1. Топологічні простори

В курсі математичного аналізу [1, с. 26] уже розглядалися поняття околу точки, відкритої і замкненої множин, точки дотику, граничної точки, границі послідовності в просторі $\mathbb{R}$ тощо. Всі ці поняття визначалися за допомогою метрики простору $\mathbb{R}$ і відбивали певні властивості, притаманні множинам, за допомогою яких ми могли описувати основну концепцію цієї теорії — близькість між точками. Адже саме поняття близькості між точками (в розумінні малої відстані) є базовим для таких головних понять математичного аналізу як збіжність послідовностей і неперервність функцій.

Відносним недоліком цього підходу є очевидна залежність від метрики, уведеної в просторі. Тому постало питання, чи не можна побудувати більш абстрактну конструкцію, за допомогою якої можна було б описати ідеї, згадані вище. Серед дослідників цієї проблеми слід відзначити французьких математиків М. Фреше (1906), М.Рісса (1907–1908), німецького математика Ф.Хаусдорфа (1914), польського математика К.Куратовського (1922) і радянського математика П.Александрова (1924). В результаті досліджень цих та багатьох інших математиків виникла нова математична дисципліна — загальна топологія, предметом якої є вивчення ідеї про неперервність на максимально абстрактному рівні.

В цій та наступній лекціях ми введемо в розгляд ряд важливих топологічних понять. Це дозволить нам вийти на більш високий рівень абстракції і опанувати ідеї, що пронизують майже всі розділи математики. Не буде великим перебільшенням сказати, що в певному розумінні топологія разом з алгеброю є скелетом сучасної математики, а *функціональний аналіз* — це розділ математики, головною задачею якого є дослідження нескінченновимірних просторів та їх відображень.

Озн. 1.1. *Нехай X — множина елементів, яку ми будемо називати носієм.* ***Топологією*** в *X називається довільна система* τ *його підмножин, яка задовольняє таким умовам* ***(аксіомам Александрова)****:*

A1. $\varnothing, X \in \tau$.

A2. $G_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$, де *A — довільна множина.*

A3. $G_\alpha \in \tau,\ \alpha = 1, 2, ..., n \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \in \tau$.

Інакше кажучи, топологічною структурою називається система множин, замкнена відносно довільного об'єднання і скінченого перетину.

Озн. 1.2. *Пара* $T = (X, \tau)$ *називається* ***топологічним простором****.*

Приклад 1.1. Нехай X — довільна множина, $\tau = 2^X$ — множина всіх підмножин *X*. Пара $\left(X, 2^X\right)$ називається простором з *дискретною (максимальною) топологією*.

Приклад 1.2. Нехай *X* — довільна множина, $\tau = \{\varnothing, X\}$. Пара (X, τ) називається простором з *тривіальною (мінімальною, або антидискретною) топологією*.

Зрозуміло, що на одній і тій же множині *X* можна ввести різні топології, утворюючи різні топологічні простори. Припустимо, що на носії *X* введено дві топології — τ_1 і τ_2. Вони визначають два топологічні простори: $T_1 = (X, \tau_1)$ і $T_2 = (X, \tau_2)$.

Говорять, що топологія τ_1 є *сильнішою*, або *тонкішою*, ніж топологія τ_2, якщо $\tau_2 \subset \tau_1$. Відповідно, топологія τ_2 є *слабкішою*, або *грубішою*, ніж топологія τ_1. Легко бачити, що найслабкішою є тривіальна топологія, а найсильнішою — дискретна.

Зауваження 1.1. Множина **всіх** топологій не є цілком упорядкованою, тобто не всі топології можна порівнювати одну з одною. Наприклад, наступні топології (зв'язні двокрапки) порівнювати не можна: $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$.

Озн. 1.3. *Множини, що належать топології τ, називаються **відкритими**. Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються **замкненими**.*

Наприклад, множина всіх цілих чисел Z замкнена в R^1.

Зауваження 1.2. Топологія включає в себе **всі** відкриті множини. Водночас, треба зауважити, що поняття відкритих і замкнених множин не є взаємовиключними. Одна і та ж множина може бути одночасно і відкритою і замкненою (наприклад, $\varnothing$ або *X*), або ані відкритою, ані замкненою (множини раціональних та ірраціональних чисел в R^1). Отже, топологія може містити і замкнені множини, якщо вони одночасно є відкритими.

Як бачимо, поняття відкритої множини в топологічному просторі *постулюється* — для того щоб довести, що деяка множина *M* в топологічному просторі *T* є відкритою, треба довести, що вона належить його топології.

