Traité du calcul intégral, pour servir de suite à l'Analyse des infiniments petits de M. le marquis de l'Hôpital / par [...]

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

A L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, de la Société Royale de Londres.

SECONDE PARTIE.

A PARIS,
Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR,
rue Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LVI.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVANT-PROPOS.

JE m'acquitte avec autant d'empressement que de reconnoissance de mes engagements envers le Public. L'accueil favorable qu'il a fait à la premiere partie de cet Ouvrage, m'a soutenu contre les difficultés que présentoit l'exécution de la seconde. L'espoir du succès m'animoit. J'avois au moins un gage certain de l'indulgence de mes Juges.

Dans la premiere partie j'ai exposé les regles pour l'intégration des différentielles qui n'ont qu'une seule variable, ou changeante; celle-ci explique les méthodes connues pour intégrer les différentielles qui en contiennent deux, ou un plus grand nombre. Je la divise en deux Sections, dont l'une a pour objet celles de ces différentielles qui sont du premier ordre, & l'autre celles qui sont d'un ordre plus élevé.

De toutes les méthodes inventées pour éclaircir ces matieres obscures & compliquées, celles qui embrassent un plus grand nombre de cas sont, sans contredit, les plus utiles. C'est à développer les plus générales de ces méthodes, à en faire voir l'application à des cas éloignés

& qui y paroiſſent le moins réductibles, que je me ſuis ſur-tout attaché. Pour épargner aux commençants des eſſais qui, toujours pénibles, ſeroient ſouvent infructueux à l'égard de quantités & d'équations qui ne peuvent être intégrées ſans préparation, j'ai placé à la tête de cette ſeconde partie l'expoſition du Théorême qui apprend à reconnoître quand l'intégration directe eſt poſſible, ou non. J'ai donné à l'expoſition de ce Théorême toute l'étendue néceſſaire pour ne laiſſer, je crois, aucun embarras ſur la maniere de s'en ſervir ; & dans toute la ſuite de l'Ouvrage j'en fais un uſage preſque continuel.

La méthode développée dans le Chap. VII. de la premiere Section eſt auſſi d'une très-grande généralité. On verra que la difficulté d'intégrer pluſieurs équations ſe réduit ſouvent à les ramener au cas dans lequel la méthode du Chapitre VII. ſuppoſe les équations différentielles pour les intégrer. Celle du Chapitre XV. de la même Section eſt auſſi une des plus ingénieuſes & des plus fécondes ; d'autant mieux que M. d'Alembert à qui nous la devons, ainſi que preſque la moitié des méthodes contenues dans ce Volume & dans le précédent, l'a étendue aux différentielles d'un ordre quelconque.

La plûpart de ces méthodes ſont dans les volumes de 1746, 1748, 1750 des Mémoires de l'Académie de Berlin.

J'ai trouvé, dans la ſeconde Section, l'occaſion de faire voir par un exemple, comment deux méthodes, rapprochées l'une de l'autre, ſe prêtent un jour mutuel & acquierent quelquefois un degré d'évidence & de généralité que les inventeurs ne leur avoient pas donné. Il y a toujours à gagner à ces ſortes de combinaiſons; puiſque ſouvent, même en manquant le but qu'on ſe propoſe, on trouve une vérité qu'on ne cherchoit pas. D'ailleurs ces méthodes qui tendent à la même fin, qui ſont fondées ſur les mêmes principes, qui preſque toutes ont les mêmes procédés, ont néceſſairement entre elles un rapport ſenſible. Peut-être à force d'en étudier la liaiſon & d'en chercher la dépendance réciproque, parviendroit-on à rendre l'inſtrument univerſel & en même temps plus ſimple.

Que ne pouvons-nous pas nous promettre à cet égard des travaux réunis & conſtants de pluſieurs Géometres du premier ordre, dont les pas ont déja franchi un eſpace immenſe? Le Public attend avec impatience le Traité du Calcul Intégral de M. Fontaine. Son but eſt de réduire tout ce Calcul à une regle fondamentale & générale. Les essais de ce Traité qui ont déja été lus à l'Académie des Sciences & dont l'Histoire de cette Académie (Année 1742.) fait mention, mettent en droit d'espérer tout de l'Ouvrage même.

SUPPLÉMENT
A LA PREMIERE PARTIE.

COmme on m'a fait appercevoir dans la premiere partie de cet Ouvrage quelques endroits qui n'avoient pas, pour tout le monde, ce degré de clarté que je m'étois proposé de leur donner; & qu'on m'en a indiqué d'autres, où le calcul pouvoit être simplifié; je vais éclaircir & réformer ces endroits, & corriger en même temps les fautes d'impression dont j'ai pu m'appercevoir. Je suivrai dans ce Supplément l'ordre des pages.

PAGE 11. LIGNE 15. Placez la lettre O à l'angle des asymptotes, & nommez: OC, x, au lieu de BC.

Page 15. *ligne* 1. $\frac{dx}{y} = y$, lisez $\frac{dx}{x} = dy$.

Page 21. *ligne* 10. $y^2 dz lx ly =$, lisez $y^2 dz lx ly +$.

Page 35. *Lemme* 6. La supposition faite dans la démonstration de ce Lemme, que $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, &c. pourroit faire naître quelques difficultés. Quoique la vérité du Lemme n'en subsistât pas moins, il est cependant à propos de montrer comment on peut se passer de cette supposition.

Soient donc a, b, $-h$, &c. les cosinus des arcs AB, AF, AI, &c. a, b, $-h$ seront les différentes valeurs de c dans les équations aux cosinus, trouvées p. 31. Donc ces équations auront pour diviseurs $c-a$, $c-b$, $c+h$, &c.

Supposons ces équations multipliées par 2 & faisons $2c=u$; les transformées qui en naîtront, auront pour diviseurs $u-2a$, $u-2b$, $u+2h$, &c. Or on sait que si dans chacune de ces transformées on substitue à u une quantité quelconque P, la quantité dans laquelle chacune d'elles se change par cette substitution a pour diviseurs $P-2a$, $P-2b$, $P+2h$. Donc si à u on substitue $\frac{1+xx}{x}$, les transformées qu'on aura dans ce cas auront pour diviseurs $\frac{1+xx}{x}-2a$, $\frac{1+xx}{x}-2b$, $\frac{1+xx}{x}+2h$, &c. Maintenant en faisant le calcul, on verra facilement que la forme générale de ces transformées est, $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}}$. Donc $\frac{1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{x^{\lambda}}=$ $\left(\frac{1+xx}{x}-2a\right).\left(\frac{1+xx}{x}-2b\right).\left(\frac{1+xx}{x}+2h\right.$. &c. $=$ $\frac{(1+xx-2ax).(1+xx-2bx).(1+xx+2hx).\&c.}{x^{\lambda}}$. Donc enfin $1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=(1-2ax+xx).(1-2bx+xx).(1+2hx+xx).\&c.=\overline{KB}^2\times\overline{KF}^2\times\overline{KI}^2\times\&c.$

Page 38. *ligne* 2. AF, lisez AE.

Ibid. *ligne* 17. Lisez $\sqrt{1+2hx+xx}$, au lieu de $\sqrt{1+hx+xx}$.

Page 42. *ligne* 17. $\frac{AdA+BdB}{AA+BB}\times$, lisez $\frac{AdA+BdB}{AA+BB}+$;

Page 43. *ligne* 16. $\int h\times\frac{ada-bdb}{aa+bb}$, lisez $\int h\times\frac{ada+bdb}{aa+bb}$.

Page

Page 46. *ligne* 7. Comme 9 eſt à 1 : *liſez*, comme g eſt à 1.

Ibid. *ligne* 15. *juſqu'à* 21 : *pour plus de clarté* : *liſez ce qui ſuit* : $s\sqrt[10]{-1} = \overline{s\sqrt{-1}}^{\frac{1}{5}}$. Or cette derniere quantité ſe rapporte à $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$, en faiſant $a=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{5}$, $h=0$. Donc (LXX. n°. 4.) $s\sqrt[10]{-1}$ ſe rapporte à $A+B\sqrt{-1}$, & par conſéquent auſſi $r+s\sqrt[10]{-1}$.

Page 51. *ligne* 18. $+y$: *liſez* $+y^m$.

Page 80. *ligne* 16. au lieu de fy : *liſez*, gy.

Ibid. *ligne* 22. $\frac{2gz}{g-2z}$ ou bien, &c. *liſez* $\frac{gg}{g-2z}$ ou bien $\frac{2gz}{g-2z}$.

Page 102. *ligne pénultieme*. $-(X)$: *liſez* $+(X)$.

Page 117. *ligne* 14. Il eſt évident, &c. *liſez*, Il eſt évident qu'on aura toujours un triangle rectangle, dont les côtés autour de l'angle droit ſeront dx & dy, & dont l'hypotenuſe ſera du.

Page 121. *ligne* 26. *liſez*, d'un quadrilatere d'hyperbole équilatere par rapport à ſes aſymptotes : les coordonnées ayant leur origine à la diſtance 1 du ſommet.

Page 129. *ligne* 20. un nombre entier poſitif : *liſez*, un nombre entier pair poſitif.

Page 133. *ligne* 11. $\frac{-z^m dz}{rr(zz+rr)}$, *liſez* $\frac{-z^m dz}{rr(zz+\frac{1}{rr})}$.

Page 152. *ligne* 5. $\frac{(f+fa-g)}{b-a}$: *liſez* $(f+\frac{fa-g}{b-a})$.

Page 159. *ligne* 14. la fonction de x : *liſez*, le coefficient de x.

Page 171. *ligne* 11. $Gz^r dx$: *lisez*, $Gz^r dz$.

Ibid. *ligne* 18. *lisez*, s étant un nombre impair positif ou négatif; & cette quantité s'intégrera, ou absolument, quand s est positive (Art. CVI. n°. 1.), ou par la quadrature du cercle (Art. CVI. n°. 2.), lorsque s est négative.

Page 180. *On peut supprimer depuis la ligne* 4 *inclusivement, jusqu'à la ligne* 7 *exclusivement.*

Page 181. *ligne* 15. $1+x=$ &c. *lisez* $\overline{1+x}^{\lambda}=$.

Page 199. *ligne* 8 *&* 9. demi-axe conjugué : *lisez* axe conjugué.

Page 204. *ligne* 14. $=$ enfin $\frac{-bbdu}{u\sqrt{u}.\sqrt{uu\pm fu-bb}}$. Pour montrer clairement ce qui a pu conduire à ajouter à la différentielle ce qu'on lui a ajouté, mettons-la sous cette forme $-\frac{\frac{bbdu}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}$; il est facile de voir que $\frac{bbdu}{uu}$ est la différentielle du terme $-\frac{bb}{u}$ qui est sous le signe. Donc il ne manque que du dans le numérateur, pour que la différentielle soit complete. Donc au lieu de notre différentielle nous pourrons prendre la suivante,

$$-\frac{du+\frac{bbdu}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}+\frac{du}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}.$$ La premiere partie a pour intégrale (Art. VIII.) $-2\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}$, ou $-\frac{2\sqrt{uu\pm fu-bb}}{\sqrt{u}}$. La seconde n'est autre chose que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu\pm fu-bb}}$, qui se rapporte à l'Article CCVI.

Page 220. *ligne* 3. eſt égal à celle de : *effacez* celle de.

Page 224. *ligne* 1. *changez le double ſigne* $\pm$ *en* $\mp$.

Page 227. *ligne* 16. On aura une différentielle, &c. C'eſt ce qu'on peut voir de la maniere ſuivante. Puiſque $f+gx+hxx+x^3=(k+lx+mx^2).(c\pm x)$, en faiſant $c\pm x=z$, on aura une transformée de cette forme $[a.(\pm z\mp c)+b]^p\times\pm z^{\frac{n}{2}}dz\times(k'+l'z+mz^2)^{\frac{n}{2}}$; donc, &c.

Page 231. *ligne* 2. & $xx=$ &c. On peut ſimplifier ce calcul de la façon ſuivante. Subſtituez la valeur de x, qui vient d'être trouvée, dans l'équation $g'zx+\delta z=g+lx+kx^2$ & vous aurez tout de ſuite $g+lx+kxx=\delta z+g'z\times\left\{\frac{g'z-l}{2k}\pm\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}$, d'où l'on tire immédiatement le dénominateur $\sqrt{\varphi+\frac{1}{z}\times\left\{\delta z+g'z\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)\pm\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2}\right\}}$; réduiſant, &c. *comme juſqu'à la ligne* 10, je multiplie &c. On peut ſe diſpenſer de cette opération, parce que le numérateur & le dénominateur ſont chacun diviſibles par la quantité qui multiplie $\frac{dz}{k}$, ce qui conduit ſur le champ à $\frac{\pm dz}{\sqrt{z}.\sqrt{\&c.}}$, *ligne* 12. *page ſuivante*.

Quant à la remarque qui ſuit, page 233, on peut trouver auſſi facilement, ſans le ſecours du calcul qui précede, que la propoſée ſe rapporte aux logarithmes, toutes les fois que $\delta\delta-\frac{\delta g'l}{k}+\frac{gg'g'}{k}=0$. Car il eſt ſûr que la propoſée ſe réduira aux logarithmes, lorſque $g'x+\delta$ ſera diviseur de $g+lx+kx^2$. Supposant donc qu'il le soit, & faisant la division, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'x au dividende, on trouvera, en égalant le reste à zéro & en réduisant, $\delta\delta - \frac{\delta g'l}{k} + \frac{gg'g'}{k} = 0$.

Page 234. *ligne* 17. est du troisieme degré: *lisez*, est 3.

Page 235. *ligne* 20. Les quadratures de ces quatre équations : *lisez*, les quadratures des courbes représentées par ces quatre équations.

Ibid. *ligne* 23. sa quadrature se réduira : *lisez*, la quadrature de cette courbe se réduira.

Page 237. *ligne* 14. $dx = y\,du$, effacez $dx =$.

Ibid. *ligne* 15. Faites ainsi, pour plus de simplicité, le calcul suivant. Je multiplie la différentielle $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ haut & bas par $4\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}$. & j'ai $\frac{4kdu+4ludu+4mu^2du+4nu^3du}{4\sqrt{k+lu^2+mu^3+nu^4}}$, ou bien $\frac{kdu+2ludu+3mu^2du+4nu^3du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}} + \frac{3kdu+2ludu+mu^2du}{4\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}$. Il est évident que la premiere partie a pour intégrale $\frac{\sqrt{ku+lu^2+mu^3+nu^4}}{2}$. A l'égard de la seconde, elle se réduit à trois autres, dont la premiere qui a pour numérateur $3kdu$ s'integre par les sections coniques, en faisant $u = \frac{1}{z}$. La seconde qui se réduit à $\frac{ldu\sqrt{u}}{2\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ est de la forme de celle dont nous cherchons l'intégrale; & la troisieme se réduit à $\frac{mudu}{4\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}}$, à laquelle, après l'avoir mise sous cette forme,

$\frac{m}{8n} \cdot \frac{2nudu}{\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}}$, on voit qu'il ne manque pour être une différentielle complete, que d'avoir à ſon numérateur $-\frac{kdu}{uu}+mdu$. Cette troiſieme partie ſe réduira donc, pour ſon intégration, à l'intégrale $\frac{m}{4n}\sqrt{\frac{k}{u}+l+mu+nu^2}$, à la différentielle $\frac{\frac{m}{8n}\cdot kdu}{u\sqrt{u}\cdot\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$, qui ſe rapporte aux ſections coniques en faiſant $u=\frac{1}{z}$; & enfin à la différentielle $\frac{-\frac{m^2}{8n}\cdot du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$, de la même forme que celle dont nous cherchons l'intégrale.

Donc la différentielle $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$ eſt compoſée de deux parties qui s'integrent abſolument, de deux parties dépendantes des ſections coniques, & enfin de $\left(\frac{l}{2}-\frac{mm}{8n}\right)\cdot\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$. Donc l'intégrale de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ dépend de celle de $\frac{du\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}{\sqrt{u}}$, c'eſt-à-dire, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 241. *ligne derniere* : d'une quadrature du troiſieme ordre : *liſez*, de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Page 244. *ligne* 3. xx : liſez, x.

Page 246. *ligne* 14. $2xxdx$: liſez, $2cxdx$.

Page 248. *ligne* 17. elle ne dépend pas toujours de

$\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$: mais elle peut dépendre ou de $\frac{x^2 dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{x dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou de $\frac{dx}{\sqrt{a+fx^3}}$, ou enfin de $\frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$. Dans le premier cas elle s'integre exactement. Dans le second & le troisieme elle dépend des sections coniques.

Page 253. *ligne* 7. fonctions de x : *lisez*, de z.

Page 259. *ligne* 6. au dénominateur $\sqrt{\varphi A + Bu}$ &c.: lisez $\sqrt{A + Bu \text{ \&c.}}$

Page 277. *ligne* 3. $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$ donne, &c. Le calcul qui suit peut s'abreger en cette maniere ; $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$ donne $x^2 dx = \frac{-2azdz + 3gdz}{3z^4}$; donc $x^2 z dx = \frac{-2azdz + 3gdz}{3z^3}$; *ce qui intégré conduit tout de suite à la ligne* 7.

Ibid. *ligne* 22. Ay, lisez Ay^λ.

Page 292. *ligne* 10. Si l'on avoit $\int(rdx\int udx)$: *ajoutez ces mots*: r & u étant des fonctions quelconques de x.

Ibid. *ligne* 15. *en titre*, SECOND CAS ; *effacez ce titre & les deux lignes qui suivent. Lisez à la marge:* Autre exemple du premier cas ; *& au lieu de* $\int (dx) \times \left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3$, lisez $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$ *dans cet article & le suivant.*

Page 294. *Art.* CCCII. *jusqu'à la ligne* 14: *lisez ce qui suit.* Soit proposée $\int\left\{dx\left(\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right)^3\right\}$; $\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ est l'expression d'un arc de cercle dont x est le sinus verse & r le rayon : Soit, en supposant le rayon 1, z la valeur de cet arc ; rz sera sa valeur, le rayon étant r. De même si cos. z représente le cosinus de cet arc, le rayon étant

1, r cof. z repréfentera le cofinus du même arc, le rayon étant r. On aura donc $x = r - r$ cof. z; or cof. $z =$ &c.

Au refte il eft bon de marquer en paffant la différence de ces deux expreffions r cof. z & cof. rz. La premiere exprime le cofinus de l'arc z pris dans un cercle dont le rayon eft r; la feconde repréfente le cofinus d'un arc, le nombre de fois r plus grand que z, les arcs rz & z étant pris dans le même cercle; d'où l'on voit que r cof. z & cof. rz font deux expreffions qu'il ne faut pas confondre.

Page 296. ligne derniere. Entre l'article CCCV. *qui termine cette page & l'article* CCCVI. *qui commence la fuivante, inférez ces mots :*

SECOND CAS.

Ce fecond cas a lieu, quand les quantités affectées du figne $\int$ font multipliées les unes par les autres. Il n'a aucune difficulté. Prenez chaque intégrale en particulier, & multipliez-les enfuite entre elles, le produit fera la valeur de l'expreffion propofée. Ainfi $\int(x\,dx) \times \int(g\,x^3\,dx) = \frac{x^2}{2} \times \frac{g\,x^4}{4} = \frac{g\,x^6}{8}$.

Page 316. ligne 20. ajoutez ce qui fuit. On peut par le même Théorême transformer tout nombre irrationel donné en une fuite infinie de termes purement rationels. Soit, par exemple, la quantité irrationelle $\sqrt{10}$, je la transforme en $\sqrt{9+1}$, c'eft-à-dire, en un radical binome dont la premiere partie foit un quarré; & alors élevant par le moyen de la formule le binome $9+1$ à la puiffance

$\frac{1}{2}$, on aura une suite infinie de termes tous rationels.

Page 324. *ligne* 18. d'un nombre plus grand que l'unité. *Entre cette ligne & l'Art.* CCCXL, *ajoutez* : mais moindre que 2. En effet si $1+z$ étoit seulement égal à 2, alors z étant 1, les deux termes du dénominateur binome seroient égaux & la serie seroit fautive; à plus forte raison, lorsque z surpasse 2.

