RELATIONS D'ÉQUIVALENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Par PIERRE SAMUEL

1. Relations d'équivalence adéquates

Soit V une variété algébrique que, pour simplifier, nous supposerons projective et non-singulière. Etant donnés deux cycles X, Y sur V, le produit d'intersection $X.Y$ n'est pas toujours défini, ce qui a pour conséquence que les cycles ne forment pas un anneau. Pour remédier à cet état de choses, il est utile de remplacer les cycles eux-mêmes par des classes de cycles modulo une relation d'équivalence convenable. D'autre part le groupe des cycles sur V a une structure assez compliquée; il est commode d'y définir des sous-groupes et des groupes quotients plus faciles à étudier, et ceux-ci permettent de définir d'intéressants invariants de V (l'irrégularité, les nombres ρ et σ, etc.). Enfin l'équivalence linéaire des diviseurs a, comme chacun sait, une importance considérable.

Pour être maniable et intéressante, une relation d'équivalence entre cycles doit vérifier un certain nombre de propriétés. Nous dirons qu'une relation d'équivalence, notée $\sim$, est *adéquate* si elle est définie entre cycles de toute variété projective non-singulière, et si elle vérifie les conditions suivantes:

($\mathrm{RA_I}$) *Elle est compatible avec l'addition des cycles.* Autrement dit la restriction de $\sim$ au groupe $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$ des cycles de codimension d sur V coïncide avec la relation de congruence modulo un sous-groupe bien déterminé $\mathfrak{G}_e^{(d)}(V)$.

($\mathrm{RA_{II}}$) *Etant donnés un cycle X sur V et des sous-variétés W_j de V en nombre fini, il existe un cycle $X' \sim X$ tel que $X.W_j$ soit défini quel que soit j.*

($\mathrm{RA_{III}}$) *Etant donnés deux variétés* (projectives non singulières comme toujours) *V et W, un cycle $X \sim 0$ sur V, et un cycle Z sur $V \times W$ tel que $Z(X) = pr_W((X \times W).Z)$ soit défini, alors $Z(X)$ est ~ 0 sur W.*

Remarque. De nombreuses relations d'équivalence adéquates vérifient aussi:

($\mathrm{RA_{IV}}$) *Si un cycle X est ~ 0 sur V, et si (V', X') est une spécialisation de (V, X) sur un corps k* (V' étant supposée irréductible et non-singulière), *alors X' est ~ 0 sur V'.*

Dans les sept propositions faciles qui suivent, $\sim$ désigne une relation d'équivalence adéquate, V et W des variétés projectives non-singulières.

Proposition 1. *Soient V, W deux variétés, X un cycle sur V. Si $X \sim 0$, on a $X \times W \sim 0$ sur $V \times W$.*

Notons en effet G le graphe de pr_V dans $V \times (V \times W)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, (x, y))$. On a $G(X) = X \times W$, d'où notre assertion par $(\mathrm{RA}_{\mathrm{III}})$.

Proposition 2. *Soient X, Y deux cycles sur V tels que $X.Y$ soit défini. Si $X \sim 0$ sur V, alors $X.Y \sim 0$ sur V.*

Soient en effet D la diagonale de $V \times V$ et Z le cycle $(V \times Y).D$ sur $V \times V$ (cycle qui est toujours défini). Comme $(X \times Y).D$ est défini, il en est de même, par associativité, de $(X \times V).(V \times Y).D = (X \times V).Z$. Donc $Z(X)$ est défini, et évidemment égal à $X.Y$. D'où notre assertion par $(\mathrm{RA}_{\mathrm{III}})$.

Proposition 3. *Soit X un cycle sur $V \times W$. Si $X \sim 0$, alors $\mathrm{pr}_V(X) \sim 0$ sur V.*

Soit en effet H le graphe de pr_V dans $(V \times W) \times V$ (ensemble des points $((x, y), x)$). On a $\mathrm{pr}_V(X) = H(X)$, d'où notre assertion.

Remarque. On voit aussitôt que les prop. 1, 2, 3 entraînent $(\mathrm{RA}_{\mathrm{III}})$.

Proposition 4. *Soient X un cycle sur V et W une sous-variété non-singulière de V telle que $X.W$ soit défini. Si $X \sim 0$ sur V, alors $X.W \sim 0$ sur W.*

En effet, en notant I le graphe, dans $V \times W$, de l'application identique de W dans V, on a $W.X = \mathrm{pr}_W((X \times W).I)$. D'où notre assertion par $(\mathrm{RA}_{\mathrm{III}})$.

Proposition 5. *Soient W une sous-variété non-singulière de V, et Y un cycle sur W. Si on a $Y \sim 0$ sur W, alors $Y \sim 0$ sur V.*

En effet, avec les notations précédentes, on a $Y = \mathrm{pr}_V((V \times Y).I)$.

Remarque. La réciproque est fausse.

Proposition 6. *Les classes de cycles sur V pour la relation $\sim$ forment un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication déduite du produit d'intersection. Cet anneau est gradué par la codimension. La classe de V est élément unité.*

En effet, d'après $(\mathrm{RA}_{\mathrm{I}})$, les classes de cycles forment un groupe gradué $\mathfrak{C}(V)$. Etant données deux classes ξ et η, $(\mathrm{RA}_{\mathrm{II}})$ montre qu'il existe des représentants X de ξ et Y de η tels que $X.Y$ soit défini. Si X' et Y' sont d'autres représentants de ξ et η tels que $X'.Y'$ soit défini, on choisit $(\mathrm{RA}_{\mathrm{II}})$ un représentant Y'' de η tel que $X.Y''$ et $X'.Y''$ soient définis; comme

$$X'.Y' - X'.Y'' = X'.(Y' - Y'')$$

et

$$X.Y - X'.Y'' = X.(Y - Y'') + (X - X').Y'',$$

on a $X'.Y' \sim X'.Y'' \sim X.Y$ (prop. 2); ceci montre que la classe de

$X.Y$ ne dépend que de ξ et η. On la note $\xi\eta$. Ceci définit une multiplication sur $\mathfrak{C}(V)$. Le fait que $\mathfrak{C}(V)$ est un anneau gradué par la codimension et admettant la classe de V pour élément unité est alors conséquence immédiate des propriétés classiques des intersections.

Remarque. Si on se donne aussi une relation d'équivalence adéquate $\equiv$ *moins fine* que $\sim$, les classes modulo $\sim$ des cycles $\equiv 0$ sur V forment un *idéal* homogène de l'anneau $\mathfrak{C}(V)$ (prop. 2 appliquée à $\equiv$).

Nous noterons désormais $\mathfrak{C}(V)$ l'anneau des classes de cycles sur V pour la relation d'équivalence $\sim$.