Озн. 1.4.Нехай (X, τ) — топологічний простір, $M \subset X$. Топологія (M, τ_M), де $\tau_M = \{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\}$, називається *індукованою*.

Озн. 1.5. *Топологічний простір* (X, τ) *називається* ***зв'язним****, якщо лише множини* X *і* $\varnothing$ *є замкненими й відкритими одночасно.*

Озн. 1.6. *Множина* M *топологічного простору* (X, τ) *називається* ***зв'язною****, якщо топологічний простір* (M, τ_M) *є зв'язним.*

Приклад 1.4. Тривіальний (антидискретний) простір і зв'язна двокрапка є зв'язними просторами.

Озн. 1.7. *Довільна відкрита множина* $G \subset T$, *що містить точку* $x \in T$, *називається її* ***околом****.*

Озн. 1.8. *Точка* $x \in T$ *називається* ***точкою дотику*** *множини* $M \subset T$, *якщо кожний окіл* $O(x)$ *точки x містить хоча б одну точку із M:* $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \neq \varnothing$.

Озн. 1.9. *Точка* $x \in T$ *називається* ***граничною точкою*** *множини* $M \subset T$, *якщо кожний окіл точки x містить хоча б одну точку із M, що не збігається з x:* $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap \{M \setminus \{x\}\} \neq \varnothing$

Озн. 1.10. *Сукупність точок дотику множини* $M \subset T$ *називається* **замиканням** *множини M і позначається* $\overline{M}$.

Озн. 1.11. *Сукупність* ***граничних точок*** *множини* $M \subset T$ *називається* ***похідною*** *множини M і позначається* M'.

Теорема 1.1 (про властивості замикання). *Замикання задовольняє наступним умовам:*

1) $M \subset \overline{M}$;
2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (ідемпотентність);
3) $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$ (монотонність);
4) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ (адитивність).
5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Доведення.

1). $M \subset \overline{M}$.

Нехай $x \in M$. Тоді x — точка дотику множини M. Отже, $x \in \overline{M}$.

2). $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

Внаслідок твердження 1) $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Отже достатньо довести, що $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$. Нехай $x_0 \in \overline{\overline{M}}$ і U_0 — довільний окіл точки x_0. Оскільки $U_0 \cap \overline{M} \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику), то існує точка $y_0 \in U_0 \cap \overline{M}$. Отже, множину U_0 можна вважати околом точки y_0. Оскільки $y_0 \in \overline{M}$, то $U_0 \cap M \neq \varnothing$. Значить, точка x_0 є точкою дотику множини M, тобто $x_0 \in \overline{M}$.

3) $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$.

Нехай $x_0 \in \overline{M}$ і U_0 — довільний окіл точки x_0. Оскільки $U_0 \cap M \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику) і $M \subset N$ (за умовою), то $U_0 \cap N \neq \varnothing$. Отже, x_0 — точка дотику множини N, тобто $x_0 \in \overline{N}$. Таким чином, $\overline{M} \subset \overline{N}$.

4) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Із очевидних включень $M \subset M \cup N$ і $N \subset M \cup N$ внаслідок монотонності операції замикання випливає, що $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ і $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Отже, $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. З іншого боку, припустимо, що $x \notin \overline{M} \cup \overline{N}$, тоді $x \notin \overline{M}$ і $x \notin \overline{N}$. Отже, існує такий окіл точки x, у якому немає точок з множини $M \cup N$, тобто $x \notin \overline{M \cup N}$. Таким чином, за законом заперечення, $x \in \overline{M \cup N} \Rightarrow x \in \overline{M} \cup \overline{N}$, тобто $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$.

5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Припустимо, що замикання порожньої множини не є порожньою множиною: $x \in \bar{\varnothing} \Rightarrow \forall O(x) : O(x) \bigcap \varnothing \neq \varnothing$. Але $\forall N \subset X \ N \bigcap \varnothing = \varnothing$. Отже, $\bar{\varnothing} = \varnothing$.■

Теорема 1.2 (критерій замкненості). *Множина M топологічного простору X є замкненою тоді і лише тоді, коли $M = \bar{M}$, тобто коли вона містить всі свої точки дотику.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що *M* — замкнена множина, тобто $G = X \setminus M$ — відкрита множина. Оскільки, $M \subset \bar{M}$, достатньо довести, що $\bar{M} \subset M$. Дійсно, оскільки G — відкрита множина, вона є околом кожної своєї точки. До того ж $G \bigcap M = \varnothing$. Звідси випливає, то жодна точка $x \in G$ не може бути точкою дотику для множини *M*, отже всі точки дотику належать множині *M*, тобто $\bar{M} \subset M$.