On peut néanmoins employer cette serie à trouver les logarithmes des nombres plus grands que l'unité; mais il faut pour cela calculer les logarithmes de nombres moindres que 2, & qui soient tels que, multipliés entre eux, ou divisés les uns par les autres, ils produisent le nombre dont on cherche le logarithme. Par exemple, sachant que $\frac{\frac{12}{10}\times\frac{12}{10}}{\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}}$, ou bien $\frac{1,2\times 1,2}{0,8\times 0,9}=2$, je calcule par le moyen de la premiere serie le logarithme de 1, 2 en supposant $z=0,2$. Je calcule pareillement les logarithmes de 0, 8 & 0, 9 par le moyen de la seconde formule en supposant $z=0,2$ pour l'un, & 0, 1 pour l'autre. J'ajoute les logarithmes trouvés de 0, 8 & 0, 9 & je retranche la somme du double du logarithme de 1, 2, ce qui donnera le logarithme de 2. Si on se donne la peine de faire ce calcul, on trouvera ce logarithme $=$ 0, 69314718055 9 &c. De même puisque $\frac{2\times 2\times 2}{0,8}=10$, en triplant le logarithme que nous venons de trouver, & retranchant celui de 0, 8, on aura le logarithme de 10 exprimé par 2.302585092994 &c. C'est

ce

ce que (page 10. Art. xv.) nous avions promis de donner.

Lorſque par ce moyen on a formé les logarithmes de quelques nombres, on peut enſuite avoir ceux des autres nombres d'une maniere plus expéditive. La méthode conſiſte à trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur de tel nombre d'unités qu'on voudra. Pour cet effet, ſoit a la ſomme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, x leur différence; la fraction ſera $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$, ou $\frac{a+x}{a-x}$. La différentielle du logarithme de cette fraction ſera $\frac{2adx}{aa-xx}$; laquelle réduite en ſerie par la diviſion & enſuite intégrée, donne pour le logarithme de cette même fraction $2 \times \left\{ \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \&c. \right\}$: intégrale à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que quand $x = 0$, elle devient $= 0$, ainſi que cela doit être. Car lorſque $x = 0$, la fraction $\frac{a+x}{a-x}$ devient $\frac{a}{a} = 1$, dont le logarithme eſt ici $= 0$.

Maintenant s'il s'agit de trouver le logarithme d'un nombre quelconque a, celui d'un autre nombre b étant donné; je chercherai par cette formule le logarithme de la fraction $\frac{a}{b}$, ſi a eſt plus grand que b, ou $\frac{b}{a}$, s'il eſt plus petit: ce logarithme étant trouvé, je l'ajouterai dans le premier cas au logarithme ſuppoſé connu de b, & j'aurai le logarithme de $\frac{a}{b} \times b$; c'eſt-à-dire de a. Dans le ſecond cas je retrancherai du logarithme connu de b, celui de la fraction $\frac{b}{a}$, & j'aurai le logarithme de $\frac{b}{\frac{b}{a}} = b \times \frac{a}{b} = a$.

Au reste, il ne faut pas perdre de vue que les logarithmes dont nous parlons ici, sont les logarithmes hyperboliques; & que pour réduire à ceux des tables ordinaires les logarithmes trouvés par les moyens que nous venons d'indiquer, il faut multiplier ces derniers par le nombre constant 0, 43429448 &c. La raison en est que les logarithmes d'un même nombre pris dans différentes logarithmiques sont entre eux comme les sous-tangentes de ces logarithmiques. Or les logarithmes appellés hyperboliques, sont ceux que donneroit la logarithmique dont la sous-tangente $= 1$, & ceux des tables appartiennent à une logarithmique dont la sous-tangente $= 0, 43429448$ &c. Donc si en général on nomme l le logarithme hyperbolique d'un nombre donné; L son logarithme pris dans les tables ordinaires, on aura $1 : 0,43429448$ &c. $::$ $l : L$. Donc $L = l \times 0,43429448$ &c.

Par une méthode semblable à celle que nous venons d'employer pour trouver le logarithme du nombre $1 + z$, on peut parvenir à trouver l'expression générale de c^x, (c étant le nombre dont le logarithme est 1, & x une quantité quelconque). On supposera pour cet effet $c^x = 1 + z$; donc $x = l(1 + z)$ & conséquemment $x = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ &c.; équation de laquelle tirant, par la méthode inverse des series, la valeur de z en x, on aura $z = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ &c. donc $1 + z$ ou $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ &c.

Je remarquerai ici que cette expression trouvée pour c^x démontre ce que nous avons supposé dans la premiere Partie (Art. CCCVII.), savoir que $c^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1}$ lorsque z est très-petite.

J'observerai encore qu'on peut par ce moyen trouver la valeur de c. En effet puisque $c^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ &c. en supposant $x = 1$, on a $c = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. $= 2,7182818$ &c.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 14 Janvier 1756.

NOUS Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné la ſeconde Partie de l'Ouvrage de Monſieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral.*

Cette ſeconde Partie traite de l'Intégration des Quantités différentielles à deux ou pluſieurs variables, & acquitte par conſéquent l'engagement que l'Auteur avoit pris avec le public. Elle eſt diviſée en deux livres.

Le premier a pour objet l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent deux ou pluſieurs variables. M. de Bougainville après quelques Définitions & Propoſitions préliminaires, traite d'abord de l'intégration des quantités ou équations différentielles qui n'ont beſoin pour cela d'aucune préparation ; il donne le moyen de connoître & de diſtinguer ces ſortes de quantités ou équations, & de les intégrer. Il paſſe enſuite à l'intégration des équations qui ont beſoin d'être préparées par quelque opération particuliere ; & comme pour l'ordinaire, cette opération conſiſte à ſéparer les Indéterminées, M. de Bougainville, après avoir enſeigné à conſtruire une Equation différentielle dont les indéterminées ſont ſéparées, donne différentes méthodes pour ſéparer les indéterminées dans une Equation propoſée, ſoit par la voie des multiplications & des diviſions, ſoit par celle des transformations. Le premier uſage qu'il en fait, a pour objet les Equations homogenes, & après avoir montré comment on peut conſtruire ces équations dans tous les cas, il enseigne comment on peut réduire plusieurs Equations au cas de l'homogénéité.

Il passe de là à l'intégration d'une espece d'Equations qui a souvent lieu dans la solution des Problêmes ; c'est celle dont M. Bernoulli a donné le premier l'Intégrale dans les Journaux de Leipsic de 1697. M. de Bougainville, après avoir donné une méthode particuliere d'intégrer ces sortes d'Equations, fait voir comment on peut y réduire un grand nombre d'Equations proposées. Ces principes établis, il traite en général des équations à trois & quatre termes, & montre dans quels cas on peut les intégrer. Il n'oublie pas la fameuse équation de *Ricati*, ni même des équations plus compliquées, dont celle de *Ricati* n'est qu'un cas.

De là il passe à l'intégration des Equations où les deux différentielles sont élevées à différentes puissances ; le cas des Equations homogenes se retrouve encore ici, mais sous une forme bien plus générale. M. de Bougainville montre de plus comment on peut intégrer dans beaucoup d'autres cas les Equations dans lesquelles les deux différentielles se trouvent mêlées ensemble, ou élevées à des puissances plus grandes que l'unité.

L'Auteur fait voir ensuite comment on peut employer dans certains cas la méthode des Coefficients indéterminés pour intégrer en même temps plusieurs équations qui contiennent chacune un certain nombre de variables ; & comment on peut se servir de cette même méthode pour déterminer une Intégrale par certaines conditions données de la Différentielle.

Le second Livre traite de l'intégration des Equations ou quantités différentielles à plusieurs variables, du second ordre & au-delà, en supposant constante telle différentielle qu'on juge à propos. Il contient, ainsi que le Livre premier, toutes les méthodes que les Géometres ont trouvées jusqu'à présent sur le Calcul qui en est l'objet ;

l'Auteur fait par-tout se rendre propres ces méthodes par l'intelligence & la clarté avec laquelle il les a développées.

Cette Seconde Partie ne nous paroît pas moins digne que la premiere de l'approbation de l'Académie, & de l'impression. *Signé*, NICOLE; D'ALEMBERT.

Je certifie le présent Extrait conforme à son original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Janvier 1756.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Fautes à corriger dans la Seconde Partie.

Page 19. ligne 24. $\frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz}$, lisez $\frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz}$.

Page 58. ligne 6. $byyx^{\frac{1}{2}}$, lisez $byyx^{\frac{1}{2}}dx$.

Page 116. & 117. effaçez V^{-1} & V''^{-1}.

Page 154. ligne 15. $\pm nyydx^2$, lisez $\pm n$.

Page 155. ligne 1. $\pm ndx^2$, lisez $\pm n$; *idem* ligne 8.

N'ayant pu revoir moi-même les épreuves de cette seconde Partie, à cause d'un voyage que j'ai été obligé de faire & d'une maladie assez longue qui l'a suivi, je m'en suis reposé sur l'exactitude de M. Bezout, Censeur Royal & très-habile Maître de Mathématiques, qui a bien voulu s'en charger. Ceux qui voudront s'instruire à fonds du Calcul intégral & de la Géométrie transcendante, ne sauroient mieux faire que de le prendre pour guide.

TRAITÉ

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE,

Où l'on traite de l'Intégration des Différentielles à deux ou plusieurs variables.

NOUS avons donné dans la premiere partie de ce Traité les regles que les Géometres ont trouvées jusqu'à présent pour intégrer les différentielles qui n'ont qu'une variable. Nous allons exposer dans cette seconde partie ce que l'on sait sur l'intégration de celles qui en contiennent deux ou un plus grand nombre.

Nous diviserons cette seconde partie en deux Sections. Division générale de cette Seconde Partie.

LA PREMIERE contiendra les regles d'intégration des différentielles à plusieurs variables qui ne passent pas le premier ordre ; telles que sont les suivantes, $xydx + xxdy$; $\frac{xdy - ydx}{xx}$, &c.

LA SECONDE traitera de l'intégration des différentielles à plusieurs variables d'un ordre plus élevé ; telles que $xdxddy$; $y^3x^3dydydddx$, &c. qui s'écrivent encore de la façon suivante, $xdxd^2y$; $y^3x^3dy^2d^3x$, & en général $dx^n d^m y$.

Observation sur l'addition de la constante à l'intégrale trouvée.

Il ne faut pas oublier qu'il est aussi nécessaire ici d'ajouter une constante à l'intégrale trouvée, pour la rendre complette, ainsi qu'on l'a fait dans la premiere Partie. Nous nommerons cette constante $+C$, C étant positif ou négatif.

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer auparavant les indéterminées, & sans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

I.

LA différentielle de xy est, comme on le sait, $ydx + xdy$. Donc l'intégrale de $ydx + xdy$ est $xy \pm C$. Par la même raison $yxdz + yzdx + xzdy$ a pour intégrale $xyz \pm C$. En général $y^m x^n$ ayant pour différentielle $mx^n y^{m-1} dy + ny^m x^{n-1} dx$, l'intégrale de cette derniere quantité est $y^m x^n \pm C$. 1°. Lorsqu'elles sont des quantités entieres.

II.

On sait encore que la différence d'une fraction, est la différence du numérateur multipliée par le dénominateur, 2°. Lorsqu'elles sont fractionnaires moins la différence du dénominateur multipliée par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur. Ainsi la différence de $\frac{z}{u}$ est $\frac{udz - zdu}{uu}$. Donc l'intégrale de $\frac{udz - zdu}{uu}$ est $\frac{z}{u} \pm C$. De même l'intégrale de $\frac{ny^m x^{n-1} dx - mx^n y^{m-1} dy}{y^{2m}}$ est $\frac{x^n}{y^m} \pm C$.

III.

En général si on nomme ξ une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y, l'intégrale de $\xi dY + Y d\xi$ est $Y\xi \pm C$; & $\frac{\xi dY - Y d\xi}{\xi^2}$ a pour intégrale $\frac{Y}{\xi} \pm C$.

IV.

3°. Lorsqu'elles contiennent des binomes, trinomes, &c. élevés à différentes puissances.

Nous avons vu dans la premiere partie de ce Traité que toutes les fois que dans une formule composée d'une seule variable & de constantes, la quantité hors du signe étoit la différentielle de la quantité sous le signe ; l'intégrale de cette formule est la quantité même sous le signe dont l'exposant est augmenté de l'unité, divisée par ce même exposant ainsi augmenté de l'unité. Il en est de même pour les formules différentielles composées de plusieurs variables & de constantes, pourvu qu'elles aient la condition que nous venons d'énoncer.

Ainsi l'intégrale de $(dx + dy) . \sqrt{x + y}$ est $\frac{2}{3} . (x+y)^{\frac{3}{2}} \pm C$: celle de $(2adx + 2bdy) . (ax+by)^{-\frac{1}{2}}$ est $4 . (ax + by)^{\frac{1}{2}} \pm C$. Enfin celle de

$\frac{x^3 dy + 3yx^2 dx + 3xy^2 dy + y^3 dx}{2.(x^3 y + y^3 x)^{\frac{1}{2}}}$ eſt $(x^3 y + y^3 x)^{\frac{1}{2}} \pm C$.

V.

Si l'on avoit en général à intégrer $(xdy + ydx + 2ydy)$. $(xy + yy)^{\frac{n}{m}}$, l'intégrale en feroit $\frac{m}{m+n} . (xy + yy)^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & de même celle de $\frac{xdy + ydx + 2ydy}{(xy+yy)^{\frac{n}{m}}}$ eſt $\frac{m}{m-n}$. $(xy + yy)^{\frac{m-n}{m}} \pm C$. Il en eſt ainſi de beaucoup d'autres.

VI.

Si cependant on étoit embarraſſé dans ces cas, & que l'intégrale ne ſe préſentât pas d'abord, on la trouveroit ſur le champ en ſe ſervant des transformations enſeignées dans la premiere Partie. Ainſi en faiſant dans $(xdy + ydx + 2ydy) . (xy + yy)^{\frac{n}{m}}$, $xy + yy = z$; on aura pour transformée $z^{\frac{n}{m}} dz$, dont l'intégrale eſt par la regle fondamentale de tout ce calcul $\frac{m}{n+m} z^{\frac{m+n}{m}} \pm C$; & en remettant pour z ſa valeur, on aura l'intégrale cherchée. Il en eſt de même pour toutes les différentielles qui ſont dans le même cas.

VII.

On a établi que toutes les fois que le numérateur d'une fraction compoſée d'une ſeule indéterminée & de conſtantes, eſt la différentielle du dénominateur, l'intégrale de la propoſée eſt le logarithme du dénominateur. Cette regle a encore lieu, lorſque la fraction contient deux ou

4°. Lorſque ces quantités renferment des Logarithmes.

plusieurs indéterminées avec les mêmes conditions.

Suivant cette regle l'intégrale de $\frac{dx+dy}{x+y}$ est $l(x+y) \pm C$: celle de $\frac{xdy+ydx}{xy}$ est $lxy \pm C$: De même $\int \frac{xdy+ydx-2ydy}{2xy-2yy} = l(xy-yy)^{\frac{1}{2}} \pm C$. En général $\int \frac{my^n x^{m-1}dx+nx^m y^{n-1}dy-(m+n)y^{m+n-1}dy}{rx^m y^n - ry^{m+n}} = l(x^m y^n - y^{m+n})^{\frac{1}{r}} \pm C$, en supposant que la soustangente de la logarithmique est 1. C'est ce qu'on trouvera tout de suite en supposant $x^m y^n - y^{m+n} = z$: car alors on aura la transformée suivante $\frac{dz}{rz}$, dont on sait que l'intégrale est $l(z)^{\frac{1}{r}}$. Donc, &c.

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

VIII.

Ce que c'est qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque.

Lorsqu'une quantité différentielle quelconque est supposée égale à zéro, on l'appelle équation différentielle. Toute équation différentielle est du même ordre que les quantités différentielles de l'ordre le plus élevé, qu'elle renferme; c'est-à-dire que l'équation $z^m dz + 2zdu + udz = 0$, dans laquelle les quantités différentielles dz & du sont du premier ordre, est du premier ordre. La suivante $\frac{a^2y^2dx^2 + 2a^2yxdydx + a^2x^2dy^2}{y^4x^4} = 0$ est encore du premier. Celle-ci $ddu + xdxdu + vdu^2 = 0$ est du second ordre; & ainsi de suite.

IX.

L'intégration des équations différentielles du premier ordre s'appelle autrement méthode inverſe des tangentes. En voici la raiſon. La méthode directe des tangentes n'eſt autre choſe que la méthode de trouver la tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée; c'eſt-à-dire (Sect. II. des Infiniment-Petits) de trouver la valeur de la ſoustangente $\frac{ydx}{dy}$, ou ce qui eſt la même choſe de $\frac{dx}{dy}$, en ſuppoſant qu'on ait une équation en x & en y.

Ce que c'eſt que la méthode inverſe des tangentes.

Or une équation différentielle du premier ordre étant donnée, on a la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ou de $\frac{ydx}{dy}$ en x & en y, c'eſt-à-dire, l'expreſſion de la ſous-tangente. L'intégration de cette équation donnera évidemment l'équation de la courbe. Donc cette intégration fera connoître la courbe dont la ſous-tangente eſt ſuppoſée donnée; & ainſi elle eſt l'inverſe de la méthode directe des tangentes, qui conſiſte à trouver la ſous-tangente d'une courbe dont l'équation eſt donnée.

X.

Les regles pour intégrer les équations différentielles ſont à peu près les mêmes que les précédentes. Il y faut cependant ajouter un nouveau principe.

LEMME. Quand une différentielle eſt égale à zéro, ſon intégrale, s'il eſt poſſible de la trouver, doit être ſuppoſée égale à une conſtante qu'on prendra arbitrairement, en ſuivant toutesfois la loi des homogenes. Par exemple, ſi on a $\frac{2zudu - uudz}{zz} = 0$ dont l'intégrale eſt $\frac{uu}{z}$, on la ſuppoſe égale à une grandeur conſtante a, ce qui donne $\frac{uu}{z} = a$, ou $uu = az$, pour l'intégrale complete.

Lemme préparatoire.

Voyons maintenant des équations qui s'intégrent sans aucune préparation.

X I.

Premier Exemple.

Ce que nous avons dit plus haut nous fait découvrir sur le champ que l'équation $xdy + ydx = uzdt + utdz + ztdu$ est la différentielle exacte de celle-ci $xy - uzt + C = 0$; car il suffit pour s'en appercevoir de regarder les deux membres de cette équation comme deux différentielles particulieres, & d'en prendre séparément l'intégrale.

X I I.

On suivra la même regle pour l'intégration de beaucoup d'autres équations dans lesquelles les différentielles sont élevées au quarré, au cube, &c.

Si l'on a, par exemple, l'équation suivante, $x^2 dy^2 + 2xydxdy + y^2 dx^2 = a^4 dx^2$; pour l'intégrer j'en prends la racine quarrée. Cette opération me donne $xdy + ydx = a^2 dx$, donc l'intégrale est $xy - aax + C = 0$.

X I I I.

Qu'on propose l'équation $a^3 ydx = fy^3 dy + h^2 y^2 dz + a^3 xdy$, qui est la même que celle-ci, $a^3 ydx - a^3 xdy = fy^3 dy + h^2 y^2 dz$; ou bien encore, la même que cette autre $\frac{a^3 ydx - a^3 xdy}{yy} = fydy + h^2 dz$; je vois sans peine que l'intégrale de cette équation est $\frac{a^3 x}{y} - \frac{fyy}{2} - h^2 z + C = 0$.

XIV.

XIV.

SCHOLIE. De ce que dans l'exemple précédent l'équation n'eſt devenue intégrable qu'après que l'un & l'autre membre en a été diviſé par yy, il eſt aſſez ſimple de penſer qu'il pourroit y avoir beaucoup de différentielles qui n'étant pas intégrables dans la forme ſous laquelle on nous les préſente, le deviendroient, ſi on les multiplioit ou ſi on les diviſoit par quelques fonctions de leurs variables.