Proposition 7. *Soit Z un cycle sur $V \times W$. Alors $X \to Z(X)$ définit un homomorphisme du groupe additif de $\mathfrak{C}(V)$ dans celui de $\mathfrak{C}(W)$; cet homomorphisme ne dépend que de la classe de Z dans $\mathfrak{C}(V \times W)$. Lorsque Z est le graphe d'un morphisme f de W dans V, c'est un homomorphisme pour les structures d'anneaux.*

Il résulte en effet du lemme 2, no. 1, de[6], et de ($\mathrm{RA_{II}}$) que, dans toute classe $\xi \in \mathfrak{C}(V)$, il existe un cycle X tel que $(X \times W).Z$, donc $Z(X)$, soit défini. La classe de $Z(X)$ ne dépend que de ξ (par ($\mathrm{RA_{III}}$)), d'où une application de $\mathfrak{C}(V)$ dans $\mathfrak{C}(W)$, qui est évidemment un homomorphisme additif. Si Z' est un cycle sur $V \times W$ tel que $Z' \sim Z$, on choisit (ce qui est loisible) un représentant X de ξ tel que $(X \times W).Z$ et $(X \times W).Z'$ soient définis; on a alors $(X \times W).Z \sim (X \times W).Z'$ (prop. 2), d'où $Z(X) \sim Z'(X)$ (prop. 3); ceci démontre notre seconde assertion.

Supposons enfin que Z soit le graphe d'un morphisme f de W dans V; on a alors $Z(X) = f^{-1}(X)$ lorsque ce cycle est défini. Nous avons à démontrer que, étant données deux classes ξ, $\eta \in \mathfrak{C}(V)$, il existe des représentants X, Y de ces classes tels que $f^{-1}(X.Y) = f^{-1}(X).f^{-1}(Y)$ (les deux membres étant définis). Comme plus haut prenons $X \in \xi$ tel que $(X \times W).Z$ soit défini. Il s'agit alors de trouver $Y \in \eta$ tel que $Y.X$, $(Y \times W).Z$ et $(Y \times W).(X \times W).Z$ soient définis; il suffit pour cela que $(Y \times W).((X \times W).Z)$ soit défini, et ceci est réalisable comme plus haut (en remplacant Z par $(X \times W).Z$). Ceci étant, l'hypothèse montre que la restriction de pr_W à Z est un isomorphisme de Z sur W; donc Z est une variété non-singulière. On a donc

$$(X \times W).Z.(Y \times W) = ((X \times W).Z)._Z((Y \times W).Z)$$

(le $._Z$ désignant le produit d'intersection sur Z) $= (X.Y \times W).Z$. En appliquant l'isomorphisme pr_W de Z sur W, on obtient

$$Z(X).Z(Y) = Z(X.Y),$$

c'est-à-dire $f^{-1}(X.Y) = f^{-1}(X).f^{-1}(Y)$. C.Q.F.D.

Remarque. La dernière assertion ne subsiste pas lorsque Z est seulement le graphe d'une application rationnelle f de W dans V (exemple simple: W est un plan, V une transformée quadratique de W).

Avec les notations de la prop. 7, l'homomorphisme additif de $\mathfrak{C}(V)$ dans $\mathfrak{C}(W)$ sera noté Z_*; si Z est le graphe d'un morphisme f de W dans V, nous écrirons f^* au lieu de Z_*. Il est facile de voir que $V \to \mathfrak{C}(V)$ est un *foncteur contravariant* pour la catégorie des variétés projectives non-singulières et des morphismes de variétés.

Remarque. Si W est une sous-variété non singulière de V, l'injection $i: W \to V$ définit un homomorphisme i^* de l'anneau $\mathfrak{C}(V)$ dans l'anneau $\mathfrak{C}(W)$. Ainsi $\mathfrak{C}(W)$ est un *module* sur $\mathfrak{C}(V)$.

2. Exemples de relations d'équivalence adéquates

2.1. Equivalence rationnelle. Rappelons[6] qu'un cycle X sur une variété projective non-singulière V est dit *rationnellement èquivalent à* 0 s'il existe une variété unirationnelle (resp. une droite projective, un espace projectif, un produit de droites projectives) T, un cycle Z de $T \times V$ et deux points a, b de T tels que $Z(a)$ et $Z(b)$ soient définis et que $X = Z(b) - Z(a)$. La relation '$X - Y$ est rationnellement équivalent à 0' entre cycles X, Y de V est une relation d'équivalence adéquate (*ibid.*).† Notons la propriété extrémale suivante:

Proposition 8. *L'équivalence rationnelle est la plus fine des relations d'équivalence adéquates.*

Soit en effet $\sim$ une relation d'équivalence adéquate. Il suffit, d'après ($\mathrm{RA_{III}}$), de montrer qu'on a $(a) \sim (b)$ pour deux points quelconques a, b de la droite projective P_1. Or, étant donné $a \in P_1$, il existe d'après ($\mathrm{RA_{II}}$) un cycle $Y = \sum_i n_i(b_i)$ sur P_1 tel que $Y \sim (a)$ et que $(a).Y$ soit défini; ceci veut dire $b_i \neq a$ pour tout i. Etant donné $b \neq a$, il existe une application rationnelle (donc un morphisme) de P_1 sur P_1 telle que $f(a) = a$, $f(b_i) = b$ pour tout i (par exemple, en prenant a à l'infini, le polynôme $x \to b + \prod_i (x - b_i)$). Donc, d'après ($\mathrm{RA_{III}}$), on a $(a) \sim n(b)$ (où $n = \sum_i n_i$). Comme il existe un morphisme g de P_1 dans P_1 tel que $g(a) = b$ et $g(b) = b$, on a $(b) \sim n(b)$; d'où $(a) \sim (b)$ par transitivité. C.Q.F.D.

Remarque. La propriété ($\mathrm{RA_{IV}}$) de spécialisation est vraie pour l'équivalence rationnelle ([6], th. 4).

† Des lacunes dans la démonstration de ($\mathrm{RA_{II}}$) ont été comblées par C. Chevalley.

2.2. Equivalence algébrique. Rappelons[8] qu'un cycle X sur une variété projective non singulière V est dit *algébriquement équivalent à* 0 s'il existe une variété (resp. une courbe, une variété abélienne) T, un cycle Z de $T \times V$ et deux points a, b de T tels que $Z(a)$ et $Z(b)$ soient définis et que $X = Z(b) - Z(a)$. Il résulte de [8] et des raisonnements faits dans [6] que la relation '$X - Y$ est algébriquement équivalent à 0' est une relation d'équivalence adéquate (pour ($\mathrm{RA_{II}}$) on constate que l'équivalence algébrique est moins fine que l'équivalence rationnelle). La propriété ($\mathrm{RA_{IV}}$) est évidemment vraie.

2.3. Equivalence numérique. Etant donné un cycle Z de dimension 0, nous noterons $\deg(Z)$ son degré. On dit que deux cycles X, X' (sur une variété projective non singulière V) sont numériquement équivalents s'ils ont même dimension et si, pour tout cycle Y de dimension complémentaire tel que $X.Y$ et $X'.Y$ soient définis, on a

$$\deg(X.Y) = \deg(X'.Y).$$

Comme, d'après le principe de conservation du nombre, on peut remplacer Y par un cycle algébriquement équivalent, cette relation est bien une relation d'équivalence vérifiant ($\mathrm{RA_{I}}$). Le principe de conservation du nombre montre aussi qu'elle est moins fine que l'équivalence algébrique, donc qu'elle vérifie ($\mathrm{RA_{II}}$). Au lieu de vérifier ($\mathrm{RA_{III}}$) nous vérifierons que les conclusions des prop. 1, 2, 3 sont vraies: pour les prop. 1 et 3 ceci résulte de la formule de projection et du fait qu'un cycle de dimension 0 sur un produit a même degré que ses projections; pour la prop. 2 on applique la formula d'associativité. La propriété ($\mathrm{RA_{IV}}$) est vraie.

