

Flächen, Gauß-Krümmung, erste und zweite Fundamentalform, theorema egregium

A. Hartmann (alexander.hartmann@stud.uni-goettingen.de)

12. April 2011

Ziel dieses Vortrags ist eine Einführung in einige Grundbegriffe der Differentialgeometrie wie insbesondere die Gauß-Krümmung, sowie die Herleitung des Theorema egregium von Gauß. Wir werden dazu zunächst zweidimensionale Mannigfaltigkeiten definieren und anschließend zur Betrachtung parametrisierter Flächen übergehen. Für diese werden wir die erste und zweite Fundamentalform sowie die Gauß-Krümmungsfunktion kennen lernen. Für letztere werden wir mehrere Formeln herleiten und schließlich das Theorema egregium von Gauß formulieren, welches uns gestattet, die Gauß-Krümmungsfunktion allein in Termen der ersten Fundamentalform auszudrücken. Abschließend werden in Beispielen die Gauß-Krümmungsfunktionen vier verschiedener Flächen berechnet.

1 Intrinsische und extrinsische Eigenschaften

Stellen wir uns eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen Raum vor. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine solche Fläche zu beschreiben, beispielsweise als Graph einer Funktion in zwei Variablen oder als Einbettung einer abstrakten Menge in den \mathbb{R}^3 . Flächen haben verschiedene Eigenschaften, welche folgendermaßen klassifiziert werden können.

- *Extrinsische Eigenschaften* (extrinsisch: von außen her) der Fläche verwenden eine Einbettung oder Formeln wie die Weingarten-Abbildung, welche auf einer Einbettung basieren.
- *Intrinsische Eigenschaften* (intrinsisch: von innen her) verwenden keine Einbettung, sondern lediglich eine Parametrisierung und daraus resultierende Größen wie deren Ableitungen oder die erste Fundamentalform.

Eine interessante Eigenschaft von Flächen ist ihre (Gauß-) Krümmung. Im Theorema egregium werden wir sehen, dass es sich dabei um eine intrinsische Eigenschaft der Fläche handelt.

2 Vorbereitungen für das Theorema egregium

Definition 2.1 (Zweidimensionale Mannigfaltigkeit). Eine *zweidimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein zusammenhängender Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis der Topologie von M , sodass für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \subseteq M$ sowie ein Homöomorphismus $\phi_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert, U_p also homöomorph zu einer offenen Menge in \mathbb{R}^2 ist. Hierbei sei \mathbb{R}^2 mit der Standardtopologie ausgestattet.

Das Paar (U_p, ϕ_p) heißt *Karte* von p auf M . Offensichtlich ist dies eine Karte für alle $q \in U_p$. Um die gesamte Mannigfaltigkeit zu erfassen, wählen wir eine Menge $A := \{(U_{p_i}, \phi_{p_i}) \mid i \in I\}$ von Karten, sodass $\{U_{p_i} \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von M ist. A heißt *Atlas* von M . Für $i, j \in I$ können wir einen *Kartenwechsel*

$$\phi_{p_j} \circ \phi_{p_i}^{-1}: \phi_{p_i}(U_{p_i} \cap U_{p_j}) \rightarrow \phi_{p_j}(U_{p_i} \cap U_{p_j})$$

definieren. Kartenwechsel sind Homöomorphismen. Sei $r \in \mathbb{N}$. M heißt *differenzierbar* oder *C^r -Mannigfaltigkeit*, falls alle Kartenwechsel r -mal stetig differenzierbar (also in C^r) sind.

Definition 2.2 (Fläche). Sei M eine zweidimensionale C^r -Mannigfaltigkeit. Gibt es eine Abbildung $m: M \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass für jede Karte ϕ_{p_i} die Abbildung $m \circ \phi_{p_i}^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^r -Funktion ist und die Skalarprodukte der partiellen Ableitungen von $m \circ \phi_{p_i}^{-1}$ nicht verschwinden, so heißt $m(M)$ *Fläche der Klasse C^r* im \mathbb{R}^3 . Die Funktionen $m \circ \phi_{p_i}^{-1}$ stellen lokal Parametrisierungen der Fläche dar und wir bezeichnen $m(M)$ auch als *parametrisierte Fläche*.