D'autres auſſi deviendront intégrables en ſe ſervant des ſubſtitutions enſeignées dans le Chapitre ſecond de la premiere Partie, pour les transformer ; d'autres enfin demanderont des opérations plus compoſées. Mais comme ſouvent les différentielles à pluſieurs variables ſont très-compliquées ; qu'il eſt par conſéquent difficile de reconnoître les méthodes qui leur conviendroient ; & que même quelquefois on eſſayeroit inutilement de les leur appliquer ; avant que d'entrer dans le détail des méthodes particulieres, nous en allons expoſer une générale qui apprend à reconnoître ſi une quantité ou une équation quelconque compoſée d'un nombre quelconque de variables & de leurs différentielles (dans l'état où elle eſt propoſée) eſt intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures. Lorſque l'intégration eſt poſſible, cette méthode nous apprend à trouver l'intégrale. Souvent même, lorſque la quantité ou l'équation dans l'état dans lequel on la propose n'est pas intégrable, la même méthode nous fait trouver le facteur qui en l'affectant la rend susceptible d'intégration. Cette méthode est fondée sur un Théorême dont nous ferons le plus grand usage dans toute la suite de ce Traité.

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle composée de plusieurs variables est la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

Solution d'un Problême nécessaire pour ce qui suit.

AVant que d'exposer cette méthode, il est nécessaire de donner ici la solution d'un Problême dont on ne peut se passer. Ce Problême consiste à différentier les quantités de la forme de $\int A\,dx$; A est une fonction de x & de y, telle que c'est x qui a varié; au lieu qu'on demande ici la différentielle de $\int A\,dx$, y variant & x étant constant.

XV.

PROBLEME. Différentier les quantités de la nature de $\int A\,dx$, en supposant y variable & x constant.

Nous allons d'abord donner la solution de ce Problême sur un exemple.

SOLUTION. Supposons que la quantité proposée à différentier soit $\int dx\,\sqrt{(aa+xx)}$, en faisant a variable. Je différentie la quantité $\sqrt{(aa+xx)}$ en faisant seulement varier a. Cette opération donne $\frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$. J'en ôte da que je mets devant le ſigne $\int$ en laiſſant dx ainſi qu'il étoit ſous ce même ſigne : j'aurai $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ pour la différentielle cherchée de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$; a variant & dx étant conſtant. C'eſt ce qui ſe démontre ainſi.

Soit la courbe BM dont l'équation eſt $y=\sqrt{(aa+xx)}$, telle que . . . . . $BA=a$ Figure 11

$$AP=x$$
$$Pp=dx$$
$$PM=y=\sqrt{(aa+xx)}.$$

Menant l'ordonnée infiniment proche pm, on a le petit eſpace $PMmp=dx\sqrt{(aa+xx)}$. Donc la ſomme de ces petits eſpaces, ou l'aire entiere $BAPM$ ſera $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$. Soit à préſent prolongé BA en b, PM en M', pm en m'; & par les points b, M', m', menée la courbe $bM'm'$. En faiſant varier le parametre a & laiſſant x conſtant, on aura $MM'=\frac{ada}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc le petit eſpace $M'm'Mm=\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; donc la ſomme des petits eſpaces $M'm'Mm$, ou $BbM'M=\int\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$: or da demeure toujours le même dans toutes les quantités $\frac{adadx}{\sqrt{(aa+xx)}}$, puiſque $da=Bb$; donc on peut le faire ſortir hors du ſigne d'intégration : donc on a $BbM'M=da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Or $BbM'M$ eſt l'élément de l'aire $ABMP$; donc la différence de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$ eſt $da\int\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Il eſt évident qu'on fera le même raiſonnement ſur tout autre exemple,

X V I.

Solution générale du Problême.

COROLLAIRE. Donc en général la différence de $\int A\,dx$, y étant supposée variable, sera $dy\int\frac{dA}{dy}\,dx$; dans cette quantité, $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'auroit dy dans la différentiation de la quantité A. Ce qu'on voit aisément par l'exemple ci-dessus.

Après la solution de ce Problême, passons à l'exposition de la méthode. Nous l'appliquerons d'abord aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables ; ensuite nous l'appliquerons à celles qui en renferment trois ou un plus grand nombre.

§. I. *Exposition de la méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

X V I I.

Théorême fondamental.

THÉOREME. Si on différentie une quantité telle que A composée de deux variables t & u, en faisant u variable & t constant, & qu'ensuite on différentie la différentielle qui en résulte en faisant t variable & u constant, on aura la même quantité que si on différentioit d'abord A en faisant u constant & t variable, & qu'ensuite on différentiât la différentielle qui en résulte en faisant t constant & u variable. Par exemple, soit $A=\sqrt{(t^2+nu^2)}$. Différentions cette quantité en supposant t constant, la différentielle sera $\frac{nudu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, qui différentiée de nouveau en traitant u comme constant, donne $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Maintenant différentions A en regardant u comme constant, nous aurons $\frac{tdt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$; dont la différentielle en supposant t constant sera $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, qui est la même quantité que la précédente.

La démonstration de ce Théorême se tire des principes mêmes du Calcul différentiel.

Démonstration. Mettons dans A, $t+dt$ au lieu de t, A se change en $B=\sqrt{(t+dt)^2+nu^2}$; mettons ensuite dans A au lieu de u, $u+du$, A se change en $C=\sqrt{t^2+n(u+du)^2}$. Enfin si l'on met en même temps dans A au lieu de t, $t+dt$, & au lieu de u, $u+du$, A se change en $D=\sqrt{(t+dt)^2+n(u+du)^2}$. Il est évident par l'inspection seule que si dans B on écrit pour u, $u+du$, B devient D; & de même, que si dans C on écrit $t+dt$ pour t, C devient D. Cela posé, si on différentie A en regardant t comme constant, on aura $C-A$. La raison en est simple. Car pour différentier une quantité, x, par exemple, il faut supposer que x devient $x+dx$, & alors la différence qu'il y aura entre x dans le premier état & x dans le second sera la différentielle de x; il faudra donc retrancher x de $x+dx$, ce qui donne dx. De même supposant t constant, pour avoir la différentielle de A, il faut substituer dans A à la place de u, $u+du$, ce qui donne C. C est donc ce que devient A au second instant; la différence entre A au premier instant & A au second instant, ou la différentielle de A sera donc $C-A$. Le calcul est conforme à ce raisonnement.

Car $C - A = \sqrt{t^2 + n(u+du)^2} - \sqrt{(t^2 + nu^2)}$

$$= \frac{\left(\sqrt{t^2+n(u+du)^2} - \sqrt{t^2+nu^2}\right) \cdot \left(\sqrt{t^2+n(u+du)^2} + \sqrt{t^2+nu^2}\right)}{\sqrt{t^2 + n(u+du)^2} + \sqrt{(t^2+nu^2)}}$$

$$= \frac{2nudu + ndu^2}{\sqrt{(t^2+nu^2+2nudu+ndu^2)} + \sqrt{(t^2+nu^2)}} = \frac{nudu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$$

qui eſt en effet la différentielle de A en ſuppoſant t conſtant. Si dans $C - A$ on met $t + dt$ au lieu de t, on aura $D - B$, & la différentielle ſera par les raiſons que nous venons d'expoſer $D - B - C + A$.

Maintenant dans A mettons $t + dt$ au lieu de t, nous aurons B, & la différentielle de A en ſuppoſant u conſtant ſera $B - A$. Si dans cette différentielle on écrit $u + du$ au lieu de u, elle devient $D - C$; & la différentielle ſera par conſéquent $D - C - B + A$, différentielle que nous avons trouvée abſolument la même par la premiere opération.

XVIII.

Autre maniere de préſenter le Théorême précédent.

Ce Théorême peut encore ſe préſenter ſous une autre forme qui ſuppoſe toujours les mêmes principes.

THÉOREME. Si $Adx + Bdy$ repréſente la différentielle d'une fonction de x, de y & de conſtantes, la différence de A priſe en ſuppoſant ſeulement y variable & diviſant par dy, eſt égale à la différence de B priſe en ſuppoſant x ſeul variable & diviſant par dx. Ce Théorême s'énonce ainſi algébriquement $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, ſi $\int Adx + Y = \int Bdy + X$ (Y étant une fonction de y & de conſtantes qu'on peut ajouter à $\int Adx$, & X une fonction de x & de conſtantes qu'on peut ajouter à

$\int B\,dy$). On se souviendra que $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'aura dy dans la différentiation de A, & $\frac{dB}{dx}$ celui de dx dans la différentiation de B.

DÉMONSTRATION. Les deux membres de cette derniere équation sont égaux : donc la différence de l'un est égale à la différence de l'autre, quelle que soit la quantité que l'on fasse varier. Donc $B\,dy$ qui est la différentielle de $\int B\,dy + X$ en faisant x constant & y variable, sera la même chose que la différentielle de $\int A\,dx + Y$ en supposant aussi y variable & x constant. Donc $B\,dy =$ (Problême précédent) $dy \int \frac{dA}{dy}\,dx + dY$; ou $B = \int \frac{dA}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy}$. Je prends maintenant la différentielle de cette quantité en faisant varier x; j'ai $\frac{dB}{dx}\,dx = \frac{dA}{dy}\,dx$, ou $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$.

XIX.

COROLLAIRE. On démontrera de la même maniere que si $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$, $A\,dx + B\,dy$ est nécessairement une différentielle complete, c'est-à-dire qu'il y aura quelque fonction de x, algébrique, ou dépendante des quadratures, qui en sera l'intégrale exacte.

XX.

Son application à quelques différentielles.

Premier exemple.

Soit la quantité $x\,dy \sqrt{(xx+yy)} + y\,dx \sqrt{(xx+yy)}$; je vois qu'elle n'a pas d'intégrale : car la différence de $x\sqrt{(xx+yy)}$ en supposant x variable, y constant, & ôtant dx, est $\sqrt{(xx+yy)} + \frac{xx}{\sqrt{(xx+yy)}}$: celle de

$y\sqrt{(xx+yy)}$ en faiſant varier y, ſuppoſant x conſtant & diviſant par dy, eſt $\sqrt{(xx+yy)}+\frac{yy}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Or ces deux différentielles ſont des quantités différentes. Donc la différentielle propoſée n'a point d'intégrale.

XXI.

Second exemple.

Soit maintenant la quantité différentielle $\frac{ydx-xdy}{xx+yy}$, dont on cherche l'intégrale. Pour m'aſſurer ſi cette quantité en a une, ſoit algébrique, ſoit dépendante des quadratures, je prends la différence de $\frac{y}{xx+yy}$ en variant ſeulement y & diviſant par dy. Il me vient $\frac{xx-yy}{(xx+yy)^2}$. Je trouve la même quantité pour la différentielle de $\frac{-x}{xx+yy}$ en faiſant varier ſeulement x & ôtant dx. Donc la propoſée eſt intégrable.

XXII.

Il en eſt de même de toutes les autres différentielles à deux variables, quelque compliquées qu'elles ſoient. On voit tout d'un coup par le ſecours de la méthode précédente ſi elles ſont intégrables ou non : ce qui épargne des opérations ſouvent longues & pénibles, quelquefois même infructueuſes, quand la propoſée n'eſt pas une différentielle exacte.

XXIII.

Application du Théorême aux équations différentielles à deux variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux équations différentielles à deux variables. Cette application eſt facile & ſe fait avec le même ſuccès. Ainſi pour ſavoir ſi l'équation

$Adx+$

$Adx + Bdy = 0$ eſt une différentielle exacte, il faut examiner ſi $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. En ce cas l'équation feroit intégrable algébriquement, ou conſtructible par les quadratures; autrement elle ne le feroit pas. Nous allons dire maintenant comment ces ſortes de quantités, ou d'équations, s'intégrent.

Maniere d'intégrer les quantités $Adx + Bdy$, *& les équations* $Adx + Bdy = 0$, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

XXIV.

Lorſqu'une fois on aura reconnu par le Théorême précédent qu'une différentielle telle que $Adx + Bdy$ eſt intégrable, voici la méthode qu'on peut ſuivre pour parvenir à l'intégration. Appliqué 1°. aux différentielles $Adx + Bdy$.

J'integre ſeulement l'un des deux membres, Adx par exemple, en y ſuppoſant y conſtant & x variable : l'intégrale étant trouvée, je la différentie en faiſant y variable & x conſtant; je retranche cette différentielle de Bdy: ſi la différence eſt zéro, c'eſt une marque que $\int Adx$ ſuffit pour l'intégrale de $Adx + Bdy$: ſinon la différence ne peut être qu'une quantité compoſée de y, de dy & de conſtantes, dont l'intégrale étant ajoutée à $\int Adx$, la rendra l'intégrale complete de $Adx + Bdy$.

XXV.

Soit la différentielle $dx\sqrt{y} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{y}} - a\,dy\sqrt{x}$ — Exemple particulier.

$\frac{a y d x}{3 x^{\frac{2}{3}}}$ que nous reconnoîtrons aisément par le Théorême fondamental être une différentielle exacte ; pour l'intégrer suivant la méthode précédente, je prends l'intégrale de $d x \sqrt{y} - \frac{a y d x}{3 x^{\frac{2}{3}}}$ en supposant y constant : cette intégrale est $x \sqrt{y} - a y x^{\frac{1}{3}} \pm C$. Je différentie cette quantité en faisant x constant & y variable ; j'ai pour différentielle $\frac{x d y}{2 \sqrt{y}} - a x^{\frac{1}{3}} d y$; laquelle retranchée de $\frac{x d y}{2 \sqrt{y}} - a x^{\frac{1}{3}} d y$ donne zéro. Donc l'intégrale complete de la proposée est $x \sqrt{y} - a y x^{\frac{1}{3}} \pm C$. C'est ce dont on peut se convaincre, si on différentie cette quantité en faisant x & y variables.

XXVI.

1°. Application de cette Méthode aux équations $Adx+Bdy=0$.

La même méthode s'applique aux équations différentielles que le Théorême fondamental nous aura montré être intégrables. Il faudra seulement observer de faire l'intégrale trouvée égale à une constante.

XXVII.

SCHOLIE. Il arrive souvent, comme on l'a déja vu, que l'équation n'étant pas une différentielle complete, on peut la rendre telle en la multipliant par quelque facteur composé de x, de y & de constantes. Dans la suite de cet Ouvrage nous nous servirons du Théorême fondamental pour déterminer ce facteur dans certains cas. On trouve dans les Mémoires de l'Académie, année 1740, une méthode pour découvrir souvent quel peut être ce facteur qui se feroit évanoui en différentiant, à cause de l'égalité à zéro. Cette méthode est des plus ingénieuses ; mais comme elle ne réussit pas toujours, que d'ailleurs le procédé en est assez pénible, nous ne la détaillerons pas ici. On peut la voir dans le Mémoire même que nous venons de citer, dans lequel elle est détaillée d'une maniere exacte & lumineuse. Je passe à l'application du Théorême aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXVIII.

Moyen de s'assurer si les équations représentées par $Adx + Bdy + Cdz = o$ sont intégrables.

PREMIERE PROPOSITION. Soit $Adx + Bdy + Cdz = o$ une équation quelconque différentielle contenant trois variables, on s'assurera d'abord si cette équation dans l'état où elle est, ne feroit pas la différentielle exacte de quelque équation à trois variables ; ce qui se découvrira en examinant par le moyen de notre Théorême si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & si $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Si ces trois équations ont lieu à la fois, la quantité $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, sinon elle n'en est pas une.

DÉMONSTRATION. Il est évident que $Adx + Bdy + Cdz$ n'a point d'intégrale, si les équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx} \times \frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ n'ont pas lieu en même temps. Car si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Bdy$ en soit une en supposant

z constant, & faisant varier x & y, ce qui donne, suivant le Théorême fondamental, $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. De même si $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle complete, il faut que $Adx + Cdz$ en soit une en supposant y constant, x & z variables; donc on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$. On fera le même raisonnement sur $Bdy + Cdz$.

Pour prouver l'inverse de cette proposition, savoir que si les trois équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ ont lieu, $Adx + Bdy + Cdz$ est une différentielle exacte, il faut faire voir que l'intégrale de $Adx + Bdy$ prise en faisant y & z constans, sera, à une fonction près de y & de z, l'intégrale de $Adx + Bdy + Cdz$, où x, y, z sont variables; c'est ce qu'on trouve de la façon suivante.

Je différentie $\int Adx$ en faisant x, y, z variables; j'aurai (Article XVI.) $Adx + dy\int \frac{dA}{dy} dx + dz\int \frac{dA}{dz} dx$. Il ne s'agit que de montrer que cette quantité ne differe de la proposée que par une fonction de y, z, dy, dz, qui soit une différentielle complete: c'est-à-dire qu'il faut s'assurer $Adx - Adx + Bdy - dy\int \frac{dA}{dy} dx + Cdz - dz\int \frac{dA}{dz} dx$, ou en réduisant que $(B - \int \frac{dA}{dy} dx)\, dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx)\, dz$ est une fonction sans x & une différentielle complete.

Or 1°. si $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\int \frac{dA}{dy} dx$, ou $\int \frac{dB}{dx} dx$ n'est que B plus une fonction de y & de z sans x. Donc $B - \int \frac{dA}{dy} dx$ est cette fonction sans x.

2°. Si $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\int \frac{dA}{dz} dx$, ou $\int \frac{dC}{dx} dx$ n'est que C, plus une fonction de y & de z sans x. Donc $C - \int \frac{dA}{dz} dx$ est cette fonction sans x. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy} dx) dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx) dz$ est une quantité sans x.

Il nous reste à prouver qu'elle est une différentielle complete, ou, ce qui revient au même, que $\frac{d(B - \int \frac{dA}{dy} dx)}{dz} = \frac{d(C - \int \frac{dA}{dz} dx)}{dy}$. Pour le prouver je remarque que $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$ par l'hypothese. Donc en effaçant dans les deux membres de l'équation ce qui se détruit, elle se réduit à $\frac{d(\int \frac{dA}{dy} dx)}{dz} = \frac{d(\int \frac{dA}{dz} dx)}{dy}$. Mais $dy \int \frac{dA}{dy} dx + dz \int \frac{dA}{dz} dx$ est la différentielle de $\int A dx$ en faisant x constant, z & y variables; donc par le Théorême fondamental $\frac{d(\int \frac{dA}{dy} dx)}{dz} = \frac{d(\int \frac{dA}{dz} dx)}{dy}$. Donc $(B - \int \frac{dA}{dy} dx) dy + (C - \int \frac{dA}{dz} dx) dz$ est une différentielle complete : cette même quantité est une fonction sans x. Donc, &c.

Appliquons la proposition précédente à un exemple.

XXIX.

Soit proposée l'équation différentielle $max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1} dy + nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}} dx - \frac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}} dx}{2} - \frac{ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}} dz}{2} = 0$. Pour que cette différentielle soit intégrable, il faut que les trois équations suivantes aient lieu en même temps. Exemple.

1°. $\dfrac{d\left\{nay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}} - \dfrac{ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}}{2}\right\}}{dy} = \dfrac{d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right)}{dx}$

y seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

2°. $\dfrac{d\left((n-\frac{1}{2})\, ay^m z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}\right)}{dz} = \dfrac{d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\right)}{2\,dx}$

z seul étant variable dans le premier membre, & x dans le second.

3°. $\dfrac{d\left(max^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} y^{m-1}\right)}{dz} = \dfrac{d\left(-ay^m x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\right)}{2\,dy}$

z seul étant variable dans le premier membre & y dans le second. Or les équations ont lieu, puisqu'on a en même temps $\dfrac{mnay^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}\,dy}{dy} - \dfrac{amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}\,dy}{2\,dy} = \dfrac{(n-\frac{1}{2})\, amy^{m-1} z^{-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{3}{2}}\,dx}{dx}$, $\dfrac{(\frac{1}{4}-\frac{n}{2})\, ay^m x^{n-\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\,dz}{dz} = \dfrac{(-n+\frac{1}{2})\, ay^m x^{n-\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\,dx}{2\,dx}$, & enfin $-\dfrac{amy^{m-1} x^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\,dz}{2\,dz} = -\dfrac{amx^{n-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}} y^{m-1}\,dy}{2\,dy}$. Donc l'équation proposée est intégrable. Nous trouverons par la méthode de l'article suivant, que son intégrale est $\dfrac{ax^n y^n}{\sqrt{xz}} + C = 0$.

XXX.

Intégration des équations différentielles completes à trois variables.

SECONDE PROPOSITION. Lorsque j'ai reconnu que $Adx + Bdy + Cdz = 0$ est intégrable, voici la méthode qu'il faut suivre pour parvenir à l'intégration. J'integre d'abord Adx en regardant x comme variable, y & z comme constantes. Ce terme étant intégré, si la différentielle est provenue d'un seul terme composé de x, y, z & de constantes, on aura l'intégrale complete de la proposée; sinon il ne pourra manquer à l'intégrale qu'une fonction de y & de z. On trouvera cette fonction de la maniere suivante. Je redifférentie la quantité intégrée $\int A\,dx$ en regardant x comme constant, y & z comme variables; je retranche la différentielle qui en résulte de $Bdy + Cdz$: le reste sera une fonction différentielle de y & z, dont l'intégrale sera la fonction à ajouter à $\int A\,dx$.

