraite du texte de Monge, et pour une autre illustration la figure A.3. Cette idée de surface formée de hèdres articulés le long de leurs arêtes commune sera reprise très souvent, par exemple dans les arguments de Lacroix et de Fourier.

Les développées.
Monge énonce alors un premier théorème (§VI) : une courbe a double courbure a une infinité de développées, toutes situées sur la surface des pôles. Chacune de ces développées se

construit de proche en proche de la façon suivante[4] : on joint un point A de la courbe à double courbure à un point g de l'axe polaire, puis on joint le point suivant A' de la courbe à ce point g, et la droite $A'g$ coupe l'axe polaire suivant en un point g', puis on continue avec A'', etc. La développée obtenue est la courbe $gg'g''$: par construction, les droites Ag, $A'g'$ sont ses tangentes (« puisqu'elles sont les prolongements des éléments de la courbe »). De plus :

> « La courbe $gg'g''$ est telle que si l'on conçoit qu'une de ses tangentes tourne autour de cette courbe sans jamais cesser de lui être tangente, et sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points de cette tangente décrira la courbe KAD ; donc elle est une de ses développées. » [ibid., p. 514]

Cette citation montre que, pour Monge, le lien entre développée et développante se fait par une description très concrète, physique. D'ailleurs cette notion de développée des courbes à double courbure sera l'objet de construction de maquettes, Monge y fait allusion dans un autre de ses textes (voir page 69).

Dans le paragraphe VIII, Monge signale une spécificité des courbes à double courbure : l'ensemble des centres de courbure, qui est dessiné sur la surface des pôles, ne peut être une des développées, sauf justement si la courbe est plane. La démonstration est assez subtile et repose sur l'idée suivante : pour une courbe non plane, deux tangentes consécutives sont coplanaires, mais pas trois consécutives. On en déduit que trois plans normaux consécutifs ne sont pas perpendiculaires à un même plan, donc deux axes polaires consécutifs ne sont pas parallèles. Monge en déduit que deux normales principales consécutives ne peuvent être coplanaires et ne peuvent donc être les tangentes consécutives d'une courbe à double courbure[5]. Dans le cas particulier d'une courbe plane, la surface des pôles est un cylindre et l'ensemble des centres de courbure est une développée, c'est la développée plane habituelle.

Pour donner une image plus précise de cette notion de développée d'une courbe à double courbure, nous avons justement illustré ce cas d'une courbe plane sur la figure A.4.

On peut imaginer que l'on développe cette figure particulière sur un plan normal : la courbe sera réduite à un point M, la surface polaire cylindrique sera une famille de droites parallèles, les développées seront des (parties de) droites. Cependant ce développement sera plus intéressant dans le cas d'une courbe à double courbure quelconque, nous y reviendrons plus loin.

Les développées sont des lignes de plus courte distance.
Les deuxième et troisième théorèmes du mémoire affirment que les développées sont obtenues en pliant *librement* une droite sur la surface des pôles et que ce sont, par conséquent, des lignes de plus courte distance sur cette surface. La démonstration de ces résultats est très imagée. D'une certaine façon, elle inverse le processus décrit dans la citation faite plus haut : une développée est une courbe obtenue en pliant librement une droite sur la surface polaire. Cette démonstration est illustrée par les figures 3 et 4 de la première planche (figure A.2). Monge imagine que l'on plie « librement » sur une surface un ruban infiniment étroit. Il considère alors

[4] Voir la figure 2 de la première planche A.2

[5] L'ensemble des normales à une courbe à double courbure forme donc une surface non développable.

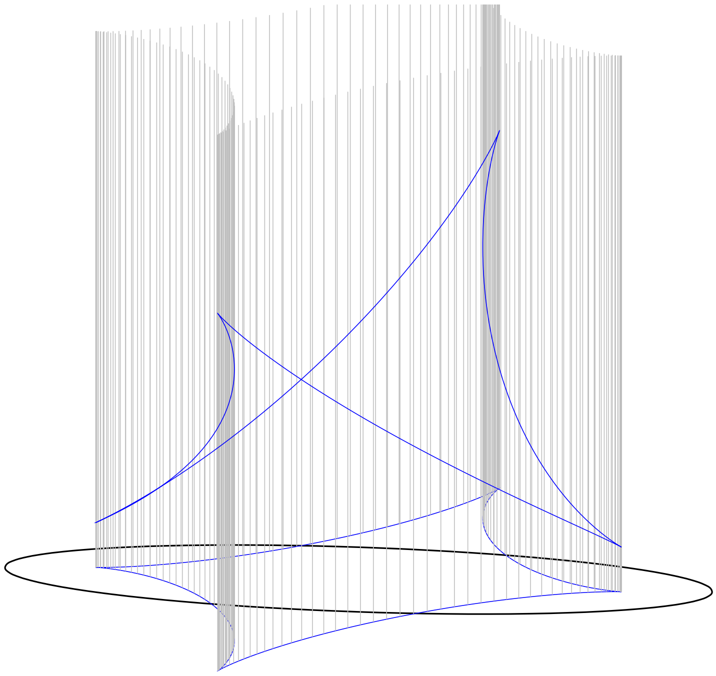


FIG. A.4 – Développées d'une ellipse

deux hèdres consécutifs et, en utilisant le fait qu'en se pliant le ruban doit rester en contact avec l'arête et les deux hèdres, il justifie l'égalité des angles que fait de part et d'autre le ruban avec l'arête. Il en déduit par une considération géométrique très simple que la droite pliée librement sur la surface est une ligne de plus courte distance. Monge affirme également que sa démonstration est acceptable pour toute surface courbe : il faut alors considérer que les deux hèdres consécutifs sont deux éléments plans consécutifs d'une surface quelconque[6]. Il remarque ensuite que, pour une surface développable, la démonstration est beaucoup plus directe, il suffit de déplier.

Monge s'attache ensuite à diverses réciproques. Il justifie qu'une surface cylindrique est la surface des pôles d'une infinité de courbes, toutes planes. De même, autre cas particulier,

[6]Dans la deuxième édition de son traité, Lacroix reprend la question d'un fil plié librement sur une surface. Voici comment il s'exprime :

> « En y réfléchissant, on conçoit que chacun des éléments de la courbe étant appliqué sur un des plans tangents de la surface proposée, cette courbe détermine une suite de plans tangents qui forment une surface développable circonscrite à la première surface, et qui la touche suivant la courbe dont il s'agit. Il est visible que si l'on développe la seconde surface, les éléments de la courbe ou ses tangentes reprendront la situation qu'ils avaient sur le plan primitif où elles étaient tracées.
>
> Par exemple, que l'on plie librement sur la surface d'une sphère une ligne droite tirée sur un plan, elle deviendra un grand cercle, le plan se roulera en cylindre, et coïncidera avec la surface développable formée par les intersections consécutives des plans tangents à la sphère. » [Lacroix 1810]

Ce n'est peut-être pas plus convaincant, mais assurément plus précis.

un cône ne peut être que la surface des pôles d'une courbe dessinée sur une sphère. Nous ajouterons ici que le cas le plus dégénéré, et aussi le plus exemplaire, est celui du cercle : à la fois courbe plane et courbe sphérique, sa polaire développable se réduit à une droite (son axe), les développées sont les points de cet axe : la boucle est bouclée, c'est le début du mémoire de Monge.

Pour terminer cette partie, on revient au cas général d'une surface développable. Si ce n'est ni un cône ni un cylindre, elle est formée par les tangentes à une courbe à double courbure que l'on appelle alors *arête de rebroussement* par analogie avec les points de rebroussement d'une courbe à double courbure.

La figure A.5 donne l'illustration du vocabulaire utilisé dans cette partie.

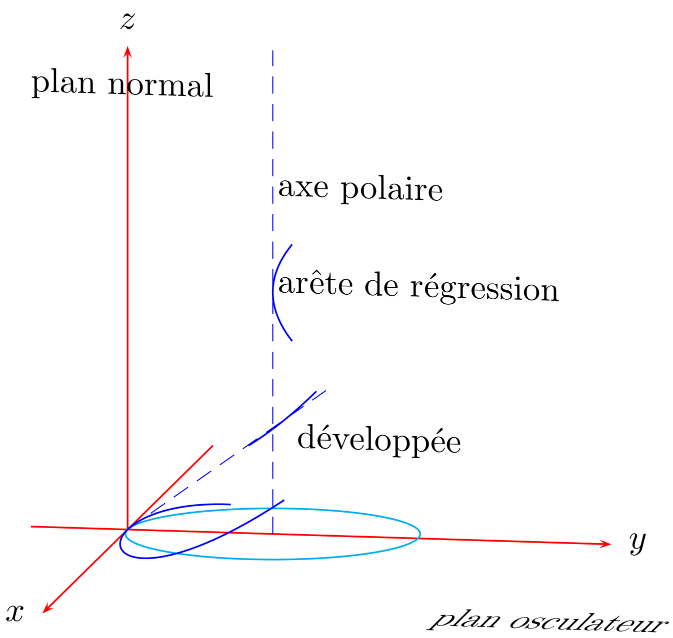


FIG. A.5 – Vocabulaire

La partie analytique

Équation de la surface polaire et de l'arête de rebroussement.

On arrive à une partie plus analytique : *« Il ne s'agit plus actuellement »* , écrit Monge,*« que d'appliquer l'analyse à tout ce qui précède. »* . Monge commence par quelques calculs préliminaires. Il recherche l'équation d'un plan normal à une droite donnée, puis détermine la droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée[7]. Sa façon de représenter la courbe

[7]Ces deux lemmes ne seront pas repris dans les ouvrages didactiques qui reprendront l'essentiel du mémoire, comme [Monge 1807]. En effet, ils font alors partie d'un ensemble de méthodes élémentaires placé au tout début du livre [ibid., p. 1-25]

à double courbure suit la méthode de Clairaut : il se donne deux fonctions[8] $y = \phi x$ et $z = \psi x$, équations des deux projections et il note x' l'abscisse du point courant de la courbe à double courbure. Dans une première étape, il obtient l'équation du plan normal à une courbe à double courbure

$$(A) \qquad (z - \psi x')\psi' x' + (y - \phi x')\phi' x' + x - x' = 0.$$

Monge cherche alors à obtenir l'équation de la surface polaire, lieu des intersections de deux plans normaux consécutifs. Pour cela, il écrit l'équation (a) du plan normal en le point de paramètre $x' + dx'$, puis il en tire une équation (B), en faisant la différence entre (A) et (a) et en simplifiant par dx.

$$(B) \qquad (z - \psi x')\psi'' x' + (y - \phi x')\phi'' x' - [1 + (\phi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0.$$

Il fait alors la remarque que (B) peut tout simplement se déduire de A en différentiant par rapport au paramètre x'. L'équation de la surface n'est pas explicitée : elle résulterait de l'élimination de x' entre les équations (A) et (B).

On obtient ensuite l'équation de l'arête de rebroussement de la surface polaire, en considérant l'intersection de deux axes polaires consécutifs, ou, ce qui revient au même, de trois plans normaux consécutifs. Monge remarque à nouveau qu'il suffit de différentier une fois de plus l'équation initiale. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il fait remarquer que tout point de l'arête de rebroussement de la surface polaire développable est aussi (comme intersection de trois plans normaux consécutifs), centre d'une sphère osculatrice. Il donne les coordonnées de ce centre, en fonction de ϕ et ψ et de leurs dérivées.

Une méthode générale.

Revenons un peu sur cette technique : la recherche de l'enveloppe d'une famille de plans, qui est donc une surface développable, puis de l'arête de rebroussement de cette surface, se fait donc ainsi : on part de l'équation du plan, $M = 0$, puis on la différencie par rapport au paramètre et on obtient par élimination l'équation d'une surface, l'enveloppe. En différentiant M une seconde fois, on obtient un système de trois équations qui décrit une courbe sur la surface, l'arête de rebroussement.

Ce schéma sera réutilisé et généralisé constamment par Monge, par exemple en prenant à la place d'une famille de plans, une famille de sphères de même rayon, le centre se déplaçant sur une courbe plane (surface canal). L'intersection de deux surfaces consécutives de la famille s'appelle la *caractéristique*, et l'ensemble des caractéristiques forme l'enveloppe. De plus, l'intersection de deux caractéristiques consécutives est en général un point, l'ensemble de ces points formant l'arête de rebroussement de l'enveloppe.

Comme nous le verrons plus loin (chapitre III B, page 127), pour Monge, une équation aux différences partielles[9] représente (ou pour dire comme lui *appartient* à) une famille de courbes ou de surfaces qui partagent une propriété commune. Ce lien entre équations différentielles,

[8] Nous gardons la notations de Monge. Dans les cas où il n'y a pas d'ambiguïté, il omet les parenthèses.

[9] aux dérivées partielles

surfaces, enveloppes, courbes à double courbure, fera notamment l'objet d'un chapitre récapitulatif, d'une quarantaine de pages, dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* [Monge 1807, p. 367-413], chapitre intitulé « Addition : Sur l'intégration aux différences partielles du premier ordre entre trois variables ». Nous aurons également l'occasion d'y revenir dans le chapitre huit.

Les développées.
Le mémoire continue par la recherche des développées. Monge commence par examiner les équations différentielles qui déterminent les courbes pliées librement sur une surface quelconque. Il y parvient à l'aide de la trigonométrie sphérique et des remarques géométriques faites auparavant. Au passage, Monge remarque que son équation est la même que celle obtenue par Johann Bernoulli [1728].

Cependant, il n'utilise pas cette équation générale où l'on trouve des différentielles du second ordre pour obtenir les équations des développées. Il change de point de vue et, revenant à la définition d'une développée, il considère une courbe de la surface polaire (dont les coordonnées y et z sont donc une fonction de x) et exprime que la tangente à cette courbe passe par la courbe initiale (la développante). Il suffit ensuite d'éliminer le paramètre (c'est-à-dire l'abscisse du point courant), mais les expressions obtenues contiennent encore des différentielles : « les deux équations que l'on obtiendra, dont l'une sera aux différences premières, seront les deux équations demandées ». Il faudra attendre Lancret pour obtenir des équations sous forme explicite.

Les deux inflexions
La partie suivante est également de toute première importance pour notre étude : c'est là qu'on trouve clairement la distinction entre deux inflexions possibles d'une courbe à double courbure. Citons Monge :

> « On appelle *point d'inflexion*, dans une courbe plane, le point où cette ligne, après avoir été concave dans un sens, cesse de l'être pour devenir concave dans l'autre sens. Il est évident que, dans ce point, la courbe perd sa courbure, et que les deux éléments consécutifs sont en ligne droite. Mais une courbe à double courbure peut perdre chacune de ses courbures en particulier, ou les perdre toutes deux dans le même point ; c'est-à-dire, qu'il peut arriver ou que trois éléments consécutifs d'une même courbe à double courbure se trouvent dans un même plan, ou que deux de ces éléments soient en ligne droite. Il suit de là, que les courbes à double courbure peuvent avoir deux espèces d'inflexion, la première a lieu lorsque la courbe devient plane, et nous l'appellerons *simple inflexion* ; la seconde, que nous appellerons *double inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient droite dans un de ses points. » [ibid., p. 541]

En considérant les axes polaires, il est facile d'obtenir les points de simple inflexion. Ce sont les points pour lesquels deux axes consécutifs sont parallèles, donc pour lesquels le centre de la sphère osculatrice est rejeté à l'infini. On obtient

$$\psi'' x \phi'^3 x - \phi'' x \psi'^3 x = 0,$$

$$\text{ou} \qquad ddzd^3y - ddyd^3z = 0.$$

Remarquons que dans des éditions ultérieures, ce même résultat sera obtenu plus simplement. Monge tiendra en effet le raisonnement suivant : si la courbe est plane, alors on a une relation $z = ax + by + c$, que l'on différencie trois fois à cause des trois constantes (voir le début du chapitre III B) et on obtient

$$\begin{cases} dz = adx + bdy \\ ddz = bddy, \qquad \text{puisque } x \text{ est la variable indépendante} \\ d^3z = bd^3y \end{cases}$$

et l'élimination donne le même résultat.

Monge obtient ensuite le rayon de courbure en déterminant la distance du point courant à l'axe polaire. L'expression obtenue en termes de ϕ et ψ est également mise sous forme différentielle

$$\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}{\sqrt{dx^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2}}.$$

Il s'ensuit qu'en annulant le dénominateur, on obtiendra les points de double inflexion. La courbe n'est pas seulement plane mais droite (localement bien sûr).

Le mémoire se termine par une petite théorie des développées et développantes de surfaces développables. Cette « théorie » paraît anecdotique ; pourtant elle est intéressante à étudier car elle joue un rôle important dans les travaux de Lancret. À toute surface développable D, on associe une autre surface développable D' de la façon suivante : par chaque génératrice de D on fait passer un plan P contenant cette génératrice et perpendiculaire à la surface D (c'est-à-dire à son plan tangent). La surface développée de D est alors l'enveloppe de tous ces plans P, on la note D'.

Monge donne quelques exemples et une application à des aires de projections : si on prend une hélice tracée sur une surface cylindrique D' et qu'on considère la surface de ses tangentes D, alors D' est la développée de D. Monge montre que les surfaces découpées sur D se projettent sur le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre en des des surfaces proportionnelles. Il s'intéresse également au problème réciproque : de combien de surfaces développables une surface développable est-elle la développée ? Monge en trouve une infinité du troisième ordre.

Cette notion de développée d'une surface développable ne sera pas reprise dans les écrits ultérieurs de Monge. Outre l'exemple que venons d'évoquer, son origine provient directement de la théorie des développées des courbes à double courbure. Si en effet on considère la surface des tangentes d'une développée d'une courbe à double courbure $\mathscr{C}$, la développée de cette surface est la surface polaire de $\mathscr{C}$. Les démonstrations de Monge prouvent alors que l'arête de rebroussement d'une surface développable est une courbe de plus courte distance de sa développée.

b. Les autres textes

Citons d'abord les textes où est repris, parfois mot pour mot, le mémoire que nous venons d'étudier :

(i) **Feuilles d'analyse appliquées à la géométrie** [Monge 1795a] C'est seulement dans la seconde édition de ces « feuilles », destinées aux étudiants de Polytechnique, que l'on retrouve le texte de Monge sur les courbes à double courbure.

(ii) **Applications de l'analyse à la géométrie** [Monge 1807], [Monge 1850] Cet ouvrage reprend les écrits géométriques de Monge, mais organisés de façon différente. On retrouve en particulier la théorie des courbes à double courbure à la fin de l'ouvrage. Une édition intéressante est celle de 1850, car elle est complétée non seulement par le célèbre article de Gauss sur les surfaces [1828], mais également par des notes de Liouville qui, entre autres, cite une lettre où Joseph-Alfred Serret utilise pour la première fois les formules que l'on appelle maintenant formules de Serret-Frenet.

(iii) **Des courbes à double courbure**. C'est un article du Journal de l'École polytechnique, [Monge 1799b]. Il y a d'abord un paragraphe de définitions géométriques : ligne à simple, double courbure. La tangente est définie de la façon suivante, c'est une droite telle qu'entre elle et la courbe on ne peut mener aucune autre droite. On retrouve cette définition dans l'exposé de Lagrange [1797]. Monge définit également la développée d'une courbe de l'espace ainsi :

> « *Soit une courbe quelconque tracée dans l'espace : si l'on conçoit qu'une droite se meuve de manière qu'elle soit toujours tangente à la courbe sans prendre de mouvement dans le sens de la longueur, chaque point de cette droite décrit une courbe ; la courbe qui sert de directrice à la droite mobile est une développée, et celle qui est décrite par un point quelconque de la droite, en est une développante.* » [ibid., p. 345]

Dans la suite du texte on trouve la distinction entre simple inflexion et double inflexion. Il y a aussi une référence à l'article « courbe à double courbure » de l'Encyclopédie, puis la reprise des calculs concernant les développées. On trouve également une note :

> « Il y a, à l'École polytechnique un modèle en fils de soie pour la description d'une courbe au moyen de deux de ses développées. La surface lieu géométrique des développées passe par un cercle et une ellipse situés dans des plans parallèles ; deux petits rubans étroits s'y appliquent librement et viennent se réunir en un point chargé d'un petit corps grave. On fait osciller le petit corps à la manière d'un pendule, et il décrit dans l'espace la courbe à double courbure, résultante de la nature des développées. » [ibid., p. 354]

Plus loin, l'article affirme :

> « la courbe plane n'est pas la seule qui ait pour l'une de ses développées la ligne des centres de courbure ; une courbe qui, appliquée sur une surface développable, est perpendiculaire à toutes les droites qu'on peut mener sur cette surface, jouit de la même propriété (Voyez la Théorie des Fonctions Analytiques) » [ibid., p. 357]

Il est curieux que Monge, qui n'intègre pas les résultats plus précis de Lancret (notamment quant à la recherche des développées), fasse allusion à un résultat de Lagrange qui infirme son mémoire sur les développées. D'autant que ce résultat de Lagrange va se révéler être erroné, comme cela sera signalé par Jacobi (voir infra page 137). Question de révérence ? Mais sans doute faut-il incriminer Hachette[10], qui fut en quelque sorte l'éditeur de Monge, et qui a sans doute adapté les travaux de Monge pour cet article.

Présentons également d'autres textes de géométrie, toujours en liaison avec le thème des courbes à double courbure.

(iv) **Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une application à la Théorie des Ombres et des Pénombres.**
Dans ce mémoire [Monge 1780] présenté le 11 janvier 1775 et postérieur au Mémoire sur les développées, bien que publié avant, Monge s'intéresse pour elles-mêmes aux surfaces développables. Son objectif est d'abord d'obtenir une caractérisation différentielle de ces surfaces, par plusieurs méthodes. Un tel type de résultat a été auparavant obtenu par Euler [1771] mais Monge trouve sans doute les méthodes de l'illustre géomètre insuffisamment... géométriques, et préfère les siennes. Il étudie ensuite les surfaces formées par des droites et qui ne sont pas développables (qu'il appelle surfaces gauches). Enfin, tout cela est appliqué à la théorie des ombres et pénombres dans le cas d'un corps lumineux de forme quelconque et d'un corps opaque de forme quelconque. Monge démontre que les zones d'ombre et de pénombre sont limitées par deux surfaces développables. Voir pour une étude plus complète l'article de Rémi Langevin [2002].

(v) **Leçons de mathématiques à l'École normale de l'an III** [Monge 1795b] **, Géométrie descriptive** [Monge 1799a]
Les leçons constituent en quelque sorte une version préliminaire de la « Géométrie descriptive », et développent une partie des méthodes que Monge a enseignées pendant des années à Mézières. En 1795, Monge donne d'abord vingt-quatre leçons (cours préliminaire de stéréotomie) à l'École polytechnique, puis il donne treize leçons à l'École normale. Ce sont ces leçons qui sont presque toutes publiées au Journal des Séances, puis rééditées en 1799 par Hachette. L'intérêt de l'édition originale se trouve également dans

[10] Jean Hachette, 1769-1834, encore un élève de Monge à Mézières, était professeur de géométrie descriptive à l'École polytechnique. C'est lui qui anime le Journal de l'École polytechnique, et la Correspondance sur l'École polytechnique.

les débats qui suivent chaque exposé. On peut y lire par exemple les remarques intéressantes et critiques du jeune Fourier sur la définition de la droite... Nous nous contenterons de signaler les quelques points qui sont en rapport avec notre sujet.

Dans ces leçons, il y a un aspect technique : des problèmes de construction sont exposés allant des problèmes élémentaires concernant droites et plans jusqu'à des problèmes plus ardus où interviennent des surfaces. Le talent pédagogique de Monge est indéniable. Il justifie longuement, dans sa première leçon, pourquoi il est préférable de repérer un point par ses distances à trois plans plutôt que par ses distances à trois droites ou à trois points. Son explication sur le mode de représentation des surfaces, par génération, est également très claire.

Prenons l'exemple de la leçon 12, qui traite des courbes à double courbure « parce qu'[une telle courbe] participe ordinairement des courbures des deux surfaces courbes, sur chacune desquelles elles se trouve en même temps, et dont elle est l'intersection commune[11] ». Monge commence par expliquer ce qu'est l'équation d'une surface, et comment l'élimination algébrique de z par exemple, entre les deux équations a son correspondant en géométrie descriptive, puisqu'elle donne l'équation de la projection de la courbe à double courbure « sur le plan perpendiculaire aux z ».

Dans le traité de géométrie descriptive [Monge 1799a], Monge reprend les éléments de sa théorie des courbes à double courbure, de façon résumée, sur quelques pages seulement (p. 108-113), sans aucun calcul. La description est toujours aussi claire et évocatrice, comme le sont aussi dans les pages qui suivent les reprises de ses travaux sur les surfaces et leur lignes de courbure. La planche A.6 montre à nouveau la description de la génération d'une développée d'une courbe à double courbure.

La géométrie descriptive, telle qu'elle est voulue par Monge, intègre donc quelques éléments de géométrie infinitésimale.

3 Conclusion

a. L'importance de Monge

Le mémoire sur les développées [1785] joue un rôle de première importance : il sera cité, repris par tous les successeurs de Monge, pendant les dizaines d'années qui vont suivre. Faisons le bilan de ce qu'il apporte à l'étude de nos problèmes.

– En ce qui concerne le vocabulaire, notamment la dénomination des courbes à double courbure, il marque une évolution. En effet, à l'occasion du paragraphe sur les inflexions que peut perdre une courbe non plane, Monge dit explicitement qu'une courbe à double courbure peut perdre ses deux courbures : en perdant la première elle devient plane, en perdant l'autre qu'elle devient droite. Cela constitue pour lui deux inflexions possibles

[11] Remarquons une nouvelle justification du terme « double courbure ». Cette fois, il est fait référence à la courbure de deux surfaces. Voir également la définition de l'Encyclopédie, page 224.

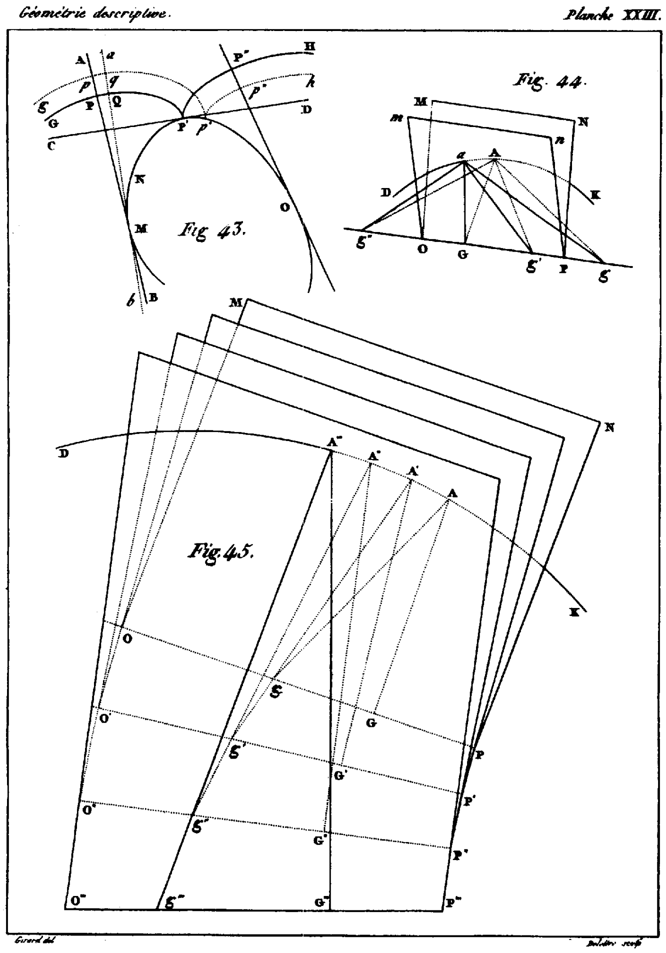


FIG. A.6 – La vingt-troisième planche de [Monge 1799] d'une courbe à double courbure. Il faut comparer cela à la situation d'une courbe plane qui ne présente qu'une seule sorte possible d'inflexion. Cependant, Monge n'identifie pas la « courbure » qui empêche à une courbe d'être plane, alors que la courbure qui l'empêche d'être droite est bien connue, c'est la courbure habituelle à laquelle est relié le rayon de courbure ordinaire.

– Quand une courbe de l'espace est-elle plane ? Monge donne une méthode effective, différente de celle de Tinseau, qui utilisait la surface des tangentes. Cette méthode est un peu compliquée, puisque Monge passe par l'étude de la surface polaire et utilise le fait qu'une courbe est plane si et seulement si sa surface polaire est un cylindre. La caractérisation obtenue est, en revanche, remarquablement simple à exprimer analytiquement.
– Le rayon de courbure est calculé par une méthode tout à fait différente de celle d'Euler : c'est la distance du point courant à l'axe polaire, intersection de deux plans normaux consécutifs. À l'occasion de l'étude de la surface polaire et de son arête de rebroussement, Monge introduit également la notion de sphère osculatrice, il en détermine le centre et calcule son rayon.

En plus du thème essentiel des courbes à double courbure et de leurs développées, on trouve également dans ce mémoire une des premières études géométriques des surfaces développables. On peut remarquer que curieusement, la première surface développable qui apparaît dans le texte est la surfaces des pôles, ce n'est pas la surface des tangentes. Cependant Monge souligne quand même la correspondance biunivoque entre une surface développable et son arête de rebroussement, et ce fait important sera pleinement utilisé par ses successeurs. Autre nouveauté importante : la notion d'enveloppe d'une suite de plans, ou plutôt la méthode nouvelle pour étudier ces enveloppes en utilisant le calcul différentiel, avec la notion de courbe caractéristique. C'est en généralisant cette méthode à des enveloppes de surfaces, et en faisant la liaison avec des solutions d'équations différentielles que Monge obtiendra les beaux résultats des mémoires suivants.

Un mémoire important, bien sûr, par son contenu, mais aussi par son style si caractéristique et beaucoup imité. Monge a un discours d'une clarté absolue qui ne peut qu'emporter la conviction, pourvu qu'on suive la vision du grand géomètre et qu'on accepte son mode de démonstration. Comme le dit René Taton :

> « Aucun des travaux antérieurs relatifs à la géométrie différentielle n'est comparable à celui-ci, qui, nourri d'une puissante sève géométrique et d'un sens tout à fait exceptionnel des choses de l'espace, annonce un renouvellement des méthodes dans ce domaine. » [Taton 1951, p. 181]

Cependant, si le style de Monge l'incite à faire peu de calculs (il est frappant de comparer la densité des formules mathématiques entre ce mémoire de Monge et celui d'Euler), ces calculs sont néanmoins faits, effectifs. Les formules très compliquées donnant les coordonnées du centre de la sphère osculatrice en sont un exemple. Monge ne cherche pas toujours à obtenir différentes expressions d'un même résultat. Il ne travaille qu'avec une variable indépendante, qui est la coordonnée x, et n'obtient donc pas d'expression générale. Remarquons également que, comme Clairaut, il commence par utiliser les dérivées des fonctions avant de traduire les résultats en utilisant des infinitésimaux.

b. Après Monge

Dans le chapitre suivant nous suivrons les travaux des héritiers directs de Monge. C'est encore le style de Monge que nous retrouverons chez Lacroix, Fourier et Lancret sur des problèmes qu'il a soulevés et initiés et qui recevront des réponses.

Pour citer à nouveau René Taton :

> « Le nouvel état d'esprit introduit par Monge dans les recherches mathématiques : vision très claire de la réalité des figures géométriques étudiées et collaboration constante et harmonieuse entre les ressources de l'analyse et de la géométrie. » [Taton 1950a, p. 10]

Cependant, des interrogations naissent sur les méthodes de Monge, tant géométriques qu'analytiques. Certes, nous l'avons remarqué à de nombreuses reprises, l'effort de vision que nous demande Monge, la façon dont nous devons nous-mêmes faire bouger les figures dans l'espace, plier et déplier des surfaces développables, peut nous convaincre de façon intuitive mais peut également susciter des doutes sur la rigueur des justifications.

Monge a, comme ses prédécesseurs et ses successeurs, une vision des courbes comme polygones avec comme on l'a vu pour son étude des développées, la première intervention d'un polyèdre articulé formé par des parties de plan osculateur. Ce qu'il appelle « élément » d'une courbe a un statut un peu imprécis. Quand il s'agit de tangente, c'est un « petit » segment, quand il s'agit de courbure, c'est un « petit » arc de cercle.

Par ailleurs, on ne peut être pleinement convaincu par des raisonnements qui disent que deux tangentes consécutives ont un point commun car, justement, nous savons que pour une courbe à double courbure, ce n'est pas le cas. Deux tangentes proches et distinctes sont non coplanaires. Nous en reparlerons à la fin du chapitre suivant.

Chapitre B

De la seconde courbure à la torsion

1 Introduction

Le mémoire de Monge sur les développées, publié tardivement comme nous l'avons vu, est repris à partir de 1795 dans des textes didactiques, en partie dans les *Feuilles d'Analyse appliquées à la géométrie* [Monge 1795, 1801], puis dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* » [Monge 1807, 1850]. Il subsiste des points à éclaircir.

Les progrès vont se faire entre 1780 et 1806, période riche à tout point de vue : historique, bien sûr, scientifique également ; période qui verra également s'installer en France le début d'un enseignement supérieur scientifique de haut niveau et qui atteint un public élargi. Les héros de notre histoire, Monge bien sûr, mais également Lacroix, Lancret et Fourier seront en première ligne à tous les sens du terme, dans ce foisonnement d'événements et de découvertes.

a. Les deux courbures

Nous avons vu dans le chapitre précédent que Monge faisait allusion à deux sortes de courbures d'une courbe de l'espace. Plus précisément, Monge évoque deux sortes d'*inflexions*, deux façons différentes de perdre une courbure. Il distingue les points de *simple inflexion*, lorsque la courbe devient plane, et ceux de *double inflexion* lorsqu'elle devient droite. Monge donne alors la façon de repérer les points de simple inflexion puis les points de double inflexion. Dans ce second cas, il s'agit d'annuler (ou de rendre infinie) une quantité clairement identifiée, la courbure, inverse du rayon de courbure. La simple inflexion ne correspond pas à l'annulation d'une autre « courbure » clairement nommée ou vraiment identifiée. Ce sera l'aboutissement de la période qui nous intéresse que de donner un sens géométrique précis à cette seconde courbure, recherche qui trouvera sa conclusion dans les travaux de Lancret.

b. Le problème des développées

La théorie des développées des courbes à double courbure n'a pas été conclue de façon complètement satisfaisante par Monge. Bien sûr, la partie géométrique est claire ; les développées d'une courbe plane ou à double courbure sont sises sur une surface développable, lieu des pôles de la courbe à double courbure. De plus, une développée est alors sur cette surface « *la plus courte entre ses extrémités que l'on puisse mener sur cette surface* ». D'un point de vue analytique, Monge obtient aisément l'équation de la surface développable, puis indique le moyen général d'obtenir les courbes les plus courtes entre leurs extrémités, qui sont « *formées par une droite pliée librement* » sur la surface.

Cela demande dans le cas général, la résolution d'une équation aux différences secondes. Pour le cas particulier des développées des courbes planes, Monge indique également comment procéder de façon plus simple, mais il subsiste une équation aux différences premières. Dans les années qui suivent la parution du mémoire sur les développées, on verra que la théorie de Monge est connue de tous mais finalement pas toujours complètement acceptée ou même comprise. C'est encore Michel-Ange Lancret qui donne une réponse satisfaisante à la question de l'intégration de l'équation des développées. Il cherche même à généraliser la notion de développée d'une courbe à double courbure dans son second mémoire, sa dernière contribution mathématique avant une mort prématurée.

c. Le problème de la méthode

Ce qui est intéressant également dans la période envisagées dans ce chapitre, c'est de voir comment les progrès réalisés conduisent ou amènent des changements de méthode. On peut en particulier mettre en avant trois aspects :

- La géométrie analytique dans l'espace est insuffisamment développée lorsque Monge écrit son mémoire. D'ailleurs, il est obligé de consacrer plusieurs paragraphes à l'établissement de formules de base (équation d'un plan perpendiculaire à une droite, distance d'un point à une droite). De nombreux mémoires postérieurs, comme celui de Lacroix [1790], commencent également par des calculs. Pour Lacroix, il s'agit d'exprimer l'angle entre deux droites de l'espace. Petit à petit, ces méthodes seront familières, entreront dans le bagage des auteurs et seront largement diffusées par l'enseignement.
- Le calcul différentiel, notamment du second ordre, conduit à bien des hésitations : le rôle joué par la « variable indépendante » (quand elle est précisée) n'est pas toujours bien compris, et oblige parfois à des acrobaties. La tentative de Lagrange de se passer des infiniment petits va rencontrer un grand succès en prétendant s'affranchir des ambiguïtés ou imprécisions du calcul infinitésimal traditionnel. Nous verrons que, dans le domaine des courbes à double courbure, il y aura résistance.
- Enfin tous les géomètres de la période continuent à présenter les raisonnements géométriques en considérant les courbes comme polygones ayant une infinité de côtés infiniment petits (à la rare exception, encore, de Lagrange[1]). Nous verrons cependant, au cours de ce chapitre, qu'une certaine évolution va se produire dans cette méthode que

[1] « En regardant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée. » [Lagrange 1797, p.17]

nous appelons « méthode de la courbe-polygone ».

2 Lacroix, le Nestor des mathématiques

Sylvestre François Lacroix (1765-1843), un des disciples de Monge, est surtout connu pour son influence en tant qu'enseignant, auteur de manuels et académicien.

a. Le manuscrit de 1790

Ce texte est intitulé « Mémoire sur les surfaces développables et sur les équations aux différences ordinaires à trois variables » [Lacroix 1790]. Long d'une vingtaine de pages, il est signé de « M. Delacroix, correspondant de l'Académie, professeur de Mathématiques de l'école d'artillerie à Besançon » et est lu le 1er septembre 1790. On trouvera ce texte en annexe B (page 226). L'auteur de ce mémoire est alors âgé de 25 ans et membre correspondant de Condorcet depuis août 1789. Lacroix va y faire référence à plusieurs reprises, par exemple dans son rapport sur les travaux de Lancret, mais son texte n'a pas été publié avant les travaux de Fourier et de Lancret. Lacroix s'est décidé à l'intégrer en partie dans la seconde édition de son traité du calcul différentiel [Lacroix 1810, §357]. L'objectif du texte est d'étudier, par les moyens de l'analyse, les courbes tracées sur des surfaces développables. Plus précisément, voici ce que dit Lacroix :

> « Étant donné une courbe quelconque sur une surface développable, trouver ce qu'elle devient dans le développement de cette surface et réciproquement, une courbe étant donnée sur un plan trouver ce qu'elle devient lorsqu'on l'enveloppe sur la surface donnée. » [Lacroix 1790, f. 1]

Le mémoire comprend quinze paragraphes. Dans le premier, les propriétés de base des surfaces développables sont rappelées puis, dans le second, Lacroix établit de façon un peu laborieuse le calcul de l'angle entre deux droites sécantes. Ce résultat est important, et Lacroix l'utilise à plusieurs reprises. Un mauvais choix pour les équations initiales conduit à des formules peu élégantes, ce que l'auteur reconnaît dans la marge. Dans l'article 3, Lacroix étudie une courbe à double courbure tracée sur un cylindre. Il suppose que ce cylindre a un axe de direction quelconque, et que, développé, il est rapporté à des coordonnées rectangulaires u et v. Si le point courant de la courbe est (x', y', z'), il utilise la conservation des distances et des angles par développement pour obtenir les relations

$$\begin{cases} \sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2} = \sqrt{du^2+dv^2}, \\ \frac{\frac{1}{a}dx'+\frac{1}{b}dy'+dz'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}} = \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}. \end{cases}$$

Notons qu'il manque dans la seconde équation la constante $\lambda = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1}$ au dénominateur. Connaissant l'équation de la courbe à double courbure, en se donnant z et y en fonction de x, on peut obtenir la relation entre u et v qui donne son équation dans le plan. En particulier,

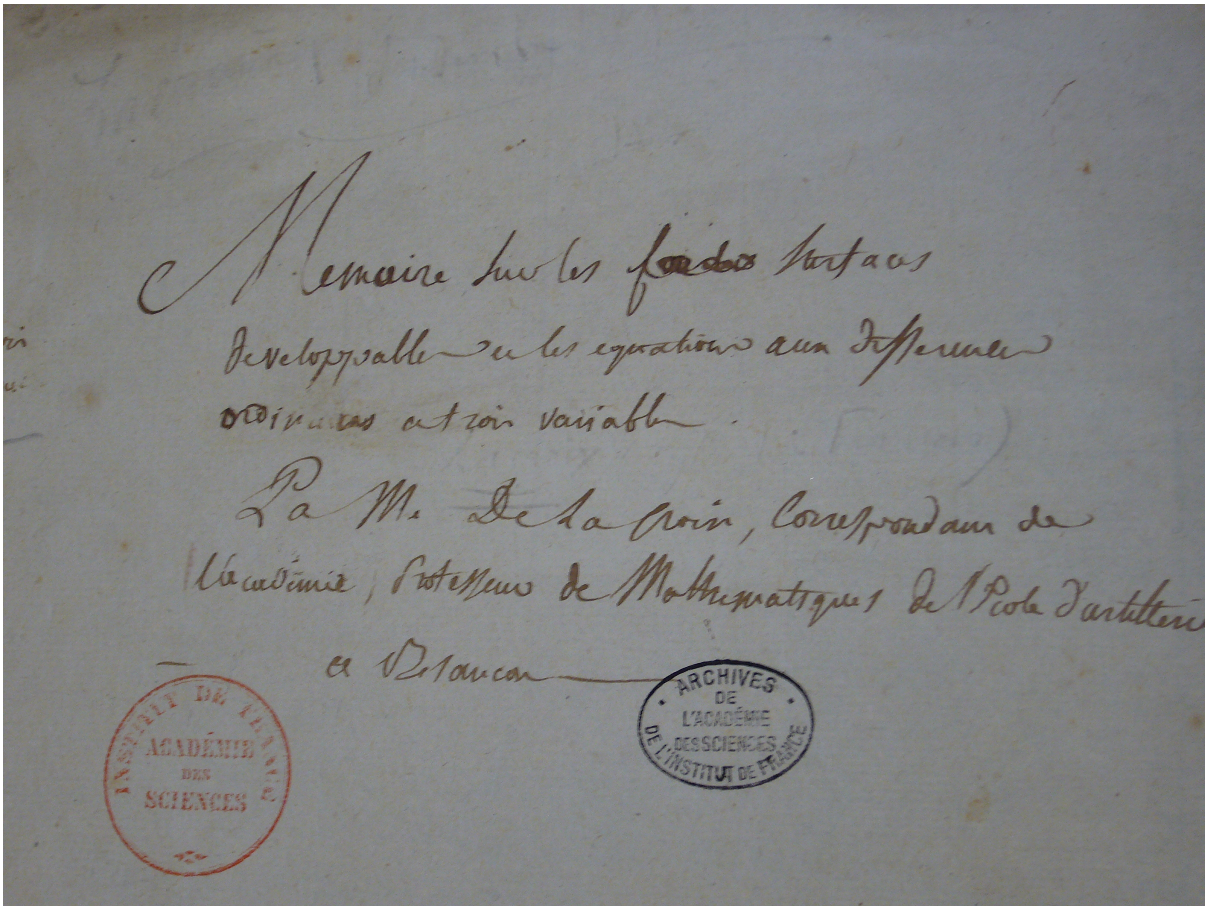


FIG. B.1 – Le manuscrit [Lacroix 1790]

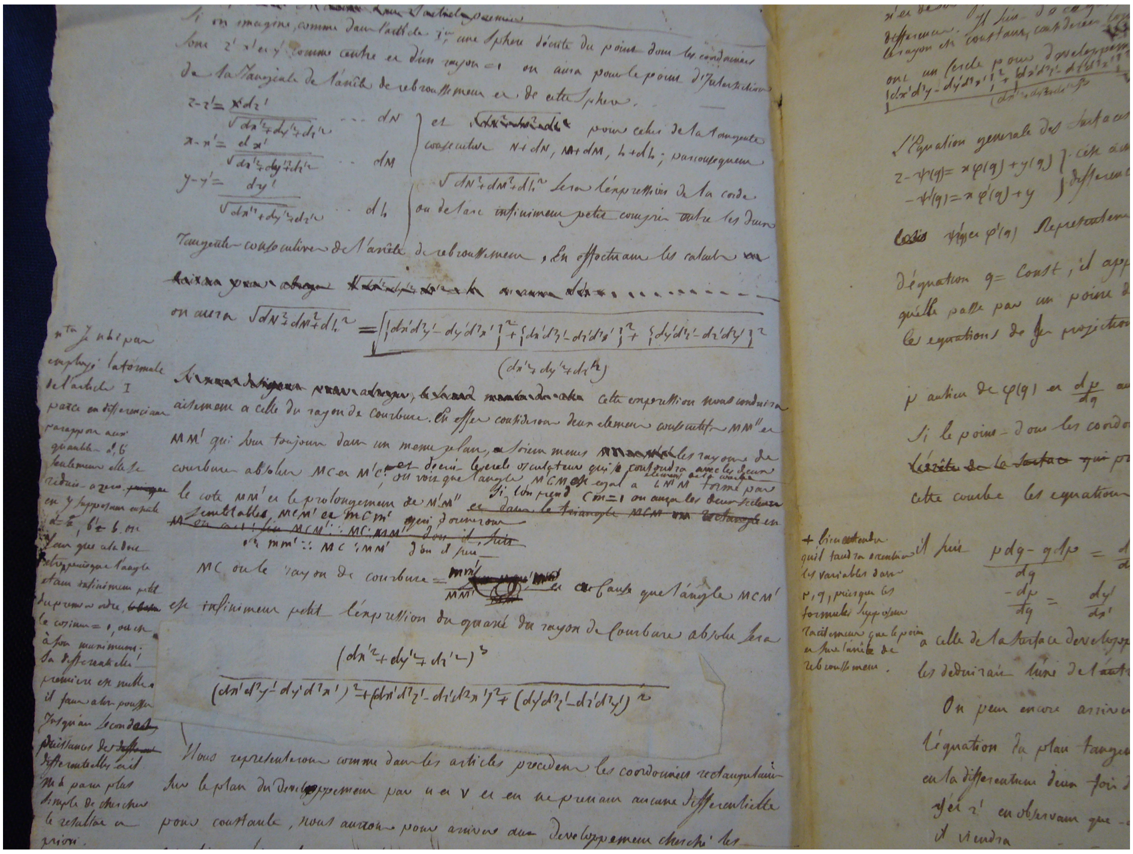


FIG. B.2 – La suite du manuscrit [Lacroix 1790]

Lacroix prend l'exemple du cas où le développement est une droite et il obtient l'équation différentielle de la courbe à double courbure, qui est donc une hélice. Pour simplifier, en prenant un axe vertical, l'équation s'écrit

$$dx'^2 + dy'^2 = (\mathrm{cst})\, dz'^2$$

qui est bien l'équation différentielle des hélices. Au cours de son calcul, Lacroix est amené à faire la remarque suivante :

> « Il n'est pas besoin d'avertir que $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ ne sont point des différences partielles de z' mais seulement les rapports des différentielles des coordonnées prises dans les équations des projections de la courbe à double courbure proposée. D'ailleurs lorsque nous aurons à parler de différences partielles nous ferons $dz = pdx + qdy$, p et q exprimeront alors les coefficients différentiels du premier ordre. » [ibid., f.3]

Malgré la précaution rhétorique, on sent bien que ces abus et/ou confusions de notations sont des questions sensibles. Lacroix en reparlera dans ses écrits ultérieurs. On pourra par exemple se reporter aux longues discussions concernant l'usage des différentielles dans le cadre de fonctions composées dans le traité [Lacroix 1797, p. 163-170].

L'article IV reprend la même question avec un choix différent. Les coordonnées u et v sont choisies autrement : l'une est dans la direction des arêtes, l'autre dans la direction perpendiculaire. Cela n'apporte pas de simplification notable.

Après l'examen des surfaces coniques, on passe au cas général. Lacroix commence par retrouver l'expression du rayon de courbure d'une courbe à double courbure : il calcule l'arc entre deux tangentes consécutives grâce à la formule obtenue en introduction et obtient l'expression

$$\frac{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^3}{(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2+(dz'd^2y'-dy'd^2z')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}$$

pour le carré du rayon de courbure « absolu ». Ce n'est pas l'expression de Monge, qui considère que x' est la variable indépendante, mais on retrouve une des expressions d'Euler.

Lacroix en revient alors au but initial : que se passe-t-il si la courbe que l'on cherche à développer est l'arête de rebroussement d'une surface développable ? L'idée est très simple. Lacroix explique que quand on déplie une surface développable, l'arête de rebroussement conserve sa courbure absolue. On obtient donc clairement

$$\frac{(dud^2v-dvd^2u)^2}{(du^2+dv^2)^3}=\frac{(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2+(dz'd^2y'-dy'd^2z')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^3}$$

qui exprime la conservation de la courbure, et

$$du^2+dv^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2$$

qui exprime la conservation des distances. Ici, x', y' et z' sont les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement dans l'espace avec, par exemple, z' fonction de x' et de y', et u, v sont les coordonnées du développement de cette arête dans le plan.

Dans le paragraphe suivant, Lacroix rappelle comment on obtient l'équation de l'arête de rebroussement d'une surface développable, suivant en cela la méthode de Monge.

L'article VII donne la réponse au problème posé initialement. Soit une courbe dessinée sur une surface développable ; à l'aide des équations de l'arête de rebroussement de cette surface développable, on obtient l'équation de la courbe plane obtenue en déroulant la surface sur un plan. Les coordonnées sur le plan sont u, longueur d'arc de l'arête de rebroussement, et v mesure, sur une tangente à l'arête de rebroussement, la distance entre le point de la courbe et le point de tangence. Ce sont les coordonnées que l'on utilise habituellement sur la surface des tangentes d'une courbe gauche. Lacroix continue en supposant cette fois qu'on ne dispose que de l'équation différentielle de la surface ; les formules deviennent alors rapidement inextricables. Le problème réciproque – connaissant la courbe plane, trouver l'équation de la courbe à double courbure lorsqu'on enroule le plan sur la surface développable – est également traité.

Même si ses développements sont beaucoup plus complets que les calculs de Monge, on ne peut dire que Lacroix a résolu la question de l'équation des développées. Toutes les expressions qu'on peut obtenir avec ses formules contiennent des différentielles et il sera en définitive nécessaire de résoudre une équation différentielle. En revanche, cela explique également le sens de la fin du manuscrit.

En effet, à partir du douzième paragraphe, le thème du mémoire s'infléchit, Lacroix se propose d'étudier les équations aux différences ordinaires en trois variables qui représentent des courbes à double courbure. Nous reviendrons sur cette partie dans le chapitre III B (voir page 132).

En conclusion, ce mémoire de Lacroix élargit les travaux de Monge en s'intéressant à un problème plus général que la seule recherche des développées. L'idée de base est, en définitive, que dans le processus de développement d'une surface développable, il y a conservation des éléments de distance, et des éléments d'angle. C'est l'idée décisive qui conduit tous les calculs de Lacroix. Au total, peu de géométrie pure dans ce manuscrit, où Lacroix se montre plus l'héritier du Monge des mémoires de 1784 que du Monge du Mémoire sur les développées. La conclusion du manuscrit montre bien les centres d'intérêt de Lacroix :

> « Les questions que nous avons indiquées sur les courbes à double courbure tracées sur des surfaces développables conduisent à des équations différentielles à trois variables élevées à des ordres supérieurs dont il serait peut être intéressant de connaître l'ensemble des solutions sous une forme algébrique. » [ibid. f. 12]

b. Essai de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes

Ce petit livre [Lacroix 1795], le premier publié par Lacroix, peut être considéré comme le premier ouvrage édité présentant la géométrie descriptive inventée par Monge. Son titre complet précise d'ailleurs : « (ou éléments de géométrie descriptive) ». Dans la préface, Lacroix annonce que le but de son travail est d'écrire un traité qui va *« résoudre une suite de questions élémentaires à l'instar de celles qu'offrent les livres de Géométrie par rapport aux lignes. »* Mais ce sera un traité rigoureux, au contraire des traités pratiques (ceux de taille des pierres, par exemple) :

> « Il me reste à parler de la conformité qu'on trouvera entre la plus grande partie de mon ouvrage et les leçons données à l'École normale par le C.en Monge. Elle ne pouvait manquer d'avoir lieu [...] mais on auroit tort d'en conclure que mon travail est calqué sur le sien ; car il existe des personnes qui tiennent de moi depuis plusieurs années tous les matériaux que j'ai employés,[2] et mon adjonction à l'enseignement de la Géométrie descriptive à l'École Normale n'a fait que m'engager à mettre en ordre ce que j'avais écrit sur ce sujet. » [Lacroix 1795, p. XXIV]

ce qui contredit l'anecdote rapporté par Théodore Olivier (voir page 207).

Hormis la préface et les planches, le traité comprend 116 pages. Donnons-en une brève description.

[2]Dans la seconde édition, la fin est remplacée par :« J'ai pensé à les mettre en ordre lorsque j'ai été adjoint à l'enseignement de la géométrie descriptive dans l'École normale.

Première partie. Notions préliminaires. Du plan et de la ligne droite. De la sphère. Les premiers problèmes sont des problèmes classiques de géométrie descriptive (intersection de plans, de droites, etc.). Il y a aussi des théorèmes (lorsque deux lignes sont parallèles dans l'espace, leurs projections sur un même plan sont parallèles entr'elles.). On trouve par exemple le problème : deux plans étant donnés, trouver l'angle qu'ils font entre eux : « Voici le détail d'une construction qui m'a été communiquée par le citoyen Monge, et qui est une des plus simples qu'on puisse trouver pour ce cas ». On trouve aussi des calculs : « La somme des quarrés des cosinus des angles qu'un plan quelconque fait avec trois autres perpendiculaires entr'eux est égale au quarré du rayon ». [ibid., p.29]

Deuxième partie : De la génération des surfaces courbes. Des surfaces coniques. Des surfaces cylindriques. Des courbes à double courbure. Donnons plus de précisions sur cette partie qui nous intéresse directement. Lacroix décrit une courbe à double courbure comme intersection de deux cylindres :

> « Si l'on conçoit une suite de points pris sur la surface d'un cylindre d'après une loi donnée, l'ensemble de ces points formera une courbe, qui le plus souvent ne sauroit être comprise toute entière dans un même plan ; la projection horizontale de cette courbe sera la base de ce cylindre sur le plan horizontal. Imaginons ensuite que par chacun des points dont on vient de parler, on abaisse des perpendiculaires sur le plan vertical, l'ensemble de ces perpendiculaires formera une seconde surface cylindrique qui rencontrera la première suivant la courbe déterminée par la suite des points proposée. » [ibid., p. 67]

On a déjà remarqué que cette réciproque pouvait être inexacte. Lacroix donne ensuite l'exemple de l'intersection d'un cylindre à base circulaire et d'une sphère. En réalité, il s'exprime comme Clairaut, et utilise l'image d'un compas dont la pointe est posée sur le cylindre. Plus loin, à propos de l'expression « double courbure », il indique :

> « On a donné le nom de courbe à double courbure à celles dont tous les points ne sont pas dans le même plan, parce qu'étant le résultat de l'intersection de deux surfaces courbes, elles partagent la courbure de l'une et de l'autre.
>
> On rend cela sensible par une image bien frappante : on suppose une courbe tracée sur un plan, et que ce plan vienne à se gauchir ou qu'il soit roulé d'une manière quelconque, alors la courbe proposée prend une nouvelle courbure, qui résulte de celle que les circonstances ou la volonté ont donné au plan. » [ibid.,p. 69]

Relevons au passage une contradiction : dans le premier alinéa, la double courbure est l'intersection de deux surfaces courbes. On a déjà trouvé cette interprétation et on en connaît les insuffisances. Dans le second alinéa, il en va tout autrement. Lacroix décrit bien, de façon encore intuitive et non quantitative, la seconde courbure[3] qu'ont les courbes à double courbure. Cette vision articulée se retrouvera chez Fourier. Il ne s'agit plus des courbures des projections,

[3] La première étant la courbure habituelle.

comme pour Pitot ou Clairaut, la seconde courbure dont parle le mémoire de Monge sur les développées commence a prendre corps.

Des surfaces de révolution. Des intersections des surfaces courbes. Suite de la génération des surfaces courbes. Dans ces paragraphes, Lacroix parle des surfaces engendrées par le « mouvement d'une ligne droite [...] déterminé toutes les fois que cette ligne sera assujettie à glisser le long de trois courbes données. [...] elles sont comprises sous le nom de surfaces gauches ; le coin, conoïde de Wallis[4] est une de ces surfaces. » [ibid., p. 87]

Lacroix décrit ensuite des surfaces développables (sans déchirement ni duplicature). Le paragraphe 97 reprend l'explication de Monge (qui est bien sûr cité) : toute surface développable est enveloppée par la famille des plans normaux à une ligne à double courbure. De même, toute surface développable est l'ensemble des tangentes à son arête de rebroussement.

Du développement des surfaces. Dans une note, Lacroix fait une allusion à son mémoire [1790] sur le développement d'une courbe sur une surface développable : cette courbe « est rapportée à l'arête de rebroussement par les tangentes mêmes de cette arête ».

> « (*) J'ai traité de cette matière analytiquement dans un Mémoire lu à l'Académie en 1790, et j'y ai donné les formules d'où dépend la transformation qu'une courbe quelconque subit en passant d'un plan sur une surface développable et réciproquement. » [ibid. ,p. 100]

c. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, par S.F. Lacroix

Cet ouvrage [Lacroix 1797] est le plus important de Lacroix. Il connaîtra de nombreuses éditions et diverses adaptations, dont le célèbre *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, qui en constitue la version abrégée destinée aux étudiants, en particulier de l'École polytechnique. Ce traité est le grand ouvrage de cette fin de siècle avec la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange [1797] ; nous n'examinerons pour commencer que la première édition, en nous limitant à ce qui concerne notre sujet. L'édition suivante [Lacroix 1810] va en effet s'enrichir des résultats obtenus par Lancret, nous y reviendrons plus loin.

Fait remarquable, il y a au début du traité, juste après la longue préface, une bibliographie citant les textes originaux, des mémoires de différentes académies par exemple. Pour les courbes à double courbure, sont cités [Clairaut 1731] et [Monge 1785]. C'est un des rares ouvrages qui, à cette époque fait une citation quasi exhaustive de ses sources.

Dans le traité de Lacroix, on rencontre également pour la première fois l'expression « géométrie analytique » :

> « En écartant avec soin toutes les considérations géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existait une manière d'envisager la Géométrie, qu'on pourrait appeler **Géométrie analytique**, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement ana-

[4] il en donne la définition : c'est la surface engendrée par les droites qui rencontrent un cercle et une droite fixes tout en restant parallèles à un plan donné.

lytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa mécanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement. » [Lacroix 1797, p. XXV]

La référence à Lagrange est effectivement omniprésente dans cette première édition du traité. Cependant Lacroix reste dans une certaine tradition puisqu'il annonce que les applications du calcul différentiel à la géométrie utilisent trois approches successives :

– une méthode qui n'utilise pas l'infini, celle de Lagrange
– la méthode des limites,
– la méthode des infiniment petits.

Lacroix remarque néanmoins que

> « Cette dernière, lorsqu'elle a été bien expliquée, est précieuse pour la facilité qu'elle donne à résoudre de nouvelles questions ; facilité dont la théorie des courbes à double courbure de Monge, que j'ai exposée, offre un exemple remarquable. » [ibid., p. XVII]

Sur cette distinction de méthodes et le parti que prend alors Lacroix, on peut dire comme Carl Boyer « *qu'il accepte la métaphysique de Lagrange, il adopte la notation différentielle de Leibniz.* » [Boyer 1949, p. 265]

Nous avons déjà signalé que Lacroix prend longuement soin d'expliquer les difficultés et ambiguïtés du calcul infinitésimal, notamment celles amenées par les fonctions composées. C'est ainsi qu'il fait une distinction entre deux notations $\frac{du}{dt}$ et $\frac{d(u)}{dt}$: dans le premier cas c'est « le coefficient différentiel de u en ne faisant varier que les t qui s'y trouvent explicitement » [ibid., p. 163], tandis que dans le second cas on fait aussi varier les quantités x, y qui dépendent de t.

Lacroix explique aussi comment passer d'une écriture à l'autre. On peut remarquer que l'exemple qu'il prend pour illustrer la méthode est le passage de

$$\frac{(dt^2+dx^2+dy^2)^3}{(dtd^2x-dxd^2t)^2+(dtd^2y-d^2tdy)^2+(dyd^2x-dxd^2y)^2}$$

à

$$\frac{(1+x'^2+y'^2)^3}{x''^2+y''^2+(x'y''-x''y')}. \qquad \text{[ibid.,p. 166]}$$

On a reconnu une expression du carré du rayon de courbure d'une courbe à double courbure. Lacroix prend soin cependant de ne pas masquer les difficultés :

> « Il y a une différence entre les formules qui subissent les transformations et celles qui s'y refusent, que les premières conservent la même valeur soit qu'on y suppose dx ou dy constant, tandis que les autres changent. » [ibid.,p. 160]

Cette remarque est suivie de plusieurs exemples.

Les applications à la géométrie. Nous en venons maintenant aux applications à la géométrie. Lacroix fait une étude très complète des courbes planes grâce aux développements en série des coordonnées. Notons la remarque suivante :

> « Non seulement une courbe est donnée lorsqu'on a son équation, soit en coordonnées respectivement parallèles à deux droites fixes, soit en coordonnées polaires ; mais elle l'est encore lorsqu'on a une relation quelconque entre deux quantités déterminées par sa nature.[...] De même une relation entre le rayon de courbure et l'arc d'une courbe doit être envisagé comme une équation de cette courbe et elle aurait ce caractère remarquable, que l'une des variables seroit entièrement inhérente à la courbe. » [ibid., p. 418]

Cet extrait montre que la notion de courbure d'une courbe plane est bien considérée par Lacroix comme fondamentale et comme portant en elle-même toute la géométrie de la courbe.

À partir de la page 422, Lacroix procède à un réexamen des questions précédentes, à la manière de Leibniz, en considérant les courbes comme des polygones avec des côtés infiniment petits. On retrouve ainsi de façon rapide les rayons osculateurs, développées. Cette nouvelle méthode est appliquée à une étude assez générale d'une courbe qui roule sur une autre courbe.

Dans le chapitre 5, Lacroix passe à l'étude des objets de l'espace. Après un hommage à Clairaut, Euler et Monge, il reprend les calculs fondamentaux, équations de plans et de droites, réduction des équations des quadriques puis utilisation du calcul différentiel pour les surfaces avec notamment l'étude de la courbure des sections par des plans perpendiculaires au plan tangent. En particulier, il explicite l'existence d'un minimum et d'un maximum des rayons de courbure. L'étude de deux normales voisines amène à la notion de ligne de courbure : elles correspondent à deux normales consécutives concourantes, mais aussi à des courbures extrémales. Il étudie cônes et cylindres, vus comme enveloppes d'une famille de plans, les surfaces engendrées par des sphères puis surfaces développables. Lacroix signale qu'il a déjà étudié la question des surfaces développables dans ses *« Essais de Géométrie »* .

Le chapitre se poursuit par l'étude des courbes à double courbure [ibid.,p. 504], qui vient donc après l'étude des surfaces. Lacroix obtient les équations des tangentes et de la surface qu'elles forment ; il observe que si c'est un plan la courbe n'est pas une courbe à double courbure. Le plan osculateur est obtenu par une condition de contact (l'abscisse jouant le rôle de paramètre)[5]. Comme pour les courbes planes, Lacroix continue alors son exposé en revenant aux méthodes traditionnelles, à la manière de Monge :

> « Les courbes à double courbure peuvent être considérées comme des polygones, dont trois côtés consécutifs ne sauroient être dans le même plan ; le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente, de même que pour les courbes planes ; deux tangentes consécutives TM et tm, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qui n'est autre que le plan osculateur. » [ibid., p. 507]

Grâce à cette méthode, l'équation du plan osculateur est obtenue de façon bien plus rapide ; Lacroix l'écrit également de façon invariante, en prenant toutes les différentielles comme variables en même temps. Il décrit ensuite la polaire développable, mais à la différence de

[5]Nous étudierons dans le chapitre suivant, de façon détaillée, la théorie du contact qui apparaît dans le Traité, théorie issue directement des idées de Lagrange.

Monge, il prend comme plans normaux les médiatrices des côtés de la ligne polygonale et retrouve les deux cas particuliers des courbes planes et des courbes sphériques (la polaire développable est un cylindre ou un cône). Il introduit la notion de développée en commençant par le cas des courbes planes, à la différence de Monge. Ses arguments sont calqués sur ceux de son prédécesseur et le cas des courbes gauches vient maintenant comme généralisation du cas des courbes planes.

Lacroix se tourne ensuite vers les calculs analytiques.

Le calcul du rayon de courbure. Il va calculer le rayon de courbure d'une façon assez originale, [ibid.,p. 513] :

– Considérant une sphère de centre le point courant de la courbe (x, y, z) et de rayon a, il note u l'expression
$$u = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$
et dit que la sphère passera par quatre points consécutifs si outre cette égalité on a
$$du = 0, \quad d^2u = 0, \quad d^3u = 0.$$
Cela donnera la sphère osculatrice à la courbe.

– Mais si l'on se contente de trois points consécutifs et que l'on ajoute que le centre est dans le plan osculateur, on obtiendra le centre de courbure et donc le rayon de courbure.

L'expression obtenue pour ce rayon, qu'il appelle rayon de courbure absolu et qui est le plus petit des rayons de courbure, est
$$u^2 = \frac{ds'^3}{(dy'd^2z' - dz'd^2y')^2 + (dz'd^2x' - dx'd^2z')^2 + (dx'd^2y' - dy'd^2dx')^2}.$$

Lacroix donne ensuite l'expression des coordonnées du centre de courbure (la longueur d'arc jouant un rôle privilégié), et vérifie que deux tangentes consécutives au lieu des centres ne se coupent que si la courbe est plane. Encore une fois, la méthode est originale. Lacroix écrit les équations du rayon de courbure, par la méthode habituelle il obtient celle du rayon suivant et obtient la condition pour que ces deux rayons consécutifs soient sécants. Après réduction, cela s'écrit [ibid. p. 518] :
$$dz'd^2y'd^3x' - dz'd^3y'd^2x' + dy'd^2z'd^3x' - dy'd^3z'd^2x' + dx'd^2y'd^3z' - dx'd^3y'd^2z' = 0$$
expression dans laquelle il reconnaît la condition qu'on obtient en écrivant que le plan osculateur passe par quatre points consécutifs : le lieu des centres n'est donc pas une développée, sauf si la courbe est plane.

Il termine par la manière d'obtenir l'équation d'une développée, mais comme pour Monge, il faut pour cela « faire usage des méthodes du calcul intégral ». Vient ensuite le passage standard sur les courbes à double courbure qui :

> « sont susceptibles de deux espèces d'inflexion ; la première est relative à la cour-

> bure de la surface développable que forme l'ensemble de leurs tangentes, et a lieu lorsque le rayon de courbure de cette surface passe du positif au négatif et réciproquement[6]. La seconde espèce d'inflexion des Courbes à double courbure, répond au cas où leur rayon de courbure absolu change de signe. Cette matière demanderoit pour être traitée avec exactitude et clarté, quelques détails, dans lesquels je ne puis entrer maintenant ; il me suffit d'avoir mis le lecteur sur la voie de ces recherches, dont l'application d'ailleurs n'est pas fréquente. » [ibid., p. 519]

Il ne s'agit pas cependant d'une simple répétition. Lacroix identifie la courbure relative à la première inflexion, ce que ne faisait pas Monge. Pour lui, c'est la courbure de la surface développable que forme l'ensemble des tangentes. La note précise un peu ce qu'il faut comprendre :

– en un point d'une surface, il y deux rayons de courbure extrémaux, portés par des lignes de courbure orthogonales. C'est la théorie de Monge, expliquée au début du chapitre.
– Pour une surface développable l'une des courbure est nulle, portée par chacune des droites de la surface. L'autre courbure donc est portée par la direction orthogonale, c'est celle dont parle Lacroix.

Ce point de vue exprimé de façon très succincte sera repris et un peu précisé par Lacroix dans son *Traité élémentaire* :

> « La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leur tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. » [Lacroix 1802, §164]

d. Conclusion

Après cette présentation, faisons un bilan. Sur le plan géométrique, Lacroix reste proche de la démarche de Monge, mais nous avons noté une évolution dans son manuel de géométrie descriptive [Lacroix 1795]. La description qu'il fait d'une courbe à double courbure, comme polygone dans l'espace, obtenu en « dépliant » un polygone plan, est une première approche encore imprécise de la fameuse seconde courbure.

Sur le plan de la géométrie analytique et de l'analyse, les choses sont différentes. Le *Traité de calcul différentiel* est un ouvrage considérable qui reprend les innovations de Lagrange et qui est à la fois une somme des connaissances de l'époque, un ouvrage didactique, et pour notre sujet, une reprise plus complète et plus générale du mémoire de Monge. En particulier, nous avons vu comment Lacroix prolonge les calculs de Monge en y apportant son propre point de vue. Le mémoire de 1790 nous a montré également une vision originale de la correspondance entre des courbes de l'espace et leur enroulement sur une surface développable.

Par l'intermédiaire de son enseignement, de son traité, et du traité élémentaire qui est plus

[6] « Les inflexions des surfaces se reconnoissent par le changement de signe de leurs rayons de plus grande et de moindre courbure ; et la position des centres de ces courbures, fait voir de quel côté sont tournées les concavités de la surface proposée. »

proche de son cours de l'École polytechnique, Lacroix sera aussi le référent de tous ses élèves et lecteurs qui pour certains seront aussi des contributeurs importants de notre sujet.

3 Joseph Fourier

Joseph Fourier (1768-1830) n'est pas vraiment connu pour ses travaux géométriques. Ses premières recherches portent sur la résolution des équations algébriques. Il a joué néanmoins un rôle important dans notre histoire : Lancret, Lacroix et d'autres lui attribuerons un « théorème » inédit. La contribution de Fourier pourrait être considérée comme relativement mince, elle a cependant eu un rôle d'élément déclencheur. C'est sans doute pendant la campagne d'Égypte que Fourier et Lancret ont prolongé et approfondi la théorie des développées des courbes à double courbure sous le patronage de Monge. On n'a pas de confirmation de telles recherches communes. Par exemple, aucun mémoire, aucune communication de Fourier, de Monge ou de Lancret sur ce thème à l'Institut d'Égypte[7]. Les thèmes géométriques n'étaient pas pourtant absents des sujets étudiés. C'est cependant à l'institut d'Égypte que Monge a fait, en septembre 1799 une communication sur les propriétés d'une surface courbe particulière à la théorie des équations aux dérivées partielles, celle dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère. Cette recherche fut publiée dans le *Journal de l'École polytechnique* en juin 1802.

D'après Louis Charbonneau [1994], les trois textes que nous allons plus particulièrement examiner auraient été rédigés en janvier 1801, dans la dernière partie du séjour Égyptien de Fourier. En 1801, Monge est déjà rentré en France, avec son fidèle Berthollet, dans le bateau de Bonaparte. On peut également penser que ces recherches sont à mettre en relation avec l'enseignement de Fourier à l'École polytechnique ; parmi les autres manuscrits datés de cette époque, certains sont clairement à vocation didactique : recherches sur les bases de la géométrie, sur la géométrie sphérique...

Par ailleurs, dans leur biographie de Fourier, Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert signalent :

> « En fin de séjour égyptien, l'influence de Monge donne à Fourier l'occasion d'un travail de géométrie différentielle sur les développées et développantes, sujet qu'il entendait approfondir dès l'École Normale. » [Dhombres et Robert 1998, p.]

Après la campagne d'Égypte, il se produira une sorte de second passage de relais, Michel-Ange Lancret exploitera les idées que l'on peut trouver dans les manuscrits de Fourier, ajoutera le résultat de ses propres recherches et publiera les deux mémoires que nous analyserons plus loin.

Revenons maintenant sur les trois manuscrits de Fourier, que nous reproduisons annexe (voir page 243).

[7] Fourier à présenté des recherches : sur la résolution générale des équations algébriques, sur la mécanique générale, des recherches sur les méthodes d'élimination, un mémoire sur un nouveau théorème d'algèbre, sur l'analyse indéterminée... [Goby 1987]

FIG. B.3 – Joseph Fourier

a. Note sur les développées des courbes [Fourier 1801a]

Ce premier manuscrit commence par une étude des lignes polygonales dessinées dans l'espace. L'objectif est, bien sûr, les courbes à double courbure. La démarche de Fourier est exprimée très clairement :

> « Un polygone d'un nombre indéfini de côtés se présente d'autant plus exactement comme une courbe que la valeur de chaque côté est plus petite en sorte que la ligne courbe est limite d'une suite de polygones variables ; c'est pour cette raison qu'on aperçoit les propriétés des lignes courbes en cherchant celles du polygone et déterminant ce que deviennent les propriétés des polygones à mesure que le nombre de côtés devient plus grand et la valeur de chaque côté plus petite. » [Fourier 1801a, f.1]

Fourier commence par définir les deux « flexions » : on peut envisager les angles que font entre eux deux côtés consécutifs, en les ajoutant, on obtient une « mesure de la flexion du contour ». On peut également considérer les plans osculateurs, et les angles que font entre eux deux plans osculateurs consécutifs. En additionnant ces angles, on aura la flexion du plan osculateur entre deux points :

> « Suivant ce que nous avons dit plus haut ces mêmes propriétés appartiennent à la ligne courbe qui est la limite du polygone variable. Ainsi une ligne courbe a en général deux courbures ou flexions, celle de son contour et celle de son plan. » [ibid., f.1]

Ce passage ligne polygonale-courbe sera davantage explicité dans le second texte. Notons que Fourier dit explicitement qu'une courbe est *limite* d'un polygone. Ce vocabulaire est nou-

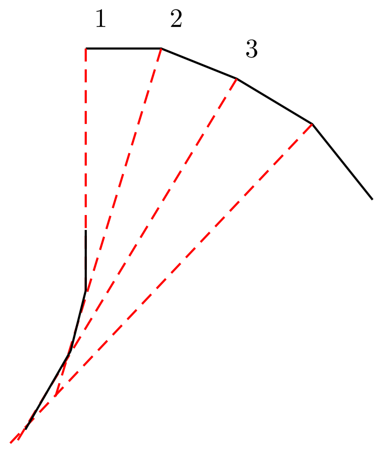


FIG. B.4 – Développante et développée dans [Fourier :1801a]

veau dans ce contexte, et il n'a pas ici un sens très précis.