Definition 2.3 (Gauß-Krümmung). Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei $p \in \Sigma$, sodass eine offene Umgebung $U \subseteq \Sigma$ von p und eine C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, sodass p ein kritischer Punkt von f und U der Graph von f ist. Die *Gauß-Krümmung* von Σ an p ist die Determinante der Hesse-Matrix von f an p .

Da die Hessematrix symmetrisch ist, können wir sie diagonalisieren. Dies liefert uns zwei Richtungen sowie die zweiten Ableitungen der Funktion eingeschränkt auf die entsprechende Richtungsgerade. Die Gauß-Krümmung ist das Produkt dieser beiden zweiten Ableitungen. Anschaulich ist die Gauß-Krümmung in etwa das Produkt der Krümmungen an p in zwei speziellen Richtungen.

Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir durch geeignete Drehung einer regulären Fläche Σ jeden Punkt $p \in \Sigma$ zu einem kritischen Punkt machen. Somit liefert Definition 2.3 eine einfache Definition der Gauß-Krümmung für sämtliche Punkte einer regulären Fläche. *Regulär* bedeutet hier, dass wir Σ stückweise mit Abbildungen parametrisieren können, deren Differenziale an jeder Stelle vollen Rang haben.

Bemerkung 2.4.

1. Nach Definition 2.3 ist nicht klar, dass die Gauß-Krümmung wohldefiniert ist, da sie noch von der Funktion f abhängt.
2. Bei Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ können wir von negativen oder positiven zweiten Ableitungen auf Maxima, Minima oder Sattelpunkte schließen. Negative oder positive Krümmung lassen sich auf ähnliche Weise interpretieren.

Wir brauchen etwas Notation. Wir bezeichnen Punkte in \mathbb{R}^2 durch $u = (u^1, u^2)$. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 . Sei $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre (lokale) Parametrisierung. Für $i \in \{1, 2\}$ sei $x_i := \frac{\partial x}{\partial u^i}$. An einem Punkt u bilden dann $x_1(u)$ und $x_2(u)$ eine Basis für die Tangentialebene an die Fläche am Punkt $x(u)$. Für $i, j \in \{1, 2\}$ sei analog $x_{ij} := \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}$. Wir gehen hier von stetigen partiellen Ableitungen aus, sodass stets $x_{ij} = x_{ji}$ gilt. Sei ferner $n(u) = \pm \frac{x_1(u) \times x_2(u)}{\|x_1(u) \times x_2(u)\|_2}$ ein Normalenvektor der Fläche an $x(u)$.

Definition 2.5 (Erste und zweite Fundamentalform, Christoffel-Symbole zweiter Art). Für $i, j \in \{1, 2\}$ betrachten wir die C^r -Abbildungen

$$\begin{aligned} g_{ij}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & u &\mapsto \langle x_i(u), x_j(u) \rangle, \\ L_{ij}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & u &\mapsto \langle n(u), x_{ij}(u) \rangle. \end{aligned}$$

Die *erste Fundamentalform* (g_{ij}) und die *zweite Fundamentalform* (L_{ij}) entsprechen den Matrizen

$$(g_{ij}) := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (L_{ij}) := \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}.$$

Weil x_1, x_2 und n in jedem Punkt eine Basis bilden, können wir die *Christoffel-Symbole zweiter Art* Γ_{ij}^k eindeutig durch die Basisentwicklung

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n, \tag{1}$$

definieren, wobei wir die *Einsteinsche Summenkonvention* $a^k b_k := \sum_k a^k b_k$ verwendet haben.