S'il paroissoit plus commode d'intégrer d'abord un des deux autres termes $B\,dy + C\,dz$, on en feroit le maître, & l'opération demeureroit la même pour les deux termes restants.

XXXI.

En suivant cette méthode, on trouvera l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{abz^2y^{-1}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + 2abx^{\frac{1}{2}}y^{-1}zdz - abx^{\frac{1}{2}}z^2y^{-2}dy = 0$ que nous reconnoîtrons (Art. XXVIII.) être intégrable. Le premier terme intégré en traitant x seul comme variable est $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}} + C$; & l'on voit au premier coup d'œil, que c'est l'intégrale complete de la proposée. Application à un exemple particulier.

XXXII.

Qu'on nous demande si l'équation différentielle suivante $abx^{-1}dz + \frac{bxydy - by^2dx}{x^2y\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ est intégrable Second Exemple.

& quelle en eſt l'intégrale, il ſera facile d'appliquer la méthode précédente à cette différentielle.

J'examine d'abord ſi l'on a les trois équations ſuivantes: 1°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dx}\right\} = d\left\{\frac{\frac{-by^2}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abz}{xx}}{dz}\right\}$, x ſeul variant dans le premier nombre, & z ſeul dans le ſecond; 2°. $d\left\{\frac{abx^{-1}}{dy}\right\} = d\left\{\frac{\frac{bxy}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}}{dz}\right\}$, y ſeul variant dans le premier membre & z ſeul dans le ſecond; 3°. $d\left\{\frac{\frac{by}{x\sqrt{(xx+yy)}}}{dx}\right\} = d\left\{\frac{\frac{-by^2 - abz\sqrt{(xx+yy)}}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}}{dy}\right\}$, x ſeul variant dans le premier membre, & y ſeul dans le ſecond. Or en différentiant ſuivant les conditions preſcrites, je trouve que les trois équations précédentes ont lieu; donc l'équation propoſée eſt intégrable.

Cherchons maintenant quelle eſt ſon intégrale. Suivant ce qui eſt dit (Art. XXX.) je prends d'abord celle de $abx^{-1}dz$ en ſuppoſant x conſtant; j'ai $\frac{abz}{x} \pm C$. Je différentie cette quantité en traitant z comme conſtant & x comme variable; j'ai $-\frac{abzdx}{xx}$ que je retranche des trois autres termes de la propoſée. Il me reſte après cette opération $\frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$ dont l'intégrale ajoutée à la quantité $\frac{abz}{x}$ ſera l'intégrale complete de la propoſée. Pour intégrer (N) $\frac{bxydy - by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$, je me ſers de la méthode expoſée (Art. XXIV.) j'integre le premier terme $\frac{bydy}{x\sqrt{(xx+yy)}}$ en ſuppoſant x conſtant: l'intégrale eſt $\frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Je la différentie en ſuppoſant x ſeule variable; la différen-

tielle

tielle eſt $\frac{-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}}$: laquelle retranchée du ſecond terme de la propoſée (N) donne zéro. Donc $\int\frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + A$. Donc enfin l'intégrale de l'équation $\frac{abdz}{x} + \frac{bxydy-by^2dx}{x^2\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{abzdx}{xx} = 0$ eſt $\frac{abz+b\sqrt{(xx+yy)}}{x} + B = 0$.

XXXIII.

Quand une équation différentielle à trois variables n'eſt pas complete, on peut quelquefois la rendre telle en la multipliant par un facteur commun à tous ſes termes.

Suppoſons préſentement qu'on ait découvert par la méthode de l'Article XXVIII. que l'équation $Adx + Bdy + Cdz = 0$, dans l'état où elle eſt, n'eſt point une différentielle exacte, on cherchera quel eſt le facteur, qui multipliant tous les termes de cette équation la rendroit une différentielle complete.

Je nomme μ ce facteur commun à tous les termes de l'équation, & dont l'addition la rend une différentielle complete; alors $\mu Adx + \mu Bdy + \mu Cdz$ ſera une différentielle complete. Par conſéquent j'aurai les trois équations ſuivantes :

$$\frac{Ad\mu}{dy} + \frac{\mu dA}{dy} = \frac{Bd\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx};$$
$$\frac{Ad\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} = \frac{Cd\mu}{dx} + \frac{\mu dC}{dx};$$
$$\frac{Bd\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} = \frac{Cd\mu}{dy} + \frac{\mu dC}{dy}.$$

Il ne s'agit maintenant que de donner à μ une forme aſſez générale avec des coefficiens indéterminés, pour que cette quantité étant ſubſtituée dans les trois équations précédentes, en faſſe évanouir tous les termes.

Il y a une infinité d'équations différentielles à

Mais avant que de chercher cette forme générale pour μ, il eſt néceſſaire d'avertir que ſouvent on la chercheroit trois variables qui n'ont point d'intégrales.

inutilement, parce qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables qui n'ont point d'intégrales.

XXXIV.

Premiere démonstration.

Pour le prouver je reprends les trois équations précédentes,

$$\frac{A d\mu}{dy} + \frac{\mu dA}{dy} = \frac{B d\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx};$$
$$\frac{A d\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} = \frac{C d\mu}{dx} + \frac{\mu dC}{dx};$$
$$\frac{B d\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} = \frac{C d\mu}{dy} + \frac{\mu dC}{dy}.$$

J'en fais évanouir les grandeurs $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\mu}{dy}$, $\frac{d\mu}{dz}$, qui sont des quantités finies; puisque $\frac{d\mu}{dx}$ &c. exprime le rapport de $d\mu$ à dx, à dy, à dz; rapport qui est toujours fini. Je les fais donc évanouir de la même maniere dont on fait évanouir trois inconnues ordinaires; il arrivera que μ s'évanouira en même temps, ce qu'il est aisé de voir par le calcul suivant. Des trois équations précédentes on tire $\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{B d\mu}{dx} + \frac{\mu dB}{dx} - \frac{\mu dA}{dy}}{A}$ & aussi $\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{B d\mu}{dz} + \frac{\mu dB}{dz} - \frac{\mu dC}{dy}}{C}$. Donc $\frac{AB d\mu}{dz} + \frac{A\mu dB}{dz} - \frac{A\mu dC}{dy} = \frac{CB d\mu}{dx} + \frac{C\mu dB}{dx} - \frac{C\mu dA}{dy}$. D'ailleurs on a $\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{A d\mu}{dz} + \frac{\mu dA}{dz} - \frac{\mu dC}{dx}}{C}$. Substituant cette valeur de $\frac{d\mu}{dx}$ dans l'équation précédente, elle devient $\frac{AB d\mu}{dz} + \frac{A\mu dB}{dz} - \frac{A\mu dC}{dy} = \frac{AB d\mu}{dz} + \frac{B\mu dA}{dz} - \frac{B\mu dC}{dx} + \frac{C\mu dB}{dx} - \frac{C\mu dA}{dy}$. Je réduis cette équation, je la divise par μ qui se trouve en multiplier tous les termes, après qu'on aura effacé ceux qui se détruisent; j'aurai $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx}$

$+\frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, équation qui nous apprend que C, A, B, doivent avoir entre eux la relation exprimée par cette équation pour que la proposée $Adx + Bdy + Cdz = 0$ soit intégrable.

XXXV.

Leur différence en cela, des équations à deux variables.

Il n'en est donc pas des équations différentielles à trois variables comme de celles qui n'en ont que deux : car on est fondé à croire (ou du moins on n'a pas démontré le contraire jusqu'à présent) que toute équation différentielle à deux variables se tire de la différentiation de quelque équation en termes finis, au lieu que la démonstration précédente apprend qu'il y a une infinité d'équations à trois variables qui ne peuvent pas être venues par la différentiation d'aucune équation en termes finis.

XXXVI.

Qui expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Il y a plus : sans examiner si les équations différentielles à deux variables viennent de la différentiation de quelque équation en termes finis, il est aisé de prouver qu'elles expriment toujours une courbe dont la construction est possible.

Car soit toute équation différentielle à deux variables représentée par $sdx = rdy$ (s & r étant des fonctions de x, de y & de constantes) ; prenons deux lignes à volonté AB (x) & BC (y) ; nous aurons par conséquent $Bb = dx$, $cc' = dy = \frac{sdx}{r}$. Prenons ensuite une ligne bb' à volonté pour un second dx, on aura $c'c'' = dy = \frac{s\,dx}{r}$, s & r étant des fonctions de Ab & bc'; & ainsi de suite; tous les points c, c'' appartiendront à la courbe de l'équation donnée. Il est vrai qu'on ne peut exécuter cette opération; mais il suffit de l'imaginer exécutée, pour démontrer que toute équation différentielle à deux variables exprime toujours quelque courbe constructible.

XXXVII.

Il n'en est pas ainsi des équations différentielles à trois variables. Toutes celles dans lesquelles l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ n'a pas lieu, ne peuvent être construites en aucune maniere, & les Problêmes dont la solution dépendroit d'équations pareilles, seroient impossibles.

Cette proposition peut encore se démontrer d'une autre maniere indépendante de toute intégration.

Seconde démonstration. Que plusieurs équations différentielles à trois variables ne peuvent avoir aucune construction.

Soit $dz = \omega dx + \vartheta dy$ une équation quelconque à trois variables, ω & ϑ étant des fonctions quelconques de x, y, z, avec des constantes; qu'on se propose de trouver la surface courbe exprimée par cette équation.

Figure 3. Cette démonstration se fait par le moyen des surfaces courbes.

Soit AP l'axe des x, AQ celui des y, AR celui des z. Soient de plus PN la tranche de la surface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des x, & QN la tranche de la surface courbe par un plan perpendiculaire à l'axe des y; l'équation de la tranche PN sera $dz = \vartheta dy$, & celle de la tranche QN sera $dz = \omega dx$.

Imaginons maintenant que $q\nu$ & pn soient deux autres tranches de la surface courbe par des plans infiniment près & paralleles aux premiers ; on verra pour lors que si l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une surface courbe possible, il faudra que les deux courbes $q\nu$, pn, se rencontrent en un point l de la droite kl, section des deux plans $q\mu\nu$, pmn ; c'est-à-dire qu'il faudra que l'équation de la courbe $q\nu l$ soit telle, qu'en y faisant $x = qk$, on ait pour z la même valeur qu'en faisant dans l'équation de la courbe pnl, $y = pk$.

Pour examiner si cela est, il faut chercher 1°. la valeur de lk prise pour une ordonnée de la courbe pnl ; & pour cela considérer lk comme ce qu'est devenue $\nu\mu$, lorsque AP est devenue Ap ; NM, nm ; PM demeurant la même. C'est-à-dire que dans la valeur de $\mu\nu = z + \vartheta dy$, il faudra mettre au lieu de z, nm, ou $z + \omega dx$, & au lieu de ϑ, ce que devient cette fonction, si l'on y substitue $x + dx$ pour x & $z + \omega dx$ pour z. Par cette opération on aura $lk = z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dxdy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dxdy$.

On cherchera 2°. la valeur de lk prise pour ordonnée de la courbe $q\nu$; & pour l'avoir, on substituera dans $nm = z + \omega dx$, $\nu\mu$, ou $z + \vartheta dy$ au lieu de z, & dans la fonction ω on substituera pour y, $y + dy$, & pour z, $z + \vartheta dy$, x demeurant constant. Par cette voye on aura $lk = z + \vartheta dy + \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dydx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dydx$. Donc $z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{d\vartheta}{dx} dxdy + \frac{d\vartheta}{dz} \omega dxdy = z + \vartheta dy$,

$+ \omega dx + \frac{d\omega}{dy} dy dx + \frac{d\omega}{dz} \vartheta dy dx$; ou bien en réduisant $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$. Donc il faut que cette équation ait lieu, pour que celle-ci $dz = \omega dx + \vartheta dy$ exprime une ſurface courbe poſſible.

XXXVIII.

Corollaire. Il ſuit de là que l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$ doit être la même que l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; c'eſt ce qu'il eſt aiſé de vérifier : car puiſque l'équation $dz = \omega dx + \vartheta dy$ eſt la même que $Adx + Bdy + Cdz = 0$, ou que $dz = -\frac{Adx}{C} - \frac{Bdy}{C}$, il faut que $\omega = -\frac{A}{C}$, & que $\vartheta = -\frac{B}{C}$, $d\omega = \frac{AdC - CdA}{CC}$, $d\vartheta = \frac{BdC - CdB}{CC}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d\vartheta}{dx} + \omega \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{d\omega}{dy} + \vartheta \frac{d\omega}{dz}$, on aura l'équation $\frac{BdC}{CCdx} - \frac{CdB}{CCdx} + \frac{AdB}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3dz} = \frac{AdC}{CCdy} - \frac{CdA}{CCdy} + \frac{BdA}{CCdz} - \frac{ABdC}{C^3dz}$, & en réduiſant $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} = \frac{AdC}{dy} - \frac{CdA}{dy} + \frac{BdA}{dz}$, la même que nous avons trouvée plus haut.

XXXIX.

Scholie. Il eſt évident maintenant que lorſque l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. n'a pas lieu, la propoſée $Adx + Bdy + Cdz = 0$, n'exprime aucune ſurface courbe; mais pour être certain que la ſurface courbe eſt poſſible, ſi l'équation $\frac{BdC}{dx}$ — &c. a lieu, il faut s'aſſurer que toutes les fois que l'on a cette équation, on a le même x, foit qu'on le prenne dans la tranche des y & des x, foit qu'on le prenne dans la tranche des z & des x.

Pour reconnoître que cela fera ainfi, il faut obferver que le calcul qui exprimeroit cette nouvelle condition, ne différeroit de celui que nous venons de faire, qu'en ce qu'on auroit des x au lieu des z, & C au lieu de A. Si donc on pratique cette opération, l'équation $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$ deviendra celle-ci $\frac{BdA}{dz} - \frac{AdB}{dz} + \frac{CdB}{dx} - \frac{BdC}{dx} - \frac{CdA}{dy} + \frac{AdC}{dy} = 0$; qui eft la même abfolument que la précédente, en changeant les fignes & tranfpofant.

Par cette voie l'on démontreroit auffi qu'on trouveroit le même y en le cherchant foit dans la tranche des y & des z, foit dans la tranche des x & des y.

X L.

Après avoir donné la méthode qui nous fera reconnoître celles d'entre les équations différentielles à trois variables qui ne peuvent être ni intégrées ni conftruites, il faut apprendre à déterminer le facteur qui rendra completes celles qui font fufceptibles d'intégration ou de conftruction; mais auparavant il eft néceffaire de faire les remarques fuivantes qui fuivent de la différentiation des quantités.

Maniere de trouver le facteur qui peut rendre complete une équation différentielle à trois variables, lorfqu'elle eft fufceptible d'intégration ou de conftruction.

On remarquera d'abord que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce même facteur à leurs différentielles.

On remarquera en second lieu que si une fonction a un dénominateur, sa différentielle aura aussi un dénominateur qui sera un multiple de celui de l'intégrale.

D'après ces observations, mettons au lieu de μ, $\frac{P}{Q}$, P & Q étant deux fonctions sans diviseurs, P sera un facteur de la fonction φ cherchée, dont la différence est $\frac{PA}{Q}dx + \frac{PB}{Q}dy + \frac{PC}{Q}dz$, & Q contiendra le dénominateur de la même fonction φ.

J'imagine que la différentielle est divisée par l'intégrale, P s'en ira du numérateur & Q se divisera par le dénominateur. Il ne restera par conséquent après sa division, pour le dénominateur commun à tous les termes, qu'une fonction R d'un degré de plus que celui de A, B, C: nous disons d'un degré de plus, parce que la quantité $\frac{Adx + Bdy + Cdz}{R}$ qui vient par cette division, est égale à $\frac{d\varphi}{\varphi}$, ou à la différence du logarithme de la fonction cherchée, & que par conséquent elle doit être d'un degré au dessous de l'unité.

Pour trouver R, on le prendra égal à la fonction positive, c'est-à-dire sans diviseurs, la plus générale d'un degré au dessus de A, avec des coefficiens indéterminés; s'il y a des radicaux dans A, B, C, il faut aussi qu'ils entrent dans R, en se combinant avec x, y, z, de toutes les manieres possibles.

On fera ensuite les trois équations suivantes:

$$\frac{RdA}{dy} - \frac{AdR}{dy} = \frac{RdB}{dx} - \frac{BdR}{dx},$$

$\frac{RdB}{dz}$

$$\frac{R\,dB}{dz} - \frac{B\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dy} - \frac{C\,dR}{dy},$$

$$\frac{R\,dA}{dz} - \frac{A\,dR}{dz} = \frac{R\,dC}{dx} - \frac{C\,dR}{dx},$$

afin de déterminer par leurs fecours les coefficiens indéterminés de la fonction R. Mais entre ces trois équations on choifira les deux qui paroîtront donner moins de calcul, la troifieme étant inutile. Car il eft aifé de voir que fi l'on s'eft affuré au moyen de l'équation $B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} +$ &c. que l'équation $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ eft poffible, il arrivera que la fonction R qui convient à deux des trois équations précédentes conviendra auffi à la troifieme.

Après avoir déterminé par le fecours de ces deux équations les coefficiens de R, & par conféquent R même, on intégrera $\frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{R}$, par la méthode de l'article XXX. pour intégrer une différentielle qu'on fait être exacte. Enfuite on égalera l'intégrale trouvée à une conftante, & l'on aura l'intégrale de la propofée.

XLI.

Application du Théoréme aux différentielles qui ont 4, 5, &c. variables.

Appliquons maintenant le Théorême aux quantités & aux équations différentielles qui renferment quatre, cinq &c. variables.

Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du + E\,ds +$ &c. dans laquelle A, B, C, D, E, &c. expriment des fonctions de x, y, z, u, s, & de conftantes; pour que cette quantité faffe une différentielle exacte, il faudra que deux des termes quelconques de cette quantité faſſent toujours une différentielle complete, en ne regardant comme variables que les deux ſeules lettres dont les différentielles ſe trouvent dans ces deux termes. On aura donc autant d'équations comme $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. à vérifier, qu'il y a de manieres de combiner deux à deux les fonctions A, B, C, &c. Si ces équations ont lieu, la propoſée ſera intégrable; autrement elle ne le ſera pas. Dans le premier cas le procédé à ſuivre pour en trouver l'intégrale ſera le même à peu près que celui que nous avons pratiqué, (Art. XXX.) pour les différentielles à trois variables; il n'y aura de différence que dans la longueur du Calcul.

XLII.

Procédé pour les équations à 4, 5, &c. variables.

Méthode pour s'aſſurer ſi elles peuvent devenir completes, lorſqu'elles ne le ſont pas.

Nombre d'équations à vérifier.

A l'égard des équations telles que $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds +$ &c. $= 0$ qui repréſente une équation quelconque compoſée de x, y, z, u, s, &c. avec leurs différentielles & des conſtantes; on verra d'abord ſi cette équation dans l'état où elle eſt propoſée, eſt une différentielle complete, & la maniere de s'en aſſurer ſera de vérifier autant d'équations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$ &c. qu'il y a de façons poſſibles de combiner deux à deux les lettres A, B, C, D, E, &c. Si l'équation propoſée n'eſt pas une différentielle complete, il faut examiner ſi elle peut le devenir. Pour faire cet examen je prends à volonté trois termes de la propoſée, & les égalant à zéro, je vois s'ils forment une équation poſſible, en obſervant toutefois d'y regarder comme conſtantes toutes les lettres, excepté les trois dont les différentielles se trouvent dans ces trois termes. Donc en pratiquant ce qui a été dit (Art. XXXIV.) pour les équations à trois variables, on voit aisément qu'on aura autant d'équations à vérifier comme $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, qu'il aura de manieres de combiner trois à trois les fonctions $A, B, C, D, E,$ &c. Lorsque toutes les équations de la même nature que la précédente, venues par la combinaison des termes $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. pris trois à trois, auront en même temps lieu, on pourra rendre l'équation proposée une différentielle complete.

XLIII.