2.4. Equivalence du carré et du n-cube. Soit n un entier > 1. On dit qu'un cycle X sur une variété projective non-singulière V est *n-cubique* s'il existe n variétés de paramètres T_i, $2n$ points a_{ij} ($j = 1, 2$, $a_{ij} \in T_i$) et un cycle Z sur $T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \times V$ tels que les 2^n cycles

$$Z(a_{1,j(1)}, \ldots, a_{n,j(n)}) = \mathrm{pr}_V\left((a_{1,j(1)} \times \ldots \times a_{n,j(n)} \times V).Z\right)$$

soient définis et que l'on ait

$$X = \sum_{j \in (1,2)^n} Z(a_{1,j(1)}, \ldots, a_{n,j(n)})\,(-1)^{j(1)+\cdots+j(n)}. \tag{1}$$

Nous allons voir que, pour tout n, la relation '$X - Y$ est n-cubique' est une relation d'équivalence adéquate; nous l'appellerons l'*équivalence n-cubique*. Comme tout cycle n-cubique est différence de deux cycles

$(n-1)$-cubiques, l'équivalence n-cubique est plus fine que l'équivalence $(n-1)$-cubique. Pour $n = 1$ on obtient l'équivalence algébrique; pour $n = 2$ nous parlerons de cycles *carrés* et d'équivalence *carrée*. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'équivalence adéquates, nous nous bornerons, pour alléger les formules, au cas $n = 2$ (le cas général est analogue).

(RA_{I}). Soient X et X_1 des cycles carrés de même dimension sur V; il nous suffit de montrer que $X+X_1$ est carré. Notons T, T', T_1, T'_1 des variétés de paramètres, a et b (resp. a' et b', a_1 et b_1, a'_1 et b'_1) des points de T (resp. T', T_1, T'_1) tels que

$$X = Z(a,a')-Z(a,b')-Z(b,a')+Z(b,b'),$$

$$X_1 = Z_1(a_1,a'_1)-Z_1(a_1,b'_1)-Z_1(b_1,a'_1)+Z_1(b_1,b'_1),$$

où Z est un cycle sur $V\times T\times T'$, et Z_1 un cycle sur $T_1\times T'_1\times V$. Considérons, sur $T_1\times T'_1\times V\times T\times T'$, le cycle

$$Y = (Z_1\times T\times T')+(T_1\times T'_1\times Z).$$

On vérifie qu'on a

$$Y(a_1,a'_1,a,a')-Y(a_1,b'_1,a,b')-Y(b_1,a'_1,b,a')+Y(b_1,b'_1,b,b') = X+X_1;$$

donc $X+X_1$ est un cycle carré.

($\mathrm{RA}_{\mathrm{II}}$). Il nous suffira de montrer que tout cycle rationnellement équivalent à 0 est carré. Soit donc X un cycle sur V tel que

$$X = Z(b)-Z(a),$$

Z étant un cycle sur $V\times P_1$ et a et b deux points de P_1 que nous supposerons à distance finie. Soit T le graphe, dans $P_1\times(P_1\times P_1)$, de l'application $(x,y)\to(x-a)y/(b-a)$ de $P_1\times P_1$ dans P_1. Posons

$$Y = Z\circ T = \mathrm{pr}_{V\times(P_1\times P_1)}((Z\times(P_1\times P_1)).(V\times T)).$$

Si $Z(T(x,y))$ est défini, il est égal à $Y(x,y)$ $(x,y\in P_1)$: en effet

$$(Z\times(P_1\times P_1)).(V\times T).(V\times P_1\times(x,y))$$

est alors défini, donc égal à

$$(Z\times(P_1\times P_1)).(V\times T(x,y)\times(x,y)) = (Z.(V\times T(x,y)))\times(x,y).$$

Comme $\quad T(a,a) = T(a,b) = 0, \quad T(b,a) = a, \quad T(b,b) = b,$

on a

$$Y(a,a)-Y(a,b)-Y(b,a)+Y(b,b) = Z(0)-Z(0)-Z(a)+Z(b) = X;$$

ceci montre que X est carré. C.Q.F.D.

($\mathrm{RA}_{\mathrm{III}}$). Comme ci-dessus vérifions que les conclusions des prop. 1, 2, 3 sont vraies.

(1) Si $X = Z(a,a') - Z(a,b') - Z(b,a') + Z(b,b')$ est un cycle carré sur V (Z étant un cycle sur $T \times T' \times V$), on a évidemment, en posant

$$Y = Z \times W, \quad X \times W = Y(a,a') - Y(a,b') - Y(b,a') + Y(b,b');$$

donc $X \times W$ est carré.

(2) Si X est carré comme dans (1), et si X' est un cycle sur V tel que $X.X'$ soit défini, nous choisissons un cycle X'' rationnellement équivalent à X' tel que $Z(a,a').X''$, $Z(a,b').X''$, $Z(b,a').X''$, $Z(b,b').X''$ soient définis. Alors $Y = (T \times T' \times X'').Z$ est défini, et on a

$$Y(a,a') = Z(a,a').X''$$

et trois autres formules analogues. D'où

$$Y(a,a') - Y(a,b') - Y(b,a') + Y(b,b') = X.X'',$$

ce qui montre que $X.X''$ est carré. Comme $X.X'$ lui est rationnellement équivalent, il est aussi carré d'après ce qui a été vu dans la vérification de $(\mathrm{RA}_{\mathrm{II}})$.

(3) Soit X un cycle carré sur $V \times W$; posons $X = Z(a,a') - \ldots$, Z étant un cycle sur $T \times T' \times V \times W$. En posant

$$Y = \mathrm{pr}_{T \times T' \times V}(Z), \quad \text{on a} \quad Y(a,a') = \mathrm{pr}_V(Z(a,a'))$$

d'après la formule de projection. Donc $\mathrm{pr}_V(X)$ est carré.

Remarques. (1) Comme dans le cas de l'équivalence algébrique[8] on peut se limiter au cas où les variétés de paramètres T_i sont des courbes (resp. des variétés abéliennes). Comme, sur $T_1 \times \ldots \times T_n$, il existe une courbe T joignant les deux points $(a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}) = a$ et $(a_{1,2}, \ldots, a_{n,2}) = b$, on peut se limiter au cas où toutes les T_i sont égales à une même courbe T, les points $a_{i,1}$ (resp. $a_{i,2}$) étant tous égaux. De même avec des variétés abéliennes.

(2) Comme pour l'équivalence rationnelle ([6], th. 2) on peut supposer que le cycle Z de la formule (1) est positif.

(3) En prenant des droites (resp. des variétés unirationnelles) pour les T_i, on obtient une équivalence n-cubique 'rationnelle', qui est adéquate, et plus fine que l'équivalence rationnelle. Mais le prop. 8 (ou le raisonnement fait ci-dessus pour $(\mathrm{RA}_{\mathrm{II}})$) montre qu'elle est identique à l'équivalence rationnelle.