Definition 2.6 (Weingarten-Abbildung). Für $u \in \mathbb{R}^2$ ist die *Weingarten-Abbildung*

$$(L_j^i)(u): \mathbb{R}x_1(u) \oplus \mathbb{R}x_2(u) \rightarrow \mathbb{R}x_1(u) \oplus \mathbb{R}x_2(u)$$

ein Endomorphismus der Tangentialebene. Er ist eindeutig festgelegt durch $L_j^i(u)x_i(u) = n_j(u) := \frac{\partial n}{\partial u^j}(u)$, wobei wir wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet haben.

Bemerkung 2.7. Damit die Aussage $L_j^i(u)x_i(u) = n_j(u)$ sinnvoll ist, muss stets $n_j(u)$ senkrecht zu $n(u)$ sein. Dies lässt sich schnell nachrechnen. Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts gilt $\langle n_j, n \rangle = \langle n, n_j \rangle$. Mit der Produktregel erhalten wir

$$\langle n_j, n \rangle = \frac{1}{2}(\langle n_j, n \rangle + \langle n, n_j \rangle) = \left(\frac{1}{2} \langle n, n \rangle \right)_j = \left(\frac{1}{2} \right)_j = 0.$$

Definition 2.8 (Antisymmetrisierung). Mithilfe der Klammern $[\]$ definieren wir die *Antisymmetrisierung* eines Paares von Indizes zwischen den Klammern:

$$a_{[ij]} := \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}).$$

Bemerkung 2.9. Wegen der Symmetrie des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^3 gilt $g_{[ij]} = 0$. Aus $x_{[ij]} = 0$ folgt $L_{[ij]} = 0$ sowie mit (1) außerdem $\Gamma_{[ij]}^k = 0$.

Im Folgenden werden uns Ableitungen mehrfach indizierter Größen begegnen. Wir verwenden dann ein Semikolon (;), um die Differentiationsrichtung zu kennzeichnen:

$$\Gamma_{ij;l}^k := \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l}.$$

Satz 2.10. Für alle $i, j, k, q \in \{1, 2\}$ gilt

$$\Gamma_{i[j;k]}^q + \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^q = -L_{i[j} L_{k]}^q.$$

Beweis. Es gilt $n_k = L_k^q x_q$ sowie $x_{mk} = \Gamma_{mk}^q x_q + L_{mk} n$. Mit Hilfe der Produktformel erhalten wir

$$\begin{aligned} x_{ij;k} &= (\Gamma_{ij}^m x_m + L_{ij} n)_k \\ &= \Gamma_{ij;k}^m x_m + \Gamma_{ij}^m x_{mk} + L_{ij;k} n + L_{ij} n_k \\ &= \Gamma_{ij;k}^m x_m + \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{mk}^q x_q + L_{mk} n) + L_{ij} (L_k^q x_q) + L_{ij;k} n. \end{aligned}$$

Schreiben wir für die Normalterme kurz $N_{ijk} := (\Gamma_{ij}^m L_{mk} + L_{ij;k}) n$, so gilt mit $\Gamma_{[mk]}^q = 0$

$$\begin{aligned} x_{ij;k} &= \Gamma_{ij;k}^m x_m + \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{mk}^q x_q) + L_{ij} (L_k^q x_q) + N_{ijk} \\ &= (\Gamma_{ij;k}^m + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^q + L_{ij} L_k^q) x_q + N_{ijk}. \end{aligned}$$

Dies liefert wegen $x_{i[j;k]} = 0$ für alle $q \in \{1, 2\}$

$$(\Gamma_{i[j;k]}^q + \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^q + L_{i[j} L_{k]}^q) x_q + N_{i[jk]} = 0.$$

Wegen linearer Unabhängigkeit erhalten wir

$$\Gamma_{i[j;k]}^q + \Gamma_{i[j}^m \Gamma_{k]m}^q + L_{i[j} L_{k]}^q = 0$$

und somit die Behauptung. \square

3 Das Theorema egregium von Gauß

Wir werden nun eine andere Definition der Gauß-Krümmung kennen lernen. Dass diese dasselbe liefert wie Definition 2.3 werden wir in Satz 3.4 sehen.