Ce nombre peut quelquefois se diminuer.

REMARQUE. On peut cependant abreger le nombre de ces équations à vérifier, parce que quelques-unes suivent nécessairement des autres. Pour le prouver je prends l'équation à quatre variables $Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$. Cette équation par la combinaison des quatre lettres A, B, C, D prises trois à trois me donnent les quatre équations suivantes :

Preuve sur une équation à quatre variables.

$$1^\circ.\quad Adx + Bdy + Cdz = 0$$
$$2^\circ.\quad Adx + Bdy + Ddu = 0$$
$$3^\circ.\quad Adx + Cdz + Ddu = 0$$
$$4^\circ.\quad Bdy + Cdz + Ddu = 0$$

De la premiere équation on tire en suivant le calcul de l'Article XXXIV. $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; la seconde nous donne en suivant le même calcul $\frac{BdD}{dx} - \frac{DdB}{dx} + \frac{AdB}{du} - \frac{BdA}{du} - \frac{AdD}{dy} + \frac{DdA}{dy} = 0$; la troisieme nous donne $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{AdC}{du} - \frac{CdA}{du} - \frac{AdD}{dz} + \frac{DdA}{dz} = 0$; & enfin on tire de la quatrieme, $\frac{CdD}{dy} - \frac{DdC}{dy} + \frac{BdC}{du} - \frac{CdB}{du} - \frac{BdD}{dz} + \frac{DdB}{dz} = 0$.

Or on voit aisément que si on prend trois de ces équations à volonté, la quatrieme s'ensuit nécessairement; donc pour s'assurer si une équation à quatre variables peut devenir complete, il suffira de vérifier trois des équations de condition qu'elle donne.

XLIV.

COROLLAIRE. En faisant le même raisonnement sur les équations à cinq variables, on verra que des dix équations de condition que donne la combinaison des fonctions A, B, C, D, E, prises trois à trois, six suffiront pour déterminer si l'intégration ou la construction est possible. De même si la proposée avoit six variables, telles que la suivante $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds + Fdr = 0$, des vingt équations de condition que donne la combinaison des six lettres A, B, C, D, E, F, prises trois à trois, il suffira d'en vérifier dix.

Donc en général le nombre des variables contenues dans une équation différentielle étant m, le nombre d'équations nécessaires à vérifier pour savoir si la proposée peut devenir complete, sera ce que le nombre $m - 1$ peut donner de combinaisons deux à deux; c'est-à-dire $\frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2}$.

XLV.

Lorſque par les procédés que nous venons d'indiquer on aura reconnu que les équations à trois, quatre, cinq, &c. variables peuvent être rendues completes, il faudra chercher le facteur qui doit pour cela multiplier tous les termes de l'équation. Nous ne détaillerons pas ici la méthode de trouver ce facteur; le lecteur qui ſera curieux de la connoître la trouvera dans le mémoire que nous avons déja cité dans ce Chapitre.

XLVI.

Maintenant on eſt en état de s'aſſurer ſi une quantité ou une équation différentielle eſt intégrable ou non; & l'on voit que cette connoiſſance doit épargner beaucoup de peines ſouvent inutiles. Avant que de commencer le détail des méthodes particulieres, il eſt bon d'obſerver qu'il y a des équations différentielles qui ont une intégrale algébrique, d'autres qu'on ne peut intégrer algébriquement, mais dont on parvient à ſéparer les indéterminées. Nous allons d'abord examiner comment on conſtruit les équations dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées; enſuite nous traiterons des différentielles qui s'intégrent en les multipliant ou les diviſant par des fonctions de leurs indéterminées, ou en opérant ſur elles par les transformations enſeignées dans le ſecond Chapitre de la premiere Partie. De là nous détaillerons les méthodes différentes de ſéparer les indéterminées dans les équations différentielles.

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

XLVII.

Ce qu'il faut faire avant que de conſtruire l'équation.

LEMME. DAns une équation différentielle qu'on veut conſtruire, il faut d'abord mettre d'un côté les dx & de l'autre les dy; alors l'équation ſera de cette forme $Xdx = Ydy$ (X exprimant une fonction quelconque de x, & Y une fonction quelconque de y). Quand les deux membres de cette équation ne ſont pas intégrables, alors on la conſtruit par les quadratures : nous allons donner la méthode qu'il faut ſuivre pour cela. Mais nous obſerverons auparavant de quelle maniere on trouve le nombre des dimenſions d'une quantité quelconque X, formée de x & de conſtantes. Par exemple, ax^3 eſt de quatre dimenſions, de même que $ax^3 + b^2x^2$; $\sqrt{(x^4 + c^3x)}$ eſt de deux; $\frac{ax^3 + b^2x^2 + g^2\sqrt{(x^4 + c^3x)}}{\sqrt{(ex + ff)}}$ eſt de trois, parce que le numérateur eſt de quatre & le dénominateur de une; & ainſi de ſuite.

XLVIII.

Procédé pour faire la conſtruction.

PROBLEME. Conſtruire une équation différentielle dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées.

SOLUTION. Je prends le nombre des dimenſions de

X & de Y, nombre qui doit être le même. Si tous les termes n'avoient pas en apparence la même dimenſion, ils doivent être cenſés l'avoir, parce que ceux qui ont la plus petite dimenſion, doivent être cenſés multipliés par une puiſſance convenable d'une ligne conſtante, qu'on prend pour l'unité.

Soit le nombre des dimenſions repréſenté par n, je diviſe mon équation par a^n (a eſt une conſtante quelconque.) J'ai donc $\frac{Ydy}{a^n} = \frac{Xdx}{a^n}$. Pour conſtruire cette équation, ſoient AP, AQ perpendiculaires l'une à l'autre, ſoit une courbe EK telle que . . . . . $AP = x$ Figure 4.

$$PK = \frac{X}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . $APKE = \int \frac{Xdx}{a^{n-1}}$.

Soit encore la courbe TD, telle qu'on ait $AQ = y$

$$QT = \frac{Y}{a^{n-1}},$$

l'aire de la courbe . . . . . . $AQTD = \int \frac{Ydy}{a^{n-1}}$.

Maintenant ſuppoſons qu'on ait . . . $au = \int \frac{Xdx}{a^{n-1}}$,

on en tirera . . . . $u = \int \frac{Xdx}{a^n}$,

enſuite on tracera une courbe GN telle que $PN = u$;

ſuppoſons de même que . . . . . . $at = \int \frac{Ydy}{a^{n-1}}$,

on aura . . . . $t = \int \frac{Ydy}{a^n}$;

& ſoit la courbe SO telle que . . . $SQ = t$.

Il faut donc que $t = u$.

Ayant pris $AH = QS$, on menera AI ſous un angle de 45° ; puis tirant HI parallele à AQ, du point I on menera IN parallele à AP qui déterminera le point N, tel que $PN(u) = QS\ (t)$, & par conséquent $\int\frac{Xdx}{a^n} = \int\frac{Ydy}{a^n}$. Donc si on prolonge SQ & PN jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en M, le point M sera à la courbe qu'exprime l'équation proposée.

XLIX.

REMARQUE 1. Quelquefois il est nécessaire d'ajouter une constante ; c'est la nature du Problême qui doit servir à la déterminer : on n'ajoutera cette constante que d'un seul côté ; car il seroit inutile d'en ajouter des deux côtés à la fois, puisque l'on pourroit regarder ces deux constantes comme n'en faisant qu'une.

L.

REMARQUE 2. Si l'un des deux membres de l'équation différentielle proposée étoit intégrable, alors ce membre dépendroit d'une courbe quarrable, & l'autre membre se construiroit de la maniere que nous venons d'exposer. Par exemple, si l'on avoit l'équation $dx\sqrt{px} = Ydy$ (Y exprimant une fonction de y, telle que le second membre ne soit pas intégrable algébriquement) l'intégration de cette équation donne $\frac{2x\sqrt{px}}{3} = \int Ydy$. On auroit le premier membre en traçant une parabole dont l'équation seroit $yy = px$, & l'autre membre se construiroit comme dans le Problême.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

L I.

IL eſt aiſé de ſentir qu'en ſéparant les indéterminées dans une équation différentielle, on la réduit aux cas de la premiere Partie ; puiſqu'alors on peut regarder chaque membre de l'équation, comme une différentielle particuliere qui ne contient qu'une variable. C'eſt cette opération que nous allons maintenant pratiquer ; d'abord pour des équations différentielles aſſez ſimples ; nous paſſerons enſuite aux plus compoſées.

L I I.

Exemples de cette ſéparation par les regles ordinaires de l'Algebre.

Premier exemple.

1°. Si on avoit des équations de la forme ſuivante $aaxdx + yyxdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$, qui équivaut à la ſuivante $(aa+yy) \cdot xdx = ydy\sqrt{(xx+ff)}$; on verroit au premier coup d'œil que les indéterminées s'y ſéparent par une ſimple diviſion : car on a $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+ff)}} = \frac{ydy}{aa+yy}$; dont l'intégrale eſt, comme on le ſait, $(xx+ff)^{\frac{1}{2}} = l(aa+yy)^{\frac{1}{2}} + C$.

LIII.

Second exemple.

De même l'équation $\frac{xdx}{\sqrt[5]{(a^5+y^5)}} = \frac{ydy}{\sqrt[4]{(b^4-x^4)}}$ devient par la ſeule multiplication $xdx \cdot (b^4-x^4)^{\frac{1}{4}} = ydy \cdot (a^5+y^5)^{\frac{1}{5}}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées, & que l'on conſtruira par la méthode enſeignée plus haut.

LIV.

Troiſieme exemple.

Que j'aie $xxdx^2 + xydxdy = aady^2$; je remarque que le premier membre de cette équation ſeroit un quarré, s'il y avoit de plus $\frac{yydy^2}{4}$. J'ajoute donc de part & d'autre cette quantité, & l'équation devient $xxdx^2 + xydxdy + \frac{yydy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$. Je prends la racine quarrée, ce qui me donne $xdx + \frac{ydy}{2} = \pm dy \times \left\{\frac{yy}{4} + aa\right\}^{\frac{1}{2}}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. L'intégrale de cette équation eſt $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} \mp \int\left\{dy\sqrt{(\frac{yy}{4} + aa)}\right\} + C = 0$, dont la partie qui eſt ſous le ſigne $\int$ dépend de la quadrature d'une hyperbole équilatere par rapport à ſon ſecond axe, l'origine des coordonnées étant au centre de la courbe.

Il en eſt ainſi d'un grand nombre d'autres équations différentielles qu'il eſt inutile de détailler ici.

LV.

Exemples de cette même ſéparation par

2°. Pour ſéparer les indéterminées dans l'équation ſuivante $adx = ydy - xdy$; on fera $y - x = z$, ou $y =$

$z + x$; $dy = dz + dx$. Après les fubftitutions, l'équation propofée deviendra $adx = zdz + zdx$; ou $adx - zdx = zdz$. Donc en divifant par $a - z$, on a $dx = \frac{zdz}{a-z}$; équation dans laquelle les indéterminées font féparées; & qui a pour intégrale $x = a - z + l(a-z)^{-a} + C$. Remettant pour z fa valeur $y - x$, on aura $x = a - y + x + l\frac{1}{(a-y+x)^a} + C$ pour l'intégrale cherchée. On verra d'ailleurs plus bas une méthode pour intégrer cette équation fans transformation. Voyez le Chap. VII.

des transformations. Premier exemple.

LVI.

Soit l'équation $aadx = x^2dy + 2xydy + yydy$; je fais $x + y = z$: j'en tire $dx + dy = dz$. La propofée devient donc $aadz - aady = z^2dy$; c'eft-à-dire $\frac{aadz}{zz+aa} = dy$: j'integre maintenant, & j'ai $y = \int\frac{aadz}{zz+aa}$; le fecond membre dépendant (Art. CVII. de la I[re] Partie,) de la quadrature du cercle.

Second exemple.

LVII.

Si la propofée étoit $(xdy + ydx) \times (a^4 - xxyy)^{\frac{1}{2}} = \frac{xdx+ydy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, je remarque que dans le premier membre de cette équation $xdy + ydx$ eft la différentielle de xy & que le quarré de cette intégrale fe trouve dans la quantité fous le figne. Je fais donc $xy = z$, & j'ai pour premier membre de ma transformée $dz.(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}}$ qui eft tel que je le demande. Je vois de plus que dans le fecond

Troifieme exemple.

membre de l'équation le numérateur eſt la moitié de la différentielle de $xx + yy$, quantité qui ſe trouve ſous le ſigne au dénominateur : je ſuppoſe donc $\frac{xx+yy}{2} = t$; & ma transformée entiere eſt $dz.(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$ dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. L'intégrale du premier membre dépend (Art. XCIV. premiere Partie) de la quadrature du cercle ; & celle du ſecond eſt $\sqrt{2t}$, comme on le ſait.

LVIII.

Quatrieme exemple.

Soit encore à intégrer l'équation $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dX$ (X eſt une fonction quelconque de x ou de y). Je fais $\frac{y}{x} = \frac{u}{a}$, ce qui me donne la transformée ſuivante $\frac{2xxdu}{a.(x-y)^2} = dX$. Je diviſe le numérateur & le dénominateur du premier membre par xx; j'ai $\frac{2adu}{aa - 2au + uu} = dX$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées. Pour l'intégrer je ſuppoſe $a - u = t$; la transformée que donne cette ſubſtitution eſt $-\frac{2adt}{tt} = dX$ dont l'intégrale eſt $\frac{2a}{t} = X$; & en remettant pour t & u leurs valeurs, l'intégrale cherchée eſt $\frac{2x}{x-y} - X + C = 0$.

LIX.

Si au lieu de ſuppoſer $\frac{y}{x} = \frac{u}{a}$, on ſuppoſe $\frac{x}{y} = \frac{u}{a}$, on aura, après les ſubſtitutions différentes, $\frac{-2adu}{uu - 2au + aa} = dX$. Pour intégrer cette équation, ſoit $u - a = t$; on aura pour transformée $-\frac{2adt}{tt} = dX$, laquelle a pour intégrale $\frac{2a}{t} + C - X = 0$; & remettant pour t ſa valeur en u, & pour u sa valeur $\frac{y}{x}$, on a $\frac{2y}{x-y} - X + C = 0$, intégrale différente de la précédente.

L X.

On trouveroit encore en faisant $\frac{x+y}{x-y} = z$, que $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dX$ a pour intégrale $\frac{x+y}{x-y} - X + C = 0$: on en trouveroit même, en faisant d'autres transformations, une infinité d'autres ; ce qui ne doit faire aucune difficulté. Car l'intégrale générale étant $\frac{2x}{x-y} - X + C = 0$, ou $\frac{2x + Cx - Cy}{x-y} - X = 0$, on trouvera autant d'intégrales particulieres qu'on donnera de valeurs différentes à C. Par exemple, si $C = 0$, on aura $\frac{2x}{x-y} - X = 0$, qui est celle que nous avons trouvée d'abord : si $C = -2$, on aura $\frac{2y}{x-y} - X = 0$, & c'est la seconde que nous avons eue : si $C = -1$, on aura $\frac{x+y}{x-y} - X = 0$, & ainsi du reste. Nous sommes entrés dans ce détail sur cet exemple, afin que le lecteur ne soit point embarrassé dans les cas pareils.

L X I.

Soit encore proposé d'intégrer l'équation suivante $Y = \frac{y^2dx - xydy}{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}$, dans laquelle Y représente une fonction quelconque de y & de constantes : j'aurai $\frac{Y}{y} = \frac{ydx - xdy}{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; & en retournant l'équation $\frac{y}{Y} = \frac{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ydx - xdy}$. Donc en quarrant les deux membres, j'aurai $\frac{y^2}{Y^2} = \frac{y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2}{y^2dx^2 - 2xydydx + x^2dy^2}$ Cinquieme exemple.

$= 1 + \frac{y^2 dy^2 - x^2 dy^2}{y^2 dx^2 - 2xy\,dy\,dx + x^2 dy^2}$. Donc $\left(\frac{y^2}{Y^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy\sqrt{(y^2 - x^2)}}{y\,dx - x\,dy}$; ou bien $\frac{Y}{(y^2 - Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{dy\sqrt{(y^2 - x^2)}}$. Soit maintenant $\frac{x}{y} = z$, on aura $y\,dx - x\,dy = yy\,dz$; & après les substitutions la transformée sera $\frac{Y}{(y^2 - Y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y\,dz}{dy\,y\sqrt{(1 - zz)}}$. Donc enfin $\frac{Y\,dy}{y\sqrt{(y^2 - Y^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$.

Passons maintenant à des cas plus généraux dans lesquels les indéterminées se séparent encore par de simples transformations.

LXII.

Cas plus généraux que les précédens qui s'integrent de même.

Premiere formule.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans la formule générale $\frac{a y^{n-1} dy}{b + (cy^n + p)^\alpha} = g\,q\,dx$, p & q étant des fonctions de x telles que $q = \frac{dp}{dx}$.

SOLUTION. Soit $(cy^n + p)^\alpha = z$; on en tire $cy^n + p = z^{\frac{1}{\alpha}}$, & en différentiant & mettant pour dp sa valeur $q\,dx$, on aura $y^{n-1} dy = \frac{\frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha} - 1} dz - q\,dx}{cn}$.

Donc $\frac{ay^{n-1} dy}{b + (cy^n + p)^\alpha} = \frac{\frac{a}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha} - 1} dz - a\,q\,dx}{cn.(b + z)} = g\,q\,dx$.

Donc enfin $\frac{a z^{\frac{1}{\alpha} - 1} dz}{\alpha bcgn + \alpha cgnz + a\alpha} = q\,dx$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées.

LXIII.

Application à un exemple.

Soit dans la formule précédente . . . . $b = 2g$

$a = f^3$

$$n = 1$$
$$p = bx$$
$$q = b$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2},$$

l'équation ſera $\dfrac{f^3\,dy}{2g + (cy+bx)^{\frac{1}{2}}} = bg\,dx$. Je ferai donc $(cy+bx)^{\frac{1}{2}} = z$; j'aurai $y = \frac{zz - bx}{c}$; $dy = \frac{2z\,dz - b\,dx}{c}$; & pour transformée, l'équation ſuivante $\frac{2f^3 z\,dz - bf^3\,dx}{c.(2g+z)} = bg\,dx$; ou $2f^3 z\,dz - bf^3\,dx = 2bcg^2\,dx + bcgz\,dx$. Donc $\frac{2f^3 z\,dz}{2cg^2 + f^3 + cgz} = b\,dx$; équation réduite en fraction rationelle.

LXIV.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $\dfrac{y^\alpha\,dx}{(bx^t + ay^n x^r)^m} = cx^q\,dy$; a, b, c, étant des conſtantes. Seconde formule plus générale.

SOLUTION. Soit $(bx^t + ay^n x^r)^m = zx^{mt}$; on aura la transformée ſuivante $\dfrac{(z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{\alpha}{n}}\,dx}{a^{\frac{\alpha}{n}} z x^{mt}} =$

$\dfrac{cx^q}{na^{\frac{1}{n}}} \times (z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1} \times \left\{ \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1}\,dz + (t-r)\, z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1}\,dx - (t-r)\, bx^{t-r-1}\,dx \right\}$, ou bien, en diviſant par $(z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r})^{\frac{1}{n}-1}$, $a^{\frac{1}{n}} mnx^{\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} + t - r - \frac{t}{n} + \frac{r}{n}}.(z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{\alpha}{n} + 1 - \frac{1}{n}}\,dx = a^{\frac{\alpha}{n}} cx^{q + mt + t - r - 1 + 1} z^{\frac{1}{m}}\,dz + (t-r) \times$

$a^{\frac{\alpha}{n}} m z^{\frac{1}{m}+1} x^{q+mt+t-r-1} dx - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bmzx^{q+mt+t-r-1} dx.$ Or il eſt évident que ſi dans cette équation $\frac{\alpha t}{n} - \frac{\alpha r}{n} - \frac{t}{n} + \frac{r}{n} = q + mt - 1$, les indéterminées ſe ſépareront; car alors on aura $\frac{mdx}{x} = \frac{a^{\frac{\alpha}{n}} c z^{\frac{1}{m}} dz}{a^{\frac{1}{n}} n . (z^{\frac{1}{m}} - b)^{\frac{k}{n}-1} - (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} z^{\frac{1}{m}+1} + (t-r) a^{\frac{\alpha}{n}} bz}$; donc les indéterminées ſe ſépareront dans la propoſée toutes les fois qu'on aura $\alpha = \frac{nq + nmt - n + t - r}{t - r}$; ou bien $q = \frac{\alpha t - \alpha r - mnt + n - t + r}{n}$.