Fourier s'intéresse ensuite aux développantes. Reprenant l'image du fil enroulé sur un polygone non plan, il décrit géométriquement ce que doit être une développante d'une courbe, dessinée sur la surface des tangentes. Cette description se prolonge par des calculs : Fourier commence par remarquer qu'il y a trois quantités, l'arc s, la « quantité de flexion du contour » α et β la quantité correspondante de la flexion du plan. Il a également l'intuition de ce que la courbe à double courbure est déterminée par les relations entre ces grandeurs :

> « Comme ces trois quantités sont absolument arbitraires on supposera que β est une fonction donnée de α et que s est aussi une fonction connue de α en sorte que $s = F(\alpha)$ et $\beta = f(\alpha)$ sont les deux équations de la courbe (s, α et β étant zéro à l'origine) on voit qu'il n'y a aucune courbe dont la nature ne puisse être représentée par ces deux équations. » [ibid., f.2]

Il entreprend ensuite une démonstration assez efficace, bien que parfois difficile à suivre. Son but est d'obtenir des relations entre les première et seconde courbures d'une développée et d'une de ses développantes. Son analyse repose toujours sur le modèle d'une courbe-polygone, arête de rebroussement d'un polyèdre développable. L'angle de contingence (entre deux côtés consécutifs) est $d\alpha$, l'angle entre deux plan osculateurs successifs est $d\beta$, et il s'agit de déterminer l'angle de contingence de la développante $d\alpha'$:

> « On voit maintenant que le premier côté de la développante qui forme avec le second coté l'angle $d\alpha$ tant que les deux premiers plans osculateurs se confondent mais lorsque le premier s'incline de $d\beta$ sur le second l'angle de contingence de la développante n'est plus $d\alpha$, il s'agit de trouver la valeur de ce premier angle de

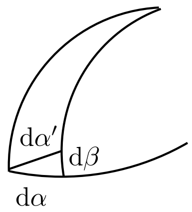


FIG. B.5 – Le triangle sphérique

contingence. » [ibid., f.3]

Pour déterminer la relation entre ces trois petits angles, Fourier prend comme origine le point de la développante qui est commun aux deux plans osculateurs consécutifs de la développée. Il dessine un cercle dans le premier plan et fait pivoter un plan pour le faire coïncider avec le suivant. Cela lui permet d'obtenir un triangle sphérique, rectangle, dont les « petits » côtés sont $d\alpha$, $d\beta$ et $d\alpha'$ pour l'hypothénuse.

> « La figure fait voir qu'on peut considérer le triangle sphérique composé de $d\beta$ et de $d\alpha$ qui se coupent à angle droit et de l'hypothénuse $d\alpha'$ et si l'on ajoute que ces angles sont infiniment petits on trouvera sur le champ »

$$d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Voir la figure B.5.

Poursuivant l'analyse de la figure, il prouve ensuite la relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \tan(\beta' + A)$$

où β' désigne le second angle de flexion de la développante. Autrement dit, on peut exprimer l'angle β' par

$$\beta' = \arctan(\frac{d\beta}{d\alpha}) - [\arctan(\frac{d\beta}{d\alpha})]$$

où la valeur entre crochet représente la valeur initiale.

De l'examen des relations entre développante et développée, il ressort que l'on a des éléments géométriques en commun, comme dans le cas d'une courbe plane pour laquelle la tangente à la développée est la normale à la développante. Cependant il s'agit maintenant de plans ; on peut donc affirmer que, pour une courbe à double courbure, en anticipant avec le vocabulaire qu'introduira plus tard Lancret, 1

Le plan normal de la développante coïncide avec le plan rectifiant de la développée.

Ainsi, le premier angle de contingence de la développante, noté $d\alpha'$, coïncide avec l'angle que font deux plans osculateurs consécutifs de la développée, ou, ce qui revient au même, deux vecteurs normaux consécutifs de la développée. Nous verrons que Lancret, dans un des résultats qu'on lui attribue, aboutit à la même relation.

Fourier termine en observant, que si on considère β comme fonction de α, alors :

> « ainsi α' est l'arc de la courbe et β' l'amplitude correspondante. Il en résulte cette proposition remarquable que la première courbure de la développante est représenté dans la courbe qu'exprime la relation entre les deux courbures de la développée par l'arc de cette courbe plane et que la seconde courbure de la développante est représentée en même temps par l'amplitude de cette courbe plane. » [ibid., f.4]

Cette remarque, basée sur la forme des relations obtenues, n'offre guère d'intérêt géométrique mais elle montre une fois de plus que Fourier se représente une courbe de l'espace par la donnée des deux fonctions courbures, (ou des deux flexions), associées à la longueur d'arc.

b. Sur les propriétés des lignes courbes [Fourier 1801b]

Le second mémoire commence comme le premier par « considérer une ligne courbe comme la limite des polygones inscrits ou (ce qui est une autre manière d'exprimer la même idée) comme un polygone d'une infinité de côtés ». Il définit les angles de contingence et les angles plans de contingence, et il note ϕ (resp. ψ) leur somme, les deux variants en fonction de l'arc. Encore une fois, il justifie qu'une courbe est donnée par ces deux grandeurs, par exemple $s = F(\phi)$ et $\psi = f(\phi)$. Puis Fourier recherche quelles sont dans les courbes en général les propriétés analogues à celles qu'Huygens a reconnu dans les courbes planes, en reprenant de façon remarquablement claire l'exposé de Monge.

Après avoir décrit ce qu'étaient les développées des courbes, il remarqué que

> « Il résulte de là que le lieu des centres de courbure circulaire, la développée et le lieu des centres de courbure sphérique sont en général des courbes différentes. » [Fourier 1801b, f.3]

Fourier est guidé par l'analogie avec la situation plane bien que, pour une courbe à double courbure, l'arête ne soit pas une développée... De même que, dans le plan, la tangente à la développée est normale à la développante, la tangente à l'arête est normale au plan osculateur de la courbe donnée, et la tangente à la courbe donnée est normale au plan osculateur de l'arête. On verra que Lancret, un peu plus tard, parlera de « développée par le plan » pour décrire cette arête de rebroussement, ensemble des centres de courbure sphérique. Fourier prolonge son analogie : une courbe plane et sa développée ont même suite d'angles de contingence, et de même :

> « Les angles de contingence de la proposée sont donc les mêmes que les angles formés par les prolongements des plans normaux qui forment la surface développable c'est-à-dire par les prolongements des plans osculateurs de l'arrête. Or ce sont les angles compris entre ces plans osculateurs qui constituent la seconde flexion de l'arrête donc cette seconde flexion est précisément la même que la première de la courbe proposée. » [ibid., f.4]

Poursuivant l'analyse

> « [...] il suit que la première flexion de l'arrête est la seconde de la proposée comme nous avons vu que la seconde de l'arrête est la première de la proposée. Ainsi ces deux courbes n'ont fait qu'échanger leurs flexions. » [ibid., f.4]

Ces énoncés, qui sont uniquement basés sur une observation des situations respectives des tangentes et plan osculateurs des deux courbes, constituent le théorème attribué à Fourier que citeront Lancret, Lacroix, etc. On peut résumer la situation dans le tableau suivant :

proposée		centres de courbure sphérique
le plan normal	est	le plan osculateur
le plan osculateur	est parallèle	au plan normal

Le mémoire se termine par le début d'un calcul où Fourier s'intéresse aux relations entre arc et flexions d'une courbe et d'une développante, mais le manuscrit s'interrompt très vite, au milieu d'une page.

c. Note sur les propriétés des lignes courbes [Fourier 1801c]

Ce texte, non achevé, contient surtout des calculs, notamment celui des relations entre la courbure d'une courbe à double courbure et les courbures de ses projections. Fourier annonce ensuite qu'il va calculer l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs, calcul qui n'est pas encore apparu dans les textes antérieurs, mais il écrit : « *Il reste à calculer de manière autre les angles m et n, où il semble s'être glissé quelque erreur* » ; le calcul n'a pas vraiment abouti.

Dans une seconde partie, Fourier se pose le même genre de questions qui préoccupaient Lacroix dans son mémoire de 1790 :

> « On peut se poser un problème plus général : une courbe étant tracée sur le plan développé d'une surface développable il s'agit de trouver la courbe formée par cette trace sur la surface développable elle même. Il faudra faire tourner le plan d'une quantité $d\beta$ sur la seconde tangente commune au plan 1 ou calculer l'angle que fera le côté 2 avec le côté 1, ce sera l'angle de contingence de la courbe. » [Fourier 1801c, f.3]

d. Conclusion

Les manuscrits de Fourier montrent donc encore une avancée. On retrouve, surtout dans les deux premiers, le style de Monge-géomètre. La description des relations entre développée et développante dans le premier texte, entre courbe et lieu des centres de courbure sphérique dans le second texte se sont enrichies, précisées.

On peut extraire de ces textes deux théorèmes, tous les deux repris par Lancret soit directement soit indirectement. Fourier ne s'est plus directement occupé de géométrie différentielle à son retour d'Égypte. On peut envisager que son éloignement de l'enseignement et de l'École polytechnique n'y sont pas étrangers.

4 Michel-Ange Lancret

C'est Lancret (1774-1807) qui fera de façon décisive avancer à la théorie des développées et identifiera complètement la « seconde » courbure qui ne prendra le nom de *torsion* que dans le manuel de géométrie descriptive de Vallée [1819][8].

a. Le premier mémoire [Lancret 1802]

L' œuvre mathématique de Lancret tient en deux mémoires dont le premier est le plus important. Intitulé « Mémoire sur les courbes à double courbure » [Lancret 1802], il est présenté le 6 Floréal an X (25 avril 1802) à l'Académie.

Le rapport est signé de Lacroix et Lagrange. Il est lu à la séance de 2 thermidor an X (14 août 1802) ; détaillé, élogieux, il se termine en disant que le mémoire de Lancret est digne d'être publié. Nous le reproduisons en annexe, voir page 256.

Comme les rapporteurs le soulignent, le mémoire de Lancret est construit sur le modèle du mémoire de Monge sur les développées : une partie géométrique, suivie des applications de l'analyse à ce qui précède. Donnons en le plan détaillé.

[8]Voir page 153

1. Introduction
   I Références : Clairaut, Euler et surtout Monge.
   II La surface osculatrice ou surface développable des tangentes, les développées et la surface des développées. La développée par le plan, lieu des centres de courbure sphérique.
   III Les deux courbures ou flexions : angle entre deux plans normaux consécutifs, angle entre deux plans osculateurs consécutifs, leur indépendance.
   IV Les flexions de la développante et de la développée par le plan s'échangent, c'est le théorème de Fourier.
2. Du plan rectifiant et de la surface rectifiante.
   V La surface rectifiante, développée de la surface osculatrice.
   VI Les trois plans, les trois surfaces.
   VII Début des calculs : le plan rectifiant, la surface rectifiante.
   VIII L'angle H entre la tangente et l'arête de la surface rectifiante.
   IX Caractérisation des hélices : la surface rectifiante est un cylindre. Autre caractérisation : l'arête de la surface rectifiante fait un angle constant avec la tangente (sans justification).
   X Relations entre les angles de contingence des trois plans, μ, ν et ω. Nouvelle expression de H, application aux hélices.
   XI Expressions des mêmes angles à partir de la courbe.
   XII Idem en notations invariantes.
3. Des développées proprement dites ou développées par le fil.
   XIII Plan osculateur et plan touchant.
   XIV Équation d'un plan touchant.
   XV L'angle θ entre plan osculateur et plan touchant $d\theta = d\nu$.
   XVI Équation d'une développée.
   XVII Relations entre les flexions de la développée et de la développante.
   XVIII Réciproque.
   XIX Cas particuliers.
   XX Relation avec une courbe plane.

Introduction. Dans les quatre premiers paragraphes, Lancret reprend les résultats classiques, les présentant de façon concise et limpide. Une nouveauté apparaît sur le plan du vocabulaire : la courbe, lieu des centres de courbure sphérique, qui est aussi l'arête de rebroussement de la surface polaire, Lancret décide de l'appeler *développée par le plan* ; c'est assez naturel car, pour une courbe plane, la développée est caractérisée par le fait que sa tangente est normale à la développante, c'est l'enveloppe des normales de la développante. Dans l'espace, le lieu des centres de courbure sphérique est caractérisé par le fait que son plan osculateur est le plan normal de la développante et ce lieu est l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans normaux.

Lancret énonce alors le résultat de Fourier :

> « Les flexions de la développante et de la développée par le plan ont entre elles une relation remarquable ; savoir :
> Que la première flexion de la développante est égale à la seconde flexion de la développée, et réciproquement, la première flexion de la développée est égale à la seconde flexion de la développante. » [Lancret 1802, p. 418]

La question se pose tout de même du sens à donner à cette égalité des flexions et Lancret y revient un peu plus loin dans son mémoire.

Du plan rectifiant et de la surface rectifiante. Voilà la première grande nouveauté du mémoire. Lancret introduit le troisième plan du trièdre, attaché à un point d'une courbe à double courbure, plan qui n'avait jamais été nommé ni utilisé par ses prédécesseurs. Son point de départ, qui justifie l'intérêt que Lancret porte à ce plan, est un peu compliqué : il faut partir de la notion de développée d'une surface développable qui apparaît à la toute fin du mémoire de Monge [1785] (voir page 68). Comme nous l'avons rappelé, cette notion n'a pas été reprise, en tout cas pas dans les versions ultérieures des *Applications de l'analyse à la géométrie* [Monge 1807, 1850]. En résumé, Monge part d'une surface développable et considère les plans contenant les arêtes et perpendiculaires à la surface. Ces plans enveloppent une surface également développable, que l'on appelle développée de la surface développable initiale. De plus, l'arête de rebroussement de la courbe initiale se développe sur la développée en une droite, elle est, sur la développée, une courbe de plus courte distance. La démonstration est exactement la même que celle qui prouve qu'une développée est une courbe de plus courte distance de la surface polaire.

Lancret observe alors que si l'on considère la surface développable enveloppe des plans osculateurs d'une courbe, sa développée est la surface enveloppée par les plans contenant les tangentes et perpendiculaires aux plans osculateurs : ce sont les troisièmes plans des trièdres. Ils sont baptisés *plans rectifiants* par Lancret, à cause de la propriété que nous avons rappelée. Ainsi, une courbe à double courbure se rectifie sur une surface développable enveloppe des plans osculateurs.

Les trois plans du trièdre sont donc nommés, jouent pleinement leur rôle ainsi que les surfaces qu'ils enveloppent :

> « La surface osculatrice, celle des plans normaux et la surface rectifiante, jouissent donc chacune, d'après ce que nous venons de voir, d'une propriété très remarquable par rapport aux flexions de la courbe. La première est telle qu'en la développant il ne reste plus à la courbe que sa première flexion ; en développant la seconde, son arête de rebroussement a pour courbure la seconde flexion de la courbe. Enfin nous venons de démontrer qu'en développant la troisième, les deux flexions de la courbe disparaissent à la fois. » [ibid., p. 422]

À la suite, Lancret observe que le développement de la développée par le plan diffère des deux autres en ce que « *la développée par le plan n'a pas même étendue que sa développante* ». Autrement dit, la jolie symétrie contenue dans son énoncé est imparfaite : le théorème de Fourier énonce que, entre la courbe et sa développée par le plan, les flexions s'échangent, mais il s'agit seulement des « angles de contingence », infiniment petits. Comme la longueur d'arc n'est pas la même, on ne peut dire vraiment que la première courbure de la développée par le plan coïncide avec la seconde courbure de la développante. Lancret apporte donc une précision qui n'est pas clairement exprimée dans les mémoires de Fourier. Cependant, tout en ayant fait cette juste remarque, il affirme : « il ne reste plus à la courbe que sa première flexion. » Des années plus tard, Abel Transon, cité par Saint-Venant [1845a] dira en substance :

> « Faute d'avoir fait la distinction entre l'angle infinitésimal de deux plans osculateurs et l'affection mesurée par le rapport de l'arc élémentaire de la courbe et cet angle, Lancret est tombé dans une erreur, article IV et surtout article VI de son premier mémoire, lorsqu'il dit qu'en développant la surface polaire, l'arête de rebroussement devenue plane a pour courbure en chaque point la *deuxième courbure* de la courbe donnée, quoiqu'il ait très-bien aperçu, plus loin, que les longueurs des arcs ne sont pas les mêmes. » [Saint-Venant 1845a, p. 36], communication à la société philomathique, le 3 août 1844.

La surface rectifiante. Lancret considère une courbe donnée par les fonctions $x = \phi z, y = \psi z$, et il appelle α la cote du point courant. Il rappelle les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal, dont il déduit les équations du rayon osculateur[9]. Il détermine ensuite l'équation (R) du plan rectifiant, en écrivant qu'il est perpendiculaire au rayon osculant. Suivant le procédé classique, en dérivant une première fois on obtient l'équation (R') et l'élimination du paramètre donne l'équation de la surface rectifiante.

L'intersection entre les deux plans rectifiants consécutifs est l'arête de la surface rectifiante et il est possible de calculer l'angle H formé entre la tangente et cette droite. C'est un calcul un peu long, Lancret obtient la formule

$$\tan H = \frac{[\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2]^{3/2}}{(\phi''\psi''' - \psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}.$$

Les hélices. Ce calcul est ensuite appliqué dans un cas particulier. Il résulte de la définition de Lancret que la surface rectifiante est un cylindre si et seulement si la courbe initiale est une hélice dessinée sur ce cylindre. Sur un exemple précis de courbe à double courbure donnée par ses équations, Lancret fait le calcul de la surface rectifiante et constate qu'il s'agit bien d'un cylindre. D'une façon générale, il remarque que la courbe est une hélice si et seulement si l'angle H est constant (non droit). Cette affirmation n'est pas justifiée (mais elle est évidente : les arêtes de la surface osculatrice font un angle constant avec la courbe qui se développe en une droite, elles sont donc parallèles, et la surface rectifiante est donc un cylindre.) Dans le paragraphe suivant, Lancret va plus loin : il calcule à nouveau la tangente de l'angle H par une méthode différente. Contrairement à Fourier, il travaille avec des angles finis, et utilise de

[9] On peut remarquer que, dans ce mémoire, Lancret admet que tous ces calculs prémiminaires sont connus du lecteur.

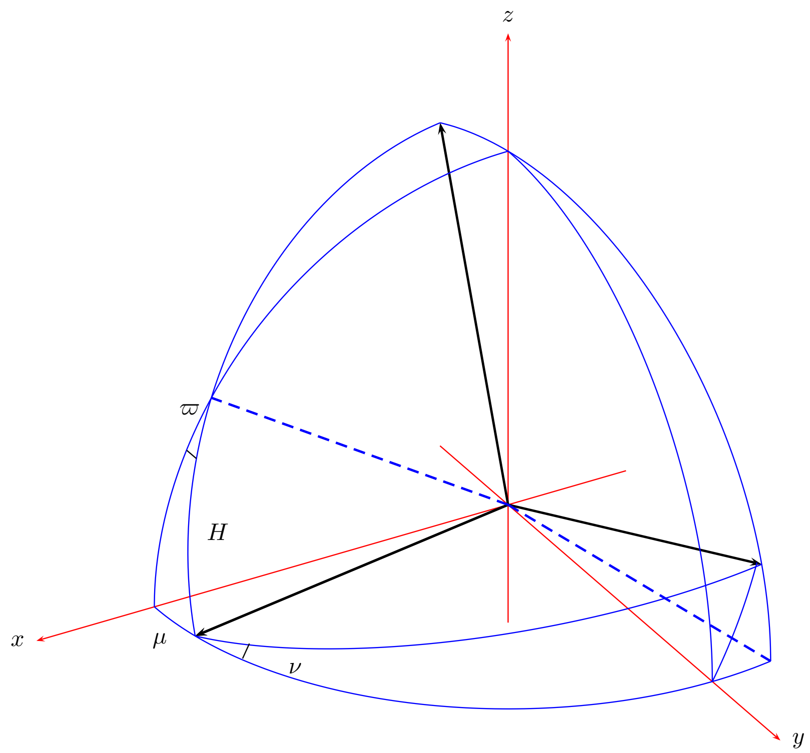


FIG. B.6 – Les deux trièdres

la trigonométrie sphérique avant de faire un passage à la limite. On peut suivre son calcul en observant le triangle qu'il utilise sur la figure B.6. Quant aux notations, elles diffèrent de celles de Fourier : $d\mu$ est l'angle entre deux plans normaux consécutifs, $d\nu$ l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs et $d\omega$ l'angle entre deux plans rectifiants consécutifs.

Lancret obtient alors dans un premier temps la relation

$$d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2$$

connue encore actuellement sous le nom de « formule de Lancret » puis, toujours avec le même triangle,

$$\tan H = \frac{d\mu}{d\nu}$$

Comme application, il énonce : « pour les hélices ou courbes rectifiables par le cylindre, l'angle H étant constant, il s'en suit que dans ces courbes, les deux flexions sont toujours proportionnelles. »

C'est un théorème que l'on nomme souvent théorème de Lancret. On attribue parfois sa démonstration à Saint-Venant [Struik 1950, p. 34] nous en reparlerons dans le chapitre III.C.

Le calcul de la seconde flexion Comme le disent les rapporteurs[10] :

[10] Voir l'annexe B.5.

> « Le citoyen Lancret détermine aussi la relation que les angles μ et ν ont avec l'angle formé par une tangente de la courbe proposée et l'arête correspondante de sa surface rectifiante. Cette relation lui sert à trouver, d'une manière fort simple, l'expression de la seconde flexion de la courbe proposée. »

En rapprochant en effet les deux expressions de $\tan H$, et moyennant le calcul fait depuis longtemps de la première flexion, Lancret obtient

$$\frac{d\nu}{d\alpha}=\frac{(\phi''\psi'''-\psi''\phi''')(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2}.$$

Il ne reste plus qu'à obtenir l'expression de toutes les flexions et de l'angle H en fonction des différentielles et non en fonction de la variable indépendante α (qui est la cote). Ces calculs sont essentiellement justifiés par des arguments de symétrie :

> « Maintenant on peut supposer que dz, d^2z, d^3z, ont été d'abord traités dans le calcul de la même manière que dx, d^2x, d^3x, et dy, d^2y, d^3y , et que la valeur précédente de $d\nu$ a été obtenue par la supposition de $d^2z=0$ et $d^3z=0$. Il faudra donc, pour retrouver l'expression première de $d\nu$, rétablir les termes qui ont disparu par cette supposition ; ce qui consiste à faire en sorte que les trois systèmes dx, d^2x, d^3x ; dy, d^2y, d^3y et dz, d^2z et d^3z, soient chacun combinés de la même manière avec les deux autres ; » [ibid., p. 433]

Par exemple, on aura pour la seconde flexion

$$d\nu=\frac{d^3x(dyd^2z-dzd^2y)+d^3y(dzd^2x-dxd^2z)+d^3z(dxd^2y-dyd^2x)}{ds(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)}.$$

Des développées proprement dites ou développées par le fil. Après l'étude de la développée par le plan, en rapport avec le théorème de Fourier, après les résultats importants sur le plan rectifiant et le calcul de la seconde flexion, Lancret s'attaque au problème des développées « proprement dites », et annonce qu'il va les déterminer « en quantités finies ». Son calcul repose encore sur l'examen de différents plans infiniment voisins et des angles qu'ils font entre eux. Cette fois, Lancret change de méthode : il utilise comme paramètre l'angle θ que fait la tangente à une développée avec la normale, ou plutôt l'angle que fait le plan osculateur de la développée (qu'il nomme plan touchant) avec le plan osculateur de la développante. Il obtient la relation

$$\theta-\theta'=d\nu.$$

où $\theta-\theta'$ est la différence entre deux angles correspondant à deux points consécutifs de la développante, et donc

$$\frac{d\theta}{d\alpha}=\frac{d\nu}{d\alpha}.$$

Lancret en déduit les équations d'une développée mais, curieusement, il fait comme si l'angle θ était constant, alors qu'il est le résultat d'une quadrature. Son erreur sera corrigée...

par lui même dans le mémoire sur les développoïdes [Lancret 1806] :

> « Il ne suffit pas de substituer dans l'équation différentielle du plan touchant la valeur de $\frac{d\theta}{d\alpha}$, il faut de plus intégrer $\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{dv}{d\alpha}$, ce qui donnera
>
> $$\theta = \int dv + c$$
>
> et mettre cette valeur de θ dans l'équation même du plan touchant et de sa différentielle. Il résulte de là que dans les équations de la développée la constante arbitraire ne sera point θ mais la constante c introduite par l'intégration. » [Lancret 106, p. 5]

Cette erreur est également signalée dans [Lacroix 1810] :

> « Il lui est échappé à ce sujet une légère méprise qu'il a rectfié dans un second Mémoire. »

Lancret applique ensuite la formule démontrée plus haut pour la courbe et une développée

$$d\omega^2 = d\mu^2 + dv^2 \qquad \text{et} \qquad du^2 = dm^2 + dn^2$$

et grâce à l'égalité $d\mu = du$, il en déduit la même relation que Fourier

$$d\mu^2 = dm^2 + dn^2.$$

Le mémoire se termine par le calcul des relations entre ces six angles de contingence. Lancret fait pour conclure la même remarque que Fourier :

> « Les expressions qui donnent dm et dn en fonction de $d\mu$ et dv, et celles qui donnent $d\mu$ et dv en fonction de dm et dn, sont remarquables par leurs formes, et peuvent être représentées par des courbes planes, ainsi que nous allons le faire voir. Si, à partir d'un point de la développée, on prend la somme m des premières flexions dm, pour abscisse, et la somme correspondante n des secondes flexions dn, pour ordonnée, la courbe qui passera par les extrémités de toutes les ordonnées construites semblablement, jouira de cette propriété, que la première et la seconde flexion de la développante y seront représentées respectivement par l'élément de l'arc et par l'amplitude élémentaire, et que, par conséquent la somme des premières flexions et celles des secondes flexions de la développante, seront données l'une par l'arc et l'autre par l'amplitude correspondante de cette courbe plane. » [ibid., p. 452]

Voici le tableau des notations utilisées par Lancret :

	développante		développée	
$d\omega$	**plan rectifiant**			
$d\nu$	**plan osculateur**			
$d\mu$	**plan normal**	=	**plan rectifiant**	du
			plan osculateur	dn
			plan normal	dm

b. Autres textes de Lancret

Le second mémoire de Lancret. Il s'agit du « Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. » [Lancret 1806]

Ce mémoire est lu le 22 décembre 1806 et les rapporteurs à l'Académie des sciences sont les mêmes que pour le remier texte, Lagrange et Lacroix : rapport présenté le 28 septembre 1807, on peut en lire l'essentiel en annexe page 277. À la fin du rapport, il est dit que « ce travail doit être suivi d'une seconde partie qui contiendra de nouveaux détails sur la même théorie et son application aux surfaces développables. » Lancret décédera moins de deux mois plus tard.

Voici, au début du mémoire, le thème traité :

> « Les principales propriétés générales des courbes planes et à double courbure ont été fournies jusqu'à présent par la considération des lignes et des plans qui touchent les courbes ou qui les coupent perpendiculairement. Nous allons dans ce mémoire considérer des lignes et des plans qui rencontrent obliquement les courbes, et nous en déduirons des propriétés beaucoup plus générales que tout ce qu'on a connu jusqu'à ce jour et dans lesquelles celles-ci rentrent comme des cas particuliers. » [Lancret 1806, p. 1]

Lancret va développer les thèmes suivants :

I. Des développoïdes planes. II. Des ellipses osculatrices. III. Des développoïdes à double courbure. IV. De l'expression analytique de la surface des développoïdes. V. Des équations générales des développoïdes. VI. De la surface des foyers des ellipses osculatrices.

Dans le cas des courbes planes, Lancret retrouve les résultats de Réaumur [1709] qui avait inventé ce problème, puis il étudie la généralisation à l'espace. Au lieu de considérer l'enveloppe des plans normaux, il est amené à étudier l'enveloppe de cônes d'ouverture fixe et dont les sommets décrivent la développante. Deux cônes consécutifs se coupent alors suivant une hyperbole qui est donc la courbe caractéristique. Les développoïdes seront dessinées sur une surface enveloppant les cônes, formée par ces hyperboles. Ce mémoire généralise donc le problème des développées, mais sans apporter de concepts ou de techniques vraiment nouvelles même s'il rectifie l'erreur signalée plus haut.

La ligne des centres osculateurs. Terminons par un petit texte qui montre comment Lancret continue de tourner autour de son thème favori. On trouve dans la *Correspondance de l'École polytechnique* la remarque suivante, sous le titre : « Des courbes à double courbure, par M. Lancret » :

> « Monge a le premier démontré qu'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, avait une infinité de développées ; que la surface qui en est le lieu, était l'enveloppe de l'espace parcouru par un plan mobile constamment perpendiculaire à la courbe proposée ; que dans le développement de cette surface, toutes les développées de la courbe devenaient des lignes droites. M. Lancret a recherché ce que devenait sur ce même développement la ligne des centres osculateurs de la courbe proposée, et il a indiqué un moyen très simple pour la construire.
>
> On sait que pour trouver le centre du cercle osculateur en un point déterminé d'une courbe, il faut mener par ce point un plan normal, ensuite déterminer la droite suivant laquelle ce plan touche la surface développable, qui est le lieu des développées, et enfin abaisser du point donné une perpendiculaire sur cette droite ; le pied de cette perpendiculaire est le centre du cercle osculateur ; M. Lancret a observé que le centre du cercle osculateur, correspondant à une des droites de la surface développable, se trouvait sur la développée de la courbe proposée, qui est perpendiculaire à cette droite[11] ; que d'ailleurs toutes les développées passaient par le point où cette courbe rencontre la surface développable ; d'où il a conclu qu'en élevant de ce dernier point rapporté sur le développement de la surface, des perpendiculaires aux tangentes de l'arête de rebroussement de cette surface, les pieds des perpendiculaires formaient la lignes des centres des cercles osculateurs.
>
> Il suit de cette proposition que les courbes sphériques ont pour centres de leurs cercles osculateurs, des lignes qui deviennent des cercles dans le développement de la surface conique, enveloppe de leurs plans normaux. » [Lancret 1804b, p. 51-52]

Ce résumé correspond à une communication faite à la Société philomathique, on trouve un compte-rendu un peu plus détaillé dans le Bulletin des Sciences. En voici la fin :

> « En effet, la courbe sur les tangentes de laquelle il faut abaisser les perpendiculaires, est alors un point. On a donc une infinité de lignes droites passant par un même point, et sur lesquelles il faut d'un autre point abaisser des perpendiculaires. La courbe qui passe par tous les pieds de ces perpendiculaires est donc un cercle, et la ligne qui joint les deux points en est un diamètre.
>
> Si donc on trace un cercle sur un plan, et que l'on applique ensuite ce plan sur une surface conique quelconque, de manière que l'un des points coïncide avec le sommet, ce cercle ainsi ployé sera le lieu des centres de la courbe sphérique qui auroit ce cône pour enveloppe de ses plans normaux, et qui le rencontreroit sur le point du cercle diamétralement opposé à celui qui se confond avec le sommet. » [Lancret 1804a, p. 212]

[11] Cette phrase est peu claire : de quelle développée veut-on parler ?

5 Bilan

a. Une théorie achevée ?

Si on considère les résultats de la théorie des courbes à double courbure obtenus en 1802, et qui sont presque tous contenus dans le mémoire de Lancret, on peut estimer qu'on se trouve devant une théorie achevée :

- Tout d'abord, Lancret a complété la liste des concepts essentiels : au plan osculateur et au plan normal s'ajoute maintenant le plan rectifiant. Ces trois plans forment donc un trièdre mobile, qui engendre trois surfaces développables, chacune ayant ses particularités.
- Pour chacun de ces trois plans, une « flexion » ou une « courbure » est définie comme étant l'angle « différentiel » ou infiniment petit entre deux plans normaux, osculateurs, rectifiants consécutifs. De plus, le calcul est fait explicitement dans les trois cas. La première flexion est connue depuis longtemps, elle est liée au rayon de courbure dit « absolu » par Lancret. La seconde flexion, angle entre deux plans osculateurs consécutifs, est également implicitement connue par Monge puis de plus en plus explicitement par Lacroix, Fourier et Lancret comme permettant de montrer qu'une courbe n'est pas plane. Ces deux flexions sont indépendantes, comme l'affirme Lancret et comme le montre le modèle de la courbe-polygone. Quant à la dernière flexion, Lancret montre qu'elle dépend des deux premières, par la relation

$$d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2.$$

  C'est donc, en définitive la façon dont se déplace notre trièdre mobile, avec ses trois plans, qui est décrite par Lancret.
- Lancret a résolu de manière efficace et explicite le problème des développées, par le choix d'un bon paramètre.

Les travaux de Lancret seront intégrés dans les ouvrages de calcul différentiel au cours des années qui suivent. Prenons l'exemple de ceux de Lacroix. Dans la seconde édition de son traité [1810], Lacroix cite le théorème de Fourier puis expose les résultats de Lancret. Il complète d'ailleurs son exposé en développant la partie géométrique de son mémoire [Lacroix 1790], en la complétant et en la corrigeant. Par contre, les premières éditions du *Traité élémentaire* [Lacroix 1802, 1806], consacrent peu de pages (moins de quatre) à la théorie des courbes à double courbure et ne donnent que les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal. Dans la quatrième édition [Lacroix 1828], on trouve le théorème de Fourier et quelques indications sur la flexion :

> « La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leur tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. » [Lacroix 1828, p. 236]

Sur le plan théorique, que reste-t-il à faire ? Pour la théorie des développées, plus grand chose. La généralisation faite par Lancret lui-même, les développoïdes, n'a guère eu de suite et peu de géomètres s'y sont intéressés.

Pour ce qui concerne ce que nous avons appelé le trièdre mobile, nous verrons que la nouveauté consistera a passer du trièdre mobile au repère mobile, pour des raisons de simplicité des calculs et parce que l'intérêt des géomètres se détournera des surfaces enveloppées par les plans du trièdre.

Ce n'est pourtant pas encore le point final et nous verrons le travail se poursuivre pendant plus de cinquante ans...

b. La question des courbes-polygone

Dans tous les textes que nous avons étudiés, une constante remarquable est l'utilisation des expressions : points consécutifs, tangentes consécutives, plans normaux consécutifs. Parfois ce langage est justifié. Fourier dit clairement qu'il parle de polygones mais que les propriétés qu'il va prouver vont s'étendre à des polygones ayant une infinité de côtés, donc à de vraies courbes. Lacroix fait ressortir également l'abus de langage utilisé. Cependant, quand il défini le plan osculateur, il commence par utiliser la notion de contact. Ce n'est que dans un second temps qu'il le voit comme plan qui contient deux éléments consécutifs (voir page 85.

D'ailleurs, la notion même d'élément renvoie à des objets différents chez des auteurs différents, parfois chez le même auteur. Par exemple, dans le début de son mémoire [1785], Monge parle de deux points consécutifs A et a et de l'arc qui les joint. Dans ce contexte, l'élément de courbe est assimilé à un arc de cercle, puisqu'il a un axe polaire. Dans le même texte, par exemple quand il construit les développées, Monge laisse entendre qu'un élément entre deux points consécutifs est un segment dont le prolongement est la tangente en un des points.

Cette objection n'est pas nouvelle. On la trouve dès l'origine du calcul infinitésimal de Leibniz ; voir par exemple dans l'Histoire de l'Académie la défense de Varignon faite par Fontenelle :

> « Puisque nous ne concevons distinctement que des lignes droites, la nouvelle géométrie à rapprochée les courbes de la portée de notre esprit en les concevant comme composées de droites.[...] Les courbes sont des polygones rectilignes d'une infinité de côtés infiniment petits, on peut les appeler, comme l'a fait M. Varignon, courbes rigoureuses.[...] La courbe polygone n'est qu'une courbe approchée, ou infiniment peu différente de la rigoureuse. » [Fontenelle 1722, p. 75]

Un peu plus loin, Fontenelle pousse le paradoxe en affirmant qu'il n'y a pas de courbe rigoureuse.

Il semble que, en ce qui concerne les applications à la géométrie dans l'espace, le manque de rigueur, ou plutôt de clarté et de constance dans les arguments, se fait encore plus sentir. Comme nous l'avons déjà remarqué, on ne peut pas dire que deux tangentes consécutives sont concourantes alors que deux normales consécutives ne le sont pas, puisque deux tangentes distinctes ne sont pas coplanaires.

En ce qui concerne l'emploi des infiniment petits pour les calculs, les mêmes objections se peuvent faire : quelle est la vraie nature des angles de flexions ? Sont-ce des angles infiniment petits entre deux tangentes ou plans osculateurs consécutifs ? Ou bien de véritables angles entre les côtés d'un polygone ou les hèdres d'un polyèdre ? Nous avons vu, par exemple, que l'utilisation des angles infiniment petits pouvaient également prêter à confusion quand la variable n'est pas explicite, comme dans le théorème de Fourier. Ce théorème est correct s'il est exprimé en termes d'infiniment petits, mais ambigu ou même faux s'il est exprimé en termes de courbures. Ce sera aussi l'initiative des successeurs de Lancret que d'introduire des quantités finies en lieu et place des flexions : le rayon de courbure, bien sûr, existe déjà mais pas encore la torsion ni le rayon de torsion.

Toutes ces remarques et objections, qui dépassent le simple cas des courbes à double courbure, vont jouer un rôle important dans la façon dont la théorie va évoluer, comme nous allons le voir dans les chapitres suivants.

Tout d'abord, l'utilisation des fameux points consécutifs disparaît des textes savants. Cette notion va être remplacé progressivement par une (ou plusieurs) théorie(s) du contact ; nous le verrons chez Cauchy et Lagrange. Par ailleurs et parallèlement, les outils analytiques vont progresser. Cela se traduira par exemple par le choix des variables, qui ne sera plus systématiquement l'une des coordonnées mais la longueur de l'arc (comme chez Euler) ou une variable quelconque. Cela se traduit également par le développement d'une géométrie analytique qui, en plus des triplets de coordonnées pour les points prend en compte les triplets de « cosinus directeurs » pour les directions. Enfin, l'analyse va revenir au premier plan : après Cauchy, la rigueur des démonstrations sera liée à l'absence de considérations géométriques, et c'est ainsi que beaucoup de résultats de Lancret, comme le théorème sur les hélices, devront être démontrés à nouveau.

Troisième partie

De la géométrie à l'analyse

Chapitre A

Théorie du contact

1 Pourquoi une théorie du contact ?

Dans les premiers temps de la géométrie moderne des courbes, le problème des tangentes était une sorte de ligne directrice et on voit se succéder différentes méthodes pour calculer précisément la position de la tangente à une courbe dont on connaît l'équation. Quant à la définition même de la tangente, elle aussi est sujette à différentes variantes. Il en va de même de la définition d'un contact plus intime, l'osculation.

Aidons-nous, pour commencer des rappels que fait Lagrange dans son traité célèbre, la *Théorie des fonctions analytiques* [1797]. La seconde partie est, en effet, consacrée aux applications à la géométrie. Ce traité parait la même année que celui de Lacroix et il est largement inspiré du cours d'analyse que Lagrange assurait à l'École polytechnique. On sait que Lagrange y ambitionne de refonder l'analyse et le calcul différentiel sur des bases solides. D'ailleurs le sous-titre en est : « *Les principes du Calcul Différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.* ».

Dans la seconde partie, titrée « Applications de la Théorie des Fonctions à la Géométrie », Lagrange commence par revenir sur la notion de tangente. Selon lui, pour les anciens géomètres, la tangente à une courbe « a un point commun avec la courbe, mais on ne peut mener par ce point aucune droite entre elle et la courbe ». Cette définition est purement géométrique, et intrinsèque, en ce sens qu'elle ne dépend pas du modèle que l'on se donne pour une courbe. Avec la géométrie moderne, d'autres points de vue sont apparus pour la tangente :

– sécante dont les deux points d'intersection sont confondus ;
– prolongement d'un des côtés infiniment petits de la courbe, considérée comme un polygone d'une infinité de côtés ;
– direction du mouvement composé qui décrit la courbe.

On reconnaît dans ces descriptions des définitions utilisées par les adeptes du calcul infinitésimal ou du calcul des fluxions. Lagrange accorde des qualités à ces méthodes, mais marque nettement sa préférence pour la sienne, qui utilise sa théorie des fonctions :

> « Ces méthodes ne laissent rien à désirer pour la simplicité et la généralité ; mais ceux qui admirent avec raison l'évidence et la rigueur des anciennes démonstrations regrettent de ne pas trouver ces avantages dans les principes de ces nouvelles méthodes. » [Lagrange 1797, p.184]

Quand on s'intéresse aux courbes à double courbure, le problème se complique. Pas tellement d'ailleurs pour ce qui concerne la définition de la tangente. Si, par exemple, on se base sur le modèle de la courbe-polygone, la tangente à une courbe gauche se définit comme la tangente à une courbe plane. Si en revanche on s'intéresse au cercle osculateur, ou à la nouvelle notion, celle de plan osculateur, tout n'est pas aussi simple.

Prenons le modèle de la courbe-polygone qui, nous l'avons vu, est celui de Monge, Lacroix, Fourier et Lancret. Guidons-nous sur la description de Fourier [Fourier 1801a]. Soit trois points consécutifs m, m', m'' ; on considère généralement que la tangente en m' est la prolongement du segment mm', la tangente en m'' est le prolongement du segment mm'' mais il y a bien sûr un autre choix possible pour lequel mm' représenterait la tangente en m, etc. Maintenant, qu'en est-il du plan osculateur ? Le plan osculateur en m' est le plan qui contient deux tangentes consécutives et donc les trois points consécutifs m, m' et m''. On peut alors définir le cercle osculateur comme étant le cercle passant par trois points consécutifs, il est donc inclus dans le plan osculateur. Reste la question du plan normal : on définit ce dernier comme le plan perpendiculaire à la tangente, ensemble des normales. Mais alors, l'intersection de deux plans normaux consécutifs n'est plus perpendiculaire au plan osculateur, et ne contient plus le centre du cercle osculateur... Il faudrait prendre comme plan normal le plan médiateur de mm' et le suivant serait le plan médiateur de $m'm''$; on retrouverait d'autres difficultés plus loin. Pourquoi la dimension trois conduit-elle naturellement à l'augmentation des difficultés ou paradoxes ? Essentiellement par la variété plus grande des situations : le « contact » d'une courbe peut se faire avec une autre courbe (droite, cercle), mais aussi avec une surface (plan, sphère), sans parler du contact entre deux surfaces. La situation relative de ces objets est plus variée. On peut se poser la question du plan osculateur de diverses façons : c'est le plan passant par trois points consécutifs, par la tangente et le point suivant, par deux tangentes consécutives, c'est le plan le plus proche de la courbe en un sens à préciser, etc. L'équivalence de ces définitions reste à démontrer.

La situation n'est donc pas complètement satisfaisante et elle conduit à mettre en doute la rigueur des démonstrations faites à partir de ce modèle.

2 La solution de Lagrange

Rappelons que dans son traité, Lacroix [1795] utilise le développement en série des fonctions pour étudier le contact entre des courbes planes, à double courbure ou des surfaces. Mais c'est Lagrange, dont il a suivi les cours à l'École polytechnique, qui est son inspirateur et qui explique de façon la plus détaillée sa théorie du contact.

FIG. A.1 – Joseph-Louis Lagrange

L'ambition de Lagrange est donc de refonder cette partie de la géométrie à l'aide de sa théorie des fonctions analytiques, revenant aux principes de rigueur des Anciens.

Pour comparer deux courbes planes d'équations $y = f(x)$ et $y = F(x)$, il introduit une troisième fonction ϕ, avec $\phi(x) = f(x) = F(x)$, pour un certain x fixé. Il introduit ensuite les différences des ordonnées $D = f(x+i) - F(x+i)$ et $\Delta = f(x+i) - \phi(x+i)$ au point d'abscisse $x+i$. En faisant un développement limité (que l'on appellerait maintenant de Taylor-Lagrange à l'ordre deux), Lagrange annonce que si f et F ont même dérivée en x, « *on pourra toujours prendre i assez petit pour que la quantité Δ devienne plus grande que la quantité D* ». Il écrit :

$$D = \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)] \qquad \Delta = i(f'(x) - \phi'(x)) + \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - \phi''(x+j)]$$

(ce n'est pas le même j...) et constate que « *la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins que $f'(x) - \phi'(x)$ ne devienne nul.* » Naturellement, on peut continuer et définir des contacts d'ordre plus élevé :

> « C'est là l'idée nette qu'on doit se faire de ces différents degrés de rapprochement des courbes que l'on appelle communément contact, osculation, et que la manière ordinaire de concevoir le calcul différentiel fait regarder comme des coïncidences plus ou moins rigoureuses ou plus ou moins étendues. » [Lagrange 1797, p. 189]

La différence dans l'exposition est donc assez nette : il n'est pas question comme dans le langage précédent de parler de points consécutifs ou d'infiniment petits. La formalisation passe par des inégalités et des encadrements, de façon comparable à la méthode d'exhaustion d'Archimède, ou même à la méthode de Newton pour étudier le centre de courbure d'une courbe plane mais avec l'aide du formalisme des fonctions analytiques et des « fonctions primes ».

a. Les courbes planes

Lagrange étudie d'abord les courbes planes : la tangente et la normale sont obtenues grâce à la définition que nous venons de voir et il retrouve les formules différentielles connues. Il suffit de mettre $\frac{dy}{dx}$ à la place de la fonction dérivée y'.

Puis il s'intéresse au cercle osculateur. En écrivant l'équation d'un cercle sous la forme $y = F(x) = b + \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$, il obtient très vite

$$\begin{cases} a = x - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ b = y + \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}} \end{cases}$$

qui donne le « meilleur » cercle parmi ceux de rayon c donné : il ne peut passer entre ce cercle et la courbe un autre cercle de même rayon. Lagrange constate que le lieu des centres de ces cercles optimaux est la normale. Pour aller plus loin il calcule la dérivée seconde de F, et obtient un contact supérieur avec le rayon $c = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$. Lagrange généralise ensuite au cas d'une courbe donnée sous forme implicite et dépendant de plusieurs paramètres : l'ordre du contact est le numéro de la dernière dérivée qui coïncide avec la dérivée de la fonction initiale.

De façon générale, les « éléments de contacts » sont les paramètres à fixer. Il en faut un de plus que l'ordre de contact que l'on souhaite atteindre. Comme une droite dépend de deux paramètres, elle ne pourra qu'avoir un contact du premier ordre. Avec ce point de vue élargi, Lagrange traite à nouveau le cas du cercle, puis de la parabole... Pour le cas d'un contact d'ordre n, la courbe la plus simple est bien sûr la courbe donnée par le polynôme qui coïncide avec le début du développement de Taylor et elle est de type parabolique. Lagrange généralise ensuite au cas de développements asymptotiques généralisés (exposants non entiers) et au cas des asymptotes grâce à la transformation de x en $1/x$.

Lagrange manifeste p. 201 une « inadvertance singulière », mais le respectueux Serret, la signalant, « n'(a) pas cru pouvoir (se) permettre la moindre altération au texte de l'illustre auteur, et (a) laissé subsister la faute dans cette nouvelle édition. » [ibid., p. 201]

b. Les courbes à double courbure

Considérons maintenant la façon dont Lagrange étudie les courbes à double courbure. La démarche est la même que dans le cas du plan. Il se donne une courbe à double courbure par deux équations

$$y = f(x), \qquad z = \phi(x)$$

et une autre courbe par les fonctions F et Φ. On suppose que les deux courbes ont en commun le point d'abscisse x. Pour un point voisin d'abscisse $x+i$ Lagrange introduit les différences de coordonnées

$$d = f(x+i) - F(x+i) \qquad \text{et} \qquad \delta = \phi(x+i) - \Phi(x+i).$$

La distance entre les deux points sera alors $D = \sqrt{d^2 + \delta^2}$ et, dit Lagrange :

> « De là, par une analyse semblable à celle qui a été développée au commencement de cette deuxième Partie, on prouvera que, si $f'(x) = F'(x)$, $\phi'(x) = \Phi'(x)$, il sera impossible qu'aucune autre courbe donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions puisse passer entre les deux courbes dont il s'agit. » [ibid., p. 249]

On ne peut s'empêcher de penser que c'est une description bien imprécise. L'usage de l'expression « entre », s'agissant de trois courbes de l'espace ayant un point commun, ne peut avoir la même évidence que dans le cas de courbes planes. Il faudrait tout reformuler en termes de distances, ce que ne fait pas Lagrange, même si l'utilisation des distances est son point de départ. Pour la suite de ses définitions concernant le contact du second ordre dans l'espace, Lagrange reste toujours imprécis géométriquement. Puis il applique sa théorie du contact pour (re)trouver les équations de la tangente à une courbe à double courbure. Il constate que les deux projections sur les plans de coordonnées de la tangente sont les tangentes des projections de la courbe.

Son étude du cercle osculateur d'une courbe à double courbure est un bon exemple des idées nouvelles qu'il promeut. Le système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0 & (1) \\ x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0 & (2) \end{cases}$$

représente les équations d'un cercle. Les constantes qui sont au nombre de 6 sont appelées par Lagrange « éléments du contact » et, pour exprimer qu'il y a un contact d'ordre 2, il prend les équations prime deux fois de suite, ce qui donne :

$$\begin{cases} x - a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0 & (3) \\ 1 + my' + nz' = 0 & (4) \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0 & (5) \\ my'' + nz'' = 0 & (6) \end{cases}$$

Il y a six inconnues et, effectivement, on peut résoudre le système et obtenir les expressions habituelles. Nous verrons plus loin comment Lagrange poursuit et aborde la question des développées. Mais continuons avec la question du contact.

c. Les surfaces

Dans le chapitre suivant, Lagrange aborde la question des surfaces et s'occupe du plan tangent en un point à une surface donnée $z = f(x, y)$. Pour commencer, il faut partir d'un plan ayant un point commun avec la surface et, comme dans le cas de la tangente à une courbe plane, la démarche est assez naturelle : on détermine la distance entre le point du plan dont les deux premières coordonnées sont $x+i$ et $y+o$ et le point correspondant de la surface. En utilisant un développement de $f(x+i, y+o)$, Lagrange obtient l'équation du plan tangent sous la forme $a + bx + cy = z$ avec

$$\begin{cases} a = z - xz' - yz_{\prime} \\ b = z' \\ c = z_{\prime}. \end{cases}$$

Précisons la notation de Lagrange : le prime supérieur désigne la dérivation par rapport à x, le prime inférieur celle par rapport à y. Lagrange généralise ensuite à des contacts supérieurs entre des surfaces quelconques, et poursuit par la théorie des lignes de courbure.

d. Bilan

Que conclure de cette étude ? On sait bien sûr que la démarche générale de Lagrange souffre de défauts rédhibitoires, le plus important étant l'affirmation selon laquelle toute fonction admet un développement en série. Toutefois, dans les calculs qui nous intéressent, cette affirmation n'est pas en cause puisque le théorie du contact de Lagrange repose sur des développements finis, qu'on appelle actuellement développements de Taylor-Lagrange. Cependant, une analyse moderne montre que des arguments de continuité des dérivées seraient également nécessaires.

Quant à la critique que Lagrange fait des méthodes du calcul différentiel, elle reste relative. Comme le remarque Kline [1972, p. 432], Lagrange reconnaît :

> « Au reste, je ne disconviens pas qu'on puisse, par la considération des limites envisagées d'une manière particulière, démontrer rigoureusement les principes du calcul différentiel, comme Maclaurin, d'Alembert et plusieurs autres auteurs après eux l'on fait. Mais l'espèce de métaphysique qu'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les opérations fondamentales du calcul. » [Lagrange 1799, p. 326]

Pour Lagrange, il s'agit en quelque sorte d'algébriser l'étude des fonctions[1], et donc leur application à la géométrie. Il est sûr que l'absence d'intervention d'expressions courantes comme « le point suivant », « deux tangentes consécutives », donne à son exposé une rigueur et une généralité novatrices. Il faudra la perspicacité de Cauchy pour critiquer ces belles constructions, surtout dans le cas des courbes de l'espace. Néanmoins, on peut considérer que Lagrange n'est pas un spécialiste de la géométrie et il n'aura pas, au contraire de Monge, de disciples utilisant de façon systématique ses méthodes[2]. Comme le dit Boyer, par comparaison avec Monge, « Lagrange did not have a geometer's heart, nor did he have enthusiastic disciples » [Boyer 1968].

[1] « À proprement parler, l'Algèbre n'est en général que la théorie des fonctions. » [Lagrange 1799, p. 327]
[2] Lacroix, dès son traité élémentaire [1802] et la seconde édition du traité [1810] privilégie la méthode des limites.

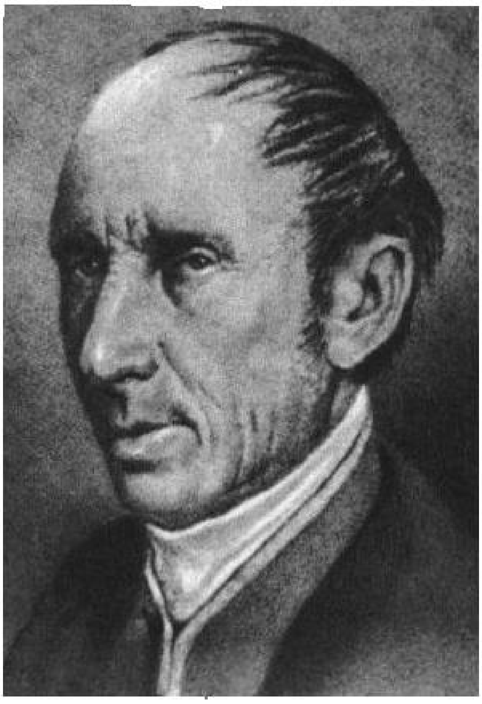


FIG. A.2 – Augustin-Louis Cauchy

3 La solution de Cauchy

a. Les objections de Cauchy

Elles sont explicitées et résumées dans un chapitre des « Exercices de Mathématiques » [Cauchy 1826b, p. 221-251], recueil d'exposés plus ou moins disparates qui pour certains prolongent et complètent les Cours. Ce chapitre s'intitule « Sur les divers ordres de contact des lignes et des surfaces », et commence par une critique de l'Illustre auteur de la mécanique analytique. Il y a deux types de remarques :

1. Les premières sont géométriques, et concernent les courbes et surfaces de l'espace : elles portent sur la signification du mot « entre » concernant des courbes ou des surfaces de l'espace. Cauchy prend un exemple précis : il considère les deux surfaces d'équations $z = x^4 + y^4$ et $z = -x^4 - y^4$. Ces deux surfaces ont entre elles un contact d'ordre 3. Si on envisage maintenant la troisième surface d'équation $z = y^2$, elle ne devrait pas, d'après la théorie de Lagrange, pouvoir se situer *entre* les deux précédentes, puisque ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 au point $(0,0)$ ne coïncident pas avec celles des deux surfaces . Or elle contient l'axe des x qui est *entre* les deux premières surfaces, comme l'illustre la figure A.3.

2. Les autres objections reposent sur une idée importante, et non formulée avant Cauchy : qu'en est-il de l'invariance des définitions de Lagrange par rapport au changement de coordonnées ? Dans le même ordre d'idées, Cauchy remarque que, dans le cas de courbes, on ne peut appliquer la méthode de Lagrange si la tangente est orthogonale à l'axe des

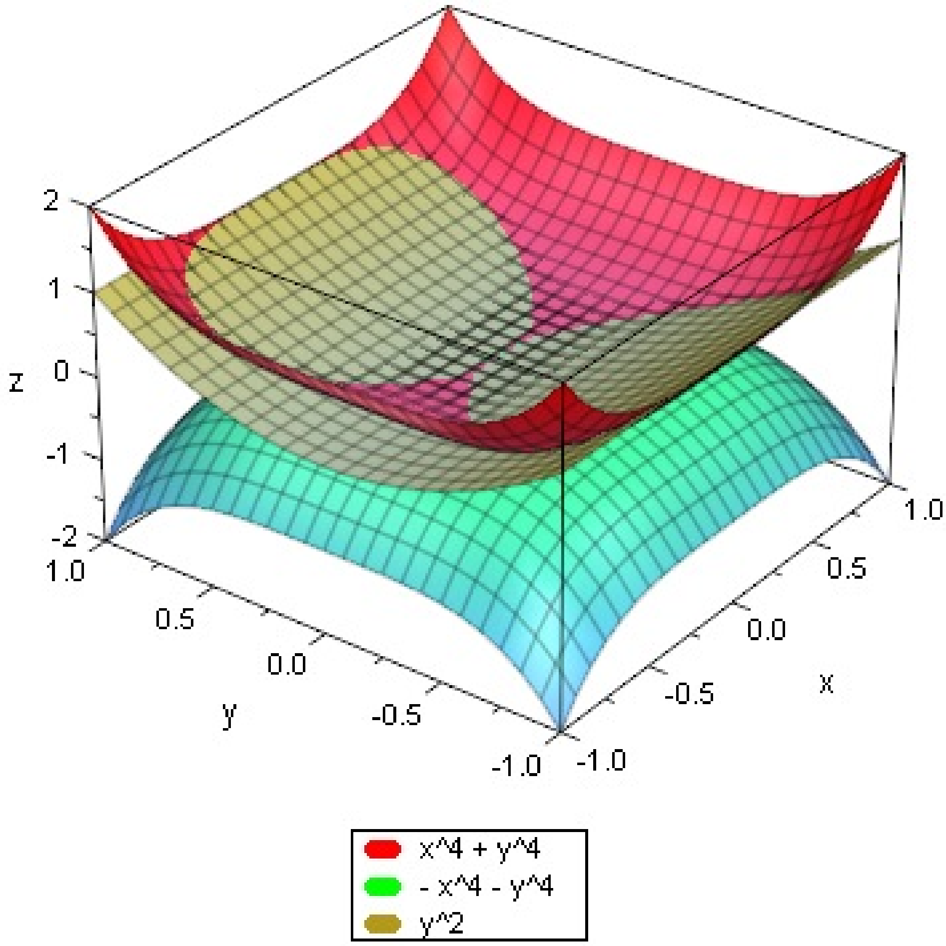


FIG. A.3 – Contre-exemple de Cauchy

abscisses.

La suite de ce chapitre reprend, parfois mot à mot, parfois sous une forme un peu différente, le cours de Cauchy [1826a], que nous allons étudier maintenant.

b. La théorie du contact de Cauchy

C'est dans les *Applications de l'analyse à la géométrie* [Cauchy 1826a] que l'on trouve cette théorie. Donnons-en pour commencer le plan :

1. Préliminaires : revue de quelques formules de géométrie analytique.

1 Inclinaison d'une courbe plane en un point donné. Équation de la tangente et de la normale à cette courbe.

2 Des longueurs appelées sous-tangentes, sous-normales, tangentes et normales des courbes planes.

3 Centres, diamètres, axes et asymptotes des courbes planes.

4 Propriétés diverses des courbes planes déduites des équations de ces mêmes courbes. Points singuliers.

5 Différentielle de l'arc d'une courbe plane. Angles formés par la tangente à cette courbe avec les demi-axes des coordonnées positives. Sur les courbes planes qui se coupent ou se touchent en un point donné.

6 De la courbure d'une courbe plane en un point donné. Rayon de courbure, centre de courbure et cercle osculateur.

7 Détermination analytique du centre de courbure d'une courbe plan. Théorie des développées et des développantes.

8 Sur les courbes planes qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point donné.

9 Sur les différents ordres de contact des courbes planes.

10 Sur les diverses espèces de contact que peuvent offrir deux courbes planes représentées par deux équations dont l'une renferme des constantes arbitraires. Point de contact dans lesquels deux courbes planes se traversent en se touchant.

11 Sur l'usage que l'on peut faire des coordonnées polaires pour exprimer ou pour découvrir diverses propriétés des courbes planes.

12 Usage des coordonnées polaires pour la détermination de l'inclinaison de l'arc, du rayon de courbure, etc., d'une courbe plane.

13 De la tangente et des plans tangents, des normales et du plan normal à une courbe quelconque en un point donné. Asymptotes et points singuliers des courbes tracées dans l'espace.

14 Des plans tangents et des normales aux surfaces courbes.

15 Centres et diamètres des surfaces courbes et des courbes tracées dans l'espace, axe des surfaces courbes.

16 Différentielle de l'arc d'une courbe quelconque. Sur les courbes ou surfaces courbes qui se touchent en un point donné.

17 Du plan osculateur d'une courbe quelconque et de ses deux courbures, rayon de courbure, centre de courbure et cercle osculateur.

18 Détermination analytique du centre de courbure d'une courbe quelconque. Sur les développées d'une courbe quelconque, et sur la surface qui est le lieu géométrique de ces développées. Sur les courbes qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point donné.

19 Rayon de courbure des sections faites dans une surface par des plans normaux. Rayon de courbure principaux. Des sections dont les courbures sont nulles, dans le cas où les rayons de courbure principaux sont dirigés en sens contraires.

20 Rayons de courbure des différentes courbes que l'on peut tracer sur une surface donnée. Des surfaces qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun.

21 Sur les différents ordres de contact des courbes tracées dans l'espace.

22 Sur les différents ordre de contact des surfaces courbes.

Il y a, en définitive, beaucoup de nouveautés dans ce traité qui était le support du cours de Cauchy à l'École polytechnique. Ces nouveautés ne se rencontrent pas dans les résultats ou théorèmes proprement dits mais dans les méthodes, dans les démonstrations, dans la rigueur nouvelle qui a le moins possible recours à l'intuition.

Pour ce qui nous intéresse à présent, la théorie du contact, il est remarquable dans ce plan de voir où se placent les trois chapitres qui la traitent : dans le cas des courbes planes comme dans le cas des courbes de l'espace ou des surfaces, c'est *après* les chapitres sur les tangentes, la courbure, les développées[3]. Cauchy va en effet définir toutes ces notions sans utiliser sa théorie du contact, ni évidemment celle de Lagrange. Nous en reparlerons dans la section suivante.

Venons-en à la leçon 9. Cauchy considère deux courbes planes qui se touchent en un point donné P (c'est-à-dire qui, en ce point commun P, ont une tangente commune). Centré sur ce point, on trace un cercle de petit rayon i, qui coupe les courbes en deux points voisins[4] Q et R, et la proximité de ces points est mesuré par l'angle ω entre les deux rayons, l'arc ayant comme mesure $i\omega$ et la corde joignant les deux points Q et R a pour mesure $2i \sin \frac{\omega}{2}$. Cauchy énonce alors :

> « Le rapprochement des deux courbes sera plus ou moins considérable, et leur contact plus ou moins intime, suivant que les valeurs de ω correspondant à de très-petites valeurs de i seront plus ou moins grandes. » [Cauchy 1826b, p. 122]

Cette définition, ou plutôt ce « principe » admis, Cauchy va définir ce qu'il entend par l'ordre d'un infiniment petit $f(i)$, par rapport à la base i. C'est un nombre a constant tel que :

- pour tout $k < a$, $\frac{f(i)}{i^k}$ tend vers 0.
- pour tout $k > a$, $\frac{f(i)}{i^k}$ tend vers ∞.

Cauchy précise également, exemple à l'appui, que le rapport $\frac{f(i)}{i^a}$ peut avoir n'importe quelle limite.

Cette définition de l'ordre d'un infiniment petit généralise à un exposant quelconque ce que Cauchy avait défini dans le cas des exposants entiers à la fin des Leçons sur le calcul infinitésimal, [Cauchy 1823, p. 249-256]. Remarquablement précise et moderne elle est suivie d'un certains nombres de lemmes sur les sommes d'infiniment petits d'ordres distincts, sur les produits d'infiniment petits, avec chaque fois une démonstration en termes de limite complètement explicitée.

Revenant au problème du contact, Cauchy observe que si ω est un infiniment petit d'ordre a, alors $2\sin\frac{\omega}{2}$ sera un infiniment petit d'ordre a également et la distance entre les deux points Q et R est un infiniment petit d'ordre $a+1$ (la base étant i). Cauchy décide alors d'appeler ordre de contact des deux courbes le nombre a.

[3] En réalité, un examen attentif du déroulement réel des cours montre que les leçons n'étaient pas toujours abordées dans le même ordre. Lors des premières années d'enseignement de Cauchy, la théorie du contact trouvait sa place avant. [Gilain 1989]

[4] Cauchy ne s'occupe que d'un seul côté de la figure.

Cauchy est donc parvenu à une définition qui évite les inconvénients qu'il a signalés dans la méthode de Lagrange, une définition qui, en particulier, évite de préciser quel est le mode de représentation de la courbe. La suite de la leçon consiste à étudier comment on peut calculer cet ordre de contact, par exemple par l'étude de la différence des ordonnées (si l'axe n'est pas parallèle à la tangente commune) et Cauchy retrouve la méthode de Lagrange de coïncidence des dérivées successives, bien sûr seulement quand l'ordre est entier. Il ne lui reste plus alors qu'à faire le lien avec les résultats connus : il montre en particulier, dans la leçon suivante, que le cercle osculateur[5] est celui qui a un contact d'ordre au moins égal à deux avec la courbe.

On se convainc facilement que la définition de Cauchy se transpose aisément dans l'espace, pour le contact entre deux courbes quelconques[6] : il suffit de remplacer le cercle de rayon i par une sphère. Pour parvenir à un calcul explicite de l'ordre de contact, Cauchy compare l'ordre de contact des courbes avec celui des projections sur un plan. Il démontre que cet ordre est le même, sauf si le plan est « sensiblement perpendiculaire » au plan formé par les points P, Q, R, auquel cas l'ordre des projections est plus grand. Il exprime ensuite, comme dans la théorie de Lagrange, un contact entier par des égalités de dérivées successives. Quant au contact entre deux surfaces, Cauchy le définit ainsi : il faut considérer toutes les sections par des plans passant par le point de contact et faisant un angle « sensible » (c'est-à-dire qui diffère suffisamment de 0) avec le plan tangent commun. Ces sections sont des courbes qui sont en contact et l'ordre de contact des surfaces sera le plus petit des ordres de contact de toutes ces sections. Cette définition permet d'éviter le contre-exemple décrit plus haut (A.3) et est rapidement traduite en termes d'égalités des dérivées partielles successives.

En conclusion, la théorie de Cauchy est une réponse solide aux problèmes de la définition rigoureuse de la tangence, de l'osculation et de leur généralisation. Elle permet d'obtenir les mêmes algorithmes de calcul que Lagrange ou ses prédécesseurs, au moins dans les cas courants. Il n'est plus nécessaire d'employer des expressions comme « les courbes ont trois points communs confondus »... Cependant, cette dernière façon de s'exprimer va perdurer et la définition du contact par Lagrange va continuer à être le plus souvent citée. La présentation de Cauchy ne va pas s'imposer immédiatement.

Donnons quelques exemples. Un successeur de Cauchy à l'École polytechnique, Claude Navier, va reprendre dans sa théorie du contact le point de vue de Lagrange [Navier 1856]. Dans le cours de Leroy, lui aussi enseignant à l'École polytechnique, on peut lire :

> « Lorsqu'une ligne AM est à double courbure, ses diverses tangentes ne sont pas dans un même plan, mais deux éléments consécutifs MM' et $M'M''$ remplissent toujours cette condition puisqu'ils ont un point commun ; alors le plan qui passe par ces deux éléments se nomme le *plan osculateur* de la courbe en M. » [Leroy 1835, p. 243]

Autre exemple de ce double langage, dans un petit livre de Charles de Freycinet, édité en 1860 :

[5] défini par son centre sur la normale et par son rayon, inverse de la courbure.

[6] Cauchy parle de courbes quelconques pour ne pas exclure le cas des courbes planes sises dans l'espace.

> « Quand on suppose que les courbes ont un contact de l'ordre n, ou que les n premières dérivées de leurs fonctions sont égales chacune à chacune, on se trouve dans le même cas que si ces deux courbes avaient $n+1$ points consécutifs communs. [...] Au fond, deux courbes ne peuvent pas plus avoir $n+1$ points communs qu'il n'est possible à la droite tangente d'en avoir deux et au cercle osculateur d'en avoir trois. » [Freycinet 1860, p. 224]

Dans ce dernier ouvrage, l'auteur ne donne comme référence à la théorie du contact que Lagrange.

Cependant, le cours de Duhamel, longtemps professeur d'analyse à l'École polytechnique reprend la théorie du contact de Cauchy, de façon moins détaillée [Duhamel 1856]. Dans le traité de Bertrand [1864], le premier qui donne les formules de Serret-Frenet, on trouve une définition du contact par le développement en série, puis la preuve que l'ordre ainsi défini est indépendant du choix des coordonnées, et enfin un exemple d'un cas particulier où l'ordre n'est pas entier.

4 Cauchy et les courbes à double courbure

Nous allons maintenant étudier la démarche de Cauchy lorsqu'il étudie les courbes à double courbure. La géométrie dans l'espace s'étend des leçons 13 à 21, mêlant l'étude des surfaces et celle des courbes.

a. Les préliminaires

Dans cette première partie, Cauchy présente les outils de géométrie analytique[7] qu'il va utiliser. Il se place d'emblée dans le cadre de la géométrie dans l'espace. Par opposition avec la méthode de Monge, Cauchy traite dès le départ les trois coordonnées de façon symétrique : cela s'adapte à son utilisation systématique de la notion de « cosinus directeurs » qu'il emploie pour décrire une direction.

Donnons quelques précisions sur cette notion. Cauchy commence par définir de façon assez claire ce que Lacroix appelait déjà un rayon vecteur : « Une droite $\overline{AB}$, menée d'un point (A) supposé fixe à un point (B) supposé mobile, sera généralement désignée sous le nom de *rayon vecteur* [Cauchy 1826a, p. 4]. » Cet objet géométrique, nommé rayon vecteur est noté R, mais R désigne également la distance de A à B. Cauchy note ensuite a, b, c les angles formés par la direction $\overline{AB}$ avec les demi-axes des coordonnées positives, et vérifie que l'on a :

$$x - x_0 = R\cos a, \qquad y - y_0 = R\cos b, \qquad z - z_0 = R\cos c$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de B et (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de A. Sans qu'il emploie l'expression cosinus directeurs, il dispose de trois grandeurs permettant de repérer une direc-

[7] Expression dont on rappelle qu'elle provient de [Lacroix 1797], et que Cauchy reprend ici [Cauchy 1826a, p. 1].

tion orientée, et va l'utiliser constamment. En premier lieu, par exemple, Cauchy démontre la relation

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

puis il calcule l'angle δ entre deux rayons vecteurs, obtenant la relation

$$\cos\delta = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma.$$

ainsi que la surface du triangle déterminé par ces rayons vecteurs. Il établit ensuite les formules de changement de coordonnées (déjà introduites par Euler et Lagrange), utilise ses rayons vecteurs pour des calculs d'équations de plans, détermine la direction de la perpendiculaire commune à deux rayons, le volume de la pyramide déterminée par trois rayons vecteurs... Ces résultats font tous partie de la géométrie de l'espace, mais il suffit à Cauchy de se placer dans le plan d'équation $z = 0$ pour obtenir des formules analogues dans le plan. Une autre particularité de Cauchy est l'attention qu'il porte à la question de l'orientation de l'espace, citant à cette occasion Ampère.

Tout ce préambule de géométrie analytique sera utilisé dans la suite de l'ouvrage, notamment pour les courbes à double courbure. Il constitue un ensemble de résultats très complet, écrit dans un style très proche de ce qu'on trouvera plus tard avec le langage des vecteurs. Nous verrons, par exemple avec l'article de Serret [1851a] qui énonce et démontre les « formules » de Serret-Frenet, à quel point ce formalisme des cosinus directeurs[8] est fondamental notamment parce qu'il fait jouer un rôle (presque) symétrique aux trois directions tangente, normale et binormale.

Après ces importants préliminaires, Cauchy traite des courbes planes en abordant toutes les questions classiques.

---

[8] La notion n'est pas nouvelle. Lacroix, dans son traité [1797] utilise des coordonnées classiques, parfois polaires (ce qu'on appelle maintenant coordonnées cylindriques) mais il évoque également la possibilité de repérer une direction par les trois angles faits avec les axes de coordonnées :

> « On aurait eu des expressions plus symétriques en employant les angles que le rayon vecteur AM fait avec chacune des coordonnées MM', MM'', MM''', car en nommant ces angles ϕ, ψ et ϖ, on aurait par les triangles MAM', MAM'', MAM''',
>
> $$MM' = AM \cos AMM' = r\cos\phi = z$$
> $$MM'' = AM \cos AMM'' = r\cos\psi = y$$
> $$MM''' = AM \cos AMM''' = r\cos\varpi = x$$
>
> où l'on remarquera que
>
> $$\cos^2\phi + \cos^2\psi + \cos^2\varpi = 1.$$ » [Lacroix 1797, p. 465]

Cette proposition se trouve également dans le second mémoire d'Euler [1786], mais dans le contexte de la géométrie sphérique.

Les courbes à double courbure

Dans la treizième leçon, Cauchy aborde la question des objets de l'espace. Il exprime les équations de la tangente à l'aide des différentielles des coordonnées (« quelle que soit la variable indépendante »), puis à l'aide des équations $u=0$ et $v=0$ des surfaces qui définissent la courbe. Ainsi, la tangente au point de coordonnées (x,y,z) est représentée par le système

$$(*)\begin{cases}(\xi-x)\frac{du}{dx}+(\eta-y)\frac{du}{dy}y+(\zeta-z)\frac{du}{dz}=0,\\(\xi-x)\frac{dv}{dx}+(\eta-y)\frac{dv}{dy}y+(\zeta-z)\frac{dv}{dz}=0.\end{cases}$$

Les calculs faits dans un cas général sont suivis de nombreux exemples, y compris la fenêtre de Viviani, et l'hélice circulaire, pour laquelle Cauchy donne une représentation paramétrique

$$\begin{cases}x=R\cos p\\y=R\sin p\\z=aRp\end{cases}$$

avant d'en donner les équations en coordonnées rectangulaires. Il ajoute :

> « dans la recherche des propriétés de l'hélice, on peut avec avantage remplacer les équations en coordonnées rectangulaires par (ce) système de formules. » [ibid., p. 199]

Cette façon d'écrire ce qu'on appelle maintenant une représentation paramétrique de la courbe est assez nouvelle, dans la tradition française en tout cas, car, comme nous l'avons vu, Euler adoptait ce point de vue.