Definition 3.1 (Gaußsche Krümmungsfunktion). Die *Gaußsche Krümmungsfunktion* K ist die Determinante der Weingarten-Abbildung:

$$K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \det(L_j^i(u)) = \det \begin{pmatrix} L_1^1(u) & L_2^1(u) \\ L_1^2(u) & L_2^2(u) \end{pmatrix} = 2L_{[1}^1(u)L_{2]}^2(u). \quad (2)$$

Bemerkung 3.2. Auch die Wohldefiniertheit von K ist nach der Definition nicht klar, da die Weingarten-Abbildung zunächst von der Parametrisierung x abhängt.

Satz 3.3. Für die Gaußsche Krümmungsfunktion K gilt

$$K = \det(L_j^i) = 2L_{[1}^1 L_2^2], \quad (3)$$

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad (4)$$

$$K = -\frac{2}{g_{11}} L_{1[1} L_2^2]. \quad (5)$$

Beweis.

1. Die erste Formel ist die Definition.
2. Wir zeigen zunächst, dass für alle $i, j \in \{1, 2\}$

$$-L_j^k g_{ki} = L_{ij} \quad (6)$$

gilt. Mit $\langle n, x_i \rangle = 0$ und der verallgemeinerten Produktregel folgt

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^j} \langle n, x_i \rangle = \langle n_j, x_i \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle = \langle n_j, x_i \rangle + L_{ij}.$$

Wegen

$$L_j^k g_{ki} = L_j^k \langle x_k, x_i \rangle = \langle L_j^k x_k, x_i \rangle = \langle n_j, x_i \rangle$$

folgt (6).

Damit erhalten wir

$$\det(L_{ij}) = \det(-L_j^k g_{ki}) = (L_1^k g_{k1})(L_2^k g_{k2}) - (L_2^k g_{k1})(L_1^k g_{k2}).$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der entstehenden Terme liefert

$$\det(L_{ij}) = (L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1)(g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) = \det(L_j^i) \det(g_{ij}).$$

Mittels Division durch $\det(g_{ij})$ folgt das gewünschte Ergebnis.

3. Mit (6) folgt

$$\begin{aligned} -2L_{1[1} L_2^2] &= -L_{11} L_2^2 + L_{12} L_1^2 \\ &= (L_1^1 g_{11} + L_1^2 g_{21}) L_2^2 - (L_2^1 g_{11} + L_2^2 g_{21}) L_1^2 \\ &= g_{11} (L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2) = g_{11} \det(L_j^i). \end{aligned}$$

Mittels Division durch g_{11} folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt (unter der Voraussetzung, dass die Gauß-Krümmung und die Funktion K nicht von der Wahl der Abbildungen f beziehungsweise x abhängen), dass die Definitionen 2.3 und 3.1 äquivalent sind.

Satz 3.4. *Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und sei $p \in \Sigma$. Ferner gebe es eine Umgebung U von p und eine C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass p ein kritischer Punkt von f und U der Graph von f ist. Die Gauß-Krümmung von Σ an p entspricht $K(p)$.*

Beweis. U wird parametrisiert durch

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow U, \quad (u^1, u^2)^t \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2))^t.$$

Für $i, j \in \{1, 2\}$ definieren wir $f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}$ sowie $f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$. Wir berechnen K mit Hilfe von (4). Es gilt $x_1(u) = (1, 0, f_1(u))$ und $x_2(u) = (0, 1, f_2(u))$. Für $i, j \in \{1, 2\}$ gilt folglich $x_{ij}(u) = (0, 0, f_{ij}(u))$. Die Normalenvektoren seien

$$n = + \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $L_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle = (f_1^2 + f_2^2 + 1)^{-1/2} f_{ij}$ sowie

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (1 + f_1^2)(1 + f_2^2) - (f_1 f_2)^2 = f_1^2 + f_2^2 + 1$$

und somit

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2 + 1} \frac{\det(f_{ij})}{\det g_{ij}} = \frac{1}{(f_1^2 + f_2^2 + 1)^2} \det(f_{ij}).$$

Da p ein kritischer Punkt ist, gilt $f_1(p) = f_2(p) = 0$ und es folgt $K(p) = \det(f_{ij})(p)$. \square

Wir formulieren nun das Theorema egregium (ausgezeichnetes Theorem) von Gauß. Dieses besagt, dass wir die Gaußsche Krümmungsfunktion K allein durch die erste Fundamentalform (und ihre Ableitungen) ausdrücken können.