LXV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule . . . . $\alpha = 2$

$t = 2$

$n = 1$

$r = 1$

$m = \frac{1}{2}$

on aura l'équation ſuivante $\frac{hy^2 dx}{(bbxx + gxy)^{\frac{1}{2}}} = xdy$. Je fais $(bbxx + gxy)^{\frac{1}{2}} = xz$; ce qui me donne la transformée ſuivante $\frac{hdx}{g^2} \cdot \frac{(z^2x - bbx)^2}{zx} = \frac{x}{g} \times (2xzdz - bbdx + z^2dx)$, & après la réduction on aura $hdx \times (z^4 - 2b^2z^2 + b^4) = 2gxz^2dz - bg^2zdx + gz^3dx$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{2gz^2dz}{hz^4 - 2kb^2z^2 + hb^4 - gz^3 + b^2gz}$.

Il en ſera de même pour beaucoup d'autres équations particulieres. Je paſſe maintenant à pluſieurs cas généraux dans leſquels les indéterminées ſe ſéparent par des méthodes qui leur ſont propres.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations homogenes.

LXVI.

DÉFINITION. ON appelle *équations homogenes* celles dans lesquelles la ſomme des dimenſions des x & des y, ou ſéparées, ou priſes enſemble, eſt la même dans tous les termes de l'équation. Telles ſont les ſuivantes, $xxdy + gyydx = fz^2du + au^2dz$, ou bien $xydx + byydx = gx^2dy + hxydy$. Telle eſt encore la ſuivante $dx\,(x\sqrt{x^4+y^4} + gy^2\sqrt[3]{xy^2+x^3}) = dy\,\{ax^3 + by^2x + gy^2\sqrt{(xx+yy)}\}$ &c. Cela poſé. Ce que c'eſt qu'une équation *homogene*.

LXVII.

PROBLEME. Séparer les indéterminées dans les équations homogenes, à deux variables. Solution générale du Probléme.

SOLUTION. Soit miſe l'équation ſous cette forme $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$, p exprimant le numérateur du ſecond membre & q le dénominateur. Il eſt évident 1°. qu'en faiſant $x = yz$, on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z$. 2°. Qu'en ſubſtituant pour x ſa valeur yz dans p & dans q, y ſe trouvera à la même dimenſion dans tous les termes de p & dans ceux de q; par exemple, ſi $\frac{p}{q} = \frac{gx^2 + hxy}{xy + byy}$; mettant pour x

sa valeur yz on aura $\frac{gy^2z^2+hzy^2}{zy^2+by^2}$, fraction dans laquelle y a la même dimension dans tous les termes du numérateur & du dénominateur. Donc on pourra faire disparoître de l'un & de l'autre, y; & $\frac{p}{q}$ se réduira à une quantité Z qui ne contiendra que z & des constantes. Donc on aura $\frac{ydz}{dy}+z=Z$, ou bien $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{Z-z}$, équation dans laquelle tout est séparé.

LXVIII.

Application à un exemple.

Soit à intégrer l'équation homogene $xdx\sqrt{(x^4+y^4)} + gy^2dx\sqrt[3]{(xy^2+x^3)} = ax^3dy + by^2xdy + qy^2dy\sqrt{x^2+y^2}$; je la mets sous la forme suivante, $\frac{dx}{dy} = \frac{ax^3+by^2x+qy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{(x^4+y^4)}+gy^2\sqrt[3]{xy^2+x^3}}$, je fais $x=yz$; j'aurai par conséquent en substituant dans cette équation pour x & dx leurs valeurs $\frac{ydz}{dy}+z=\frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{z^4+1}+g\sqrt[3]{z+z^3}}$, ou bien $\frac{dy}{y}$

$$= \frac{dz}{\frac{az^3+bz+q\sqrt{z^2+1}}{z\sqrt{(z^4+1)}+g\sqrt[3]{(z+z^3)}}-z},$$

équation dans laquelle les indéterminées sont séparées.

LXIX.

Cette regle s'étend à toutes les équations homogenes, à quelque puissance qu'y soient élevées les dx & les dy.

REMARQUE I. Si dans l'équation homogene les dx & les dy étoient élevées à une puissance au-dessus du premier dégré, on suivroit la même regle pour séparer les indéterminées.

Soit, par exemple, $xxdy^2+xydx^2=yydx^2$; on donnera à cette équation la forme suivante, $dy^2 = dx^2\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}\right)$; donc $dy = \pm dx\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$. Soit donc $\frac{y}{x} = \frac{z}{a}$, on en tire $ady = xdz + zdx$; & auſſi $ady = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc $xdz + zdx = dx\sqrt{(zz - az)}$. Donc enfin $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z - \sqrt{(zz - az)}}$.

LXX.

Que l'équation propoſée ſoit $x^2dy^2 + xydxdy = x^2dx^2$, on remarquera que le premier membre ſeroit un quarré, s'il contenoit de plus $\frac{yydx^2}{4}$. J'ajoute donc ce terme de part & d'autre, & après avoir extrait la racine quarrée, la propoſée devient $xdy + \frac{1}{2}ydx = \pm dx\sqrt{(xx + \frac{yy}{4})}$, équation qui eſt dans le cas de notre Problême, & qui devient par conſéquent intégrable ou conſtructible par la méthode précédente.

LXXI.

Cette derniere méthode n'eſt applicable qu'aux équations dans leſquelles dy^2 ou dx^2 ne montent qu'au ſecond degré, & dans leſquelles par conſéquent on peut trouver la valeur de $\frac{dy}{dx}$. On trouvera plus bas (Art. CLIV.) une méthode pour les cas plus compoſés.

LXXII.

REMARQUE 2. La méthode que nous venons d'expoſer pour les équations homogenes à deux changeantes

Elle s'étend auſſi aux équations homogenes qui contiennent plus de deux variables, en y faisant toutesfois quelque changement.

s'étendra aussi en y faisant quelques additions aux équations homogenes à trois ou à tant de variables qu'on voudra, pourvu que ces équations ne renferment point de constantes.

LXXIII.

Exemple général.

PROBLEME. Intégrer l'équation générale $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, X, Y, Z représentent des fonctions homogenes & sans constantes de x, y, z. La méthode seroit la même si l'on avoit 4, 5 ou un plus grand nombre de variables.

SOLUTION. Je fais $y = xu$, & $z = xt$. On voit clairement qu'en substituant pour y & pour z leurs valeurs, X qui contient des x, des y & des z sans constantes, se changera en une nouvelle fonction composée de x élevée à une puissance du degré de la fonction X, & multipliée par une fonction de u & de t. De même la fonction Y sera changée en une nouvelle composée de x élevée encore à la même puissance, & multipliée par une autre fonction de u & de t; & ainsi de Z. Supposant donc que m représente le degré des fonctions X, Y, Z, & que F, G, H soient des fonctions différentes de u & de t, substituons pour X, $x^m F$, pour Y, $x^m G$, & pour Z, $x^m H$; mettons aussi pour dy sa valeur $xdu + udx$, & pour dz sa valeur $xdt + tdx$, il est évident qu'on aura la transformée suivante $x^m dx.(F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, ou en divisant tous les termes par $x^{m+1}.(F + Gu + Ht)$, on a $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$;

Or dans l'équation mise sous cette forme les x sont séparées des u & des t; car les fonctions F, G, H ne contiennent point de x. Il ne s'agit donc que de savoir (Chap. II.) si $\frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht}$ est une différentielle complete, & de l'intégrer ensuite.

LXXIV.

Exemple particulier.

Soit dans la formule précédente . . . . $X = xy^2z^3$
$Y = zx^2y^3$
$Z = y^2x^2z^2$

on aura . . . . $m = 6$

& l'équation à intégrer sera $y^2z^3xdx + zx^2y^3dy + y^2x^2z^2dz = 0$. Je fais $y = xu$ & $z = xt$, on aura $x^6t^3u^2dx + x^6tu^3dy + x^6t^2u^2dz = 0$, dans laquelle x est, comme on voit, élevée dans chaque terme au même degré que les fonctions X, Y, Z. Maintenant substituons pour dy & dz leurs valeurs, on aura la transformée suivante $(2u^2t^3 + u^4t) . dx + xtu^3du + xu^2t^2dt = 0$, ou enfin $\frac{dx}{x} + \frac{udu + tdt}{uu + 2tt} = 0$.

LXXV.

Après avoir exposé cette méthode de séparer les indéterminées dans les équations homogenes, nous allons détailler plusieurs moyens de rendre homogenes des équations qui ne l'étoient pas.

CHAPITRE VI.

Méthodes pour rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas.

LXXVI.

Elles ſont au nombre de deux.

NOus allons ici expoſer deux méthodes qui ſervent à rendre homogenes des équations qui ne le ſont pas. La premiere conſiſte à ſe ſervir de ſubſtitutions convenables, & on ne peut lui donner aucune forme générale ; ce ne ſera que par des exemples qu'on en montrera les uſages. La ſeconde conſiſte à changer les expoſants de la propoſée, de telle ſorte qu'on puiſſe déterminer dans quels cas & avec quelles ſubſtitutions on la rendra homogene. Ces deux méthodes rendront une infinité de différentielles ſuſceptibles de la ſéparation des indéterminées.

LXXVII.

Exemples de la premiere méthode.

Premier exemple.

Soit propoſée l'équation $dx\sqrt{(aaxx+az^3)}=zzdz$ qu'on voit bien n'être pas homogene. Je fais $z^3=ayy$, ce qui me donne la transformée ſuivante, $dx\sqrt{(aaxx+aayy)}=\frac{2aydy}{3}$ qui eſt homogene.

LXXVIII.

On auroit encore pu rendre cette équation homogene d'une autre maniere, en ſuppoſant $\sqrt{(aaxx + az^3)} = ay$, car alors on a tout de ſuite $ay\,dx = \frac{2ay\,dy}{3} - \frac{2ax\,dx}{3}$, équation qui eſt homogene.

LXXIX.

Soit maintenant à intégrer l'équation ſuivante $z^3\,dz + \frac{z^2\,dx}{\sqrt{(a+x)}} = dx$: je ferai $\sqrt{(a+x)} = t$; donc $a+x = tt$, & $z^3\,dz + 2zz\,dt = 2t\,dt$. Soit maintenant $zz = yy$, j'aurai en ſubſtituant $\frac{y\,dy}{2} + 2y\,dt = 2t\,dt$, équation qui eſt homogene. Second exemple.

LXXX.

S'il s'agiſſoit de rendre homogenes les équations ſuivantes, $(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.)\ dx + (lx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.)\ dy = 0$, ou bien $(ay + bxy^2 + cx^2y^3 + \&c.)\ dx + (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.)\ dy = 0$, équations dans leſquelles la ſomme des expoſans eſt en progreſſion arithmétique, la ſubſtitution qu'il faudroit faire ſeroit celle-ci, $y = \frac{1}{z}$. Car il nous vient après l'avoir faite, $(a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{zz} + \frac{ex^3}{z^3} + \&c.)\ dx - (lx^2 + \frac{mx^3}{z} + \frac{nx^4}{zz} + \&c.)\ \frac{dz}{zz} = 0$, & $\left(\frac{a}{z} + \frac{bx}{zz} + \frac{cx^2}{z^3} + \&c.\right) dx - (lx + \frac{mx^2}{z} + \frac{nx^3}{zz} + \&c.) . \frac{dz}{zz} = 0$, équations qu'on voit bien être homogenes. Troiſieme exemple.

LXXXI.

Et en général ſi on avoit à intégrer l'équation ſuivante, $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + \&c.)\,dx + (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1} z^{2\tau-1}$

$+ p x^{\pi-2} z^{3\tau-1} +$ &c.) $dz = 0$, on rendroit cette équation homogene en faisant $z = y^{\frac{1}{\tau}}$.

LXXXII.

Je passe à la seconde méthode.

Exposition de la seconde méthode.

Premiere formule pour les équations à trois termes.

Soit l'équation générale composée de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, qui peut servir de formule, & dans laquelle les exposans peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou fractionaires. Si $n+m$ étoit $= q+p = r+s$, l'équation alors seroit homogene. Ainsi nous devons supposer qu'on n'a pas les égalités précédentes. Soit dans cette hypothese $y = z^t$, on a $dy = tz^{t-1} dz$, $y^s = z^{st}$ &c. & après les substitutions on aura la transformée $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + ctx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Mais pour que cette équation fût homogene, on devroit avoir $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$. De la premiere égalité on tire $t = \frac{p-m}{n-q}$, laquelle valeur substituée dans l'équation $qt + p = r + st + t - 1$, ou $(s - q + 1)t = p - r + 1$, l'a fait devenir $(s - q + 1)$. $(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$. Cette derniere égalité exprime les conditions que doivent avoir entre eux les exposants de la proposée, pour qu'on la puisse rendre homogene. La substitution qu'il faudra faire dans ce cas est $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Si au lieu de supposer $y = z^t$, on eût supposé $x = z^t$, on auroit trouvé le même résultat pour la condition entre les

les exposants : la seule différence, c'est qu'alors on auroit $t = \frac{n-q}{p-m}$, ce qui rendroit la substitution à faire $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

LXXXIII.

Il peut arriver que la substitution de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ soit impossible ; ce qui arrive dans le cas où $p = m$, ou $n = q$: mais alors on pourra séparer les indéterminées dans la proposée sans avoir recours à aucune préparation : car dans le cas où $p = m$, elle devient $x^{m-r}\,dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$, ou $x^{p-r}\,dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$; & dans celui de $n = q$, on a $ax^{m-r}\,dx + bx^{p-r}\,dx = -cy^{s-n}\,dy$, ou $-cy^{s-q}\,dy$.

LXXXIV.

Si dans la formule $ay^n x^m\,dx + by^q x^p\,dx + cx^r y^s\,dy = 0$, outre la supposition de $y = z^t$ on suppose encore $x = u^\alpha$; après les substitutions ordinaires, on trouvera $a\alpha z^{nt} u^{\alpha m + \alpha - 1}\,du + b\alpha z^{qt} u^{\alpha p + \alpha - 1}\,du + ctu^{\alpha r} z^{st + t - 1}\,dz = 0$; comparant ensemble les exposans du premier & du second terme, on a $nt + \alpha m + \alpha - 1 = qt + \alpha p + \alpha - 1$, d'où l'on tire $t = \alpha . \left\{\frac{p-m}{n-q}\right\}$. L'équation entre les exposans du second & du troisieme terme nous donne $t . (s - q + 1) = \alpha (p - r + 1)$, & mettant pour t sa valeur tirée de la premiere équation entre les exposants, on a $\alpha . (p - m) . (s - q + 1) = \alpha . (n - q) . (p - r + 1)$, équation qui exprime, comme ci-dessus, la condition que doivent avoir les exposants de la formule pour l'homogénéité : mais dans cette équation la lettre α ſe détruit dans tous les termes ; donc la ſeconde ſuppoſition de $x = u^{\alpha}$ étoit inutile.

LXXXV.

Application de la formule à une équation particuliere.

Soit propoſée l'équation $ay^3 x dx + byy x^{\frac{1}{2}} - cx dy = 0$, je compare cette équation avec la formule précédente : cette comparaiſon me donne . . . . . $n = 3$

$$m = 1$$
$$q = 2$$
$$p = \tfrac{1}{2}$$
$$r = 1$$
$$s = 0$$

Dans ce cas l'équation de condition $(s - q + 1) . (p - m) = (p - r + 1) . (n - q)$ devient $- 1 \times - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, ce qui eſt conſtant ; donc la propoſée peut être rendue homogene. Je fais donc . . . . $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$

$$dy = -\tfrac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$$
$$y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$$
$$yy = z^{-1}$$

& après la transformation je trouve $\frac{a x dx}{z \sqrt{z}} + \frac{b dx \sqrt{x}}{z} + \frac{c x dz}{2 z \sqrt{z}} = 0$, équation qui eſt homogene, comme on le voit au premier coup d'œil.

LXXXVI.

Seconde formule contenant les équations à quatre termes.

Si le nombre des termes de l'équation eſt plus grand que trois, les conditions que doivent avoir les expoſants des indéterminées augmentent à proportion. Soit, par exemple, l'équation suivante de quatre termes qui peut servir de formule $ax^m y^n dx + bx^q y^p dx + cx^r y^s dy + fx^\rho y^u dy = 0$, je fais $y = z^t$, d'où je tire $dy = tz^{t-1} dz$

$$y^n = z^{nt}$$
$$y^p = z^{pt}$$
$$y^s = z^{st}$$
$$y^u = z^{tu}$$

Substituant ces valeurs on a $ax^m z^{nt} dx + bx^q z^{pt} dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + ftx^\rho z^{tu+t-1} dz = 0$. On doit donc avoir, 1°. $nt + m = pt + q$, d'où l'on tire $t = \frac{q-m}{n-p}$. On doit avoir 2°. $r + st + t - 1 = pt + q$, ou $st - pt + t = q - r + 1$, & mettant pour t sa valeur, on aura $(s - p + 1).(q - m) = (q - r + 1).(n - p)$; premiere condition que doivent avoir les exposants de la proposée. La comparaison du second & du quatrieme terme donne $\rho + tu + t - 1 = pt + q$, ou $tu - pt + t = q - \rho + 1$, & mettant pour t sa valeur trouvée précédemment, on a $(u - p + 1).(q - m) = (q - \rho + 1).(n - p)$, équation qui donne une seconde condition que doivent encore avoir entre eux les exposants de la formule. S'ils ont ces deux conditions, alors elle pourra devenir homogene, & la substitution à faire est $y = z^{\frac{q-m}{n-p}}$.

Si les équations proposées ont cinq termes, alors leurs exposants devront avoir entre eux trois conditions, & ainsi de suite.

LXXXVII.

Application de la formule à quelques équations particulieres.

Premiere équation.

Si on propose de rendre homogene l'équation $dx\sqrt{x} + dx\sqrt[3]{y^4} + y\,dy\sqrt[4]{x^3} - y^3\,dy = 0$; pour voir si elle est susceptible de l'homogénéité, je la compare avec la formule, & j'ai. . . . . $m = \frac{1}{2}$

$$n = 0$$
$$q = 0$$
$$p = \frac{4}{3}$$
$$r = \frac{3}{4}$$
$$s = 1$$
$$\rho = 0$$
$$u = 3.$$

Donc l'équation $(s - q + 1) \cdot (q - m) = (q - r + 1) \cdot (n - p)$ qui est la premiere qui doit se trouver entre les exposants est ici $(1 - \frac{4}{3} + 1) \cdot -\frac{1}{2} = (-\frac{3}{4} + 1) \cdot -\frac{4}{3}$, ou $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, ce qui montre que les exposants de notre équation ont déja la premiere condition requise. La seconde équation qui doit se trouver est celle-ci $(u - p + 1) \cdot (q - m) = (q - \rho + 1) \cdot (n - p)$: elle devient ici $(3 - \frac{4}{3} + 1) \times -\frac{1}{2} = 1 \times -\frac{4}{3}$; ou $-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$; donc les exposants de la proposée ont les conditions requises pour qu'elle puisse être rendue homogene. Je fais donc . . . . $y = z^{\frac{q-m}{n-p}} = z^{\frac{3}{8}}$

$$dy = \frac{3}{8} z^{-\frac{5}{8}} dz$$
$$y^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$y^3 = z^{\frac{9}{8}},$$

& après les substitutions on a la transformée $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{z} + \frac{3dz\sqrt[4]{x^3}}{8\sqrt[4]{z}} = \frac{3dz\sqrt{z}}{8}$; équation qu'on voit tout de suite être homogene.

LXXXVIII.

Soit encore l'équation $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$; cherchons si elle peut devenir homogene en lui appliquant tout de suite la méthode qui nous a fait découvrir les cas d'homogénéité de la formule. Soit $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$, on trouve pour transformée $az^{2t}xxdx + bdx + cz^txdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Mais on doit avoir $2t + 2 = 1 + t$, ce qui donne $t = -1$; cette valeur de t étant mise à sa place dans la transformée, elle devient $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4dz}{z^4} = 0$, qui est homogene. Donc la substitution qu'il faut faire ici est $y = \frac{1}{z}$.