La leçon suivante traite des surfaces. À cette occasion, il faut signaler la façon originale qu'emploie Cauchy pour définir le plan tangent. Ayant fixé un point sur une surface S d'équation $u=0$, il fait passer par ce point une courbe quelconque, dessinée sur la surface. Cette courbe est donc l'intersection de S avec une autre surface, d'équation, par exemple, $v=0$. La tangente à cette courbe est représentée par le système $(*)$ ci-dessus, et est donc toujours portée par le plan d'équation

$$(\xi-x)\frac{du}{dx}+(\eta-y)\frac{du}{dy}y+(\zeta-z)\frac{du}{dz}=0.$$

Ce plan est donc appelé plan tangent en ce point ; c'est l'ensemble des tangentes à toutes les courbes passant par ce point. Présentation élégante donc, qui d'après Cauchy serait due à Ampère [ibid., p. 203].

Une autre originalité : après avoir (seizième leçon) calculé la longueur de l'arc d'une courbe à double courbure, Cauchy établit soigneusement un théorème :

> « Théorème. Étant données deux courbes qui se touchent, si, à partir du point de contact, on porte sur ces courbes, prolongées dans le même sens, des longueurs égales, mais très-petites, la droite qui joindra les extrémités de ces longueurs sera sensiblement perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes. » [ibid., p. 283]

Appliquant ce théorème au cas d'une courbe et de sa tangente, Cauchy définit la normale principale comme étant la direction limite de cette droite. En utilisant une formule de Taylor, il démontre que les cosinus directeurs de cette normale, notés $\cos\lambda$, $\cos\mu$ et $\cos\nu$ sont proportionnels aux différentielles secondes, d^2x, d^2y et d^2z, à condition que la variable indépendante soit la longueur d'arc. Le plan qui contient la tangente et la normale principale (dix-septième leçon) est appelé plan osculateur. Sa définition même prouve que le plan osculateur est la position limite du plan contenant la tangente et un point de la courbe, lorsque ce point tend vers le point fixe. Il calcule également les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur, notés $\cos L$, $\cos M$ et $\cos N$, qui sont cette fois proportionnels aux quantités $dyd^2z - dzd^2y$, $dzd^2x - dxd^2z$ et $dxd^2y - dyd^2x$.

b. Les deux courbures, les développées

Cauchy va maintenant dérouler ses calculs, de façon complètement différente de Monge ou de Lacroix. Il définit les deux courbures de la façon suivante :

> « L'angle compris entre les tangentes extrêmes de l'arc infiniment petit $\pm\Delta s$ sera ce qu'on nomme l'*angle de contingence*. Désignons par ω ce même angle et par Ω l'angle infiniment petit compris entre les plans osculateurs qui correspondent aux extrémités de l'arc, ou, ce qui revient au même, entre les perpendiculaires aux plans dont il s'agit. Les quantités ω, Ω ne pourront s'évanouir constamment que dans certains cas particuliers, savoir : la première, lorsque la courbe proposée se changera en une droite, et la seconde, lorsque cette courbe deviendra plane. Mais, en général, ω et Ω conserveront des valeurs finies différentes de zéro, et l'on pourra en dire autant des limites vers lesquelles convergeront les rapports
>
> $$\pm\frac{\omega}{\Delta s},\ \pm\frac{\Omega}{\Delta s},$$
>
> pendant que l'arc $\pm\Delta s$ décroîtra indéfiniment. Ces limites, qui seront équivalentes, si l'on considère une courbe plane, l'une à la courbure de cette courbe, l'autre à zéro, serviront à mesurer dans tous les cas ce que nous appellerons la *première* et la *seconde courbure* de la courbe proposée. En raison des deux courbures que nous venons de signaler, toute courbe qui n'est pas comprise dans un plan se nomme *courbe à double courbure*. Si l'on représente par
>
> $$\frac{1}{\rho},\ \frac{1}{\Re}$$
>
> ces mêmes courbures ρ, $\Re$ seront les rayons des cercles auxquels elles pourront être attribuées. » [ibid., p. 296]

Il faut remarquer le soin avec lequel Cauchy introduit les grandeurs qu'il définit : il utilise en effet un passage à la limite explicite, et non le quotient de quantités infiniment petites. On peut noter également qu'il commence par introduire les courbures (notion déjà définie pour une courbe plane [ibid., p. 89]), puis les rayons de courbure correspondants. Le premier rayon est bien sûr celui du cercle osculateur, Cauchy ne cherche pas à interpréter géométriquement le second. Notons également que Cauchy prend nettement position pour la nouvelle interprétation de l'expression « courbes à double courbure. »

Cauchy passe ensuite au calcul des angles de contingence. Il utilise pour cela la formule du préliminaire que nous avons rappelée plus haut. Il exprime le cosinus de l'angle entre deux tangentes proches et fait un passage à la limite[9]. Il fait de même pour le calcul de l'autre courbure, obtenant ainsi :

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2\right]},$$

$$\frac{1}{\Re} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\cos L}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos M}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos N}{ds}\right)^2\right]}.$$

Dans la dix-huitième leçon, Cauchy détermine le centre de courbure. Il a auparavant justifié qu'il se trouve sur la normale principale, dont les cosinus directeurs $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ ont été calculés auparavant. Grâce à l'expression du rayon de courbure, il peut écrire

$$\frac{\cos\lambda}{d^2x} = \frac{\cos\mu}{d^2y} = \frac{\cos\nu}{d^2z} = \frac{\rho}{ds^2}.$$

Cette relation, en langage moderne, permet d'exprimer le vecteur $(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2x}{ds^2})$, qui est le vecteur dérivé du vecteur tangent, en fonction de la courbure et du vecteur normal, constitue ce qu'on appelle maintenant la première formule de Serret-Frenet[10].

Cauchy étudie l'ensemble des centres de courbure, et montre en particulier que la tangente à ce lieu est portée par le plan normal ; il calcule l'angle entre cette tangente et la normale principale[11], puis observe que le lieu des centres de courbure est une développée de la courbe initiale quand celle-ci est plane. Cependant il se garde de conclure pour le cas d'une courbe quelconque, étant ici moins affirmatif que Monge. Viennent alors la définition des développées, l'étude de la surface développable qui les porte, l'ordre des déductions étant très différent de l'exposé fondateur de Monge.

On remarquera quand même que les résultats obtenus par Lancret sur l'équation des développées ne font pas encore partie de l'enseignement de Cauchy. Pour étudier les développées, il choisit comme inconnue la distance entre le point courant de la développante et de la déve-

[9] La déduction n'est pas immédiate : partant de l'expression

$$\cos\omega = \cos\alpha(\cos\alpha + \Delta\cos\alpha) + \cos\beta(\cos\beta + \Delta\cos\beta) + \cos\gamma(\cos\gamma + \Delta\cos\gamma)$$

Cauchy ne passe pas à la limite immédiatement mais transforme l'expression en utilisant notamment la relation $1 - \cos\omega = \left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^2$. Saint-Venant reviendra sur la difficulté de ce calcul, voir page 156.

[10] Bien qu'il ait traité les deux courbures de façon parallèle, Cauchy n'écrit pas une telle formule pour la seconde courbure. On ne peut vraiment affirmer comme Kline [p. 561, 1972] que Cauchy a également anticipé la troisième formule de Serret-Frenet.

[11] Obtenant le résultat remarquable que le cosinus de cet angle est $\frac{d\rho}{d\varsigma}$,

loppée, ce qui ne lui permet pas d'aboutir complètement. La leçon se termine néanmoins par une étude précise et complète des développées de l'hélice circulaire.

c. Le style de Cauchy

L'apport de Cauchy aux mathématiques et aux sciences du XIX^e siècle est considérable si bien que dans cette œuvre exceptionnelle on ne considère pas en général que sa contribution à la géométrie infinitésimale soit importante. De plus, le texte que nous venons d'étudier est par ailleurs un ouvrage destiné à l'enseignement, il n'est pas destiné à exposer des résultats nouveaux.

Cependant, on ne peut qu'être frappé par la grande clarté de l'exposé de Cauchy, et surtout par la rigueur nouvelle qu'il apporte à toutes ses déductions. Par exemple, il prend soin de tenir compte de l'orientation : pour lui, l'accroissement Δs de l'arc est positif ou négatif, les rayons vecteurs sont orientés, ceci expliquant les signes $\pm$ que l'on trouve dans beaucoup de ses calculs. Nous avons déjà signalé que Cauchy intègre dans sa géométrie les idées d'Ampère sur l'orientation de l'espace, mais on ne trouve pas trace de ces questions pour l'étude des courbes à double courbure. Ainsi la seconde courbure, comme la première, est nécessairement positive.

Le plus important cependant nous paraît être l'utilisation systématique de la notion de limite. Donnons un exemple supplémentaire de cette méthode. Cauchy a défini le rayon de courbure, comme limite du rapport $\frac{\Delta s}{\omega}$ où Δs est l'accroissement de l'arc, ω l'angle de contingence, entre deux tangentes proches, et il se propose de démontrer que ce rayon ρ est aussi la limite de la plus courte distance r entre le point de la courbe (x, y, z) et la droite d'intersection du plan normal en (x, y, z) et du plan normal en $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Pour faire cette démonstration, Cauchy introduit explicitement le plan contenant le point (x, y, z) et perpendiculaire à l'intersection de ces plans normaux, mais il ne confond pas ce plan avec le plan osculateur à la courbe en (x, y, z). Il montre que la limite de r est égale à ρ en faisant intervenir des projections, des « petits » triangles pour finir par un passage explicite à la limite. Nulle part dans ces démonstrations il n'est fait allusion à une courbe-polygone.

Nous avons déjà remarqué à propos de la théorie du contact que les conceptions de Cauchy ont mis de nombreuses années avant de s'imposer ; leur intégration progressive dans les œuvres de ces successeurs va néanmoins mettre en évidence leur importance.

Chapitre B

Courbes et équations différentielles

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur un aspect de la théorie des courbes à double courbure que nous avons évoqué, à propos des travaux de Monge et de Lacroix, mais que nous n'avons pas encore détaillé. Il s'agit du lien entre certaines équations différentielles et les courbes à double courbure.

1 Monge

a. Monge et les équations différentielles

Le premier mémoire de 1784

On sait que dans les travaux de Monge, la théorie des surfaces est intimement liée à celle des équations différentielles. Nous allons brièvement exposer comment Monge voit ce lien. Un des mémoires qui expose ses idées sur la question est [Monge 1784a]. Il prolonge des idées présentes dans des communications à l'Académie, communications qui sont contemporaines du mémoire sur les développées (voir [Taton 1951, p. 279] et [Taton 1950b]). S'intéressant à des surfaces qui partagent une propriété commune, Monge fait la distinction entre deux situations :

- Les surfaces dépendent de constantes arbitraires,
- Les surfaces dépendent de fonctions arbitraires.

Si l'on veut exprimer les propriétés communes de ces surfaces, il convient d'éliminer les constantes ou les fonctions arbitraires. Monge remarque que cette élimination se fait :

- Dans le premier cas, « *en différenciant l'équation algébrique autant de fois qu'il y a de constantes arbitraires et en éliminant alors les constantes arbitraires.* » [Monge 1784a, p. 85]
- Dans le second cas, « *en différenciant l'équation algébrique par rapport à chacune des variables principales et en éliminant ensuite les fonctions au moyen des équations différentielles.* [ibid., p. 86]

Dans le premier cas, on obtient une *équation aux différences ordinaires*, dans le second une *équation aux différences partielles*. Précisons que, dans le vocabulaire de l'époque, une équation aux différences ordinaires est une relation entre des expressions et leur différentielles.

Une équation aux différences partielles fait intervenir ce qu'on appelle maintenant les dérivées partielles.

Donnons un exemple très simple du premier cas : si l'on considère la famille des sphères de centre l'origine, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, l'élimination de la constante donne lieu à l'équation différentielle ordinaire :

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

Ce travail d'élimination n'est pas seulement algébrique et formel. Avançons une justification montrant son intérêt, justification rarement explicitée : dériver, c'est non seulement éliminer une constante, mais encore mettre en évidence des propriétés de la courbe en dimension deux, de la surface en dimension trois. Ainsi, pour une ellipse, si l'on dérive la relation qui dit que la somme des distances aux deux foyers est constante, on obtient une propriété de la tangente, savoir qu'elle est bissectrice des rayons vecteurs joignant le point aux foyers. Dériver une seconde fois, c'est obtenir une propriété liée à la courbure. Pour notre exemple, la dérivation indique que le plan tangent en M est constamment orthogonal au rayon vecteur OM.

Pour la seconde situation, reprenons un des premiers exemples de Monge : une surface cylindrique, dont les génératrices sont parallèles à une droite du plan horizontal a une équation de la forme

$$z = \phi(ax - y)$$

puisque les génératrices ont pour équations $z = b,\ b = ax - y$, où a est constant. On peut alors éliminer la fonction arbitraire ϕ en différentiant par rapport à x puis par rapport à y ; soit, avec les notations modernes (Monge utilise les symboles d et δ pour indiquer respectivement la dérivation par rapport à x et la dérivation par rapport à y),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\phi'(ax - y) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\phi'(ax - y)$$

et l'élimination donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

équation qui « représente » cette famille de cylindres.

Ici la réciproque est immédiate, puisque l'équation générale du plan tangent à une surface est

$$Z - z = (X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

l'équation différentielle montre que, pour une solution, le plan tangent est parallèle à une direction fixe et la courbe est un cylindre.

Le second mémoire de 1784 [Monge 1784b]

Venons-en à ce qui intéresse davantage notre sujet, le mémoire qui porte le titre :

« *Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles*

les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées. »

Sous ce long titre, on trouve un long mémoire. Son sujet principal concerne des équations différentielles ordinaires, donc des équations qui relient les coordonnées et les différentielles dx, dy, dz (pour le premier ordre) ; il peut également y avoir des différentielles d'ordre supérieur.

Monge commence par faire une première distinction entre les équations du premier ordre. Il y a celles qui sont linéaires, de la forme $Ldx + Mdy + Ndz = 0$, et celles qui sont *élevées*[1], comme $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$. Monge rappelle que les premières peuvent être résolues quand elles satisfont à la (ou aux) « *condition(s) d'intégrabilité* », et qu'en revanche toutes les autres, qu'elles soient linéaires ou élevées, sont considérées comme *absurdes*, c'est-à-dire qu'elles n'ont pas de solution. Dans son mémoire, Monge se propose de montrer qu'on peut quand même donner un sens à ces équations et leur trouver des solutions.

Qu'est-ce qu'une solution ?

Ici, il nous faut essayer de comprendre où se situent les difficultés. Il nous semble que la première est que la notion de *solution* d'une équation différentielle, au sens moderne, n'est pas présente chez les géomètres de l'époque. D'ailleurs, on parle plutôt d'intégrer une équation que de lui chercher une solution. Dans le cas d'une équation aux différences partielles, il y a moins d'ambiguïté : clairement, dans le cas de trois variables, z est fonction (dépend) de x et y, et il faut trouver la où les fonctions z de x et y qui satisfont l'équation. Géométriquement, les solutions représentent une, ou plutôt une infinité de surfaces.

En revanche, dans le cas d'une équation aux différences ordinaires, les différentielles dx, dy, dz sont en quelque sorte « autonomes », et la même équation différentielle concerne la situation où x et y sont les variables indépendantes et z en dépend ; ou bien les trois variables x y et z dépendent d'une autre qui est indépendante. Pour reprendre notre exemple simplissime de l'équation $xdx + ydy + zdz = 0$, si x, y et z sont des fonctions dépendant d'une variable t, les solutions représenteront des courbes tracées sur une sphère.

Considérons maintenant une équation ordinaire linéaire du premier ordre qui satisfait aux conditions d'intégrabilité. Cela signifie, pour employer un langage plus moderne, qu'elle représente (moyennant la multiplication éventuelle par un facteur), la différentielle d'une fonction des trois variables, que nous noterons par exemple $f(x, y, z)$. Les intégrales sont donc de la forme $f(x, y, z) = a$ où a est une constante, et elles forment une famille de surfaces. Si une équation aux différences ordinaires n'est pas de ce type, elle n'est pas censée avoir de solution. C'est en tout cas l'opinion de Clairaut ou d'Euler. Monge affirme alors que ces équations « sont toutes susceptibles d'une véritable intégration » et il ajoute que les solutions sont alors des courbes à

[1] ce qui semble signifier que les différentielles sont élevées à un certain exposant, mais également que peuvent apparaître des produits ou quotients de différentielles.

double courbure partageant une même propriété géométrique. Reste alors à donner une méthode de résolution. Monge va donner une théorie générale, basée sur l'étude d'exemples. Nous en examinerons deux, celui des hélices et celui des courbes à courbure constante.

Les hélices, les courbes à courbure constante

Intégration de $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$ Cette équation « appartient à la courbe à double courbure dont les éléments font un angle constant avec le plan des x, y ». La méthode de Monge peut se décrire ainsi :

1. On écrit des solutions particulières (et simples). Ici il s'agit de droites faisant un angle constant avec le plan :
$$\begin{cases} x = \alpha z + \beta \\ y = z\sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2} + \gamma. \end{cases}$$
Chaque droite dépend de trois constantes α, β et γ.

2. En éliminant α entre ces équations, on obtient l'équation d'un cône
$$(x-\beta)^2 + (y-\gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$
dont le sommet est sur le plan des x, y et dont les génératrices sont des droites solutions.

3. Si alors on choisit une fonction arbitraire ϕ et que l'on prend $\gamma = \phi(\beta)$, on obtient des cônes dont le sommet se déplace sur une courbe plane, et « deux de ces surfaces courbes consécutives se couperont en une droite dont on aura la seconde équation en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable β. » [Monge 1784b, p. 508] Comme dans toutes les constructions précédentes de Monge, ces droites forment une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe à double courbure solution. Le mécanisme est toujours le même ; on construit une solution générale en raccordant des éléments de solutions simples (les droites du début). Pour ce faire, le procédé consiste à construire l'enveloppe d'une famille de surfaces. On obtiendra les équations de cette courbe en éliminant le paramètre entre l'équation du cône dérivée deux fois consécutivement :

   > « Le filet d'une vis dont l'axe est perpendiculaire au plan des x, y est un cas particulier de cet exemple ; & le filet d'une vis tracée sur une surface cylindrique à base quelconque , & perpendiculaire au plan de x, y en est le cas général. » [ibid., p. 509]

Monge reprend ensuite le problème à l'envers : partant de l'équation $M = 0$ d'une surface contenant une constante arbitraire α et une fonction arbitraire ϕ de cette constante, il explique comment construire l'équation de l'enveloppe, puis l'équation de l'arête de rebroussement associée, puis l'équation aux différences partielles des enveloppes $V = 0$, et enfin l'équation aux différences ordinaire de la courbe $U = 0$. Par exemple, dans l'article III, l'équation $M = 0$ est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\phi\alpha)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

et les deux équations $U = 0$ et $V = 0$ sont

$$p^2 + q^2 = a^2$$

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Cela établit ainsi une relation éminemment géométrique entre une équation aux différences ordinaires et une équation aux dérivées partielles. Monge donne ensuite plusieurs nouveaux exemples où, sachant résoudre une des équations $U = 0$ ou $V = 0$, on résout l'autre.

Les courbes à courbure constante. Cette fois Monge s'attaque à « *Des équations aux différences ordinaires élevées du second ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux* ». Son premier exemple est :

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \begin{cases} (dxddy - dyddx)^2 \\ +(dzddx - dxddz)^2 \\ +(dyddz - dzddy)^2 \end{cases}$$

qui caractérise les courbes dont la courbure est constante égale à a. La démarche est la même, en partant de la solution particulière que sont les cercles de rayon a, dont l'équation s'écrit

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2 \\ x - \alpha + (y-\beta)\epsilon + (z-\gamma)\eta = 0. \end{cases}$$

Monge construit une famille de ces cercles en posant $\beta = \phi(\alpha)$ et $\gamma = \psi(\alpha)$, et construit une courbe solution par le même procédé que ci-dessus, en détaillant le travail d'élimination nécessaire. Voici la conclusion :

> « En faisant pour abréger,
>
> $$(x-\alpha)^2 + (y-\phi\alpha)^2 + (z-\psi\alpha)^2 - a^2 = M,$$
>
> le système des quatre équations
>
> $$M = 0,\ \frac{dM}{d\alpha} = 0,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2} = 0,\ \frac{d^3M}{d\alpha^3} = 0$$
>
> appartient à la courbe dont la courbure est constante. » [Monge 1784b, p. 544]

Mais il a observé de plus que, en éliminant x, y, et z, on obtient une

> « équation de condition entre α, $\phi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$, la même que l'équation aux diffé-

> rences ordinaires seconde, en x, y et z. Il résulte de là que la courbe dont les coordonnées sont α, $\phi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ est aussi de courbure constante. » [ibid. p. 544]

Cette courbe est, bien sûr, l'ensemble des centres de courbure de la courbe à courbure constante. Monge continue en montrant que ces deux courbes partagent le même rayon osculateur mais que leur tangentes en deux points correspondants sont perpendiculaires. Il cite enfin en exemple le cas particulier des hélices circulaires[2].

La méthode employée est donc très géométrique ; elle consiste à construire une solution en « raccordant » des éléments solutions (en l'occurrence des éléments de cercle). Nous verrons plus loin comment Lagrange s'intéressera au même problème : la géométrie sera beaucoup moins prégnante. Le mémoire que nous venons de citer est critiqué par Darboux, au début de son traité sur les surfaces :

> « Mais le procédé que Monge fait connaître, pour la détermination de l'équation en termes finis des courbes dont la courbure est constante, est évidemment inexact. Les équations finies que donne l'illustre géomètre contiennent en effet, deux fonctions arbitraires que Monge regarde comme indépendantes, bien qu'il ait démontré quelques pages auparavant, qu'elles sont liées l'une à l'autre par une équation différentielle. » [Darboux 1887, p. 25]

En effet Monge, dans son paragraphe XXII, obtient des équations « donnant » les courbes à courbure constante, et il ajoute que « *les fonctions ϕ et ψ ne doivent pas être toutes deux arbitraires ; et que l'une des deux étant prise à volonté, la forme de l'autre s'en suit, pour que la courbe dont les équations $\beta = \phi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, passe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure est constante.* » Par la suite, Monge indique comment on peut résoudre complètement l'équation initiale, de façon quand même théorique car il reste des éliminations *« qui ne peuvent se faire en général »* . La résolution explicite du problème des courbes de courbure constante sera obtenue plus tard, par Joseph-Alfred Serret puis de façon plus simple par Darboux.

Après ces deux exemples, rappelons que de nombreux travaux ultérieurs de Monge seront consacrés aux équations différentielles, essentiellement aux équations aux différences partielles. Il ne s'agira plus alors d'interpréter des solutions mais de trouver des méthodes de résolution, et les résultats obtenus ne seront que partiels. Nous espérons avoir montré, dans le cadre des courbes à double courbure, à quel point la géométrie est pour Monge un cadre constant, pour se représenter les problèmes et aussi pour arriver à les résoudre.

b. Retour sur le mémoire de Lacroix [1790]

Pour prolonger ce que nous venons d'exposer sur les travaux de Monge, revenons au mémoire [Lacroix 1790]. Nous en avons déjà examiné la première partie. La seconde partie, à particle de l'article XII est titrée : *Remarques sur les équations aux différences ordinaires à trois*

[2] L'ensemble des centres de courbure est alors une autre hélice circulaire de même axe.

variables. Elle reprend les thèmes abordés dans [Monge 1784a] et [Monge 1784b], en changeant parfois de point de vue ;

Citons un exemple éclairant. Au lieu de partir d'une équation aux différences ordinaires, Lacroix considère le système formé par deux équations aux différences partielles

$$\begin{cases} py - qx = 0 \\ p(x-a) + q(y-b) = c \end{cases}$$

Rappelons que p et q désignent les dérivées partielles de z par rapport à x, respectivement à y. On peut alors, compte-tenu de la relation $dz = pdx + qdy$, éliminer p et q et obtenir une équation aux différences ordinaires

$$(x(x-a) + y(y-b))dz = (z-c)(x\,dx + y\,dy).$$

Lacroix montre alors que cette équation satisfait aux conditions d'intégrabilité lorsque $z = c$ ou bien $a = b = 0$. Dans le premier cas, la solution est le plan d'équation $z = c$, dans le second cas, l'équation aux différences ordinaires s'écrit

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

qui s'intègre de façon évidente en $z - c = k\sqrt{x^2 + y^2}$, équation d'un cône circulaire dont le sommet est sur l'axe des z.

Il reste à s'intéresser aux autres solutions et c'est là qu'une interprétation géométrique va tout éclairer. La première équation du système caractérise les surfaces de révolution d'axe $0z$, la seconde les cônes de sommet (a, b, c). Il existe donc, pour des raisons géométriques évidentes, deux surfaces qui sont solution du système, à savoir le plan d'équation $z = c$, et, dans le cas où $a = b = 0$, un cône circulaire de sommet $(0, 0, c)$. Lacroix fait alors comprendre que les *autres* solutions sont des courbes obtenues par intersection de familles de cônes avec des familles des surfaces de révolution. On trouve, mais de façon un peu plus compliquée que dans les premiers exemples de Monge, l'idée qu'une solution générale est construite en assemblant de petits éléments de solutions simples, en l'occurrence intersection de deux surfaces.

Ces travaux de Monge, et leur reprise par Lacroix, donnent une vision nouvelle des courbes à double courbure : elles peuvent être représentées par des équations différentielles, qui, en quelque sorte, expriment une relation entre les coordonnées (x, y, z) d'un point et l'élément (dx, dy, dz). Cette interprétation très géométrique d'équations différentielles ne permet pas d'obtenir des résultats spectaculaires. En particulier, on ne dégage pas encore nettement de méthode de résolution des équations ordinaires ou des équations aux différences partielles associées, qui renouvelle vraiment les connaissances de l'époque. Il n'en reste pas moins que cette interprétation géométrique donne un éclairage saisissant à des problèmes au départ purement analytiques.

2 Lagrange et les développées

Nous avons vu comment Lagrange met en œuvre sa théorie des fonctions pour fonder une théorie du contact. Ses travaux sur les équations différentielles remontent au début des années 1770, mais nous allons nous attacher à l'application de ses idées à la géométrie dans la *Théorie des fonctions analytiques* [Lagrange 1797].

a. Courbes et contact

Beaucoup de problèmes de géométrie faisant intervenir des tangentes ou des cercles osculateurs conduisent à des équations différentielles. C'est ce type de problème qu'étudie Lagrange dans le chapitre III de son traité *Étude des problèmes directs et inverses où interviennent des questions de contact.*

Le premier exemple qu'il examine s'énonce ainsi : chercher une courbe plane telle que chaque tangente coupe les deux droites d'équation respectives $x = m$ et $x = n$ de sorte que le produit des distances des points d'intersection à l'axe Ox soit constant ; on trouve des coniques. Lagrange remarque que le résultat est dans le traité d'Apollonius, mais que « *l'analyse précédente a l'avantage de faire voir que cette propriété appartient uniquement aux sections coniques.* ». En réalité, la résolution de ce problème géométrique simple est l'occasion pour Lagrange de mettre en application les principes généraux qu'il a introduis dans la première partie de son traité. Si on part d'une relation $F(x, y, a, b) = 0$, qui est l'équation de la courbe de contact (ici, c'est l'équation de la tangente) et si on ajoute une condition $\phi(a, b) = 0$ qui dépend de la nature du problème posé, on trouve deux types de solutions : une solution *singulière*, qui est une conique (ellipse ou hyperbole) et une infinité d'autres solutions. Ces solutions sont des droites qui sont les tangentes à la conique. Dans le cas général, si $y' = F(x, y)$ est une équation du premier ordre, la solution singulière est celle qui rend infini la dérivée partielle[3] $\partial F/\partial y$.

Lagrange traite ensuite le cas général. On se donne une courbe de contact $F(x, y, a, b) = 0$ et une relation $\phi(a, b) = 0$ entre les éléments de contact. Dans l'exemple précédent, a et b représentent les deux paramètres de l'équation de la tangente. Pour résumer la discussion un peu longue qui suit, supposons que, par élimination de b, on ait une relation $f(x, y, a) = 0$. Lagrange écrit alors :

> « [Cette] équation représente, en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles,une infinité de courbes qui varient de forme ou de position, ou de l'une et l'autre à la fois, à raison des variations du paramètre ; et si on élimine ce paramètre par le moyen des fonctions primes (n^o 59), l'équation résultante appartiendra à toute cette famille de courbes. Elle appartiendra donc aussi à la courbe formée par toutes ces courbes, et qui les enveloppera, ayant avec elles un contact du premier ordre. La même équation $f(x, y, a) = 0$ ainsi que son équation prime $f(x, y, a)' = 0$ prise relativement à x et y seuls devront avoir lieu également pour cette courbe

[3] Lagrange la note $F'(y)$.

> enveloppante, en regardant le paramètre a comme une quantité variable.
>
> [...] D'où l'on peut conclure que l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre représente toujours la courbe enveloppante de toutes les courbes qui peuvent être représentées par son équation primitive complète, en donnant à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles. » [Lagrange 1797, p. 142-143]

On obtient en définitive, la même conclusion géométrique que dans les exemples de Monge, de façon ici plus simple puisque le problème est plan : l'équation différentielle correspondant au problème a une infinité de solutions que l'on peut qualifier d'évidentes et qui constituent une famille de courbes. Elle a également une solution singulière qui est l'enveloppe de la famille de solutions. On peut interpréter cette solution singulière (qui est souvent celle résout le problème initial) comme le raccordement d'éléments pris sur les solutions « complètes ». Lagrange a étudié la théorie des solutions singulières et complètes des équations différentielles dans la première partie de son traité. La géométrie en donne ici une interprétation.

Remarquons également de façon incidente la difficulté de l'utilisation du langage des fonctions primes quand on se met dans la situation de plusieurs variables indépendantes, ou bien quand on change de variable indépendante.

Serret, éditeur des œuvres complètes de Lagrange, revient sur le sujet dans une note. [ibid., p. 415-421] Il y explique qu'une intégrale complète est une solution qui contient autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes. Mais l'intégrale générale renfermant une fonction arbitraire de $n-1$ variables, il est évident qu'on pourra en déduire une infinité d'intégrales complètes. Réciproquement on peut déduire d'une intégrale complète une solution renfermant une fonction arbitraire de $n-1$ variables et qui généralement coïncide avec l'intégrale générale.

b. Les contacts du second ordre

Les généralisations vont dans deux directions. D'une part l'augmentation de l'ordre du contact, qui va de pair avec l'augmentation du nombre de paramètres et celle de l'ordre des équations différentielles et, d'autre part, le passage à l'espace qui correspond à nos préoccupations.

Lagrange commence par étendre la théorie du chapitre précédent au cas d'une équation du second ordre et établit un lien entre solutions singulières et courbes enveloppant avec un contact du second ordre une famille de courbes dépendant de deux paramètres (ou de trois paramètres liés). Exposons l'analyse dans le cas particulier du cercle osculateur en un point d'une courbe. On supposera que y est fonction de x). Si on part de l'équation d'un cercle

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2, \qquad (1)$$

on peut en prendre l'équation prime

$$x-a+y'(y-b)=0, \qquad (2)$$

puis à nouveau l'équation prime

$$1 + y''(y-b) + y'^2 = 0, \qquad (3)$$

ce qui exprimera qu'il y a un contact du second ordre entre la courbe et un cercle. On peut résoudre ce système et exprimer b, puis a et c ; on retrouve les formules classiques.

Lagrange observe également que connaissant la famille des cercles, on peut retrouver la courbe au moyen d'une équation différentielle du second ordre, cette courbe est dans son langage une intégrale singulière, les intégrales ordinaires étant les cercles.

La démarche de Lagrange le conduit alors vers une autre direction. Si, partant de (1) on prend la fonction prime de (1) sans supposer a, b et c constants, on obtient, compte-tenu de (2) :

$$a'(x-a) + b'(y-b) = cc' \qquad (4)$$

et de même, si l'on prend l'équation prime de (2), sans supposer a, b constant, on obtient, compte tenu de (3) :

$$a' + b'y = 0 \qquad (5)$$

Ces équations sont les mêmes que si l'on était parti de l'hypothèse que x et y sont constants, a, b et c variables. Conclusion : « les valeurs de $\frac{a'}{c'}$ et $\frac{b'}{c'}$ sont les mêmes soit que les quantités x et y soient traités comme variables ou non. », Cela permet à Lagrange d'assurer que le rayon osculateur est partout tangent à la courbe des centres, retrouvant ainsi la théorie de Huygens « qui n'avait été démontrée que par des considérations géométriques. » [ibid., p. 230]

c. Cas des courbes à double courbure

Venons-en au cas des courbes à double courbure. Par le même procédé que dans le cas plan, Lagrange obtient les coordonnées (a, b, c) du centre de courbure comme solution du système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2 \\ x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0 \\ x - a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0 \\ 1 + my' + nz' = 0 \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0 \\ my'' + nz'' = 0 \end{cases}$$

où x est la variable indépendante. Les deux premières équations sont celles d'un cercle passant par le point (x, y, z) de la courbe, les suivantes sont obtenues en dérivant deux fois, assurant ainsi un contact d'ordre deux.

Il s'intéresse ensuite à la courbe formée par ces centres et cherche les « *conditions nécessaires pour qu'elle devienne une développée de la courbe à double courbure.* » [ibid., p. 253]. Il considère donc les expressions obtenues pour a, b et c

$$\begin{cases} a = x - \frac{(ny'-mz')d}{R} \\ b = y + \frac{(n-z')d}{R} \\ c = z - \frac{(m-y')d}{R} \end{cases}$$

(m, n et d s'exprime à l'aide des fonctions coordonnées, de même que le rayon de courbure R.)

Lagrange interprète alors ces équations comme un système d'équations du rayon osculateur, en considérant d comme seule variable, toutes les autres lettres représentant des constantes. Cette droite sera donc tangente à la courbe des centres si les valeurs de $\frac{a'}{d'}$, de $\frac{b'}{d'}$ et de $\frac{c'}{d'}$ sont les mêmes « *soit que les quantités a b c et d soient seules variables, soit que les quantités x, y, z, m et n varient aussi en même temps.* » Mais à la différence du cas précédent, si l'on prend la fonction prime de la seconde équation (dans l'hypothèse où tout varie), on obtient :

$$-a' - mb' - nc' + m'(y-b) + n'(z-c) = 0$$

Cela ne correspond à dériver pour a, b, c et d seules variables que si :

$$m'(y-b) + n'(z-c) = 0.$$

Lagrange annonce donc que, à cette condition, la courbe des centres sera développée de la courbe de départ comme dans le cas d'une courbe plane. Il remarque que cette condition a lieu, de façon évidente lorsque m et n sont constants, et qu'alors la courbe est plane. Mais il ajoute que si ces quantités ne sont pas constantes, elle déterminent le plan tangent (= osculateur) et qu'alors les rayons osculateurs forment une surface développable. On sait que ce n'est pas possible pour une courbe à double courbure. Monge l'a démontré, à sa manière bien particulière (voir l'article 8 de [Monge 1780]) très géométrique.

Que dire de la condition obtenue par Lagrange ? Un examen rapide montre qu'elle exprime que la dérivée d'un vecteur normal au plan osculateur est constamment orthogonale à la normale principale ; on sait, grâce à la troisième formule de Serret-Frenet, que cela n'est possible que si la torsion est nulle, donc que la courbe est plane. Jacobi et Poinsot donneront (voir ci-dessous) une autre dérivation. L'erreur de Lagrange se reproduit dans le chapitre IX qui traite des lignes de courbure : Lagrange étudie en effet, par le même procédé, les sphères osculatrices aux courbes à double courbure tracées sur une surface, et retrouve ainsi les lignes de courbure. Il en déduit que, sur une surface quelconque, les lignes de courbure ont la propriété que l'ensemble de leurs centres de courbure est une développée. Il semble, si on examine son calcul, qu'il ait montré plutôt que les normales (à la surface) ont une enveloppe si elles sont menées depuis une ligne de courbure. Ces enveloppes ont été introduites et étudiées par Monge [1781].

d. Prolongements

Les affirmations que Lagrange fait dans le chapitre VII seront prises pour argent comptant pendant longtemps. Elles seront contestées seulement des années plus tard par Jacobi.

La note de Jacobi dans le Journal de Crelle [1836]

C'est une courte note parue dans le Journal de Crelle en 1836. Elle est intitulée « Nota de erroribus quibusdam geometricis, quia in Theoria Functionum Leguntur » et Jacobi y signale des erreurs de l' « illustre Lagrange » ; d'abord dans le n^o 35 de la *Théorie des fonctions analytiques*, puis plus loin, dans la propriétés qu'énonce Lagrange sur les lignes de courbure. Jacobi termine en évoquant ses propres travaux [Jacobi 1834] qui infirment les affirmations de Lagrange (avec le même type d'argumentation que reprendra Poinsot).

La réponse de Poisson

Le lundi 10 avril 1837, lors de la séance à l'Académie, Poisson vient au secours de Lagrange et lit une note qu'il a fait publier dans le Journal de Liouville, [Poisson 1837a]. C'est la « Note sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques ». Il s'agit d'une réponse à Jacobi mais seulement sur la seconde critique, celle qui porte sur la question des lignes tracées sur une surface. Selon lui, Lagrange utilise une notion de centre de courbure et de rayon de courbure qui n'est pas celle qu'envisage Jacobi : si une courbe est tracée sur la surface, en en point M de cette courbe, il considère les sphères ayant même plan tangent (donc centrées sur la normale principale) et « *pour la quelle la dérivée seconde de l'ordonnée z soit la même que pour la surfaces, mais seulement dans la direction de la ligne donnée* ». En un point, il y a alors deux directions (orthogonales) donnant un extremum, qui déterminent des lignes de plus grande courbure ou moindre courbure. Les normales menées par ces lignes engendrent effectivement une surface développable, dont l'arête de rebroussement est une développée au sens de Monge. L'interprétation que fait Poisson est indulgente, Lagrange a sans doute fait une confusion. Suivent quelques considérations sur des ellipsoïdes osculateurs ; l'article est suivi de la citation extensive de la note de Jacobi.

Lors de la séance du 17 avril, Poinsot revient sur la question... et prend la défense de Jacobi [Poinsot 1837]. Il signale que la première critique de Jacobi porte sur le paragraphe 35 du chapitre VII du traité de Lagrange, et sur la question des « véritables » développées. Poinsot précise :

> « Il est clair que l'auteur, n'allant pas plus loin dans l'examen de cette condition analytique, paraît supposer qu'elle pourrait être remplie sans que m et n fussent constantes, et par conséquent dans d'autres cas que celui d'une courbe plane [...] » [1837, p. 560]

Poinsot montre alors, comme nous l'avons signalé plus haut, que la condition signalée ne peut être réalisée que pour une courbe plane. Il observe qu'en remplaçant m et n par leur expression, on obtient

$$(y''z''' - z''y''')[(z-c)y' - (y-b)z'] = 0.$$

En intégrant le premier facteur, on trouve $z = Ay + Bx + C$, qui représente un plan. Poinsot examine l'autre facteur : en remplaçant c et b par leur valeur, il obtient $my' + nz' - y'^2 - z'^2 = 0$ qui se réduit à $1 + y'^2 + z'^2 = 0$, condition impossible à réaliser. Poinsot termine en remarquant que cette erreur (ou « omission »), laisse planer un doute sur ce que Lagrange entend exactement dans le chapitre IX, critiqué par Jacobi.

Poisson répond lors de la même séance [1837b] en maintenant sa position au moins en ce qui concerne le chapitre IX, « J'ai dit dans ma note et je maintiens que ces deux passages (de Lagrange) sont parfaitement exacts. » [1837b, p. 562] Il reconnaît cependant que Lagrange pouvait conclure le numéro 35 du chapitre VII de manière moins équivoque. Cette réponse à l'objection de Poinsot sera reprise dans le Journal de Liouville. [Poisson 1837c, p. 589]

La polémique ne passa pas inaperçue. Dans le premier ouvrage d'enseignement qui inclut les formules de Serret, Joseph Bertrand [1864] remarque :

> « *Quelques pages écrites par d'illustres géomètres ont ajouté un intérêt historique à l'importance propre de la remarque précédente. Lagrange, en effet, en écrivant la théorie des fonctions analytiques, croyait que le lieu des centres des cercles osculateurs peut, dans certains cas, avoir pour tangentes les normales principales de la courbe ; il cherche même la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, et ne remarque pas, quoique Monge l'eût dit depuis longtemps, que les courbes planes satisfont seules à cette condition.* »

Bertrand reprend ensuite l'histoire de la polémique Jacobi-Poisson-Poinsot.

e. Conclusion

Ce chapitre nous a montré l'interaction entre la théorie des équations différentielles, ou plus précisément une partie de celle-ci, et la théorie des courbes à double courbure. La comparaison entre les approches de Monge et de Lagrange montre une différence nette : l'auteur de la théorie des fonctions analytiques rencontre la géométrie de façon relativement incidente, tandis qu'elle est au premier plan dans les textes de Monge.

On peut conclure en reconnaissant un (relatif) échec à la tentative de n'utiliser que les moyens de l'analyse pour traiter des questions géométriques. La théorie des enveloppes n'est pas mise au premier plan et reste sous-jacente à la théorie des intégrales singulières des équations différentielles du premier ordre. La théorie du contact, purement analytique (on pourrait presque dire algébrique) n'est pas encore totalement satisfaisante, notamment dans l'espace. Cependant, indépendamment de la polémique citée, les méthodes utilisées par Lagrange montrent une originalité certaine, par exemple dans l'étude des cercles de courbure des courbes planes ou à double courbure.

Chapitre C

Des problèmes d'hélices

La théorie des courbes à double courbure est maintenant bien établie. Les méthodes de Cauchy, les résultats de Lancret sont intégrés dans l'enseignement comme on peut le voir dans les différents cours d'analyse professés à l'École polytechnique. Il n'en reste pas moins que divers problèmes sont encore objets d'études, souvent de la part de jeunes ou d'apprentis mathématiciens, très souvent issus de cette école ; ces différents problèmes ont souvent comme particularité d'être des problèmes réciproques, donc en définitive des problèmes d'intégration. De ce point de vue, ils sont nécessairement plus difficiles à résoudre que les problèmes directs qui les inspirent. C'est d'autant plus le cas que de nouvelles exigences de rigueur font que l'on accepte moins les méthodes géométriques et que l'on privilégie les méthodes de l'analyse.

1 L'hélice osculatrice

Théodore Olivier (1793-1853) est connu comme spécialiste de géométrie descriptive. On trouve quelques mémoires sur le sujet des courbes gauches dans le *Journal de l'École polytechnique*, [1833, 1834, 1835a, 1835b], ainsi que dans divers cours de géométrie descriptive comme [1844]. Nous nous intéresserons surtout au mémoire de 1835 car il pose la question théorique importante de la recherche d'une hélice osculatrice à une courbe à double courbure. Les autres articles sont instructifs quant aux applications à la fois pratiques (engrenages coniques) ou théoriques (rayons de courbure maximaux et minimaux) de la géométrie descriptive.

a. De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure [1835a]

Ce mémoire a été lu à la Société Philomathique le 28 mars 1835. Donnons-en l'introduction. Il offre des particularités remarquables. Tout d'abord, sa présentation est assez inhabituelle : une première partie est titrée *Résumé*, une seconde *Discussion*. Dans la première partie, Olivier décrit le problème qu'il veut résoudre et annonce ses solutions, en donnant au passage des éléments de preuve. Puis il va tout reprendre dans la seconde partie, et il prévient :

« La marche que je viens de tracer serait celle qu'on devrait suivre, sans contredit,

> dans un traité ; mais il me semble qu'un mémoire doit être écrit dans un tout autre esprit, car il n'est pas sans intérêt, et peut être n'est-il pas sans utilité de connaître la série des idées qui ont conduit successivement aux différents résultats obtenus. C'est pourquoi j'ai laissé à ce Mémoire la forme que les recherches successives ont dû nécessairement lui donner. » [Olivier 1835a, p. 65]

Effectivement, la suite du mémoire montre de façon tout à fait instructive le cheminement de ses raisonnements. L'autre particularité du mémoire est le langage utilisé, la formulation des démonstrations. Olivier est un spécialiste de géométrie descriptive et sa vision des courbes gauches est portée par cette formation. Comme on va le voir, il revient à une vision des courbes-polygones.

Pour entrer plus précisément dans le texte, donnons le début du résumé :

> « Résumé
>
> Lorsqu'on veut déterminer l'inclinaison d'un élément d'une courbe plane ou à double courbure, par rapport à une droite ou a un plan ayant une position déterminée, on compare la courbe à une ligne ayant une inclinaison constante en chacun de ses points ; et c'est ainsi qu'on est conduit à comparer une courbe à sa tangente, lorsqu'il s'agit de l'inclinaison d'un élément de la courbe ou de la direction d'une courbe en un de ses points.
>
> Lorsqu'on veut déterminer la courbure d'une courbe plane ou à double courbure, on la compare à une courbe ayant une courbure constante, et comme le cercle est la seule courbe plane qui jouisse de cette propriété, c'est au cercle que l'on compare la courbe donnée, et c'est ainsi que l'on est conduit à comparer une courbe à son cercle osculateur, lorsqu'il s'agit de la courbure d'une courbe en un de ses points.
>
> Pour une courbe à double courbure, on devrait aussi pour déterminer en même temps sa courbure et sa flexion en un point, la comparer à une courbe ayant une courbure constante et une flexion constante. » [ibid., p. 61]

Le problème est donc posé de façon claire mais des questions demeurent : une des plus intéressantes est la question du contact. On sait déjà que le cercle osculateur d'une courbe à double courbure a un contact d'ordre au moins égal à deux. On peut donc espérer qu'avec une hélice on pourra améliorer ce résultat : « À première vue », écrit Olivier, « on serait porté à croire que l'on peut toujours construire une hélice cylindrique circulaire ayant un contact du troisième ordre avec une courbe à double courbure, puisque l'on peut évidemment construire une hélice circulaire ayant même angle de contingence et même angle de flexion que ceux qui existent en un point d'une courbe à double courbure. » [ibid., p. 62]

En réalité, il n'en est rien. Pour le justifier, Olivier donne deux arguments : le premier utilise la notion de contact selon Lagrange. Pour qu'il y ait contact d'ordre au moins trois, il faut qu'il y ait contact d'ordre au moins trois sur deux projections planes, ce qui nécessite six constantes arbitraires. Or une hélice circulaire passant par le point n'en offre que cinq. Le second argument est plus subtil : Olivier rappelle les propriétés d'une hélice circulaire, et notamment le fait que, pour une telle courbe, le lieu des centres de courbure et l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans normaux (c'est-à-dire le lieu des centres de courbure sphérique) coïncident. Si donc une hélice avait un contact du troisième ordre avec une courbe à double courbure, comme le centre de courbure dépend de deux points consécutifs et le centre de courbure sphérique de trois points, la courbe à double courbure partagerait avec l'hélice la coïncidence de ces deux points, ce qui ne peut être[1].

Sans doute pas encore convaincu par ses propres arguments, mais c'est dans la démarche qu'il a annoncée, Théodore Olivier avance encore d'autres explications. Sans entrer dans les détails du reste du mémoire[2], signalons que Olivier étudie de façon géométrique les développantes des développées des hélices circulaires et énonce qu'elles partagent avec les hélices circulaires la propriété « d'avoir même angle de contingence et même angle de flexion en chacun de (leurs) points » [ibid., p. 80].

Nous savons, cela ne sera affirmé et démontré que par Puiseux [1842], que c'est inexact, si toutefois on comprend bien l'expression d'Olivier comme désignant des courbes à courbure et torsion constantes.

On peut donc considérer ce mémoire comme un texte de transition. Il intègre les résultats de Lancret et de Fourier[3], fait ressortir l'importance des deux grandeurs que sont la courbure (ou le rayon de courbure) et la flexion, mais ses modes de démonstration sont loin d'être convaincants. Cependant, son étude des développées des hélices circulaires montre une virtuosité certaine pour décrire des figures de l'espace extrêmement complexes. Olivier n'est pas un spécialiste de l'analyse et, par exemple, il donne comme expression du rayon de courbure sphérique R (ou rayon de la sphère osculatrice), la formule

$$R = \frac{\sqrt{2\rho(\rho + d\rho)(1 - \sqrt{1 - f^2}) + d\rho^2}}{f}$$

où le rayon de courbure est ρ et l'angle de flexion f. Cette formule imbrique des quantités finies et des infinitésimaux de façon désordonnée ; si on la simplifie en négligeant ce qui doit l'être, on retrouve le résultat habituel pour le rayon de la sphère osculatrice ($\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 T^2}$, en notant T la torsion).

Ce mémoire a été complété, et corrigé, par une « Addition », publiée dans le même cahier du *Journal de l'École polytechnique* [Olivier 1835b][4]. Olivier apporte alors les précisions suivantes :

[1] C'est seulement pour une courbe plane ou pour une courbe à courbure constante que les deux centres coïncident constamment.

[2] On trouve, entre autres, une démonstration originale de ce que pour une hélice cylindrique, le rapport courbure sur flexion est constant.

[3] Connus par l'intermédiaire du traité de Lacroix : « M. Fourier a remarqué que l'arête de rebroussement A de la surface enveloppe des plans normaux d'une courbe D, avait ses angles de contingence respectivement égaux aux angles de flexion de cette courbe D. (M. Lacroix a consigné cette remarque dans la 4^{o} édition de son Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral, p. 236.) »

[4] Ce mémoire est daté du 15 janvier 1836, alors qu'il est inséré dans une publication datée de l'année 1835.

– Une hélice circulaire ne peut avoir un contact d'ordre trois avec une courbe à double courbure quelconque, mais il y a une infinité d'hélices circulaires qui offrent un contact d'ordre deux. Et on peut en choisir une qui partage avec la courbe le même angle de flexion.
– Deux hélices circulaires distinctes ne peuvent avoir entre elles un contact du troisième ordre.
– Deux courbes à double courbure ont entre elles un contact du troisième ordre si elles partagent le même cercle de courbure, le même angle de flexion, et la même sphère osculatrice.

Ce dernier résultat est complété par la remarque suivante :

> « Ainsi, en *géométrie*, le contact du troisième ordre entre deux courbes qui ont un point commun, doit s'établir par les trois conditions précédentes, tandis que, en *analyse*, ce même contact s'établit entre deux courbes dont les équations sont pour la 1re
>
> $$\begin{cases} x = f(x) \\ y = f'(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = F(x) \\ y = F'(x) \end{cases}$$
>
> pour la 2e (ces deux courbes ayant aussi un point commun) en posant les six équations
>
> $$\begin{array}{r|r|l} df = dF & d^2f = d^2F & d^3f = d^3F \\ df' = dF' & d^2f' = d^2F' & d^3f' = d^3F' \end{array}$$
>
> qui, pour qu'en effet le contact du troisième ordre existe, doivent être satisfaites par les coordonnées du point commun entre les deux courbes. » [Olivier 1835b, p. 263]

Cet extrait montre bien la différence entre la géométrie et l'analyse d'après Olivier. On peut ajouter que le mémoire est présenté, dans le *Journal de l'École polytechnique*, dans la rubrique « Géométrie descriptive » et que les démonstrations présentes dans cette addition sont encore plus que dans le mémoire précédent dépouillées de toute intervention du calcul infinitésimal : ce qu'étudie en effet Olivier, ce sont les propriétés que partagent les hélices circulaires qui ont en un point le même cercle osculateur. Comme le montre la planche de figures C.1, ce sont des arguments géométriques, et à base d'études de projections, qu'utilise Olivier.

b. Cours de géométrie descriptive

Pour montrer la filiation avec Monge et Lacroix, voici une citation de son ouvrage de 1844 :

> « Considérons une droite D, supposons qu'on la brise en un point m' et que la partie à droite de ce point vienne en D', qu'on brise encore cette droite en m'' pour faire prendre à la partie de droite la position D'' sans qu'elle sorte du plan déterminé par les fragments de droite [...] et ainsi de suite la ligne D cesse d'être droite et acquiert une seule courbure [...] Mais si maintenant on suppose que la partie

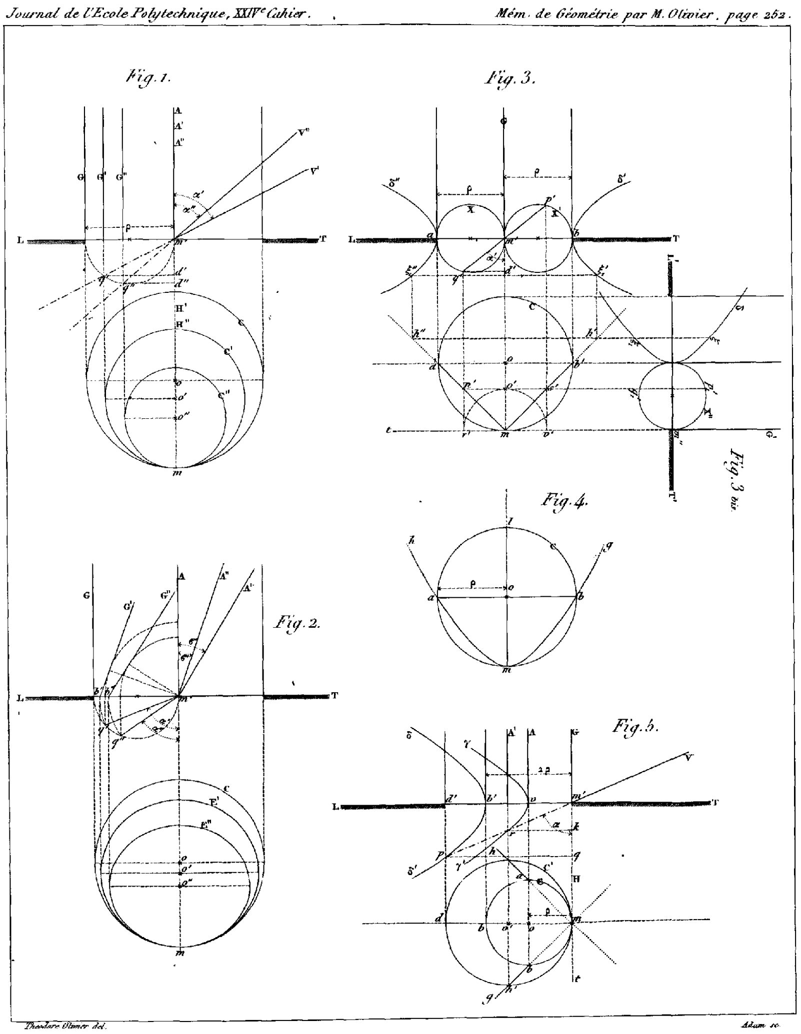


FIG. C.1 – Planche de l'« Addition au mémoire... » [1835b]

> $m'm''m''$... tourne autour de D' pour voir prendre une position voisine, qu'ensuite la partie m''... tourne autour de D'' [...] la courbe C acquerrait une seconde courbure résultant des brisements successifs de son plan le long des droites D', D'',... »
> [Olivier 1844, p. 2]

Plus loin, Olivier définit l'ordre de contact entre deux courbes : premier ordre lorsqu'elles ont en commun deux points successifs, ou un élément rectiligne $\overline{mm'}$ commun ; contact du deuxième ordre lorsqu'elles ont trois points successifs communs, ou deux éléments rectilignes communs, et ainsi de suite. Le contact du second ordre prend le nom d'osculation. « Dans les courbes gauches deux plans osculateurs successifs font entre eux un angle infiniment petit que l'on désigne par le nom d'angle de flexion. »

2 La caractérisation des hélices

Le second problème que nous allons aborder concerne l'hélice circulaire. Son énoncé, tel qu'il apparaît dans l'article de Victor Puiseux [1842] est le suivant :

« Trouver la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes. »

La partie directe est bien connue. L'hélice circulaire est l'exemple privilégié (parfois même le seul exemple) de courbe à double courbure que l'on trouve dans les cours d'analyse appliquée à la géométrie. Par exemple, dans celui de Cauchy [Cauchy 1826a, p. 304], on trouve les résultats

$$\rho = (1+a^2)R \qquad \text{et} \qquad \Re = \frac{1+a^2}{a}R,$$

lorsque l'hélice est donnée par :

$$x = R\cos p, \qquad y = R\sin p, \qquad z = aRp.$$

On a donc bien une courbure et une torsion constante. Se pose alors la question de la réciproque, que va résoudre Puiseux, alors jeune enseignant, tout juste sorti de l'École normale supérieure. Contrairement aux affirmations de Théodore Olivier, Puiseux va montrer que seules les hélices circulaires ont cette propriété.

a. Le mémoire de Puiseux [1842]

Le problème est abordé comme un problème de résolution d'équation différentielle. Puiseux utilise l'arc s comme variable indépendante et écrit donc

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}$$
$$\omega = \frac{ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)}{Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z},$$

où $A = dyd^2z - dzd^2y$, $B = dzd^2x - dxd^2z$, $C = dxd^2y - dyd^2x$.

Il transforme la seconde égalité en

$$\omega = \frac{ds^6}{\rho^2(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z)}$$

et ajoute bien sûr l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Il déduit alors, au moyen de différentiations, de diverses substitutions, qu'il existe quatre constantes f, g, h et k telles que

$$f dx + g dy + h dz = k ds$$

et énonce que cette formule « exprime que toutes les tangentes à la courbe cherchée font des angles égaux avec une même droite. » [Puiseux 1842, p. 68]

Puiseux choisit alors de prendre pour cette droite l'axe des z, et obtient alors que $\frac{dz}{ds} = \cos\epsilon$ où ϵ est constant et, choisissant de prendre z comme variable indépendante, il obtient rapidement, en utilisant la constance du rayon de courbure, que les solutions sont des hélices circulaires de rayon $\rho \sin^2 \epsilon$.

La première partie de la démonstration, en définitive, revient à montrer que les solutions sont nécessairement des hélices cylindriques et la seconde, qu'il s'agit d'hélices circulaires. C'est la première partie qui semble la plus difficile à obtenir, car la déduction consiste en des manipulations dont on saisit pas le fil directeur. Nous en donnons le détail, en utilisant un formalisme moderne, en annexe C.5.

b. La méthode de Bertrand

Le mémoire de Puiseux est cité à plusieurs reprises, en particulier par Joseph Bertrand. Dans un très court mémoire du *Journal de Liouville*, « Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes » [1848], il propose une résolution géométrique du résultat de Puiseux :

> « M. Puiseux a démontré d'une manière très-élégante que l'hélice est la seule courbe dont les deux courbures soient constantes ; mais comme sa démonstration, purement analytique, est un peu longue, ayant eu à enseigner ce théorème, j'ai vu un avantage de simplicité à y substituer le raisonnement suivant.
>
> Si les deux courbures d'une courbe sont constantes, les parallèles, menées à ses tangentes par un point de l'espace, formeront un cône dans lequel l'angle de deux plans tangents infiniment voisins sera proportionnel à celui de leurs génératrices de contact ; car le premier de ces deux angles est celui de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe cherchée et le second est l'angle des deux tangentes correspondantes. Il résulte de cette remarque, que si l'on décrit du sommet du cône comme centre une sphère de rayon 1, la courbure de la surface conique sera la même en tous les points de la courbe d'intersection qui est, comme on sait, une ligne de courbure ; l'élément de cette ligne mesure en effet, l'angle des deux génératrices, et l'angle des normales menées à ses extrémités n'est autre chose que celui

> des plans tangents correspondants.
> Si par les points de cette ligne de courbure, on mène des normales à la surface conique et qu'on prenne sur chacune d'elle une longueur égale à ce rayon de courbure constant, on formera une courbe qui étant le lieu des intersections successives de ces normales leur sera tangente à toutes ; d'un autre côté, cette courbe, étant obtenue en portant des longueurs constantes sur des normales à la surface conique, est située sur une surface parallèle et doit couper toutes les normales à angle droit ; devant ainsi être à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, elle doit se réduire à un point. Si de ce point comme centre, avec un rayon égal au rayon de courbure constant, on décrit une sphère, cette sphère sera inscrite dans le cône qui, par conséquent est de révolution. Ainsi donc, toutes les tangentes de la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe, et, par conséquent, cette courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur cylindre parallèle à cette droite. » [Bertrand 1848, p. 423-424]

La citation est longue, mais exemplaire : on atteint ici, semble-t-il, la limite de ce qu'on peut comprendre dans une démonstration « géométrique » de cette époque. On remarquera que la description de la situation est très éloignée de nos fameuses courbes-polygones à la Monge... Bertrand examine la figure formée par les tangentes à la courbe, ramenée à un point origine. Il introduit la courbe, que l'on appelle maintenant indicatrice sphérique, formée par l'intersection du cône obtenu avec la sphère unité, et il vérifie que cette courbe a une courbure constante. Il lui applique ensuite les propriétés des lignes de courbure d'une surface, dont la théorie est issue des travaux de Monge. Cela lui permet de montrer que le cône des tangentes est un cône de révolution. Ainsi, les tangentes font un angle fixe avec une direction fixe ; remarquons que la propriété obtenue est vraie lorsque les deux courbures ne sont pas forcément égales, mais de rapport constant. Comme le dit la fin du texte de Bertrand :

> « Il résulte de la démonstration précédente que "l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule courbe dont les deux courbures aient un rapport constant". » [ibid., p. 424]

Quant à la fin de la démonstration du théorème de Puiseux, elle est au demeurant très simple : il s'agit seulement de démontrer qu'une hélice cylindrique dont la courbure est constante est une hélice circulaire. Bertrand le vérifie en montrant que la projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est aussi à courbure constante. Comme c'est une courbe plane, c'est un cercle.

En conclusion, c'est une démonstration géométrique bien différente de celle de Lancret. Rappelons que celui-ci s'appuyait sur l'étude qu'il avait faite de la surface rectifiante. Comme l'article de Puiseux, celui de Bertrand se décompose en deux parties : une, de démonstration difficile, pour prouver que le rapport contant de la courbure et de la torsion caractérise les hélices cylindriques ; l'autre, plus simple, traitant l'hypothèse où courbure et torsion sont constantes.

c. Les commentaires de Liouville

Le théorème de Puiseux[5], et sa généralisation, le théorème de Lancret[6] font aussi l'objet de commentaires de Liouville, dans les notes qu'il donne à son édition de l'*Application de l'analyse à la géométrie*, de Monge, [Liouville 1850]. Sa démonstration « géométrique » est dans le style des courbes-polygones, (et un peu rapide...) :

> « Il est visible que toute courbe dont les deux courbures sont constantes ne peut être qu'une de nos hélices, car en faisant coïncider une de ces hélices avec trois éléments consécutifs mm', $m'm''$, $m''m'''$, ainsi qu'on le peut, les éléments suivants seront tous déterminés et les mêmes pour l'hélice et la courbe, d'après la condition de constance des rayons. M. Puiseux a démontré ce théorème analytiquement en partant des formules qui donnent ρ et r et en cherchant directement la courbe pour laquelle ces deux quantités à la fois sont constantes. Son analyse est élégante et offre un bon exercice de calcul. » [Liouville 1850, p. 554]

La suite est la reprise, mot pour mot (à une différence minime de notation près), du mémoire de Puiseux. Il est vrai que le mémoire avait été publié dans le Journal de Liouville... Plus loin, p. 558, Liouville cite le théorème démontré par Bertrand, et affirme que :

> « La méthode de M. Puiseux ne paraît pas se prêter à la démonstration de ce nouveau théorème, et c'est là une imperfection véritable. On doit naturellement désirer de voir sortir des mêmes formules analytiques deux théorèmes liés de si près de l'un à l'autre. M. Serret a réussi à les embrasser, en effet, dans une même analyse, et je ferai plaisir à nos lecteurs en transcrivant ici la Lettre encore inédite qu'il a bien voulu m'écrire à ce sujet. » [ibid., p. 558]

C'est donc bien le problème des hélices, et plutôt sa résolution par l'analyse, qui auront été une des motivations de Serret. Nous verrons précisément ce qu'il en est dans le chapitre suivant. Quant à Puiseux, interpellé par Liouville, il réagit en donnant la démonstration demandée dans un nouvel article paru dans le Journal de Liouville [Puiseux 1851] où il utilise effectivement le même type de démarche qu'en 1842.

3 Les courbes de Bertrand

Nous avons, dans ce chapitre, parlé surtout des hélices. En définitive, les questions posées reviennent à chercher :

- les courbes dont courbure et torsion sont constantes ;
- les courbes dont le rapport courbure/torsion est constant.

On aurait pu se poser des questions en apparence plus simples : quelles sont les courbes dont la courbure ou la torsion sont constantes ? Les courbes à torsion nulle sont les courbes planes

[5] Les hélices circulaires sont caractérisées par ce qu'elles ont leur deux courbures constantes.
[6] Les hélices sont caractérisées par la constance du rapport de leurs courbures.

FIG. C.2 – Joseph Bertrand

mais le cas général de la torsion constante n'a pas encore été examiné. Les courbes à courbure constante ont été étudiées par Monge, de façon relativement incidente, et une de leurs propriétés remarquables peut s'exprimer ainsi : si une courbe à double courbure $\mathscr{C}$ a une courbure constante, l'ensemble de ses centres de courbure est une courbe $\mathscr{C}'$ telle que :

- $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont même normale principale ;
- en notant M sur $\mathscr{C}$ et K sur $\mathscr{C}'$ le centre de courbure en M, alors M est le centre de courbure en K de la courbe $\mathscr{C}'$;
- en deux points correspondants M et K, les tangentes aux deux courbes sont orthogonales.

La situation est bien connue dans le cas particulier des hélices circulaires. La question qui va être posée par Joseph Bertrand, dans son mémoire titré « *Mémoire sur la Théorie des courbes à double courbure* » [Bertrand 1850], est de déterminer quelles sont les courbes qui satisfont à la première propriété.

Quelle peut être l'origine du problème ? Ce n'est pas la généralisation du résultat de Monge, qui était sans doute mal connu puisque jamais repris (sauf dans le cas de l'hélice circulaire). Il aurait pu s'agir de généraliser un problème du plan : si on part d'une courbe plane, et que l'on considère l'ensemble de ses normales, ce sont les normales d'une infinité de courbes, qui sont les courbes « parallèles » à la courbe initiale. Même si le mémoire porte bien, son titre l'atteste, sur les courbes à double courbure, le point de départ de Bertrand est un problème de la théorie des surfaces. Par exemple, si on considère une courbe à double courbure, l'ensemble des normales principales engendre une surface que l'on appelle une « surface gauche » depuis Monge et Hachette, et qui n'est pas une surface développable. Mais est-ce que toute surface gauche est toujours la surface des normales d'une courbe à double courbure ? Question plus particulière : est-ce qu'une surface du second degré est la surface gauche engendrée par les normales d'une courbe à double courbure ? On peut voir les premières conclusions de Bertrand, dans la figure C.3, elles s'expriment en une classification des surfaces gauches.

Dans les trois premières parties, Joseph Bertrand démontre qu'une surface gauche est engendrée par l'ensemble des normales principales à une courbe $\mathscr{C}$ si, et seulement si, il existe

332 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. J. BERTRAND.

On sait que les normales à une même surface jouissent de propriétés nombreuses et indépendantes de la surface particulière que l'on considère. Ces propriétés constituent une partie importante de la théorie des surfaces. Je cherche, dans ce Mémoire, à caractériser d'une manière analogue les normales principales d'une même courbe. Ces droites jouissent, comme je le fais voir, de propriétés très-précises et indépendantes de la courbe particulière que l'on considère. En d'autres termes, une surface gauche étant donnée, ses génératrices ne sont pas toujours les normales principales d'une même courbe. Les surfaces réglées peuvent être, sous ce point de vue, partagées en quatre classes :

1°. Les surfaces dont les génératrices ne sont les normales principales d'aucune courbe;

2°. Les surfaces qui ont pour génératrices les normales principales d'une seule courbe;

3°. Les surfaces dont les génératrices sont, à la fois, normales principales de deux courbes distinctes;

4°. Enfin, les surfaces dont les génératrices sont normales principales d'un nombre infini de courbes distinctes : cette dernière classe ne contient que les héliçoïdes à plan directeur.

Une surface étant donnée, j'indique le moyen de déterminer la classe à laquelle elle appartient.

FIG. C.3 – La première page du mémoire de Bertrand [1850] sur la surface une courbe sur laquelle la courbure moyenne (c'est-à-dire la somme de la plus petite et de la plus grande courbure) est nulle et si de plus cette courbe (qui sera la courbe $\mathscr{C}$) est normale aux génératrices. Ce critère lui permet entre autre de montrer qu'il n' y a pas de solutions dans certains cas, par exemple dans le cas d'un hyperboloïde. Toutes les méthodes utilisées ressortent plus de la théorie des surfaces, notamment de la théorie de leurs lignes de courbure. Bertrand montre également que sur chacune des génératrices il y a en général deux points solutions, la distance entre ces deux points étant constante.

Dans la quatrième partie, Bertrand reprend le problème. Il part d'une courbe gauche et cherche si, sur chaque normale principale, on peut trouver un point à distance fixe tel que l'ensemble des points obtenus admet la même famille de normales. On est alors proche de la méthode maintenant classique pour étudier les courbes de Bertrand. Le résultat obtenu (assez difficilement) dans cet article est que courbure et torsion doivent vérifier une relation affine

$$1 = \frac{a}{\rho} - \frac{C}{R}$$

où a et C sont des constantes, ρ et R les rayons de la première et de la seconde courbure, a la distance constante entre les deux points. Bertrand termine ce paragraphe en montrant que si $C = 0$, on obtient les courbes à première courbure constante, la distance a est alors égale à ρ, autrement dit chacune des courbes est l'ensemble des centres de courbure de l'autre. Ce résultat, que nous avons vu chez Monge, est attribué par Bertrand à Bouquet. Le mémoire se termine par l'examen des relations entre les courbures, torsions et longueurs d'arc des deux courbes.

Signalons que, toujours dans le cas de courbes à première courbure constante, Voizot [1850] revendique un peu plus tard d'avoir obtenu les mêmes relations entre ce qu'il appelle des « courbes conjuguées », mais son point de départ est tout à fait différent (voir page 181).

Comme pour les théorèmes de Puiseux et de Lancret, l'étude des courbes de Bertrand demande à être simplifiée et ce sera l'un des premiers objectifs de Serret dès ses premiers articles. Auparavant, nous allons regarder la contribution à la théorie des courbes gauches faite par Saint-Venant.

4 Le bilan de Saint-Venant

Adhémar Barré de Saint-Venant est surtout connu pour sa théorie de l'élasticité et pour ses travaux d'ingénieur. Cependant, le 16 septembre 1844, il présente à l'Académie un « Mémoire sur les lignes courbes non planes », qui sera publié dans le *Journal de l'École polytechnique*, [Saint-Venant 1845a]. Il est certain que l'intérêt que Saint-Venant porte à la question des courbes à double courbure est dépendant de ses travaux de physicien et d'ingénieur[7] ; son

[7] Quelques années plus tard, Saint-Venant présentera par exemple à l'Académie un mémoire intitulé « De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément » [Saint-Venant 1855].

mémoire se termine par plusieurs pages de formules qu'il pense devoir être utiles pour les applications. L'intérêt qu'il porte aux questions de terminologie est une autre justification de son travail ; parmi les suggestions qu'il fait sur le plan du vocabulaire, une seule (la binormale) passera à la postérité.

Le mémoire de Saint-Venant commence par un court rappel historique, dans lequel il cite exhaustivement les noms de Clairaut, Pitot, Monge, Tinseau, Lacroix, Lancret, Cauchy, Navier, Duhamel, Vallée, Olivier et Fourier.

a. Questions de vocabulaire

Le mémoire de Saint-Venant se présente comme un bilan des connaissances sur la question des courbes à double courbure. Très prolixe, Saint-Venant va par exemple consacrer une longue note à des questions de vocabulaire [1845a, p. 52-64] : « Sur quelques particularités de Géométrie et de Mécanique, relatives aux deux affections principales des lignes courbes non planes, et sur les dénominations à imposer à ces affections. »

Saint-Venant aborde deux questions : pourquoi « double courbure » ? Comment nommer la « seconde courbure » ?

La première question est sans doute, sur un plan théorique, d'assez peu d'importance puisqu'elle ne met pas en jeu des questions décisives sur l'objet nommé : une courbe à double courbure est un objet géométrique qui ne semble pas devoir être défini autrement que par un synonyme (une ligne non plane, une figure à une dimension qui ne peut se tenir dans un plan). Il est d'ailleurs significatif que Saint-Venant lui-même donne pour titre à son texte « Mémoire sur les lignes courbes non planes », et non « Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure » comme le fait Bertrand dans le texte que nous venons d'étudier. Sa sensibilité au vocabulaire est assez originale parmi les autres géomètres de cette époque... À l'exception notamment de Louis-Léger Vallée dans son *Traité de Géométrie Descriptive*.

Le vocabulaire de Vallée [Vallée 1819]

Présentons les nouveautés de vocabulaire introduites par Vallée qui vont être discutées par Saint-Venant.

Dans le livre VI (Complément) de son traité, Vallée étudiait les surfaces développables et les courbes à double courbure. Le paragraphe 668, « Des rayons de courbure », introduit un nouveau vocabulaire. Après avoir justifié que les normales d'une courbe à double courbure forment une surface gauche (c.-à.-d. réglée non développable), il déclare :

> « D'après cela, deux courbures consécutives des courbes à double courbure n'étant pas dans un même plan, on pourrait donner à ces courbes le nom de *courbes gauches*[8].

[8] « Le mot gauche n'est pas agréable à l'oreille, mais il est essentiel en Géométrie, et il donne parfaitement l'idée qu'il doit donner. »

> La dénomination de courbe à double courbure, est non seulement longue, désagréable et embarrassante, mais elle donne encore l'idée fausse et spécieuse de deux courbures qui n'existent pas : il serait à désirer qu'on cessât de l'employer [...] comme on nomme *surfaces gauches*, celles qui sont produites par une droite mobile, dont deux positions consécutives ne sont pas dans le même plan. » [Vallée 1819]

L'expression « surface gauche » fait partie du vocabulaire depuis Monge [Monge 1780], qui l'a introduite pour désigner des surfaces engendrées par des droites mais qui ne sont pas développables. Petit à petit, ce vocabulaire va disparaître et l'on parlera de surfaces réglées non développables. En revanche, grâce à Vallée, l'expression « courbe gauche » va remplacer le trop long et ambigu « courbe à double courbure ». Comme nous l'avons signalé plus haut Saint-Venant lui-même, qui cite Louis Vallée, ne reprend pas ce choix pour son exposé.

Venons-en à l'autre point de vocabulaire :

> « Maintenant nous ferons remarquer, que quelle que soit une ligne courbe, le rayon de courbure qui correspond à chacun de ses points, se trouve toujours déterminé par l'angle infiniment petit des deux plans normaux consécutifs qui correspondent à ce point : nous donnerons à cet angle le nom *d'angle de courbure*. Et ce qui fait qu'une courbe non plane ou, comme on dit, à double courbure, change de plan à chaque élément, étant, comme on le verra tout à l'heure, une sorte de torsion de ses éléments les uns autour des autres, torsion qui est déterminée par l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs consécutifs, nous nommerons cet angle, *angle de torsion*[9]. » [ibid.]