Proposition 9. *Le produit cartésien et la produit d'intersection de deux* (resp. n) *cycles algébriquement équivalents à* 0 *est un cycle carré* (resp. *n-cubique*).

Soient en effet X, X' des cycles sur V, V', T et T' des variétés de paramètres, Z et Z' des cycles sur $T \times V$ et $T' \times V'$, a, b des points de T, a', b' des points de T' tels que

$$X = Z(b) - Z(a) \quad \text{et} \quad X' = Z'(b') - Z'(a').$$

Posons $Y = Z \times Z'$. On a

$$\begin{aligned} Y(a, a') &= \mathrm{pr}_{V \times V'}(((a) \times V \times (a') \times V').(Z \times Z')) \\ &= \mathrm{pr}_{V \times V'}((a) \times Z(a) \times (a') \times Z'(a')) = Z(a) \times Z'(a'). \end{aligned}$$

De ceci et de trois autres formules analogues il résulte qu'on a

$$X \times X' = Y(a, a') - Y(a, b') - Y(a', b) + Y(b, b');$$

d'où l'assertion relative au produit cartésien. Pour le produit d'intersection, on utilise le procédé du produit et de la diagonale et on applique ($\mathrm{RA}_{\mathrm{III}}$).

2.5. Equivalence abélienne. Soient V une variété projective non-singulière, $\mathfrak{G}^{(d)}(V) = \mathfrak{G}$ le groupe des cycles de codimension d sur V, et A une variété abélienne. Nous dirons qu'un homomorphisme h de $\mathfrak{G}$ dans A est *rationnel* s'il existe un corps k de définition de V et A tel que

(HR_{I}). *Si $X \in \mathfrak{G}$ est rationnel sur $k' \supset k$, $h(X)$ est un point rationnel sur k';*

($\mathrm{HR}_{\mathrm{II}}$). *Si $X, X' \in \mathfrak{G}$ sont deux cycles tels que X' soit une spécialisation de X sur un corps $k' \supset k$, alors $(X', h(X'))$ est une spécialisation de $(X, h(X))$ sur k'.*

Il revient au même de dire que la restriction de h à chaque système algébrique de cycles est une application rationnelle. Nous dirons qu'un cycle $X \in \mathfrak{G}$ est *abélien* si on a $h(X) = 0$ pour toute variété abélienne A et tout homomorphisme rationnel h de $\mathfrak{G}$ dans A. La relation '$X - X'$ est abélien' est une relation d'équivalence *adéquate*. En effet (RA_{I}) est évident, et ($\mathrm{RA}_{\mathrm{II}}$) résulte du fait que, puisque toute application rationnelle d'une droite dans une variété abélienne est constante, tout cycle rationnellement équivalent à 0 est abélien. Reste à vérifier ($\mathrm{RA}_{\mathrm{III}}$).

Considérons pour cela un cycle abélien $X \in \mathfrak{G}^{(d)}(V)$, un cycle Z sur $V \times W$ tel que $Z(X)$ soit défini, et un homomorphisme rationnel h de $\mathfrak{G}^{(d')}(W)$ dans une variété abélienne A ($d' = \dim Z(X)$). Pour tout $X' \in \mathfrak{G}^{(d)}(V)$, choisissons un cycle X_1' rationnellement équivalent à X' tel que $Z(X_1')$ soit défini, et posons $u(X') = h(Z(X_1'))$; on voit facilement que $u(X')$ ne dépend pas du choix de X_1' et que u est un homomorphisme de $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$ dans A. Prenons pour k un corps infini de définition de V, W,

Z et h. Si X' est rationnel sur $k' \supset k$, la méthode des cônes ([6], lemme 3) montre qu'on peut prendre X'_1 rationnel sur k'; donc $u(X') = h(Z(X'_1))$ est rationnel sur k', et ($\mathrm{HR_I}$) est vérifié par u. Soit enfin $\mathfrak{S}$ un système algébrique irréductible contenu dans $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$; si $Z(X_g)$ n'est pas défini pour un élément générique X_g de $\mathfrak{S}$ sur k', il existe X'_g rationnellement équivalent à X_g tel que $Z(X'_g)$ soit défini, et la méthode des cônes montre qu'on peut supposer que X_g est une spécialisation de X'_g sur k'; soit $\mathfrak{S}'$ le lieu de X'_g sur k'; alors $\mathfrak{S}$ peut être considéré comme plongé dans $\mathfrak{S}'$; d'autre part $X'_g \to Z(X'_g)$ définit une application rationnelle f de $\mathfrak{S}'$ dans le lieu de $Z(X'_g)$ sur k', et, sur le domaine de définition f, on a $u = h \circ f$; ainsi la restriction de u à $\mathfrak{S}'$ est une application rationnelle dans A, donc aussi la restriction de u à $\mathfrak{S}$. Ceci démontre que u est un homomorphisme rationnel de $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$ dans A. Comme X est abélien, on a $u(X) = 0$, d'où $h(Z(X)) = 0$; ceci montre que $Z(X)$ est abélien et démontre ($\mathrm{RA_{III}}$). La relation '$X - X'$ est abélien' s'appelle l'*équivalence abélienne*.

Remarques. (1) Il est évident que l'équivalence abélienne vérifie ($\mathrm{RA_{IV}}$).

(2) Etant donnés une variété V et un entier d, on peut se demander s'il existe une variété abélienne A et un homomorphisme rationnel h de $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$ dans A qui soient *universels* pour les homomorphismes rationnels de $\mathfrak{G}^{(d)}(V)$. La réponse est affirmative en dimension 0 (variété d'Albanese) et en codimension 1 (variété de Picard).

(3) Voici un exemple d'homomorphisme rationnel. Soit W une sous-variété de V; pour tout cycle X sur V de dimension complémentaire à celle de W et tel que $X . W$ soit défini, on pose $h(X) = S(f(X . W))$, f étant l'application canonique de V (ou de W) dans sa variété d'Albanese; lorsque $X . W$ n'est pas défini, on définit $h(X)$ par équivalence rationnelle.