Satz 3.5 (Theorema egregium). *Es gilt*

$$K = \frac{2}{g_{11}} (\Gamma_{1[1;2]}^2 + \Gamma_{1[1}\Gamma_{2]m}^2), \quad (7)$$

wobei $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{il;j} - g_{ij;l} + g_{jl;i})g^{lk}$ gilt und (g^{lk}) die inverse Matrix zu (g_{lk}) ist.

Beweis. Wir zeigen nur (7). Wählen wir in Satz 2.10 $i = j = 1$ und $k = q = 2$ und verwenden anschließend (6), so erhalten wir

$$\Gamma_{1[1;2]}^2 + \Gamma_{1[1}\Gamma_{2]m}^2 = -L_{1[1}L_{2]}^2 = g_{1i}L_{[1}^i L_{2]}^2 = g_{11}L_{[1}^1 L_{2]}^2,$$

da $L_{[1}^2 L_{2]}^2 = 0$ gilt. Multiplikation mit $2/g_{11}$ liefert das Gewünschte. \square

Im Folgenden geben wir vier Beispiele von parametrisierten Flächen und ihrer Gauß-Krümmungsfunktion K . Dabei schreiben wir für Vektoren in \mathbb{R}^2 (u_1, u_2) statt (u^1, u^2) , da in den Rechnungen gelegentlich Quadrate auftauchen. In Abbildung 3 sind die Beispiele graphisch dargestellt (mit einer anderen Parametrisierung der Halbkugel).

Beispiel 3.6 (Ebene). Wir betrachten eine (waagerechte) Ebene parametrisiert durch

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2)^t \mapsto (u_1, u_2, 0)^t.$$

Wir erhalten $x_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ und somit $(L_{ij}) = 0$. Mit (4) folgt $K(u_1, u_2) = 0$.

Beispiel 3.7 (Zylinder). Wir betrachten die Fläche parametrisiert durch

$$x: (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2)^t \mapsto \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2} \right)^t.$$

Wir erhalten

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-u_1^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1-u_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$g_{ij;l} = \begin{cases} \frac{2u_1}{(1-u_1^2)^2} & \text{falls } i = j = l = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und nach Satz 3.5

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} \frac{u_1}{1-u_1^2} & \text{falls } i = j = k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach (7) ist $K(u_1, u_2) = 0$.

Beispiel 3.8 (Kugel). Wir betrachten die Halbkugel vom Radius $r > 0$ parametrisiert durch

$$x: (-\pi, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2)^t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(u_1) \sin(u_2) \\ \sin(u_1) \sin(u_2) \\ \cos(u_2) \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion sind die entsprechenden Normalenvektoren der Fläche $n(u_1, u_2) = \frac{1}{r}x(u_1, u_2)$ und wir erhalten

$$(g_{ij}) = r^2 \begin{pmatrix} \sin^2(u_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (L_{ij}) = r \begin{pmatrix} -\sin^2(u_2) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}(g_{ij}).$$

Mit (4) folgt

$$K(u_1, u_2) = \frac{r^2 \sin^2(u_2)}{r^4 \sin^2(u_2)} = \frac{1}{r^2}.$$

Beispiel 3.9 (Sattelfläche). Wir betrachten das hyperbolische Paraboloid (Sattelfläche) parametrisiert durch

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2)^t \mapsto (u_1, u_2, u_1 u_2)^t.$$

Die Normalenvektoren der Fläche ergeben sich zu

$$n(u_1, u_2) = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|_2} = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \begin{pmatrix} -u_2 \\ -u_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+u_2^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & 1+u_1^2 \end{pmatrix}, \quad (L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (4) folgt

$$K(u_1, u_2) = \frac{-\frac{1}{1+u_1^2+u_2^2}}{1+u_1^2+u_2^2} = -\frac{1}{(1+u_1^2+u_2^2)^2}.$$

Im Ursprung erhalten wir zum Beispiel $K(0, 0) = -1$.