Vallée explique ensuite clairement comment courbure et torsion se combinent et sont indépendantes. Il suit pour cela le procédé décrit par Lacroix [1795] ; il part d'une courbe à double courbure V et d'une droite flexible L et commence par plier les éléments de L « de manière que cette droite se change en une courbe V' dont les centres de courbure A', B', etc. soient placés par rapport aux éléments a', b' comme les centres A, B, C sont placés par rapport aux éléments respectifs a, b ». Vallée explique ensuite comment il faut plier les plans de deux éléments consécutifs, en suivant cette fois l'angle de torsion. Plus loin, dans une nouvelle note, Vallée revient sur le vocabulaire et affirme que « angle de flexion » n'est pas un choix satisfaisant.

Les remarques de Saint-Venant

La longue note de Saint-Venant porte essentiellement sur la dénomination de la seconde courbure. Pourquoi tant d'intérêt pour cette question ? C'est d'abord pour une raison naturelle : comme nous l'avons vu, la notion est esquissée dans la mémoire de Monge [1785] et précisée dans celui de Lancret [1802]. Elle a mis plusieurs années à s'imposer et il serait bon de se décider à la nommer. En dehors de Saint-Venant d'autres auteurs, comme Olivier, se sont posé la question de la pertinence de cette grandeur, plus précisément des trois grandeurs associées :

[9] « On a aussi nommé cet angle angle de flexion et l'angle de courbure angle de contingence. »

- L'angle infinitésimal entre deux plans osculateurs consécutifs, ou second angle de contingence, noté $\frac{ds}{r}$,
- Le rapport de cet angle avec l'élément d'arc ou seconde courbure, soit $\frac{1}{r}$,
- L'inverse de cette seconde courbure, ou rayon de seconde courbure, c'est-à-dire r.

Saint-Venant commence par affirmer que, dans les applications (« ainsi que je l'ai éprouvé très-souvent en faisant des recherches sur l'état d'équilibre et sur la résistance des verges courbes fléchies et tordues, ») cette deuxième affection intervient souvent. Il critique ensuite successivement les termes de flexion, de torsion, rejetés pour les confusions qu'ils entraînent avec des mots identiques parfois employés en mécanique[10]. Il élimine de même inflexion, infléchissement, seconde courbure... Parmi les expressions nouvelles, il tente gauchissement, mais propose finalement *cambrure* :

> « Bien plus, *cambrure*, d'après son étymologie, paraît particulièrement propre à désigner précisément la courbure d'une *surface développable*, ou engendrée par un plan. Le mot latin *camera* et surtout le mot grec dont il dérive signifient proprement voûte, arcade, chariot couvert ; d'où il suit que *cambrer* veut dire transformer un plan en surface courbe, et c'est en effet, son sens technologique en français.[...] Il est expressif, sans équivoque ni contradiction ; sa symétrie avec courbure et sa précision compensent, dans le discours, la rudesse de prononciation qu'on peut lui reprocher. » [Saint-Venant 1845a, p. 62]

Cette proposition de changement de vocabulaire, pourtant solidement argumentée, n'aura pas de succès. La proposition de Vallée va l'emporter. Saint-Venant va avoir plus de succès pour la dénomination de la direction orthogonale de l'axe osculateur :

> « *Binormale* celle des normales qui est perpendiculaire au plan osculateur. Cette ligne, qu'on est obligé de considérer très-souvent aussi, et à laquelle il n'a pas encore été donné de nom, est, en effet, normale à *deux* éléments consécutifs à la fois, tandis que les autres normales à la courbe ne le sont qu'à un seul de ses éléments. » [ibid., p. 17]

L'expression binormale va peu à peu s'imposer, mais Serret et Frenet, par exemple, parleront d'axe du plan osculateur.

Ces questions de vocabulaire ne sont pas si anodines. Dans le cas de la torsion, par exemple, la longue durée pendant laquelle le nom choisi a varié, correspond aussi à une longue période pendant laquelle la notion elle-même a dû trouver son chemin, se forger une identité, et même, tout simplement, être l'objet d'un calcul. Les difficultés supplémentaires proviennent en outre de ce qu'il y a, comme le rappelle plus haut Saint-Venant, trois grandeurs (au moins) affiliées à la notion de torsion : l'angle infinitésimal, la torsion proprement dite, le rayon de torsion. La première grandeur a l'inconvénient d'être une grandeur géométrique infinitésimale, donc avec un statut particulier mal défini (sauf sans doute pour Cauchy). Qu'on pense d'ailleurs aux dif-

[10] Ainsi, lorsqu'un fil matériel est tordu, on appelle torsion la rotation relative de deux sections tranversales voisines. C'est donc un angle infiniment petit qui n'a aucun rapport avec une propriété géométrique de la courbe.

ficultés amenées par l'énoncé du théorème de Fourier quand il est formulé en termes d'angles infinitésimaux. Quant à la dernière, malgré des tentatives (notamment de Saint-Venant), il n'a pas été trouvé d'interprétation géométrique simple du *rayon* de torsion.

b. Saint-Venant et le calcul infinitésimal

Nous n'avons pas parlé encore du reste du copieux mémoire de Saint-Venant. Sans entrer dans les (nombreux) détails, nous allons examiner deux points importants :

– la critique que fait Saint-Venant de certaines méthodes de ses confrères ;
– sa démonstration du théorème sur les hélices.

Le premier point est intéressant : alors que les succès de la méthode des infiniment petits sont incontestables, on sait que Lagrange et Cauchy ont, chacun de leur côté, essayé de s'en passer (Lagrange), ou de la remplacer par le calcul des limites (Cauchy). Il n'en reste pas moins que les mathématiciens de l'époque continuent de l'utiliser régulièrement.

Saint-Venant, dont on sait qu'il était proche de Cauchy, ne ménage pas ses critiques devant certains procédés employés. Lorsqu'il calcule du rayon de courbure, Saint-Venant procède par des raisonnements géométriques assez compliqués, où il passe par des projections de parallélogrammes. Il cite, comme références, les *Leçons d'analyse* de Navier[11]. À la suite de son long calcul, il fait la remarque suivante :

> « Il n'est pas inutile de discuter ici une autre démonstration que plusieurs géomètres donnent de cette expression de l'angle infiniment petit de deux tangentes consécutives. » [ibid., p. 9]

Le calcul que Saint-Venant critique est le suivant : partant des cosinus directeurs de la tangente en M et au point suivant

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{ds}+d.\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}+d.\frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}+d.\frac{dz}{ds}$$

on devrait pouvoir calculer le cosinus de l'angle par la formule habituelle (que nous avons par exemple trouvé chez Cauchy, voir page 121)

$$\cos\delta = \cos\alpha_0\cos\alpha + \cos\beta_0\cos\beta + \cos\gamma_0\cos\gamma.$$

Mais, remarque Saint-Venant, comme

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

en dérivant on obtient

$$\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = 0,$$

[11] Saint-Venant crédite également Navier du calcul direct de l'angle de torsion [ibid. , p. 11], alors que Lancret n'aurait fait qu'un calcul indirect. Crédit sans doute exagéré puisque nous avons vu que Cauchy obtient une expression de la torsion en procédant de la même façon que pour la courbure.

66 MÉMOIRE

(t) $$dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z = dsd^3s - \frac{ds^4}{\rho^2}, \qquad (t^*),$$

(u) $$d^2xd^3x + d^2yd^3y + d^2zd^3z = d^2sd^3s + \frac{ds^2}{\rho} d\frac{ds^2}{\rho},$$ (résulte de la différentiation de n),

(v) $$\frac{dx}{ds} d^2\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d^2\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d^2\frac{dz}{ds} = - \frac{ds^2}{\rho^2},$$ (résulte de h et o),

(x) $$d^2xd\frac{dx}{dz} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2zd\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho^2},$$ (résulte de j, i, n),

(y) $$d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2zd^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho} d\frac{1}{\rho}, \qquad (y^*),$$

(z) $$d\frac{dx}{ds} d^2\frac{dx}{ds} + d\frac{dy}{ds} d^2\frac{dy}{dz} + d\frac{dz}{ds} d^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\rho} d\frac{ds}{\rho},$$ (résulte de la différentiation de o),

(a') $$\mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy = ds^3d\frac{dx}{ds}, \quad \mathrm{Z}dx - \mathrm{X}dz = ds^3d\frac{dy}{dz}, \quad \mathrm{X}dy - \mathrm{Y}dx = ds^3d\frac{dz}{ds}, \qquad (a'^*),$$

(b') $$\mathrm{Y}d^2z - \mathrm{Z}d^2y = ds^2d^2sd\frac{dx}{ds} - \frac{ds^4}{\rho^2}dx$$ (et deux autres équations semblables) (b'^*),

(c') $$\mathrm{Y}d\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dx, \quad \mathrm{Z}d\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}d\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dy, \quad \mathrm{X}d\frac{dy}{ds} - \mathrm{Y}d\frac{dx}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dz \quad (c'^*),$$

(d') $$\mathrm{Y}d^2\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d^2\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho}$$ (et deux autres semblables), (d'^*),

(e') $$d\mathrm{Y}dz - d\mathrm{Z}dy = ds(dsd^3x - dxd^3s) + \frac{dxds^4}{\rho^2} = dsd\left(ds^2d\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dxds^4}{\rho^2}$$ (et deux autres semblables) (e'^*),

$(e'\ bis)$ $$d\mathrm{Y}dz - d\mathrm{Z}dy = \rho \cdot d\frac{ds^3}{\rho} \cdot d\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{X}ds^2}{v}$$ (et deux autres semblables, tirées de e'' ci-après et de a', k)

(t^*) Résulte de la différentiation de (i), en ayant égard à (n).

(y^*) Résulte de (l), (i), (t), (x), et de ce que $\frac{ds^2}{\rho}\left(d\frac{ds^2}{\rho} - \frac{2dsd^2s}{\rho}\right) = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho}$.

(a'^*) Car $$\mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy = (dzd^2x - dxd^2z)dz - (dxd^2y - dyd^2x)dy = d^2x(dy^2 + dz^2) - dx(dyd^2y + dzd^2z)$$
$$= d^2x(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) = ds^2d^2x - dxdsd^2s.$$

(b'^*) Car $$\mathrm{Y}d^2z - \mathrm{Z}d^2y = d^2x(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) - dx(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) = dsd^2sd^2x - dx\left(\frac{ds^4}{\rho^2} + d^2s^2\right).$$

(c'^*) Car $$\mathrm{Y}d\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd\frac{dx}{dy} + dyd\frac{dy}{ds} + dzd\frac{dz}{ds}\right) - dx\left(d^2xd\frac{dx}{ds} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2zd\frac{dz}{ds}\right).$$

La première partie s'anéantit an moyen de (h), et la seconde, au moyen de (x), se réduit à $-\frac{ds^3}{\rho^2}dx$.

(d'^*) Car $$\mathrm{Y}d^2\frac{dz}{ds} - \mathrm{Z}d^2\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd^2\frac{dx}{ds} + dyd^2\frac{dy}{ds} + dzd^2\frac{dz}{ds}\right) - dx\left(d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2zd^2\frac{dz}{ds}\right),$$

qui, moyennant (v) et (y), se réduit à $-d^2x\frac{ds^3}{\rho^2} - dx\frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho}$.

(e'^*) Car $$d\mathrm{Y}dz - d\mathrm{Z}dy = d^3x(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx(dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z) = d^3xds^2 - dx\left(dsd^3s - \frac{ds^4}{\rho^2}\right).$$

FIG. C.4 – Une page de formules

ce qui donne alors $\cos\delta = 1$, et donc $\delta = 0$. Ce calcul naïf est donc corrigé par les auteurs (Saint-Venant cite Poisson) par ce qu'il considère être des artifices, consistant à ajouter des termes d'ordre deux en utilisant la formule de Taylor, puis à les faire disparaître en fin de calcul.

Saint-Venant, quant à lui, critique la formule initiale, celle donnant $\cos\delta$, affirmant « qu'elle se prête mal au cas où cet angle est infiniment petit » [Saint-Venant 1845a, p. 10]. Un lecteur moderne critiquerait la critique de Saint-Venant par l'argument suivant : la formule du cosinus ne peut s'appliquer rigoureusement car $\frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \ldots$ ne sont pas des cosinus directeurs. On peut rétablir un calcul concluant en tenant compte de la norme de ce vecteur.

On se mettra quand même d'accord sur le fait que, malgré tout, on ne peut être satisfait des artifices qu'il faut parfois employer pour retrouver un résultat attendu. Rappelons que dans la déduction de Cauchy il y a un passage explicite à la limite qui ne pose pas de problème de rigueur (hypothèses de régularité mises à part). Pourtant, cette méthode de Cauchy n'est pas encore communément utilisée comme on le voit chez Saint-Venant.

Passons maintenant à la question de l'hélice. Après de nombreux calculs, Saint-Venant obtient l'expression

$$dH = \frac{\rho^2 d\frac{r}{\rho}}{r^2 + \rho^2},$$

où H est l'angle que fait avec la tangente la droite rectifiante, intersection de deux plans rectifiants consécutifs. De cette formule on déduit donc que l'angle H est constant si, et seulement si, le rapport de la courbure à la cambrure est constant. Saint-Venant ajoute :

> « Alors les différentes droites rectifiantes sont les arêtes d'un cylindre, et la courbe est une *hélice* à base quelconque, ou une courbe dont toutes les tangentes font le même angle avec un certain plan. » [ibid., p. 26]

C'est ce passage qui conduit certains à considérer que Saint-Venant est le premier à avoir vraiment démontré le théorème de Lancret (voir par exemple Struik [1950, p. 34]). Si on retourne à la démonstration de Lancret, elle ne suit pas la même démarche, mais elle repose sur les mêmes idées. Lancret calcule $\tan H$ par des procédés qui peuvent parfaitement nous paraître corrects, et la façon dont il conclut est tout à fait semblable à celle de Saint-Venant. On peut donc tout de même attribuer à Lancret la démonstration du théorème de Lancret... Remarquons néanmoins, pour lui faire justice, que Saint-Venant est un des premier à « signer » la torsion, en précisant en particulier une orientation pour la binormale. Nous verrons que Frenet sera un des rares qui, par la suite, aura la même préoccupation.

Le reste du mémoire de Saint-Venant contient de très nombreux résultats[12], peut être même un peu trop : voir la figure C.4, qui montre une partie de la dizaine de formules de Saint-Venant. On peut supposer que ces formules devaient à l'époque avoir quelque utilité puisque, en 1845 également, les éditeurs Bachelier, Carilian-Goeury et Dalmont publient un extrait du mémoire de Saint-Venant : « Tableau de formules de la théorie des courbes dans l'espace. »

Ce recueil d'une douzaine de pages est présenté ainsi par l'auteur :

[12] à l'exception de ce qui concerne la théorie des développées que Saint-Venant trouve suffisamment étudiée.

> « Les calculs analytiques relatifs aux lignes courbes non planes, ainsi qu'aux surfaces qui ont avec elles des rapports intimes, se présentent ordinairement avec une très grande complication, et plusieurs auteurs semblent avoir reculé devant leur développement.
>
> Mais ils deviennent praticables et faciles, même dans le cas général où l'on fait varier la différentielle de l'arc comme celle des trois coordonnées, en faisant un certain choix de notations abréviatives [...] j'ai été dans le cas de faire usage de presque toutes ces formules, en m'occupant soit de la théorie géométrique des courbes, soit de la théorie statique de la flexion et de la torsion des verges élastiques. » [Saint-Venant 1845b, p. 1]

On trouve alors plus d'une cinquantaine de formules exprimant, pour le dire rapidement, des dérivées successives des éléments de la courbe en fonction de la courbure et de la torsion. La dernière partie du formulaire redonne des résultats de Lancret, comme par exemple

$$\frac{1}{\mathscr{R}^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}$$

où $\frac{ds}{\mathscr{R}}$ est « l'angle de courbure et cambrure composées, ou l'angle infiniment petit que font les directions des deux rayons de courbure en M et M' ».

Le bilan de Saint-Venant, les articles de Puiseux, de Bertrand marquent la fin d'une période. Les objets de la théorie sont maintenant bien définis, ils sont nommés de façon de plus en plus consensuelle, les caractéristiques que sont la courbure et la torsion sont calculées, et l'on est parvenu à résoudre certains problèmes comme celui des hélices ou celui des courbes de Bertrand. Il manque cependant – et la grande multitude des formules de Saint-Venant en est le témoin – un principe unificateur qui permette des démonstrations efficaces et qui donne le sentiment que la théorie est achevée. C'est ce que nous verrons dans les deux chapitres suivants.

Chapitre D

Les formules de Frenet-Serret ou Serret-Frenet

1 Les formules de Serret

Nous avons déjà indiqué que c'est dans les notes à son édition des *Applications de l'Analyse à la Géométrie* [Monge 1850] que Liouville annonce les nouveaux résultats de Serret, permettant notamment de donner une démonstration par l'analyse du théorème de Lancret. Joseph-Alfred Serret est alors un jeune mathématicien (il est né en 1819), ancien élève de l'École polytechnique. Il est très lié à Liouville et il a apporté de nombreuses contributions à son journal.

a. L'équation différentielle $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$

L'origine des travaux de Serret est la résolution de cette équation différentielle, dans un article publié par le Journal de Liouville [Serret 1848]. De quoi s'agit-il ? Comme le fait Liouville dans sa note, commençons par rappeler le cas de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$. En langage moderne, nous considérerons une courbe quelconque et notons θ l'angle polaire de la tangente. Si l'on prend θ pour paramètre, l'équation de la tangente s'écrit

$$x\sin\theta - y\cos\theta = p(\theta)$$

et les coordonnées du point de la courbe seront solutions du système

$$\begin{cases} x(\theta)\sin\theta - y(\theta)\cos\theta = p(\theta) \\ x'(\theta)\sin\theta - y'(\theta)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

qui exprime que le point (x, y) est sur la tangente et que le vecteur $(x'(\theta), y'(\theta))$ est colinéaire au vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. En dérivant par rapport au paramètre la première équation, on voit que ce

FIG. D.1 – Joseph-Alfred Serret

système est équivalent au suivant

$$\begin{cases} x(\theta)\sin\theta - y(\theta)\cos\theta = p(\theta) \\ x(\theta)\cos\theta + y(\theta)\sin\theta = p'(\theta). \end{cases}$$

Ce qui donne, compte tenu de ce que $\frac{dx}{ds} = \cos\theta$ et $\frac{dy}{ds} = \sin\theta$

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = -p(\theta)\cos\theta + p'(\theta)\sin\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = p(\theta) + p''(\theta). \end{cases}$$

Un simple changement de notation permet d'obtenir comme Liouville

$$\begin{cases} x = \psi'(\theta)\sin\theta + \psi''(\theta)\cos\theta, \\ y = \psi'(\theta)\cos\theta - \psi''(\theta)\sin\theta, \\ s = \psi(\theta) + \psi''(\theta) \end{cases}$$

où la fonction ψ est arbitraire. Selon Liouville, cette résolution de l'équation permet, par exemple, de trouver les courbes qui sont à la fois algébriques et rectifiables algébriquement. Comme nous venons de le voir, la méthode consiste en définitive à considérer une courbe plane comme enveloppe de ses tangentes.

Serret va opérer une simple transposition de cette idée : une courbe gauche est l'arête de rebroussement de la surface développable formée par ses tangentes. Si donc $z = px + qy - u$ est l'équation du plan osculateur, la courbe sera solution du système

$$\begin{cases} z = px + qy - u \\ 0 = xdp + ydq - du \\ 0 = xd^2p + yd^2q - d^2u \end{cases}$$

où p, q et u sont fonctions d'un paramètre θ. Serret va alors résoudre ce système, différentier et calculer ds, puis il parvient à exprimer x,y, z et s en fonction de trois fonctions de θ dont deux peuvent être considérées comme arbitraires. Après une généralisation à n variables, la suite du mémoire consiste à montrer que certains choix peuvent contribuer à simplifier les expressions (effroyablement compliquées) obtenues par la méthode générale.

b. La lettre à Liouville

Revenons à la lettre à Liouville[1]. L'idée que retient Serret de son article est l'utilisation des trois fonctions p, q et u pour exprimer les grandeurs géométriques intéressant une courbe à double courbure. En suivant la démarche exprimée plus haut, et en posant pour abréger

$$H = \frac{d^3u - xd^3p - yd^3q}{dqd^2p - dpd^2q}$$

Serret obtient

$$\begin{cases} x = \frac{dqd^2u - dud^2q}{dqd^2p - dpd^2q} \\ y = \frac{dud^2p - dpd^2u}{dqd^2p - dpd^2q} \\ z = px + qy - u \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dx = Hdq \\ dy = -Hdp \\ dz = H(pdq - qdp) \\ ds = H\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2} \end{cases}$$

À partir de là, vu le choix des fonctions p q et u (coefficients de l'équation du plan osculateur), le calcul de l'angle de torsion est assez direct[2]. Serret nomme λ, μ et ν les angles formé par la normale au plan osculateur avec les axes, calcule ces angles et leur différentielle et obtient

$$d\eta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2} = \frac{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}}{1 + p^2 + q^2}$$

tandis qu'avec les formules obtenues plus haut, il calcule les cosinus directeurs $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ de la direction de la tangente et leur différentielles. Il obtient aussi assez facilement pour l'angle

[1] D'après Serret [1851a], cette lettre a été écrite en 1849.

[2] Ce qui s'explique : deux des paramètres sont des coordonnées du vecteur binormal.

de contingence

$$d\epsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2} = \frac{dqd^2p - dpd^2q}{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ces deux résultats ne sont pas l'essentiel : au cours des calculs Serret à obtenu la relation

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \frac{d\eta}{d\epsilon}$$

qu'il résume en théorème[3] :

> « Si α et λ désignent les angles formés avec une droite D par la tangente et l'axe du plan osculateur en un point M d'une courbe quelconque, le rapport
>
> $$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha}$$
>
> sera le même, quelle que soit la droite D, et sa valeur sera égale au rapport de la seconde courbure à la première. » [Serret dans Monge 1850, p. 561-562]

C'en est terminé pour la partie « formules ». Arrêtons-nous sur ce qu'a obtenu Serret. Si on compare avec le cours de Cauchy, il n' y a pas, à première vue, de résultat nouveau. On trouve déjà chez Cauchy une insistance sur le rôle des cosinus directeurs des trois directions du trièdre. Ils sont, rappelons-le, exprimés en termes de proportionnalité avec les diverses différentielles des coordonnées, mais Cauchy n'utilise les différentielles de ces cosinus que pour le calcul du rayon de courbure et du rayon de torsion. Au contraire, dans la lettre de Serret, et en particulier dans le théorème que nous venons de citer, ces différentielles sont prises comme centre d'intérêt pour elles-mêmes, bien qu'on ne puisse vraiment dire que la direction qu'elles définissent soit vraiment repérée. Pour être plus clair, on ne peut vraiment dire dans ce premier texte de Serret, que sont présentes des « formules de Serret-Frenet », même si, bien sûr, le théorème cité est conséquence directe des formules que nous notons $SF1$ et $SF3$ et que nous rappelons en notations modernes

$$\left\{\begin{array}{lcll} \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} & = & \kappa(s)\mathbf{n} & (SF1) \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} & = & -\tau(s)\mathbf{n}. & (SF3) \end{array}\right.$$

c. L'article du Journal de Liouville

Quelques années plus tard, Serret revient dans un article du Journal de Liouville [1851a] sur les formules qui ont été publiées dans la lettre à Liouville ainsi que sur les applications qui en ont été faites.

Commençons par dire que les résultats obtenus et les méthodes employées sont assez différents de la première version. Pour commencer, les fonctions p, q et u de la méthode précédente

[3] Serret annonce qu'on peut donner de cet énoncé une démonstration « fort simple ».

ne sont plus là. Serret nomme les trois triplets d'angles directeurs des trois directions :

– α, β, γ pour la tangente (droite MT),
– ξ, υ, ζ pour la normale principale (droite MN),
– λ, μ, ν pour l'axe du plan osculateur (droite ML).

et il annonce qu'il va « exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus de ces angles [...] par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles ». On peut remarquer que Serret n'utilise plus les angles de contingence ou de flexion, mais le rayon de courbure r et le rayon de flexion ρ, quotient de l'arc ds par les deux angles.

La première relation qu'il donne est présentée comme un rappel ; c'est l'équivalent de la première formule de Serret-Frenet

$$\begin{cases} d\cos\alpha = \cos\xi\,\frac{ds}{\rho} \\ d\cos\beta = \cos\nu\,\frac{ds}{\rho} \\ d\cos\gamma = \cos\zeta\,\frac{ds}{\rho} \end{cases}$$

et, effectivement, ces formules sont dans les cours classiques, comme celui de Cauchy. Dans un second paragraphe, Serret va obtenir la troisième formule de Serret-Frenet, sous la forme

$$\begin{cases} d\cos\lambda = \cos\xi\,\frac{ds}{r} \\ d\cos\mu = \cos\nu\,\frac{ds}{r} \\ d\cos\nu = \cos\zeta\,\frac{ds}{r}. \end{cases}$$

La déduction est très différente de celle qu'on a trouvée dans la lettre à Liouville. Elle se base sur des calculs de géométrie analytique très simples : il suffit de partir des conditions d'orthogonalité, de la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

pour obtenir que les différentielles $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$ et $d\cos\nu$ sont proportionnelles aux différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ et $d\cos\gamma$, le rapport étant $\frac{\rho}{r}$. C'est, aux notations près, et à l'utilisation des vecteurs près, la démonstration « moderne ». On peut remarquer que Serret énonce à nouveau, au mot près, le théorème que nous avons cité plus haut. Il avait alors signalé qu'il y avait une démonstration géométrique. Voilà cette fois ce qu'il en dit dans une note :

> « M. Bertrand, à qui j'avais communiqué ce théorème l'a proposé comme exercice aux élèves de l'École Normale. L'un d'eux, M. Guiraudet, lui a remis la démonstration géométrique suivante, qui est d'une extrême simplicité : *La direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, est celle du rayon de courbure. Si l'on mène par l'origine deux parallèles aux axes des deux plans osculateurs infiniment voisins, et que l'on prenne sur ces*

parallèles des longueurs OM, OM' égales à l'unité, la ligne MM' qui joindra leurs extrémités fera avec leurs axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$. Ainsi, pour prouver notre théorème, il suffit de montrer le parallélisme de ces deux directions. Or cela est évident, car le plan parallèle aux axes de deux plans osculateurs voisins est parallèle au plan normal à la courbe proposée, et la droite MM' située dans ce plan est évidemment perpendiculaire à l'axe du plan osculateur, et, par suite, parallèle au rayon de courbure. » [Serret 1851a, p. 195]

On en revient donc à une démonstration géométrique à la manière de Monge ou Lancret. On ne peut pas dire qu'elle soit particulièrement éclairante...

Dans le paragraphe suivant, on trouve la véritable nouveauté, la formule

$$\begin{cases} d\cos\xi = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right)ds \\ d\cos\upsilon = -\left(\frac{\cos\beta}{\rho} + \frac{\cos\mu}{r}\right)ds \\ d\cos\zeta = -\left(\frac{\cos\gamma}{\rho} + \frac{\cos\nu}{r}\right)ds \end{cases}$$

qui donne donc les différentielles des cosinus de la troisième direction, celle de la normale principale. Encore une fois, la déduction est simple. Serret part de la relation

$$\cos^2\xi + \cos^2\alpha + \cos^2\lambda = 1$$

dont il ne dit pas d'où elle provient. La justification est assez immédiate : cette relation provient de ce que ces trois cosinus sont les cosinus directeurs de l'axe des abscisses dans le repère formé par les trois directions de la tangentes, de la normale principale et de la binormale. Cette relation est alors dérivée et permet d'obtenir $d\cos\xi$ en fonction des autres lignes trigonométriques, puis, grâce aux formules 1 et 3 de Serret, on obtient

$$d\cos\xi = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right)ds$$

qui, accompagnée des formules analogues pour les autres cosinus, constitue la seconde formule de Serret-Frenet.

Avant de passer aux applications, Serret nous donne une autre conséquence de ses calculs

$$(d\cos\xi)^2 + (d\cos\nu)^2 + (d\cos\zeta)^2 = \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)ds^2$$

Cette relation, nous la connaissons déjà. Elle a été obtenue par Lancret avec des arguments géométriques et, si on la met en parallèle avec les autres, cette formule montre qu'il n'y a pas de troisième courbure. Ou plutôt, elle montre que le troisième angle de contingence, celui que font deux vecteurs normaux consécutifs, se déduit des deux autres.

FIG. D.2 – Jean-Frédéric Frenet

Nous étudions plus loin les applications que Serret fait de ses formules dans cet article ainsi que dans quelques-uns qui le suivent. Pour le moment, revenons à la controverse entre Serret et Frenet, ou plutôt entre Liouville et Frenet.

2 Les formules de Frenet

Jean-Frédéric Frenet n'était ni polytechnicien, ni parisien. Ancien élève de l'École normale supérieure, c'est à Toulouse qu'il soutient la thèse contenant ses fameuses formules. Il s'agit en réalité de la thèse complémentaire, puisque la thèse principale porte sur « Les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes ». La thèse complémentaire s'intitule « Sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure. »

a. La méthode de Frenet

En 1852 Frenet fait paraître dans le Journal de Liouville un article intitulé « Sur les courbes à double courbure ». [1852] Cet article est présenté comme extrait d'une thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Toulouse le 10 juillet 1847, donc bien avant les premières publications de Serret.

Frenet commence par rappeler les propriétés de ce qu'il appelle les *cosinus déterminants*[4] des trois directions : la tangente, la normale principale, et la perpendiculaire au plan osculateur (il dira plus rapidement *l'axe*). Il les note respectivement a, b, c ; λ, μ, ν et α, β, γ. On remarquera que n'apparaissent plus les angles, seulement leur cosinus. Ces neuf nombres sont donc les coordonnées des trois vecteurs du trièdre. Frenet rappelle alors toutes les relations que vérifient ces coefficients qui traduisent les conditions de longueurs, d'orthogonalité, etc.

Le paragraphe suivant est consacré à un calcul qui sera utilisé à de multiples reprises dans l'article : celui de l'angle entre deux droites infiniment voisines. Pour être plus précis, Frenet considère un point M qui varie dans l'espace (c'est le point courant d'une courbe à double courbure) et une droite MB dont les cosinus déterminants l, m et n sont des fonctions continues des coordonnées du point M : cette continuité supposée (bien sûr, les hypothèses que

[4] Ce sont donc, presque mot pour mot, nos cosinus directeurs.

nous exigerions sont bien plus fortes) est une précision qui commence à peine à apparaître dans les textes de géométrie. Il note C un point de MB tel que MC soit égal à l'unité, C' un point sur la parallèle à $M'B'$ menée par M de sorte que MC' soit également l'unité, et il arrive donc au résultat suivant : si ϕ est l'angle cherché (donc un infiniment petit), on a :

$$\phi = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2}.$$

De plus, Frenet détermine les cosinus déterminants limites de la direction de CC' :

$$f = \frac{dl}{\phi}, \qquad g = \frac{dm}{\phi}, \qquad h = \frac{dn}{\phi}.$$

Ces calculs, justifiés surtout à l'aide de la figure, sont connus (Frenet le dit lui-même), mais ce qui lui importe, c'est l'utilisation qu'il va en faire de façon systématique dans l'étude des courbes à double courbure. Il commence en effet par le cas où la droite MB est la tangente, et trouve donc que l'angle de contingence ω s'écrit

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$$

et que les cosinus directeurs de la normale principale vérifient :

$$\lambda = \frac{da}{\omega}, \qquad \mu = \frac{db}{\omega}, \qquad \nu = \frac{dc}{\omega}.$$

C'est donc la première formule de Frenet (SF1).

Dans le paragraphe suivant, Frenet va, de la même façon, déterminer l'angle de torsion. Il s'agit encore de déterminer l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs, donc entre deux rayons vecteurs binormaux consécutifs, mais c'est là que Frenet s'écarte un peu de la tradition : il va tenir compte de l'orientation[5]. Si MB est la direction de l'axe du plan osculateur, il considère quatre points consécutifs M, M', M'' et M''' puis remarque qu'il y a deux cas suivant que M''' est du même côté ou non que B par rapport au plan osculateur $MM'M''$. Il est ainsi amené à *convenir* que l'angle de torsion u sera positif dans ce cas, négatif dans l'autre, mais qu'il est toujours donné par

$$u = -\frac{d\alpha}{\lambda} = -\frac{d\beta}{\mu} = -\frac{d\gamma}{\nu}$$

et donc $u = \pm\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$. On a donc obtenu la troisième formule de Serret-Frenet, mais cette fois avec la convention « moderne » de signe. Frenet calcule ensuite u, avec un déduction difficile à suivre car la version donnée dans le Journal de Liouville [ibid., p. 439], contient une erreur d'exposant. Il est écrit :

$$\alpha da + \beta db + \gamma dc = -(ad\alpha + bd\beta + cd\gamma) = u(\lambda da + \mu db + \nu dc)$$

[5]On peut néanmoins voir dans le copieux article de Saint-Venant [1845a] des préoccupations du même ordre, comme on l'a signalé supra.

puis

$$\alpha da + \beta db + \gamma dc = u\omega$$

alors qu'il faudrait lire :

$$\alpha d^2 a + \beta d^2 b + \gamma d^2 c = -(dad\alpha + dbd\beta + dcd\gamma) = u(\lambda da + \mu db + \nu dc)$$

puis

$$\alpha d^2 a + \beta d^2 b + \gamma d^2 c = u\omega$$

ce qui permet d'obtenir

$$u = ds\frac{(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z)}{D^2}$$

où

$$\begin{cases} A = dyd^2z - dzd^2y \\ B = dzd^2x - dxd^2z \\ C = dxd^2y - dyd^2x \end{cases} \quad D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Dans le paragraphe suivant, Frenet détermine le troisième angle de contingence, c'est-à-dire l'angle entre deux rayons de courbure infiniment voisins. Suivant le principe établi, si θ désigne cet angle (infiniment petit), on a

$$\theta^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2.$$

Frenet utilise alors la relation $\lambda = \beta c - \gamma b$ qu'il dérive, et à l'aide des formules SF1 et SF2, il déduit

$$d\lambda = cd\beta - bd\gamma + \beta dc - \gamma db = u(b\nu - c\mu) - \omega(\mu\gamma - \nu\beta) = \alpha u - a\omega$$

ce qui, avec les deux formules analogues, constitue les formules de Serret-Frenet 2. Ces formules sont immédiatement utilisées pour calculer l'angle de contingence, on obtient

$$\theta^2 = u^2 + \omega^2$$

formule obtenue par Lancret, comme le rappelle Frenet, « par une tout autre voie. »

b. Une comparaison

Les deux articles que nous avons étudiés conduisent donc aux fameuses trois formules. Si on peut considérer que dans les travaux de Cauchy, la première formule et peut-être la troisième sont déjà présentes, la seconde formule est originale. De plus, chacun des deux auteurs insiste sur le rôle important de ses formules pour les applications, sur le caractère systématique et symétrique des calculs.

– Serret :

> « Je me propose d'indiquer ici quelques formules par lesquelles on simplifie considérablement la solution de diverses questions relatives à la théorie des courbes. » [Serret 1851a, p. 193]

– Frenet :

> « Ces formules, qui me paraissent propres à simplifier l'étude des courbes gauches, ne supposent pas un choix particulier d'axes, et introduisent dans les calculs une symétrie et des réductions qui les abrègent souvent beaucoup. » [Frenet 1853, p. 365]

Cette dernière citation est extraite d'un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, sur lequel nous aurons à revenir.

Il n'en reste pas moins qu'il y a quelques différences entre les deux auteurs, parfois minimes. Serret utilise les angles, Frenet donne directement un nom aux cosinus déterminants ; certaines déductions sont un peu différentes (par exemple pour SF2), mais c'est surtout dans les applications que chaque auteur donne de ses formules que leur personnalité mathématique diffère. Cette découverte des formules a été faite de façon indépendante par les deux mathématiciens, dans la même période. Il est inévitable que se pose une question de priorité.

3 Une question de priorité

a. La revendication de Frenet

Nous avons donc vu que l'intégralité des formules de Serret-Frenet a été publiées pour la première fois par Serret, dans [1851a]. Dans cet article, Serret date la lettre à Liouville donc le début de ses travaux sur la question de deux ans auparavant. La publication des formules par Frenet date, quant à elle, de 1852, dans le même journal de Liouville. Son article est présenté comme un extrait d'une thèse, soutenue en 1847. Il semble donc que la priorité doive être attribuée à Frenet. C'est d'ailleurs pour cela qu'on s'accorde maintenant à nommer ces fameuses formules du seul nom de Frenet. Mais originellement, ce n'a pas été si simple... Frédéric Frenet a été élève de l'École normale supérieure, il soutient sa thèse à Toulouse, puis enseigne à Lyon. Cet éloignement de Paris rend la communication de ses travaux moins facile. De plus, Serret est un mathématicien reconnu, le nombre de ses publications dans le journal de Liouville, de ses mémoires présentés à l'Académie est déjà impressionnant en 1851. En 1848, il est nommé examinateur à l'École polytechnique, et enseigne l'algèbre à la Sorbonne dès l'année suivante, date de publication de son *Cours d'algèbre supérieure*.

Ainsi, quand Bertrand publie son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* [Bertrand 1864], il écrit tout naturellement :

> « On peut considérer en chaque point d'une courbe à double courbure trois droites rectangulaires dont la position est intimement liée aux affections de la courbe, savoir : la tangente, la normale principale, et la perpendiculaire au plan osculateur.

> Nous avons fait connaître les formules qui expriment les cosinus des angles formés par chacune de ces directions avec les axes. Les différentielles de ces cosinus s'expriment aussi d'une manière élégante et satisfont à des équations importantes dues à M. Serret et que nous allons faire connaître. » [Bertrand 1864, p. 622]

Le traité de Bertrand est le premier ouvrage faisant connaître ces formules au plus large public. Frédéric Frenet se sent en droit de protester, ce qu'il fait dans les *Nouvelles annales de mathématiques*[6] :

> « *Extrait d'une lettre de M. Frenet, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.*
>
> Permettez-moi de recourir à la publicité de votre excellent journal pour une petite question de priorité. Dans le beau Traité de Calcul Différentiel que vient de publier M. Bertrand, on trouve, n° 590, des formules relatives aux courbes à double courbure, et qui sont l'expression du théorème que voici : *Le rapport des flexions d'une courbe en un point est égal au rapport des accroissements que subissent en passant de ce point à un point infiniment voisin, les cosinus des angles d'une droite quelconque avec la tangente et l'axe*[7].
>
> Ces formules, attribuées par M. Bertrand à M. Serret, je les ai revendiquées pour mon compte dans un travail qui fait partie du tome XII des Nouvelles Annales de Mathématiques. Il est vrai que ce volume est celui de l'année 1853, tandis que l'extrait d'une lettre, où M. Serret les a démontrées pour la première fois, figure dans l'édition du grand ouvrage de Monge (p. 561), publié par M. Liouville en 1850. Mais je renouvelle ici une affirmation déjà consignée dans le tome XII des Nouvelles Annales, et que le témoignage de M. Liouville appuierait au besoin : c'est que, dès l'année 1847, l'illustre rédacteur du Journal de Mathématiques avait entre les mains un manuscrit de moi contenant ces formules et plusieurs de leurs conséquences. Aussitôt que la nouvelle édition de l'œuvre de Monge me fut connue, et ce ne fut qu'en 1852, j'adressai une réclamation à M. Liouville, qui voulut bien l'accueillir et fit insérer mon travail dans le journal qu'il dirige. Toutefois, je suis bien loin de m'étonner que M. Bertrand, dont j'ai d'ailleurs personnellement éprouvé l'esprit de justice et l'extrême obligeance, ait pensé que M. Serret avait le premier donné ces formules, car il a ignoré jusqu'ici l'existence de tout document imprimé sur ce sujet-là antérieurement à 1850. Mais la vérité est qu'il existe un tel document, dont l'impression remonte au mois de juillet 1847 ; c'est le programme même de la Thèse dont le Journal de Mathématiques de 1852 contient le résumé.
>
> Dans l'exemplaire de ce programme que j'ai l'honneur de vous envoyer avec cette lettre, vous trouverez Monsieur le Rédacteur, l'énoncé littéral du théorème que je cite en commençant, théorème qui n'est que la traduction géométrique de

[6] Cette revue est sous-titrée : Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale. Elle est alors dirigée par M.Gerono, professeur de mathématiques et M.Prouhet, répétiteur à l'école impériale polytechnique et fut fondée en 1842 par Gerono et Terquem.

[7] L'axe est ici la perpendiculaire au plan osculateur.

mes formules, et dans l'expression duquel M. Serret s'est naturellement rencontré avec moi, en écrivant une des Notes dont il a enrichi la sixième édition du Traité élémentaire de Lacroix[8]. Cette pièce imprimée, que je remets en vos mains, et qui porte une date irrécusable, me paraît justifier pleinement ma réclamation de priorité. » [Frenet 1864, p.284-286]

On remarque donc, dans cette revendication, que Frenet s'attribue essentiellement non pas les formules, mais le théorème qui est la conséquence des formules SF1 et SF2, théorème présent dans la lettre à Liouville et dans [Serret 1851a], mais non dans [Frenet 1852] ou dans [Frenet 1853]. Ce théorème n'est pas apparent non plus dans le traité de Bertrand [1864]. D'ailleurs les rédacteurs des Nouvelles Annales, à la suite du courrier que leur adresse Frenet font la remarque suivante :

« Note du Rédacteur. -Thèse sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes quelconques, par F. Frenet, ancien élève de l'École Normale, professeur de mathématiques spéciales au collège royale de Toulouse, A. Chauvin et Cie, 1847, in 4^{o} de 36p. À la page 35 commence le *Programme d'une Thèse sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure.* Le théorème revendiqué s'y trouve au premier alinéa dans les termes cités plus haut. La réclamation de M. Frenet est donc parfaitement fondée. Il est fâcheux que M. Frenet ait été moins explicite dans l'extrait qu'il a donné en 1852. Pour qu'un théorème frappe l'esprit du lecteur, il faut qu'il soit énoncé, et il ne suffit pas qu'on puisse le conclure du rapprochement de quelques formules. » [Frenet 1864, p. 286]

Il s'agit donc bien d'une revendication de priorité du théorème énoncé par Serret, et non explicitement par Frenet, et ceci alors que notre regard rétrospectif nous fait juger plus importantes les formules y conduisant que le théorème lui-même. Frenet précise que c'est un manuscrit contenant les formules qu'il a envoyé à Liouville, en 1847 ; apparemment, Liouville n'a pas utilisé ce texte,

b. Le précédent de Bartels

Tout récemment, une autre revendication (posthume) de priorité a été mise en avant, dans [Reich 1973] et [Lumiste 1997]. Il s'agit des travaux de Martin Bartels, connu comme enseignant du jeune Gauss et de Lobatchevsky. En effet, en 1830, Carl Eduard Senff, élève de Bartels à l'Université de Tartu (Estonie) et qui sera son successeur, publie un mémoire sur les « *Principaux théorèmes de la théorie des courbes et des surfaces* ». C'est dans ce mémoire qu'on trouve ce qui constitue une préfiguration des formules de Frenet mais Carl Eduard Senff précise que ces résultats sont dus à son maître Bartels. Comme le remarquent Karin Reich et Ülo Lumiste,

[8] M. Serret s'exprime ainsi : «Si α et λ désignent les angles formés avec une droite fixe D par la tangente et par l'axe du plan osculateur en un point d'une courbe à double courbure, le rapport $\frac{d.\cos\lambda}{d.\cos\alpha}$ est indépendant de la droite, et sa valeur est égale au rapport de la première courbure à la seconde» (Lacroix, sixième édition t. II,p. 149) (note de Frenet)

les formules ne sont pas données sous la forme qu'elles prennent dans les textes de Serret et de Frenet mais sous forme covariante. Bartels introduit les cosinus directeur des trois directions : (ξ,η,ζ) pour la tangente, (ξ',η',ζ') pour la normale au plan osculateur et (ξ'',η'',ζ'') pour la normale principale. Les résultats obtenus sont alors écrits sour la forme

$$\begin{aligned}
\xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'' &= -(\xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta') = d\sigma' \\
\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta &= -(\xi d\xi'' + \eta d\eta'' + \zeta d\zeta'') = d\sigma \\
\xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta' &= -(\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta) = 0
\end{aligned}$$

où $d\sigma'$ et $d\sigma$ représente les deux angles de flexion. Comme dans le cas de Serret et Frenet, les formules ne sont pas données pour elles-mêmes, mais servent à la démonstration de divers résultats comme le théorème de Lancret. Terminons en remarquant qu'il est attesté que Bartels a été lecteur de Cauchy, notamment des *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie* [1826a], ainsi que bien sûr, de Monge et Lagrange.

4 Les applications

a. Serret et les hélices

Rappelons que dans les notes de Liouville, [Monge 1850], la lettre de Serret est citée au moment où Liouville vient de reprendre la démonstration de Puiseux. Serret utilise en effet sa méthode pour résoudre plusieurs problèmes, dont voici les énoncés par Serret lui-même :

- trouver les courbes dans lesquelles les deux courbures ont en chaque point un rapport constant k,
- trouver la courbe dans chacun des points de laquelle la courbure et la torsion ont des valeurs constantes,
- trouver les courbes dont le rayon de torsion $\frac{ds}{d\eta}$ a une valeur constante r,
- trouver les courbes dont le rayon de courbure $\frac{ds}{d\epsilon}$ a une valeur constante ρ.

Dans l'article [1851a] du Journal de Liouville, Serret va résoudre les problèmes suivants :

- l'hélice ordinaire est la seule courbe dont les deux courbures sont constantes,
- les courbes dont les deux courbures ont un rapport constant sont les hélices tracées sur un cylindre à base quelconque,
- une courbe est sphérique si et seulement si

  $$\rho^2 + r^2 \frac{dr^2}{ds^2}$$

  est constant.

Dans les deux cas, alors que les deux premiers problèmes sont donc bien connus (ce sont les caractérisations des hélices quelconques et circulaires), les autres problèmes sont traités pour la première fois, bien que leur énoncé soit naturel,

Commençons par la justification du théorème de Lancret, caractérisation des hélices quelconques. Nous avons vu à quel point la démonstration de Puiseux était délicate, et artificielle. La méthode de Serret est au contraire très directe : supposant le rapport de la courbure et de la torsion égal à k, il déduit des équations SF1 et SF2 que

$$\begin{cases} d\cos\lambda - k d\cos\alpha = 0 \\ d\cos\mu - k d\cos\beta = 0 \\ d\cos\nu - k d\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut, traduit dans un cadre moderne à $\mathbf{b}' - k\mathbf{t}' = 0$. Il peut alors intégrer ces égalités, ce qui donne $\mathbf{b} - k\mathbf{t} = (1+k^2)\mathbf{c}$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur unitaire constant. Serret en déduit que « l'axe du plan osculateur de la courbe cherchée fait avec une droite fixe un angle constant »[9], puis que la tangente à la courbe fait avec la même droite un angle constant ; il s'agit bien d'une hélice. En prenant comme droite fixe l'axe des z, il termine l'intégration et obtient comme équation de la courbe

$$\begin{cases} z = k(x\cot\theta + y\sin\theta) - u \\ 0 = k(-x\sin\theta + y\cos\theta) - \frac{du}{d\theta} \\ 0 = k(-x\cos\theta + y\sin\theta) - \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{cases}$$

Enfin, Serret considère le second cas (courbure et torsion constantes), et montre qu'il s'agit d'une hélice circulaire.

Dans [Serret 1851a], il y a une différence notable. Serret traite en premier lieu le cas où courbure et torsion sont constantes. En substance, il utilise la seconde formule SF2, qui, après dérivation donne

$$\frac{d^2\mathbf{n}}{ds^2} = -(\kappa^2 + \tau^2)\mathbf{n}.$$

Cela s'intègre immédiatement et donne le résultat : la courbe est une hélice circulaire. On peut remarquer que c'est une des rares déductions qui donne directement le résultat souhaité, sans passer par le cas général de l'hélice quelconque. Serret examine ce cas général après le cas particulier, par une méthode un peu simplifiée par rapport à la méthode que nous venons de décrire.

Sans détailler les autres conséquences que Serret tire de ses formules, remarquons qu'elles sont très proches des calculs que l'on fait avec le formalisme moderne.

b. La résolution du problème de Bertrand

Une des grandes réussites de la méthode de Serret, c'est la résolution très rapide du problème qu'avait posé Joseph Bertrand : à quelle condition les normales principales d'une courbe à double courbure sont-elles les normales principales d'une autre courbe ? Dans un court ar-

[9] Son calcul revient à montrer que le produit scalaire de $\mathbf{b}$ avec $\mathbf{c}$ vaut $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

ticle (deux pages) du *Journal de Liouville*, Serret va montrer que l'une de ses formules permet de résoudre très facilement le problème, en tout cas bien plus facilement que Bertrand lui-même :

> « On démontre ce théorème d'une manière très-simple et très-élégante en faisant usage des formules que j'ai données dans un Mémoire qui fait partie du présent volume. » [Serret 1851b, p. 499]

Serret note x_1, y_1, z_1 les coordonnées des points de la courbe cherchée, s_1 son élément d'arc et $d\omega$ son angle de contingence. Pour simplifier, il se contente de raisonner sur une coordonnée et écrit donc les conditions qui doivent être satisfaites

$$(2) \quad x_1 = x + a\cos\xi, \qquad (3) \quad d\frac{dx_1}{d\sigma_1} = \cos\xi\, d\omega$$

en supposant a constant[10]. Il suffit alors de calculer dx_1, ce qui utilise la seconde formule de Serret-Frenet. Serret obtient alors

$$ds_1 = \sqrt{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)^2 - \frac{a^2}{r^2}}\,ds = R\,ds$$

où ρ est le rayon de courbure et r le rayon de torsion. La condition (3) donne le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} d\omega = \left[\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right]\frac{ds}{R} \\ a d\frac{1}{\rho} + \left(1-\frac{a}{\rho}\right)\frac{dR}{R} = 0 \\ d\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dR}{R} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont linéaires du premier ordre, et l'on constate rapidement qu'elles sont équivalentes. La dernière, par exemple s'intègre en $R = \frac{k}{r}$, et, compte tenu de l'expression de R, elle équivaut à

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1$$

où b est une constante d'intégration. On a obtenu la caractérisation des courbes de Bertrand.

c. Les problèmes de Frenet

Le premier mémoire de Frenet [1852] utilise les « formules » pour des objectifs entièrement différents. Il reste dans le registre classique de la démarche de Monge et Lancret, et étudie :

- la courbe lieu des centres de courbure,
- le rayon de la sphère osculatrice,
- l'arête de rebroussement de la surface polaire,
- la droite rectifiante,
- l'arête de rebroussemement de la surface rectifiante.

[10] Serret fait donc l'hypothèse de la constance de la « distance » entre les deux courbes. C'est un peu dommage, car en supposant a fonction de s, le calcul de dx_1 et la considération de ce que les courbes doivent avoir même normale principale auraient permis de montrer que a devait nécessairement être constant, voir page 287.

Pour tous ces objets géométriques, introduits par ses prédécesseurs, il obtient de façon efficace des résultats nouveaux : les éléments d'arcs des trois courbes, leur courbure et torsion. En particulier, il cite le théorème attribué à Fourier, mais montre de façon précise que l'arête de rebroussement de la surface polaire n'ayant pas même élément d'arc que la courbe initiale, le théorème de Fourier ne peut s'interpréter comme un simple échange des courbures et torsions.

Encore une fois, comme dans le cas de Serret, les résultats obtenus par Frenet sont soit nouveaux, soit pour certains des résultats anciens réinterprétés. Il n'y a plus d'utilisation des méthodes géométriques antérieures et tout est obtenu par les moyens purs de l'analyse. Les déductions sont, à part l'absence du formalisme vectoriel, extrêmement proches de ce que l'on peut obtenir actuellement.

Le mémoire [Frenet 1853] traite d'autres sujets, mais toujours avec les fameuses formules comme point de départ. Il s'agit cette fois de redémontrer des résultats obtenus par Ossian Bonnet [1853]. Contemporain et ami de Serret (ils entrent ensemble à l'École Polytechnique), Bonnet est surtout connu pour ses travaux sur les surfaces, mais, comme le dira Paul Appell :

> « La théorie des courbes gauches lui doit d'importants résultats, parmi lesquels il faut placer en première ligne les évaluations élégantes de divers infiniment petits d'ordre supérieur, à l'aide de l'élément d'arc, de l'angle de contingence et de l'angle de torsion. Ces expressions d'une grande utilité dans beaucoup de démonstrations géométriques, sont aujourd'hui classiques. » [Appell 1893]

Frenet commence par rappeler ses formules, puis les utilise pour écrire des développements limités des cosinus et calcule ensuite, entre autres :

– La plus courte distance entre deux tangentes consécutive : $\frac{1}{12}\omega\, u\, ds$;
– l'angle entre la perpendiculaire commune de deux tangentes consécutives avec le plan osculateur : $\left(\frac{1}{2}\right) u$;
– L'angle de la tangente en M' avec le plan osculateur en M, etc.

5 Conclusion : Serret versus Frenet

Nous avons donc vu, dans ce chapitre, que les deux auteurs de la série de formules, que nous appelons formules de Serret-Frenet, sont, selon toute vraisemblance, les découvreurs indépendants des mêmes résultats. Depuis les concepts inventés par Lancret et les techniques mises au point par Cauchy, il pouvait sembler qu'il n'y avait plus guère de choses à découvrir dans le domaine des courbes à double courbure.

Et pourtant : deux auteurs, trois si l'on y inclut Bartels, sont parvenus à dégager des formules qui représentent une véritable nouveauté et qui constituent, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, le moyen d'achever la théorie locale des courbes à double courbure. C'est la fécondité de ces formules qui montre leur importance, même si leurs auteurs (en particulier Frenet), ne s'en sont pas forcément rendu compte dès le début.

Il est cependant une différence importante entre nos deux auteurs, sur le plan théorique :

ce sont les applications qu'ils en tirent. D'un côté Frenet utilise ses formules pour redémontrer ou prouver des résultats connus, ou pour explorer au moyen de l'analyse le lieu des centres de courbure, le lieu des centres de courbure sphérique... Dans tous les cas, Frenet n'utilise que le calcul différentiel. De l'autre, Serret a pour but de fonder par l'analyse des résultats obtenus géométriquement par Puiseux, Bertrand ou Lancret. Ses méthodes demandent, au contraire, de résoudre des équations différentielles, d'utiliser le calcul intégral. On peut considérer que les thèmes traités par Serret sont plus ambitieux, plus théoriques. Le reste de l'œuvre de Serret est également d'une autre ampleur que les travaux de Frenet.

Dans le chapitre suivant, nous allons clore l'histoire, une histoire qui est, au milieu du XIX^{e} siècle, sur sa fin.

Chapitre E

Après les formules

Une fois établies les formules, la théorie des courbes à double courbure paraît achevée. Serret et dans une moindre mesure Frenet les ont appliquées avec succès pour résoudre quantité de problèmes, mais il reste une dernière étape : montrer que le système d'équations différentielles que constituent les formules de Serret-Frenet se résout, et qu'ainsi les fonctions courbure et torsion caractérisent à elles seules les courbes à double courbure.

1 Autres conséquences, autres auteurs

a. Molins

Parmi les mathématiciens contemporains de Serret et Frenet qui ont fait des recherches sur les courbes à double courbure, nous avons déjà évoqué Puiseux, Bertrand, Bonnet, Saint-Venant. D'autres auteurs, certes de moindre renommée, se sont aussi intéressés au sujet. Ainsi Henri Molins, normalien et professeur à la faculté des sciences de Toulouse. En 1843, il se penche sur un problème de trajectoires. Cette expression est habituellement consacrée à la recherche de l'ensemble des courbes qui coupent une famille de courbes suivant un angle donné ; si, comme c'est souvent le cas, il s'agit d'un angle droit, on parle de trajectoires orthogonales. Dans le mémoire [Molins 1843a], l'auteur s'intéresse aux trajectoires qui coupent une courbe à double courbure suivant un angle donné. Autrement dit, Molins étudie le problème réciproque de l'étude des développoïdes, sujet du second mémoire de Lancret [1806].

> « Nous nous sommes proposés la question inverse qui consiste à trouver les courbes qui auraient pour développoïde une courbe donnée quelconque, et nous sommes arrivés à voir que leur détermination dépend d'une équation différentielle du premier ordre qu'on peut toujours intégrer. » [Molins :1843a, p. 132]

Henri Molins utilise une méthode indirecte. Il commence par observer que les trajectoires cherchées sont sur la surface développable des tangentes. Partant alors de l'équation d'une surface développable quelconque, il obtient une équation assez simple que doivent satisfaire les coordonnées (x, y) de la trajectoire cherchée :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{l(pqs - t(1+p^2)) - s\sqrt{1+p^2+q^2}}{k(pqt - s(1+q^2)) - t\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

où p, q, s, t sont les dérivées partielles de z correspondant à la surface développable, avec les notations de Monge. La dérivée r n'apparaît pas, à cause de la condition $rt - s^2 = 0$ que satisfont les surfaces développables. La constante k est la tangente de l'angle avec lequel la trajectoire coupe les développantes.

Il ne reste plus alors qu'à déterminer p, q, r, t en fonction des équations de la courbe à double courbure initiale, ce que fait Molins. On y parvient assez facilement, mais au prix de calculs fastidieux.

La suite du mémoire se compose de vérifications sur des cas particuliers : les courbes planes, les développantes, l'hélice circulaire. En résumé, on peut considérer ces résultats comme un exercice, certes assez technique, mais plutôt direct. La rapidité de la résolution est compréhensible quand on considère la facilité avec laquelle on obtient les équations des développantes ordinaires des courbes planes : il n'y a aucune intégration à faire.

La même année Molins reprend le problème de la recherche des développées des courbes à double courbure, dans le but de la simplifier : sa démarche est classique et efficace. Il choisit un repère privilégié, de sorte que l'origine est le point courant de la courbe, l'axe des x la tangente, le plan xOy le plan osculateur. Enfin, il prend pour paramètre x. Avec ces simplifications, Molins obtient une expression particulièrement simple du rayon de courbure :

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y}$$

Ce qui confirme le résultat de Cauchy : la courbure d'une courbe à double courbure coïncide avec la courbure de sa projection sur le plan osculateur. Cherchant ensuite le centre de courbure sphérique, intersection de trois plans normaux consécutifs il trouve que sa cote est $z' = -\frac{dx^2 d^3y}{d^2y d^3z}$; comme l'angle de torsion est $\omega = \frac{d^3z}{d^2y}$, il en déduit :

$$d\rho = H\omega$$

qu'il énonce sous la forme... peu parlante :

> « Le rapport de la différence de deux rayons de courbure consécutifs à l'angle de torsion est égal à la distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur » [Molins 1843b, p. 381]

Ce résultat est suivi du calcul de l'élément d'arc $d\sigma$ du lieu des centres de courbure : grâce à sa méthode simplificatrice, Molins trouve que $d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2\omega^2$, ce qui confirme que, si la courbe est plane (et donc ω nul), on a $d\sigma = d\rho$, et le lieu des centres de courbure est une développée. En revanche, si la torsion n'est pas nulle, on a démontré « d'une nouvelle manière » dit Molins, que le lieu des centres de courbure n'est pas une développée. De la même façon, Molins obtient une formule qui lui permet d'énoncer :

> « L'angle que fait la tangente à la courbe lieu des centres des cercles osculateurs avec le rayon du cercle osculateur est le complément de l'angle que fait avec ce même rayon le rayon de courbure sphérique. » [ibid., p. 383]

Ces deux résultats sont retrouvés par Frenet, dans [1853], qui les attribue bien à Molins. Dans la suite du mémoire, Molins s'attaque donc à la recherche des développées, mais il revient alors à une méthode de type courbe-polygone :

> « Soient M, M', M'' divers points consécutifs de la courbe, CO l'intersection des plans normaux en M, M', CO' l'intersection des plans normaux en M, M', CO' celle des plans normaux en M', M'', etc... » [ibid., p. 384]

Par la suite, à grands renforts de triangles infinitésimaux semblables, mais aussi avec des relations qu'il a obtenues auparavant, Molins parvient aux équations des développées, faisant intervenir une primitive de l'angle de torsion, comme attendu. Il termine en traitant du cas particulier des développées d'hélices circulaires (déjà envisagé par Cauchy et Navier).

b. Voizot

Autre auteur, encore moins connu, M. Voizot publie dans le journal de Liouville des notes sur les courbes à double courbure [Voizot 1850, 1852]. Dans la première note, Voizot reprend les résultats sur les courbes dites « de Bertrand », en affirmant que certains sont contenus dans un mémoire qu'il a envoyé à l'Institut en 1847 (année à laquelle Frenet avait envoyé sa thèse à Liouville...) Les méthodes utilisées par Voizot sont très traditionnelles, et il semble qu'il n'ait en réalité obtenu que le cas particulier des courbes à courbure constante déjà traité par Monge [1784b]. Par ailleurs, dans ce mémoire et le suivant, Voizot redécouvre des résultats de Lancret par une autre méthode : il introduit ce qu'il appelle le cône osculateur d'une courbe à double courbure. Les axes de ces cônes osculateurs engendrent une surface développable qui se révèle être la surface rectifiante de Lancret (mais Voizot ne le fait pas remarquer).

De ces quelques textes – il y en a d'autres – on peut tirer les remarques suivantes :

– Le sujet est toujours attractif pendant cette première moitié du XIX^{e} siècle. Il attire l'attention des mathématiciens débutants ou plus chevronnés, surtout en France.
– Les développements auxquels il conduit peuvent paraître très spécialisés, et semblent être des variations ou des variantes qui ne sont pas toujours très passionnantes.

Il y a cependant une différence entre deux directions : d'une part celle qui conduit à étudier de façon encore plus détaillée des objets dérivés des courbes à double courbure : développées, développantes, surfaces diverses engendrées par des droites liées aux courbes, de l'autre celle qui élargit le domaine d'étude à des résolutions d'équations différentielles, ou qui pose des problèmes réciproques, plus théoriques.

Dans les deux cas, l'utilisation des formules de Serret-Frenet apporte un gain décisif, et les problèmes les plus ambitieux peuvent alors être résolus sans le langage des courbes-polygones, avec une exigence de rigueur qui fait de plus en plus consensus. Rigueur dans les raisonnements généraux, mais pas encore dans les hypothèses (régularités diverses) ou les cas particuliers (singularités).

2 Paul Serret

Paul Serret est un homonyme de Joseph-Alfred Serret[1], qui, curieusement, s'est aussi consacré au début de sa carrière à l'étude des courbes à double courbure. Il ne faisait pas partie de l'*establishment* mathématique de l'époque, ce qui lui inspirait une certaine amertume ; ainsi écrit-il à propos d'un article de Joachimstal, dans le Journal de Crelle :

> « J'ignore avec quels développements. Car le volume cité manque précisément à la collection de M.Mallet-Bachelier qui avait bien voulu la mettre à ma disposition pour cette recherche. Je ne dis rien des bibliothèques publiques, où j'aurais pu me renseigner : les exigences du travail quotidien en éloignent les professeurs, et les sauf-conduits nécessaires pour y pénétrer les tiennent dehors. » [Serret(Paul) 1860, p. 255]

Dans l'ouvrage dont nous avons extrait cette citation et qui est la reprise développée de ses deux thèses [Serret(Paul) 1859][2], Paul Serret ambitionne notamment de faire une étude locale complète des courbes à double courbure. Un de ses objectifs est de « reconstruire d'une seule pièce une ligne à double courbure d'après les caractères qu'elle présente en l'un de ses points. » C'est une des première fois où le problème de la caractérisation d'une courbe à double courbure est vraiment posé. Rappelons néanmoins que dans les manuscrits de Fourier et dans le manuel de géométrie descriptive de Lacroix, on trouve cette idée (par l'intermédiaire des courbes-polygones) que la donnée de la courbure et de la torsion permet de reconstruire la courbe à double courbure.

Dans son livre, Paul Serret reprend tout ce qui est connu depuis Monge sur les courbes à double courbure, un peu comme le fit Saint-Venant, mais avec plus d'ampleur et de façon moins élémentaire. La partie historique est détaillée et fait remonter le début de la théorie des courbes de l'espace à Pappus et Architas. Quand Paul Serret reprend les idées de Monge sur l'existence des développées, il reprend aussi la méthode des courbes-polygones, mais en l'améliorant, c'est-à-dire en la précisant de la façon suivante : les côtés du polygone doivent tous avoir la même longueur ; si les sommets du polygone sont α, β, γ, les plans normaux sont les plans médiateurs des segments $\alpha\beta$, $\beta\gamma$... Un raisonnement-type se termine par une formule comme « si donc on imagine que la longueur commune des côtés diminue indéfiniment, et que l'on passe à la limite... »

[1] Cela n'a sans doute pas facilité la reconnaissance de ses travaux. Ainsi, Karin Reich [1973, p. 284] attribue à Joseph-Alfred Serret un mémoire à l'Académie, qui est en réalité la présentation par Paul Serret des travaux issus de sa thèse.

[2] Achevées en juillet 1858 et soutenues le 19 décembre 1859, sous la présidence de Duhamel, Liouville et Puiseux étant examinateurs. L'ouvrage [1860] ne diffère des thèses que par l'adjonction de cinq notes, traitant principalement de questions concernant les lignes de courbure ou les géodésiques.

Une part très importante est également prise par l'étude des *indicatrices sphériques*[3], c'est-à-dire de la trajectoire sur une sphère de centre 0 du point m tel que le vecteur $\overrightarrow{om}$ soit le vecteur tangent. Nous avons vu que cette idée avait déjà été exploitée par Euler. Afin de créer les outils d'étude de l'indicatrice, Paul Serret consacre un long chapitre à l'étude des courbes sphériques.

Quand plus loin il cite le théorème de Fourier, il l'énonce en terme d'angles de contingence, mais aussi en termes de courbures, ce qui est plus précis :

> « Les angles de contingence et de torsion de la ligne primitive sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement ; le rapport de la première à la seconde courbure pour l'une de ces lignes étant égal à l'inverse du rapport analogue pour l'autre (Fourier). » [ibid., p. 17]

Paul Serret reprend également les idées de Lancret dans une autre situation quand il examine la figure que l'on obtient en développant la surface polaire (cf. page 101, chapitre II B). Il rappelle que cette figure est formée d'un point fixe O représentant tous les points de la développante, d'une courbe, arête de rebroussement de la surface polaire qui représente l'ensemble des centres de courbure sphérique, et l'ensemble de ses tangentes. On la complète avec la podaire de cette courbe par rapport à O, image de l'ensemble des centres de courbure, enfin avec des droites passant par O, représentant les développées de la courbe initiale.

Paul Serret remarque alors que, contrairement aux affirmations de Lancret, les droites images des développées n'ont pas pour point commun le point O, sinon en ce point le rayon de courbure serait nul. Et de fait, dans les exemples courants, les développées ne forment qu'un segment ou une demi-droite dont le prolongement forme toujours une droite passant par O : voir par exemple la figure A.4.

Le livre de Paul Serret est donc un ouvrage de référence, fort complet. Donnons quelques exemples de résultats ou de développements que l'on peut y trouver :

- une nouvelle démonstration de ce qu'une hélice cylindrique à courbure constante est une hélice circulaire ;
- une étude très complète des courbes sphériques, qui reprend, en particulier, l'étude des épicycloïdes sphériques de Clairaut et Bernoulli ;
- l'utilisation des indicatrices sphériques ;
- une reprise du théorème de Bouquet[4] sur les familles de droites ;
- le chapitre 4 s'intitule « *Théorèmes* », et donne plus d'une quinzaine de propositions concernant des cas particuliers de courbes à double courbure ; on y trouve bien sûr nos exemples favoris : les caractérisation des hélices (quelconques ou circulaires), les courbes de Bertrand ;
- trois chapitres sur les lignes tracées sur des surfaces (de révolution, développables, gauches).

---

[3] L'expression est de Paul Serret [Serret (Paul) 1860, p. VIII].

[4] « Si dans une série quelconques de droites se succédant de manière continue, la distance de deux droites consécutives est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, cette distance est au moins du troisième ordre. »

Cet ouvrage est publié quelques années après les premiers articles de Serret. Pourtant, il ne contient pas les formules de Serret mais seulement le théorème qui s'écrit

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{d.\cos i}{d.\cos \varpi}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de première et seconde courbure et i et ϖ les angles que font respectivement la tangente et l'axe polaire avec une direction fixe. Cet exemple le montre, Paul Serret n'a pas encore dégagé les outils qui permettent réellement de répondre à la question qu'il pose au début de son livre.

Signalons également que l'œuvre de Paul Serret ne se limite pas à ce traité, et ses apports à la géométrie ont été reconnus à leur valeur par le grand géomètre qu'était Gaston Darboux. En particulier, il lui attribue la priorité dans l'étude complète de l'indicatrice sphérique [Darboux 1887, p. 15]

Dans une seconde partie, Paul Serret propose une étude mécanique des courbes à double courbure considérées comme ligne d'équilibre d'un fil reposant sur une surface, thème qui rejoint les arguments de Monge lorsqu'il envisage les lignes de plus courte distance sur une surface développable.

3 L'abbé Aoust

a. Une démarche théorique

Louis Aoust, abbé et enseignant à la faculté de Marseille, est l'auteur de nombreux ouvrages de géométrie. Ceux qui nous concernent le plus forment une trilogie : *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque* [1869], *Analyse infinitésimale des courbes planes*[1873], *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace* [1876].

L'ordre n'est pas indifférent : la logique eût peut-être voulu que le premier ouvrage se trouve en dernier. Le fait qu'il ait été écrit en premier montre bien l'intérêt porté au thème des courbes tracées sur une surface à une période où la théorie des surfaces elle-même est en pleine expansion. Par ailleurs, on peut penser que le projet de l'abbé Aoust, tel qu'il s'exprime dans le premier ouvrage, s'est avéré suffisamment productif pour être décliné dans les suivants. Voici un extrait de la préface de [Aoust 1869] qui permet de comprendre un peu mieux ce projet :

> « Le problème de l'analyse d'une courbe peut être posé de deux manières. Dans la première, on définit la courbe par une relation existant entre un de ses points et une ou plusieurs grandeurs géométriques. On exprime analytiquement cette relation ; cette expression porte le nom d'*équation de la courbe en termes finis*, et la résolution de cette équation fait connaître un point quelconque. Il faut, en second lieu, déduire de cette équation une autre équation donnant la tangente en un point quelconque, et de celle-ci une troisième donnant la courbure de cette courbe en ce point. Ensuite on s'occupe de sa rectification [...] et de sa quadrature [...]

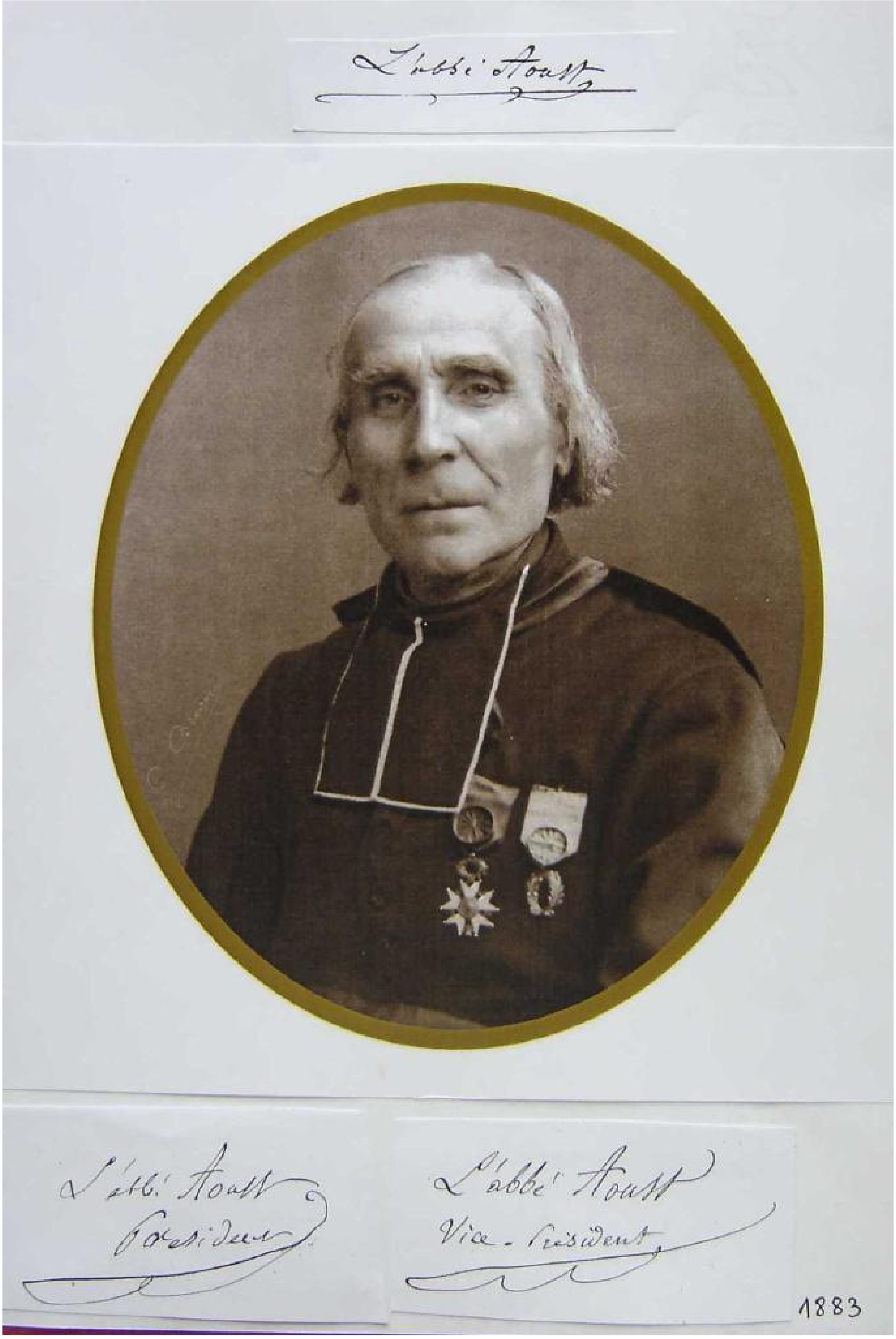


FIG. E.1 – L'abbé Aoust

La deuxième manière de poser le problème de l'analyse d'une courbe est inverse de la précédente. Elle consiste dans la relation qui lie un point de la courbe soit avec la tangente en ce point, soit avec la courbure, soit avec la longueur de l'arc, etc. Cette relation s'exprime aussi analytiquement, et il faut alors retrouver l'équation qui lie ce point de la courbe avec telle grandeur géométrique.