Proposition 10. *L'équivalence abélienne est plus fine que l'équivalence algébrique.*

Il suffit de démontrer que, si X est un cycle non algébriquement équivalent à 0 sur V, il existe un homomorphisme rationnel h de $\mathfrak{G}(V)$ dans une variété abélienne A tel que $h(X) \neq 0$. Pour cela notons $\mathfrak{G}_a$ le groupe des cycles algébriquement équivalents à 0 sur V de dimension $\dim(X)$ et démontrons le lemme suivant:

Lemme. Soit h un homomorphisme de $\mathfrak{G}_a$ dans une variété abélienne $A \neq (0)$ vérifiant ($\mathrm{HR_I}$) *et* ($\mathrm{HR_{II}}$). *Alors h se prolonge en un homomorphisme rationnel h' de $\mathfrak{G}$ dans A tel que $h'(X) \neq 0$.*

En effet on peut supposer que le corps k intervenant dans ($\mathrm{HR_I}$) et ($\mathrm{HR_{II}}$) est algébriquement clos et que X est rationnel sur k. Notons $(\mathfrak{G})_k$ le groupe des cycles rationnels sur k. Comme le groupe $(A)_k$ des points de A qui sont rationnels sur k est divisible, la restriction h_1 de h à $(\mathfrak{G})_k \cap \mathfrak{G}_a$ se prolonge en un homomorphisme h'_1 de $(\mathfrak{G})_k$ dans A_k, et on peut supposer que $h'_1(X)$ est $\neq 0$ puisque $(A)_k$ contient des points d'ordre infini et des points d'ordre fini de tous ordres. Comme, d'après la théorie de Chow–van der Waerden tout système irréductible maximal de cycles positifs sur V est défini sur k et contient donc des cycles rationnels sur k, toute classe de $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{G}_a$ contient des cycles rationnels sur k; autrement dit on a $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_a + (\mathfrak{G})_k$; comme les homomorphismes h et h'_1 coïncident sur $\mathfrak{G}_a \cap (\mathfrak{G})_k$, il en résulte qu'il existe un homomorphisme h' et un seul de $\mathfrak{G}$ dans A qui prolonge h et h'_1. Reste à montrer qu'il vérifie $(\mathrm{HR_I})$ et $(\mathrm{HR_{II}})$. Si Y est un cycle rationnel sur $k' \supset k$, on prend un représentant Y_1 rationnel sur k de la classe de Y mod. $\mathfrak{G}_a$; alors $h'(Y) = h(Y - Y_1) + h'_1(Y_1)$ est rationnel sur k' puisque k' contient k. D'autre part, si $Y \to Y'$ est une spécialisation sur $k' \supset k, Y$ et Y' appartiennent à la même classe mod. $\mathfrak{G}_a$; prenons un représentant Y_1 rationnel sur k de cette classe; alors $Y' - Y_1$ est une spécialisation de $Y - Y_1$ sur k', et (d'après $(\mathrm{HR_{II}})$ appliqué à h) se prolonge donc en $h(Y - Y_1) \to h(Y' - Y_1)$ c'est-à-dire en $h'(Y) \to h'(Y')$ puisque $h'_1(Y_1)$ est rationnel sur k donc sur k'. C.Q.F.D.

Remarque. Le lemme montre que, dans la définition des cycles abéliens, on aurait pu se restreindre aux homomorphismes de $\mathfrak{G}_a$ dans les variétés abéliennes vérifiant $(\mathrm{HR_I})$ et $(\mathrm{HR_{II}})$.

Proposition 11. *L'équivalence du carré est plus fine que l'équivalence abélienne.*

En effet soient $X = Z(a, a') - Z(a, b') - Z(b, a') + Z(b, b')$ un cycle carré sur V (Z étant un cycle sur $T \times T' \times V$), et h un homomorphisme rationnel de $\mathfrak{G}(V)$ dans une variété abélienne A. Pour $(x, x') \in T \times T'$, $(x, x') \to h(Z(x, x'))$ est une application rationnelle de $T \times T'$ dans A. Il existe donc ([7], cor. du th. 7) deux applications rationnelles $f: T \to A$ et $f': T' \to A$ tells que $h(Z(x, x')) = f(x) + f'(x')$. D'où $h(X) = 0$ par un calcul immédiat.

2.6. Pseudo-équivalence. Soit $\sim$ une équivalence adéquate. La relation 'il existe un entier $q \neq 0$ tel que $qX' \sim qX$' s'appelle la *pseudo-équivalence* associée à $\sim$; dans les exemples on parlera plutôt de l'équivalence *pseudo-rationnelle* ou *pseudo-abélienne*, etc. On vérifie aussitôt que c'est là une relation d'équivalence *adéquate*.

Remarque. D'après le principe de conservation du nombre l'équivalence pseudo-algébrique est plus fine que l'équivalence numérique, et l'équivalence pseudo-numérique est identique à l'équivalence numérique.

2.7. Equivalence triviale. On appelle équivalence *triviale* celle où tous les cycles sont équivalents à 0. Elle est évidemment adéquate. C'est la moins fine de toutes.

Proposition 12. *L'ensemble des équivalences adéquates est réticulé.*

Soient en effet $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ les groupes correspondant à deux équivalences adéquates données. Il suffit de montrer que les groupes $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ définissent des équivalences adéquates. La condition ($\mathrm{RA_I}$) est évidente, ainsi que ($\mathrm{RA_{II}}$) pour $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ et ($\mathrm{RA_{III}}$) pour $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$. La prop. 8 montre que ($\mathrm{RA_{II}}$) est vérifiée par $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$. Enfin, si $X \in \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$, écrivons $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \mathfrak{G}_1$ et $X_2 \in \mathfrak{G}_2$; si Z est un cycle sur $V \times W$ tel que $Z(X)$ soit défini, prenons X_1' rationnellement équivalent à X_1 tel que $Z(X_1')$ soit défini; on a alors $X = X_1' + (X_2 + X_1 - X_1')$ avec $X_1' \in \mathfrak{G}_1$ et $X_2 + X_1 - X_1' \in \mathfrak{G}_2$ (prop. 8); comme $Z(X)$ et $Z(X_1')$ sont définis, il en est de même de $Z(X_2 + X_1 - X_1')$; donc $Z(X)$ appartient au groupe correspondant à $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$. C.Q.F.D.

Cas de la codimension 1.

En codimension 1 l'équivalence abélienne coïncide avec l'équivalence rationnelle (appelée alors 'équivalence linéaire'), donc avec les équivalences du carré et du n-cube[8]. Si on note $\mathfrak{G}_l$(resp. $\mathfrak{G}_a$, $\mathfrak{G}_n$, $\mathfrak{G}$) le groupe des cycles de codimension 1 sur V qui sont linéairement (resp. algébriquement, numériquement, trivialement) équivalents à 0, $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_l$ est une variété abélienne (variété de Picard[2]), $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_a$ est un groupe abélien de type fini (Néron-Severi[4]), et $\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_a$ est son sous-groupe de torsion[3]. Ce dernier résultat veut dire que, en codimension 1, l'équivalence numérique coïncide avec l'équivalence pseudo-algébrique. Les énoncés analogues en codimension quelconque constituent d'intéressantes conjectures.

3. Etude de certaines transformées monoïdales

Nous nous proposons de comparer ici les anneaux des classes de cycles sur une variété V et sur certaines transformées monoïdales ([9], no. 11) de V. On suppose V projective et non-singulière, de dimension n. Soient W une sous-variété non-singulière *de dimension* $n-2$ de V, et V' la transformée de V par la transformation monoïdale de centre W; rappelons[9] que l'application canonique h de V' sur V est un morphisme birationnel, que V' est projective non-singulière, que h^{-1} est régulière en tout point de $V - W$, que l'image réciproque (au sens ensembliste) W' de W par h est une variété de dimension $n-1$, et que la restriction de h à W' définit une fibration de W' sur W par des droites projectives; les points de W' au-dessus d'un point donné y de W correspondent biunivoquement aux variétés linéaires de dimension $n-1$ contenant la variété linéaire tangente à W en y et contenues dans la variété linéaire tangente à V en y.