LXXXIX.

Telles sont les méthodes les plus générales pour rendre homogenes les équations qui ne le sont pas; il y a encore un cas qui, quoique particulier, ne laisse pas d'être assez étendu, & qu'on peut ramener à l'homogénéité; c'est celui dans lequel les indéterminées & leurs différences ne passent pas la premiere dimension. Nous allons l'examiner dans le Problême suivant.

X C.

Cas particulier assez étendu qui se ramene à l'homogénéité.

PROBLEME. Rendre homogene l'équation $axdx + bydx + cdx + gxdy + fydy + hdy = 0$.

Ce cas est représenté par l'équation $(ax+by+c).dx+(gx+fy+h)dy$.

SOLUTION. Soit cette équation mise sous la forme suivante $(ax + by + c)\,dx + (gx + fy + h)\,dy = 0$, je remarque d'abord que si b étoit $= g$, b & g étant de même signe, l'équation s'intégreroit tout de suite, puisqu'alors elle deviendroit $\pm b.(ydx + xdy) = -axdx - fydy - cdx - hdy$, dont l'intégrale est $\pm bxy + \frac{axx}{2} + \frac{fyy}{2} + cx + hy + C = 0$: mais nous supposons que b n'est pas égal à g. Cela posé, je fais $x = mz + nu + r$ & . . . . $y = pz + ku + s$ substituant, il me vient

$$\left\{\begin{matrix} amz + anu + ar \\ + bpz + bku + bs \\ + c \end{matrix}\right\}.(mdz + ndu) \mp \left\{\begin{matrix} gmz + gnu + gr \\ + fpz + fku + fs \\ + k \end{matrix}\right\}.(pdz + kdu) = 0$$

équation qui me fait voir que j'aurois pu faire une substitution plus simple. Effectivement, je suppose $x = z + r$

$y = u + s$

(z & u sont deux nouvelles indéterminées, s & r sont deux constantes), j'ai . . . . . $dx = dz$

& . . . . $dy = du$

substituant ces valeurs dans l'équation, elle se change en

$$\left\{\begin{matrix} az + ar \\ + bu + bs \\ . \quad + c \end{matrix}\right\} dz + \left\{\begin{matrix} gz + gr \\ + fu + fs \\ + h \end{matrix}\right\} du = 0.$$

Or je remarque que cette équation feroit homogene, fi les termes $ar + bs + c$ & $gr + fs + h$ étoient égaux à zéro; cette fuppofition réduifant la transformée à l'équation fuivante $(az + bu)\ dz + (gz + fu) . du = 0$. Il ne s'agit plus que de tirer les valeurs de r & de s relatives à cette fuppofition. Or ces valeurs font $s = \frac{ah - cg}{gb - af}$

& . . . . $r = \frac{cf - bh}{gb - af}$.

Donc les fubftitutions qu'il faut faire dans le cas préfent font. . . . . $x = z + \frac{cf - bh}{gb - af}$

&. . . . . $y = u + \frac{ah - cg}{gb - af}$.

C. Q. F. T.

XCI.

REMARQUE 1. S'il fe trouvoit que cf fût $= bh$, ou $ah = cg$, l'une ou l'autre des deux conftantes r ou s s'évanouiroit, ce qui marqueroit que dans ce cas on n'a befoin que d'une fubftitution pour x, fi $s = 0$; pour y, fi $r = 0$. Soit, par exemple, $cf = bh$ laiffant x & fa différence, je me contenterai de fuppofer $y = x + s$, & je ferai le refte de l'opération comme dans l'article précédent.

Obfervations importantes fur l'équation précédente.

XCII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit en même temps $cf = bh$ & $ah = cg$, alors les deux conftantes r & s s'évanouiroient auquel cas la méthode pour parvenir à l'homogénéité feroit différente. Voici comment il faudroit s'y prendre dans ce cas. Puifque $cf = bh$, & $ah = cg$, on a $g = \frac{ah}{c}$ & $f = \frac{bh}{c}$: donc l'équation propofée $(ax + by + c)\,dx + (gx + fy + h)\,dy = 0$, devient $(ax + by + c)\,dx + \left(\frac{ahx}{c} + \frac{bhy}{c} + h\right) dy = 0$, ou bien $(ax + by + c)\,dx + (ax + by + c) \cdot \frac{hdy}{c} = 0$, ou enfin $(ax + by + c) \times \left(dx + \frac{hdy}{c}\right) = 0$; ce qui donne $ax + by + c = 0$ ou . . . . $x + \frac{hy}{c} + A = 0$ (A eft une conftante) : or ces deux équations, ou féparément, ou prifes enfemble, fatisfont au Problême, puifque ce font deux lieux géométriques, qui fe conftruifent par le moyen de deux lignes droites.

XCIII.

REMARQUE 3. Si l'on avoit $bg = af$, alors le dénominateur des équations . . . $x = z + \frac{cf - bh}{bg - af}$ & . . . . $y = u + \frac{ah - cg}{bg - af}$ deviendroit égal à zéro; donc ces termes feroient infinis, & par conféquent la méthode ne feroit rien connoître. Mais alors ce cas feroit plus fimple. Pour le prouver je remarque que la fuppofition préfente de $bg = af$ donne $f = \frac{bg}{a}$. Mettant donc pour f cette valeur dans la propofée, elle devient $(ax + by + c)\,dx + \left(gx + \frac{gby}{a} + h\right) dy = 0$. Je lui donne cette autre forme $(ax + by)\,dx + (ax + by)\,\frac{gdy}{a} + cdx + hdy = 0$, & je fuppofe enfuite $ax + by = z$: je veux faire difparoître y & dy, j'ai j'ai donc $y = \frac{z - ax}{b}$: $dy = \frac{dz - adx}{b}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, il me vient $z . \left\{ dx + \frac{gdz}{ab} - \frac{gdx}{b} \right\} + cdx + \frac{hdz}{b} - \frac{ahdx}{b} = 0$, ou bien $dx \left\{ z - \frac{gz}{b} + c - \frac{ah}{b} \right\} + dz \times \left\{ \frac{gz}{ab} + \frac{h}{b} \right\} = 0$: ou enfin $dx = \frac{dz . \left\{ \frac{h}{b} + \frac{gz}{ab} \right\}}{\frac{gz}{b} - z + \frac{ah}{b} - c}$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées ; ce qui prouve, comme nous l'avons dit, que ce cas eſt plus ſimple.

XCIV.

SCHOLIE. Nous venons de détailler dans les Chapitres précédents la méthode de conſtruire les équations différentielles dont les indéterminées ſont ſéparées ; enſuite celle de ſéparer les indéterminées dans les équations lorſqu'elles ſont homogenes ; & enfin celle de rendre homogenes beaucoup d'équations qui ne le ſont pas. Paſſons à un cas très-général dans lequel les indéterminées ſe ſéparent tout de ſuite par une méthode fort ingénieuſe. Ce cas eſt celui de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + y^q X'' dx = 0$, n & q étant des nombres quelconques, X, X', X'', des fonctions quelconques de x, & A, B, C, des conſtantes à volonté, & il peut ſervir de formule pour ces ſortes d'équations, qui ne doivent par conſéquent pas avoir plus de trois termes.

CHAPITRE VII.

Sur la construction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + Cy^q X'' dx = 0$.

XCV.

Procédé de la Méthode.

PROBLEME. SÉparer les indéterminées dans la formule * $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X'' dx = 0$.

SOLUTION. 1°. Je commence par diviser l'équation par y^q, elle devient $AXy^{n-q} dy + BX'y^{n+1-q} dx + CX'' dx = 0$. Cette premiere opération me donne un terme $CX'' dx$ qui ne contient que dx & des fonctions de x.

2°. Je divise par AX, & j'ai $y^{n-q} dy + \frac{BX'y^{n+1-q} dx}{AX} + \frac{CX'' dx}{AX} = 0$. Ce second procédé nous donne, comme on le voit, un terme tout en y, un tout en x, & un autre qui est mêlé.

3°. J'observe maintenant que si je pouvois multiplier les deux premiers termes de l'équation ainsi réduite par une fonction de x, telle que ces deux premiers termes fussent une différentielle exacte, j'aurois l'intégrale cherchée, le troisieme terme s'intégrant de lui-même. Soit donc sup-

* *Nota.* Voyez dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Ann. 1731. page 103. un Mémoire de M. de Maupertuis, où se trouve la construction de l'équation $dx = ax^m y^n dy + by^{n+1} x^p dx$, par une méthode qui differe un peu de celle que nous donnons ici.

posé ξ la fonction de x qui rend ces deux termes une différentielle complete, & qui par conséquent n'empêchera pas le troisieme d'être intégrable, je multiplie l'équation par ξ; & j'ai, laissant à part le troisieme terme & n'opérant que sur les deux premiers, $\xi y^{n-q} dy + \frac{B\xi y^{n-q+1} X' dx}{AX}$ qui est une différentielle complete. J'ai donc (Théor. fondamental) $d\frac{(\xi y^{n-q})}{dx} = d\frac{(BX'\xi y^{n-q+1})}{AXdy}$: c'est-à-dire, $\frac{y^{n-q} d\xi}{dx} = \frac{(n-q+1)B\xi X' y^{n-q}}{AX}$; ou bien $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc $l\xi = \int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}$. Donc enfin en passant des logarithmes aux nombres, & prenant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\xi = e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}}$. Voilà donc la valeur de ξ trouvée.

4°. Mettant cette valeur de ξ dans l'équation intégrée $\frac{\xi y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int\frac{C\xi X'' dx}{AX} \pm Q = 0$, il nous vient $\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} + \int\frac{CX''dx}{AX} \times e^{\int\frac{(n-q+1)BX'dx}{AX}} = \mp Q$; d'où l'on tire $y^{n-q+1} = (n-q+1) \times \left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX} \cdot e^{\int(n-q+1)\frac{BX'dx}{AX}}\right) \times e^{\int\overline{-n+q-1}\cdot\frac{BX'dx}{AX}}$: ou enfin $y = \left\{\overline{n-q+1} \times \left(\mp Q - \int\frac{CX''dx}{AX} \times e^{\int\overline{n-q+1}\cdot\frac{BX'dx}{AX}}\right) \times e^{\int\overline{-n+q-1}\cdot\frac{BX'dx}{AX}}\right\}^{\frac{1}{n-q+1}}$. De là il suit que quel que soit le rapport de A, B, C, n, q, dans l'équation, les indéterminées seront toujours séparées par cette méthode.

XCVI.

Obſervations ſur la Méthode précédente.

REMARQUE 1. Si l'on avoit $n-q+1=0$, alors il y auroit des termes infinis; la méthode, par conſéquent, paroîtroit ne rien donner. Mais il faut remarquer qu'alors $n-q=-1$, & qu'ainſi la propoſée devient $\frac{A\,dy}{y}+\frac{BX'\,dx}{X}+\frac{CX''\,dx}{X}=0$, équation qui s'integre tout de ſuite, ſans qu'il ſoit beſoin d'avoir recours à notre méthode.

XCVII.

REMARQUE 2. Si l'on avoit $X'=x^n$, & $X=x^{n+1}$; alors la valeur logarithmique de ξ, $e^{\int\overline{n-q+1}\,.\,\frac{BX'\,dx}{AX}}$ feroit $e^{\int\overline{n-q+1}\,.\,\frac{B\,dx}{Ax}}$, & en faiſant $\overline{n-q+1}\,.\,\frac{B}{A}=K$, elle deviendroit $e^{\int\frac{K\,dx}{x}}=e^{Kl.x}$: à cauſe que e eſt ſuppoſé un nombre dont le logarithme $=1$, $e^{Klx}=x^K$; car ſoit $e^{Klx}=z$; on aura $le^{Klx}=lz$; ou bien $Klx\,le=lz$; or $le=1$, donc $Klx=lz$; donc enfin (Art. XXIX. Introd. I^{ere}. Part.) & $x^K=z$; or $z=e^{Klx}$; donc $e^{Klx}=x^K$. Donc en mettant pour ξ ſa valeur x^K dans l'équation $\xi y^{n-q}dy+\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}\times\overline{n-q+1}\,.\,\frac{B\xi X'\,dx}{AX}+\frac{CX''\xi\,dx}{AX}=0$, on trouve $y^{n-q}dy\,x^K+Kx^{K-1}dx\times\frac{y^{n-q+1}}{n-q+1}+\frac{CX''x^{K-n-1}dx}{A}=0$; ce qui nous montre que dans ce cas l'équation eſt intégrable beaucoup plus ſimplement.

XCVIII.

COROLLAIRE 1. La formule que nous venons de traiter d'une maniere générale eſt des plus étendues : elle renferme une infinité de cas. M^lle^ Agneſi a traité la même formule dans ſes Inſtitutions Analytiques ; mais cette illuſtre Géometre employe pour la réſoudre une méthode différente de la nôtre. Celle dont elle ſe ſert, & qui eſt de M. Bernoulli, conſiſte à ſuppoſer y égale à deux nouvelles indéterminées ; & en faiſant les ſubſtitutions ordinaires, on parvient à la ſéparation des indéterminées par le moyen des quantités logarithmiques & exponentielles. Notre formule comprend auſſi toutes celles dont M. Craig a donné la ſéparation dans ſon Livre *de Calculo Fluentium.* C'eſt ce que nous développerons bien-tôt dans le Chapitre ſuivant, où nous donnerons les différentielles plus générales qui s'integrent par notre méthode.

Quelle eſt la généralité de la formule précédente.

Tom. 2. *page* 904, *juſqu'à* 914.

Tome 1. *page* 175.

Lib. de Calculo Fluent. p. 40. *& ſeq.*

XCIX.

COROLLAIRE. 2. Nous ſuppoſons dans notre formule A, B, C des coefficiens quelconques, dont les ſignes ſont poſitifs ou négatifs. Ainſi ſi on avoit $dx - ax^m y^n dy - by^{n+1} x^p dx = 0$, qui eſt l'équation que M. de Maupertuis traite dans le Mémoire que nous avons cité, ce cas n'auroit point de difficulté. Car comparant cette équation différentielle avec notre formule, on trouve

$$A = -a$$
$$B = -b$$
$$q = 0$$
$$X = x^m$$
$$X' = x^p$$

Donc ſubſtituant ces valeurs dans $\xi = e^{\int \overline{n-q+1} \,.\, \frac{BX'dx}{AX}}$, on a $\xi = e^{\int \overline{n+1} \,.\, \frac{-bx^p dx}{-ax^m}} = e^{\int \overline{n+1} \,.\, \frac{bx^{p-m}dx}{a}}$, ou enfin $\xi = e^{\frac{\overline{n+1} \,.\, b}{(p-m+1)a} x^{p-m+1}}$. Si l'on avoit $dx - ay^n x^m dy + by^{n+1} x^p dx = 0$, où le ſecond terme eſt ſeul négatif, le cas ne feroit pas plus embarraſſant : on auroit alors $\xi = e^{\frac{(n+1) \,.\, b}{(p-m+1) \,.\, -a} x^{p-m+1}}$; & ainſi des autres.

CHAPITRE VIII.

Des différentielles qui peuvent ſe ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

C.

LOrſque nous avons cherché les cas d'intégration des équations différentielles, en déterminant ceux où ces équations peuvent être rendues homogenes, les conditions d'intégrabilité ne tomboient que ſur les expoſants. On en peut auſſi trouver qui tombent ſur les coefficiens en examinant les cas où la réduite sera de la forme suivante, $AXy^n dy + BX'y^{n+1} dx + Cy^q X' dx = 0$ que maintenant nous savons intégrer. Nous allons faire cette recherche, en supposant même que dans ces équations il se trouve des fonctions de x & de y. Nous marcherons des équations les plus simples aux plus composées, afin d'accoutumer les commençans à généraliser les méthodes.

C I.

PROBLEME I. Séparer les indéterminées dans l'équation $(x^n dx + ay^n dy) \cdot p = \left\{\frac{xdy - ydx}{xx}\right\} \cdot q$, dans laquelle p & q sont des fonctions algébriques de x & de y, telle que la somme de leurs exposants est la même dans chaque terme de p, & est aussi la même dans chaque terme de q, quoique toutefois elle puisse être différente dans p & dans q. Premiere formule de ces différentielles.

SOLUTION. Je mets d'abord l'équation sous la forme suivante $x^n dx + ay^n dy - (xdy - ydx) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Je fais $x = yz$, ce qui me donne $x^n = y^n z^n$

$$dx = ydz + zdy.$$

Donc en faisant ces substitutions j'ai $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy - (zydy - y^2 dz - zydy) \times \frac{q}{pxx} = 0$. Or q sera (hyp.) $= y^m \varphi z$; & $pxx = y^t Tz$: donc $\frac{q}{pxx} = y^k \Delta z$; donc la proposée est $y^{n+1} z^n dz + z^{n+1} y^n dy + ay^n dy + y^{k+2} \Delta z . dz = 0$, ou $(z^{n+1} + a) \times y^n dy + y^{n+1} z^n dz + y^{k+2} \Delta z . dz = 0$, c'eſt-à-dire, $Zy^n dy + y^{n+1} z^n dz + y \Delta z . dz = 0$, équation qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre formule générale.

CII.

Application à quelques exemples particuliers.

Premier exemple.

Suppoſons que dans la formule $n = 2$

$$p = fxy^2 + gyx^2$$

$$q = mx^2y^2 + nyx^3,$$

l'équation dont il faut ſéparer les indéterminées eſt $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fxy^2 + gyx^2) = \left\{\frac{x dy - y dx}{xx}\right\} \times (mx^2y^2 + nyx^3)$; ou $x^2 dx + ay^2 dy - (x dy - y dx) \times \frac{mx^2y^2 + nyx^3}{fx^3y^2 + gyx^4} = 0$. Soit $x = yz$. La transformée ſera $y^3z^2 dz + z^3y^2 dy + ay^2 dy - (zy dy - y^2 dz - zy dy) \times \frac{my^4z^2 + ny^4z^3}{fy^5z^3 + gy^5z^4} = 0$; & en réduiſant $(z^3 + a). y^2 dy + y^3z^2 dz + \left\{\frac{m + nz}{fz + gzz}\right\} y dz = 0$, qui s'intègre par le Chapitre précédent, en mettant l'indéterminée z au lieu de x.

CIII.

Seconde formule.

PROBLEME 2. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) \times p = (x dy + cy dx) \times q$: p & q ſont des fonctions algébriques de x & de y, telles que l'excès de l'expoſant de l'une de ces deux indéterminées multiplié par c ſur l'expoſant de l'autre indéterminée ſoit le même dans chaque terme de p ; & que cette même condition ſe trouve auſſi dans chaque terme de q, ſans qu'il ſoit pour cela néceſſaire que p & q ſoient des

fonctions

fonctions homogenes de x & de y.

SOLUTION. Je mets l'équation sous la forme suivante.
$x^n dx \pm a y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy\,(-xdy - cydx)\,.\,\frac{q}{p} = 0$. Je remarque maintenant que par les conditions du Problême, chaque terme de p étant, par exemple $y^s x^r$, on doit avoir $s \times c - r = M$ (une constante) ; donc $r = s \times c - M$, donc $y^s x^r$ devient $y^s x^{s \times c - M} = \frac{y^s x^{s \times c}}{x^M}$. De même chaque terme de q sera de la forme suivante $\frac{y^k x^{k \times c}}{x^N}$.

Ce calcul me montre que la transformation que je dois faire est $yx^c = z$; donc $x^c dy + cyx^{c-1} dx = dz$

ou . . . . $(xdy + cydx)\, x^{c-1} = dz$

on a aussi . . . . $y = \frac{z}{x^c}$

$$y^{\frac{-n-1-c}{c}} = x^{n+1+c} z^{\frac{-n-1-c}{c}}.$$

$$dy = \frac{x^c dz - czx^{c-1} dx}{x^{2c}}.$$

Donc en substituant dans la proposée pour y & dy leurs valeurs, on aura la transformée

$$x^n dx \pm \frac{a x^{n+1+2c} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp acz^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx}{c^{2c}}$$

$(-x^{-c+1} dz)\,\frac{q}{p} = 0$: or il est évident par ce que nous venons de dire que $\frac{q}{p} = x^t \varphi z$; donc on aura

$x^{n+2c} dx \pm a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-1-c}{c}} dz \mp acz^{\frac{-n-1}{c}} x^{n+2c} dx$
$- x^{t+c+1} dz \varphi z = 0$ ou $\left(1 \mp acz^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^{n+2c} dx$

$\pm\, a x^{n+2c+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - x^{t+c+1} dz\, \varphi z = 0$; équation réduite au cas général du Chapitre précédent, & dont par conséquent nous ſavons ſéparer les indéterminées.