Ces deux points de vue sont essentiellement distincts, et correspondent à deux analyses différentes. Il a fallu plusieurs générations de géomètres pour constituer cette double analyse, en développer les progrès, et la génération actuelle en poursuit les perfectionnements. » [Aoust 1869, p. XIII]

L'abbé Aoust attache donc une grande importance à cette notion d'« équation naturelle » d'une courbe. Les avantages qu'il y voit sont de différents ordres :

– débarrasser les équations des données inutiles,
– permettre une reconnaissance immédiate de l'identité de deux courbes,
– permettre une reconnaissance rapide de certaines relations entre des courbes (courbes parallèles, courbes semblables),
– permettre une classification des courbes par leur équation naturelle.

En ce qui concerne le second point, Aoust ne démontre pas vraiment que deux courbes ayant même équation naturelle sont identiques (isométriques pour être plus précis) pas plus que ne l'avaient fait ses prédécesseurs qui avaient mis en avant le rôle des fonctions courbure et torsion pour l'identité d'un courbe. Cela paraît d'ailleurs « naturel », quand on décrit, comme Lacroix, la construction d'une courbe-polygone à l'aide de la suite des angles entre deux tangentes successives et entre deux plans osculateurs successifs. Aoust ne démontre pas davantage que toute fonction (positive) de l'arc peut être la courbure d'une courbe et que toute fonction choisie indépendamment de la même variable peut être la torsion de la même courbe. Nous verrons dans la section suivante comment Darboux résout ce problème.

Quant au dernier point, il ne s'est pas montré aussi fécond que ne le pressentait ou désirait Aoust. Il est vrai que les courbes d'équations naturelles

$$\kappa = a, \qquad \tau = b$$
$$\frac{\kappa}{\tau} = k$$
$$a\kappa + b\tau = c$$

où l'on a noté κ et τ les courbures et torsion, et a, b, c, k des constantes, représentent des familles bien répertoriées et étudiées par les géomètres de l'époque, puisqu'il s'agit des hélices circulaires, des hélices cylindriques, des courbes de Bertrand. Il est vrai que des équations aussi simples que $\kappa = a$ ou $\tau = b$ représentent des familles moins connues, parce que d'une généralité peut être trop grande (même si les premières, courbes à courbure constantes sont déjà dans [Monge 1784b], dans [Serret :1851b] et sont des cas particuliers de courbes de Bertrand). Serret, dans le même article, a aussi caractérisé par leur équation naturelle les courbes sphériques. Cependant, on ne trouve pas beaucoup d'autres exemples d'équations naturelles de courbes gauches dans la littérature, au contraire des courbes planes.

Une des explications possibles réside dans la difficulté, sinon l'impossibilité, de la résolution effective des équations naturelles : c'est encore Darboux, nous le verrons, qui fera faire un pas décisif à cette question.

b. Aoust et les courbes gauches

Nous allons maintenant regarder quelques éléments du troisième volet du tryptique [1876], en insistant sur ce qui en fait l'originalité. Le titre de la première partie « Des courbes, d'après leur équation naturelle » montre bien qu'il suit le programme fixé dans le premier des ses ouvrages :

> « Dans l'étude d'une courbe gauche, il faut exclure tous les éléments étrangers à cette courbe, et ne conserver que ceux qui lui appartiennent[...] Nous pouvons la considérer comme un polygone d'une infinité de côtés ; alors il y a trois sortes d'éléments :
>
> 1. Les côtés ;
> 2. Les angles de deux côtés contigus ;
> 3. les dièdres que les plans de deux angles consécutifs forment entre eux.
>
> [...] Ce sont les équations naturelles de la courbe, elles déterminent la forme de la courbe et non sa position dans l'espace. » [Aoust 187]

On semble donc revenu, encore et toujours, à la courbe-polygone, autrement dit à la méthode du XVIII^{o} siècle. Effectivement l'ouvrage commence par l'étude très complète des polygones gauches ; dans les chapitres suivants, beaucoup de formules concernant les courbes à double courbure sont obtenues par passage à la limite, avec par exemple, le langage suivant :

> « Définitions. Une courbe gauche peut être considérée comme un polygone gauche d'une infinité de côtés.[...] La direction que suit le point mobile, quand il parcourt un côté infiniment petit, donne la direction de la tangente ou de l'élément linéaire de la courbe.[...] L'angle que deux éléments infiniment voisins font entre eux est l'angle de contingence de la courbe. » [ibid., p. 57]

Après avoir défini les longueurs d'arc, les angles de flexion et de torsion, Aoust introduit les équations qu'il nomme maintenant *élémentaires* où le paramètre t est quelconque et les données sont s, ϵ et ω, angle de flexion ou de torsion. Comme chez Fourier, on peut ramener s et ω en fonction de ϵ. Ainsi, une courbe à double courbure a des équations élémentaires de la forme

$$\frac{ds}{dt} = f(t), \qquad \frac{d\epsilon}{dt} = \phi(t), \qquad \frac{d\omega}{dt} = \psi(t).$$

Par la suite, Aoust mène ses calculs à l'aide de ces seules grandeurs : il calcule la troisième courbure, étudie le plan rectifiant et la droite rectifiante, etc, avec différents systèmes de coordonnées.

Le chapitre le plus important de cette partie s'intitule « Passage des équations élémentaires aux coordonnées du point ». Nous y revenons ci-dessous. Dans la suite du livre, et pendant plusieurs centaines de pages, Aoust revient sur les propriétés classiques que nous avons rencontrées, un peu comme l'avait fait Paul Serret. On y trouve des résolutions parfois originales de problèmes anciens, des études de courbes tracées sur la surface polaire, sur la surface osculatrice, sur la surface des normales principales, des études de roulettes, de podaires, d'enveloppes.... Dans une seconde partie, Aoust étudie les courbes dans le cadre d'un système de coordonnées curvilignes. Contentons nous de donner deux exemples de ces nombreux développements.

(i) La reprise des idées de Lancret sur la surface rectifiante. Nous avons vu que c'est par l'intermédiaire de la notion de développée d'une surface développable que Lancret étudie la surface rectifiante. Voici comment, en quelques lignes, Aoust présente (et clarifie) ces résultats :

> « La surface rectifiante a son plan tangent perpendiculaire à la tangente de l'arc de la développante ; de là on conclut cette proposition :
> *I. La surface rectifiante d'une courbe est la surface polaire d'une quelconque des développantes de la courbe.*
> De plus, le plan osculateur de la courbe ds est perpendiculaire au plan rectifiant qui est le plan tangent de la surface rectifiante. Or la courbe géodésique d'une surface est la courbe dont le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent de la surface ; on conclut :
> *II. Une courbe est, par rapport à sa surface rectifiante, une ligne géodésique.* » [Aoust 1876]

C'est, en plus d'une vision claire, la caractérisation des géodésiques qui lui permet une telle économie.

(ii) Le problème des développées. Dans la section III, une note historique revient sur cette question :

> « Or sa manière [de Monge] de trouver les équations des développées consiste à poser trois équations différentielles que non seulement il n'intègre pas, mais dont il ne prend pas la peine de donner l'équation résolvante. Quand on calcule cette équation d'après sa méthode, on tombe sur l'équation complète d'Euler, ce qui rend cette méthode d'une application impossible, tant que l'on n'a pas montré que cette équation peut s'intégrer. Lancret a démontré qu'on peut obtenir les équations des développées en termes finis sans passer par l'équation d'Euler et en n'ayant à effectuer que de simples quadratures. Ce travail est certainement un des plus beaux qui aient été faits sur cette matière, et les géomètres qui, longtemps après lui, ont traité le même problème en le faisant dépendre soit d'une équation d'Euler incomplète, soit d'une équation linéaire du premier ordre, n'ont pas fait avancer la question. [...] M. Molins,

> en 1844, est parvenu à donner les équations des développées en terme fini au moyen d'un calcul facile, mais ces équations sont sous forme implicite, par rapport aux coordonnées des développées. M. Serret, en 1866, a donné ces mêmes équations sous forme explicite et par un procédé aussi facile qu'ingénieux. » [ibid., p. 225]

Effectivement, Aoust va parvenir assez rapidement, avec sa méthode des trièdres dérivés et intégraux, aux équations des développées (et même des développées successives).

c. Le trièdre dérivé

Terminons donc par un passage qui nous permettra de faire le lien avec Darboux. Nous savons, depuis Lancret, que les trois plans fondamentaux attachés à un point d'une courbe à double courbure (le plan osculateur, le plan normal, le plan rectifiant), jouent un rôle essentiel dans la description de tout ce qui s'attache à la courbe. À ce trièdre se sont substituées petit à petit les directions des axes : la tangente, la normale principale, la binormale. Les formules de Serret-Frenet consacrent ce rôle fondamental.

Dans le chapitre trois de la première partie de son ouvrage, Aoust pose clairement le problème :

> « La question qui va nous occuper consiste à déduire des équations élémentaires d'une courbe les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe. Cette question, lorsqu'il s'agit de courbes planes peut être complètement résolue [...] mais il n'en est pas de même des courbes non planes. Le problème, dans sa généralité est au-dessus des forces de l'Analyse, parce que l'on se trouve en présence d'une équation différentielle qu'on ne sait pas intégrer. » [ibid., p. 78]

Aoust a défini ce qu'il appelle la *courbure inclinée* qui est, pour une droite quelconque attachée à un point mobile, le rapport de l'angle de contingence à la longueur d'arc. Dans ses écrits, il donne beaucoup d'importance à cette notion. Ce qui nous semble plus intéressant, c'est qu'à une telle droite il attache un trièdre, (τ, ρ, ν) avec exactement la même définition que le trièdre de Serret-Frenet, à part, curieusement, une orientation indirecte. Il étudie alors le trièdre suivant, ramené à la même origine, exactement à la manière de Lancret, et obtient, par des moyens quasi identiques, l'analogue des formules de Serret

$$\begin{cases} (\tau, \tau') \cos(\rho, x) = d\cos(\tau, x) \\ (\nu, \nu') \cos(\rho, x) = d\cos(\nu, x) \\ -(\tau, \tau') \cos(\tau, x) - (\nu, \nu') \cos(\nu, x) = d\cos(\rho, x). \end{cases}$$

On reconnaît les fameuses formules, dans le désordre et avec des notations différentes. Aoust ne cite pas Serret (encore moins Frenet), soit qu'il n'ait pas reconnu les formules, soit qu'il considère les siennes comme plus générales.

FIG. E.2 – Gaston Darboux

Aoust introduit aussi ce qu'il appelle le *trièdre dérivé*, qui est le trièdre dont l'arête principale est la dernière arête du trièdre proposé. Il définit de même des trièdres dérivés successifs, et des trièdres intégraux. Cette notion, dont on ne saisit pas l'intérêt au premier abord est lié à la notion de développée : en effet, le trièdre des axes mobiles de la développante est le trièdre dérivé du trièdre des axes mobiles de la développée. Ce n'est pas tout, Aoust définit aussi ce qu'il nomme le *rapport spécifique*, qui n'est autre que le rapport de la courbure et de la torsion.

Les résultats qu'il obtient alors sur l'intégration des équations élémentaires sont liés aux notions (parfois un peu obscures) qu'il a introduites, avec des théorèmes comme celui-ci : « Le rapport spécifique angulaire de la courbe suffit pour déterminer la direction de la tangente au moyen d'une équation différentielle du second ordre. » [ibid., p. 108] Il parvient également à certains changements de variables intéressants, mais reconnaît qu'il est loin d'avoir résolu le problème complet.

Dans sa conclusion, Aoust s'intéresse à la question de la classification des courbes. Il propose comme principe de définir des « classes », ensembles de courbes pour lesquelles le rapport spécifique suit une équation donnée. Ainsi, il y aura la classe des courbes planes, la classe des hélices, etc. La liste des exemples est vite close.

4 Darboux, un point final

Gaston Darboux est le mathématicien qui, dans le cadre de notre sujet, fait une sorte de lien entre la théorie ancienne du XVII^{e} siècle, celle de Monge, et la théorie moderne, celle lancée par Gauss et Riemann. C'est également un de ceux qui font connaître l'œuvre de Sophus Lie, dont on sait l'importance pour les développements ultérieurs de la géométrie différentielle. C'est par lui que nous allons terminer.

De façon sans doute ironique, le livre de Darboux qui va donner la conclusion mathématique à notre étude s'appelle « *Leçons sur la théorie des surfaces.* » [Darboux 1887] Encore une fois, comme depuis le début ou presque, la théorie des courbes à double courbure paraît être au second plan, secondaire par rapport à la théorie des surfaces.

a. Le trièdre mobile

Le début du magistral traité de Darboux est consacré (livre 1, chapitre 1) au problème du mouvement d'un corps solide. Plus précisément, il s'agit d'utiliser dans la géométrie une méthode issue de la mécanique ou, à proprement parler, de la cinématique. Pour commencer, on considère deux repères ou trièdres de même origine O, et « de même disposition », on dirait maintenant de même orientation. Si le premier X, Y, Z est fixe, l'autre x, y, z mobile et les axes mobiles sont repérés par les cosinus des angles qu'ils font avec les axes fixes. Si maintenant le repère mobile est animé d'un mouvement de rotation par rapport au repère fixe, cette rotation est représentée par trois « composantes » (p, q, r), et la cinématique nous apprend que la vitesse absolue d'un point attaché au repère mobile est donnée par

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} + qx - ry \\ V_y = \frac{dy}{dt} + rx - pz \\ V_z = \frac{dz}{dt} + py - qx. \end{cases}$$

La question que l'on peut se poser est : comment déterminer le mouvement connaissant les trois fonctions du temps (p, q, r) ? Les formules données permettent d'établir que les neuf cosinus doivent être solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p. \end{cases}$$

Darboux repousse l'étude de l'intégration du système à la section suivante de son travail mais il remarque – et cela est décisif – que les quantités $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ et les autres quantités analogues sont invariantes lorsque (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont deux triplets de solutions. Autrement dit, si la position initiale est celle d'un trièdre, les solutions seront à chaque instant les cosinus directeurs d'un trièdre. Darboux remarque également que lorsque que les fonctions p, q, r sont fixées il n'y a en réalité qu'un seul mouvement solution, à un déplacement près. Il examine ensuite les modifications à apporter lorsque l'origine du trièdre est elle-même mobile.

b. Le cas particulier des courbes gauches

C'est la première application du trièdre mobile : si on considère le trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, fonctions de la longueur d'arc, ce trièdre évoluera suivant les formules établies plus haut. Il y a une particularité due à ce que le vecteur binormal est orthogonal au plan osculateur, et donc au vecteur dérivé du vecteur tangent : la composante q est une fonction constante constante nulle. On a donc, pour les cosinus directeurs a, b, c des trois directions, les relations

$$\frac{da}{ds} = br, \qquad \frac{db}{ds} = -ar + cp, \qquad \frac{dc}{ds} = -bp$$

et deux autres séries analogues.

Il ne reste plus à Darboux qu'à reconnaître ce que sont les quantités r et p : en examinant le mouvement du point $(1,0,0)$, on constate qu'il décrit le chemin rds, donc r est la première courbure. De même p sera la torsion de la courbe et les formules obtenues sont celles de Serret-Frenet.

Il y a donc un renversement par rapport à toutes les approches précédentes. C'est la *forme* des relations qui a été trouvée a priori, dans un cadre bien plus général. La courbure et la torsion viennent naturellement s'insérer dans ce cadre. La démarche de Darboux, hormis l'absence de l'écriture vectorielle et matricielle, est très proche de ce qu'on fait actuellement dans un cours de géométrie différentielle élémentaire (c'est-à-dire sans la théorie de Lie) et se soumet facilement à la généralisation à la dimension n (ou à la restriction à la dimension 2).

c. Tous les problèmes revisités

En une douzaine de pages Darboux [1887, p. 14-26] reprend alors tous les problèmes classiques que nous avons examinés dans les chapitres précédents, tant les problèmes directs que les problèmes réciproques.

Dans certains cas, sa méthode le conduit à une originalité remarquable. Il en va ainsi du signe de la torsion. Nous avons déjà remarqué (voir page 168) que Frenet avait tenu compte de la forme de la courbe, de la façon dont elle s'enroulait pour donner un signe à la torsion. Darboux procède autrement : les définitions de la courbure et de la torsion étant en quelque sorte algébriques et non géométriques, il se contente de faire les calculs avec une courbe paramétrée par le paramètre u. En posant $\Delta = \frac{ds}{du}$ (c'est donc la « vitesse »), il obtient

$$\begin{cases} \frac{\Delta^6}{\rho^2} = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 \\ \frac{\Delta^6}{\tau\rho^2} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \end{cases}$$

formules qui montrent que le rayon de courbure n'est donné que par son carré mais que la torsion peut varier en signe (remarquons au passage l'apparition de la notation du déterminant).

Pour le reste, contentons-nous de montrer à partir d'un exemple comment fonctionne la méthode « cinématique » de Darboux. Prenons le problème des développées. Si on considère un point $(0, y, z)$ du plan normal, les composantes de son déplacement infinitésimal sont

$$D_x = (1 - ry)ds, \qquad D_y = dy - pzds, \qquad D_z = dz + pyds.$$

Les points de contact avec l'enveloppe sont ceux dont le déplacement est dans le plan normal, donc ceux pour lesquels $D_x = 0$. On en déduit l'équation de l'axe polaire dans le plan normal $y = \frac{1}{r} = \rho$. Pour avoir un point de l'arête de rebroussement de la surface polaire, on ajoute que son déplacement doit être dans la direction de l'axe polaire, donc $D_y = 0$, ce qui donne $z = \frac{1}{p}\frac{dy}{ds} = \tau\frac{d\rho}{ds}$, en notant τ la torsion. Quant à un point de la développée, c'est un point du plan normal dont le déplacement doit être dirigé vers l'origine, ce qui se traduit par[5] $D_x = 0$ et $zD_y - yD_z = 0$ ce qui donne

$$y = \rho \qquad \text{et} \qquad \frac{zdy - ydz}{z^2 + y^2} = \frac{ds}{\tau}$$

qui s'intègre immédiatement :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \rho \\ y = z \tan \int \frac{ds}{\tau}. \end{cases}$$

Comme le dit alors Darboux :

> « Ces équations renferment toute la théorie des développées. On voit que ces courbes sont toutes tracées sur la surface polaire, et que les normales de la courbe qui enveloppent deux développées différentes font entre elles un angle constant. Réciproquement, si deux normales de la courbe font entre elles un angle constant, et si l'une enveloppe une développée de la courbe, l'autre également. » [ibid., p. 19]

Cet exemple, en comparaison avec tous les travaux précédents sur le même thème des développées, suffit à montrer que la méthode de Darboux a atteint une économie de raisonnements et de calculs qui semble difficile à dépasser.

d. La résolution des équations différentielles

Donnons seulement quelques indications sur ce travail très classique : Darboux commence par généraliser le problème. Tout système différentiel de trois équations à trois inconnues qui

[5] Il y a une erreur typographique dans le texte de Darboux

conserve une forme quadratique définie positive se ramène à un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p \end{cases}$$

et, en se limitant au cas où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ce qui est l'équation d'une sphère, Darboux introduit le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha - i\beta} \\ -\frac{1}{y} = \frac{\alpha - i\beta}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha + i\beta}. \end{cases}$$

La justification de ce changement est que, dans le cadre de l'espace complexe, une sphère est une surface réglée et que les équations

$$\alpha + i\beta = x(1-\gamma), \qquad 1+\gamma = x(\alpha - i\beta)$$

représentent une famille de droites incluses dans cette sphère. Les équations en y donnent l'autre famille. Cette paramétrisation linéaire (ou plutôt homographique)[6] est plus efficace pour notre système que les paramétrisations trigonométriques qui datent d'Euler. On constate en effet que x et y satisfont une même équation différentielle du premier ordre que l'on appelle équation de Ricatti. Cette équation a la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = a + 2b\sigma + c\sigma^2$$

Ces équations ont beaucoup de propriétés intéressantes qu'expose Darboux, mais l'essentiel est qu'elles ne peuvent pas se résoudre explicitement dans le cas général, sauf si l'on dispose d'une solution particulière, auquel cas on peut se ramener à une équation linéaire. En résumé, le problème de la résolution effective des équations naturelles d'une courbe à double courbure est nettement plus délicat que dans le cas des courbes planes. En effet, si on connaît la courbure en fonction de l'arc d'une courbe plane, on obtient les coordonnées des points de la courbe par une simple quadrature.

Dans la suite de son traité, Darboux revient à plusieurs reprises sur les courbes à double courbure. Il retrouve par exemple les résultats de Serret sur les courbes à torsion constante [ibid. p. 60] ou à courbure constante, mais surtout il applique la méthode du trièdre mobile à la théorie des surfaces.

[6] x et y sont appelées *coordonnées symétriques* par Darboux. Il en donne de nombreuses applications géométriques dans la suite de son ouvrage.

e. Conclusion

Au point où nous parvenons, la théorie des courbes à double courbure, que l'on nomme désormais de plus en plus souvent courbes gauches, peut être considérée comme achevée. Elle va bien sûr être réécrite, avec l'aide, parfois, de nouveaux outils comme les vecteurs. Certaines démonstrations vont être précisées : par exemple, un examen attentif de la démonstration du théorème fondamental qui énonce qu'une courbe gauche est déterminée par sa fonction courbure et sa fonction torsion (à déplacement près), montre qu'il convient de se placer sur un intervalle où la courbure ne s'annule pas. L'étude des points singuliers se fait, généralisant le cas de la dimension deux, sans difficulté importante. Des exemples nouveaux, des généralisations (par exemple le passage en dimension quelconque) seront examinés mais on ne peut plus voir dans la théorie des courbes gauches un domaine de recherches actives. Elle va entrer dans le cadre de la géométrie différentielle en tant que théorie locale des variétés de dimension un.

Rappelons que comme les géomètres de l'époque, nous n'avons fait qu'une étude locale. L'étude des propriétés globales des plongements d'un intervalle réel dans $\mathbb{R}^3$, pour simplifier ce qu'on appelle la théorie des nœuds soulève des problèmes de classification, de recherche d'invariants, indépendants de ce que nous avons développé et formant une théorie très riche.

Conclusion

L'essentiel de l'étude que nous venons de présenter s'étend sur une période de plus de 120 ans, de la parution du traité de Clairaut aux articles de Serret et de Frenet. Nous l'avons quelque peu prolongée pour intégrer les travaux de Darboux. Une telle durée a permis de souligner une évolution, notamment dans les rapports entre analyse et géométrie, qu'il nous faut maintenant expliciter.

Comme indice de cette évolution, nous allons nous attacher à l'*écriture mathématique*. Le corpus des textes étudiés est de provenances très diverses : mémoires présentés à l'Académie, manuels destinés à l'enseignement, articles parus dans une revue scientifique ou manuscrits. Il est normal d'y observer des différences de style et de forme. Nous allons brièvement recenser ce que nous avons pu observer en nous limitant à quelques-uns des auteurs étudiés : Clairaut, Monge, Cauchy et Serret. Puisqu'il s'agit de géométrie, nous nous intéresserons en premier lieu aux figures.

Le traité de Clairaut [1731] contient une dizaine de planches contenant chacune de nombreuses figures ; le mémoire de Monge [1785] comporte deux ou trois planches seulement ; on n'en trouvera pas plus dans les textes qui reprennent ce mémoire. Le traité de Cauchy [1826] n'en contient aucune, pas plus que les différents articles de Serret ou Frenet. Cette différence est significative : Clairaut se réfère constamment à ses figures. Il vaut mieux les avoir sous les yeux pour suivre ses démonstrations car son argumentation s'appuie sur la construction de nombreuses lignes ou points auxiliaires qu'il faut situer dans l'espace. La qualité des gravures de son ouvrage, la précision des tracés et une perspective cavalière rigoureuse sont une aide incontestable à la compréhension de son cheminement et de son raisonnement.

Dans le mémoire fondateur de Monge, la figure est tout aussi importante. Cependant, elle s'appuie davantage sur le texte qui nous demande de *concevoir* des droites, de les faire se mouvoir suivant une certaine règle, de déplier des hèdres ou de plier « librement » un fil sur une surface. La figure est présente pour aider l'imagination mais elle exige du lecteur un effort spécial, sensiblement plus difficile pour nous que pour les jeunes élèves de l'École polytechnique qui ont passé de longues heures sur leurs épures de géométrie descriptive.

Dans le cours de Cauchy [1826], la description des objets étudiés recourt parfois à des images dynamiques : « le second point se rapproche indéfiniment du premier. » [ibid., p. 291] Cependant le texte ne contient aucune figure. Ce langage est surtout là pour suggérer un processus de limite.

Quant à Serret, il procède dans son mémoire [1851a] et les suivants à l'étude de formules qui concernent un objet géométrique connu de tous et il se contente de préciser les notations au début de son article.

Parallèlement, l'équilibre entre le texte rédigé et les formules n'est pas le même dans les textes de Monge et de ses successeurs immédiats que dans les œuvres de Cauchy ou les articles de Serret. Comme nous l'avons souligné, Monge sépare nettement une partie géométrique qui doit emporter la conviction par une description et une argumentation entièrement verbalisées, d'une partie analytique, où se trouvent tous les calculs. Le statut de ces calculs n'est d'ailleurs pas de fournir une preuve alternative ou plus précise mais de montrer que les méthodes de l'analyse permettent d'appliquer les raisonnements géométriques à des expressions algébriques particulières, de sorte que l'on peut déterminer explicitement les objets que la géométrie a fait découvrir.

Dans les textes postérieurs à Lancret, la séparation n'existe plus. L'analyse entre en scène dès le début et joue maintenant un rôle de démonstration plus que de description. Si dans les *Leçons* de Cauchy, la rédaction littéraire et non mathématisée des raisonnements est encore présente, c'est beaucoup moins le cas dans les mémoires de Serret.

Le second plan que l'on peut considérer est celui de l'argumentation, notamment celle qui utilise le modèle des courbes-polygones. Ce modèle est issu de la tradition leibnizienne ; utilisé par Clairaut, il offre un artifice efficace pour étudier les questions relatives aux tangentes. Avec Euler, le même modèle permet de résoudre les questions qui concernent les notions de plan osculateur ou de courbure. Dans le mémoire de Monge, la méthode est plus sophistiquée. La courbe-polygone devient l'arête de rebroussement d'un polyèdre articulé, accompagné d'une succession de plans normaux consécutifs. L'utilisation mi-géométrique mi-physique du ruban vient encore compliquer ce modèle. Nous avons souvent reconnu la puissance persuasive de Monge ; il n'en reste pas moins que certaines de ses déductions nous paraissent insatisfaisantes. Dans les textes de Lacroix et de Fourier, cette insatisfaction subsiste. Par exemple, lorsque Fourier affirme qu'une courbe est déterminé par ses deux flexions, il prend pour modèle une courbe-polygone avec un angle de contingence constant, ou bien avec un côté constant : ces deux modèles donnent-ils la même courbe lorsqu'on multiplie à l'infini le nombre des côtés ? Les arguments utilisés par les auteurs suivants, à l'aide explicite de la notion de limite, vont petit à petit prendre l'avantage tout en en confortant les résultats de l'École de Monge. En particulier, même si les résultats de Lancret peuvent être considérés comme solides, des mathématiciens comme Puiseux, Saint-Venant, Bertrand et Serret vont chercher à redémontrer ses théorèmes, notamment la caractérisation des hélices, par des méthodes différentes et non géométriques.

Ces évolutions de forme traduisent selon nous une évolution plus fondamentale, qui se place dans le cadre plus général de l'histoire de mathématiques. C'est celle des rapports entre la géométrie et l'analyse. Au début de la théorie, le calcul infinitésimal est dans une période de développement extraordinaire. Des problèmes nouveaux sont posés constamment, dans les domaines de la géométrie, de la physique, et sont résolus parfois par plusieurs mathématiciens en même temps. La géométrie est un domaine d'application privilégié de l'analyse et le traité de Clairaut ouvre un champ nouveau. Avec lui et Euler, la théorie des courbes à double courbure se développe par imitation de la théorie des courbes planes. C'est surtout le calcul différentiel qui est en jeu, les arguments purement géométriques sont limités.

Dans le tournant entre le XVIII^{e} siècle et le XIX^{e} siècle, il se produit un changement important. Le mémoire de Monge reprend la théorie des courbes gauches avec un point de vue nouveau, largement inspiré de l'étude des surfaces. C'est une période où des arguments et une vision géométrique passent au premier plan et font progresser notre théorie. De nouveaux objets ou concepts se dévoilent, comme celui de la torsion, le lien fort entre les courbes à double courbure et les surfaces développables est établi. Bien que s'appuyant sur peu de figures, Monge nous fait participer à sa vision des figures de l'espace. La théorie des équations différentielles elle aussi donne lieu à une vision géométrique. Cette période va s'achever avec Lancret[7], parce que tout ou presque semble découvert, mais aussi parce que certaines limites des méthodes géométriques sont atteintes : nous avons vu combien certains raisonnements géométriques du début du XIX^{e} siècle nous paraissent maintenant difficiles à suivre. L'analyse, refondée par Cauchy, va reprendre le premier plan.

Parallèlement, la géométrie va acquérir ou retrouver une nouvelle autonomie, en se différenciant. La diffusion de la géométrie descriptive de Monge, puis la naissance de la géométrie projective sont les indices du retour d'une géométrie synthétique, sans l'utilisation systématique des coordonnées ou du calcul infinitésimal.

En géométrie différentielle, les figures les plus étudiées sont les surfaces. Grâce aux idées innovantes de Gauss et de Riemann, cette géométrie des surfaces[8] va connaître un développement spectaculaire dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

Que penser alors du rôle de la théorie des courbes gauches, théorie dont nous avons peut-être trop dit qu'elle était mineure ? Elle a certainement eu un rôle appréciable, par exemple en initiant l'étude des enveloppes de figures de l'espace ou encore en marquant l'importance de l'étude des surfaces développables. Mentionnons également l'intérêt décisif des courbes dessinées sur une surface pour l'étude de la géométrie intrinsèque de ces surfaces. Par les difficultés et obscurités qui ont accompagné son développement, depuis les erreurs des auditeurs de Pitot jusqu'aux affirmations de Lagrange sur l'ensemble des centres de courbure, elle a servi de révélateur. La complexité de la géométrie dans l'espace par rapport à la géométrie plane fait que les limites des raisonemments intuitifs sont de plus en plus apparentes.

Enfin la longue histoire de nos courbes a double courbure ne se termine pas avec les formules de Serret-Frenet : le trièdre mobile de Darboux y trouve son origine, la fecondité de ces nouvelles idées sera grâce à Élie Cartan un élément essentiel de la géométrie différentielle moderne.

[7] Cependant, certains auteurs comme Olivier vont continuer de l'utiliser.

[8] Il est significatif que le problème – facile – de la caractérisation des courbes à double courbure par la courbure et la torsion va être résolu au même moment que le problème analogue – difficile – pour les surfaces.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Repères biographiques

Dans cette annexe, nous donnons quelques éléments biographiques concernant les principaux mathématiciens que nous avons étudiés. Ces éléments sont un peu plus détaillés pour ceux qui sont moins connus mais ont joué un rôle important sur notre sujet (comme Lancret ou Serret). Notre source générale est le dictionnaire biographique de Gillipsie [DSB]. Dans certains cas, d'autres références particulières sont précisées.

Louis Aoust

L'abbé Aoust (Louis Stanislas Xavier Barthélémy) est né à Béziers le 19 avril 1814[1], et mort le 20 novembre 1885. Docteur es-sciences en 1844[2], agrégé en 1846, ll effectue sa carrière d'enseignant dans des Lycées (Collège Stanislas, Lycée Kleber à Strasbourg) puis entame une carrière universitaire à Besançon et est nommé professeur à la faculté de Marseille, il est auteur de nombreux mémoires ou livres de géométrie.

Johann Martin Christian Bartels

Né le 12 août 1769 à Brunschwick (Allemagne), mort le 18 décembre 1836, Bartels n'a que huit ans de plus que Gauss, né dans la même ville. Tout jeune assistant à l'école de la ville, il remarque le jeune prodige, contribue à la reconnaissance de ses talents, et restera en relation avec lui ; après des études à Göttingen et à Reichenau, il occupe divers postes d'enseignant et obtient une chaire à l'université de Kazan en 1808. Il semble qu' en 1810, lors d'un cours qu'il fit sur la géométrie euclidienne, il eut Lobatchewski comme élève. En 1820, il rejoint l'université de Tartu (en allemand Dorpat), en Estonie. Il y termine sa carrière universitaire, en ayant été professeur d'université durant vingt-cinq ans.

Joseph Bertrand

Joseph-Louis-François Bertrand, 1822-1900 est le neveu de Duhamel. Célèbre par sa précocité, il commence à suivre les cours de l'École polytechnique à l'âge de 11 ans, comme auditeur libre. Il y est reçu en 1839. Sa précocité se confirme : doctorat à 17 ans, professeur d'Analyse à l'École polytechnique à partir de 1856 et pendant près de 40 ans. Il enseigne également au

[1] d'après Norbert Verdier.

[2] Sujets de ses thèses : Sur l'intégration des équations simultanées aux différences partielles. Sur les oscillations des cordes pesantes, flexibles et élastiques.

Collège de France. Élu à l'Académie le 28 avril 1856 (section de géométrie), il remplace Sturm (et bat Louis-Léger Vallée). C'est un personnage essentiel du paysage mathématique français.

Pierre-Ossian Bonnet

Pierre Ossian Bonnet est né à Montpellier, le 22 décembre 1819, c'est le fils d'un commis-banquier. Il entre à l'École polytechnique en 1838, dans la même promotion que Serret, il étudie à l'École des Ponts et Chaussés et choisit, encore comme Serret, une carrière d'enseignant et de chercheur. Bonnet soutient une thèse à la Sorbonne en 1852, sur le développement de fonctions en série et sur la théorie des cartes. À l'École polytechnique, il est répétiteur de géométrie descriptive de 1844 à 1848, puis répétiteur d'analyse, examinateur d'admission en 1861, examinateur des élèves en 1869, enfin directeur des études en 1872. Sa carrière à l'École polytechnique s'achève dans la polémique : il est révoqué en 1878, à cause d'un « bruit fâcheux concernant une personne qui habitait avec lui à l'École. » (*Le XIX^e Siècle*, 13 décembre 1878). Il semble, comme le relate le journaliste Francisque Sarcey, qu'il fut « le représentant actif, écouté, honoré des idées libérales, qui dans ce moment y sont battues en brèche par la fraction cléricale . » [AAS] Il alors nommé professeur d'astronomie à la faculté des Sciences, succédant à le Verrier, puis succède de même à Liouville au bureau des longitudes. Élu à l'académie des sciences le 14 avril 1862, il meurt à Paris le 22 juin 1892.

On lui doit beaucoup de travaux en géométrie différentielle, plus spécialement sur la théorie des surfaces, par exemple la notion de courbure géodésique.

> « La théorie des courbes gauches lui doit d'importants résultats, parmi lesquels il faut placer en première ligne les évaluations élégantes de divers infiniment petits d'ordre supérieur à l'aide de l'élément d'arc, de l'angle de contingence et de l'angle de torsion ; ces expressions d'une grande utilité dans beaucoup de démonstrations géométriques sont aujourd'hui classiques. » [Appell 1893].

Alexis-Claude Clairaut

Alexis-Claude Clairaut est né à Paris, le 13 Mai 1713[3]. C'est le fils d'un professeur de mathématiques assez réputé, Jean-Baptiste Clairaut, qui eu de nombreux enfants dont beaucoup disparurent prématurément. Ce fut en particulier le cas d'un des frères d'Alexis-Claude qui semblait avoir lui aussi des dispositions exceptionnelles pour les mathématiques. À 10 ans, Alexis-Claude Clairaut lit l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital [1696] ; en 1726 il présente à l'Académie un mémoire sur certaines courbes du quatrième ordre. En 1729, il a seize ans et rédige son mémoire sur les courbes à double courbure, qu'il soumet également à l'Académie. Les rapporteurs (de Mairan et Nicole) le proposent à la publication et l'ouvrage paraît en 1731. Clairaut est élu à l'académie le 14 (ou le 11) juillet 1731 grâce à une dispense royale en raison de sa jeunesse, au grade d'adjoint mécanicien. Il est allé (en 1734) à Bâle, en compagnie de Maupertuis (1698-1759), pour suivre les cours de Johann Bernoulli, qui avait également pour élève König (1712-1757) : les trois jeunes mathématiciens ont eu par la suite de nombreux points communs (notamment la marquise du Châtelet), et de nombreuses controverses.

Les travaux de Clairaut, après son livre sur les courbes à double courbure, portent sur la figure de la terre. Il a pris le parti de Newton (ellipsoïde aplati aux pôles) contre celui des Cassini ; il participe en particulier à l'expédition en Laponie, emmenée par Maupertuis en 1736, avec Camus, Le Monnier, Celsius... Il étudie également la théorie de la lune, le retour de la comète de Halley. On lui doit des mémoires purement mathématiques, comme par exemple, en 1732, un

[3] Le 7 Mai dans [DSB].

mémoire sur les épicycloïdes tracées sur une sphère. On lui doit également des manuels d'algèbre et de géométrie qui connurent un vif succès ; dans ses manuels il privilégie une approche non dogmatique, non purement déductive. Voici la liste de ses publications en géométrie :

1. Recherches sur les courbes à double courbure, Paris, Nyon, Didot et Quillau,1731. Présenté à l'Académie des Sciences le 16 juillet 1729, rapport 20 août 1729 (de Mairan et Nicole)
2. Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position, Histoire de l'Académie 1731 (publié en 1733) p. 483-493.
3. Quatre problèmes sur de nouvelles courbes, Miscellanea Berolinensia, Berlin 1734, tIV, p. 142-152. Présenté à l'académie le 13 avril 1726, rapport 18 mai (rapporteur Nicole et Pitot).
4. Des epicycloïdes sphériques, Histoire de l'Académie 1732 (publié en 1735)
5. Manière de trouver des courbes algébriques et rectifiables sur la surface d'un cône. Histoire de l'Académie 1732 (publié en 1735)
6. Solution d'un problème de géométrie. Histoire de l'Académie 1732 (publié en 1735).
7. Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini, Histoire de l'Académie 1733 (1735)
8. Élements de géométrie Paris, David fils, 1741.
9. Suite d'un mémoire donné en 1733 qui a pour titre : Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne, Histoire de l'Académie 1739 (publié en 1741).
10. De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la Cycloïde, & sur quelques autres courbes du même genre, Histoire de l'Académie 1740 (publié en 1742).

Sa vie fut courte et, d'après l'abbé Bossut

> « À des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé, enfin la vie à l'âge de cinquante-deux ans. »

Il meurt à Paris, le 17 mai 1765. (références : [Brunet 1952], [Nielsen 1935], [AAS]).

Gaston Darboux

Jean-Gaston Darboux est né le 14 août 1842 à Nîmes, il décède le 23 février 1917 à Paris. Admis en 1861 premier à la fois à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure, il choisit cette dernière, ce qui marque le début d'une évolution dans l'émulation entre les deux écoles. Après un cours passage comme enseignant de lycée, il accompli une carrière universitaire à l'École normale supérieure (1872Ű1873), puis à la Sorbonne (de 1873 à sa mort). Devenu académicien en 1884, il accède à la fonction de secrétaire perpétuel en 1900.

Son œuvre mathématique est presqu'entièrement consacrée à la géométrie, mais touche à de multiples sujets et participe de la géométrie dite pure ou synthétique, autant que de la géométrie différentielle : un des ouvrages qui fondent sa réputation est constitué de ses *Leçons sur la Théorie des Surfaces* [Darboux 1887]. Introducteur de la méthode du trièdre mobile, bon connaisseur des travaux de Sophus Lie, Darboux constitue en quelque sorte un pont entre les deux grands géomètres que sont Monge et Élie Cartan.

Leonhard Euler

Né à Bâle le 15 avril 1707, fils de pasteur, il entre à l'Université à moins de quatorze ans, et y rencontre Johann Bernoulli. Après avoir hésité à suivre les traces de son père, il choisit de se consacrer aux sciences, et publie son premier mémoire (sur les courbes isochrones) en 1726. Pour trouver un poste, il quittera définitivement la Suisse en 1727, pour rejoindre Saint-Petersbourg, où il retrouve puis succède à Daniel Bernoulli, fils de Johann. À l'appel de Frédéric le Grand, il rejoint l'académie de Berlin en 1741, il y restera jusqu'en 1766, date à laquelle, ses relations avec le roi se dégradant, il décide de retourner à Saint-Petersbourg. C'est dans cette ville qu'il décède le 18 septembre 1783.

Auteur prolifique (près de 600 articles et livres publiés), son activité scientifique touche à toutes les parties des mathématiques, mais aussi à la physique et l'astronomie. Dans tous ces domaines, sa contribution est essentielle. Il participe de façon prépondérante à la vie scientifique européenne, s'engageant dans presque toutes les controverses, et entretenant une correspondance avec de très nombreux savants.

> « In mathematics the eighteenth century can fairly be labeled the Age of Euler, but his influence upon the development of mathematical sciences was not restricted to that period. The work of many outstanding nineteenth-century mathematicians branched out directly from the works of Euler », A.P. Youschkevitch dans [DSB]

Joseph Fourier

Joseph Fourier est d'origine modeste, il est fils d'un tailleur. Né à Auxerre le 21 mars 1768, il y fit ses études à l'École Militaire, tenue par des bénédictins ; n'étant pas noble, il n'a pu embrasser la carrière militaire et il faillit prononcer ses voeux de bénédictin. En 1789 préfère enseigner les mathématiques à Auxerre (et envoie son premier mémoire à l'Académie, sur la résolution algébriques des équations). Après diverses péripéties liées à son engagement dans la Révolution, on le retrouve élève de la première promotion de l'École normale, début 1794 : Monge alors lui conseille d'ouvrir un cours de mathématiques à l'usage des élèves de l'École normale, ce qu'il fait... C'est encore grace à Monge qu'il entre comme enseignant à l'École polytechnique, à l'automne de la même année. Il succède à Lagrange en 1797 et y reste jusqu'en mai 1798, date de son départ en Égypte. À son retour en 1801, il enseigne encore quelques temps avant que Napoléon le nomme préfet de l'Isère. Tout en remplissant cette lourde tâche, c'est pendant cette période que Fourier travaille à sa *Théorie mathématique de la chaleur* et ses recherches sont couronnées par un grand prix de l'académie en 1812. Il entre à l'académie en 1817, et en devient le secrétaire perpétuel. Il meurt à Paris, le 16 juillet 1830. [Dhombres 1998], [Arago 1851]

Jean-Frédéric Frenet

Jean-Fredéric Frenet (7 février 1816, Périgueux,12 juin 1900, Périgueux) est contemporain de Serret, et ancien élève de l'École normale supérieure (1840). Il étudie ensuite à l'Université de Toulouse, où il soutient une thèse en 1847. La thèse porte sur « Les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes », mais la thèse complémentaire s'intitule « Sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure ». C'est cette date, 1847, qui permet à Frenet de revendiquer l'antériorité de ses travaux, par rapport à ceux de Serret. Il enseigne à Toulouse, puis (1848) à Lyon, en tant que professeur à l'Université ; directeur également de l'observatoire de Lyon, il publie un livre à succès sur le calcul intégral (Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, Mallet-Bachelier, 1856).

Sylvestre-François Lacroix

Sylvestre-François Lacroix a eu beaucoup d'influence dans les mathématiques du début du XIXe siècle, notamment en tant qu'enseignant et auteur de manuels[4]. Sylvestre François Lacroix[5] est né à Paris le 28 Avril 1765, il meurt à Paris le 24 Mai 1843. Issu d'un milieu modeste il est élève au collège des quatre nations, et, brillant élève, il peut assister à des cours particuliers dispensés par Monge (1780). Ses talents sont remarqués et incitent son professeur à le recommander pour un poste de professeur à l'École des gardes de marine de Rochefort, en 1782. C'est le début d'une longue carrière d'enseignant. Son premier mémoire (il a 20 ans) est présenté par Monge à l'Académie des Sciences en décembre 1785 ; ses premiers travaux concernent des domaines pratiques (Tables du soleil, théorie des assurances maritimes) mais aussi la géométrie et les équations différentielles. Un peu plus tard, il enseigne au Lycée (1786) pour suppléer Condorcet[6] et à l'École royale militaire (1787), qui va bientôt fermer. En 1788, il est professeur (de mathématiques, physique et chimie) à l'École royale d'artillerie de Besançon, sur recommandation de Laplace. En 1793, il est nommé examinateur des aspirants et élèves du corps de l'artillerie, et en 1794, chef de bureau de la commission exécutive de l'Instruction Publique. Il assiste Monge à l'École Normale, pour l'enseignement de la géométrie descriptive, en même temps que Hachette.

À partir de 1794, il est examinateur à l'École Polytechnique, et de 1799 à 1809, il y reste comme instituteur d'analyse, suppléant de Lagrange. En 1809, il devient examinateur permanent. En 1805, il est nommé à la Faculté des Sciences, il enseigne au Collège de France à partir de 1812 et en 1815 quitte l'École polytechnique pour se consacrer à la Sorbonne et au Collège de France. Il enseigne jusqu'à sa mort en 1843.

Nommé correspondant (de Condorcet) à l'Académie le 29 août 1789, il est élu à l'Institut (section de Géométrie) le 20 mai 1799, en remplacement de Borda, il y sera très actif et sera l'auteur de nombreux rapports. Il est également un des premiers membre de la société philomatique, qu'il intègre en 1792, et où il sera actif durant de nombreuses années. Le premier mémoire dont nous parlerons a sans doute été repris devant les auditeurs de la société philomatique (« Le citoyen Lacroix vous a lu cette année (an VIII), deux mémoires ; l'un sur la transformation que subissent les courbes tracées sur une surface développable, lorsqu'on vient à l'étendre sur un plan ; il contient des formules au moyen desquelles on passe de l'équation de la courbe tracée sur le plan à celle qui lui répond lorsqu'elle est appliquée sur la surface développable, et réciproquement », rapport général des travaux de la société philomatique, par le citoyen Sylvestre.)
Dans sa préface à son cours de géométrie descriptive [Olivier 1844], Théodore Olivier raconte l'anecdote :

> « Un officier du génie vint en congé à Besançon, où était une école d'artillerie ; Lacroix y était professeur. Cet officier laissa dans sa chambre la collection des ses épures, ce que l'on appelait en termes d'école, la gâche, et s'absenta pour quelques mois. Les officiers d'artillerie, qui avaient sur le cœur quelques plaisanteries, fort innocentes sans doute, sur leur ignorance des travaux de Mézières, résolurent de s'emparer du trésor de l'officier du génie. Le complot fut exécuté, les épures enlevées furent calquées, et puis les originaux remis en place. Mais grand fut l'étonnement lorsque, le travail fini, on voulut se mettre à déchiffrer les hiéroglyphes de l'école de Mézières : personne n'y comprenait rien. Alors on va trouver Lacroix, et

4 Une partie de ces données biographiques est issue d'un article de René Taton [1953]
5 On trouve aussi l'orthographe Silvestre François, avec ou sans trait d'union.
6 Le «Lycée», crée par Pilâtre de Rozier, qui deviendra Lycée des Arts, (Lavoisier)

> on lui remet tous les calques. Lacroix parvient à déchiffrer tout ce qui est relatif au point, à la droite et au plan, et il rédigea sur ce sujet un petit traité qu'il fit publier sous le nom de «Complément de géométrie». Ce fut son premier ouvrage, qui plus tard devait être suivi d'un si grand nombre de traités remarquables et utiles. »

Il s'agit du livre [Lacroix 1795] que nous avons étudié. Dans son éloge funéraire, l'académicien Guilelmo Libri insiste sur le rôle de « référence » de Lacroix :

> « La mort frappe à coups redoublés sur les géomètres de l'institut. l'autre jour, c'était M.Puissant ; aujourd'hui, c'est le Nestor de la Science, c'est M.Lacroix que nous accompagnons à cette dernière demeure. » Un trait de caractère :« *Il abhorra la licence, sans cesser d'aimer la liberté.* »

Joseph-Louis Lagrange

Lagrange est né le 25 janvier 1736 à Turin, il meurt le 10 avril 1813 à Paris. Son œuvre mathématique considérable en fait un des mathématiciens les plus importants en Europe. Elle embrasse tous les domaines de l'algèbre et de l'analyse, ainsi que de la mécanique et de l'astronomie. Après des débuts en Italie, et des premiers succès très précoces dans sa vision du calcul des variations concurrente de celle d'Euler, Lagrange entame une carrière internationale. En 1766 il rejoint l'Académie de Berlin où il remplace Euler qui est parti à Saint-Petersbourg : Frédéric le Grand voulait s'attacher les services du plus grand mathématicien d'Europe. À la mort du prince, Lagrange répond à l'invitation de Louis XVI et rejoint l'Académie des sciences à Paris. C'est là qu'il publie sa *Mécanique analytique*, et devient un des enseignants de la nouvelle École polytechnique crée en 1794. Ses idées révolutionnaires sur les fondements de l'étude des fonctions seront traduites dans son célèbre traité *Théorie des fonctions analytiques*. Honoré de tous, il sera nommé sénateur puis Conte par Napoléon et restera un membre important de l'Académie des sciences.

Michel-Ange Lancret

Nicolas Lancret (1690-1743) est un peintre académique du début du dix-huitième siècle. Son neveu François-Nicolas est architecte (on lui doit par exemple le château de La Motte-Tilly), et le fils de François-Nicolas, Michel-Ange Lancret porte un prénom qui pourrait être prédestiné à une carrière artistique : qui plus est, sa mère est fille d'un sculpteur...

Né le 15 décembre 1774, il commence par étudier l'architecture puis entre à l'école des Ponts et Chaussées en 1793 (en tant qu'élève, il travaille au port de Dunkerque). Il est reçu dans la première promotion de l'École Polytechnique (1794) où il est nommé chef de brigade : à défaut d'anciens élèves, les plus prometteurs parmi les reçus de la première promotion furent sélectionnés, reçurent un enseignement supplémentaire pendant six semaines à l'Hôtel de Pommeuse, puis furent chargés d'encadrer leurs condisciples. Lancret en fait donc partie, de même que Jean-Baptiste Biot et Étienne Malus. C'est à l'École polytechnique qu'il suit les cours de Monge et devient un de ses disciples. En avril 1798 il devient ingénieur ordinaire des ponts et chaussées et travaille au port de Flessingue (Hollande).

Lancret fait partie de l'expédition d'Égypte et part sur le « Guerrier », avec Prosper Jollois. Parmi les travaux qu'on lui a confié en Égypte : le rassemblement des biens abandonnés par les Mamelouks, des explorations diverses (la région de Belbeis), il est également chargé de travaux hydrauliques dans le canal d'Alexandrie[7].

[7] « Lancret reçut l'ordre d'aller faire curer et approfondir le canal d'Alexandrie ; cette commission désagréable

En Égypte, il rencontrera fréquemment bien sûr Monge mais aussi Joseph Fourier et Étienne Malus ; celui-ci aura avec Lancret une correspondance régulière (que l'on retrouve dans les archives de l'Académie des sciences), dans laquelle ils évoquent leurs travaux respectifs, notamment en géométrie.

Lancret est nommé à l'Institut d'Égypte en remplacement d'Horace Say, mort en Syrie (4 juillet 1799), et c'est lui qui annonce à l'institut la découverte de la fameuse pierre de Rosette, découverte par le jeune lieutenant du génie Pierre-François-Xavier Bouchard, lui aussi polytechnicien : on peut lire, dans le Courier d'Égypte, « *Cette pierre offre une grand intérêt pour l'étude des caractères hiéroglyphiques ; peut-être en donnera-t-elle la clef* ». Il fait partie de la commission conduite par Fourier qui explore la Haute-Égypte.

À son retour à Paris (il part parmi les derniers français, en septembre 1801), il est membre puis secrétaire de la commission des travaux de l'expédition d'Égypte (avec Conté, Monge, Berthollet, Desgenettes et Jomard, puis Jollois et Devilliers). Il a remplacé Nicolas-Jacques Conté (après la mort prématuré de cet « inventeur » de génie, fondateur du conservatoire des arts et métiers) comme « commissaire spécial » de l'ouvrage collectif *La description de l'Égypte* à la fin de l'année 1805. Il meurt le 17 décembre 1807, à 33 ans :

> « Il s'était fait remarquer depuis longtemps par des connaissances très rares dans la haute géométrie et dans toutes les branches de la philosophie naturelle ; il a succombé à une maladie lente et douloureuse, vers la fin de l'année 1807, après avoir donné des témoignages multipliés d'un zèle que l'on ne peut trop reconnaître. » [Jomard 1821]

Et voici l'hommage que lui rend Hachette dans la Correspondance de l'École polytechnique (janvier 1808) :

> « M.Lancret, que nous avons cité dans cette correspondance comme auteur de plusieurs mémoires de géométrie, qui avait rempli avec la plus haute distinction une place de chef d'étude, tandis qu'il étoit encore élève de l'École Polytechnique, a terminé sa carrière, à peine commencée, le 17 décembre 1807 ; il était né à Paris le 15 décembre 1774. Entré à l'école le 1er frimaire an 3, il a passé à l'école des Ponts et Chaussées en nivôse an 6 ; il fut nommé membre de cette célèbre commission des sciences et arts qui a été organisée à Paris au mois de germinal an 6, pour accompagner l'armée française en orient. Le gouvernement ayant ordonné, en pluviose an 10, la formation d'un ouvrage sur l'Égypte, le ministre de l'intérieur nomma une commission spéciale chargée de diriger l'exécution de cet ouvrage, et la composa de MM. Monge, Berthollet, Fourier, Conté, Costaz, Girard, Desgenettes et Lancret ; M.Conté était commissaire du ministre, et M.Lancret secrétaire de la commission ; en décembre 1805, M.Conté mourut et fut remplacé par M.Lancret ; les fonctions de secrétaire furent confiées à M.Jomard, ancien élève, ingénieur des ponts et chaussées, l'ami particulier de M.Lancret ; à ce titre, M.Jomard se propose de consacrer quelques pages du grand ouvrage sur l'Égypte à la mémoire du savant et vertueux Lancret ; il publiera la part qu'il a prise à cet ouvrage, ainsi que ses mémoires particuliers ; ce tribut d'éloges payé à celui qui jeune encore se distinguait et comme artiste et comme savant le fera pleurer de ceux-mêmes à qui ses qualités personnelles n'étaient pas connues. »

Son ami Malus a, quant à lui, eu le temps de se faire élire à l'Institut, avant de mourir prématurément en 1812, des suites de la peste qu'il avait contracté en Égypte.

---

le contraria beaucoup. Monge et Berthollet cherchèrent à lui persuader qu'il allait faire là une opération qui le mènerait à l'immortalité ... » ([Jollois 1904])

Parmi les oeuvres non mathématiques de Lancret, on trouve des mémoires sur l'île de Philae, sur la branche Canopique (branche du Nil) (lu à l'institut d'Égypte le 12 décembre 99 et publié dans le tome 7 de la « Description de l'Égypte »), sur le canal d'Alexandrie (lu le 22 décembre 99) et sur l'administration de l'Égypte,(22 novembre 1800, tome XI) ainsi que quelques travaux d'entomologie et des dessins.

Henri Molins

Henri Molins est né le 2 août 1813, il est mort en 1900. Il fut élève de l'École normale supérieure en 1832 et il soutint sa thèse à Paris (1837) : sujet « Sur le mouvement des corps flottants », thèse complémentaire : « Sur la figure de la terre ». Enseignant à l'Université de Toulouse, il en devient le doyen et il est l'auteur de nombreux articles de géométrie.

Gaspard Monge

Gaspard Monge est né le 9 mai 1746 à Beaune, décédé le 28 juillet 1818 à Paris. Issu de la petite bourgeoisie (son père est marchand en étoffe), il commence par être dessinateur puis enseignant à l'École du génie de Mézières (où officie l'abbé Bossut). La suite est connue, académicien (correspondant de Bossut en 1772, il est nommé adjoint en 1780. Il est ministre de la marine en 1792, accompagne Napoléon en Égypte avec son ami Berthollet : il a plus de cinquante ans et sa femme le traite de vieux fou... Il est nommé comte de Péluse puis sénateur, et la restauration le voit exclu de l'académie en 1816, peu avant sa mort (28 janvier 1818). Dans la période révolutionnaire, outre son engagement politique, il participe de façon décisive à la création de l'École polytechnique où il enseigne la stéréotomie et l'analyse appliquée à la géométrie pendant des années, et dont il est directeur pendant quelques temps. Monge est surtout connu comme géomètre, notamment pour son invention de la géométrie descriptive, mais ses apports aux mathématiques et aux sciences en général sont innombrables et témoignent d'un savant éclairé, soucieux de rigueur dans la théorie mais aussi impliqué dans les applications les plus pratiques des sciences. Sur sa vie et ses travaux scientifiques, on se référera en premier à l'ouvrage de René Taton [1951].

Claude Navier

Claude Navier, (10 février 1785-21 août 1836) est, comme Saint-Venant plus connu pour ses travaux de physique-mathématique (équation de Navier-Stokes) ou de science de l'ingénieur que pour ses contributions aux mathématiques. Petit-neveu d'un ingénieur dirigeant le corps des Ponts et Chaussées (Émiland Gauthey), il entre à l'école Polytechnique en 1802, puis est diplômé des Ponts et Chaussées. Il poursuit ensuite une carrière d'enseignant, de Mécanique à l'École des ponts et chaussées, et d'Analyse et de Mécanique à l'École polytechnique, où il succède à Cauchy en 1831.

Théodore Olivier

Olivier Théodore est né à Lyon le 14 janvier 1793[8]. Il entre à l'École polytechnique en 1811, en sort dans l'Artillerie. Nommé adjoint du professeur de sciences physiques et mathématiques de l'École d'artillerie et du génie (24 mars 1821), il part enseigner en Suède, (1821-1825), à l'École de Marieberg où il y fonde la chaire de géométrie descriptive. Répétiteur de géométrie

[8] Dans le dictionnaire des thèses d'Albert Maire, on trouve la date du 21 janvier.

descriptive de 1830 à 1844 à l'École polytechnique, c'est un des fondateurs (avec Baptiste Dumas et Eugène Péclet) de l'École centrale des arts et manufactures (1829). Il y enseignera également la géométrie descriptive. En 1834, il soutiendra une thèse : « Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques, et sur les rayons de courbure des courbes et surfaces du second ordre avec des applications aux engrenages. » Théodore Olivier est aussi connu pour ses modèles de surfaces réglées. Il décède le 5 août 1853 à Lyon. Pour le rôle de Théodore Olivier dans l'histoire de la géométrie descriptive, on pourra consulter [Sakarovitch 1998, p. 322-].

Henri Pitot

Henri Pitot est né le 3 mai 1695, à Aramon ou Pézenas ; il est mort le 27 décembre 1771. Contrairement à Clairaut, Henri Pitot n'a rien d'un enfant prodige : après une jeunesse plutôt dissipée dans la région de Nîmes, et après avoir commencé une carrière militaire, il découvre l'étude, la géométrie et l'astronomie. Reçu à Paris dans le laboratoire de Réaumur, en 1718, il continue l'étude des mathématiques parallèlement à la chimie et est nommé adjoint de mécanique à l'Académie en 1724, l'année où il écrit le mémoire qui nous intéresse. Par la suite, il s'intéressera surtout à la mécanique et à l'hydraulique, et quittera l'académie pour être nommé en 1740 directeur des travaux hydrauliques dans le Languedoc. On lui doit de nombreux ouvrages, comme l'aqueduc de Montpellier ou « Pont Pitot ». Outre le mémoire [Pitot 1724], on trouve dans les publications de l'académie de nombreux autres textes : un mémoire publié en 1725, « Propriétés élémentaires des polygones irréguliers circonscrits autour d'un cercle », puis de nombreux autres mémoire traitant principalement d'hydraulique. On lui doit également l'invention du « tube de Pitot », instrument très simple qui permet de mesurer la vitesse d'un fluide. [Humbert 1953], [HARS 1771].

Siméon-Denis Poisson

Siméon-Denis Poisson est né à Pithiviers le 21 juin 1781. Il entre à l'École polytechnique en 1798, y devient répétiteur dès 1800 et succède à Fourier comme instituteur d'analyse en 1802. Il sera également membre du Bureau des longitudes, et professeur de mécanique à la Sorbonne (1809). Il est élu à l'Académie des sciences en 1812, succédant à Malus. Très influent dans la société mathématique française, Poisson est surtout connu pour des travaux de mécanique et de physique mathématique (les « crochets » de Poisson), mais aussi pour ses polémiques avec Fourier, et son rejet des travaux de Galois. Poisson meurt à Paris le 25 avril 1840.

Victor Puiseux

Victor-Alexandre Puiseux est né le 16 avril 1820 à Argenteuil. Brillant élève, il reçut les prix de physique et de mathématiques au concours général en 1836 et 1837, date à laquelle il entre à lÉcole Normale Supérieure, où il se liera à Briot et Bouquet. Il soutiendra une thèse de mathématiques en 1841 (sur les axes des orbites des planètes), avant d'enseigner à Rennes, puis à la faculté de Besançon (1844-1849), enfin à la Sorbonne (chaire de Mécanique Céleste) tout en publiant de nombreux articles sur des thèmes variés. Il entre à l'Académie des Sciences en 1871, succédant à Lamé. Brillant en analyse, il introduisit de nouvelles méthodes dans son travail sur les fonctions algébriques (développements de Puiseux) et contribua à l'avancement de la mécanique céleste. Il meurt le 9 septembre 1883 à Frontenay (Jura). Son fils Pierre Puiseux était aussi mathématicien et astronome.

Joseph-Alfred Serret

Joseph Alfred Serret est né le 30 août 1819 à Paris. Il est l'élève, au collège Louis Le Grand, de Louis-Paul-Emile Richard (1795-1849), qui a été aussi le professeur de Galois, Le Verrier et Hermite. Il est reçu à l'École Polytechnique en 1840 et il y suit le cours d'analyse de Sturm, comme Ossian Bonnet, Jordan, Hermite, alors que le cours parallèle est assuré par Liouville ; plus que Sturm, c'est Liouville qui sera son mentor.

Le premier texte de Serret paraît en effet dans le Journal de Liouville (à propos d'intégrales eulériennes) ; et c'est Liouville qui fera un rapport (le 30 juillet 1845) sur son mémoire présenté à l'Académie (sur les intégrales elliptiques : Serret se propose de déterminer quelles courbes sont analogues à la lemniscate, en ce que leur rectification se fait par l'intermédiaire d'intégrales elliptiques ou hyperelliptiques.) Ce travail est prolongé par Liouville, qui le généralise un peu, et Serret rendra visite à son aîné, à Toul, en 1847. En 1847, il soutient une thèse de Mathématiques à la faculté des sciences de Paris, dont le sujet est :« Sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances ». La thèse complémentaire porte sur la figure des corps célestes. C'est aussi à cette période que Serret est initié par Liouville aux travaux de Galois. Liouville projetant semble-t-il d'écrire un mémoire ou un manuel sur cette théorie, Serret renonce à présenter les théories de Galois dans les premières éditions de son cours d'algèbre supérieure. L'intérêt de Serret pour l'algèbre est déjà présent dans la (petite) note qu'il donne dans le journal de l'École polytechnique, à propos d'un article de Bertrand.

Les rapports avec Liouville ne sont pas que des rapports d'élève à maître, compétition et concurrence sont inévitables. Dans sa seconde édition de son cours d'Algèbre Supérieure, Serret inclus ses propres observations sur la résolution des équations algébriques et, en 1857, une sévère empoignade l'oppose à Liouville pour un poste à la Faculté des Sciences. Il semble néanmoins qu'au début des années 1870 il y ait eu une réconciliation, notamment au travers d'une lutte commune contre Le Verrier, potentat peu aimé de l'Observatoire de Paris.

Donnons quelques indications sur sa carrière universitaire : à la fin de ses études à l'École Polytechnique, Serret entre à l'administration des tabacs à titre d'élève du 1$^{\text{ier}}$ janvier 1841 au 1$^{\text{ier}}$ août 1843, mais il quitte cette administration pour se consacrer aux mathématiques. Il est nommé examinateur à Polytechnique en 1848 (en même temps que Hermite et Bertrand), ce qui est un poste important pour un aussi jeune mathématicien. Il y restera jusqu'en 1861. Il enseigne l'algèbre à la Sorbonne (1848-1849) et cumule diverses activités d'enseignement au Collège de France (cours de mécanique céleste), à la Sorbonne (chaire de calcul différentiel et intégral) tout en maintenant ses activités à l'École Polytechnique. Il entre à l'Académie des sciences en 1860, sur le fauteuil de Poinsot et au Bureau des longitudes en 1873.

Lors des tragiques événements de 1870, Serret est amené à jouer un rôle important. Le gouvernement de la défense nationale, réfugié à Tours, a institué une Commission scientifique dont Serret est nommé président. C'est à ce titre et également bien sûr en tant qu'ancien examinateur, qu'il est également nommé directeur délégué de l'École polytechnique alors réfugiée à Bordeaux et la commission cumule le rôle des trois conseils. Le secrétaire général de l'École est Haton de la Goupillère (qui a remplacé Serret dans ses fonctions à Polytechnique), et parmi les professeurs, Hermite, Haag et Littré, les autres professeurs étant enfermés à Paris.

Les cours commencent le 4 janvier 1871, (en présence de Gambetta) dans une maison mise à disposition par les frères maristes. Les élèves demandent à être envoyés à l'ennemi, ils reçoivent une instruction militaire, mais parvient la nouvelle de l'armistice. Serret demande que le premier semestre se termine à Bordeaux. Le général Riffault l'emporte qui veut rentrer à Paris et Serret, ulcéré, démissionne. Le 15 mars, toute la promotion est rue Descartes, trois jours après c'est la Commune de Paris. Thiers demande l'évacuation de la ville, et l'École se replie à Tours, le 7 avril 1871. L'école fut un court moment occupée par les communards, certains y furent massacrés par le $17^{\text{ième}}$ bataillon de chasseurs. C'est en 1871 que Serret eu la première attaque qui devait beaucoup le diminuer et marquer la quasi complète cessation de ses activités scientifiques. Serret meurt le 2 mars 1885, à Versailles.

MÉLANGES
Funérailles de M.SERRET
le jeudi 5 mars 1885
DISCOURS DE M.C.JORDAN
AU NOM DE L'ACADEMIE DES SCIENCES

« La section de Géométrie est singulièrement éprouvée. Un an s'est à peine écoulé depuis que nous avons eu la douleur de perdre M. Puiseux, qu'une longue et cruelle maladie venait de ravir à la Science et à l'Institut, et voici qu'un de nos Confrères la plus anciens et les plus justement illustres nous est brusquement enlevé.

M. Serret dont la mort laisse aujourd'hui un si grand vide parmi nous, est né à Paris le 30 août 1819. Entré après de brillantes études, à l'École Polytechnique, il en sortit dans le service des Tabacs ; mais cette carrière convenait peu à cet esprit passionné pour les pures spéculations des sciences abstraites. Il ne tarda pas à donner sa démission et entra comme examinateur à Sainte-Barbe. Dès ses premiers pas dans l'enseignement, le succès le plus éclatant vint couronner ses efforts et lui montrer qu'il avait trouvé sa voie. En 1848, à peine âgé de vingt-neuf ans, il fut nommé examinateur d'entrée à l'École Polytechnique. Il remplit ces difficiles fonctions pendant quatorze ans, à la grande satisfaction des candidats, dont l'humble suffrage n'est pas toujours à dédaigner. Ceux qui ont passé par ses mains aiment encore à se rappeler aujourd'hui sa bienveillance, son impartialité, la promptitude et la sûreté de ses jugements.

M. Serret commençait dès la même époque la publication des beaux travaux qui lui ont assignés une place éminente parmi les géomètres.

Le premier Mémoire qu'il ait présenté à l'Académie a pour objet la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques. Partant de cette propriété de la lemniscate, dont l'importance n'avait pas été soupçonnée avant lui, que les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer rationnellement par des fonctions elliptiques de l'arc, M. Serret ne se propose rien moins que de déterminer toutes les courbes qui jouissent de ce caractère et montre qu'il en existe une infinité.

L'impression produite par ce beau travail fut considérable, et l'on sentit dès lors que la place de l'auteur était marquée à l'Institut.

Le mémoire sur les surfaces orthogonales, qui parut peu de temps après dans le *Journal de Liouville*, ne fut pas moins remarqué ; il eut, d'ailleurs, la bonne fortune de servir de point de départ à de nombreuses recherches ; plusieurs de nos meilleurs géomètres doivent à leurs études sur cette belle question le commencement de leur réputation.

M. Serret a consacré à la théorie générale des courbes gauches et des surfaces plusieurs autres Mémoires, véritables modèles d'élégance et de clarté, comme tout ce qui est sorti de sa plume. Parmi les beaux résultats qu'ils renferment, on doit signaler particulièrement la détermination des surfaces qui admettent une série de lignes de courbure sphériques.

Le mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à doubles courbure parut dans le tomme XVIII du *Journal de Liouville* et doit être assurément compté parmi les oeuvres capitales de notre regretté Confrère. La théorie de ces systèmes singuliers d'équations différentielles, que Lagrange avait entrevus sans en achever l'étude, forme en effet, un chapitre nouveau et important ajouté au Calcul intégral.

Choisi, en 1849, pour suppléer M. Francœur dans la chaire d'Algèbre à la Sorbonne, M.Serret s'y montra à la fois géomètre éminent et professeur incomparable. De ces savantes leçons est né ce COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE dont trois éditions successives n'ont pas épuisé le succès et qui jouit d'une autorité si incontestée dans tout le monde savant.(...)

En 1856, M. Serret rentra à la Sorbonne comme suppléant de M. Le Verrier à la chaire d'astronomie. Ce nouveau champ ouvert à son activité ne fut pas moins fécond que les précédents. Un mémoire classique sur l'équation de Kepler et d'importantes recherches sur le mouvement de rotation de la terre en furent le fruit.

Tant de travaux ne pouvaient rester sans récompense. M. Serret devint successivement professeur de Mécanique céleste au Collège de France, professeur de Calcul différentiel et Intégral à la Sorbonne et Membre du Bureau des Longitudes ; enfin, le 19 mars 1860, il fut appelé à succéder à M. Poinsot dans la section de Géométrie. [...]

Dès l'année 1871, notre éminent Confrère avait ressenti une légère atteinte du mal auquel il devait succomber. L'année suivante, à Strasbourg, frappé d'une attaque foudroyante, il fut ballotté un mois entier entre la vie et la mort ; la vigueur de sa constitution et les soins pieux dont il était entouré réussirent encore à le sauver ; mais sa santé était profondément atteinte, et il se vit obligé à renoncer à la vie active.

Cette pénible épreuve a duré douze années, pendant lesquelles il nous a été donné d'admirer sa patience et la gaieté qui ne l'avait jamais abandonné. Il vivait paisiblement à Versailles entouré d'une famille aimée, dans une tranquille retraite qu'il s'était créée... »

Discours de M. OSSIAN BONNET
AU NOM DE L'ACADEMIE ET DE LA FACULTE DES SCIENCES

L'Académie et la Faculté des Sciences viennent d'être frappées d'un coup terrible et inattendu. Un de nos confrères les plus sympathiques et les plus aimés, Alfred Serret, a succombé à une attaque d'apoplexie foudroyante, de la façon la plus tragique, en se rendant à la dernière séance de l'Académie.

Nul n'a ressenti plus douloureusement que moi les effets de ce affreux événement : j'étais le camarade de promotion de Serret à l'École polytechnique ; depuis plus de quarante ans, nous étions liés par la plus étroite amitié, et souvent, réunis dans l'intimité de sa charmante famille, aujourd'hui si désolée, nous aimions à nous entretenir des années de notre jeunesse, à nous rappeler nos premiers travaux, nos premiers efforts. [...]

Le premier travail de Serret est une Note publiée en 1842 (deux ans après sa sortie de l'École Polytechnique), et qui a pour objet une représentation géométrique, très originale et très élégante , des fonctions Γ d'Euler. Peu de temps après, il s'occupa d'une série de questions analogues mais beaucoup plus ardues, sur les inté-

> grales euleriennes, sur les fonctions elliptiques et ultra-elliptiques, sur la représentation de ces fonctions par les arcs de certaines courbes dont il donna la définition et la remarquable génération. [...] En 1848, ayant à peine vingt-neuf ans, il figurait sur une liste de présentation faite à l'Académie par la Section de Géométrie.[...]

Paul Serret

Paul Serret[9] est né le 16 octobre 1827 à Aubenas. Il a été lycéen à Avignon, puis à Paris, où il est élève au collège Saint-Louis qui, en 1848, prend le nom de collège Monge. Reçu en 1849 à l'École normale supérieure, il se consacre tellement aux mathématiques qu'il en néglige les autres sciences, tant et si bien qu'il est exclu de l'École avant la fin de sa scolarité, ce qui lui ferme la porte de l'enseignement « officiel ». Il accomplit alors une carrière d'enseignant dans des établissements privés, dont la faculté catholique de Paris. Il soutient en 1859, à Paris, une thèse de mathématiques, intitulée *Théorie géométrique des lignes à double courbure*, et *Théorie mécanique des lignes à double courbure*. Les deux forment le contenu de son livre publié en 1860 [Serret(Paul) 1860]. Parmi ses autres publications, on peut citer *Des méthodes en géométrie*, publié en 1855 (Mallet-Bachelier), dont l'épigraphe est une citation de Poncelet « Ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr. » Correspondant de Darboux, Paul Serret est mort le 24 juin 1898, voir son éloge dans [Darboux 1898].

Charles Tinseau

Né à Besançon, le 19 avril 1748[10], mort le 21 (ou 29) mars 1822 à Montpellier, Charles de Tinseau d'Amondans a été élève de Monge à l'École de Mézières (1769-1771). Devenu officier du génie, il a présenté à l'Académie un mémoire « Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des Surfaces Courbes & des courbes à double courbure. » Ce mémoire est présenté en 1771, le 7 décembre, rapport Bossut et Vandermonde[11]. Il est publié en 1780, dans le tome IX des Mémoires. On trouve un autre mémoire, publié dans le même tome « Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites ». Tinseau est élu correspondant de Bossut le 22 mai 1773, mais il s'éloignera de Monge par son choix politique pendant la période révolutionnaire ; exilé, il ne revient en France qu'en 1816.