Etant donnée une sous-variété U de W, nous noterons $j(U)$ la sous-variété de W' image réciproque (au sense ensembliste) de U par h; elle est fibrée sur U par des droites projectives; on a

$$\operatorname{codim}_{V'}(j(U)) = \operatorname{codim}_W(U)+1. \tag{2}$$

Nous étendons j par linéarité aux cycles sur W, puis aux classes de cycles.

Soit X un cycle sur V dont aucune composante n'est contenue dans W; comme toutes les composantes de $\operatorname{Supp}(X) \cap W$ sont de dimension $\dim(X)-1$ ou $\dim(X)-2$, l'ensemble $h^{-1}(\operatorname{Supp}(X))$ a toutes ses composantes de même dimension que X (puisque W' est non-singulière); donc le cycle $h^{-1}(X)$ est défini. Notons $i(X)$ le cycle sur V' correspondant à X par l'isomorphisme de $V'-W'$ sur $V-W$, et X_1 la composante de dimension $\dim(X)-1$ (c'est-à-dire d'excès 1) du cycle intersection excédentaire $W \top X$ (on a $X_1 = 0$ si $W.X$ est défini); nous utiliserons les notations $i(X)$ et X_1 dans la suite. On a les relations

$$h^{-1}(X) = i(X)+j(X_1), \tag{3}$$

$$h(h^{-1}(X)) = X. \tag{4}$$

D'autre part, pour tout cycle X' sur V', $h(X')$ est défini. De plus, si $X'.W'$ est défini (c'est-à-dire si aucune composante de X' n'est contenue dans W'), aucune composante du cycle $h(X')$ n'est contenue dans W, et $h^{-1}(h(X'))$ est défini; on voit facilement qu'il existe un cycle X_1 sur W tel que

$$X'-h(h^{-1}(X')) = j(X_1). \tag{5}$$

Nous désignerons désormais par $\sim$ une relation d'équivalence adéquate, et par $\mathfrak{C}(V)$ l'anneau des classes de cycles sur V modulo $\sim$.

Lemme 1. *Notons α' la classe de W' dans $\mathfrak{C}(V')$. Pour tout $\eta \in \mathfrak{C}(W)$, on a*

$$h^*(j(\eta).\alpha') = -\eta.$$

Par linéarité nous sommes ramenés au cas où η est la classe d'une sous-variété Y de W. Dans l'espace projectif P_N de V, soit C un cône suffisamment général de base Y, de dimension $\dim(Y)+N-n+1$, et coupant transversalement W en Y; alors $C.V$ est défini; en posant $C.V = L$, on a $\dim(L) = \dim(Y)+1$, et toutes les composantes de $L \cap W$ sont propres sur V, à l'exception de Y qui est d'excès 1 et de multiplicité 1; donc, avec les notations de (3), on a $h^{-1}(L) = i(L)+j(Y)$. Soit M un cycle sur V, intersectant proprement W, et tel que $M \sim L$; on a $h^{-1}(M) = i(M)$. Comme $L \sim M$, il vient $h^{-1}(L) \sim h^{-1}(M)$, d'où

$$j(Y) \sim i(M) - i(L).$$

Les cycles $i(M).W'$ et $i(L).W'$ sont définis et de dimension $\dim(Y)$; comme $h(\operatorname{Supp}(i(M).W')) = M \cap W$ est de dimension $\dim(Y)-1$, on a $h(i(M).W') = 0$. D'autre part $h(\operatorname{Supp}(i(L).W')) = L \cap W$ admet Y pour unique composante de dimension maximum; donc $h(i(L).W')$ est un multiple de Y; or, étant donné un corps de définition k de tout ce qui précède, il y a, au dessus d'un point générique y de Y sur k, un point et un seul de $i(L) \cap W'$, et ce point est rationnel sur $k(y)$ puisqu'il correspond à la variété linéaire engendré par les variétés linéaires tangentes à W et à L en y; comme, de plus, $i(L)$ et W' sont transversales, il en résulte qu'on a $h(i(L).W') = Y$. D'où aussitôt notre assertion. C.Q.F.D.

Ceci étant nous allons pouvoir étudier la structure de $\mathfrak{C}(V')$. Pour être plus complets, nous allons aussi considérer une relation d'équivalence adéquate $\equiv$, moins fine que $\sim$; nous noterons $\mathfrak{G}_r$ et $\mathfrak{G}_a$ les groupes correspondant à $\sim$ et $\equiv$, et $\mathfrak{C}_a$ le quotient $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_r$ (pour obtenir l'anneau $\mathfrak{C}$, il suffira de prendre pour $\equiv$ l'équivalence triviale). Considérons les homomorphismes:

$$\mathfrak{C}_a(V) \underset{h^*}{\to} \mathfrak{C}_a(V') \underset{h_*}{\to} \mathfrak{C}_a(V). \tag{6}$$

D'après (3) on a $h_* \circ h^* = 1$, donc $\mathfrak{C}_a(V)$ s'identifie à un facteur direct de $\mathfrak{C}_a(V')$. Notons $\mathfrak{N}$ son supplémentaire, c'est-à-dire le noyau de h_*. L'homomorphisme j applique $\mathfrak{C}_a(W)$ dans $\mathfrak{N}$. Nous allons montrer que cette application est une *bijection*:

(*a*) *Surjectivité.* Prenons $\xi' \in \mathfrak{N}$, et un représentant X' de ξ' tel que $X'.W'$ soit défini. Comme $h(X') \sim 0$, on a $h^{-1}(h(X')) \sim 0$, d'où l'existence d'un cycle X_1 sur W tel que $X' \sim j(X_1)$ (cf. (4)). On a alors $j(X_1) \equiv 0$, d'où, par application du lemme à $\equiv$, $X_1 \equiv 0$ sur W. Ceci démontre la surjectivité.

(*b*) *Injectivité.* Soit Y un cycle sur W tel que $j(Y) \sim 0$ *sur* V'. Le lemme montre qu'on a $Y \sim 0$ sur W. D'où l'injectivité.

Nous avons donc démontré le résultat suivant:

Proposition 13. *Avec les notations précédentes, le groupe additif* $\mathfrak{C}_a(V')$, *gradué par la codimension, est canoniquement isomorphe au produit* $\mathfrak{C}_a(V) \times \mathfrak{C}_a(W)$, *où* $\mathfrak{C}_a(V)$ *a sa graduation naturelle et* $\mathfrak{C}_a(W)$ *la graduation obtenue en augmentant les codimensions d'une unité.*

Exemple. Prenons $V = P_3$ et pour W une courbe non singulière de P_3

de genre $\neq 0$; $\equiv$ sera l'équivalence algébrique et $\sim$ l'équivalence rationnelle. En dimension 1, on a $\mathfrak{C}_a(V) = (0)$, tandis que $\mathfrak{C}_a(V')$ est isomorphe à la jacobienne de W. Ceci montre que $\mathfrak{C}_a$ n'est pas un invariant birationnel absolu en codimension > 1 (en codimension 1, $\mathfrak{C}_a$ est la variété de Picard et est un invariant birationnel absolu).