$$G = X \setminus M \in \tau \Rightarrow G \bigcap M = \varnothing \Rightarrow \bar{M} \subset M.$$

Достатність. Припустимо, що $\bar{M} = M$. Доведемо, що $G = X \setminus M$ — відкрита множина (звідси випливатиме замкненість множини *M*). Нехай $x_0 \in G$. З цього випливає, що $x_0 \notin M$, а значить $x_0 \notin \bar{M}$. Тоді за означенням точки дотику існує окіл U_{x_0} такий, що $U_{x_0} \bigcap M = \varnothing$. Значить, $U_{x_0} \subset X \setminus M = G$, тобто $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau$.■

Наслідок 1.1. *Замикання $\bar{M}$ довільної множини M із простору X є замкненою множиною в X.*

Теорема 1.3. *Замикання довільної множини M простору (X, τ) збігається із перетином всіх замкнених множин, що містять множину M.*

$$\forall M \in (X, \tau) \ \bar{M} = \bigcap_{\alpha} F_\alpha, F_\alpha = \bar{F}_\alpha, M \subset F_\alpha.$$

Доведення. Нехай M — довільна множина із (X, τ) і $N = \bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}$, де $F_{\alpha} = \overline{F}_{\alpha}$, $M \subset F_{\alpha}$.

Покажемо включення $\bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha} \subseteq \overline{M}$.

$$N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \Rightarrow N \subseteq F_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow N \subseteq \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha.$$

Оскільки $\{F_{\alpha}\}$ — множина *усіх* замкнених множин, серед них є множина $\overline{M}$: $\exists \alpha_0 : F_{\alpha_0} = \overline{M}$. Отже,

$$N \in \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow N \in F_{\alpha_0} = \overline{M} \Rightarrow \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}.$$

Тепер покажемо включення $\overline{M} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}$. Розглянемо довільну замкнену множину F, що містить M: $\overline{F} = F$, $M \subset F$. Внаслідок монотонності замикання маємо:

$$\overline{F} = F, M \subset F \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{F} = F \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{M} \subset F_{\alpha}, F_{\alpha} = \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow \overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

Порівнюючи обидва включення, маємо

$$\overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}. \ \blacksquare$$

Наслідок 1.2. *Замикання довільної множини M простору X є найменшою замкненою множиною, що містить множину M.*

Озн. 1.12. *Нехай A і B — дві множини в топологічному просторі T. Множина A називається* ***щільною в B****, якщо* $\overline{A} \supset B$.

Зауваження 1.3. Множина A не обов'язково міститься в B: множина раціональних чисел є щільною в множині ірраціональних чисел і навпаки.

Озн. 1.13. *Якщо* $\overline{A} = X$, *множина A називається* ***скрізь щільною***.

Озн. 1.14. *Множина A називається* ***ніде не щільною****, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій підмножині множини X.*

Множина A є щільною в кожній непорожній відкритій множині, якщо $\forall U \in \tau, U \neq \varnothing\ \overline{A} \supset U$, тобто кожна точка множини U є точкою дотику множини A. Отже, $\forall x \in U\ \forall O(x) \in \tau\ \ O(x) \cap A \neq \varnothing.$ Заперечення цього твердження збігається з означенням ніде не щільної множини. Формальний запис означення має такий вигляд.

$$\exists U_0 \in \tau, U_0 \neq \varnothing\ \overline{A} \not\supset U_0 \Rightarrow \exists x_0 \in U_0\ \exists O(x_0) \in \tau : O(x_0) \cap A = \varnothing.$$

Озн. 1.15. *Простір T, що містить скрізь щільну зліченну множину, називається* ***сепарабельним****.*

Приклад 1.5. В топології числової прямої множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в множині всіх ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і навпаки.

Приклад 1.6. Найпростішими прикладами ніде не щільних множин є цілі числа просторі $\mathbb{R}$ і пряма в просторі $\mathbb{R}^2$.

Приклад 1.7. Зліченна множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною у просторі $\mathbb{R}$, отже простір $\mathbb{R}$ є сепарабельним.

З того, що $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ і $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, зокрема, випливає, що $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є ані відкритими, ані замкненими множинами.

Приклад 1.8. Зліченна множина всіх поліномів з раціональними коефіцієнтами за теоремою Вєйєрштрасса є скрізь щільною в просторі неперервних функцій $C[a,b]$. Отже, простір $C[a,b]$ є сепарабельним.

Література

1. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф, Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 26–27).
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А . Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 10–20).
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 32–50).