Adhémar de Saint-Venant

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant est né le 23 août 1797, au château de Fortoiseau en Seine et Marne. Il entre à l'École Polytechnique en 1813. De 1816 à 1823, il travaille pour les Poudres et Salpêtres, puis de 1823-25, il est au Ponts et Chaussées. Il est élu à l'Académie des sciences, section de mécanique, succédant à Poncelet, le 20 avril 1868. Catholique convaincu, il est proche de Cauchy. Il meurt le 6 janvier 1886

Louis-Léger Vallée

Né en 1784, c'est un ancien élève de l'École polytechnique (promotion 1800), il en sort ingénieur au corps des Ponts et Chaussées, et accomplira toute sa carrière en tant su'ingénieur. Il a été candidat à l'Académie, en 1856 (siège de Sturm) mais a été battu par Joseph Bertrand. Il

[9] Jesper Lützen le présente comme un frère de Joseph-Alfred Serret dans [1990, p. 172] ; tout laisse penser qu'il n'en est rien.

[10] ou 1749, d'après les archives de l'Académie des Sciences. La date indiquée est donnée par Taton dans [DSB].

[11] Coolidge [1940] le date de 1774, Taton de 1772 dans [DSB]

est l'auteur d'un *Traité de Géométrie Descriptive* [Vallée 1819], qui est dédié à Monge alors (en 1817) à la veille de sa mort et en pleine disgrâce. La publication de ce livre est approuvée par l'Académie (rapport de Prony, Fourier, Arago, 18 mai 1818). Louis-Léger Vallée meurt en 1864.

Annexe B

Les textes

1 Leonhard Euler

a. Premier mémoire

Supplementum continens analysin pro incurvatione fili in singulis punctis invenienda

Voici la traduction de son premier texte, avec quelques commentaires en note.

29. On considère un élément quelconque du fil Zz dont les extrémités sont données par trois coordonnées

$$OX = x,\ XY = y \text{ et } YZ = z; Ox = x + dx,\ xy = y + dy \text{ et } yz = z + dz$$

Dans le plan xOy (ou plan horizontal) il y a l'élément

$$Yy = du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Dans ce plan on mène aussi deux tangentes proches YT et yt, T et t étant les points d'intersection avec les tangentes ZT et zt : ces tangentes ZT et zt définissent un plan dans lequel deux éléments consécutifs du fil se trouvent ; et l'élément tT se trouve à l'intersection de ce plan avec le plan horizontal (xOy).

Si depuis le point Y on mène une perpendiculaire YS à tT, et si on joint Z à S, l'angle ZSY représente l'angle entre les plans ; l'angle entre deux éléments proches sera TZt, et si on le note $d\omega$, le rayon d'osculation au point Z sera égal à $\frac{ds}{d\omega}$.

30. On revient à la position des tangentes YT et yt dans le plan horizontal, si on note l'angle $XYT = \phi$, de sorte que $\tan\phi = \frac{dx}{dy}$, alors la différentielle $d\phi$ exprimera l'angle TYt. Par ailleurs, puisque ZT est tangente au fil en Z, la sous-tangente YT sera égale à $\frac{zdu}{dz}$ et la tangente proprement dite $ZT = \frac{zds}{dz}$. [1]

Donc, pour l'élément suivant :

$$yt = \frac{zdu}{dz} + d.\frac{zdu}{dz} = \frac{zdu}{dz} + du + zd.\frac{du}{dz}$$

[1] On peut comprendre que le triangle ZYT est rectangle en y, l'angle de la tangente avec le plan horizontal a pour tangente $\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dz}{du}$. et pour cosinus $\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{dz}{ds}$.

ce qui fait :

$$Yt = \frac{zdu}{dz} + zd.\frac{du}{dz}$$ [2]

De la même façon pour la tangente suivante :

$$zt = \frac{zds}{dz} + d.\frac{zds}{dz} = \frac{zds}{dz} + ds + zd.\frac{ds}{dz}$$

ce qui fait :

$$Zt = \frac{zds}{dz} + zd.\frac{ds}{dz}$$

Si dans le plan horizontal on trace la normale Tu à Yt, on aura

$$tu = zd.\frac{du}{dz}$$ [3]

et de même si de T on trace la normale Tv à Zt, on aura

$$vt = zd.\frac{ds}{dz}$$

mais comme le triangle Tuv est rectangle en u[4], on concluera $Tv^2 = Tu^2 + uv^2$.

31. Pour que ces éléments soient plus faciles à trouver, on pose

$$dx = pdz \qquad \text{et} \qquad dy = qdz$$

d'où

$$du = dz\sqrt{pp+qq} \qquad \text{et } ds = dz\sqrt{1+pp+qq}$$

Ceci posé, dans le plan horizontal nous avons

$$YT = z\sqrt{pp+qq}$$

et comme on a $\tan\phi = \frac{p}{q}$, l'angle élémentaire sera

$$TYt = d\phi = \frac{qdp - pdq}{pp+qq}$$ [5]

d'où la longueur du petit segment

$$Tu = \frac{z(qdp-pdq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

et on aura

$$tu = \frac{z(pdp+qdq)}{\sqrt{pp+qq}}$$ [6]

---

[2] car $Yy = du$

[3] parce que c'est $Yt - YT$

[4] les plans Tuv et ZYt sont perpendiculaires au plan horizontal

[5] en dérivant l'arctangente, attention il y a une erreur dans les oeuvres complètes, qui n'est pas dans l'original.

[6] en dérivant d'après $tu = zd.\frac{du}{dz}$

d'où

$$Tt = z\sqrt{dp^2 + dq^2} \qquad [7]$$

Maintenant puisque le triangle Ttu est semblable au triangle YTS[8], à partir de $YT = z\sqrt{pp+qq}$ [9] on retrouve

$$YS = \frac{z(qdp - pdq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}.$$

32. Maintenant on se place en dehors du plan horizontal, et partant de $ZT = z\sqrt{1+pp+qq}$ donc l'incrément s'écrit

$$vt = \frac{z(pdp + qdq}{\sqrt{1+pp+qq}}$$

comme on a déjà trouvé $Tt = z\sqrt{dp^2+dq^2}$, du triangle rectangle Tvt il sort

$$Tv = z\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2}{1+pp+qq}}.$$

Et voilà donc notre rayon de courbure pour l'élément Zz, celui que nous avons nommé $r = \frac{ds}{d\omega}$, car $d\omega = \frac{Tv}{ZT}$ donnera $r = \frac{ZT.ds}{Tv}$, et en remplaçant

$$r = \frac{dz(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2}}$$

33. Maintenant, ce plan même où le fil prend sa courbure, que nous appellerons plus simplement le plan de courbure[10], nous le connaissons mieux ; son intersection avec le plan horizontal est la droite tTS, et puisque de S on a mené la perpendiculaire ZS, les triangles tTv et TZS sont manifestement semblables[11] d'où $Tt : Tv = TZ : ZS$, soit

$$ZS = \frac{Tv \cdot TZ}{Tt} = \frac{z\sqrt{dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}$$

et comme on a déjà trouvé

$$YS = \frac{z(qdp - pdq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}$$

si ϑ dénote l'inclinaison du plan de courbure avec le plan horizontal, cet angle est donc ZSY comme nous l'avons vu et on aura

$$\cos\vartheta = \frac{YS}{ZS} = \frac{qdp - pdq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2}}$$

34. On va maintenant se débarrasser des lettres p et q et les remplacer par leur valeur $p = \frac{dx}{dz}$ et $q = \frac{dy}{dz}$; et donc si on ne suppose aucune différentielle constante nous aurons

$$1^o. \qquad dp = \frac{dzddx - dxddz}{dz^2} \qquad\qquad 2^o. \qquad dq = \frac{dzddy - dyddz}{dz^2}$$

[7] par le théorème de Pythagore dans le triangle Ttu

[8] Comprendre que le triangle infinitésimal YTu a deux angles droits en T et en u

[9] car $YS = \frac{Tu}{Tt} YT$

[10] pour nous, plan osculateur

[11] même remarque que pour YST et Tut

Comme il est vrai que $\frac{p}{q} = \frac{dx}{dy}$, en différentiant

$$\frac{qdp - pdq}{qq} = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$$

et donc

$$qdp - pdq = \frac{dyddx - dxddy}{dz^2}$$

et en substituant ces valeurs on obtient

$$\sqrt{1 + pp + qq} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dz^2}} = \frac{ds}{dz}$$

et

$$\sqrt{dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}{dz^2}$$

et de là on tire le rayon de courbure

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}$$

On peut encore simplifier cette formule de façon un peu artificielle en l'écrivant

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}}$$ [12]

Pour l'inclinaison du plan de courbure ave le plan horizontal, qu'on peut appeler AOB si on nomme OA, OB, OC, son angle va s'écrire

$$= \frac{dyddx - dxddy}{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}$$

d'où par analogie le cosinus de l'angle d'inclinaison avec BOC sera

$$= \frac{dzddy - dyddz}{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}$$

et avec le plan COA on aura

$$= \frac{dxddz - dzddx}{\sqrt{(dzddx - dxddz)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dyddx - dxddy)^2}}$$ [13]

35. *version abrégée* Par ailleurs, tout cela va nous rendre un service insigne pour notre problème de force élastique. Si on note G l'élasticité absolue, $\frac{G}{r}$ représente la force élastique, ce

[12] on utilise la réduction $dsdds = dxddx + dyddy + dzddz$

[13] on retrouve les coordonnés du vecteur binormal

qui donne pour résultante, sur le plan AOB

$$\frac{G(dyddx - dxddy)}{ds^3}$$

et de même pour les autres résultantes.

b. Second mémoire

Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi

Donnons la version latine des premiers paragraphes :

> 1. Symptomata linearum curvarum, quae non totae in eodem plano jacent, et a Geometris lineae duplicis curvaturae vocari solent, jam pridem quidem definita reperiuntur : verum analysis, qua ea sunt investigata, figuris tantopereperplexis innituntur, ut non solum summam attentionem, sed etiam maximam circumpectionem requirant, ne representatio quantitatum differentialium, atque adeo differentialum secundi gradus, imaginationem confundat et in errores seducat. Quamobrem saepe et multum mecum cogitavi, annon eadem symptomata methodo faciliori ex primis elementis derivari queant, ita ut non opus sit figuras tantopere complicatas et propemodum inextricabiles considerare. His omnibus difficultatibus probe perpensis tandem perspexi totum negotium satis commode ad trigonmetriam sphaericam revocari atque adeo multo plenius tractari posse, quam quidem methodo vulgari fieri licet.
>
> 2. Ante autem indolem harum linearum curvarum, in genere saltem, more solito considerari conveniet, quam totam quaestionem ad doctrinam sphaericam transferre queamus. Constitutis igitur (fig.1) pro lubitu ternis axibus inter se normalibus OA,OB,OC in puncto fixo O concurrentibus, sit Z punctum quodcunque talis curvae, cuius situs determinetur per terna coordinatas

$$OX = x, XY = y, YZ = z$$

Voici maintenant une traduction des neuf premiers paragraphes :

1. Les propriétés des courbes qui ne sont pas situées dans un plan, et que les géomètres ont l'habitude d'appeler courbes à double courbure, nous les avons déjà rencontrées il y a quelque temps : mais l'analyse de ces figures compliquées requiert non seulement la plus grande attention mais aussi la plus grande circonspection. On est amené à utiliser les différentielles, notamment celles du second ordre, cela peut troubler l'imagination et conduire à des erreurs.

C'est pourquoi j'ai toujours pensé qu'on pourrait calculer les mêmes grandeurs avec la méthode plus facile des différentielles premières, et ne pas s'appuyer sur des figures compliquées et à peu près inextricables. Je vais également utiliser la trigonométrie sphérique, ce qui me permettra de traiter beaucoup plus de choses qu'il ne serait possible avec des méthodes plus ordinaires. 2. Cela dit, nous allons commencer par étudier nos courbes à la manière habituelle, avant de tout transférer dans le contexte de la trigonométrie sphérique. On envisage donc trois axes orthogonaux OA, OB et OC concourant en O, et Z un point quelconque de la courbe, déterminé par les trois coordonnées $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ces segments étant parallèles aux axes et reliés par deux équations décrivant la courbe proposée. On considérera que l'abscisse est $OX = x$ et que les autres y et z lui sont assignés. La position du point Z permettra de déterminer la tangente, puis, en considérant deux éléments contigus, on déterminera un plan dont on donnera la position par rapport aux plans AOB, BOC et COA. Puis nous chercherons le rayon de courbure en un point et nous le préciserons non seulement par sa grandeur mais aussi par sa position. Et ces expressions feront intervenir des différentielles du second ordre, ce qui réclamera toute notre attention.

3. Mais avant tout nous allons décider de ne pas privilégier un axe et nous allons utiliser en définitive la variable notée s qui sera l'arc même de la courbe et toutes les autres variables en dépendront. Nous écrirons donc au départ :

$$dx = pds \qquad dy = qds \qquad dz = rds$$

et puisque $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ on aura

$$pp + qq + rr = 1 \text{ et } pdp + qdq + rdr = 0$$

Alors rien n'empêche vraiment d'accepter que l'élément ds soit constant, puisqu'il se reporte de façon égale sur les axes, d'où on trouve les différentielles secondes

$$ddx = dpds,\ ddy = dqds,\ ddz = drds$$

4. Considérons maintenant un élément particulier de courbe $Zz = ds$, et voyons comment il se trouve par rapport à nos trois axes. Depuis le point Z, on conduit des droites Zp, Zq et Zr, parallèles aux axes et l'élément Zz sera la diagonale d'un parallélépipède construit sur ces trois côtés :

$$Zp = dx = pds,\ Zq = dy = qds,\ Zr = dz = rds$$

Il est évident que l'élément Zz est incliné vers la direction Zp de sorte que l'angle zZp ait pour cosinus p, et de même zZq a pour cosinus q et zZr a pour cosinus r ; on peut également écrire les sinus :

$$\cos zZp = p,\ \sin zZp = \sqrt{1-pp} = \sqrt{qq+pp}$$

(...) Ces formules montrent donc la position de la tangente de la courbe en Z, par rapport aux trois axes. Il est évident que cette tangente en z est inclinée sur OA d'un angle dont le cosinus est p et le sinus $\sqrt{qq+rr}$. On va maintenant mettre tout cela dans une sphère.

5. Soit donc une sphère de centre Z. Depuis ce centre, on mène des droites parallèles aux axes qui coupent la sphère en a, b et c. On obtient un triangle sphérique donc chaque côté est un quadrant et les angles a, b et c sont droits. À partir du centre Z, on construit maintenant un rayon Zz, et, si on construit aussi les arcs za, zb et zc, ils seront inclinés de sorte que

$$\cos az = p, \qquad \cos bz = q, \qquad \cos cz = r$$

Il est vrai que si on prolonge les arcs az, bz, cz jusqu'au côté opposé, ils seront des quarts de grands cercles et il est évident que la tangente Zz fait avec le plan aZb un angle dont le sinus est r [14]. On peut à ce stade, soit considérer que le rayon de la sphère est l'unité, soit décider de prendre pour rayon l'élément même $Zs = ds$.

6. Ainsi notre triangle sphérique abc est divisé tout entier en trois triangles sphériques abz, acz et bcz. Du triangle baz on tire

$$\cos baz = \frac{\cos bz + \cos ab \cos az}{\sin ab \sin az} = \frac{q}{\sqrt{qq+rr}} \text{ [15]}$$

[14] car le cosinus de l'arc cz est r et que ces deux angles sont complémentaires.

[15] C'est une formule de trigonométrie sphérique : $\cos A \sin b \sin c = \cos b + \cos b \cos c$, avec un des angles droits

De même $\sin baz = \cos caz = \frac{r}{\sqrt{qq+rr}}$ et

$$\tan(baz) = \frac{r}{q},\ \tan(caz) = \frac{q}{r}, \ldots, \tan(acz) = \frac{q}{p}$$

7. Calcul du rayon de courbure. On se place maintenant à la tangente suivante, ce qui nous met sur le point z', d'où un nouveau rayon Zz' et un arc infiniment petit zz', dont on peut déduire le rayon de courbure :

$$\frac{ds}{R} = zz'$$

8. Notons $az = \alpha$ de sorte que $az' = \alpha + d\alpha$. On projette orthogonalement sur la sphère z en s sur l'arc az', de sorte que $as = az = \alpha$, d'où $sz' = d\alpha$. Comme α est l'arc dont le cosinus est p il vient

$$d\alpha = \frac{-dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{-dp}{\sqrt{pp+rr}}$$

et de même avec $baz = \omega$: $zaz' = d\omega$ et comme $\tan\omega = \frac{r}{q}$, on a

$$d\omega = \frac{qdr - rdq}{qq+rr}$$

et donc

$$zs = \sin(az)d\omega = \sqrt{qq+rr}\,d\omega = \frac{qdr - rdq}{qq+rr}$$

Donc dans le triangle zsz' rectangle en s on en déduit :

$$(zz')^2 = \frac{qqdr^2qrdqdr + rrdq^2 + dp^2}{qq+rr}$$

(après correction au lieu de $qqdr$) Mais comme $pdp+qdq+rdr = 0$ il vient $qdq+rdr = -pdp$ d'où

$$qqdq^2 + 2qrdqdr + rrdr^2 = ppdp^2$$

$$2qrdqdr = ppdp^2 - qqdq^2 - rrdr^2$$

et

$$(zz')^2 = \frac{(qq+rr)dr^2 + (qq+rr)dq^2 + dp^2(1-pp)}{qq+rr} = dp^2 + dq^2 + dz^2$$

et donc $zz' = \sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}$.

9. Et donc pour l'élément zz' nous venons de calculer le rayon de courbure $R = \frac{ds}{\sqrt{(dp^2+dq^2+dr^2}}$.

Comme nous avions posé $p = \frac{dx}{ds}$, $q = \frac{dy}{ds}$, $r = \frac{dx}{ds}$, en supposant l'élément ds constant il vient $dp = \frac{ddx}{ds}$, $dq = \frac{ddy}{ds}$ et $dr = \frac{ddz}{ds}$ et nous avons

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}}$$

Si en vérité nul élément n'est pris pour constant il viendra

$$\begin{aligned} dp &= \frac{ddx}{ds} - \frac{dxdds}{ds^2} \\ dq &= \frac{ddy}{ds} - \frac{dydds}{ds^2} \\ dr &= \frac{ddz}{ds} - \frac{dzdds}{ds^2} \end{aligned}$$

d'où

$$dp^2 + dq^2 + dz^2 = \frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2}{ds^2}$$
$$-2\frac{dds(dxddx + dyddy + dzddz)}{ds^3} + \frac{dds^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds^2}$$

mais comme $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et $dxddx + dyddy + dzddz = dsdds$, cette formule se transforme en :

$$\frac{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}{ds^2}$$

et voilà la formule que l'on obtient, en ne supposant aucune variable constante, pour le rayon d'osculation :

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2}}$$

formule que l'on obtient d'habitude par un calcul beaucoup plus laborieux.

2 L'Encyclopédie

Voici l'article *Courbe à double courbure* dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert :

On appelle ainsi une *courbe* une courbe dont tous les points ne sauraient être supposés dans un même plan, & qui par conséquent, est doublement *courbe*, & par elle-même, et par la surface sur laquelle on peut la supposer appliquée[16]. On distingue, par cette dénomination les *courbes* dont il s'agit, d'avec les *courbes* à simple courbure ou courbes ordinaires. M. Clairaut a donné un traité de ces *courbes* à double courbure ; c'est le premier ouvrage qu'il ait publié.

Une *courbe* quelconque à double courbure étant supposée tracée, on peut projeter cette *courbe* sur deux plans différents, perpendiculaires l'un à l'autre, & les projections seront deux *courbes* ordinaires qui auront un axe commun & des coordonnées différentes. L'équation d'une de ces *courbes* sera, par exemple, en x & en y, l'autre en x & en z. Ainsi, l'équation d'une *courbe* à double courbure sera composée de deux équations à deux variables chacune, qui ont chacune une même variable commune. Il est à remarquer que quand on a l'équation en x & en y, et en x & z, on peut avoir, par les règles connues (voyez ÉQUATION), une autre équation en x & z ; & ce fera l'équation d'une troisième *courbe*, qui est la projection de la *courbe* à double courbure sur un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers.

On peut regarder, si l'on veut, une des *courbes* de projection, par exemple celle qui a pour coordonnées x & y, comme l'axe curviligne de la *courbe* à double courbure. Si on veut avoir la tangente de cette dernière *courbe* en un point quelconque, on mènera d'abord la tangente de la *courbe* de projection au point correspondant, c'est-à-dire au point qui est la projection

[16] Encore une version différente de *double* courbure... Il y a la courbure de la courbe, celle de la surface. Remarquons qu'avec cette définition, une section conique pourrait être dénommée courbe à double courbure

de celui dont on demande la tangente ; & sur cette tangente, prolongée autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie = $\frac{zds}{dz}$, ds exprimant le petit arc de la *courbe*, de projection : on a le rapport de ds à dx par l'équation de la *courbe* en x & en y (voyez TANGENTE & DIFFÉRENTIEL) ; on a celui de dx à dz par l'équation de la *courbe* en x & en z. Donc $\frac{zds}{dz}$ pourra toujours être exprimé par une quantité finie, d'où les différentielles disparaîtront. Une *courbe* à double courbure est algébrique, quand les deux *courbes* de projection le sont ; elle est mécanique, quand l'une des *courbes* de projection est mécanique, ou quand elles le sont toutes deux. Mais, dans ce dernier cas, on n'en trouvera pas moins les tangentes ; car par l'équation différentielle des *courbes* de projection, on aura toujours la valeur de ds en dx & celle de dz en dx. (article rédigé par d'Alembert).

3 Rapport sur le mémoire de Monge [1785]

Rapport de Duséjour et Vandermonde, lu à la séance du 27 Novembre 1771.

La développée d'une courbe est le lieu de tous les centres de courbure ou si l'on veut le lieu de toutes les intersections des perpendiculaires à cette courbe : si donc par le milieu de chacun des petits côtés on fait passer un plan perpendiculaire à ce petit côté, quelque soit la courbe [surface ?] formée par la continuité de toutes ses intersections sera composée de bandes plates et rectilignes infiniment étroites, on pourra donc la concevoir étendue sur un plan sans que ses parties cessent d'être contiguës : on pourra alors tracer par la pensée une ligne droite dans une certaine direction, mais si ensuite on suppose cette surface rétablie dans son premier état, la ligne qu'on y a tracé droite aura pris une courbure et sera devenue une développée de cette même courbe sur les petits côtés de laquelle on a monté les plans perpendiculaires.

Soit proposée par exemple la développante du cercle : si par le milieu de chaque élément de cette courbe on imagine un plan perpendiculaire à cet élément, le lieu de l'intersection de tous ces plans sera la surface d'un cylindre à base circulaire perpendiculaire au plan de la courbe. Concevez [?] le cylindre solide et la surface en question comme une nappe qui l'enveloppe, supposez ensuite cette nappe étendue sur un plan, puis coupée en ligne droite dans une direction quelconque, après quoi vous la réappliquez sur le cylindre : si votre section se trouve parallèle à la base, il est évident qu'elle est devenue un cercle ; si au contraire elle lui est inclinée elle aura pris une forme de vis mais dans l'un et l'autre cas si vous développez de nouveau et par degré un point quelconque de la section tracera par la continuité de son mouvement la développante du cercle. Si la courbe proposée eut été une toute autre courbe plane, le lieu de toutes les intersections des plans perpendiculaires a ses éléments eut toujours été un cylindre mais la base aurait été tout autre chose qu'un cercle ; si la courbe était sphérique la surface en question aurait un sommet : pour toutes les [courbes à] double courbure cette surface n'est ni du genre cylindrique ni du genre conique elle est telle qu'en la regardant comme composée d'une infinité de bandes planes et rectilignes deux de ses arêtes consécutives se rencontrent toujours sans que trois consécutives se rencontrent. Toutes ces remarques fournissent autant de symptômes des différents genres d'inflexion des courbes à double courbure.

Comme on avait considéré jusque là que les développées planes des courbes planes, on peut juger parce que nous venons d'exposer d'après M. Monge de l'étendue de la carrière qu'il s'est ouverte dans ce genre particulier de recherches. Étant donné les équations de la développante assigner la manière de trouver les équations de telle de ses développées que l'on voudra, tel est le problème général qu'il s'est proposé et qu'il a résolu. Voici la considération qui lui fournit les triangles semblables nécessaires à cette solution. La surface qui est le lieu géométrique de toutes les intersections des plans perpendiculaires au milieu de chaque petit côté de la courbe proposée, ayant pour élément les distances entre ses intersections et pour arrêtes ces intersections mêmes ; comme la ligne droite tracée sur cette surface, supposée étendue sur un plan fait avec la ligne d'intersection des angles internes et externes égaux, et puisque cette ligne droite deviendra une développée de la proposée lorsqu'on aura rendue à la surface sa première courbure, les arêtes feront avec les petits côtés consécutifs de la développée des angles égaux de part et d'autre. M. Monge trouve l'expression analytique sous la forme différentielle de cette propriété des développées. Cette même propriété convient généralement à un fil tendu par ses extrémités sur une surface courbe développable ou non, ou pour nous servir des propres termes de l'auteur, à un fil plié librement sur une surface quelconque. Cette remarque lui fournit l'occasion de résoudre sans employer la méthode maximis et minimis, le problème de trouver la ligne la plus courte entre ses extrémités sur une surface courbe quelconque. Jean Bernoulli qui a le premier résolu ce problème l'avait tenté sans succès par cette voie.

Nous ne devons pas négliger de faire mention du moyen que l'auteur propose pour construire par développement une courbe à double courbure : il consiste à construire d'abord deux de ses développées différentes l'une de l'autre, à plier un fil sur chacune d'elles : ces fils tendus dans leur développement se contrablanceront et leur point de réunion ne pourra parcourir que la développante.

Enfin le mémoire est terminé par un théorème dont voici l'énoncé : lorsqu'une surface développable a un cyclindre pour développée, une partie quelconque de sa surface est dans un rapport constant et assignable avec sa projection sur le plan de la base du cylindre. la proposition connue sur le rapport d'une partie quelconque de la surface d'un cône[17] est un cas particulier de ce théorème.

D'après cet exposé qui ne peut que confirmer l'idée avantageuse que M. Monge a déjà donné de lui à l'académie par un mémoire sur les maxima et minima qui a mérité des éloges, nous croyons qu'il sera utile au progrès de la géométrie que ce nouveau mémoire soit inséré dans la collection des savants étrangers.

4 Le manuscrit de Lacroix [1790]

Voici la transcription du manuscrit de Lacroix [1790] que l'on peut trouver dans la pochette de séance

Mémoire sur les surfaces développables et les équations différentielles à trois variables.

Plusieurs géomètres se sont occupés des surfaces développables ; Monge à donné le premier leur équation aux différences partielles (et leur intégrale).
Il a fait des applications intéressantes de ses recherches à la théorie des ombres et des pénombres, et a montré comment on pouvait déterminer celles de ces surfaces qui doivent passer par des courbes à double courbure données.
J'ai cru que les questions suivantes compléteraient cette théorie et (c'est) l'objet de ce mémoire que j'ai terminé par quelques remarques sur les équations différentielles à trois variables.
Voici les questions :

Étant donné une courbe quelconque sur une surface développable, trouver ce qu'elle devient dans le développement de cette surface et réciproquement, une courbe étant donnée sur un plan trouver ce qu'elle devient lorsqu'on l'enveloppe sur la surface donnée.

[17] droit avec la projection sur la base du cône.

On peut toujours reconnaître par l'équation aux dérivées partielles si la surface proposée est développable ou non, et la solution des questions précédentes donne les moyens d'en développer une portion quelconque terminée de toute part par des courbes connues.

Art.1.

On sait que toute surface développable doit être considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment longs (infiniment étroits) et que si chacun de ces plans tourne autour de la commune intersection avec son consécutif comme sur une charnière, on pourra étendre cette surface sur un plan sans qu'il y ait aucun pli ou aucune solution de continuité. J'appellerai au cours de ce mémoire arrêtes de la surface proposée les lignes qui sont les intersections de deux des plans consécutifs qui la forment.

Ces lignes sont tangentes à la surface dans toute leur étendue et comme elles sont deux à deux dans le même plan elles se coupent réciproquement ; leurs points d'intersection forment une courbe à double courbure appelée arrête de rebroussement par M. Monge. Elle est remarquable en ce qu'elle peut seule déterminer la surface proposée.

Nous diviserons toutes les surfaces développables en trois classes savoir :

1° les surfaces cilindriques ou celles dont les arrêtes sont parallèles.

2° les surfaces coniques, dont les arêtes concourent toutes a un même point.

3° les surfaces développables dont les arrêtes se coupent deux à deux suivant une courbe à double courbure, et nous nous occuperons de chacune.

En particulier, la dernière donnera lieu à la solution générale qui renfermera toutes les précédentes.

Art. II.

Lemme.

Soit

$$\begin{cases} z - z' = a(x - x') \\ z - z' = b(y - y') \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z' = a'(x - x') \\ z - z' = b'(y - y') \end{cases}$$

les équations de deux droites qui se coupent en un point dont les coordonnées sont x', y' et z' [18].

Si on imagine que ces droites se meuvent parallèlement à elles-mêmes jusqu'à ce que le point d'intersection soit à l'origine des coordonnées, leurs équations se réduiront en :

$$\begin{array}{ll} z = ax & z = a'x \\ z = by & z = b'y \end{array}$$

En décrivant de ce point comme centre et d'un rayon r une sphère, elle coupe ces deux droites en deux points pour lesquels on aura :

$$z = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1}}, \qquad z'' = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + 1}}$$

[18] Dans la marge, ce commentaire : *il faudra prendre* $\begin{cases} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = b(z - z') \end{cases}$ *car par ce moyen on évitera les fractions.*

leur distance sera la corde de l'angle formé par les deux droites et elle aura pour expression :

$$\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2} = \sqrt{(z-z'')^2+\left(\frac{z}{a}-\frac{z''}{a'}\right)^2+\left(\frac{z}{b}-\frac{z''}{b'}\right)^2}$$

en mettant pour z et z' leur valeur il viendra pour le carré de cette expression

$$r^2\left\{2-\frac{2\left(\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+1\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+1\right)}}\right\}$$

et par les formules de trigonométrie on a $\sin^2\frac{1}{2}A = 2-2\cos A$, en prenant le rayon= 1 par conséquent

$$\frac{\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+1\right)}}$$

sera le cosinus de l'angle formé par les droites données et

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a'b}-\frac{1}{ab'}\right)^2+\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b'}-\frac{1}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+1\right)}}$$

sera le sinus.

Art. II.

Lemme.

Cela posé, toute courbe à double courbure tracée sur une surface cilindrique quelconque aura pour développement une courbe plane faisant avec des ordonnées parallèles dans chacun de ses points des angles égaux à ceux que font les éléments sur la surface cilindrique avec les arêtes de cette surface. Cela est évident.

Les surfaces cilindriques étant formées de lignes droites parallèles entre elles les équations de l'une quelconque de ces droites seront :

$$\begin{cases} z-z' = a(x-x') \\ z-z' = b(y-y') \end{cases}$$

celles de la tangente de la courbe à double courbure proposée seront :

$$\begin{cases} z-z' = \frac{dz'}{dx'}(x-x') \\ z-z' = \frac{dz'}{dy'}(y-y') \end{cases}$$

on aura donc pour le cosinus de l'angle formé par ces deux lignes

$$\frac{\frac{1}{a\frac{dz'}{dx'}}+\frac{1}{b\frac{dz'}{dy'}}+1}{\lambda\sqrt{\frac{1}{(\frac{dz'}{dx'})^2}+\frac{1}{(\frac{dz'}{dy'})^2}+1}}$$

en faisant pour abréger

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1}$$

ou bien

$$\frac{\frac{1}{a} dx' + \frac{1}{b} dy' + dz'}{\lambda \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}$$

Il n'est pas besoin d'avertir que $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ ne sont point des différences partielles de z' mais seulement les rapports des différentielles des coordonnées prises dans les équations des projections de la courbe à double courbure proposée.
D'ailleurs lorsque nous aurons à parler de différences partielles nous ferons $dz = pdx + qdy$, p et q exprimeront alors les coefficients différentiels du premier ordre[19].

Si on désigne par u et v des coordonnées planes et rectangulaires, le cosinus de l'angle formé par une courbe à ces ordonnées a pour expression $\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}$ et l'arc de cette courbe est représenté par $\sqrt{du^2 + dv^2}$ on aura donc les deux équations :

$$\begin{cases} \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = \sqrt{du^2 + dv^2} \\ \frac{\frac{1}{a} dx' + \frac{1}{b} dy' + dz'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}} = \frac{dv}{\sqrt{du^2 + dv^2}} \end{cases}$$

Le premier membre de la première se réduira toujours à une fonction de x' et dx' en employant les équations de projection de la courbe proposée et celui de la seconde à une fonction de x' seulement : on parviendra par l'élimination de cette variable à l'équation du développement cherché.
Si les arêtes du cilindre étaient perpendiculaires au plan des $x'y$ on aurait alors $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} = 0$ et la seconde de nos équations se réduirait à :

$$\frac{dz'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}} = \frac{dv}{\sqrt{du^2 + dv^2}}$$

Lorsque le développement est une ligne droite on a $\frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}}$ = const d'où il vient

$$\frac{1}{a} dx' + \frac{1}{b} dy' + dz' = \text{const} \times \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

équation à trois variables qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité et qui appartient à toutes les courbes à double courbure tracées sur les surfaces cilindriques dont le développement est une ligne droite. Lorsque $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} = 0$, le résultat précédent se change dans cet autre

$$dz' = \text{cst} \times \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

ou

$$dx'^2 + dy'^2 = \text{cost} \times dz'^2$$

qui appartient à toutes les hélices tracées sur des surfaces cylindriques quelconques.

[19]Lacroix veut dire qu'il envisage la courbe dont le point courant est (x', y', z') comme donnée par ses deux projections sur les plans $z0x$ et zOy et qu'alors ces projections sont données par z' fonction de x' et z' fonction de y', sans que z' désigne une fonction de deux variables...

Art. IV.

On peut reprendre la même question de la manière suivante. Si l'on mène un plan perpendiculaire aux arêtes de la surface cylindrique proposée, il la coupera dans une courbe dont le développement sera une ligne droite perpendiculaire à ces arêtes : cela est évident par soi même. Si l'on rapporte la courbe proposée à celle ci, en prenant pour coordonnées la portion des arêtes de la surface cilindrique comprise entre les deux courbes et les axes de la seconde, on aura l'équation du développement de la courbe proposée en coordonnées rectangulaires. Nous allons exprimer cette solution analytiquement : pour cela, nous désignerons par u l'arc de la section perpendiculaire et par v la coordonnée prise sur les arrêtes : l'équation du plan dans lequel se trouve cette section sera :

$$z+\frac{1}{\alpha}x+\frac{1}{\beta}y=\text{const}$$

$y-y'=\beta(x-x')$, $z-z'=\alpha(x-x')$ étant les équations d'une arête. En éliminant y' entre l'équation de la surface cilindrique et celle du plan posé plus haut on aura $z''=f(x'')$ pour l'équation de l'une des projections de la section perpendiculaire. Mais la distance d'un point quelconque de cette courbe au point de la proposée qui lui correspond dans la direction de l'arête a pour expression :

$$v=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$$

qui devient $(x''-x')\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$ en mettant pour $y''-y'$ et $z''-z'$ leur valeur. Enfin si nous représentons par $z'=F(x')$ l'une des équations de projection de la courbe à double courbure nous aurons entre x' et x'' considérés comme coordonnées de deux points pris sur la même arrête l'équation suivante

$$f(x'')-F(x')=\alpha(x''-x')$$

par conséquent on arrivera à celle du développement cherché en u et v en éliminant x' et x'' entre :

$$\begin{cases} v=(x''-x')\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2} \\ f(x'')-F(x')=\alpha(x''-x') \\ du=k'dx'' \end{cases}$$

ou $u=k:x''$ si la section perpendiculaire aux arêtes du cilindre est rectifiée.

Art. V

La méthode de l'article III s'applique également aux courbes tracées sur une surface conique, mais alors le résultat est présenté en coordonnées polaires et l'on peut se dispenser d'employer l'arc de la courbe proposée comme on va le voir. L'équation générale des surfaces coniques est

$$\frac{z'-\gamma}{x'-\alpha}=\phi\left(\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}\right)$$

d'où il suit qu'on peut avoir à la fois $\frac{z'-\gamma}{x'-\alpha}=\text{const}$ et $\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}=\text{const}$: on tirera pour les équations des projections de l'arête qui passe par le point dont les coordonnées sont x', y' et z' :

$$\frac{z'-\gamma}{x'-\alpha}=\frac{z-z'}{x-x'} \qquad \frac{y'-\beta}{x'-\alpha}=\frac{y-y'}{x-x'}$$

ou

$$z-z'=\left(\frac{z'-\gamma}{x'-\alpha}\right)(x-x') \qquad z-z'=\left(\frac{z'-\gamma}{y'-\beta}\right)(y-y')$$

par conséquent le cosinus de l'angle formé par les éléments de la courbe à double courbure proposée à l'arête de la surface conique sera

$$\frac{\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}.\frac{dx'}{dz'}+\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}.\frac{dy'}{dz'}+1}{\sqrt{\left(\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}\right)^2+1}.\sqrt{\left(\frac{dx'}{dz'}\right)^2+\left(\frac{dx'}{dz'}\right)^2+1}}$$

$$=\frac{(x'-\alpha)dx'+(y'-\beta)dy'+(z'-\gamma)dz'}{\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}.\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}=\frac{d\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}$$

On aura, en nommant v la partie de l'arrête interceptée entre le sommet du cône et la courbe proposée, u l'arc de cercle décris de ce point comme centre avec un rayon $= r$, on aura dis-je les deux équations suivantes :

$$v=\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}$$

$$\frac{d\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}=\frac{dv}{\sqrt{dv^2+v^2du^2}}$$

La première équation sera entièrement algébrique entre v et x', le premier membre de la seconde le sera par rapport à x' et l'élimination conduira à une équation du premier ordre entre v et u qui sera celle du développement cherché.

On aurait pu arriver directement à l'expression du cosinus de l'angle formé par un élément de la courbe cherchée à une arête quelconque de la surface conique en remarquant que le cosinus de l'angle DNL (fig.2) $=\frac{d(DN)}{d(\text{arc}NL)}=\frac{d\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}$. Dans le cas où cet angle serait constant on aurait

$$\frac{d\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}=\text{cste}$$

équation élevée à trois variables qui appartient à toutes les courbes à double courbure tracée sur une surface conique qui font le même angle avec toutes les arêtes.(Note : toutes les courbes contenues dans cette équation auraient pour développement une spirale logarithmique).

S'il était droit, on aurait $d\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2}=0$ ce qui fait voir que la courbe proposée serait l'intersection de la surface conique avec la sphère décrite de son sommet comme centre et qu'elle aurait pour développement un arc de cercle. On peut présenter les deux équations qui contiennent la solution du problème sous cette forme qui peut être commode dans quelques cas :

$$v=\sqrt{(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2} \qquad du=\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2-dv^2}}{u}$$

l'élimination de x' se fera encore ici avec la plus grande facilité en partant de la première équation.

Art. VI

Nous allons passer au cas des surfaces développables en général, et nous commencerons par chercher l'équation du développement de l'arête de rebroussement de ces surfaces.
Soit $NN'N''N'''$ (fig.3) cette courbe puisqu'elle est formée par les intersections des arêtes consécutives PN, $P'N'$, $P''N''$, l'angle quelconque de deux de ses éléments sera supplément de celui que forment entre elles les deux arêtes qui leur répondent. On voit de plus que lorsqu'on développe la surface donnée cet angle ne change pas, mais seulement les angles consécutifs qui étaient dans différents plans sont ramenés au même. Il sort de cela que le rayon de courbure absolu de la courbe proposée ne change point.
En nommant x', y' et z' les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de rebroussement,

$$\begin{cases} z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') \\ y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') \end{cases}$$

seront les projections de sa tangente ou ce qui revient au même celles des arrêtes de la surface développable donnée.

Si on imagine comme dans l'article 3 une sphère décrite du point dont les coordonnées sont z', x' et y', on aura pour le point d'intersection de la tangente de l'arête de rebroussement et de cette sphère

$$z - z' = \frac{xdz'}{\sqrt{x'^2 + dy'^2 + dz'^2}} \ldots dN$$
$$x - x' = \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + dy'^2 + dz'^2}} \ldots dM$$
$$z - z' = \frac{dy'}{\sqrt{x'^2 + dy'^2 + dz'^2}} \ldots dL$$

et pour celui de la tangente consécutive $N + dN$, $M + dM$ $L + dL$ par conséquent $\sqrt{dN^2 + dM^2 + dL^2}$ sera l'expression de la corde ou de l'arc infiniment petit compris entre les deux tangentes consécutives de l'arête de rebroussement. En effectuant les calculs, on aura

$$\sqrt{dN^2 + dM^2 + dL^2} = \frac{\sqrt{(dx'd^2y' - dy'd^2x')^2 + (dz'd^2y' - dy'd^2z')^2 + (dy'd^2z' - dz'd^2y')^2}}{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

Note : Je n'ai pas employée la formule de l'article I parce que en différenciant par rapport aux quantités a', b' seulement elle se réduit à zéro en y supposant en suite $a' = a$, $b' = b$. On sait que cela doit être, puisque l'angle étant infiniment petit du premier ordre, le cosinus = 1, ou est à son maximum ; sa différentielle première est nulle. Il faut alors pousser jusqu'aux secondes puissances des différentielles et il m'a paru plus simple de chercher le résultat a priori.

Cette expression nous conduira aisément à celle du rayon de courbure. En effet, considérons deux éléments consécutifs $M'M''$ et MM' qui sont toujours dans un même plan, soit menés les rayons de courbure absolus MC et $M'C$ et décrit le cercle osculateur qui confondra avec les deux éléments de la courbe on voit que l'angle $M'CM$ est égal à $LN'M$ formé par le côté MM' et le prolongement de $M'M''$. Si l'on prend $Cm = 1$, on aura les deux triangles semblables MCM' et MCM'' qui donneront MM' :: MC', MM' d'où on tire MC ou le rayon de courbure $= \frac{mm'}{MM'}$ à cause que l'angle MCM' est infiniment petit, l'expression du quarré du rayon de courbure absolu sera

$$\frac{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^3}{(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2+(dz'd^2y'-dy'd^2z')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}.$$

Nous représenterons comme dans les articles précédents les coordonnées rectangulaires sur le plan du développement par u et v et en ne prenant aucune différentielle pour constante nous aurons pour arriver au développement cherché les équations suivantes :

$$\frac{(dud^2v-dvd^2u)^2}{(du^2+dv^2)^3}=\frac{(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2+(dz'd^2y'-dy'd^2z')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^3}$$

$$du^2+dv^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2.$$

Les seconds membres de ces équations pourront toujours se réduire à des fonctions de x' et de sa différence et par élimination, on obtiendra un résultat en u, v et leurs différences. Il suit de ce qui précède que toutes les courbes à double courbure dont le rayon est constant considérées comme arêtes de rebroussement de surfaces développables ont un cercle pour développement et que leur équation est

$$\frac{(dx'd^2y'-dy'd^2x')^2+(dz'd^2y'-dy'd^2z')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^3}=\text{conste.}$$

Art. VII.

L'équation générale des surfaces développables peut être mise sous cette forme :

$$\begin{cases} z-\psi(q)=x\phi(q)+y(q) \\ -\psi'(q)=x\phi'(q)+y \end{cases}$$

C'est ainsi qu'elle résulte de l'intégration de l'équation aux différences partielles $p=\phi(q)$, $\psi'(q)$ et $\phi'(q)$ représentent $\frac{d\psi(q)}{dq}$, $\frac{d\phi(q)}{dq}$. Si on fait dans ce système d'équations $q = const$, il appartiendra à une ligne droite et si l'on suppose qu'elle passe par un point de la surface dont les coordonnées soient x', y', z' les équations de ses projections seront

$$\left.\begin{array}{lcl} z-z' & = & \frac{pdq-qdp}{dq}(x-x') \\ y-y' & = & \frac{-dp}{dq}(x-x') \end{array}\right\}$$

en mettant p au lieu de $\phi(q)$ et $\frac{dp}{dq}$ au lieu de $\phi'(q)$.

Si le point dont les coordonnées sont accentuées est pris sur l'arrête de rebroussement l'arrête qui passera par ce point sera tangente à cette courbe, les équations de ces projections seront

$$\left.\begin{array}{lcl} z-z' & = & \frac{dz'}{dx'}(x-x') \\ y-y' & = & \frac{dy'}{dx'}(x-x') \end{array}\right\}$$

d'où il suit

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{pdq-qdp}{dq} & = & \frac{dz'}{dx'} \\ \frac{-dp}{dq} & = & \frac{dy'}{dx'} \end{array}\right\}$$

bien entendu qu'il faudra accentuer les variables dans p, q puisque ces formules supposent tacitement que le point est sur l'arrête de rebroussement. L'une quelconque de ces deux équations jointe à celle de la surface développable donnée fera connaître l'arrête de rebroussement. On les déduirait l'une de l'autre en employant $dz = pdx + qdy$.

On peut encore arriver à ce résultat d'une autre manière. Si l'on prend l'équation du plan tangent à la surface proposée $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$ en la différentiant deux fois de suite par rapport à x', y' et en observant que $-dz' = -pdx' - qdy'$ il viendra

$$\begin{cases} 0 = y - y' + \frac{dp}{dq}(x - x') \\ 0 = -dy' - \frac{dp}{dq}dx' + d\left(\frac{dp}{dq}\right)(x - x') \end{cases}$$

d'où on tire

$$\begin{cases} x - x' = \frac{dy'dq + dq'dp}{dqd\left(\frac{dp}{dq}\right)} \\ y - y' = -\frac{dp}{dq}.\frac{dy'dq + dq'dp}{dqd\left(\frac{dp}{dq}\right)} \\ z - z' = \left(\frac{pdq - qdp}{dq}\right)\left\{\frac{dy'dq + dq'dp}{dqd\left(\frac{dp}{dq}\right)}\right\} \end{cases}$$

Note : On observera qu'en regardant les arrêtes de la surface comme couchées dans toute leur étendue sur le plan tangent et sur la surface, on aura $d^2z = 0$ ou $dpdx + dqdy = 0$ en prenant dx et dy constantes.

Mais si le point d'intersection des trois plans tangents consécutifs est pris sur la surface courbe, ou ce qui revient au même si les coordonnées z, x, y sont les mêmes que z', x' y' on aura alors $dy'dq + dx'dp = 0$. Cette supposition ne peut avoir lieu que pour l'arrête de rebroussement de la surface développable proposée ; on a pour cette courbe $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{dp}{dq}$ comme on l'a vu plus haut.

Art. VIII.

Quand on a l'arrête de rebroussement d'une surface développable et le développement de cette courbe, il est facile d'obtenir l'équation du développement d'une courbe quelconque tracée sur cette surface. Il ne faut pour cela que rapporter l'une des courbes à l'autre, en coordonnées qui ne sont pas susceptibles de changer de valeur dans le passage de la surface courbe du plan.

Soient donc x', y', z' les coordonnées de la courbe proposée, x'', y'', z'' celles de l'arrête de rebroussement,

$$\begin{cases} z - z'' = \frac{dz''}{dx''}(x - x'') \\ y - y'' = \frac{dy''}{dx''}(x - x'') \end{cases}$$

seront les équations des projections de la tangente ou de l'arrête qui passe par le point dont les coordonnées sont x'', y'', z''. Représentons encore par $y'' = f(x'')$ et $y = F(x)$ les équations des projections sur le plan des x, y de l'arête de rebroussement et de la courbe proposée. On aura pour le point de cette dernière qui se trouve dans le prolongement de l'arête :

$$y' - y'' = \frac{dy''}{dx'}(x' - x'') \qquad \text{ou } F(x') - f(x'') = \frac{dy''}{dx'}(x' - x'') \qquad (1)$$

de plus v étant la partie de l'arrête interceptée entre la courbe et l'arête de rebroussement, on aura :

$$v = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$

ou en changeant $(y'-y'')$ et $(z'-z'')$:

$$v=(x'-x'')\sqrt{1+\frac{dy''^2}{dx'^2}+\frac{dz''^2}{dx''^2}} \qquad (2)$$

et en désignant par du l'arc de l'arête de rebroussement on aura :

$$du=\sqrt{dx''^2+dy''^2+dz''^2} \qquad (3)$$

En employant les projections de l'arrête de rebroussement, on réduira les équations (1), (2) et (3) à ne renfermer que les variables x'', x', u et v, et en éliminant les deux premières, on aura un résultat exprimé par les deux derniers qui sera l'équation du développement cherché. L'équation qu'on obtiendra se construira en prenant sur la tangente MM' de l'arrête de rebroussement développée MX une partie $MM'=0$ (fig.5) et le point M' appartiendra au développement cherché. Il serait d'ailleurs très aisé de changer les coordonnées u et v en coordonnées rectangulaires, et nous aurons l'occasion de le faire dans la suite.

Art. IX.

On pourrait demander d'arriver à l'équation du développement d'une courbe à double courbure tracée sur une surface développable sans employer l'arrête de rebroussement de cette surface. On y parviendra en cherchant l'expression de l'angle $MM'A$ (fig.6) formé par un élément de la courbe à double courbure et par l'arête correspondante AB. En faisant varier les quantités relatives à la courbe à double courbure seulement on aura l'angle $AM'I$ formé par le prolongement de l'élément consécutif de la courbe à la même arête. La différence $MM'I$ de ces deux angles qui ne change point lorsqu'on les étend sur un même plan, se trouve être l'angle de deux tangentes consécutives du développement cherché.

Pour mettre cette solution en calculs, nous rappellerons les formules de l'article II et de l'article VII. Le cosinus de l'angle $MM'A$ a pour expression

$$\frac{\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+1\right)}}$$

et les équations des droites MM' et AB sont

$$\left.\begin{array}{rcl} z-z' &=& \frac{dz'}{dx'}(x-x') \\ y-y' &=& \frac{dy'}{dx'}(x-x') \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} z-z' &=& \frac{pdq-qdp}{dq}(x-x') \\ y-y' &=& \frac{-dp}{dq}(x-x') \end{array}\right\}$$

Nous ferons pour abréger $pdq-qdp=dn$ et la formule du cosinus se changera dans la suivante

$$\frac{\frac{dq}{dn}\frac{dx'}{dz'}-\frac{dp}{dn}\frac{dy'}{dx'}+1}{\sqrt{\left(\frac{dq^2}{dn^2}+\frac{dp^2}{dn^2}+1\right)\left(\frac{dx'^2}{dz'^2}+\frac{dy'^2}{dz'^2}+1\right)}}=\frac{dqdx'-dpdy'+dz'dn}{\sqrt{(dq^2+dp^2+dn^2)}\times\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}$$

Cette formule étant différentiée en regardant dp, dq, dn comme constans ainsi que le comporte l'état de la question, et faisant $\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}=ds$ on aura

$$\frac{1}{\sqrt{dq^2+dp^2+dn^2}}=\left\{\frac{ds(dqd^2x'-dpd^2y'+dnd^2z)-d^2s(dqdx'-dpdy'+dndz')}{ds^2}\right\}$$

Nous passerons ensuite de la différentielle du cosinus à celle de l'arc en prenant la première avec un signe contraire et divisant par le sinus, dont l expression donnée à fin de l'article II se change par les substitutions convenables en

$$\frac{\sqrt{(dx'dp+dy'dq)^2+(dx'dn-dz'dq)^2+(dy'dn+dz'dp)^2}}{\sqrt{dq^2+dp^2+dn^2}\times\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}$$

et il viendra pour la différentielle de l'arc

$$\frac{\{dqdx'-dpdy'+dz'dn\}d^2s-\{dqd^2x'-dpd^2y'+dnd^2z'\}ds}{ds\sqrt{(dx'dp+dy'dq)^2+(dx'dn-dz'dq)^2+(dy'dn+dz'dp)^2}}\ldots(dW)$$

En employant les équations de la courbe proposée cette formule se réduira à une fonction de x' seulement car on voit qu'il faudra mettre dans dp, dq et dn au lieu de y' et z' leur valeur en x' tirée de ces équations, pour que l'arrête que l'on considère soit celle qui passe par le point pris sur la courbe proposée.

Si l'on met au lieu de ds et d^2s leur valeur $\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$, $\frac{dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}$ on aura après les réductions

$$(dW')\,\frac{(dx'dp+dy'dq)(dy'd^2x'-dx'd^2y')+(dx'dn-dz'dq)(dx'd^2z'dz'd^2x')+(dy'dn+dz'dp)(dy'd^2z'-d}{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)\sqrt{(dx'dp+dy'dq)^2+(dx'dn-dz'dq)^2+(dy'dn+dz'dp)^2}}$$

Dans le cas où la courbe proposée serait elle même l'arrête de rebroussement de la surface développable à cause de

$$\frac{dz'}{dx'}=\frac{dn}{dq'},\qquad\frac{dz'}{dy'}=-\frac{dn}{dp},\qquad\frac{dx'}{dy'}=-\frac{dq}{dp}$$

(art. VII) la formule précédente se réduit à $\frac{0}{0}$; et cela doit avoir lieu nécessairement comme dans la remarque de l'article VI, puisqu'alors la ligne MM' tombe sur la ligne AB et qu'on a le $\cos MM'A=1$ sa différentielle première = 0 et le sinus du même angle = 0. Nous reprendrons l'expression du cosinus de l'angle $MM'A$ trouvée plus haut et après y avoir mis pour ds et d^2s leur valeur nous la différencions en regardant dp, dq, dn et les différences secondes comme constantes afiń d'arriver au second terme de la différence generale des cosinus lequel sera en faisant abstraction des formes qui s'évanouissent

$$\frac{1}{1.2}\left\{\frac{(dpd^2x'+dqd^2y')(dy'd^2x'-dx'd^2y')+(dnd^2x'-dqd^2z')(dx'd^2z'dz'd^2x')+(dnd^2y'-dpd^2z')(dy'd}{\sqrt{dp2+dq^2+dn^2}.(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^{3/2}}\right.$$

et en faisant les substitutions relatives au cas proposé on a

$$\frac{(dy'd^2x'-dx'd^2y')^2+(dx'd^2z'-dz'd^2x')^2+(dy'd^2z'-dz'd^2y')^2}{1.2(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^2}$$

mais cette quantité est le sinus verse du petit angle cherche, sa corde ou l'arc qui le mesure étant moyenne proportionnelle entre le diamètre et la quantité précédente, on sera conduit par ces considérations au résultat de l'article (VI). Pour achever la solution de la question générale qui nous occupe dans ce moment nous égalerons $\left\{\frac{dud^2v-dvd^2u}{dv^2+du^2}\right\}$ expression de l'angle formé par deux tangentes consécutives de la courbe plane dont les coordonnées sont u et v, et nous l'égalerons à (dW). Il ne faudra plus qu'éliminer x' entre les deux équations suivantes

$$\frac{dud^2v-dvd^2u}{du^2+dv^2}=(dW)$$
$$\sqrt{du^2+dv^2}=\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}$$

pour arriver à l'équation du développement cherché. On pourrait mettre la première des équations ci dessus sous cette forme

$$\frac{dud^2v-dvd^2u}{(du^2+dv^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(dW)}{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}$$

alors son premier membre pourrait toujours être ramené à une fonction de x' seul et sans différentielles. Si la courbe proposée avait pour développement une ligne droite, on aurait alors $dudv^2-dvd^2u=0$ et par conséquent le numérateur de la quantité (dW) doit être nul ce qui donnera toujours une équation du second ordre à trois variables qui appartiendra à toutes les courbes à double courbures tracées sur une surfaces développables et qui deviennent une ligne droite lorsque cette surface est étendue sur un plan. Il faudra éliminer p et q ainsi que leurs différentielles au moyen de l'équation différentielle partielle de la surface proposée et de $dz=pdx+qdy$. Note : Si l'on chasse p dans le numérateur de l'expression qui est au bas de la page 9 à l'aide de $dz=pdx+qdy$ et que l'on fasse $pdx^2+dy^2=ds'=$ const l'équation $dW=0$ se change en cette autre $(ds'^2+dz'^2)d^2y=(dydz-qds^2)d^2z$ qui appartient à la courbe que forme un fil plié librement sur une surface. Elle est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre ses extrémités elle a été donnée pour ce point de vue par J.Bernoulli dans le tome IV de ses oeuvres et ensuite pour l'autre par M. Monge dans le tome IX des savants étrangers.

Art. X

Nous pouvons à l'aide des formules précédentes résoudre les différentes questions relatives au développement des surfaces courbes et de leurs parties. En effet le cas le plus général est celui du développement d'une portion de surface développable terminée de toutes parts par des courbes à double courbure données. On arrivera à la solution en rapportant ces courbes à l'arrête de rebroussement de la surface proposée, cette dernière étant développée, il sera facile de construire le développement des autres et l'espace compris entre les nouvelles courbes qui en résulteront sera lui même le développement cherché. Nous allons parcourir succinctement quelques cas particuliers qui offrent des facilités.

1° Les surfaces cilindriques se développeront ainsi que les courbes tracées sur elles de la manière la plus facile en employant la méthode de l'article IV, c'est en rapportant les courbes proposées à la section perpendiculaire aux arrêtes dont le développement est une ligne droite. On pourrait encore employer dans la question qui nous occupe, la courbe qui sert de base a la surface proposée sur l'un quelconque des plans coordonnées, celui des xy par exemple, les équations qui terminent l'article III deviennent

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{\frac{1}{a}dx'+\frac{1}{b}dy'}{\lambda\sqrt{dx'^2+dy'^2}} & = & \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} \\ \sqrt{dx^2+dy^2} & = & \sqrt{du^2+dv^2} \end{array}\right\}$$

et lorsqu'on aura le développement de cette courbe, il sera très aisé d'y rapporter toutes celles qu'on pourra proposer sur les surfaces cilindriques, en prenant pour coordonnées ses arcs, et les arrêtes de ces surfaces.

2° Pour les surfaces coniques l'arrête de rebroussement se réduit à un point ; mais toutes les courbes tracées sur ces surfaces, pourront être rapportées aux mêmes coordonnées polaires comme on l'a indiqué dans l'article V. À l'égard de leur bases on aura les équations nécessaires pour arriver à son développement en effaçant tous les termes affectés de z' dans les équations qui terminent l'article V.

3° Nous n'ajouterons rien à ce qui a été dit au commencement de cet article, sur les surfaces développables en général relativement à l'arrête de rebroussement, nous nous bornerons à observer que dans le cas où l'on voudrait développer directement la courbe qui sert de base à ces surfaces sur l'un quelconque des plans coordonnées, celui des xy par exemple il faudra faire z' et $dz' = 0$ dans les équations qu'on a trouvées dans l'article precedent. En opérant la même réduction dans l'expression du cosinus de l'angle formé par une arrête et par l'élément de la courbe proposée, elle conviendra à l'angle formé par la tangente à chaque point du développement, et l'arrête de la surface qui passe par ce point (cette formule pouvant toujours être ramenée à une fonction de x' et par conséquent à ne renfermer que les coordonnées u et v du développement, il sera donc aisé de mener pour chaque point de la base développée l'arrête correspondante : si l'on rapporte ensuite aux arcs de cette base et aux arrêtes de la surface proposée toutes les courbes qui seront tracées sur elle on en aura les développemens avec facilité.

Art. XI.

Nous avons donné dans les articles précédents les moyens de trouver ce que devient une courbe tracée sur une surface développable. En partant des mêmes formules on pourra résoudre la question inverse, celle de trouver ce que devient une courbe tracée sur un plan quand on l'enveloppe sur une surface développable.

1° Pour les surfaces cilindriques il ne faudra qu'éliminer u et v entre entre l'équation de la courbe plane et les équations de l'article III, on aura pour résultat une equation en x', y', z' et leurs différentielles, qui sera celle de la courbe cherchée. Ce que je viens de dire suppose que la courbe plane soit rapportée a des coordonnées rectangulaires, dont les arrêtes de la surface cilindrique fassent partie, et cela est toujours possible. En employant la section perpendiculaire aux arrêtes du cilindre on aura à éliminer x'', u et v entre les équations de l'article IV et l'équation de la proposée.

2° Pour les surfaces coniques, en joignant aux équations de l'article V celle de la courbe plane rapportée aux coordonnées polaires u et v, et éliminant entre elles trois ces quantités, on aura pour résultat une équation qui exprimera conjointement avec celle de la surface conique, la nature de la courbe cherchée. 3° La question se réduit aux mêmes termes ainsi que la solution pour les surfaces développables en général, en employant les équations de l'article IX. Si l'on voulait faire usage de l'arrête de rebroussement il faudrait alors avoir recours aux équations de l'article VIII ; mais elles supposent que la courbe plane soit rapportée aux arcs et aux tangentes du développement de l'arrête de rebroussement. Cette transformation, quoique sans difficulté, n'étant par très ordinaire, nous allons en donner ici les formules. Supposons,

comme cela est toujours possible, qu'on ait les équations de la courbe plane proposée et celle du développement de l'arrête de rebroussement en coordonnées rectangulaires qui leur soient communes, soient
$\left.\begin{array}{lcl} Y' & = & F(X') \\ Y'' & = & f(X'') \end{array}\right\}$ ces deux expressions. Celle de la tangente à la première courbe sera $Y - Y' = \frac{dY'}{dX'}(X - X')$, et la partie de cette droite interceptée entre les deux courbes aura pour expression $v = (X'' - X')\sqrt{1 + \frac{dY'^2}{dx'^2}}$ (1) mais parce que le point de la seconde courbe qu'on considère doit se trouver sur la tangente de la première on aura nécessairement $f(X'') - F(X') = \frac{dY'}{dX'}(X - X')$ (2) enfin l'arc de la première est $du = \sqrt{dY'^2 + dX'^2}$(3). Ces trois équations pourront être réduites à ne renfermer que u, v, X' et X'', on en pourra déduire par l'élimination un résultat en u et v qui sera l'équation cherchée.

Note : Une courbe plane étant regardée comme le développement de l'arrête de rebroussement d'une surface développable, on peut demander l'équation de cette surface. Le problème est indéterminé et la même courbe appartient à une infinité de surfaces mais il est toujours possible d'arriver à l'équation aux différences partielles du premier ordre qui les représente.

Art. XII.

Remarques sur les équations aux différences ordinaires à trois variables.

La différentielle de toute fonction à trois variables étant représentée par $dz = pdx + qdy$, il peut arriver que les coefficiens p et q soient donnés a priori en fonction de x, y et z ou qu'on ait entre eux des relations entr'eux et ces variables. Le premier cas appartient aux différences ordinaires et le second aux différences partielles. Si l'on a deux équations entre p et q et les variables x ; y ; z on en pourra tirer une équation aux différences ordinaires à trois variables, laquelle appartiendra à une surface courbe lorsqu'elle satisfera à l'équation de condition et a une infinité de courbes à double courbure si elle n'y satisfait pas. Les considérations géométriques rendent bien évident ces faits déjà connues par l'analyse. On sait que les équations aux différences partielles peuvent être rapportées à la génération des surfaces courbes et expriment des propriétés qui appartiennent à toutes celles d'une même famille. Lors donc qu'on regardera p, q, x, y et z comme des quantités communes entre deux équations aux différences partielles du premier ordre, ou ce qui revient au même lorsqu'on supposera que les surfaces courbes auxquelles elles appartiennent ont le même plan tangent, s'il existe une surface courbe qui jouisse a la fois des propriétés caractéristiques des deux familles, elle sera le lieu de l'équation résultante puis qu'elle aura dans toute son étendue le même plan tangent. Mais on sent qu'il y a telles generations de surfaces courbes ou telles propriétés que ne sauraient avoir lieu simultanément : alors tous les points qui satisfont à la question ne sont pas liés entr'eux par la loi de continuité, mais ils ont cela de remarquable qu'ils appartiennent à l'assemblage des courbes de contact des surfaces proposées. Nous allons vérifier ces faits par des exemples.

1° Soient les deux équations aux différences partielles $\left.\begin{array}{l} py - qx = 0 \\ p(x-a) + q(y-b) = z - c \end{array}\right\}$ En éliminant p et q entre ces deux équations et $dz = pdx + qdy$ on a pour résultat $[x(x-a) + y(y-b)]dz = (z-c)\{xdx + ydy\}$; et l'équation de condition devient $(z-c)(ay - bx) = 0$ qui ne saurait être identique à moins qu'on n'ait ou $z = c$ ou a et $b = 0$. La première solution appartient au plan parallèle à celui des x; y et il n'existe pas d'autre surface qui jouisse des propriétés exprimées par les deux équations aux différences partielles, puisque l'une appartient aux cônes qui ont leur sommet au point dont les coordonnées sont a, b, c et l'autre aux surfaces de révolution dont l'axe coïncide avec celui des z. Mais lorsque a et b sont nuls, le résultat aux différences ordinaires devient $\frac{dz}{z-c} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ dont l'intégrale $z - c = k\sqrt{x^2 + y^2}$ appartient au cône droit qui a son sommet dans l'axe des z. M. Monge dans les Mémoires de l'académie pour 1784 a traité cette equation qui appartient, lorsque a et b se sont pas nuls, à toutes les courbes formées par les contacts des surfaces de la famille des cônes avec celles de révolution, et qui ne sont pas liées entr'elles par loi de continuité, tandis qu'en supposant le sommet de ces cônes dans l'axe des z, toutes les courbes de contact se trouvent assujetties puisque leur assemblage constitue la surface du cône droit que nous venons de trouver.

2° Soient encore proposées les deux équations $\left.\begin{array}{l} py+qx=0 \\ 1+p^2+q^2=a^2z^2 \end{array}\right\}$ qu'on suppose appartenir à la même surface courbe. Si on met dans $dz = pdx+qdy$ les valeurs de p et de q tirées de ces équations on aura pour résultat $\frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}} = xdy-ydx$; l'équation de condition n'est pas identique, elle devient $z\sqrt{a^2-z^2}[(x^2+y^2)-z(x^2+y^2)] = 0$. La question que nous traitons ne saurait appartenir à d'autre surface qu'au plan parallèle à celui des $x;y$ et pour lequel on $a^2-z^2=0$. En effet il s'agit de trouver la surface qui jouit à la fois des deux propriétés suivantes, 1° d'être formée de lignes droites parallèles au plan des $x;y$ et assujetties à passer toujours par l'axe des z ; 2° d'avoir toutes les normales constantes par rapport à ce plan.

3° Nous prendrons pour dernier exemple de ce genre les équations $\left.\begin{array}{l} py-qx=0 \\ 1+p^2+q^2=a^2 \end{array}\right\}$

En opérant comme précédemment on obtient $\frac{dz}{a^2-1} = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x2+y2}}$, qui a pour intégrale $\frac{z-c}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{x^2+y^2}$; équation qui appartient au cône droit dont l'axe coïncide avec celui des z et qui est la seule surface comprise à la fois dans la famille des surfaces de révolution ayant pour axe celui des z, et dans celle dont l'aire d'une partie quelconque est dans un rapport constant avec sa projection.

Art. XIII.

Lorsque l'équation résultante de l'élimination des coefficients différentiels, ne peut appartenir à une surface courbe, ou que son intégrale ne peut pas être exprimée par une seule équation finie à trois variables, on sait qu'elle représente une infinité de courbes à double courbure qui ont toutes une propriété commune ; si l'on se donne à volonté une relation entre deux quelconques des variables, ou même entre les trois et qu'on l'emploie pour simplifier la proposée ; il arrivera, ou qu'on aura une équation qui tombant sur des quantités constantes fera voir qu'il y a impossibilité de satisfaire à la question par la relation qu'on a choisie à moins que des conditions particulières ne soient remplies ; ou bien cette equation étant à deux variables aura une intégrale transcendante et le plus souvent échappera aux méthodes connues. Ce procédé d'ailleurs ne conduit qu'à une seule solution et il faut ainsi les chercher l'une après l'autre sans apercevoir d'autre liaison entr'elles que l'équation différentielle proposée. Le point de vue sous lequel nous avons envisagé les équations à trois variables mène à des solutions qui réunissent à la plus grande généralité l'avantage de renfermer dans deux équations toutes les solutions algébriques que peuvent avoir les proposées. C'est M. Monge qui le premier les a présentées dans les mémoires de l'académie année 1784. Lorsqu'on regarde ces equations comme appartenant a des courbes qui sont le lieu de tous les contacts qui peuvent exister entre deux familles de surfaces courbes, cette considération fait disparaître les différentielles et donne le moyen de satisfaire en prenant des fonctions algébriques, sans être assujetti à de nouvelles intégrations lorsqu'on veut passer d'une solution à une autre. La méthode se présente d'elle même, il faut intégrer l'une quelconque des équations aux différences partielles qui représentent la proposée et assujettir le résultat à satisfaire à l'autre. C'est ainsi qu'on aura pour le 1er exemple

$$\left.\begin{array}{l} z=\phi(x^2+y^2) \\ 2\phi'(x^2+y^2).(x(x-a)+y(y-b))=\phi(x^2+y^2)-c \end{array}\right\}$$

(J'ai cru devoir désigner ces systèmes d'équations sous le nom d'ensemble des solutions de la proposée)

Pour le 2ième,

$$\left.\begin{array}{l} z=\phi\left(\frac{x}{y}\right) \\ 1+\phi^4\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^4}\right\}=\frac{a^2}{\phi^2(\frac{x/y}{)}} \end{array}\right\}$$

Pour le 3e on aurait

$$\left.\begin{array}{l} z=\phi(x^2+y^2) \\ 1+4\phi'^2(x^2+y^2).(x^2+y^2)=a^2 \end{array}\right\}$$

d'où on tirerait $\phi'(x^2+y^2)=\frac{\sqrt{a^2-1}}{2(x^2+y2)^{1/2}}$ et multipliant les deux membres par $2xdx+2ydy$ il en résulterait $\phi(x^2+y^2)=(\sqrt{a^2-1})\sqrt{x^2+y^2}$, résultat qui s'accorde avec celui de l'article précédent. Ces équations sont aussi générales que les équations différentielles qu'elles représentent puisqu'elles n'en sont que des transformations et qu'on reviendra au dernières en éliminant la fonction arbitraire introduite par l'integration aux différences partielles. D'ailleurs si on voulait déterminer cette fonction arbitraire en se donnant une relation telle que $y=\int Pdx$ on retomberait encore dans la proposée. On voit encore qu'en prenant pour ϕ une fonction algébrique on arrivera toujours à un résultat algébrique. Lorsqu'on determine la forme de ϕ, alors on considère seulement une des surfaces de la premiere famille, et il s'en suit la détermination de celle de la seconde qui touche l'autre dans une des courbes à double courbure cherchée. On voir par la que les surfaces sont liées deux à deux par l'équation différentielle proposée. J'ai donc cru devoir présenter cette nouvelle question sur les equations à trois ou un plus grand nombre de variables qui ne satisfont pas aux équations de condition, trouver parmi le nombre infini de solutions dont elles sont susceptibles celles qui sont algébriques : et si nous nous bornons à trois variables trouver autant de courbes algébriques qu'on voudra qui satisfassent au problème proposé. On aperçoit ici une analogie entre cette partie du calcul intégral et l'analyse algébrique indéterminée, où on limite le nombre des solutions en exigeant qu'elles soient en nombres entiers.

Art. XIV.

Je vais exposer ici quelques remarques qui pourront conduire à la solution des problèmes que je viens d'indiquer dans beaucoup de cas. Prenons l'équation $Mdz+Pdx+Qdy=0$; si on y substitue pour dz, $pdx+qdy$ elle pourra être représentée par les deux équations suivantes qui sont aux différences partielles $\left.\begin{array}{l} Mp+P=0 \\ Mq+Q=0 \end{array}\right\}$ et si l'on élimine M entre les deux dernières on aura $Pq-Qp=0$. (M. Monge a donné ces équations dans les Mem. de l'académie pour 1784.) Si l'on intègre l'une quelconque d'entre'elles et qu'on assujettisse le résultat à satisfaire à l'une des des deux autres on aura l'ensemble des solutions de la proposée, qui sera sous une forme algébrique si l'équation qui aura été intégrée a pu l'être algébriquement. Mais l'intégration des équations aux différences partielles que nous venons de poser depend par le théorème de M.

Delagrange de celle des équations à deux variables

$$\left.\begin{array}{l} Mdz+Pdx=0 \\ Mdz+Qdy=0 \\ Pdx+Qdy=0. \end{array}\right\}$$

Si l'une d'entr'elles a une intégrale algébrique on déterminera l'ensemble des solutions de la proposée sous une forme algébrique. Au reste je ne crois pas qu'on puisse conclure de ce qu'aucune des équations précédentes n'aurait une intégrale algébrique, que la proposée ne saurait avoir de solutions algébriques, car le système d'équations que nous avons employé pour la représenter n'est pas d'une forme nécessaire ; on peut prendre à sa place deux autres équations aux différences partielles, telles qu'étant combinées avec $dz = pdx+qdy$ elles produisent la proposée par l'élimination de p et de q. Il peut arriver qu'en éliminant entre $\left.\begin{array}{l} Mp+P=0 \\ Mq+Q=0 \end{array}\right\}$ quelque fonction commune on obtienne un résultat intégrable algébriquement. Si la proposée ne renferme pas de radicaux, on peut prendre pour la représenter deux équations linéaires aux différences partielles, avec des coefficiens indéterminés telles que $\left.\begin{array}{l} Kp+Gq+h=0 \\ K'p+G'q+h'=0 \end{array}\right\}$ desquelles éliminant p et q conjointement avec $dz = pdx + qdy$ on obtiendra un résultat qu'on comparera avec la proposée mise sous la forme suivante $dz = -\frac{P}{M}dx - \frac{Q}{M}dy$. Il viendra deux équations et on pourra essayer de déterminer les coefficiens qui resteront arbitraires pour que $\left.\begin{array}{l} Kdz+hdx \\ Kdy-Gdx \end{array}\right\}$ ou $\left.\begin{array}{l} K'dz+h'dx \\ K'dy-G'dx \end{array}\right\}$ soient intégrables algébriquement puisque c'est à ces équations que se réduit l'intégration de celles qu'on vient de poser aux différences partielles.

Art. XV.