Nous prendrons désormais pour $\equiv$ l'équivalence triviale (et écrirons donc $\mathfrak{C}$ au lieu de $\mathfrak{C}_a$). Nous allons donner quelques renseignements sur la *structure multiplicative* de $\mathfrak{C}(V')$:

(1) Nous avons déjà vu que h^* identifie $\mathfrak{C}(V)$ à un *sous-anneau* unitaire de $\mathfrak{C}(V')$.

(2) Considérons deux classes de cycles, ξ sur V et η sur W, et calculons $h^*(\xi)j(\eta)$. Pour celà prenons des représentants X de ξ et Y de η tels que $X \,.\, Y$ soit défini; alors $h^{-1}(X)\,.\,j(Y)$ est défini et a même support que $j(X\,.\,Y)$. Or, si C est une composante de $X\,.\,Y$ en laquelle les cycles X et Y sont transversaux, il en est de même de $h^{-1}(X)$ et de $j(Y)$ en $j(C)$. La formule $h^{-1}(X)\,.\,j(Y) = j(X\,.\,Y)$ est donc vraie si X et Y sont transversaux en toutes leurs composantes. On a donc

$$h^*(\xi)j(\eta) = j(\xi\eta) \tag{7}$$

chaque fois que ξ est la classe d'une section plane de V (dans n'importe quel plongement projectif de cette variété); or, comme V est non-singulière, tout diviseur sur V est différence de deux sections hyperplanes (dans deux plongements différents); donc (6) est vraie lorsque ξ est de codimension 1, et par conséquent lorsqu'il est somme de produits de classes de codimension 1. Il semble probable que (6) soit vraie en général.

(3) Pour calculer $j(\eta_1)j(\eta_2)$ $(\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{C}(W))$, nous aurons besoin de connaître la classe α'^2 (où α' désigne la classe de W'); pour $\eta \in \mathfrak{C}(W)$, nous poserons $c(\eta) = \alpha' j(\eta)$ (rappelons que le lemme nous a montré que $h(c(\eta)) = -\eta$). Notons que $\alpha'^2 = c(1)$. La 'formule d'induction' $X' \,._{V'} Z = (X' \,._{V'} W') \,._{W'} Z$ (où X' est un cycle V' et Z un cycle sur W') montre qu'on a $c(\eta) = \alpha' j(\eta) = (\alpha'^2) \,._{W'} j(\eta)$ d'où

$$c(\eta) = c(1) \,._{W'} j(\eta) \quad (\eta \in \mathfrak{C}(W)). \tag{8}$$

Il résulte du lemme que $c(1)$ est l'opposé de la classe d'une section rationnelle du fibré W'.

Ceci étant la formula d'induction montre encore qu'on a

$$j(\eta_1)j(\eta_2) = c(\eta_1) \,._{W'} j(\eta_2) = c(1) \,._{W'} j(\eta_1) \,._{W'} j(\eta_2) = c(1) \,._{W'} j(\eta_1\eta_2).$$

D'où, pour η_1 et $\eta_2 \in \mathfrak{C}(W)$, on a

$$j(\eta_1)j(\eta_2) = c(1) \,._{W'} j(\eta_1\eta_2) = c(\eta_1\eta_2). \tag{9}$$

Remarque. Des résultats plus précis et plus généraux sur les transformées monoïdales ont été obtenus indépendamment par M. A. Grothendieck.

4. Problèmes et résultats sur les cycles de dimension 0.

Il semble raisonnable de commencer l'étude des rapports entre les diverses relations d'équivalence définies en § 2 par le cas des cycles de dimension 0: en effet nous disposons, d'une part, grâce aux travaux de F. Severi, d'un riche matériel expérimental concernant les groupes de points sur une surface; on peut d'autre part espérer démontrer un jour des 'critères d'équivalence' permettant une réduction à la dimension 0.

Pas besoin d'insister sur l'équivalence algébrique ni sur l'équivalence abélienne; rappelons que le groupe de cette dernière est le 'noyau d'Albanese'.

4.1. Equivalence rationnelle. On peut se demander si l'ensemble des points d'une variété V qui sont rationnellement équivalents à un point donné P_0 de V est *fermé* (pour la topologie de Zariski). Il est facile de voir qu'il est stable par spécialisation (puisque l'équivalence rationnelle vérifie ($\mathrm{RA}_{\mathrm{IV}}$)). Problème voisin: l'ensemble des points de V qu'on peut relier à P_0 par une suite finie et connexe de courbes rationnelles (tracées sur V) est-il fermé? coïncide-t-il avec l'ensemble des points rationnellement équivalent à P_0? Une variété dont deux points quelconques sont connectables par une courbe rationnelle est-elle unirationnelle? Une surface dont tous les points sont rationnellement équivalents est évidemment régulière; vérifie-t'elle $p_g = 0$?; est-elle rationnelle?

Le seul résultat que connaisse l'auteur et qui puisse avoir une certaine utilité dans ce genre de questions est le suivant:

Proposition 14. *Notons $\sim$ l'équivalence rationnelle. Si X et X' sont deux cycles positifs sur V, rationnels sur un corps k de définition de V et tels que $X \sim X'$, alors il existe un cycle positif L sur V rationnel sur k, un entier $q \geqslant 1$, un cycle Z positif sur $P_1 \times V$ et rationnel sur k, et deux points a, b de P_1 rationnels sur k tels que*

$$Z(a) = qX + L, \quad Z(b) = qX' + L. \tag{10}$$

En effet il existe un cycle positif Y sur $P_1 \times V$ et deux points a, b rationnels sur k de P_1 (par exemple 0 et ∞) tels que $X - X' = Y(b) - Y(a)$. Par spécialisation de Y sur k, on peut supposer Y algébrique sur k; soient $Y_1, \ldots, Y_q$ ses conjugués (éventuellement répétés); posons

$$Z_1 = Y_1 + \ldots + Y_q.$$

On a $$Z_1(b) - Z_1(a) = q(X' - X).$$

Or, en écrivant $X = X_0 + X_1$, $X' = X_0 + X_1'$, où X_1 et X_1' sont des cycles positifs sans composante commune, la relation

$$Z_1(b) - Z_1(a) = qX_1' - qX_1$$

montre qu'il existe un cycle positif L_1 tel que $qX_1 + L_1 = Z_1(a)$ et $qX_1' + L_1 = Z_1(b)$. Alors le cycle $Z = Z_1 + (P_1 \times L_1)$ est rationnel sur k, et $L = L_1 + qX_0$ vérifie (10). C.Q.F.D.