Aufgabe 3.10. Zum Abschluss stellen wir ein paar Wiederholungsfragen.

1. Ist die Gauß-Krümmung ein intrinsische oder eine extrinsische Eigenschaft einer Fläche? Was bedeutet das?
2. Wie funktioniert die Einsteinsche Summenkonvention?
3. Wie funktioniert die Antisymmetrisierung?
4. Wie lautet die Formel aus Satz 2.10?
5. Was ist die Kernaussage des Theorema egregium?

Literatur

- [1] Mikhail G. Katz. *Systolic geometry and topology*, volume 137 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. With an appendix by Jake P. Solomon.
- [2] Heinrich Reinhardt, Fritz und Soeder. *Dtv-Atlas Mathematik: Tafeln und Texte*, volume 2. Dt. Taschenbuch-Verlag, München, 1994.

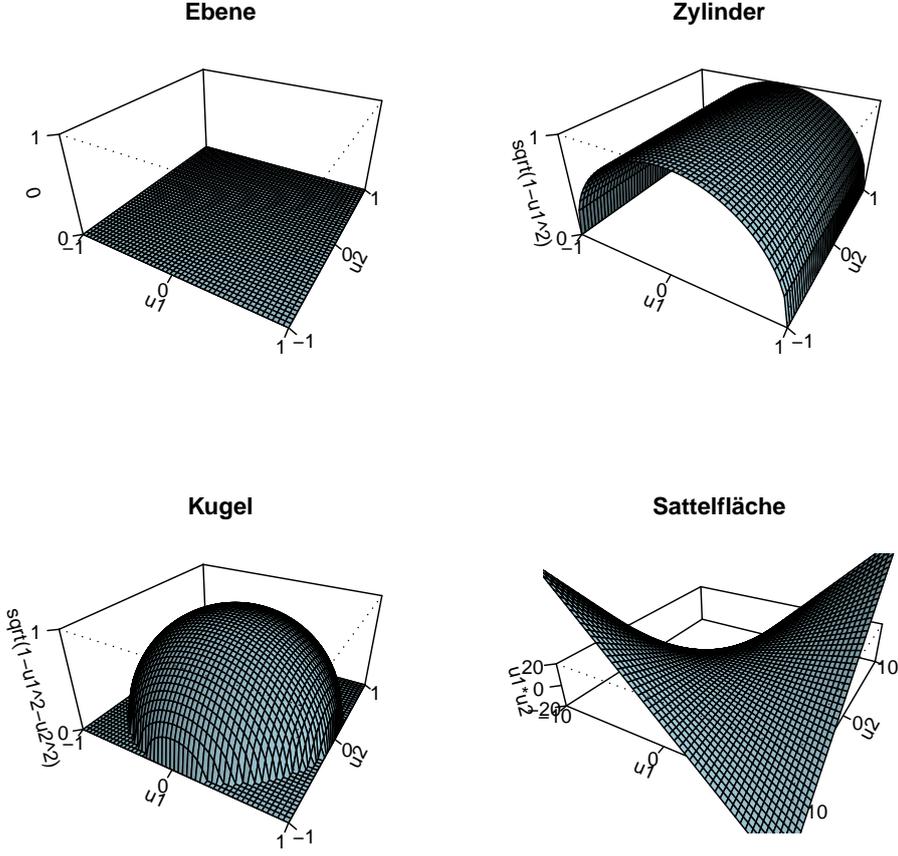


Abbildung 1: Vier Flächen als Graphen reeller Funktionen in zwei Variablen