Les équations élevées à trois variables qu'on peut mettre sous une forme linéaire relativement aux différentielles appartiennent aux courbes de contact des familles de surfaces courbes. En effet si on a deux équations algébriques entre $p; q; x; y$ et z et qu'on en tire les valeurs de p et de q pour les substituer ensuite dans $dz = pdx + qdy$ on aura un résultat qui pourra se présenter sous une forme élevée par l'évanouissement des radicaux, mais qui sera toujours susceptible d'être remis sous une forme linéaire relativement aux différentielles. L'équation $z^2(ydx - xdy)^2 + (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2)^2 - a^2(ydx - xdy)^2 = 0$ est dans ce cas. En la résolvant par rapport à dz on aura

$$dz = \frac{z(ydy+xdx)}{y^2+x2} \pm \left(\frac{ydx-xdy}{z(y^2+x^2)}\right)\sqrt{-z^4+(a^2-z^2)(y^2+x^2)}$$

et par conséquent ą

$$-\frac{P}{M} = \frac{zx}{x^2+y^2} \pm \frac{\frac{y}{z}\sqrt{-z^4+(a^2-z^2)(y^2+x^2)}}{x^2+y^2}$$

$$-\frac{Q}{M} = \frac{zy}{x^2+y^2} \pm \frac{\frac{x}{z}\sqrt{-z^4+(a^2-z^2)(y^2+x^2)}}{x^2+y^2}$$

Si nous mettons au lieu de $-\frac{P}{M}$, $-\frac{Q}{M}$ les coefficiens différentiels p et q nous aurons pour représenter la proposée des équations analogues à celles de l'article précédent. Elles se présentent sous une forme très compliquée et qui probablement échapperait aux méthodes, mais si on élimine le radical on arrivera cette équation très simple $z = px + qy$ qui appartient aux surfaces coniques dont le sommet est à l'origine. Si on assujettie l'intégrale de cette dernière à satisfaire à l'une des équations en p ou en q on aura l'ensemble des solutions de la proposée sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} z = y\phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{zx}{x^2+y^2} \pm \frac{\frac{y}{z}\sqrt{-z^4+(a^2-z^2)(y^2+x^2)}}{x^2+y^2} \end{array}\right\}$$

mais on peut obtenir un résultat sans radicaux en ajoutant ensemble les valeurs de p^2 et de q^2 prises dans les équations primitives. On a alors $p^2+q^2=\frac{a^2-z^2}{z^2}$. L'équation proposée peut donc être regardée comme appartenant à toutes les courbes de contact des deux familles de surfaces courbes représentées par $\left.\begin{array}{l} px+qy=z \\ 1+p^2+q^2=\frac{a^2}{z^2}; \end{array}\right\}$ ce qui donne pour l'ensemble de ses solutions

$$\left.\begin{array}{l} z = y\phi\left(\frac{x'}{y}\right) \\ 1+\phi'^2\left(\frac{x'}{y}\right)+\left\{\phi\left(\frac{x'}{y}\right)-\frac{x'}{y}\phi'^2\left(\frac{x'}{y}\right)\right\}^2 = \frac{a^2}{y^2\phi^2\left(\frac{x'}{y}\right)} \end{array}\right\}$$

En prenant pour ϕ des fonctions algébriques on aura autant de solutions algébriques de la proposée qu'on le voudra. La question qui nous occupe maintenant ne peut être résolue par d'autre surface que par le plan des $x'y$ car c'est la seule qui soit commune à la famille des cônes dont le sommet est à l'origine, et à celle des surfaces courbes dont toutes les normales sont constantes par rapport au plan des x, y. Quant aux équations élevées qui ne peuvent être ramenées à la forme linéaire, il suit de ce qu'on a vu au commencement de cet article qu'elles ne sauraient appartenir à des courbes de contact, et l'on n'est pas encore parvenu a trouver généralement les ensembles de leurs solutions. Mais M.Monge a donné dans le mémoire deja cité des théorèmes, qui dans beaucoup de cas font connaître l'ensemble des solutions de ce genre d'équation sous une forme algébrique. Il a remarqué de plus une correspondance singulière entr'elles et les equations aux différences partielles, telle que lorsqu'on a sous une forme donnée l'intégrale de celles-ci on arrive à l'ensemble des solutions des autres et réciproquement. Les moyens sont encore plus bornés pour les équations des ordres supérieurs et M.Monge a traité celles qui appartiennent aux courbes que nous avons remarquées à la fin de l'article VI et dont la courbure est constante. Les questions que nous avons indiquées sur les courbes tracées sur des surfaces développables conduisent à des équations différentielles à trois variables, élevées à des ordres supérieurs dont il serait peut-être intéressant de connaître l'ensemble des solutions sous une forme algébrique.

5 Les manuscrits de Fourier

Parmi les nombreux manuscrits de Fourier, un nombre assez restreint est consacré à la géométrie. Voici la description des manuscrits du tome XIX (BNF, manuscrits français), et la transcription des textes consacrés aux courbes à double courbure.

- Le premier texte concerne les principes de la géométrie. Fourier définit (ou présente) des définitions de bas, comme les notions de volume, de surface, de ligne.... (p. 3)
- La note suivante est importante : elle s'intitule « *Notes sur les développées des lignes courbes* »
- Des manuscrits sur les notions élémentaires de la géométrie, sur les éléments de la géométrie sphérique, sur les éléments de géométrie plane fondés sur la géométrie sphérique.
- Une nouvelle note intéressante intitulée « *Sur les propriétés des lignes courbes* »

Notes sur les développées des lignes courbes

Un polygone d'un nombre indéfini de côtés se présente d'autant plus exactement comme une courbe que la valeur de chaque côté est plus petite en sorte que la ligne courbe est limite d'une suite de polygones variables ; c'est pour cette raison qu'on aperçoit les propriétés des lignes courbes en cherchant celles du polygone et déterminant ce que deviennent les propriétés des polygones à mesure que le nombre de côtés devient plus grand et la valeur de chaque côté plus petite.

Si chaque polygone que l'on considère n'a point tous ses côtés dans le même plan, les propriétés des limites seront celles des courbes à double courbure.

Supposons que sur une ligne courbe on marque divers points successifs m, m', m'', m'''' en sorte que l'arc sera divisé entre un certain nombre de parties, que l'on tire des cordes mm', $m'm''$, ... on forme un polygone inscrit dans la courbe. Si l'on prend le milieu de chaque arc tel que mm' et que l'on tire des cordes successives on formera un second polygone inscrit. Si l'on continue à tout diviser on obtiendra un troisième polygone . La figure de l'un de ces polygones approche d'autant plus celle de la ligne courbe que le nombre des côtés est plus grand. Or on va reconnaître des propriétés qui appartiennent à l'un quelconque de ces polygones et on saura donc qu'elles appartiennent aussi à la courbe.

On aurait pu faire varier la suite des polygones autrement qu'en divisant les arcs en parties égales et cette loi de variation du polygonal est absolument arbitraire.

On peut remarquer qu'un polygone dont les côtés ne sont pas tous dans le même plan est affecté de deux flexions : 1° chaque côté faisant avec le suivant un certain angle, on peut considérer séparément la suite de ces angles. 2° on pourra déterminer comment le contour du polygone a fléchi et si l'on ajoute successivement tous ces angles la somme pourra indiquer combien tout le contour a été fléchi jusqu'au point où on s'arrête, on appellera cette somme la mesure de la flexion du contour.

Si l'on prolonge chaque côté du polygone dans le même sens on aura la suite des tangentes qui d'un côté s'éloigneront indéfiniment du polygone et de l'autre viendront tous aboutir à cette courbe. Deux tangentes consécutives sont dans un même plan puisqu'elles se coupent mais le plan d'une troisième tangente et de la seconde ne sera pas le même que le plan de la seconde tangente et de la première. On appellera plan osculateur celui qui passe par deux tangentes consécutives. En ne considérant de ces plans que la partie comprise entre deux tangentes, on voit que la suite de ces plans formera un polyhèdre développable car fixant la première face on pourra faire tourner tout le polyhèdre restant sur la seconde tangente qui sert d'arête et ramener ainsi le second plan osculateur dans le même plan que le premier plan osculateur et continuer ainsi à développer le polyhèdre.

Le plan osculateur en un point donné est à proprement parler le plan dans lequel est la partie correspondante du polygone laquelle partie est composée de deux côtés, l'angle que fait un plan osculateur avec le plan osculateur suivant est la quantité dont le plan du polygone est fléchi en cet endroit. Si l'on considère la suite des angles que forment entre eux ces plans osculateurs on connaîtra combien le plan du polygone est fléchi et si l'on ajoute depuis un point de la courbe jusqu'à un autre la somme de ces angles on aura la nature de la flexion du plan du polygone entre deux points.

Si l'on développe le polyhèdre développable que nous avons formé plus haut, le polygone se trouvera tracé sur le plan et il est aisé de voir que l'angle entre deux côtés consécutifs que l'on appellera angle de contingence ne varie point pendant le développement du polyhèdre en sorte que la flexion du contour se retrouvera dans le polygone tracé sur le plan telle qu'elle était dans le polygone proposé non développé ; quant à la flexion du plan du polygone elle aura entièrement disparu par le développement. Cette flexion du plan se trouve séparément dans le polyhèdre développable, c'est la somme des inclinaisons successives de faces contiguës.

Le polygone étant invariable si on le place de manière que son plan en un point M corresponde à un plan fixe en sorte que le plan fixe et le plan osculateur se confondent puis qu'on fasse rouler le polygone sur le plan fixe de manière que ce polygone s'applique sur le plan fixe par son plan osculateur, on pourra remarquer la trace du polygone sur le plan fixe et cette trace sera comme il est aisé de le voir la même que celle dont nous avons parlé qui se trouve sur le plan de développement du polyhèdre.

Suivant ce que nous avons dit plus haut ces mêmes propriétés appartiennent à la ligne courbe qui est la limite du polygone variable. Ainsi une ligne courbe a en général deux courbures ou flexions, celle de son contour et celle de son plan.

Si l'on prolonge toutes les tangentes dans le même sens on formera une surface développable qui représentera après les développements une ligne plane qui a la même courbure de contour que la ligne proposée et qui est la trace qui resterait sur un plan fixe si l'on faisait rouler la ligne proposée sur ce plan.

Cette distinction des deux courbures d'une ligne courbe est particulièrement intéressante dans la théorie des développées.

Dans les lignes planes la flexion du plan est nulle et celle du contour se mesure par l'angle compris entre la normale au premier point et la normale au point où l'on s'arrête ce qui est évident. Cette flexion est ce qu'on appelle l'amplitude de l'arc de la courbe plane. Si l'on applique un fil sur un polygone non plan et que l'une des extrémités du fil étant fixée on développe successivement le fil par l'autre extrémité on décrira une suite d'arcs de cercle et la limite des cordes correspondantes formera un polygone dont les propriétés dépendent de celles du polygone proposé. On peut aussi supposer qu'on a prolongé toutes les tangentes de manière à former un polyhèdre développable sur lequel le polygone est appliqué et dont il est l'arête, que par un des sommets de l'angle du polygone on a élevé une perpendiculaire à l'extrémité du premier côté et laquelle perpendiculaire est dans le plan de la première face du polyhèdre développable jusqu'à la rencontre de la seconde tangente qu'en ce point et perpendiculairement à la seconde tangente on a mené une ligne dans la seconde face du polyhèdre c'est à dire dans le second plan osculateur que l'on continue ainsi à tracer sur le polyhèdre développable un polygone dont chaque côté est perpendiculaire à une tangente ou arête et se termine à la rencontre de l'arête suivante.

On formera ainsi sur le polyhèdre un polygone que l'on pourra considérer comme la développante du polygone proposé. Si on suppose que le polyhèdre est développé et qu'il porte la trace du polygone développé, il est aisé de voir que le développement du polyhèdre portera aussi la trace de la développante qui sera formée sur la plan de la même manière que nous avons décrite ci-dessus.

Soit s l'arc d'une ligne courbe depuis un point donné M jusqu'au point m, α la quantité de la flexion du contour depuis l'origine M, β la quantité correspondante de la flexion du plan. Comme ces trois quantités sont absolument arbitraires on supposera que β est une fonction donnée de α et que s est aussi une fonction connue de α en sorte que $s = F(\alpha)$ et $\beta = f(\alpha)$ sont les deux équations de la courbe (s, α et β étant zéro à l'origine) on voit qu'il n'y a aucune courbe dont la nature ne puisse être représentée par ces deux équations.
Si depuis l'origine M on développe l'arc s jusqu'au point m on formera une courbe développante dans laquelle s' représentera l'arc correspondant à s depuis M jusqu'à m', α' la quantité de la première courbure de cette développante jusqu'à m', β' la quantité correspondante de la courbure du plan de la développante, il est question de déduire les équations de la développante des deux équations de la développée.

Supposons que l'on ait construit la surface développable dont la ligne courbe est l'arête de rebroussement et qu'on ait développé cette surface on considérera quatre côtés successifs du polygone inscrit dont la figure de la courbe est la limite.

La première tangente et la seconde formeront un premier osculateur ou une première face du polyhèdre développable. La seconde tangente et la troisième donneront une seconde face, la troisième tangente et la quatrième donneront une troisième face, on supposera que les petits arcs de la courbe varient suivant une telle loi que $d\alpha$ soit constant. Ainsi rien n'empêche de supposer que les angles de contingence entr les côtés du polygone soient égaux et représentés par $d\alpha$. (voir la figure) sur la corde tangente et s'incline ainsi sur le prolongement du second plan osculateur ; la quantité de cette petite inclinaison est supposée égale à $d\beta$; on voit maintenant que le premier côté de la développante qui forme avec le second coté l'angle $d\alpha$ tant que les deux premiers plans osculateurs se confondent mais lorsque le premier s'incline de $d\beta$ sur le second l'angle de contingence de la développante n'est plus $d\alpha$, il s'agit de trouver la valeur de ca premier angle de contingence. De plus, le premier plan osculateur de la développante c'est à dire celui qui passe par le premier et le second côté de cette ligne, ce plan osculateur fera avec le premier plan osculateur de la développée un angle qu'il s'agit aussi de calculer ainsi que l'angle entre le premier plan osculateur de la développante et le second plan osculateur de la développée.

Si du point de la développante commun aux deux côtés on décrit un arc de cercle, on voit bien que la partie de cet arc qui se trouve dans la première face de la surface développable tourne en même temps que cette face sur la seconde tangente, il se formera de cette manière un triangle sphérique qui aura pour un des côtés 90^o pour un autre un moindre côté à savoir $90^o - d\alpha$ ou l'arc qui se trouvait compris dans la première face, pour troisième côté un petit arc qui mesurera la valeur du premier angle de contingence de la développée valeur que nous appellerons $d\alpha'$, de plus l'angle sphérique compris entre ce petit côté et le coté de 90^o sera l'angle entre le plan osculateur de la développante et le second plan osculateur de la développée et l'angle entre ce petit côté et le côté moindre que 90^o sera l'angle entre le premier plan osculateur de la développée, quant à l'angle sphérique entre le côté de 90^o et le côté moindre que 90^o, il est donné et égal à $d\beta$. (voir la figure)

La figure fait voir qu'on peut considérer le triangle sphérique composé de $d\beta$ et de $d\alpha$ qui se coupent à angle droit et de l'hypothénuse $d\alpha'$ et si l'on ajoute que ces angles sont infiniment petits on trouvera sur le champ.

$$d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

L'angle compris entre $d\alpha$ et $d\alpha'$ ou l'angle entre le premier plan de la développante et le premier plan de la développée a pour tangente $\frac{d\beta}{d\alpha}$ quant à l'angle entre $d\alpha$ et $d\beta$ c'est le complément de l'angle entre $d\beta'$ et 90^o ou entre le premier plan de la développante et le second plan de la développée, c'est pourquoi lorsque le triangle est différentiel ces deux angles sont les mêmes et leur tangente est $\frac{d\beta}{d\alpha}$, maintenant l'angle entre la premier plan de la développante et le premier de la développée étant $\arctan \frac{d\beta}{d\alpha}$ il s'ensuit que l'angle entre le second plan osculateur de la développante et le second plan osculateur de la développée sera

$$\arctan \frac{d\beta}{d\alpha}$$

plus la variation de cet arc ; or la différence de ces deux angles est l'angle compris entre les deux plans osculateurs consécutifs de la développante dont la différentielle de $\arctan \frac{d\beta}{d\alpha}$ est l'angle différentiel compris entre ces deux plans osculateurs consécutifs. Si on appelle $d\beta'$ l'accroissement de la seconde courbure de la développante, c'est à dire l'angle entre les deux plans osculateurs consécutifs on aura l'équation

$$d\beta' = d\arctan\frac{d\beta}{d\alpha}$$

ou

$$\beta' = C + \arctan\frac{d\beta}{d\alpha}$$

ou

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \tan(\beta' - C)$$

et si $\boxed{\frac{d\beta}{d\alpha}}$ représente la valeur initiale de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ on aura

$$\beta' = \arctan(\frac{d\beta}{d\alpha}) - [\arctan(\frac{d\beta}{d\alpha})]$$

On a trouvé ces deux équations

$$d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

et

$$\beta' = \arctan(\frac{d\beta}{d\alpha}) - [\arctan(\frac{d\beta}{d\alpha})]$$

on peut les construire comme il suit.

Supposons qu'il y ait entre β et α une relation donnée savoir $\beta = f\alpha$, il est clair que $d\alpha^2 + d\beta^2$ représente le carré de la différentielle de l'arc dans la courbe, que $\frac{d\beta}{d\alpha}$ représente la tangente de l'angle fait par la courbe avec l'arc des x et qu'ainsi $\arctan(\frac{d\beta}{d\alpha}) - \arctan(\frac{d\alpha}{d\beta})$ n'est rien autre chose que l'amplitude de l'arc Mm, ainsi α' est l'arc de la courbe et β' l'amplitude correspondante. Il en résulte cette proposition remarquable que la première courbure de la développante est représenté dans la courbe qu'exprime la relation entre les deux courbures de la développée par l'arc de cette courbe plane et que la seconde courbure de la développante est représentée en même temps par l'amplitude de cette courbe plane.

Si donc on construit par une courbe plane la relation des deux courbures d'une ligne, l'arc s de cette courbe et l'amplitude ϕ donneront la valeur de la première courbure de la développante l'autre de la seconde courbure, et si l'on construit l'équation entre s et ϕ regardées comme des coordonnées rectangles, la relation entre l'arc de cette seconde courbe et l'amplitude sera celle des deux courbures de la développante du second ordre ; c'est de cette manière que la relation entre les deux courbures varie d'une développante à la développante de l'ordre suivant. Les deux équations

$$d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

et

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \tan(\beta' + A)$$

de celles ci

$$d\alpha = d\alpha' \cos(\beta' + A)$$

$$d\beta = d\alpha' \sin(\beta' + A)$$

car si on ajoute ces deux après avoir quarré ou si l'on divise on trouve les deux premières. Ces deux premières donnent les équations de courbure de la développante lorsqu'on a celle de la développée et les deux dernières satisfont à la question réciproque. Une ligne courbe ayant une infinité de développées on voit que la relation entre les deux courbures de chaque développante est exprimée de la même manière.

Sur les propriétés des lignes courbes.

En considérant une ligne courbe comme la limite des polygones inscrits ou (ce qui est une autre manière d'exprimer la même idée) comme un polygone d'une infinité de côtés, on peut dire que deux points consécutifs sont en ligne droite et que trois qui se suivent déterminent cet angle qu'on a appelé dans les courbes angle de contingence, c'est l'angle infiniment petit compris entre deux tangentes voisines. (ou le supplément de l'angle compris entre deux côtés). Pareillement deux côtés consécutifs sont dans un même plan et si l'on prend trois côtés on aura deux plans celui où se trouve le premier et le second côté et le plan qui contient le $2^{\text{ième}}$ et le troisième côté. Ces deux plans (que l'on appelle plans osculateurs) forment entre eux un angle plan de contingence (qui est infiniment petit). La suite des angles de contingence et des angles plans de contingence dépendent de la nature de la ligne courbe. La première représente la courbure du contour de la courbe et la suite des angles plans représente la manière dont on a fléchi successivement le plan sur lequel on peut imaginer que la courbe avait été décrite. Ces deux flexions sont indépendantes l'une de l'autre, on peut les produire ou les faire disparaître séparément.

Concevant qu'on ait mené toutes les tangentes d'une ligne courbe et que l'on ait ainsi formé une surface développable dont cette ligne courbe est l'arête de rebroussement ou la limite, la suite des angles compris entre les plans de cette surface développable constitue ce que nous regardons comme la seconde flexion de la courbe. Si l'on développe sur un plan cette surface développable les angles compris entre les tangentes consécutives n'auront pas changés car on peut supposer que le développement successif de la surface s'est fait en faisant tourner le premier plan sur la tangente qui lui est commune avec le second puis les deux premiers plans réunis sur la tangente qui termine le second puis les trois premiers plans sur une troisième tangente ainsi de suite on trouvera sur le plan après développement de la surface une ligne plane dont la flexion sera la même que la première de l'arrête de rebroussement. Ces deux courbes auront la même longueur et la même courbure en sorte qu'on trouvera le rayon de courbure sur un des points de l'arrête de rebroussement en le prenant dans la courbe plane au point correspondant. on peut de même former séparément les deux flexions d'une ligne courbe. Il faut pour cela courber une ligne droite sur un plan, puis ayant mené les tangentes retenir le plan formé par deux premières et faire tourner infiniment peu le plan de toutes les autres tangentes en continuant ainsi on formera une surface développable qui aura pour limite la courbe qu'il s'agissait de construire, sa seconde flexion dépendra de celle des plans de la surface développable et sa première sera celle que l'on aura donné à la ligne sur le plan. Le nombre des angles de contingence et des angles formés par les plans osculateurs croit avec celui des côtés infiniment petits en sorte que la quantité de la flexion du contour et celle de la flexion des plans varie avec la longueur de la courbe. Nous mesurerons cette quantité en ajoutant tous les angles compris entre deux côtés consécutifs depuis un point fixe de la courbe jusqu'à un point indéterminé, nous représenterons la somme par ϕ pareillement nous concevront qu'on ajoute depuis l'origine tous les angles compris entre les plans osculateurs et nous indiquons la somme par ψ. Ainsi ϕ et ψ sont des arcs qui expriment les valeurs des deux flexions. $d\phi$ est l'angle compris entre deux tangentes et $d\psi$ est l'angle compris entre deux plans osculateurs, ϕ et ψ sont des fonctions de la longueur s de l'arc de la courbe. Il est visible que si ces fonctions étaient connues la courbe serait déterminée (en effet on pourrait au moyen de ces fonctions continuer la description de la courbe depuis un point quelconque puisqu'on trouverait pour ce point la position du nouveau plan osculateur et sur ce plan la position de la nouvelle tangente quant au ds il est arbitraire.)

[note en marge] *elle ne dépend d'aucune construction qui lui soit étrangère. Si l'on prend pour origine de toutes les courbes le point où le rayon de courbure a la moindre valeur possible il ne restera plus rien d'arbitraire dans les équations.*

Dans une courbe plane une seule de ces équations suffit. Soit donc $s = F(\phi)$ l'équation d'une courbe plane on trouverait aisément son rayon osculateur. En effet le triangle isocèle qui ayant au sommet le centre de courbure a pour base l'élément ds de l'arc a pour angle au sommet l'angle même de contingence que nous avons appelé $d\phi$ donc en nommant R le rayon de courbure on aura $ds = Rd\phi$ ainsi $R = \frac{ds}{d\phi}$ ou $F'(\phi)$ que l'on indique quelque fois par s'.

Si la courbe n'est point plane et qu'elle ait pour équation $s = F(\phi)$, $\psi = f(\phi)$ on considérera la courbe plane qui aurait pour équation $s = F(\phi)$ et comme la flexion est la même que la première de la courbe proposée il s'ensuit que le rayon de courbure qui dans la courbe plane convient à la longueur s est le même que celui qui convient à la même longueur dans la proposée. On aura donc dans toutes les courbes planes ou non $R = s'$ pour la valeur du rayon de courbure.

Nous pouvons maintenant rechercher quelles sont dans les courbes en général les propriétés analogues à celles qu'Huygens a reconnu dans les courbes planes. Si l'on élève les normales d'une courbe plane elles forment par leur intersection une ligne qui est le lieu des centres de courbure et qui est la développée de la proposée c'est à dire qu'un fil qui serait appliqué sur la courbe formée par les rencontres des normales et que l'on développerait pourrait engendrer la proposée, il n'en est pas de même d'une courbe à double courbure. Si l'on mène tous ses plans normaux et que les intersections subsistent puis que de chaque point de la courbe on abaisse une perpendiculaire sur l'intersection qui est dans le plan normal à ce point on trouvera tous les centres de courbure aux points de rencontre de ces perpendiculaires avec les intersections. De plus chacune de ces intersections rencontrera la précédente et la suivante par ce qu'étant ainsi prises deux à deux elles sont dans un même plan, les points de rencontre formeront une courbe qui sera l'arrête de rebroussement de la surface développable formée de la suite de toutes ces intersections, le lieu des centres de courbure ne sera point la développée de la proposée mais l'on trouvera une développée en développant sur un plan la surface formée par les intersections puis traçant sur ce plan une ligne droite. La courbe que cette droite formera sur la surface développable sera telle que si on l'entoure d'un fil on pourra par le développement de ce fil engendrer la proposée, il suffit que la direction du fil rencontre en un point la courbe proposée et comme on peut satisfaire à cette condition d'une infinité de manières il s'en suit que la proposée a une infinité de développées. La surface développable formée des intersections des plans normaux a pour arrête de rebroussement un ligne courbe qui est le lieu de tous les centres des sphères qui passent par quatre points consécutifs de la courbe, ces propriétés sont connues depuis longtemps, elles ont été données pour la première fois par Monge dans un mémoire à l'académie des sciences de Paris en 1771.

Il résulte de là que le lieu des centres de courbure circulaire, la développée et le lieu des centres de courbure sphérique sont en général des courbes différentes. Considérons d'une manière plus particulière cette dernière arrête de rebroussement. On voit d'abord que la surface développable engendré par le prolongement de ses tangentes étant la même que celle qui est formée par les intersections dont nous avons parlé, tout plan normal à la courbe proposée est osculateur à l'arrête en sorte qu'il passe par deux côtés consécutifs de cette arrête comme la ligne normale à une courbe plane passe par deux points consécutifs de la développée. de plus la tangente de l'arrête est toujours perpendiculaire à un plan osculateur de la proposée car cette tangente est l'intersection de deux plans normaux et chacun de ces deux plans étant perpendiculaire à l'un des deux côtés qui se rencontrent est aussi perpendiculaire au plan de ces deux côtés ou au plan osculateur donc l'intersection est perpendiculaire au plan osculateur ainsi la tangente de l'arrête est normale au plan osculateur de la proposée. (Réciproquement chaque tangente de la proposée est normale au plan osculateur de l'arrête car le plan normal auquel cette tangente est perpendiculaire est un des plans de la surface développable c'est-à-dire un plan osculateur de l'arête.)[20]

En effet un point du plan décrira une partie infiniment petite de la base d'un cône droit circulaire dont l'axe sera la tangente autour de laquelle se fait actuellement le mouvement ainsi le plan osculateur de l'arrête le quel tourne en s'appliquant continuellement sur la surface développable formée par les tangentes de cette arrête demeure toujours normal à la courbe résultante de tous les petits arc ainsi décrits. Si donc on choisit pour point décrivant celui où le plan osculateur rencontre la proposée il ne pourra pas décrire une autre courbe que cette proposée. Tout autre point décrirait pendant le mouvement du plan une courbe continuellement parallèle à la proposée.

Chaque élément de la développée d'une courbe plane étant perpendiculaire à un élément de la développante la suite des angles de contingence ou la flexion est la même dans les parties correspondantes des deux courbes. Il est donc naturel de comparer les flexions de la proposée avec celle de la ligne qui est le lieu de ses centres sphériques.

D'abord il est visible que l'angle compris entre deux plans normaux est égal à l'angle compris entre les deux côtés auxquels ces plans sont perpendiculaires car on sait que si l'on abaisse d'un point pris entre deux plans une perpendiculaire sur l'un et une perpendiculaire sur l'autre de ces plans l'angle entre les perpendiculaires mesure l'angle entre les plans. Les angles de contingence de la proposée sont donc les mêmes que les angles formés par les prolongements des plans normaux qui forment la surface développable c'est à dire par les prolongements des plans osculateur de l'arrête. Or ce sont les angles compris entre ces plans osculateurs qui constituent la seconde flexion de l'arrête donc cette seconde flexion est précisément la même que la première de la courbe proposée. Pour trouver la première flexion de l'arrête remarquons que si on prolonge deux de ses tangentes chacune d'elles est comme nous l'avons (vu) plus haut perpendiculaire au plan osculateur de la courbe proposée. C'est pourquoi si ces tangentes sont consécutives comme elles seront des perpendiculaires abaissées d'un même point sur deux plans, l'angle qu'elles forment entre elles mesurera l'angle plan. Or cet angle compris entre deux plans osculateur appartient à la seconde flexion de la proposée et l'angle compris entre les deux tangentes de l'arrête à la première d'où il suit que la première flexion de l'arrête est la seconde de la proposée comme nous avons vu que la seconde de l'arrête est la première de la proposée. Ainsi ces deux courbes n'ont fait qu'échanger leurs flexions.

Il résulte de là que si l'on prend le lieu des centres sphériques de la ligne qui est le lieu des centres sphériques de la proposée cette seconde arrête aura les mêmes flexions que la proposée et chacune de ses éléments sera parallèle aux éléments correspondant de la proposée car la tangente de cette seconde arrête serait comme nous l'avons remarqué perpendiculaire au plan osculateur de la première et chaque côté de la proposé est perpendiculaire au plan osculateur de la première arrête c'est à dire que le côté de la proposée et le côté correspondant

[20]note en marge : Chaque point de l'arrête est commun à trois plans normaux comme chaque point de la développée d'une courbe plane est commun à deux lignes normales. De plus, si l'on applique une ligne droite sur la développée d'une courbe plane et qu'on fasse tourner cette droite sans qu'elle cesse d'être tangente un de ses points décrira la proposée, et un point quelconque décrira une ligne courbe dont celle sur laquelle tourne la droite est aussi la développée. De même si l'on applique un plan sur l'arrête de rebroussement que nous considérons et si on fait mouvoir sur cette courbe sans qu'il cesse d'être osculateur , un point de ce plan décrira la courbe proposée et un point quelconque du plan décrira une courbe dont cette même arrête de rebroussement sera aussi le lieu des centres sphériques.

de la troisième arrête sont tous les deux perpendiculaires au même plan. On peut continuer ainsi de construire des lignes dont chacune soit le lieu des centres sphériques de la précédente. Les flexions ϕ et ψ demeureront les mêmes et paraîtront alternativement dans l'ordre direct et dans l'ordre renversé. Revenons maintenant aux développées ordinaires et supposons qu'au fil appliqué sur une courbe à double courbure de même longueur et fixé à une extrémité soit développé de manière à demeurer toujours tangent son autre extrémité décrira la développante jusqu'à ce que le fil devient tangent au point où il est attaché. Si l'extrémité du fil qui a décrit la développante eut été fixée à la courbe et que le fil eut été développé par l'autre bout on aurait décrit une autre développante qui a avec la première une relation fort simple.

Soit p l'arc de la développée, ϕ sa première flexion et S l'arc de la développante qui correspond à l'arc s c'est à dire qui est décrit lorsque le fil devient tangent à l'extrémité de l'arc s, il est visible que l'accroissement dp de l'arc décrit est la base d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet est $d\phi$ et la longueur est l'arc développé s ainsi $dp = sd\phi$. Si le fil tangent eut été développé par l'autre extrémité et que l'on représente par q l'arc de l'autre développante qui est décrit lorsqu'il ne reste plus à développer que l'arc s on trouvera de même $dq = sd\phi$ ainsi $p = \int sd\phi$ et $q = \int sd\phi$ mais l'une de ces intégrale doit s'évanouir lorsque $s = 0$ et être complette lorsque s sera égal à l'arc entier S l'autre intégrale commence lorsque $s = S$ et finit quand $s = 0$ c'est pourquoi si P, S,Q représentent les valeurs complettes des indéterminées et que s' représente une fonction telle... [21]

Notes sur les propriétés des lignes courbes.

On a appelé angle de contingence celui qu'on suppose être formé par deux éléments consécutifs d'une courbe.

1°. Si la courbe est plane et qu'on ait une équation entre les coordonnées rectangulaires il sera aisé d'avoir la valeur différentielle de cet angle de contingence.ϕ désignant l'angle entre l'élément de la courbe et la ligne des abscisses on a $\tan\phi = \frac{dy}{dx} = p$ il est évident que

$$dy = dx\tan\phi \qquad dy = ds\sin\phi \qquad dx = ds\cos\phi$$

de la première équation on tirera la valeur cherchée de $d\phi$ en différentiant

$$\frac{d\phi}{\cos^2\phi} = dp \qquad \text{or} \qquad \cos^2\phi = (\frac{dx}{ds})^2$$

donc

$$d\phi = dp\frac{dx^2}{ds^2} = dp\left(\frac{dx^2}{dx^2+dy^2}\right) = \frac{dp}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{dp}{1+p^2}$$

[22] ρ étant le rayon de courbure et l'angle entre deux normales étant le même que l'angle de contingence on a $\rho d\phi = ds$ ou

$$\rho = \frac{ds}{d\phi} = \frac{ds^3}{dpdx^2} = \frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp} = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$$

2° Si une courbe quelconque étant projetée sur le plan de x et y on trouvera par ce qui précède l'angle de contingence de la projection. $y = f(x)$ étant l'équation de la projection on

[21] Le manuscrit s'arrête là, en milieu de page.

[22] dans la marge : angle de contingence $= \frac{dp}{1+p^2}$ $(p = \frac{dy}{dx})$

aura

$$\frac{f''(x)dx}{1+f'x^2}$$

pout la valeur de cet angle de contingence. Soit σ l'arc de la projection sur le plan des x et y et supposons qu'outre l'équation $y=f(x)$ on ait pour seconde équation de la courbe $z=F(\sigma)$ il est évident que si l'on développait la surface cylindrique qui a pour base la projection σ serait l'abscisse et z l'ordonnée la courbe proposée qui est tracée sur cette surface cylindrique aura pour angle de contingence

$$\frac{F''(\sigma)d\sigma}{1+(F'\sigma)^2}$$

on peut avoir une autre expression de cet angle de contingence savoir

$$d\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma^2}{ds^2}$$

or $d\sigma^2=dx^2+dy^2$ et la valeur précédente devient

$$\frac{dx^2+dy^2}{dx^2+dy^2+dz^2}d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)$$

Si on suppose $y=fx$ et $z=Fx$ pour les équations de la courbe l'expression précédente se réduira à

$$\frac{1+f'(x)^2}{1+f'(x)+F'(x)^2}d\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right)$$

ou toute réduction faite à

$$\frac{\{1+f'(x)^2\}F''(x)-F'(x)f'(x)f''(x)}{\{1+f'x^2+F'(x)^2\}(1+f'x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Le calcul de l'angle $d\omega$ se réduit aux équations suivantes

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dx^2+dy^2\\ ds^2 &= d\sigma^2+dz^2\\ d\omega &= \frac{d\sigma^2}{ds^2}d\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver l'angle de contingence de la courbe proposée. Le premier plan vertical 1 demeurant fixe on fera tourner le second plan 2 sur la seconde verticale d'une quantité $d\phi$ qui est l'angle de contingence de la projection il s'agira de connaître la position du second côté 2 de la courbe proposée, ω étant l'angle entre le premier côté et la première verticale on voit que cet angle diminue de $d\omega$.

Maintenant l'arc ω formé par le second plan vertical demeure fixe et l'arc $\omega-d\omega$ tournera sur la seconde verticale de sorte qu'il y aura un triangle sphérique formé de l'arc ω, de l'arc $d\omega$ et de l'arc qui mesure l'angle de contingence cherché que nous désignerons par $d\psi$; l'angle plan entre l'arc ω et l'arc $\omega-d\omega$ est $d\phi$ ainsi il est aisé de trouver le côté opposé $d\psi$. Une formule connue donne l'équation suivante :

$$\sin^2(\frac{1}{2}d\psi)=\sin^2\frac{1}{2}\{\omega-(\omega-d\omega)\}+\sin\omega\cdot\sin(\omega-d\omega)\sin^2\frac{1}{2}d\phi$$

(figure) En réduisant les termes différentiels on aura

$$d\psi^2 = d\omega^2 + d\phi^2 \sin^2\omega$$

quant à l'angle ω il est tel que $d\sigma = ds\sin\omega$ et $dz = ds\cos\omega$ donc

$$d\psi^2 = d\omega^2 + d\phi^2.\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

et l'on a aussi $d\phi = \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ on aura donc pour déterminer σ, ϕ, s, ω et ψ les équations suivantes

$$\begin{aligned}
d\sigma^2 &= dx^2 + dy^2 \\
d\phi &= \frac{dx^2}{d\sigma^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
ds^2 &= d\sigma^2 + dz^2 \\
d\omega &= \frac{d\sigma^2}{ds^2} d\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \\
d\psi^2 ds^2 &+ d\omega^2 ds^2 + d\phi^2 d\sigma^2
\end{aligned}$$

Si ρ est le rayon de courbure de la ligne proposée on aura $ds = \rho d\psi$ ainsi

$$\rho^2 = \frac{ds^4}{d\omega^2 ds^2 + d\phi^2 d\sigma^2}$$

dans le triangle sphérique dont on a parlé plus haut l'angle entre ω et $d\psi$ est l'angle m que fait le plan osculateur avec le premier plan vertical, le côté opposé est $\omega - d\omega$ et l'angle n opposé au côté ω est celui du plan osculateur avec le second plan vertical. On trouve en calculant le triangle sphérique que

$$\begin{aligned}
\sin m &= \frac{d\phi}{d\psi}\sin(\omega - d\omega) \\
\sin n &= \frac{d\phi}{d\psi}\sin(\omega)
\end{aligned}$$

(ces deux angles ne doivent différer en effet que d'une quantité différentielle.)

En représentant par $d\omega$ l'accroissement de ω lequel accroissement est ici négatif on aura

$$\begin{aligned}
\sin m &= \frac{d\phi}{d\psi}\sin(\omega + d\omega) \\
\sin n &= \frac{d\phi}{d\psi}\sin(\omega)
\end{aligned}$$

d'un autre côté

$$\cos^2 n = 1 - \left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)^2 \sin^2\omega = \frac{d\psi^2 - d\phi^2\sin^2\omega}{d\psi^2} = \frac{d\omega^2}{d\psi^2}$$

ainsi

$$\cos n = \frac{d\omega}{d\psi}$$

si la valeur de $d\omega$ est négative et que l'angle n soit aigu on aura $\cos n = -\frac{d\omega}{d\psi}$. Maintenant la différence $\sin m - \sin n = \frac{d\phi}{d\psi} \cos\omega d\omega$ or généralement $d(\sin u) = du \cos u$ de sorte que la différence des arcs m et n pourra être déduite de la différence des sinus et l'on aura

$$m - n = \frac{d\phi}{d\psi} \frac{\cos\omega d\omega}{\cos m} \text{ ou } \frac{d\phi}{d\psi} \frac{\cos\omega d\omega}{\cos n} \text{ ou } \frac{d\phi}{d\psi} \cos\omega d\omega$$

ainsi

$$n = m - \frac{d\phi}{d\omega} \cos\omega d\omega$$

ou

$$n = m \pm d\phi \cos\omega$$

d'un autre côté si l'on veut calculer l'angle que le second plan osculateur avec le second plan vertical il faut différentier la valeur de $\sin m$ ou ce qui revient au même à cause des réductions différentielles la valeur de $\sin n$ de sorte que l'on a

$$dn \cos n = \frac{d\phi}{d\omega} \cos\omega d\omega + \sin\omega d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)$$

ou

$$dn = \frac{d\phi}{d\omega} \frac{\cos\omega}{\cos n} d\omega + \frac{\sin\omega}{\cos n} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)$$

appelant m' l'angle m varié on aura

$$dm = \frac{d\phi}{d\omega} \frac{\cos\omega}{\cos n} d\omega + \frac{\sin\omega}{\cos n} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)$$

comme on suppose ici que l'angle n est aigu et que cet angle est évidemment plus grand que m il suit que l'on a

$$n = m + d\phi \cos\omega$$

et

$$m' = m - d\phi \cos\omega + \frac{\sin\omega}{\sin n} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right)$$

or $m' - n$ sera l'angle entre les deux plans osculateurs consécutifs donc cet angle est égal à

$$\begin{aligned} 2d\phi \cos\omega - \frac{\sin\omega}{\sin n} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right) &= 2d\phi \cos\omega - \frac{d\psi}{d\phi} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right) \\ &= 2d\phi \cos\omega - d1\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right) \\ &= 2d\phi \cos\omega - d1\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right) \\ &= 2d\phi(\frac{dz}{ds} - \frac{d\psi}{d\phi} d\left(\frac{d\phi}{d\psi}\right) \end{aligned}$$

appelant donc du l'angle entre deux plans osculateurs on aura [23]

On peut se poser un problème plus général : une courbe étant tracée sur le plan développé

[23] dans la marge D. il reste à examiner de manière autre le calcul des angles m, n où il parait s'être glissé quelque erreur R.

d'une surface développable il s'agit de trouver la courbe formée par cette trace sur la surface développable elle même. Il faudra faire tourner le plan (fig) 2 d'une quantité $d\beta$ sur la seconde tangente commune au plan 1 ou calculer l'angle que fera le côté 2 avec le côté 1 ce sera l'angle de contingence de la courbe. Si les deux premières tangentes de la courbe qui engendre la surface développable forment un angle $d\alpha$ et si les deux tangentes de la trace forment un angle $d\gamma$ il est évident que l'angle ω augmentera de $d\alpha + d\gamma$ on aura un triangle sphérique formé de l'arc $\omega + d\alpha$ placé dans le prolongement du plan fixe 1, de l'arc $\omega + d\omega$ ou $\omega + d\alpha + d\gamma$ et d'un angle $d\psi$ qui mesure l'angle de contingence de la courbe. On trouvera comme ci-dessus

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}d\psi\right) = \sin^2\left(\frac{1}{2}d\gamma\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}d\beta\right)\sin^2\omega$$

ou

$$d\psi^2 = d\gamma^2 + d\beta^2 \sin^2\omega$$

l'angle aigu p formé par les plans des côtés 1 et 2 avec le plan 1 sera

$$\frac{d\beta}{d\psi}\sin(\omega + d\alpha + d\gamma) = \sin p$$

l'angle aigu q formé par les plans des côtés 1 et 2 avec le plan 2 sera

$$\frac{d\beta}{d\psi}\sin(\omega + d\alpha) = \sin q$$

on a aussi

$$\cos^2 p = \frac{d\psi^2 - d\beta^2\sin^2(\omega + d\alpha + d\gamma)}{d\psi^2} = \frac{d\gamma^2}{d\psi^2} + \text{ une quantité différentielle}$$

$\cos p = \frac{d\gamma}{d\psi}$, $\sin p = \frac{d\beta}{d\psi}$ ainsi en rapportant la position du plan osculateur à celle du plan 1 on trouvera une expression finie. Le signe du cosinus (?) est positif pour désigner (?) l'angle aigu. La différence $\sin p - \sin q$ étant une quantité différentielle on aura

$$p - q = \frac{\sin p - \sin q}{\cos p}$$

d'où

$$p - q = \frac{d\beta}{d\psi}[\sin(\omega + d\alpha + d\gamma) - \sin(\omega + d\alpha)]$$

la différence des sinus qui est ici facteur étant une quantité différentielle aura pour l'expression de cette différence le produit de $d\gamma$ différence des arcs par le cosinus de l'un des arcs ainsi

$$p - q = \frac{d\beta}{d\psi}$$

en mettant pour $d\psi\cos p$ la valeur $d\gamma$, $p - q = \cos\omega d\beta$ on pourra trouver maintenant l'angle que fait le plan des côtés 2 et 3 avec le plan 2. cet angle n'est autre chose que l'angle p varié. Il s'agit donc dans la valeur de $\sin p$ de faire varier les rôles (??) et l'on voit que l'on pourra se servir de la valeur finie de $\sin p$ (?) puisque la différence entre les deux résultats ne pourrait être qu'une différentielle du 2ième ordre.

Soit p' l'angle p varié (on) aura

$$p' - p = \frac{\sin p' - \sin p}{\cos p} = \frac{d \sin p}{\cos p} = \frac{-d \cos p}{\sin p} = -d(\frac{d\gamma}{d\psi})\frac{d\psi}{d\beta}\frac{1}{\sin\omega}$$

donc (6). La différence $p' - q$ est l'angle du premier plan osculateur et le second appelant du cet angle on aura (7) c'est la valeur de l'angle compris entre deux plans osculateurs dans la courbe formée sur la surface développable. On a donc les équations suivantes pour déterminer la nature de la courbe cherchée. $d\alpha$ étant l'angle de contingence de l'arrete de rebroussement, $d\beta$ étant l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs sur cette arrete, ω l'angle formé par la trace de la courbe demandée et une tangente à l'arrête développée sur le plan, $d\gamma$ l'angle de contingence de cette trace de la courbe sur le plan, $d\psi$ l'angle de contingence de la courbe à double courbure qui résulte de la trace, du l'angle entre deux plans osculateurs sur cette même courbe, p l'angle formé par le plan osculateur de la courbe et le plan osculateur de l'arrete on aura les équations suivantes. (8) Elles serviront à trouver dans tous les cas la nature de la courbe cherchée. Supposons que la surface développable soit cylindrique, on aura $d\alpha = 0$, $d\omega = d\gamma$ et si la courbe tracée sur le cylindre développé est la trace d'une courbe à double courbure sur le plan du cylindre parallèle aux z on aura $d\sigma = ds \sin\omega$, $dz = ds \cos\omega$, l'angle p sera l'angle du plan osculateur avec le plan vertical, $d\psi$ sera l'angle de contingence de la courbe, $d\beta$ sera l'angle de contingence de la projection et égal à la quantité que l'on a appelé plus haut $d\phi$, du sera l'angle entre deux plans osculateurs de la courbe et on aura les équations suivantes. (11)

6 Michel-Ange Lancret

a. Le rapport sur le premier mémoire

Voici pour commencer le rapport de Lacroix et Lagrange :

> « Descartes, dans sa géométrie, a indiqué sommairement la manière d'exprimer par des équations la nature de ces courbes à double courbure ; Clairaut, à peine sorti de l'enfance, s'empara de cette idée, qui jusques là était demeurée infructueuse, et publia ses recherches sur les courbes à double courbure. Il enseigna dans ce traité à former les équations de ces courbes par leurs propriétés, à mener leurs tangentes, à quarrer les espaces qu'elles circonscrivent sur les surfaces qui les contiennent et à les rectifier, donna ensuite l'expression du rayon du cercle qui passe par trois points consécutifs de ces courbes et qu'on nomme leur rayon de courbure absolue ; mais ce n'est que 40 ans après qu'on s'est occupé de la détermination de leur développées. Les premières recherches publiées sur ce sujet sont consignées dans un mémoire présenté en 1776 [sic] à l'Académie des Sciences par le citoyen Monge.
>
> [...]
>
> En considérant qu'un arc de cercle peut être décrit de tous les points de la perpendiculaire élevée sur son plan par son centre comme il le serait de son centre même, il fit voir que les courbes, tant planes qu'à double courbure, sont susceptibles d'une infinités de développées, [...] et pour déterminer celles de ces développées qu'on voudra. Mais il faut remarquer qu'il fit dépendre la solution de ce dernier problème d'une intégration. Enfin il distingua les deux espèces d'inflexions dont les courbes à double courbure sont susceptibles [...] rayon de courbure absolue qu'il faut distinguer des rayons des développées.

En 1790, l'un de nous, dans un « Mémoire sur les courbes à double courbure et sur les équations différentielles à trois variables qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité », présenté à l'Académie des Sciences, donna des formules pour résoudre ces questions :

Connaissant l'équation d'une courbe tracée sur une surface développable quelconque, trouver celle de la même courbe lorsque cette surface est étendue sur un plan.

Et réciproquement.

Il s'est occupé, en particulier, du développement des arêtes de rebroussement des surfaces développables et a remarqué que ces courbes conservaient dans ce développement leur courbure absolue, et ne perdaient que celle qui est déterminée par la suite de leurs plans osculateurs. [...] Le mémoire de 1790 cité plus haut et qui a quelques points communs avec celui du citoyen Lancret, n'ayant pas été imprimé, n'est probablement pas venu à sa connaissance.[24]

Le premier article du Mémoire du citoyen Lancret renferme l'exposition des principaux résultats consignés dans celui du citoyen Monge sur les courbes à double courbure, et la distinction des deux espèces de courbure ou flexion dont ces courbes sont susceptibles. Celle qui est mesurée par le rayon de courbure absolue ou par l'angle de deux tangentes consécutives, est nommée par l'auteur première flexion, et il appelle seconde flexion la courbure de la surface développable formée par l'ensemble des tangentes de la courbe, ou par l'enveloppe de ses plans osculateurs, qu'il nomme surface osculatrice.

En sorte que si l'on conçoit la courbe proposée comme dérivée d'une courbe plane dont on aurait appliqué le plan sur la surface osculatrice, la première flexion sera la courbure primitive et la seconde celle qui résulte de l'enveloppement autour de la surface.

Le citoyen Lancret désigne encore sous le nom de développée par le plan l'arête de rebroussement de la surface, formée par les intersections successives des plans normaux de la courbe proposée, et il donne comme un théorème du au citoyen Fourier que :

La première flexion de la développante est égale à la seconde flexion de cette développée,

et réciproquement que :

La seconde flexion de la développante est égale à la première flexion de la même développée.

[...] La première de ces propositions est évidente par elle-même et la seconde s'en déduit très facilement. Il suit de ces remarques que le développement de la surface osculatrice et celui de la surface des plans normaux produit deux courbes planes dont les courbures seront séparément chacune de celles de la courbe proposée.

Dans le deuxième article, le Citoyen Lancret s'occupe des surfaces rectifiantes des courbes à double courbure ; c'est ainsi qu'il nomme la surface développable passant par une courbe à double courbure et telle que, par son développement, la courbe proposée devient une ligne droite.

Par la courbe qui termine un filet de vis, par exemple, on peut faire passer une infinité des surfaces développables, mais parmi toutes ces surfaces, il n' y a que

[24] C'est donc le mémoire de Lacroix le 1er septembre 1790, [Lacroix 1790].

celle du cylindre sur lequel la vis a été tracée qui puisse, par son développement, étendre cette courbe en ligne droite.

Pour une courbe plane, la surface rectifiante est une surface cylindrique formée par les droites élevée sur les différents points de la courbe, perpendiculairement à son plan. Le plan tangent à la surface rectifiante est désigné par l'auteur sous la dénomination de plan rectifiant.

Après l'énumération des propriétés générales des surfaces dont nous venons de parler, le citoyen Lancret applique l'analyse aux considérations géométriques qu'il a développées. [...] Il détermine d'abord l'équation du plan rectifiant, dans laquelle entre comme constante une des coordonnées du point de la courbe proposée, par lequel passe ce plan, et en différenciant par rapport à cette coordonnée seule, il obtient une seconde équation servant à l'éliminer, et le résultat est l'équation de la surface rectifiante. Il détermine ensuite l'angle que fait une arête de cette surface avec la tangente correspondante de la courbe proposée, et déduit de là un caractère pour reconnaître par ses équations si une courbe proposée est du genre des hélices ou non, parce que, dans le premier cas, l'angle compris entre ses tangentes et les arêtes de la surface rectifiante sont constants. Nous observerons que cette sorte de propriété peut s'exprimer d'une manière aussi simple et peut être plus générale par une équation différentielle à trois variables ; celles qui répondent aux courbes formée par une linge droite pliée librement sur les surfaces cylindriques et sur les surfaces coniques quelconques sont d'une forme très élégante.

Une remarque plus intéressante est celle de la relation qui existe entre les deux flexions d'une courbe à double courbure et l'angle de deux plans rectifiants consécutifs.

Si on nomme $\delta\mu$ le premier, $\delta\nu$ le second, $\delta\gamma$ le troisième, on a

$$\delta\mu^2 + \delta\nu^2 = \delta\gamma^2.$$

Le citoyen Lancret détermine aussi la relation que les angles μ et ν ont avec l'angle formé par une tangente de la courbe proposée et l'arête correspondante de sa surface rectifiante. Cette relation lui sert à trouver, d'une manière fort simple, l'expression de la seconde flexion de la courbe proposée.

[...] Son mémoire est terminé par la recherche des relations qu'ont les flexions de la développante avec celles de la développée, ce qui le conduit à des expressions dont plusieurs sont élégantes. [...] En récapitulant ce qui précède, nous concluons que le citoyen Lancret a perfectionné, sous deux points de vue assez remarquables, la théorie des courbes à double courbure, savoir dans ses considérations sur la surface rectifiante et ans la détermination des développées sans le secours de l'intégration, et nous pensons que son mémoire est digne de l'approbation de la classe, et d'être imprimé dans le recueil des Savans étrangers, comme faisant suite à celui du citoyen Monge, imprimé dans le tome X du recueil de même nom publié par l'Académie des Sciences.

Voici maintenant le mémoire de Lancret, tel qu'il a été publié dans les « Savants Etrangers ».

b. Mémoire sur les courbes à double courbure [Lancret 1802]

§I. Introduction

I

C'est à Clairaut que l'on est redevable des premières connaissances un peu étendues que les géomètres ont eues sur les courbes à double courbure. Euler, qui a porté ses recherches sur tant de parties diverses des mathématiques, a aussi étendu celle-ci ; mais c'est sur-tout aux travaux de Monge que l'on doit les plus belles propriétés connues sur les lignes courbes en général.

Je vais rappeler ici quelques-unes de ces propriétés, parce que celles que je me propose de faire connaître dans ce mémoire y sont immédiatement liées.

II

On appelle plan osculateur d'une courbe à double courbure celui qui passe par deux tangentes consécutives et je nomme **surface osculatrice** la surface développable formée par tous les plans menés semblablement. L'arête de rebroussement est la courbe elle-même ; toutes les développantes de la courbe sont sur cette surface : ce sont les lignes qui coupent à angle droit les tangentes de la courbe, ou, en d'autres termes, ce sont les lignes de courbure de la surface osculatrice. La suite des plans normaux permet de définir une surface développable, qui est le lieu géométrique de toutes les développées de cette courbe. L'arête de rebroussement n'est point une des ses développées proprement dites, ou développée par le fil, puisque ses tangentes ne passent pas par la courbe ; mais elle peut cependant être nommée développée par le plan, attendu que si on fait mouvoir le long de cette arête un plan qui lui soit perpétuellement osculateur, l'un des points de ce plan décrira dans son mouvement la courbe à double courbure qui sera par rapport à l'arête de rebroussement, une développante par le plan. On voit qu'une même courbe peut avoir autant de développantes par le plan différentes qu'il peut y avoir de points sur un plan.

Les **rayons osculateurs** d'une courbe sont placés à l'intersection des plans osculateurs et des plans normaux, et ils ont leur extrémité sur la surface qui enveloppe ces derniers plans.

Une surface développable est la développée commune d'autant de surfaces développables différentes qu'il peut y avoir de lignes droites dans un de ses plans tangents. Toutes les surfaces développantes ont leur arête de rebroussement sur leur commune développée ; et en étendant cette dernière surface sur un plan, les arêtes de rebroussement des développantes deviennent des lignes droites.

III

On peut distinguer dans les lignes à double courbure deux courbures ou flexions distinctes, et telles que l'une peut être détruite sans que l'autre ait subi aucun changement. Ces deux flexions sont celles qui sont mesurées, la première est l'angle entre deux plans normaux consécutifs, la seconde par l'angle que forment deux plans osculateurs consécutifs.

En effet, lorsqu'on rend plane la surface osculatrice, c'est-à-dire lorsqu'on détruit la seconde flexion de la courbe, l'angle que forment deux arêtes rectilignes consécutives de cette surface ne change pas ; mais ces arêtes sont les tangentes de la courbe, et les plans normaux sont perpendiculaires aux tangentes. Les angles que forment deux à deux les plans normaux ne changent donc pas lorsque les angles des plans osculateurs changent : la seconde flexion est donc indépendante de la première.

IV

Les flexions de la développante et de la développée par le plan ont entre elles une relation remarquable ; savoir :
Que La première flexion de la développante est égale à la seconde flexion de la développée, et réciproquement, la première flexion de la développée est égale à la seconde flexion de la développante.

La première partie est tout de suite démontrée puisque les plans normaux à la développante sont osculateurs à la développée. Quant à la réciproque, il faut faire attention que l'intersection de deux plans normaux consécutifs de la développante est une droite perpendiculaire au plan osculateur de cette même courbe et que cette intersection étant tangente à la développée, elle est perpendiculaire au plan normal de cette dernière courbe. Le plan osculateur de la développante et le plan normal de la développée sont donc perpendiculaires à une même droite, ils sont donc parallèles, et par conséquent, deux plans osculateurs consécutifs de la développante forment un angle égal à celui qui est formé par les deux plans normaux correspondants de la développée par le plan.

Nous avons vu qu'en développant la surface osculatrice d'une courbe, cette courbe conservait sa première flexion ; maintenant, si l'on développe la surface osculatrice de sa développée par le plan, cette dernière courbe conservera aussi sa première flexion, qui est la seconde flexion de la développante. L'arête de rebroussement de la surface des plans normaux et celle de la surface osculatrice donnent donc lorsque ces deux courbes sont étendues sur un plan, deux courbes planes qui ont respectivement pour courbure, l'une la première et l'autre la seconde flexion de la courbe à double courbure.

Ces remarques sur la distinction des deux flexions d'une courbe, et sur la relation qu'ont entre elles les flexions de la développante avec celle de sa développée par le plan sont dues à M.Fourier. Je les ai exposées ici parce qu'elles ne sont point encore écrites, et que j'aurai l'occasion d'en faire usage dans la suite de ce mémoire

§II. Du plan rectifiant et de la surface rectifiante

V

On peut faire passer par une courbe quelconque une surface développable qui jouisse de cette propriété qu'en l'étendant sur un plan la courbe devienne une ligne droite. Cette surface que je nomme, à cause de cette propriété, **surface rectifiante**, a ses plans tangents perpendiculaires aux rayons osculateurs de la courbe, ainsi que je vais le démontrer.

Le plan tangent de la surface rectifiante, ou plus simplement le plan rectifiant d'une courbe à double courbure, passant par un point de cette courbe et étant perpendiculaire au rayon osculateur en ce point, on voit qu'il passe par la tangente de la courbe et qu'il est perpendiculaire au plan osculateur ; d'où il suit immédiatement que la surface rectifiante est la développée de la surface osculatrice : car si, par les arêtes et perpendiculairement à cette surface, on fait passer des plans, la surface qui les enveloppera tous se la développée de la surface osculatrice. Or ces plans sont évidemment les mêmes que les plans rectifiants ; donc la surface rectifiante est la développées de l'osculatrice. Maintenant on sait (II)qu'en étendant une surface développable sur un plan, les arêtes de rebroussement de ses développantes deviennent des lignes droites. Or nous venons de voir que la rectifiante est la développée de l'osculatrice : donc l'arête de rebroussement de celle-ci qui est la courbe elle-même, et qui est sur la surface rectifiante, s'étendra en ligne droite lorsqu'on rendra plane cette dernière surface.

Il suit de ce que nous venons de dire, qu'une courbe ne peut avoir qu'une seule surface rectifiante, mais qu'une surface développable quelconque est la surface rectifiante d'autant de courbes différentes que l'on peut tracer de lignes droites dans un de ses plans tangents.

VI

Le plan rectifiant étant perpendiculaire au rayon osculateur, il est en même temps perpendiculaire au plan osculateur et au plan normal ; en sorte que ces trois plans se coupent à angle droit sur la courbe. L'intersection du plan osculateur et du plan rectifiant donne la tangente, et toutes les tangentes sont, comme on le sait, les arêtes rectilignes de la surface osculatrice. L'intersection du plan normal et du plan osculateur donne la direction du rayon osculateur, et la suite de tous ces rayons appartient, comme on le sait encore, à une surface gauche. Pareillement l'intersection du plan normal et du plan rectifiant donne une ligne droite qui, considérée avec toutes les lignes menées semblablement, appartient aussi à une surface gauche.

La surface osculatrice, celle des plans normaux et la surface rectifiante, jouissent donc chacune, d'après ce que nous venons de voir, d'une propriété très-remarquable par rapport aux flexions de la courbe. La première est telle qu'en la développant il ne reste plus à la courbe que sa première flexion ; en développant la seconde, son arête de rebroussement a pour courbure la seconde flexion de la courbe. Enfin nous venons de démontrer qu'en développant la troisième les deux flexions de la courbe disparaissent à la fois.

Nous observerons ici que les courbes planes que l'on obtient par le développement des surfaces osculatrice et rectifiante ont pour longueur celle de la courbe à double courbure elle-même, et qu'il n'en n'est pas ainsi pour la courbe qui résulte du développement de la surface des plans normaux, attendu que la développée par le plan n'a pas généralement la même étendue que sa développante. Mais il sera toujours possible de trouver une courbe qui, en conservant la courbure ou flexion de cette développée devenue plane, soit égale en longueur à la développante par le plan : la méthode appelée des **trajectoires** fournit le moyen de résoudre ce problème.

On a démontré qu'en tendant un fil par ses deux extrémités sur une surface développable, la courbe suivant laquelle il s'applique devient une ligne droite lorsque cette surface est étendue sur un plan. Ainsi chercher la surface rectifiante d'une courbe à double courbure donnée, c'est chercher la surface développable sur laquelle cette courbe, supposée flexible et tendue par ses deux extrémités, serait en équilibre.

VII

Tout étant rapporté à trois plans rectangulaires entre eux, soient x, y et z les coordonnées d'une courbe quelconque, parmis lesquelles z est supposé verticale ; et soient les équations des projections de cette courbe sur les deux plans verticaux

$$\begin{cases} x = \phi z \\ y = \psi z \end{cases}$$

où ϕ et ψ représentent des fonctions qulconques.

Les équations de la tangente de cette courbe au point déterminé par $z = \alpha$ sont, comme on le sait

$$x - \phi\alpha = \phi'(z - \alpha) \qquad y - \psi\alpha = \psi'(z - \alpha)$$

dans lesquelles ϕ' et ψ' sont mis, pour simplifier, à la place de $\phi'\alpha$ et $\psi'\alpha$. L'équation du plan normal et celle du plan osculateur au même point de la courbe, sont respectivement, comme on le sait aussi,

$$(x-\phi\alpha).\phi' + (y-\psi\alpha).\psi' + (z-\alpha) = 0$$
$$(x-\phi\alpha).\psi'' - (y-\psi\alpha).\phi'' + (z-\alpha).(\phi''\psi' + \psi''\phi') = 0$$

Ces deux équations appartiennent au rayon osculateur et peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (z-\alpha)(\phi'' + \psi'(\phi''\psi' - \psi''\phi')) + (x-\phi\alpha)(\phi''\psi' + \psi''\phi') = 0 \\ (z-\alpha)(\psi'' - \phi'(\phi''\psi' - \psi''\phi')) + (y-\psi\alpha)(\phi''\psi' + \psi''\phi') = 0 \end{cases}$$

Maintenant, pour trouver l'équation du plan rectifiant, nous remarquons que ce plan devant passer aussi par le point de la courbe pour lequel $z = \alpha$, son équation sera de forme

$$z - \alpha = A(x-\phi\alpha) + B(y-\psi\alpha)$$

et comme il doit être perpendiculaire au rayon osculateur, il faudra déterminer A et B par cette condition ; ce qui donnera

$$\begin{cases} A(\phi''\psi' + \psi''\phi') = \phi'' + \psi'(\phi''\psi' - \psi''\phi') \\ B(\phi''\psi' + \psi''\phi') = \psi'' - \phi'(\phi''\psi' - \psi''\phi') \end{cases}$$

Substituant pour A et B ces valeurs, il vient pour équation du plan rectifiant :

$$\begin{array}{llcl} (R) & (z-\alpha).(\phi''\psi' + \psi''\phi') & = & (x-\phi\alpha)(\phi'' + \psi'(\phi''\psi' - \psi''\phi')) \\ & & & +(y-\psi\alpha).(\psi'' - \phi'(\phi''\psi' - \psi''\phi')) \end{array}$$

Différentiant cette équation par rapport au paramètre α qui particularise la position du plan, il viendra :

$$\begin{array}{r} (R') \qquad (z-\alpha).(\phi''^2 + \psi''^2 + \phi'\phi''' + \psi'\psi''') \\ = (x-\phi\alpha).[(\phi''' + \psi''.(\phi''\psi' - \psi''\phi') + \psi'.(\psi'\phi''' - \phi'\psi''')] \\ +(y-\psi\alpha).[\psi''' - \phi''.(\phi''\psi' - \psi''\phi') - \phi'.(\psi'\phi''' - \phi'\psi''')] \end{array}$$

Éliminant α entre ces deux équations, le résultat sera, d'après la théorie connue, l'équation de la surface qui enveloppe tous les plans rectifiants, c'est-à-dire l'équation de la surface rectifiante.

VIII

L'angle que les tangentes d'une courbe forment avec les arêtes correspondantes de sa surface rectifiante, est constant lorsque cette surface est cylindrique ; mais dans tous les autres cas, il varie pour chaque point de la courbe. Nous allons chercher l'expression générale de cet angle, qui nous sera utile pour la suite.

Les équations

$$\phi'.(z-\alpha) = x - \phi\alpha$$
$$\psi'.(z-\alpha) = y - \psi\alpha$$

étant celles de la tangente d'une courbe à double courbure quelconque, les équations de l'arête correspondante de sa surface rectifiante seront les deux équations (R) et (R'), que nous mettrons sous la forme suivante, en éliminant successivement entre elles $(y-\psi\alpha)$ et $(x-\phi\alpha)$:

$$\begin{aligned}(z-\alpha).\{\phi'.(\phi''\psi''' - \psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)\\ -\psi''[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]\}\\ = (x-\phi\alpha).\{\phi''\psi'''-\psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)\\ -(\phi''\psi'-\psi''\phi').[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z-\alpha).\{\psi'.(\phi''\psi''' - \psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)\\ +\phi''[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]\}\\ = (y-\psi\alpha).\{\phi''\psi'''-\psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)\\ -(\phi''\psi'-\psi''\phi').[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]\}\end{aligned}$$

Nommant H l'angle que forment ces deux lignes, on aura, par les formules connues,

$$\cos H = \frac{(\phi''\psi'''-\psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{\sqrt{((\phi''\psi'''-\psi''\phi''')^2.(1+\phi'^2+\psi'^2)^3+[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]^3}}$$

par conséquent la tangente de l'angle cherché se réduit à cette expression assez simple :

$$\tan H = \frac{[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]^{3/2}}{(\phi''\psi'''-\psi''\phi''').(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}$$

Les arêtes rectilignes d'une surface développable étant représentés par les deux équations $\phi'.(z-\alpha) = x-\phi\alpha$ et $\psi'.(z-\alpha) = y-\psi\alpha$, les arêtes rectilignes de sa développée seront représentée par les deux équations (R) et (R') ; ainsi l'angle H est aussi celui qui est formé par l'arête d'une surface développable, avec l'arête correspondante de sa développée.

IX

On peut déduire de ce qui précède une méthode facile pour déterminer si une courbe proposée est une hélice ; car il est évident que dans ce cas, la surface rectifiante doit être cylindrique. Il est vrai que les courbes planes étant des hélices qui coupent à angle droit les arêtes des cylindres, on pourroit hésiter pour savoir si la courbe proposée est plane ou est une hélice ; mais outre que l'on peut s'assurer d'avance par les méthodes connues, si la courbe peut être comprise dans un plan, nous ferons voir dans l'exemple suivant comment on peut distinguer l'une et l'autre de ces deux espèces de courbes.

Soient les équations d'une courbe à double courbure,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(m.\arcsin\frac{z}{r} - \sqrt{r^2 - z^2}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(m.\arcsin\frac{z}{r} + \sqrt{r^2 - z^2}) \end{cases}$$

On demande si cette courbe est une hélice.

Mettant d'abord pour z, x, y respectivement $\alpha, \phi\alpha, \psi\alpha$ on aura

$$\phi\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(m.\arcsin\frac{\alpha}{r} - \sqrt{r^2 - \alpha^2})$$

et

$$\psi\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(m.\arcsin\frac{\alpha}{r} + \sqrt{r^2 - \alpha^2})$$

d'ou l'on déduira par la différentiation,

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{m+\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}} \qquad \psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{m-\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}$$
$$\phi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{m\alpha+r^2}{(r^2-\alpha^2)^{3/2}} \qquad \psi'' = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{m\alpha-r^2}{(r^2-\alpha^2)^{3/2}}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (R) du plan rectifiant, elle deviendra, toute réduction faite,

$$2\alpha z + (y-x).\sqrt{r^2-\alpha^2}.\sqrt{2} - 2r^2 = 0$$

Différentiant cette équation par rapport à α, pour avoir l'équation analogue à (R'), il viendra

$$2z\sqrt{r^2-\alpha^2} + \alpha.(x-y).\sqrt{2} = 0$$

Éliminant α entre ces deux équations, on aura pour équation de la surface rectifiante,

$$(x-y)^2 + 2(z^2 - r^2) = 0$$

C'est celle d'un cylindre à base circulaire de rayon= r et dont l'axe, qui est dans le plan horizontal, passe par l'origine, en faisant avec les abscisses, et conséquemment aussi avec les ordonnées, un angle de quarante-cinq degrés.

La courbe proposée est donc une hélice, car, pour qu'elle fut plane, il faudrait qu'elle fut un cercle : or les équations de la proposées ne peuvent être celles d'un cercle.

En général, puisque dans le cas où la courbe est plane la surface rectifiante est un cylindre qui a pour section perpendiculaire à ses arêtes, la courbe elle-même ; il s'ensuit que lorsqu'on aura trouvé pour surface rectifiante d'une courbe un cylindre, il faudra faire dans cette surface une section par un plan perpendiculaire à ses arêtes, et projeter la courbe résultante sur les plans où sont les projections de la proposée. Comparant ensuite les équations des courbes qui se trouvent sur les mêmes plans, on conclura que la proposée est plane si ces équations sont identiquement les mêmes, ou ne diffèrent que par les seules quantités qui affectent la distance à l'origine ; on conclura au contraire qu'elle est une hélice si les équations de l'intersection diffèrent autrement des équations de la proposée.

La formule que nous avons donnée pour trouver l'angle que forme une courbe avec l'arête de sa surface rectifiante, peut aussi être employée à déterminer si une courbe est une hélice ; car, dans ce cas, la valeur de $tang.H$ doit être constante et différente de l'infini, cette dernière valeur indiquant que la proposée est une courbe plane. Pour l'hélice que nous venons d'examiner, on trouvera

$$\tan H = \frac{r}{m}$$

X

Soit $d\mu$ l'angle que forment deux plans normaux consécutifs d'une courbe, ou sa première flexion ; soit $d\nu$ l'angle de deux plan osculateurs consécutifs, ou sa seconde flexion ; soit enfin $d\omega$ l'angle de deux plans rectifiants consécutifs, et proposons-nous de trouver la relation qui existe entre ces trois angles différentiels.

Nous supposerons d'abord que ces angles sont finis, et nous les nommerons respectivement μ, ν et ω.

Considérons trois plans osculateurs consécutifs, ils détermineront dans le plan du milieu deux tangentes qui comprendront entre elles l'angle μ. Par l'une de ces tangentes, et perpendiculairement au plan du milieu, concevons un plan ; ce sera un plan rectifiant. Par l'autre tangente, et perpendiculairement au plan osculateur contigu au précédent, concevons un autre plan ; ce sera un second plan rectifiant. Et parce que les deux plans osculateurs contigus font entre eux l'angle ν, le second plan rectifiant fera avec le plan osculateur du milieu un angle égal à 90^{o}-ν. On aura donc une pyramide triangulaire formée par ce plan osculateur et les deux plans rectifiants, lesquels comprennent entre eux l'angle ω. Ainsi l'on obtiendra la relation qui existe entre les trois angles μ, ν et ω, par une analogie connue pour les triangles sphériques rectangles ; savoir

$$\cos\omega = \cos\mu\cos\nu$$

Pour connaître ce qu'elle devient lorsque les angles sont très petits, il faut mettre d'abord à la place des cosinus, les séries qui les représentent ; ce qui changera l'équation précédente en celle-ci :

$$1 - \frac{\omega^2}{2} + \text{etc.} = (1 - \frac{\mu^2}{2} + \text{etc.}).(1 - \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.})$$

Effectuant ensuite les multiplications indiquées, effaçant les termes qui se détruisent, et ne conservant que ceux de seconde dimensions, enfin remettant pour μ, ν et ω respectivement $d\mu$, $d\nu$ et $d\omega$, on aura entre ces trois angles cette relation remarquable :

$$d\mu^2 + d\nu^2 = d\omega^2$$

Nous avons appelé H l'angle que la tangente de la courbe en un point fait avec l'arête correspondante de sa surface rectifiante : or il est aisé de voir, dans le triangle que nous venons de considérer, que cet angle est celui du côté adjacent aux angle ω et $90-\nu$. Le même triangle fournit donc cette nouvelle analogie :

$$\cot H = \cot\mu.\sin\nu$$

laquelle devient, lorsque les angles μ et ν sont très petits

$$\tan H = \frac{d\mu}{d\nu}$$

De cette relation et de la précédente, entre $d\mu$, $d\nu$ et $d\omega$, ou bien de la considération du triangle sphérique, on déduit encore

$$\sin.H = \frac{d\mu}{d\omega}$$

et

$$\cos.H = \frac{d\nu}{d\omega}$$

Nous ferons remarquer, à l'occasion de l'équation

$$\tan H = \frac{d\mu}{d\nu}$$

que pour les hélices ou courbes rectifiables par le cylindre, l'angle H étant constant, il s'en suit que dans ces courbes, les deux flexions sont toujours proportionnelles, et qu'elles sont égales lorsque l'angle $H = 45°$. Ainsi les hélices tracées sur des cylindres à base circulaires, et faisant avec leurs arêtes un angle de 45°, on leurs deux flexions égales entre elles et constantes dans toute l'étendue de la courbe.

XI.