4.2. Equivalence du carré. Nous avons vu que l'équivalence du carré est plus fine que l'équivalence abélienne. On peut se demander si elles coïncident. En dimension 0 on a deux résultats partiels:

Proposition 15. *Sur une variété abélienne V, tout cycle X de dimension* 0 *et de degré* 0 *qui est abéliennement équivalent à* 0 (c'est-à-dire tel que $S(X) = 0$, avec les notations de[7]), *est un cycle carré.*

Posons $X = \Sigma n_i(x_i)$ avec $x_i \in V$; on a $\Sigma n_i x_i = 0$ par hypothèse. Notons que, pour $a, a', b, b' \in V$, le cycle

$$(a+a') - (a+b') - (b+a') + (b+b')$$

est carré. Procédons par récurrence sur $n = \Sigma\,|n_i|$, qui est pair puisque $\Sigma n_i = 0$. Notre assertion est triviale pour $n = 0$ et $n = 2$. Pour $n \geqslant 4$, mettons en évidence, dans X, deux termes munis du signe $+$ et un terme muni du signe $-$, et écrivons $X = (x) + (y) - (z) + X'$. Le cycle $X_1 = (x) + (y) - (z) - (x+y-z)$ est carré (prendre, ci-dessus, $a = x$, $a' = 0$, $b' = z - x$, $b = x + y - z$). D'autre part $X - X_1 = (x+y-z) + X'$ est abéliennement équivalent à 0, donc carré d'après l'hypothèse de récurrence. C.Q.F.D.

L'auteur ignore si la prop. 15 se généralise aux équivalence n-cubiques.

Proposition 16. *Si V et V' sont deux variétés telles que l'équivalence du carré coïncide en dimension* 0 *avec l'équivalence abélienne, il en est de même de $V \times V'$.*

Fixons en effet des points a de V et a' de V'. Notons $\sim$ l'équivalence du carré. Pour $x \in V$ et $x' \in V'$, on a

$$(x, x') \sim (a, x') + (x, a') - (a, a').$$

Donc, pour tout cycle X de dimension 0 sur $V \times V'$, il existe des cycles Y sur V et Y' sur V', tous deux de dimension 0, tels que

$$X \sim (a) \times Y' + Y \times (a').$$

Si X est de degré 0, on peut prendre Y et Y' de degré 0, et on a alors $\mathrm{pr}_V(X) \sim Y$ et $\mathrm{pr}_{V'}(X) \sim Y'$. Si X est abéliennement équivalent à 0, il en est donc de même de Y et Y', qui, par conséquent, sont des cycles carrés en vertu de l'hypothèse. Ainsi X est un cycle carré. C.Q.F.D.

Remarques. (1) Notons $\mathfrak{C}_c^{(0)}(V)$ le groupe des classes de cycles de dimension 0 sur V modulo l'équivalence carrée. Le raisonnement de la prop. 16 montre que $\mathfrak{C}_c^{(0)}(V \times V')$ est isomorphe à $\mathfrak{C}_c^{(0)}(V) \times \mathfrak{C}_c^{(0)}(V')$.

(2) Soient A une variété abélienne, et V sa *variété de Kummer* (quotient de V par la relation d'équivalence $x+y = 0$). Notons h l'application canonique de A sur V. Etant donnés deux points quelconques a, b de V, soient x, y des points de A tels que $a = h(x)$ et $b = h(y)$. Il existe un point z de A tel que $2z = x+y$. Le cycle $X = (x)+(-y)-(z)+(-z)$ sur A est carré (prop. 15). Comme $h(x) = a$, $h(-y) = h(y) = b$ et $h(z) = h(-z)$, on a $h(X) = (a)-(b)$, ce qui montre que $(a)-(b)$ est un cycle carré. Ainsi, sur une variété de Kummer, *l'équivalence du carré coïncide avec l'équivalence algébrique* en dimension 0. A fortiori ces deux équivalences coïncident avec l'équivalence abélienne; en particulier une variété de Kummer est *régulière* (ce qui est d'ailleurs facile à voir directement).

(N.B. Il est facile de voir que, en dimension 0, le groupe $\mathfrak{C}^{(0)}(V)$ est un invariant birationel absolu; il a donc un sens pour les variétés birationnellement équivalentes à des variétés non-singulières, en particulier pour les surfaces.)

On peut se demander si l'équivalence du carré coïncide avec l'équivalence rationnelle. Pour qu'il en soit ainsi il suffit (d'après ($\mathrm{RA}_{\mathrm{III}}$)) que, quels que soient les variétés (resp. courbes, variétés abéliennes) T, T' et les points a, b de T et a', b' de T', le cycle

$$(a, a')-(a, b')-(b, a')+(b, b')$$

soit rationnellement équivalent à 0; il suffit même que, pour toute courbe C et tous points a, b de C, le cycle $(a, a)-(a, b)-(b, a)-(b, b)$ sur $C \times C$ soit rationnellement équivalent à 0. Le premier cas non trivial est celui où C est une courbe elliptique; la conjecture équivaut alors à la suivante; sur la variété abélienne $C \times C$, les cycles $(x)+(-x)$ et $2(0)$ sont rationnellement équivalents pour tout point x de $C \times C$; ceci veut dire que, sur la surface de Kummer W de $C \times C$, tous les points sont rationnellement équivalents; comme W contient une infinité dénombrable de courbes rationnelles (à savoir les images des sous-variétés abéliennes de $C \times C$), cette conjecture est conséquence de celle qui dit que les points rationnellement équivalents à un point donné forment un ensemble fermé.

4.3. Sous-variétés représentatives. Soit $\sim$ une relation d'équivalence adéquate. Une sous-variété W d'une variété V est dite *repré-*

sentative (pour $\sim$) si tout point de V est équivalent (pour $\sim$) à un cycle de dimension 0 porté par W. Ceci veut dire que l'homomorphisme canonique $\mathfrak{C}^{(0)}(W) \to \mathfrak{C}^{(0)}(V)$ est *surjectif*. L'existence de sous-variétés représentatives de V permet donc d'avoir des renseignements sur $\mathfrak{C}^{(0)}(V)$.

Etant donnée une variété V, l'existence de courbes sur V représentatives pour l'équivalence rationnelle semble un problème ouvert en dehors des cas triviaux. On peut aussi conjecturer que, pour qu'une variété V admette une courbe représentative (pour l'équivalence rationnelle), il faut et il suffit que le noyau d'Albanese de V coïncide avec le groupe de l'équivalence rationnelle; la condition est suffisante puisque toute variété abélienne admet une courbe génératrice (cf. Matsusaka).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chow, W. L. On equivalence classes of cycles in an algebraic variety. *Ann. Math.* (2), 64, 450–479 (1956).

[2] Matsusaka, T. On the algebraic construction of the Picard variety. I, II. *Jap. J. Math.* 21, 217–235 (1951) et 22, 51–62 (1952).

[3] Matsusaka, T. The criteria for algebraic equivalence and the torsion group. *Amer. J. Math.* 79, 53–66 (1957).

[4] Néron, A. Problèmes arithmétiques et géométriques attachés à la notion du rang d'une courbe algébrique. *Bull. Soc. Math. Fr.* 80, 101–166 (1952).

[5] Samuel, P. *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. Ergebn. Math. N.F., Heft 4, Berlin, Springer, 1955.

[6] Samuel, P. Rational equivalence of arbitrary cycles. *Amer. J. Math.* 78, 383–400 (1956).

[7] Weil, A. *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Paris, Hermann, 1948.

[8] Weil, A. Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique. *Math. Ann.* 128, 95–117 (1954).

[9] Zariski, O. Foundations of a general theory of birational correspondences. *Trans. Amer. Math. Soc.* 53, 490–542 (1943).