Lorsque l'on considère dans la mécanique des forces qui agissent sur une courbe supposée élastique et qui tendent à la redresser en ligne droite, on fait entrer dans le calcul l'angle de contingence ou la première flexion $d\mu$ dont l'expression est comme on le sait, en représentant $\frac{d\mu}{d\alpha}$ par μ'

$$\mu' = \frac{\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2]^{1/2}}{1 + \phi'^2 + \psi'^2}$$

Si maintenant l'on se proposait de connoître l'expression de la force qui tendrait à détruire la seconde flexion d'une courbe supposée élastique, il faudroit connoître l'expression de l'angle $d\nu$ en fonction des différentielles des coordonnées de la courbe. Or, si l'on cherchait directement l'expression de l'angle formé par deux plans osculateurs contigus, il faudrait, pour y parvenir, un très grand développement de calcul, sur-tout si l'on supposoit généralement que dx, dy, dz, d^2x, d^2y et d^2z, soient variables. La connaissance de l'angle H et de la relation qu'il a avec les angles $d\mu$ et $d\nu$, fournit tout de suite l'expression cherchée ; car nous avons vu que l'on avoit l'équation $d\nu = \frac{d\mu}{\tan H}$, c'est-à-dire en faisant $\left(\frac{d\nu}{d\alpha}\right) = \nu'$:

$$\nu' = \frac{(\phi''\psi''' - \psi''\phi''')(1 + \phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2}$$

Si une surface développable, supposée aussi élastique, étoit donnée par son arête de rebroussement, et que l'on voulût connaître la force qui tendroit à la rendre plane, il faudroit avoir l'expression de son angle de contingence ; or il est visible que cet angle est précisément l'angle $d\nu$ dont nous venons de donner la valeur.

Enfin une surface développable étant définie par la connaissance de la ligne courbe suivant laquelle un fil tendu par ses extrémités y seroit en équilibre (VI), on pourroit avoir besoin de connoitre l'expression de son angle de contingence en fonction des différentielles des coordonnées de cette courbe. Or cet angle est $d\omega = \frac{d\mu}{\sin.H}$, c'est-à-dire en faisant : $\frac{d\omega}{d\alpha} = \omega'$ puis

$$\omega' = \frac{([\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2]^3 + (\phi''\psi''' - \psi''\phi''')^2)(1 + \phi'^2 + \psi'^2)^3)^{1/2}}{(1 + \phi'^2 + \psi'^2)(\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2)}$$

XII.

Les expressions que nous venons de trouver pour les angles $d\mu$, dv, $d\omega$ et $\tan H$ peuvent être facilement traduites en expressions différentielles ordinaires, même en supposant que dz et d^2z soient aussi considérés comme variables. L'angle $d\mu$ est déjà connu sous le nom d'angle de contingence, savoir,

$$d\mu = \frac{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)^{\frac{3}{2}}}{ds}$$

Pour transformer l'expression de dv, il faut (ϕ', ϕ'', ϕ''', ψ', ψ'', ψ''', respectivement $\frac{dx}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^3x}{dz^3}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, $\frac{d^3y}{dz^3}$ ce qui donnera

$$\frac{(dz^2 + dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{dz^2(d^2x^2 + d^2y^2) + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

C'est là l'expression de dv, toujours dans l'hypothèse de dz =constante, ou, plus proprement parlant, c'est l'expression de $\frac{dv}{dz}$, en sorte qu'il convient de l'écrire ainsi :

$$dv = \frac{dsdz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{dz^2(d^2x^2 + d^2y^2) + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

Maintenant on peut supposer que dz, d^2z, d^3z, ont été d'abord traités dans le calcul de la même manière que dx, d^2x, d^3x, et dy, d^2y, d^3y , et que la valeur précédente de dv a été obtenue par la supposition de $d^2z = 0$ et $d^3z = 0$. Il faudra donc, pour retrouver l'expression première de dv, rétablir les termes qui ont disparu par cette supposition; ce qui consiste à faire en sorte que les trois systèmes dx, d^2x, d^3x ; dy, d^2y, d^3y et dz, d^2z et d^3z, soient chacun combinés de la même manière avec les deux autres ; et il ne sera pas difficile de voir qu'il faudra pour cela ajouter au numérateur les termes suivants :

$$dsd^2z(d^3xdy - d^3ydx) + dsd^3z(dxd^2y - dyd^2x)$$

et au dénominateur ceux-ci

$$dx^2d^2z^2 - 2dxd^2xdzd^2z + dy^2d^2z^2 - 2dyd^2ydzd^2z$$

en sorte que l'on aura

$$dv = \frac{ds[d^3x(dyd^2z - dzd^2y) + d^3y(dzd^2x - dxd^2z) + d^3z(dxd^2y - dyd^2x)]}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

ou

$$dv = \frac{d^3x(dyd^2z - dzd^2y) + d^3y(dzd^2x - dxd^2z) + d^3z(dxd^2y - dyd^2x]}{ds(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}$$

On trouvera, par des opérations analogues :

$$d\omega = \frac{ds[d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2] + d^3x(dyd^2z - dzd^2y)^2 + d^3y(dzd^2x - dxd^2z)^2 + d^3z(dxd^2y - dyd^2x)^2}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$$

et

$$\tan H = \frac{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)^{3/2}}{d^3x(dyd^2z - dzd^2y)^2 + d^3y(dzd^2x - dxd^2z)^2 + d^3z(dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

§III Des développées proprement dites, ou développées par le fil.

XIII

M. Monge a le premier fait connoître les développées des courbes à double courbure (Voyez le tome X de la collection des Mémoires des Savans étrangers). Il a démontré que toutes les courbes, soit planes, soit à double courbure, avaient chacune un nombre infini de développées différentes, et il a offert le moyen de déduire des équations d'une développante, celles de l'une quelconque de ses développées. Mais comme il n'y a qu'une des équations qu'il a donné qui soit intégrale, savoir celles des plans normaux de la développante, qui, comme nous l'avons dit en commençant, est le lieu géométrique de toutes les développées, je vais donner ici deux équations intégrales pour la détermination en quantités finies des développées par le fil.

Ces équations sont celles de l'arête de rebroussement de la surface développable engendré par le fil même lorsqu'il se déroule de dessus la développée, et que l'un de ses points décrit la développante.

Il est évident d'abord que puisque cette surface doit passer par la développante, ses plans tangents passeront par les tangentes de cette courbe, et que l'intersection de deux plans consécutifs sera une des génératrices de la surface cherchée, ou une des positions du fil, pourvu toutefois qu'elles soit perpendiculaire à la tangente de la courbe au point de contact. Si donc on conçoit un plan passant par une tangente de la courbe, et que nommerait le plan touchant, formant avec le plan osculateur un angle quelconque θ ; si l'on conçoit ensuite un autre plan touchant, passant par la tangente infiniment voisine de la première, et faisant avec le plan osculateur infiniment voisin du premier un angle θ', tout le problème se réduira à trouver quelle est la relation qui doit exister entre θ et θ' pour que ces deux plans se coupent dans une ligne qui est perpendiculaire à l'une des deux tangentes.

Nous allons d'abord supposer que les angles de première et de seconde flexion, $d\mu$ et $d\nu$ sont des angles finis μ et ν.

Soit, pour simplifier, le plan des (x et y) le premier plan osculateur, et l'axe des (y) la première tangente. Soit dans ce même plan la seconde tangente passant par l'origine, et formant avec la première l'angle μ, le premier plan touchant aura pour équation

$$z = x.\tan\theta$$

l'équation du second sera de la forme

$$z = Ax + By$$

et parce qu'elle doit passer par la seconde tangente, dont l'équation est

$$y.\tan\mu = x$$

elle devient

$$z = A.(x - y.\tan\mu)$$

Ce plan doit faire, avec le second plan osculateur, un angle θ' ; mais ce second plan osculateur forme lui-même avec le plan horizontal un angle v : ainsi le second plan touchant forme , avec le plan horizontal, un angle $v + \theta'$, et l'on a, suivant la formule connue,

$$\cos(v + \theta') = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2.\sec^2.\mu}}$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\tan(v + \theta')}{\sec\mu}$$

Substituant cette valeur de A, il vient pour équation du second plan touchant :

$$z.\sec\mu = \tan(v + \theta').(x - y.\tan\mu)$$

Nous avons dit qu'il fallait que ce plan et le premier se coupassent dans une ligne perpendiculaire à l'une des deux tangentes, par exemple à la première, dont l'équation est $x = 0$: il faudra donc qu'en éliminant z entre les équations de ces deux plans, le résultat se réduise à $y = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$\tan\theta.\sec\mu = \tan(v + \theta')$$

Maintenant les angles μ et v étant infiniment petits, la condition précédente devient

$$\theta - \theta' = dv$$

Mais $\theta - \theta' = d\theta$, donc $\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{dv}{d\alpha}$.

Le résultat auquel nous venons de parvenir, $\theta - \theta' = dv$, fait voir que l'angle formé par un plan touchant et le plan osculateur correspondant, et celui qui est formé par les plans touchants et osculateurs infiniment voisins des deux premiers, diffèrent l'un de l'autre de l'angle que les deux plan osculateurs comprennent entre eux.

XIV

Il faut maintenant, pour achever de résoudre le problème que nous nous sommes proposé, avoir l'expression analytique d'un plan touchant.

Ce plan devant passer par le point de la courbe pour laquelle $z = \alpha$, son équation sera généralement de la forme

$$A(x - \phi\alpha) + B(y - \psi\alpha) + z - \alpha = 0$$

et puisqu'il doit passer par la tangente de la courbe en ce point, on aura, en substituant pour $(x - \phi\alpha)$ et $(y - \psi\alpha)$ leurs valeurs tirées des équations de la tangente

$$A\phi' + B\psi' + 1 = 0$$

Enfin, comme il doit faire un angle θ avec le plan osculateur, on aura, en faisant pour abréger,

$$\frac{\psi''}{\phi''\psi' - \psi''\phi'} = A'$$

et

$$\frac{-\phi''}{\phi''\psi'-\psi''\phi'}=B'$$

$$\cos\theta=\frac{AA'+BB'+1}{\sqrt{(A^2+B^2+1).(A'^2+B'^2+1)}}$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer A et B et par conséquent pour assujétir le plan aux conditions demandées.

Si l'on tire de la première la valeur de B, et qu'on la substitue dans la seconde, il viendra, en faisant pour simplifier $A'^2+B'^2+1=M^2$, et en développant et réduisant les termes qui se trouvent sous le radical,

$$A=\frac{(\phi'\phi''+\psi'\psi'').[\phi''+\psi'.(\phi''\psi'-\psi''\phi')]-\cos\theta.[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2].(\phi'\cos\theta\mp\psi'.\sin\theta\sqrt{1+\phi'^2+\psi'}}{\cos^2\theta.(\phi'^2+\psi'^2).[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]-(\pi'\phi''+\psi'\psi'')^2}$$

$$B=\frac{(\phi'\phi''+\psi'\psi'').[\psi''-\phi'.(\phi''\psi'-\psi''\phi')]-\cos\theta.[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2].(\phi'\cos\theta\pm\psi'.\sin\theta\sqrt{1+\phi'^2+\psi'}}{\cos^2\theta.(\phi'^2+\psi'^2).[\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2]-(\pi'\phi''+\psi'\psi'')^2}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation du plan, faisant disparaître les dénominateurs, et ordonnant, par rapport à $\cos\theta$, on trouvera enfin pour équation du plan touchant :

$$\begin{aligned}(T)\qquad [\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2].\{\cos^2\theta.[(z-\alpha).(\phi'^2+\psi'^2)-(x-\phi\alpha).\phi'-(y-\psi\alpha).\psi']\\ \pm\cos\theta.\sin\theta.[(x-\phi\alpha).\psi-(y-\psi\alpha)\psi'](1+\phi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}\}\\ +(\phi'\phi''+\psi'\psi'').\{(x-\phi\alpha).[\phi''+\psi'.(\phi''\psi'-\psi''\phi')]\\ +(y-\psi\alpha).[\psi''-\phi'.(\phi''\psi'-\psi''\phi')]-(z-\alpha).(\phi'\phi''+\psi'\psi'')\}=0\end{aligned}$$

On voit qu'il peut y avoir pour un même point d'une courbe autant de plans touchants différents que l'on peut donner de valeurs différentes à l'angle θ. Parmi ces valeurs sont 0 et 90^o, qui correspondent, la première au plan osculateur, et la seconde au plan rectifiant ; et en effet l'expression précédente devient celle de l'un de ces deux plans, selon qu'on y fait $\theta=0$ ou $\theta=90^o$.

XV

Représentons l'équation du plan touchant que nous venons de trouver par $(T)=0$, et regardons l'angle θ qui y entre comme fonction de α. Différentions cette équation en regardant α comme seule variable, nous aurons

$$\frac{dT}{d\alpha}=0$$

dans laquelle il entrera évidemment plusieurs termes multipliés par $\frac{d\theta}{d\alpha}$.

Ces deux équations réunies appartiennent à une droite passant par le point de la courbe pour lequel $z=\alpha$; et nous avons vu que pour que cette droite fût une des positions du fil, il falloit que $\frac{d\theta}{d\alpha}$ fût égal à $\frac{dv}{d\alpha}$. Mettant donc pour $\frac{d\theta}{d\alpha}$ sa valeur

$$\frac{d\theta}{d\alpha}=\frac{dv}{d\alpha}=v'=\frac{(\phi''\psi''-\psi''\phi''')(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{\phi''^2+\psi''^2+(\phi''\psi'-\psi''\phi')^2}$$

Les deux équations appartiendront à une des positions du fil, et l'élimination de α entre elles donnera, selon la méthode connue l'expression de la surface développable qui embrasse toutes ses positions successives.

L'arête de rebroussement de cette surface sera évidemment la développée cherchée. Si donc, après avoir différentié l'équation $(T) = 0$ ainsi que nous venons de le dire, et y avoir fait la substitution indiquée, on différentie de nouveau le résultat en y mettant toujours $\frac{dv}{d\alpha}$ pour $\frac{d\theta}{d\alpha}$, on aura ces trois équations :

$$(T) = 0$$
$$\frac{d.(T)}{d\alpha} = 0$$
$$\frac{d^2.(T)}{d\alpha^2} = 0$$

entre lesquelles, éliminant α, il restera deux équations qui seront celles de l'arête de rebroussement de la surface des fils, et par conséquent celles de la développée par le fil.

Ces équations renfermant la constante arbitraire θ appartiennent à toutes les développées. On particularisera une de ces courbes en donnant à θ une valeur particulière au point de la développante, dont les coordonnées sont $z = \alpha$, $x = \phi\alpha$, et $y = \psi\alpha$.

On peut encore obtenir autrement les équations de la développée, en considérant que la surface des plans normaux de la développante et la surface des fils se touchent dans cette courbe même. Les équations de ces deux surfaces sont donc celles des développées par le fil. La quantité θ, qui entre dans l'une d'elles, servira à particulariser celles de ces courbes que l'on voudra avoir de la même manière que nous venons de le dire tout à l'heure.

Pour les courbes planes on a

$$dv = 0$$

et conséquemment

$$d\theta = 0$$

d'où

$$\theta = \text{constante}$$

Ainsi, dans le cas des courbes planes, il faudra regarder θ comme constante dans les différentiations de l'équation $(T) = 0$.

XVI

Après avoir fait voir comment les équations des développées se déduisent de celles de la développante, nous allons faire connaître la relation qui existe entre les flexions des premières et celles de la seconde, et comment, les unes étant données, on peut en conclure les autres, sans qu'il soit nécessaire de connaître pour cela les équations des courbes auxquelles ces flexions appartiennent.

Nous appellerons $d\mu$ et dv la première et la seconde flexion de la développante, et $d\omega$ l'angle de contingence de sa surface rectifiante ; en sorte que pour la développante on aura

$$d\mu^2 + dv^2 = d\omega^2$$

Pareillement nous nommerons dm, dn et du les angles analogues dans la développée ; en sorte que l'on aura pour cette courbe

$$dm^2 + dn^2 = du^2$$

et d'abord nous remarquerons que la surface rectifiante de la développée étant l'enveloppe des plans normaux de la développante, on a tout de suite

$$du = d\mu$$

c'est-à-dire

$$dm^2 + dn^2 = d\mu^2$$

Actuellement nous savons que les plans osculateurs sont perpendiculaires aux plans rectifians. Si donc nous considérons deux éléments consécutifs de la développée, tracés sur deux hèdres contiguës de sa surface rectifiante, et que par chacun de ces éléments nous imaginions un plan perpendiculaire à l'hèdre sur lequel il est tracé, les deux plans que nous aurons ainsi déterminés seront deux plans osculateurs de la développée, et l'angle qu'ils comprendrons entre eux sera la seconde flexion de cette courbe.

Regardons d'abord comme finis les angles $d\mu$, $d\nu$, $d\omega$, dm et du et désignons-les respectivement par μ, ν, ω, m, n, u.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que l'intersection des deux hèdres contiguës de la surface rectifiante de la développée est l'axe des (y), et que l'une de ces hèdres est dans le plan des (x et y), le plan de l'autre aura pour équation

$$z = x.\tan.\mu$$

car l'angle de contingence de la surface rectifiante des développées est égal à la première flexion de la développante (IV), c'est-à-dire $= d\mu$.

Soit h l'angle suivant lequel la développée rencontre la génératrice de sa surface rectifiante, et plaçons le point d'intersection à l'origine ; l'équation d'un des plans osculateurs sera

$$x = y.\tan.h$$

Pour avoir celle de l'autre plan, il faut considérer qu'il doit être perpendiculaire à la seconde hèdre, et que de plus sont intersection avec elle doit faire avec l'axe des (y) un angle égal à h. Or la première condition donne pour équation du plan

$$z + \frac{x}{\tan\mu} + By = 0$$

dans laquelle B reste à déterminer.

L'intersection des deux plans étant mise sous cette forme :

$$\frac{x.\sec.\mu}{B.\sin\mu} + y$$

$$x.\tan.\mu - z = 0$$

et les équations de l'axe des (y) étant $x = 0$, $z = 0$, on aura, pour que ces deux lignes fassent entre elles un angle égal à h,

$$\cos.h = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2\sin^2\mu}}$$

d'où l'on tire

$$B = \pm\frac{\tan h}{\sin\mu}$$

Ici il faut remarquer que lorsque deux éléments de la surface rectifiante tournent autour de leur intersection commune pour se mettre dans un même plan, les deux éléments de la courbe doivent être en ligne droite, et l'on pourra aisément voir que cette condition ne peut être remplie qu'en prenant la valeur de B, qui correspond au signe $-$; car, en prenant celle qui correspond au signe $+$, il arriveroit que les deux éléments de la courbe, au lieu d'être en ligne droite lorsque les deux hèdres sont dans un même plan, se couperaient sous un angle $= 2h$.

Substituant donc pour B sa valeur $\frac{-\tan h}{\sin\mu}$, l'équation du second plan osculateur sera

$$z\sin\mu + x\cos\mu - y\tan h = 0$$

Nous avons déjà dit que celle du premier était

$$x - y\tan h = 0$$

ces deux plans comprennent entre eux un angle que nous avons nommé n ; ce qui donne cette équation :

$$\cos n.(+ + \tan^2 h) = \cos\mu + \tan^2 h$$

Pour savoir ce qu'elle devient lorsque les angles μ et n sont infiniment petits, il faut, ainsi que nous l'avons déjà fait plus haut, réduire en séries les cosinus de ces angles, effectuer les multiplications, effacer les termes qui se détruisent, et ne conserver que ceux de moindre dimension ; on a, en opérant ainsi,

$$n = \mu.\cos.h$$

ou, puisque nous avons repris l'hypothèse des angles très petits,

$$dn = d\mu.\cos.h$$

Au moyen de cette équation et de celle-ci,

$$d\mu^2 = dm^2 + dn^2$$

on trouve aussi

$$dm = d\mu.\sin.h$$

dans lesquelles h doit être considérée comme variable.

Ces valeurs de dm et dn conviennent à tous les points de toutes les développées, sans aucune distinction ; mais toutes celles qui appartiennent à une même développée sont liés par une relation que nous allons faire connaître.

Supposons que la surface rectifiante de la développée soit étendue sur un plan, et que ses arêtes rectilignes demeurent tracées sur cette surface après son développement, la développée se trouvera alors une ligne droite qui formera avec l'une des arêtes l'angle h, avec l'arête suivante l'angle h', avec l'arête voisine de celle-ci, l'angle h'', et ainsi de suite. En sorte que l'on aura pour chacun de ces points respectivement

$$\begin{aligned} dm &= d\mu.\sin h \\ dm' &= d\mu'.\sin h' \\ dm'' &= d\mu''\sin h'' \\ &\dots \\ dm^{(\alpha)} &= d\mu^{(\alpha)}.\sin h^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Mais la surface rectifiante de la développée est la même que la surface des plans normaux de la développante, et les génératrices de celles-ci forment deux à deux des angles égaux aux secondes flexions des points qui leur correspondent dans la développante (IV), c'est-à-dire respectivement égaux à dv, dv',...etc. d'après cela il est visible que l'on a

$$h - h' = dv$$
$$h' - h'' = dv'$$
$$h'' - h''' = dv'' \text{ etc.}$$

d'où

$$h''' = h - (dv + dv' + dv'')$$

et semblablement

$$h^{(\alpha)} = h - [dv + \ldots + dv^{(\alpha)}] = h - v$$

en désignant par v la somme de tous les angles dv, prise depuis le point qui correspond à l'angle h jusqu'à celui qui correspond à l'angle $h^{(\alpha)}$.

Substituant la valeur de $k^{(\alpha)}$ que nous venons de trouver, on aura

$$dm^{(\alpha)} = d\mu^{(\alpha)}.\sin(h - v)$$

ou bien, parce qu'alpha n'indique qu'un point quelconque,

$$dm = d\mu.\sin(h - v)$$

On trouvera de même

$$dn = d\mu.\cos.(h - v)$$

Dans ces équations h doit être considérée comme constante ; cela résulte évidemment du calcul précédent.

XVII

L'angle formé par le plan osculateur de la développante et le plan osculateur de la développée, que nous avons précédemment appelé θ, est le complément de l'angle h. En effet, si l'on considère le rayon osculateur de la développante, l'arête correspondante de la surface des plans normaux de cette courbe, et la tangente aussi correspondante de la développée, on verra que ces trois lignes forment un triangle rectangle car le rayon osculateur est perpendiculaire à l'arête de la surface des plans normaux. Or l'angle h est celui que forme cette même arête avec la tangente de la développée ; et l'angle θ est celui formé par cette tangente et le rayon osculateur. Donc :

$$h + \theta = 90^{\circ}$$

On auroit de même

$$h + \theta = 90^{\circ}$$

d'où

$$h - h' = \theta' - \theta$$

mais $h - h' = dv$, et $\theta' - \theta = d\theta$; car on remarquera que lorsque $h - h'$ est positif, $\theta - \theta'$ doit être négatif. Donc

$$d\theta = dv$$

ce que nous avons déjà trouvé d'une autre manière.

θ étant le complément de h, on peut substituer cette première constante à la seconde, en mettant pour h sa valeur $90^{\text{o}}-\theta$. On a alors

$$dm = d\mu.\cos(\theta+v)$$
$$dn = d\mu.\sin(\theta+v)$$

XVIII

Nous venons de nous occuper de déterminer les flexions de la développée en fonction de celles de la développante. On peut résoudre le problème inverse, soit directement, soit en opérant sur les résultats que nous venons d'obtenir. Nous allons d'abord opérer par ce dernier moyen.

Divisons l'une par l'autre les deux dernières équations, nous aurons

$$\frac{dn}{dm} = \tan.(\theta+v) = \frac{tan\theta+\tan v}{1-\tan\theta.\tan\mu}$$

d'où l'on tire

$$\tan v = \frac{dn - dm.\tan\theta}{dm + dn.\tan\theta}$$

Différentiant en regardant θ comme seule constante, il vient, toute réduction faite

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = \frac{(dnd^2m - d^2ndm)\sec^2\theta}{dm + dn\tan\theta^2}$$

Mais

$$\frac{1}{\cos^2 v} = \frac{(dm^2+dn^2)\sec^2\theta}{dm + dn\tan\theta^2}$$

on a donc

$$dv = \frac{dmd^2n - dnd^2m}{dm^2+dn^2}$$

De plus, nous avons fait voir précédemment que $d\mu = dn$, c'est-à-dire

$$d\mu = \sqrt{dm^2+dn^2}$$

Ce sont là les expressions des flexions de la développante données en valeur de celles de la développée.

Pour obtenir directement la valeur de dv, il faut seulement remarquer que la développante est une ligne de seconde courbure sur la surface osculatrice de la développée ; en sorte qu'elle coupe à angle droit toutes les droites génératrices de cette surface (II).

Désignons comme nous l'avons déjà fait les angles $d\mu$, dv, dm, dn, par μ, v, m, n, en les regardant comme des angles finis.

Considérons trois génératrices consécutives de la surface osculatrice de la développée, la première faisant avec la seconde l'angle m, et celle-ci formant avec la troisième l'angle m'. Supposons pour simplifier le calcul, que ces deux dernières soient dans le plan des (x et y), et que celle du milieu soit dans l'axe même des (y). Enfin supposons encore que l'élément de la développante qui se trouve compris entre les deux dernières génératrices soit placé dans l'axe des (x). Il est d'abord évident que l'hèdre de la surface, qui est déterminé par les deux premières génératrices, aura pour équation :

$$z + x.\tan n = 0$$

Ensuite, si l'on conçoit cette hèdre couchée sur le plan horizontal, on verra que la tangente de l'élément de la courbe qui y est tracé sera alors exprimée par

$$y = x.\tan.m$$

L'équation de la projection horizontale de cette ligne, lorsqu'elle a repris sa position primitive, est donc

$$x.\tan.m = y\cos.n$$

laquelle, joint à l'équation même du plan qui la contient, donne les deux équations de la tangente à l'élément de la développante contiguë à celui qui est dans l'axe des (x).

Le plan qui passera par ces deux éléments sera donc un plan osculateur de la développante et son équation sera

$$x.\tan m + y\sin n = 0$$

On trouvera semblablement que l'équation du plan osculateur qui passe aussi par l'élément qui est dans l'axe des (x) et par l'autre élément adjacent est :

$$z\sin.m' + y\tan n' = 0$$

en sorte que l'angle que forment ces deux plans étant appelé v on a

$$\tan v = \frac{\sin m' \sin n - \tan n' \tan m}{\tan m \sin m' + \tan n' \sin n}$$

et si l'on reprend l'hypothèse des angles très petits, il viendra

$$dv = \frac{dm'dn - dn'dm}{dmdm' + dndn'}$$

Mais $dm - dm' = d^2m$; d'où $dm' = dm - d^2m$, et semblablement $dn' = dn - d^2n$. Substituant ces valeurs, et effaçant dans le dénominateur les termes au-dessus de deux dimensions, on aura, comme précédemment,

$$dv = \frac{dmd^2n - dnd^2m}{dm^2 + dn^2}$$

XIX

Au moyen des équations que nous venons de donner, et qui déterminent les flexions d'une courbe en fonction de celle de sa développée ou de sa développante, on peut résoudre toutes les questions relatives à la manière dont les diverses inflexions d'une courbe affectent sa développée ou sa développante. Ainsi on trouvera, par exemple, qu'un point d'inflexion plane dans la développante, correspond à un point de courbure hélicoïde dans la développée ; qu'un point d'inflexion plane dans la développée, correspond à une inflexion du même genre dans la développante, etc..

XX

Les expressions qui donnent dm et dn en fonction de $d\mu$ et $d\nu$, et celles qui donnent $d\mu$ et $d\nu$ en fonction de dm et dn, sont remarquables par leurs formes, et peuvent être représentées par des courbes planes, ainsi que nous allons le faire voir. Si, à partir d'un point de la développée, on prend la somme m des premières flexions dm, pour abscisse, et la somme correspondante n des secondes flexions dn, pour ordonnée, la courbe qui passera par les extrémités de toutes les ordonnées construites semblablement, jouira de cette propriété, que la première et la seconde flexion de la développante y seront représentées respectivement par l'élément de l'arc et par l'amplitude élémentaire, et que, par conséquent la somme des premières flexions et celles des secondes flexions de la développante, seront données l'une par l'arc et l'autre par l'amplitude correspondante de cette courbe plane.

En effet, l'expression de l'arc élémentaire de cette courbe est $\sqrt{dm^2+dn^2}$, et c'est aussi la valeur de $d\mu$, première flexion de la développante. Pareillement,

$$\frac{dmd^2n-dnd^2m}{dm^2+dn^2}$$

que l'on peut mettre sous cette forme $\frac{\sqrt{dm^2+dn^2}}{R}$ (R étant le rayon de courbure de la courbe plane), est l'expression de l'amplitude élémentaire, et nous savons aussi que c'est celle de $d\nu$, seconde flexion de la développante.

Si maintenant on trace une nouvelle courbe plane dont les abscisses soient les longueurs des arcs de la courbe précédente, et dont les ordonnées soient les valeurs des amplitudes correspondantes, l'élément de l'arc de cette nouvelle courbe, et son amplitude élémentaire, donneront respectivement la première et la seconde flexion de la développante du second ordre.

En continuant de la sorte, on pourra représenter les flexions d'une développante d'un ordre quelconque.

Réciproquement à ce qui précède, si, à partir d'un point de la développante, on prend la somme μ des premières flexions et la somme ν des secondes pour la longueur de l'arc et pour l'amplitude correspondante d'une courbe plane, il est facile de voir que dm sera la différentielle des abscisses de cette courbe, et dn celle de ses ordonnées ; et conséquemment m, ou la somme des premières flexions de la développée sera donnée par l'abscisse de la courbe plane, tandis que n, ou la somme des secondes flexions, sera donnée par l'ordonnée de la même courbe.

Si l'on prend de nouveau les abscisses et les ordonnées de cette courbe pour les arcs et les amplitudes d'une autre courbe plane, celle-ci indiquera, par les différentielles de ses coordonnées, les flexions de la développée du second ordre.

On voit que l'on peut continuer ces constructions indéfiniment, et représenter ainsi les flexions d'une développée d'un ordre quelconque d'une courbe à double courbure donnée.

c. Le second mémoire de Lancret

« Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables », par M.-A. Lancret, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et membre de l'Institut d'Égypte, lu le 22 décembre 1806.

Le rapport a été lu lors de la séance du 28 septembre 1807, il est du à Lagrange et Lacroix. En voici la transcription partielle :

« L'auteur désigne par le mot *développoïde* les courbes qui naissent des intersections consécutives d'une suite de lignes droites menées sous le même angle à tous les points d'une courbe quelconque ; on voit que la développée qui résulte des continuelles intersections des normales est un cas particulier de cette génération de courbes, et c'est en effet une extension de la théorie des développées qui conduisit en 1709 Réaumur à considérer, mais seulement pour les courbes planes, les développoïdes que, dans l'Histoire de l'Académie, Fontenelle nomma développées imparfaites.

Réaumur n'alla guère au-delà de la recherche des formules nécessaires pour déduire de l'équation d'une courbe celle de ses développées imparfaites, après avoir montré que tous les points de ces dernières, relatifs au même point de la première, sont situés sur la circonférence d'un cercle décrit sur le rayon de courbure pris pour diamètre.

Avant de transporter cette théorie dans l'espace pour l'appliquer aux courbes à double courbure, M. Lancret en déduit à l'égard des courbes planes plusieurs conséquences très curieuses dont voici les principales. *La développée d'une développoïde est en même temps la développoïde de la développée de la courbe proposée. Si l'on coupe par des droites parallèles à la tangente de cette courbe le cercle décrit sur le rayon de courbure pris pour diamètre, les intersections sont les foyers d'une ellipse dont le petit axe coïncide avec la normale et qui a, avec la même courbe proposée, un contact du second ordre. La courbe qui est le lieu de tous les sommets de ces ellipses est une parabole.*

[...]

Le sujet s'amplifie beaucoup quand on embrasse les trois dimensions de l'espace. Les courbes planes comme l'a fait voir le premier M. Monge, ont une infinité de développées à double courbure, ont aussi pour les mêmes raisons une infinité de développoïdes décrivant des lignes menés sous un angle oblique déterminé. Mais comme cet angle peut recevoir une infinité de valeurs, il en résulte que le nombre des développoïdes à double courbure d'une courbe plane est infini du second ordre. Les développoïdes d'une même espèce, c'est-à-dire celles dont les tangentes rencontrent la courbe proposée sous le même angle, sont sur une même surface formée par les intersections consécutives des cônes ayant pour axes les tangentes de cette courbe et décrit avec l'angle donné. [...]

Ce travail qui se rattache au mémoire du même auteur déjà imprimé dans le premier volume du recueil des Savants Étrangers publié par la Classe, doit être suivi d'une seconde partie qui contiendra de nouveaux détails sur la même théorie et son application aux surfaces développables. Pour en faire connoître en peu de mots le mérite, il suffira de dire qu'il offre une extension remarquable de la théorie des développées donnée en 1776 (sic) par M.Monge, et qu'à ce titre il est digne de l'approbation de la Classe et de l'impression dans le recueil des Savans Étrangers. »

Annexe C

Annexe mathématique

Dans cette partie, nous donnons une version moderne de certains problèmes rencontrés au cours de notre travail. Nous avons utilisé pour cette annexe [Struik 1950] et [Spivak 1975].

1 Courbes gauches

a. Tangente, longueur d'arc

Commençons par les définitions élémentaires. Une courbe est une application $\mathbf{r}$, que l'on supposera au moins de classe C^1, d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^3$:

$$t \longmapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Le *vecteur dérivé* est le vecteur $\mathbf{r}'(t)$ ou $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$. Dans le cas où il est non nul, hypothèse qu'on fera systématiquement par la suite (tous les points sont alors dits 1-*réguliers*), on définit le *vecteur unitaire tangent* $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$. La longueur de la courbe entre les points de paramètres a et b est :

$$\mathscr{L}(a,b) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t$$

On appelle *fonction longueur d'arc*, et on note s, une primitive de la fonction $t \longmapsto \|\mathbf{r}'(t)\|$. Elle est définie à une constante près, et on peut paramétrer la courbe grâce à cette fonction. On notera alors $\mathbf{c}(s) = \mathbf{r} \circ t(s)$ où $t(s)$ est la fonction réciproque de la fonction longueur d'arc $s(t)$. Ainsi :

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{r}'(t(s))\, t'(s) = \frac{\mathbf{r}'(t(s))}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|} = \mathbf{t}(s)$$

Supposons maintenant qu'on soit en dimension n. Un point est n-*régulier* si les vecteurs dérivés successifs $\mathbf{c}'(s)$, $\mathbf{c}''(s)$,..., $\mathbf{c}^{(n)}(s)$ sont indépendants. On appelle alors *base de Serret-Frenet* la base orthonormalisée (par la méthode de Gram-Schmidt) issue de ce système de vecteurs. On appliquera la convention de signe habituelle, sauf pour le dernier vecteur, dans la mesure où on décide que la base sera orthonormée directe. C'est la justification de ce que, dans ce cadre moderne (et en dimension quelconque), les premières courbures sont positives, la dernière est signée. En dimension deux, la courbure est donc signée, en dimension trois, la courbure est positive et la torsion est signée.

À partir de maintenant, on se limitera au cas de la dimension trois.

b. Interprétation géométrique de la tangente et du plan osculateur

Le cas de la tangente est connu : la tangente en un point de paramètre s est la limite d'une sécante passant par les deux points de paramètres s et s_1, lorsque s_1 tend vers s. Sous réserve de la continuité de la dérivée, c'est la limite d'une sécante passant par les points de paramètres s_1 et s_2 lorsque les deux paramètres tendent vers s.

Considérons maintenant les plans les plus proches de la courbe. Si $\mathbf{c}''(s) \neq 0$, alors pour s_i suffisamment proches de s, les trois points $\mathbf{c}(s_1)$, $\mathbf{c}(s_2)$ et $\mathbf{c}(s_3)$ sont non alignés, et le plan qu'ils définissent tend vers le plan $\mathscr{P}(\mathbf{c}(s), \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s))$. Ce plan s'appelle **plan osculateur** de la courbe au point $\mathbf{c}(s)$.

c. Courbure, torsion et les formules de Serret-Frenet, de Frenet-Serret

Remarquons pour commencer que :

$$\|\mathbf{c}'(s)\| = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s) \rangle = 0$$

par dérivation du carré scalaire. En particulier, et s'il n'est pas nul, le vecteur $\mathbf{c}''(s)$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{c}'(s) = \mathbf{t}(s)$. La méthode de Gram-Schmidt conduit à définir le second vecteur $\mathbf{n}$ comme colinéaire et positivement lié au vecteur $\mathbf{c}''(s)$, et on appelle *courbure* le scalaire (positif) $\kappa(s)$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{n}$$

On définit le troisième vecteur $\mathbf{b}$ par la condition que $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ est orthonormée directe, de sorte que $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

On a donc, avec ces notations, la première formule de Serret-Frenet :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{n}}$$

Par ailleurs, en dérivant $\|\mathbf{b}\| = 1$ et $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = 0$, on obtient

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}' \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle + \kappa \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0 = \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = 0$$

le vecteur $\mathbf{b}'$ est donc colinéaire au vecteur $\mathbf{n}$, ce qui permet de définir une nouvelle fonction, appelée torsion, par :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\mathbf{n}}$$

Enfin, en utilisant que $\|\mathbf{n}\| = 1$, on obtient que $\mathbf{n}'$ est orthogonal à $\mathbf{n}$ donc dans le plan engendré par $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$, et la dérivation des relations $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0$ puis $\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0$ donne

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = -\kappa \qquad \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = \tau$$

soit la troisième formule de Serret-Frenet

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa(s)\mathbf{t} + \tau(s)\mathbf{b}}$$

Soit, en définitive

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} & = & & \kappa(s)\mathbf{n} & & (SF1) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} & = & -\kappa(s)\mathbf{t} & & \tau(s)\mathbf{b} & (SF2) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} & = & & -\tau(s)\mathbf{n} & & (SF3) \end{cases}$$

2 Centre de courbure, centre de courbure sphérique

Cherchons quelle est l'intersection de deux puis de trois plans normaux consécutifs, ou bien, ce qui revient au même, cherchons l'enveloppe des plans normaux et sa courbe caractéristique.

L'intersection de deux plans normaux successifs est déterminée par

$$\begin{cases} \langle x - \mathbf{c}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0 \\ \langle -\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \langle x - \mathbf{c}(s), \kappa\mathbf{n}(s) \rangle = 0 \end{cases}$$

la seconde équation étant obtenue par dérivation de la première. On trouve donc une droite de direction la binormale, et dont le point d'intersection avec le plan osculateur est $\mathbf{k}(s)$ tel que $\mathbf{k}(s) - \mathbf{c}(s) = \alpha\mathbf{n}(s)$ et donc, en reportant dans la seconde équation

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{c}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s) = \mathbf{c}(s) + R\mathbf{n}$$

Ce point peut être appelé *centre de courbure principal* et la droite s'appelle *l'axe de courbure* ou *axe polaire*. Elle peut être considérée comme l'ensemble des centres des cercles tangents à la courbe et passant par deux points consécutifs. Le centre de courbure principal correspond au cercle de courbure de rayon minimal, centré sur le plan osculateur.

Cherchons maintenant l'intersection de trois plans normaux successifs. On ajoute au système précédent l'équation

$$\langle -\mathbf{t}(s), \kappa\mathbf{n}(s) \rangle + \langle x - \mathbf{c}(s), \kappa'\mathbf{n}(s) + \kappa(-\kappa\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s)) \rangle = 0$$

obtenue par une nouvelle dérivation. On en déduit, en tenant compte des deux autres équations

$$\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa\tau\langle x - \mathbf{c}(s), \mathbf{b}(s)\rangle = 0,$$

d'où il ressort que l'on obtient un point $\mathbf{K}(s)$, dans le plan normal, de coordonnées $(R, R'T)$ dans le repère d'origine le point courant et de base $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$. On a noté T l'inverse de τ. Ce nombre est appelé *rayon de torsion*. Le point $\mathbf{K}(s)$ est centre de la *sphère osculatrice*, et le rayon ρ de cette sphère vérifie $\rho^2 = R^2 + R'T$.

3 Les développées

Soit $\mathscr{C} = \mathbf{c}(s)$ une courbe gauche. On appelle *développée* de $\mathscr{C}$ une courbe telle que la tangente en chaque point soit une normale de $\mathscr{C}$. Dans le cas d'une courbe plane, il y a une seule développée, c'est l'enveloppe des normales.

Notons $\mathbf{p}(s)$ le rayon vecteur d'une développée, de sorte que la tangente en ce point est normale à $\mathscr{C}$ au point de paramètre s. Le point de la développée est sur le plan normal, il existe donc deux fonctions y et z telles que

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c}(s) + y(s)\mathbf{n}(s) + z(s)\mathbf{b}(s).$$

En dérivant, on obtient

$$\mathbf{p}'(s) = (1 - \kappa y)\mathbf{t} + (y' - \tau z)\mathbf{n} + (z' + \tau y)\mathbf{b}.$$

Il faut donc : $y = \frac{1}{\kappa} = R$, en notant R le rayon de courbure. On en déduit que le point de la développée est sur l'axe polaire. De plus, les vecteurs $\mathbf{p}'(s)$ et $\mathbf{p}(s) - \mathbf{c}(s)$ doivent être colinéaires, donc

$$\begin{vmatrix} R & R' - \tau z \\ z & z' + \tau R \end{vmatrix} = 0$$

qui s'écrit

$$\frac{\tau R^2}{z^2} + \frac{Rz' - R'z}{z^2} + \tau = 0.$$

On peut alors poser $Z = \frac{R}{z}$ et on a $Z' = \tau(1 + Z^2)$ qui s'intègre en $Z = \tan(\int \tau + C)$ où C est une constante. On obtient alors

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r}(s) + R(s)\left(\mathbf{n}(s) + \cot(\int \tau(s)ds + C)\mathbf{b}(s)\right)$$

équations de toutes les développées.

4 Le théorème de Fourier sur les développantes

Soit $\mathscr{C} = \mathbf{c}(s)$ une courbe gauche. Une développante de $\mathscr{C}$ est une courbe $\mathscr{D}_n$ dont $\mathscr{C}$ est la développée : autrement dit, $\mathscr{C}$ est l'enveloppe des tangentes de $\mathscr{D}_n$.

Si $\mathbf{r}_1(s)$ est le rayon vecteur d'une développante, le point de la développante est sur la tangente, donc il existe $\lambda(s)$ tel que

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{c}(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s).$$

On veut que le vecteur tangent de la développante soit colinéaire à $\mathbf{n}$, donc

$$\frac{d\mathbf{r}_1(s)}{ds} = (1+\lambda')\mathbf{t} + \lambda\kappa\mathbf{n}$$

d'où $\lambda' = -1$ et $\lambda(s) = c - s$ où c est une constante.

Cherchons alors l'angle de contingence de la développante

$$\mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + (c-s)\frac{d\mathbf{t}}{ds} - \mathbf{t} = (c-s)\kappa\mathbf{n}.$$

On peut prendre comme vecteur unitaire tangent à la développante $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}$ et on a donc

$$\frac{ds_1}{ds} = (c-s)\kappa.$$

Alors,

$$\kappa_1\mathbf{n_1} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = (\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t})(c-s)\kappa.$$

Au signe près, on a donc

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}},$$

et comme $\kappa_1 = \frac{d\alpha'}{ds_1}$, on tire

$$d\alpha' = \sqrt{\tau^2+\kappa^2}\,ds$$

ce qui donne

$$d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

5 L'hélice osculatrice

C'est le problème étudié par Théodore Olivier. Il paraît naturel de se demander quelle est l'hélice la plus proche d'une courbe en un point ordinaire, et la première idée est d'examiner l'hélice ayant en ce point même tangente, même courbure et même torsion que la courbe. Si $\mathbf{c}(s)$ est la courbe donnée, l'hélice aura un axe perpendiculaire à la normale principale, à une distance $a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$. De plus, l'angle entre le vecteur binormal de la courbe et l'axe de l'hélice a pour cosinus $\frac{a}{\gamma} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$. On va montrer que c'est la perpendiculaire commune à deux «normales consécutives».

On peut se poser le problème plus général de chercher la perpendiculaire commune entre deux droites consécutives. Soit $(A, \mathbf{u})$ et $(A', \mathbf{u}')$ deux droites. On note (HH') la perpendiculaire commune. Les points H et H' sont déterminés par :

$$\begin{cases} H = A + \lambda \mathbf{u} \\ H' = A' + \mu \mathbf{u}' \\ \langle \overrightarrow{HH'}, \mathbf{u} \rangle = \langle \overrightarrow{HH'}, \mathbf{u}' \rangle = 0 \end{cases}$$

Les scalaires λ et μ sont donc déterminés par un système linéaire

$$\begin{cases} \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = \langle \overrightarrow{AA'}, \mathbf{u} \rangle \\ \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle - \mu \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle = \langle \overrightarrow{AA'}, \mathbf{u}' \rangle \end{cases}$$

On trouve donc, par exemple,

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{AA'}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle - \langle \overrightarrow{AA'}, \mathbf{u}' \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle}{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'\|^2}$$

Supposons maintenant que nos deux droites soient deux droites «consécutives» d'une famille de droites dépendant d'un paramètre. On a alors

$$\lambda = \frac{\langle dA, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, d\mathbf{u} \rangle - \langle dA, d\mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u} \wedge d\mathbf{u}\|^2}$$

Si de plus, le vecteur $\mathbf{u}$ est constamment unitaire, il reste

$$\lambda = \frac{-\langle dA, d\mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u} \wedge d\mathbf{u}\|^2}$$

et dans le cas de deux normales consécutives, on trouve

$$\lambda = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$$

en utilisant les formules de Serret-Frenet. Quant à la direction de cette perpendiculaire commune, c'est bien sûr $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'$, ce qui, dans le cas de deux normales consécutives donne $\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$. L'angle fait avec la binormale a pour cosinus $\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$. On retrouve donc l'axe de l'hélice osculatrice.

Profitons-en pour chercher la perpendiculaire commune à deux tangentes consécutives : on trouve que $\lambda = 0$, et que la direction est orthogonale à $\mathbf{t} \wedge d\mathbf{t}$, c'est donc la binormale, et les deux tangentes consécutives sont sécantes en le point courant. Pour la perpendiculaire communne à deux binormales consécutives, on trouve aussi $\lambda = 0$, la direction est $\mathbf{t}$, c'est la tangente.

Cherchons maintenant l'ordre du contact entre notre courbe et l'hélice obtenue. Les formules de Serret-Frenet donnent

$$\mathbf{c}(s+h) = \mathbf{c}(s) + h\mathbf{t} + \frac{h^2}{2}\kappa\mathbf{n} + \frac{h^3}{6}(-\kappa^2\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b}) + o(h^3)$$

On en déduit que la distance entre la courbe et une hélice de courbure κ et de torsion quelconque est de l'ordre de h^3, le contact est d'ordre 2. L'hélice décrite ne donnera un meilleur contact qu'en un point où κ' est nul.

6 Le théorème de Puiseux

Il s'agit, rappelons-le, de prouver que si une courbe a une courbure et une torsion contantes, c'est une hélice circulaire. Nous donnons ici la déduction de Puiseux lui-même. Pour la rendre plus facile à suivre, nous la transcrivons en notations modernes, mais nous suivons sa numérotation des équations. Les trois équations différentielles de départ sont :

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}},$$
$$\omega = \frac{ds^6}{\rho^2(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z)},$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

avec $A = dyd^2z - dzd^2y$, $B = dzd^2x - dxd^2z$, $C = dxd^2y - dyd^2x$. Les deux premières équations sont donc réécrites :

$$\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}'' \rangle = \frac{1}{\rho^2} \qquad (1)$$
$$\langle \mathbf{c}' \wedge \mathbf{c}'', \mathbf{c}''' \rangle = \frac{1}{\omega\rho^2} \qquad (2)$$
$$\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}' \rangle = 1 \qquad (3)$$

En différentiant l'équation (3), on obtient :

$$\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}'' \rangle = 0 \quad (4)$$

En différentiant la première, on obtient :

$$\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}''' \rangle = 0 \quad (5)$$

On déduit de la seconde, en dérivant :

$$\langle \mathbf{c}' \wedge \mathbf{c}'', \mathbf{c}'''' \rangle = 0 \qquad \text{car} \qquad \langle \mathbf{c}'' \wedge \mathbf{c}'', \mathbf{c}''' \rangle + \langle \mathbf{c}' \wedge \mathbf{c}''', \mathbf{c}''' \rangle = 0 + 0 = 0$$

équation que l'on réecrit :

$$\langle \mathbf{c}'' \wedge \mathbf{c}'''', \mathbf{c}' \rangle = 0 \qquad (6)$$

Mais en différentiant une première fois (4), et en tenant compte de (5), on obtient :

$$\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}''' \rangle = 0$$

puis en différentiant à nouveau, toujour en tenant compte de (5) :

$$\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}'''' \rangle = 0$$

ce qui prouve que le vecteur $\mathbf{c}'' \wedge \mathbf{c}''''$ est colinéaire à $\mathbf{c}'$, mais alors l'équation (6) prouve que

$$\mathbf{c}'' \wedge \mathbf{c}'''' = 0 \qquad (7)$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ; dans un premier temps, il exite un vecteur $\mathbf{a}$ tel que

$$\mathbf{c}'' \wedge \mathbf{c}''' = \mathbf{a} \qquad (8)$$

Mais alors, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}'' \rangle = 0$ et en intégrant, il existe k tel que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}' \rangle = k \qquad (9)$$

C'est le premier résultat de Puiseux : le vecteur tangent de la courbe cherchée fait un angle constant avec une direction fixe. On sait que cela signifie que la courbe est une hélice (cylindrique). Il ne reste plus qu'à montrer que c'est une hélice circulaire.

7 Le problème de Bertrand

a. Courbes parallèles

Donnons-nous dans le plan une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par longueur d'arc $\mathbf{c}(s)$, et cherchons une courbe $\mathscr{C}'$, donnée $\mathbf{c}_1(s)$ telle que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ aient même famille de normales. Il existe une fonction $\lambda(s)$ telle que

$$\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}(s) + \lambda(s)\mathbf{n}$$

Alors

$$\mathbf{c}_1'(s) = \mathbf{c}'(s) + \lambda'(s)\mathbf{n} - \lambda(s)\kappa\mathbf{t} = (1 - \lambda(s)\kappa)\mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n}$$

et la courbe sera solution lorsque ce vecteur sera colinéaire au vecteur $\mathbf{t}$, donc si λ est une fonction constante. On en déduit que les courbes solutions sont une infinité, on les appelle « courbes parallèles » à la courbe . En prime, il y a un point singulier sur la courbe parallèle lorsque $\lambda = \frac{1}{\kappa}$, c'est-à-dire que la développée de $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points singuliers des courbes parallèles.

b. Les courbes de Bertrand

Il s'agit d'un problème posé et résolu par Joseph Bertrand [1850] : on recherche les courbes $\mathscr{C}$ telles que les normales principales soient en même temps normales principales d'une autre courbe. On trouve qu'elles sont caractérisées par le fait qu'il existe une relation linéaire entre la courbure et la torsion. Rappelons que le point de départ de Bertrand est différent, il s'intéresse aux surfaces réglées qui sont ou non les surfaces engendrées par les normales principales d'une courbe à double courbure.

c. Étude directe

Soit $c(s)$ la courbe cherchée. La seconde courbe sera donnée par

$$\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}(s) + \lambda(s)\mathbf{n}$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{c}_1(s)) = \mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n} + \lambda(s)(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = (1 - \lambda(s)\kappa)\mathbf{t} + \lambda'(s)\mathbf{n} + \lambda(s)\tau\mathbf{b}$$

et ce vecteur tangent à $\mathscr{C}_1$ doit être orthogonal à $\mathbf{n}$ donc $\lambda(s) = \lambda$ est une constante. Il suffit maintenant que le plan osculateur de $\mathscr{C}_1$ contienne $\mathbf{n}$. On dérive donc une seconde fois :

$$\frac{d^2}{ds^2}(\mathbf{c}_1(s)) = (-\lambda\kappa')\mathbf{t} + (\kappa - \lambda\kappa^2 - \lambda\tau^2)\mathbf{n} + \lambda\tau'\mathbf{b}$$

et, par exemple en annulant le produit mixte des deux vecteurs dérivés avec le vecteur $\mathbf{n}$, on obtient

$$\lambda\kappa'\tau + \lambda\kappa\tau' - \tau' = 0.$$

Si la torsion est nulle, cette condition est satisfaite : les courbes de Bertrand sont alors toutes les courbes (régulières), les courbes associées sont les courbes parallèles. On peut d'ailleurs penser que c'est cette situation que Bertrand voulait généraliser.

Si par contre on se place sur un intervalle où la torsion n'est pas nulle, la condition précédente équivaut à

$$\lambda\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = \left(\frac{1}{\tau}\right)'$$

et, en intégrant, il existe une constante μ telle que

$$\kappa + \frac{\mu}{\lambda}\tau = \frac{1}{\lambda}$$

ou

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1.$$

On a donc une relation affine entre courbure et torsion.

Examinons maintenant les tangentes aux deux courbes. Le calcul précédent donne maintenant

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{c}_1(s)) = (\mu\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b})\tau$$

et comme μ et λ sont constants, on obtient que les deux vecteurs tangents font un angle constant. Cet angle α a pour tangente le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

d. Réciproque

Si on suppose que pour une courbe $\mathscr{C}$, il existe une relation affine entre courbure et torsion, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une compagne de Bertrand : on peut poser $\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}(s) + \lambda\mathbf{n}(s)$, et on montre que la normale principale de cette courbe $\mathscr{C}_1$ coïncide avec la normale à la courbe initiale. Soit en effet

$$\mathbf{c}_1'(s) = \mathbf{t}(s) + \lambda(-\kappa\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s)) = (\mu\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b})\tau.$$

Mais alors

$$\frac{d}{ds}((\mu\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b})) = (\mu\kappa - \tau)\mathbf{n}$$

et donc le plan osculateur de cette courbe est le plan engendré par $\mathbf{c}_1'$ et $\mathbf{n}$. Comme ces deux vecteurs sont orthogonaux, la normale principale de la courbe $\mathscr{C}_1$ est donc la même que la normale principale de la courbe $\mathscr{C}$.

Question supplémentaire : qu'en est-il de la courbure et de la torsion d'une compagne ? Est-il possible que la courbe et sa compagne ait même courbure (et donc même torsion) en chaque point ? Il est possible de faire un calcul direct de la courbure de la compagne. En écrivant la relation affine sous la forme

$$\kappa + \tau \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{a}$$

on a donc

$$\mathbf{c}_1'(s) = \mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} = \frac{a\tau}{\sin\alpha}(\cos\alpha\mathbf{t} + \sin\alpha\mathbf{b})$$

On a donc un vecteur tangent

$$\mathbf{t}_1 = \cos\alpha\mathbf{t} + \sin\alpha\mathbf{b}$$

et

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\mathbf{n}$$

d'où la courbure

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1}{a\tau}(\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\sin\alpha \\
&= \frac{1}{a\tau}\left(\left(\frac{\sin\alpha}{a} - \tau\cos\alpha\right)\cos\alpha - \tau\sin^2\alpha\right) \\
&= \frac{\sin\alpha}{a^2\tau} - \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$1 + a\kappa_1 = \frac{\sin\alpha}{a\tau} \qquad \text{et} \qquad 1 - a\kappa = a\tau\cot\alpha$$

Le produit est donc constant

$$(1 + a\kappa_1)(1 - a\kappa) = \cos\alpha.$$

e. Cas particuliers

Si la torsion est nulle, la courbe est plane, et on a déjà observé que toute courbe a une infinité de compagnes de Bertrand. Supposons que la constante μ est nulle (et donc que l'angle α est droit) : la courbe est alors une courbe de courbure constante. Comme λ est alors le rayon de courbure, la compagne est le lieu des centres de courbure, et réciproquement la courbe initiale est le lieu des centres de courbure de la compagne. C'est l'exemple étudié par Monge. Si courbure et torsion sont toutes deux constantes, la courbe est une hélice circulaire ; elle admet une infinité de compagnes.

Étudions plus précisément ce dernier cas. Soit $\mathscr{H}(a,b)$ une hélice circulaire. Une relation affine entre $\kappa = \frac{a}{a^+b^2}$ et $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$ de la forme

$$\kappa + \tau\,\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{A}$$

est possible d'une infinité de façons. Fixons-en une. La compagne admet l'équation $\mathbf{c}_1(s) = \mathbf{c}(s) + A\mathbf{n}$ soit, avec les notations habituelles

$$\begin{cases} x(t) = (a - A)\cos t \\ y(t) = (a - A)\sin t \\ z(t) = bt \end{cases}$$

C'est donc une hélice de même axe et de même normale pour le paramètre t. On peut calculer les courbures de ces deux hélices et, éventuellement, vérifier la relation obtenue plus haut.

8 Courbes à courbure constante, à torsion constante

En utilisant la première formule de Serret-Frenet, on voit qu'on peut obtenir une courbe à courbure constante en posant

$$\mathbf{c}(\sigma) = R\int \mathbf{w}(\sigma)\,d\sigma$$

où R est constant et $\mathbf{w}$ est une courbe sur la sphère unité, paramétrée par son arc σ.

Les formules de Serret-Frenet donnent de même

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\tau}\mathbf{b} \wedge \frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

Si τ est constant, on peut donc intégrer, en prenant pour **b** une courbe quelconque sur la sphère unité, paramétrée par longueur d'arc. Cela s'écrit

$$\mathbf{c}(\sigma) = \frac{1}{\tau}\int \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}' d\sigma.$$

On peut également l'écrire, en prenant trois fonctions h, k, l :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\tau}\int \frac{kdl - ldk}{h^2+k^2+l^2} \\ y = \frac{1}{\tau}\int \frac{ldh - hdl}{h^2+k^2+l^2} \\ z = \frac{1}{\tau}\int \frac{hdk - kdh}{h^2+k^2+l^2} \end{cases}$$

Bibliographie

Abbréviations

AAS	:	Archives de l'Académie des sciences (Paris).
CRAS	:	*Compte rendus de l'Académie des sciences.*
DSB	:	*Dictionary of Scientific Biography*, C. Gillipsie éd., New York : Charles Scribner'sons, 16 vol., 1970-1980.
HARS	:	*Histoire de l'Académie royale des sciences*, partie « Histoire. »
MARS	:	*Mémoires de l'Académie royale des sciences*, partie « Mémoires. »
RMAS	:	*Registres [manuscrits] de l'Académie des sciences.*

Manuscrits

FOURIER (Joseph)

[1801a] Notes sur les développées des lignes courbes, m.f.fr 22519, f. 5-7, 1801.

[1801b] Sur les propriétés des lignes courbes, m.f.fr 22519, f. 23-27, 1801.

[1801c] Notes sur les propriétés des lignes courbes, m.f.fr 22519, f. 28-32, 1801.

LACROIX (Sylvestre François)

[1790] Mémoire sur les surfaces développables et les équations différentielles ordinaires à trois variables, AAS : pochette de séance AAS, 1er septembre 1790.

Imprimés

AOUST (l'Abbé)

[1869] *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, Paris : Gauthier-Villars, 1869.

[1873] *Analyse infinitésimale des courbes planes*, Paris : Gauthier-Villars, 1873.

[1876] *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace*, Paris : Gauthier-Villars, 1876.

APPELL (Paul)

[1893] Notice sur la vie et les travaux de Pierre Ossian Bonnet, *CRAS*, 117 (1893), p. 1013-1024.

ARAGO (François)

[1851] *Notices biographiques*, Paris : Gide et Baudry, 1851.

BERNOULLI (Johann)

[*Opera Omnia*] *Opera Omnia*, 4 vol., 1742 ; rééd. Georg Olms,1968.

[1728] Problema : in superficie curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam, [Opera Omnia] IV, p. 108-128, 1728.

[1732] Problème sur les épicycloïdes sphériques, *MARS 1732* (1735) p. 237-255.

BERTRAND (Joseph)

[1848] Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13, 1848, p. 423-424.

[1850] Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 15, 1850, p. 332-350.

[1864] *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

BINET (Jacques)

[1815] Mémoire sur l'expression analytique de l'élasticité et de la raideur des courbes à double courbure, *Journal de l'École polytechnique*, 17e cahier (1815), p. 418-456.

BIOT (Jean-Baptiste)

[1802] *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré*, Paris : Duprat, 1802.

BONNET (Pierre-Ossian)

[1853] Mémoire sur les courbes à double courbure, *Nouvelles annales de mathématiques*, 12 (1853), p. 192-195.

BOS (Henk J.M.)

[1974] Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14 (1974), p. 1-90.

BOYER (Carl B.)

[1949] *The history of the calculus and its conceptual development*, New York : Hafner Publishing Company, 1949 ; rééd. Dover, 1959

[1938] *A history of mathematics*, New York : John Wiley & Sons, 1938 ; rééd. Dover, 1968.

BRUNET (Pierre)

[1952] *La vie et l'œuvre de Clairaut*, Paris : PUF, 1952.

CALLOT (Jean-Pierre), CAMUS (Michel), ESAMBERT (Bernard), BOUTTES (Jacques)

[1993] *Histoire et prospective de l'École polytechnique*, Paris : Lavauzelle, 1993.

CAUCHY (Augustin)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars, 1882-1974.

[1823] *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823 ; *Œuvres* (II)-4.

[1826a] *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*, Paris, 1826 ; *Œuvres* (II)-5.

[1826b] *Exercices de mathématiques*, Paris, 1826 ; *Œuvres* (II)-6.

CHARBONNEAU (Louis)

[1994] Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier, *Cahier d'histoire et de philosophie des sciences*, n°42, 1994.

CHASLES (Michel)

[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles : M. Hayez, 1837.

CLAIRAUT (Alexis-Claude)

[1731] *Recherches sur les courbes à double courbure*, Paris, 1731.

[1732] Des épicycloïdes sphériques, *MARS 1732* (1737), p. 289-294.

[1733] Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M.Clairaut, *MARS 1733* (1738), p. 406-416.

COOLIDGE (Julian L.)

[1940] *A history of geometrical methods*, New York : Oxford University Press, 1940.

[1948] The beginnings of analytic geometry in three dimensions, *American Mathematical Monthly*, 55 (1948), p. 76-86.

DARBOUX (Gaston)
[1887] *Leçons sur la théorie des surfaces*, Paris : Gauthiers-Villars, 1887.
[1888] Notice sur la vie et l'œuvre de Paul Serret, *CRAS*, 127 (1898), p. 37-38.

DESCARTES (René)
[1637] *La géométrie*, Leyde , 1637.

DHOMBRES (Jean), ROBERT (Jean-Bernard)
[1998] *Fourier*, Paris : Belin, 1998.

DUHAMEL (Jean-Marie)
[1856] *Calcul infinitésimal*, Paris : Mallet-Bachelier, 1856.

EULER (Leonhard)
[*Opera Omnia*] *Opera Omnia*, Bâle : Birkhäuser, 1911- .
[1771] De solidis quorum superficiem in planum explicare licet, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*,16 (1771), p.5-34 ; *Opera Omnia* (I) 28, p. 161-186.
[1775] De Motu Turbinatorio Chordarum Musicarum, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*,19 (1775), p. 340-370 ; *Opera Omnia* (II) 11, p. 158-179.
[1786] Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, I (1786), p. 19-57 ; *Opera Omnia* (I) 28,p. 348-381.

FERRARO (Giovanni)
[2004] Differentials ans differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus, *Historia Mathematica*, 31 (2004), p. 34-61.

FONTENELLE (Bernard de)
[1722] Sur les courbes considérées exactement comme courbes ou comme poligones infinis, *HARS 1722* (1724), p. 74-77.
[1724] Sur la quadrature de la moitié d'une courbe, qui est la compagne de la cycloïde, *HARS 1724)* (1726), p. 65-67.

FOURCY (Ambroise)
[1828/1987] *Histoire de l'École polytechnique*, Paris, 1828 ; rééd. Paris : Belin, 1987.

FRENET (Jean-Frédéric)

[1852] Sur les courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1852), p. 437-447.

[1853] Théorèmes sur les courbes gauches, *Nouvelles annales de mathématiques*, 12 (1853), p. 365-372.

[1864] Lettre aux rédacteurs, *Nouvelles annales de mathématiques*, (II) 3 (1864), p. 284-286.

FREYCINET (Charles de)

[1860] *L'analyse infinitésimale*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860.

GAUSS (Carl Friedrich)

[1828] Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Comm. Soc. Gott.*, 6, p. 99-146.

GILAIN (Christian)

[1989] Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique, *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, 5 (1989).

GISPERT (Hélène)

[1996] Une comparaison des journaux français et italiens dans les années 1860-1875, dans *L'Europe mathématique*, Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, éd. C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter, 1996, p. 389-406.

GOBY (Jean-Édouard)

[1948] Ingénieurs et techniciens français en Égypte, *Société des ingénieurs civils de France*, Paris, 1948.

[1987] Premier institut d'Égypte, compte rendu des séances, *Institut de France, Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, 1987

GRATTAN-GUINESS (Ivor)

[1990] *Convolutions in French Mathematics*, Basel : Birkhaüser, 1990.

GRAY (Jeremy)

[1996] Nineteenth-century mathematical Europe(s), dans *L'Europe mathématique* Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, éd. C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter, 1996, p. 347-359.

HUMBERT (Pierre)

[1953] L'œuvre mathématique d'Henri Pitot, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 6 (1953).

HUYGENS (Christian)

[1673] *Horologium oscillatorium*, Paris, 1673.

ITARD (Jean)

[1984] *Essais d'histoire des mathématiques*, Paris : Librairie Blanchard, 1984.

JACOBI (Charles Gustav Jacob)

[1834] Zur Theorie des Curven, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 14 (1834), p. 56-63.

[1836] Nota de erroribus quibusdam geometricis, quia in theoria functionum leguntur, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 16 (1836), p. 342-343.

JOMARD (Edme-François)

[1821] *Description de l'Égypte*, Paris : Panckouke, 1821.

KLINE (Morris)

[1972] *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York et Oxford : Oxford University Press, 1972.

LACROIX (Sylvestre François)

[1795] *Essai de géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, Paris : Régent et Bernard, 1795.

[1797/1810] *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome 1, Paris : Duprat, 1797, Paris : Courcier, 2e éd. 1810

[1802/1806/1828/1837]

Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris : Duprat, 1802, Paris : Courcier, 2e éd. 1806, Paris : Bachelier, 4e éd. 1828, Paris : Bachelier, 5e éd. 1837

LAGRANGE (Joseph-Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres de Lagrange*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.

[1797] Théorie des fonctions analytiques, *Journal de l'École polytechnique*, 9e cahier (1797) ; *Œuvres*, t. IX.

[1799] Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques, *Journal de l'École polytechnique*, 6e cahier (1799) ; *Œuvres*, t. VII, p. 325-328.

LANCRET (Michel-Ange)

[1802] Mémoire sur les courbes à double courbure, *Mémoires présentés à l'Institut des sciences, lettres et arts par divers savants, 1802*, tome 1, (1806), p. 416-454.

[1804a] Notes, *Bulletin des sciences* (Société philomathique), n° 87, p. 212.

[1804b] Des courbes à double courbure, *Correspondance sur l'École impériale polytechnique*, n° 3, p. 51-52.

[1806] Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables, *Mémoires présentés à l'Institut des sciences, lettres et arts par divers savants,*, tome 2, *1806* (1811), p. 1-79.

LANGEVIN (Rémi)

[2002] Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure, *De la méthode, recherches en histoire et philosophie des mathématiques*, dans M. Serfati (éd.), Besançon : PUFC, 2002 .

LEROY (Charles François Antoine)

[1835] *Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, Paris : Bachelier, 2e éd., 1835.

L'HOSPITAL (Guillaume-François-Antoine de)

[1696] *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris : Imprimerie Royale, 1696.

LIOUVILLE (Joseph)

[1850] « Notes » dans Monge [1807/1850], p. 547-638.

LUMISTE (Ülo)

[1997] Martin Bartels as Rechercher : His Contribution to Analytical Methods in Geometry, *Historia Mathematica*, 24 (1997), p. 46-65.

LÜTZEN (Jesper)

[1990] *Joseph Liouville, 1809-1882, Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York : Springer, 1990.

MOLINS (Henri)

[1843a] Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8 (1843), p. 132-144.

[1843b] De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8 (1843), p. 379-390.

MONGE (Gaspard)

[1780] Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres, *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées*, 9, p. 382-440.

[1781] Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, *MARS 1781* (1784), p. 666-704.

[1784a] Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes, *MARS 1784* (1787), p. 85-117.

[1784b] Supplément où l'on fait voir que les équations au différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilités ne sont pas satisfaites, sont suceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées, *MARS 1784* (1787), p. 502-576.

[1785] Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure, *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées*, 10, p. 511-550.

[1795a/1801] *Feuilles d'analyse appliquées à la géométrie*, 1795 ; 2e éd. Paris : Baudouin, 1801

[1795b] Leçons de Monge, *L'École normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, éd. par J.Dhombres, Paris : Dunod, rééd. 1995, (1re ed. 1795.)

[1799a] *Géométrie descriptive*, Paris : Baudouin, 1799.

[1799b] Des courbes à double courbure *Journal de l'École polytechnique*, 6e cahier (1799), p. 345-363.

[1807/1850] *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris : Bernard, 1807, nouveau titre des *Feuilles d'analyse appliquées à la géométrie* [1795a] ; rééd. (avec des notes de Liouville), Paris : Bachelier, 1850.

NAVIER (Claude)

[1856] *Résumé des leçons d'analyse données à l'École polytechnique*, Paris : Dalmont, 1856.

NIELSEN (Niels)

[1929] *Géomètres français sous la Révolution*, Copenhague : Levin & Munksgaard, 1929.

[1935] *Géomètres français du XVIII^{e} siècle*, Paris : Gauthier-Villars et Copenhague : Levin, 1935.

OLIVIER (Théodore)

[1833] Construction des points d'inflexion de la transformée d'une courbe plane ou à double courbure tracée sur une surface développable, *Journal de l'École polytechnique* cahier 22 (1833), p. 78-123.

[1834] Construction des centres de courbure des Épicycloïdes planes et sphériques, *Journal de l'École polytechnique* cahier 23 (1834), p. 85-152.

[1835a] De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 24 (1835), p. 61-91.

[1835b] Addition au mémoire sur la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 24 (1835), p. 252-263.

[1844] *Cours de géométrie descriptive*, Paris : Carillan-Gœury et Vve Dalmont, 1844.

PITOT (Henri)

[1724] Quadrature de la moitié d'une courbe appelée la compagne de la cycloïde, *MARS 1724* (1726), p. 107-113.

POINSOT (Louis)

[1837] Observation de M. Poinsot, relative à une note présentée par M.Poisson, concernant un passage de la Théorie des fonctions de Lagrange, *CRAS 1837*, 4 (1837), p. 559.

POISSON (Denis)

[1837a] Note sur un passage de la seconde partie de la théorie des fonctions analytiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837), p. 140-146.

[1837b] Remarque sur un article du dernier Journal de M.Crelle, *CRAS 1837*, 4 (1837), p. 562.

[1837c] Addition à la note de M. Poisson insérée dans le numéro précédent de ce journal, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837), p. 589.

PUISEUX (Victor)

[1842] Problème de géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1842), p. 65-69.

[1851] Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1851), p. 208-211.

REICH (Karin)

[1973] Die Geschichte des Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828-1868), *Archive for History of Exact Sciences*, 11 (1973), p. 273-382.

RÉAUMUR (Louis)

[1709] Méthode générale pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une courbe quelconque vers le même côté sous des angles égaux moindres ou plus grands qu'un droit ; et pour connaître la nature de la Courbe décrite par une infinité de tels points d'intersection, *MARS 1709* (1733), p. 149-162.

REYNEAU (René-Antoine Ferchault de)

[1708] *Analyse démontrée, ou la méthode pour résoudre des problèmes de mathématiques, et d'apprendre facilement ces sciences*, 2 vol., Paris : Gabriel-François Quillau, 1708.

ROBERVAL (Gilles Personne de)

[1730] Traité des indivisibles, *MARS* (1730), vol. 6, p. 250-267.

SAINT-VENANT (Adhémar Jean-Claude Barré de)

[1845a] Mémoire sur les lignes courbes non planes, *Journal de l'École polytechnique*, 30e cahier (1845), p. 1-76.

[1845b] *Tableau de formules de la théorie des courbes dans l'espace*, Paris : Bachelier, 1845.

[1855] *De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*, Paris : Imprimerie impériale, 1855.

SAKAROVITCH (Joël)

[1998] *Épures d'architecture, de la coupe des pierres à la géométrie descriptive*, Bâle : Birkhäuser, 1998.

SERRET (Joseph-Alfred)

[1848] Sur l'intégration de l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13 (1848), p. 353-360.

[1851a] Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1851), p. 193-207.

[1851b] Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1851), p. 499-500.

[1868] *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris : Gauthier-Villars, 1868.

SERRET (Paul)

[1859] *Théorie géométrique des lignes à double courbure, théorie mécanique des lignes à double courbure*, Paris : Mallet-Bachelier, 1859.

[1859] *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860.

SPIVAK (Michaël)

[1975] *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Houston : Publish and Perish, 1975.

STRUIK (Dirk J.)

[1933] Outline of a History of Differential Geometry, *ISIS*, XIX (1933), 55.

[1950] *Lectures on Classical Differential Geometry*, Reading : Addison-Wesley, 1950 ; rééd. New York : Dover, 1988.

TATON (René)

[1950a] *Gaspard Monge*, Bâle : Birkaüser, 1950.

[1950b] Un inédit de Monge : réflexion sur les équations aux différences partielles, *Osiris*, 9, (1950), p .

[1951] *L'Œuvre scientifique de Monge*, Paris : PUF, 1951.

[1953] Sylvestre François Lacroix (1765-1843) : mathématicien, professeur et historien des sciences, *Actes du septième congrès international d'histoire des sciences*, 1953.

[1964] L'École polytechnique et le renouveau de la géométrie analytique, *L'aventure de la science, Mélanges Alexandre Koyré*, t.1, Paris : Hermann, 1964, p. 552-564 ; rééd. dans *René Taton études d'histoire des sciences*, Turnhout : Brepols, 2000, p. 351-360.

TEIXEIRA (Francisco Gomes)

[1909] *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Lisbonne : Université de Coïmbre, 1909, rééd. Paris : Gabay.

TINSEAU (Charles de)

[1780a] Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure, *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées*, 9, p. 593-624.

[1780b] Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites, *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées*, 9, p. 625-642.

TRUESDELL (Clifford)

[1960] *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788*, dans Euler [*Opera Omnia*] (II).

VALLÉE (Louis-Léger)

[1819] *Traité de géométrie descriptive*, Paris : Courcier, 1819.

VOIZOT

[1850] Note sur la théorie des courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées* 15 (1850), p. 481-486.

[1852] Deuxième note sur la théorie des courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées* 17 (1852), p. 253-254.