CIV.

Application à un exemple.

Soit dans la formule : : $n = -10$

$c = 3$

$p = by^2 x^4 + fy^9 x^{25}$

$q = gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{63}{2}}$.

La propoſée ſera $x^{-10} dx + ay^2 dy - (xdy + 3ydx) \times \frac{gy^{\frac{1}{2}} x^3 - hy^{10} x^{\frac{63}{2}}}{by^2 x^4 + fy^9 x^{25}} = 0$. La transformation qu'il faudra faire eſt donc $yx^3 = z$; après les différentes ſubſtitutions, on aura la transformée ſuivante $x^{-10} dx + \frac{ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx}{x^6} - x^{-2} dz \times \left\{ \frac{gz^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - hz^{10} x^{\frac{3}{2}}}{bz^2 x^{-2} + fz^9 x^{-2}} \right\} = 0$. Donc $x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - 3az^3 x^{-4} dx - x^4 dz \times x^{\frac{7}{2}} \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$. Donc enfin $(1 - 3az^3) x^{-4} dx + ax^{-3} z^2 dz - x^{4+\frac{7}{2}} dz \times \left\{ \frac{g - hz^{\frac{19}{2}}}{bz^{\frac{3}{2}} + fz^{\frac{17}{2}}} \right\} = 0$, équation réduite à notre cas général.

C V.

Troiſieme formule qui comprend les deux précédentes.

PROBLEME 3. Séparer les indéterminées dans la formule $(x^n dx \pm ay^{\frac{-fn-c-f}{c}} dy)\, p = (fxdy + cydx)\, q$;

Les formules des deux Problêmes précédents ne ſont que des cas particuliers de celle-ci ; celle du Problême 2, lorſque $f=1$, & celle du Problême premier, quand $f=1$ & $c=-1$; p & q ſont des fonctions de x & y telles que celles du Problême précédent, excepté qu'au lieu de multiplier par c l'expoſant de l'une des deux indéterminées dans que terme de p & de q, il le faut multiplier par $\frac{c}{f}$. Il faut de plus que p & q ſoient telles qu'après y avoir ſubſtitué pour y ſa valeur en x & en z, ou pour x ſa valeur en y & en z, on trouve des quantités compoſées de deux facteurs, dont l'un contienne x ſans z, & l'autre z ſans x dans le premier cas ; ou dont l'un contienne y ſans z, & l'autre z ſans y dans le ſecond.

SOLUTION. La propoſée eſt $x^n dx \pm ay^{\frac{-fn-c-f}{c}} dy - (fxdy + cydx)\frac{q}{p} = 0$. Pour trouver la transformation qui réuſſira, je raiſonne comme dans le Problême précédent, & je vois qu'il faut ſuppoſer $yx^{\frac{c}{f}} = z$: cette ſuppoſition me donne $x^{\frac{c}{f}} dy + \frac{c}{f} yx^{\frac{c}{f}-1} dx = dz$ ou . . . . $fxdy + cydx = \frac{fdz}{x^{\frac{c}{f}-1}}$.
Je ſubſtitue pour y & dy leurs valeurs $y = \frac{z}{x^{\frac{c}{f}}}$,

$$dy = \frac{x^{\frac{c}{f}} dz - \frac{c}{f} zx^{\frac{c}{f}-1} dx}{x^{\frac{2c}{f}}};$$

j'ai donc la transformée ſuivante $\left(1 \mp \frac{acz^{\frac{-fn-f}{c}}}{f}\right)$
$x^{\frac{fn+2c}{f}} dx \pm ax^{\frac{fn+2c}{f}+1} z^{\frac{-fn-c-f}{c}} dz - fx^{n+\frac{c}{f}+1}$

$dz\varphi z = 0$, équation réduite à notre cas général.

C V I.

Application de cette formule à un exemple.

Suppofons que dans la formule précédente $f = -3$
$n = 2$
$c = 1$
$p = y$
$q = ax$;

L'équation à intégrer fera $(x^2 dx + ay^8 dy)\, y = (-3xdy + ydx)\, ax$, ou bien $x^2 dx + ay^8 dy - (-3xdy + ydx)\frac{ax}{y} = 0$. Donc la fuppofition qu'il faut faire ici eft $yx^{-\frac{1}{3}} = z$. Faifant les fubftitutions convenables pour y & dy, nous aurons la transformée fuivante $x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{ax^3}{3} z^9 x^2 dx + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$; ou bien $(1 + \frac{a}{3} z^9)\, x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{3ax^3 dz}{z} = 0$, équation réduite au cas général.

C V I I.

Quatrieme formule.

PROBLEME 4. Séparer les indéterminées dans la formule $ax^n dx + by^n dy + (xdy - ydx) \times \left\{\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega}\right\} = 0$.

Celle-ci eft encore plus générale que les précédentes, p & q étant des fonctions homogenes de x & de y, mais de différentes dimenfions, fi l'on veut, dont la différence foit k; & π, ω étant auffi des fonctions de x & de y homogenes chacunes telles que l'excès du nombre des dimenfions de π fur celles de ω foit $n - 1$.

SOLUTION. Soit $x = yz$, on aura $ay^{n+1} z^n dz + ay^n z^{n+1} dy + by^n dy + (zydy - yydz - zydy) \times (y^k \Delta z + y^{n-1} \varphi z) = 0$, c'eſt-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l} az^{n+1} y^n dy \\ + by^n dy \end{array}\right\} \begin{array}{l} + ay^{n+1} z^n dz. \\ - y^{n+1} dz \varphi z - y^{k+2} dz \Delta z = 0, \end{array}$$

équation qui eſt, comme l'on voit, dans notre cas général, & de laquelle par conſéquent on ſéparera les indéterminées ſans aucune difficulté.

CVIII.

Suppoſons que dans la formule . . . . $n = 7$ Application à un exemple.

$$\frac{p}{q} = \frac{x^3 y + y^3 x}{yx}$$

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3};$$

l'équation à intégrer ſera $ax^7dx + by^7dy + (xdy - ydx) \times \left\{\frac{x^3 y + y^3 x}{xy} + \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3}\right\} = 0$. Soit dans cette équation $x = yz$, & ſubſtituons pour x & dx leurs valeurs, nous aurons la transformée ſuivante $ay^8 z^7 dz + az^8 y^7 dy + by^7 dy + (zydy - y^2 dz - zydy) \times \left\{y^2 \times (z^2 + 1) + y^6 \times \left(\frac{z^8 + z}{z^3 + 1}\right)\right\} = 0$; qui devient après la réduction $az^8 y^7 dy + ay^8 z^7 dz - y^4 . (z^2 + 1) dz + by^7 dy - y^8 . \left\{\frac{z^8 + z}{z^3 + 1}\right\} dz = 0$, équation telle que nous la demandons.

CIX.

PROBLEME 5. Trouver les cas dans leſquels on parvient à ſéparer les indéterminées dans la formule $hx^q dx + by^n dy + (xdy + gydx) \times \left\{\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega}\right\} = 0$. Formule précédente généraliſée.

Je ne mets point de coefficient à $x\,dy$, parce qu'il eſt toujours aiſé de débarraſſer de ſon coefficient un des deux termes; p, q, π, ω, étant des fonctions de x & de y, telles que a étant l'expoſant de x dans un terme quelconque de p, & r l'expoſant de y; a' l'expoſant de x dans q, & r' celui de y; α l'expoſant de x dans π, & ρ celui de y; α' l'expoſant de x dans ω, & ρ' celui de y; on ait dans chaque terme de p, $-\frac{a}{g}+r=A$, dans chaque terme de q, $-\frac{a'}{g}+r'=A'$, & de même dans chaque terme de π & de ω, $-\frac{\alpha}{g}+\rho=B$ & $-\frac{\alpha'}{g}+\rho'=B'$; A, A', B, B' ſont des conſtantes différentes. Il faut de plus que dans π & ω $-\frac{\alpha}{g}+\rho+\frac{a'}{g}-\rho'=n+\frac{1}{g}$.

SOLUTION. Pour trouver quelle eſt la transformation qui réuſſira le mieux, j'obſerve qu'en faiſant $x=zy^{-\frac{1}{g}}$, j'aurai $x\,dy+gy\,dx=gy^{-\frac{1}{g}+1}dz$; ce qui me détermine à faire cette ſuppoſition. La transformée qu'elle me donne eſt $hy^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}z^q dz-\frac{h}{g}z^{q+1}y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}dy+by^n dy+gy^{-\frac{1}{g}+1}dz\times(y^k\Delta z+y^f\varphi z)=0$. Or il eſt évident que cette équation ſe ramenera au cas général que nous traitons toutes les fois qu'on aura

$$[illegible]=-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1$$

$$\&\ k \text{ ou } f=-\frac{q}{g}-1=n+\frac{1}{g},$$

car alors l'équation précédente devient $\left(b-\frac{h}{g}z^{q+1}\right)y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}-1}dy+(hz^q+g\varphi z)y^{-\frac{q}{g}-\frac{1}{g}}dz+gy^{k-\frac{1}{g}+1}dz\Delta z=0$; qui eſt telle qu'on la demande.

C X.

Soit l'équation à intégrer $x^{-21}dx + by^3dy + (xdy + 5ydx) \times \left\{ \frac{xy^{3-\frac{1}{5}} + x^2y^3}{x^2y - x^3y^{1+\frac{1}{5}}} + \frac{ax^2y^{\frac{4}{5}+6} + by^{\frac{2}{5}+6}}{x^2y^{\frac{5}{5}+3} + x^3y^{\frac{19}{5}}} \right\}$ Application de la formule à un exemple.
$= 0$; je ferai . . . . . . $x = zy^{-\frac{1}{5}}$
ce qui me donne. . . . $dx = y^{-\frac{1}{5}}dz - \frac{1}{5}zy^{-\frac{1}{5}-1}dy$

$$xdy + 5ydx = 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz.$$

Donc en ſubſtituant pour x & pour dx leurs valeurs, on aura la transformée $y^4z^{-21}dz - \frac{1}{5}z^{-20}y^3dy + by^3dy + 5y^{-\frac{1}{5}+1}dz \times \left\{ y^2 . \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) + y^{\frac{1}{5}+3} . \left(\frac{az^2+b}{z^2+z^3}\right) \right\}$ $= 0$, laquelle devient en réduiſant $(b - \frac{1}{5}z^{-20})y^3dy + \left\{ z^{-21} + \left(\frac{5az^2+5b}{z^2+z^3}\right) \right\} y^4dz + 5y^{2+\frac{1}{5}}dz \times \left(\frac{1+z}{z-z^2}\right) = 0$, équation qui a les conditions cherchées.

C X I.

COROLLAIRE. Si dans la formule du Problême précédent on avoit $A - A' = B - B'$, alors la formule ſe réduiroit à un cas plus ſimple. Car en multipliant p par ω & π par q, & ω & q l'un par l'autre, on verroit que les deux fonctions $\frac{p}{q}$ & $\frac{\pi}{\omega}$ ſe réduiroient à une ſeule $\frac{K}{L}$, telle qu'en ſuppoſant m l'expoſant de x, & μ l'expoſant de y dans K, m' l'expoſant de x & μ' l'expoſant de y dans L, on aura encore dans chacun des termes de K $- \frac{m}{g} + \mu = C$ & dans chaque terme de L, $- \frac{m'}{g} + \mu' = C'$, C & C' étant des conſtantes différentes. Ce feroit la même chofe fi l'on avoit $\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega} + \frac{p'}{q'} + \frac{\pi'}{\omega'}$ + &c. un nombre quelconque de fonctions avec la condition requife par le Corollaire ; elles fe réduiroient toutes à une feule.

CXII.

PROBLEME 6. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $dx + \frac{fx\,dy}{y} = \frac{y^k x^r dy \Delta \frac{x}{y^n} + y^t x^s dx Z \frac{x}{y^n}}{y^m x^p \varphi \frac{x}{y^n} + y^q x^h \Gamma \frac{x}{y^n}}$ dans laquelle on fuppofe $n = -f$.

SOLUTION. Soit . . . . $\frac{x}{y^n} = u$

on aura . . . . . . $y^{-n} dx - nxy^{-n-1} dy = du$

(& comme $-f = n$ hyp.) $y^f dx + fxy^{f-1} dy = du$

ou . . . . $dx + \frac{fx\,dy}{y} = y^{-f} du$.

En faifant pour x & dx les fubftitutions convenables, on aura la transformée fuivante $y^{-f} du =$

$$\frac{y^{k-fr} dy \Delta u \times u^r + y^{t-fs-f} du Z u \times u^s - fu^{s+1} Zu \,.\, y^{t-fs-f-1} dy}{y^{m-fp} u^p \varphi u + y^{q-fh} u^h \Gamma u}$$

ou bien $y^{m-fp-f} u^p \varphi u \,.\, du + y^{q-fh-f} u^h \Gamma u \,.\, du - u^r \Delta u \,.\, y^{k-fr} dy - y^{t-fs-f} u^s Zu \,.\, du + fu^{s+1} Zu \,.\, y^{t-fs-f-1} dy = 0$, équation qui fe ramene à la formule $Vy^\lambda dy + V' y^{\lambda+1} du + V'' y^\mu du = 0$ (V, V', V'' étant des fonctions de u) toutes les fois qu'on a $k - fr = t - fs - f - 1$

& . . . . $q - fh$

ou $= t - fs$

$m - fp$

c'eft-à-dire,

c'eſt-à-dire, toutes les fois qu'on aura $k = t - f - 1$

$s = r$

& . . . . $\begin{matrix} q = t \\ h = s \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} m = t \\ p = s \end{matrix}$

CXIII.

COROLLAIRE. Donc on ſéparera les indéterminées dans l'équation $dx - \frac{xdy}{y} = \frac{dy \Delta \frac{x}{y}}{\varphi \frac{x}{y} + y^p \Gamma \frac{x}{y}}$ en faiſant $\frac{x}{y} = u$. Car on aura l'équation ſuivante $- \Delta u \,.\, dy + \varphi u \,.\, ydu + y^{p+1} \Gamma u \,.\, du = 0$ qui a les conditions requiſes.

CXIV.

Soit dans la formule . . . . $k = 3$

Application de la formule à un exemple.

$$\begin{aligned} f &= 1 \\ q = t &= 5 \\ h' = r = s &= 2 \\ n &= -1 \\ m &= -2 \\ p &= -3 \end{aligned}$$

la propoſée ſera $dx + \frac{xdy}{y} = \frac{ay^4x^3dy + by^7x^4dx}{cy + gy^6x^3}$. Je ſuppoſe $xy = u$; ce qui me donne $dx + \frac{xdy}{y} = y^{-1}du$ & pour transformée l'équation $y^{-1}du = \frac{au^3ydy + by^2u^4du - bu^5ydy}{cy + gu^3y^3}$, ou bien $cdu + gy^2u^3du - au^3ydy - by^2u^4du + bu^5ydy = 0$, d'où l'on tire $(+u^5 - au^3)\,ydy + (gu^3 - bu^4)\,y^2du + cdu = 0$, qui eſt réduite à l'état demandé.

CXV.

REMARQUE. On voit par les applications que nous venons de faire de la méthode du Chapitre VII. combien cette méthode eſt générale. Nous rencontrerons encore dans la ſuite de cet Ouvrage pluſieurs équations différentielles qui s'integrent par ſon moyen. Les Problêmes que nous venons de traiter renferment les cas les plus généraux qui peuvent s'y rapporter.

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CXVI.

Formule des équations à trois termes.

TOutes les équations différentielles à trois termes peuvent être compriſes ſous la forme ſuivante (A) $ax^m u^p dx + bu^k x^n dx = du$, ou en faiſant $x^{n+1} = z$, ſous cette autre (B) $az^m u^p dz + bu^k dz = du$. Si on diviſe l'équation (B) par u^p, & que l'on ſuppoſe $u^{-p+1} = y$, alors l'équation (B) aura cette forme (C) $ax^m dx + by^q dx = dy$.

Comparée avec celle du Chapitre VI.

1°. Comparant cette équation avec la formule des équations à trois termes que nous avons déja examinée (Chap. VI. Art. LXXXII.) & qui eſt $ay^n x^m dx + by^q x^p dx$

$+ cy^s x^r dy = 0$, on a . . . . $n = 0$

$p = 0$

$s = 0$

$r = 0$.

La formule $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) \times (n - q)$, qui exprime la condition que doit avoir l'équation précédente pour devenir homogene, eſt donc ici $q = \frac{m}{m+1}$. Donc toutes les fois qu'on aura dans (C) $q = \frac{m}{m+1}$, en faiſant $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $au^{\frac{m}{m+1}} du - (m+1) \cdot u^{\frac{m}{m+1}} dy + cy^{\frac{m}{m+1}} du = 0$, équation homogene, & par conſéquent intégrable, ou au moins conſtructible.

2°. Si $q = 1$, la propoſée (C) devient $ax^m dx + cy dx = dy$, équation intégrable (Chap. VII.).

CXVII.

3°. Si dans l'équation $ax^m dx + cy^q x^n dx = dy$, on a $q = 2$, cette équation devient $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, qui eſt la fameuſe équation que tous les Géometres connoiſſent ſous le nom de l'équation de Ricati. Dans cette équation on n'a pu juſques ici ſéparer en général les indéterminées ; mais il y a une infinité de valeurs de m dans leſquelles on parvient à cette ſéparation. Voici la méthode dont je me ſers pour déterminer tous ces différents cas.

CXVIII.

Méthode pour trouver les cas dans lesquels on integre l'équation de Ricati.

PROBLEME. Trouver les cas d'intégration de l'équation $ax^m dx + cy^2 x^n dx = dy$.

SOLUTION. Je fais $y = Ax^p + x^r t$. (Le coefficient A, & les exposants p & r sont des constantes arbitraires que nous déterminerons dans la suite de l'opération, t est une nouvelle indéterminée). J'aurai donc $dy = pAx^{p-1} dx + rx^{r-1} t dx + x^r dt$, & $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r} t + x^{2r} tt$: mettant pour y, yy, dy leurs valeurs dans l'équation proposée, elle devient $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + cttx^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$.

Supposons à présent . . . . $cAA = pA$

$$2p + n = p - 1$$

$$r = 2cA$$

c'est-à-dire . . . . $p = -n - 1$,

$$A = \frac{-n-1}{c}$$

$$r = -2n - 2.$$

Par le moyen de ces égalités, les 2, 3, 5, 6e termes de la transformée se détruisent, & elle devient $ax^m dx + cttx^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$, c'est-à-dire, divisant par x^{-2n-2}, $ax^{m+2n+2} dx + cttx^{-n-2} dx = dt$, ou (D) $ax^K dx + cttx^k dx = dt$, en supposant $m + 2n + 2 = K$ & . . . . $-n - 2 = k$

Je reprends à présent la proposée $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, laquelle en faisant $y = \frac{1}{z}$ devient $ax^m dx$

$+ \frac{cx^n dx}{zz} = -\frac{dz}{zz}$, ou $ax^m zzdx + cx^n dx = -dz$, dans laquelle je suppose, comme plus haut, $z = Bx^q + x^\alpha u$ (B, q, α, sont de même des constantes indéterminées, u est une nouvelle variable) : on a donc $dz = qBx^{q-1}dx + \alpha ux^{\alpha-1}dx + x^\alpha du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+\alpha}u + uux^{2\alpha}$, & substituant ces valeurs, nous avons $aBBx^{2q+m}dx + 2aBx^{q+\alpha+m}udx + auux^{2\alpha+m}dx + cx^n dx = -qBx^{q-1}dx - \alpha x^{\alpha-1}udx - x^\alpha du$; supposons à présent $aBB = -Bq$, $2q+m = q-1$, $-\alpha = 2aB$, c'est-à-dire . . . . $q+m = -1$

$$B = \frac{m+1}{a}$$

$$\alpha = -2m-2$$

par ces suppositions les 1er, 2, 5 & 6^e termes de la derniere équation se détruisent, & elle devient $auux^{-3m-4}dx + cx^n dx = -x^{-2m-2}du$, c'est-à-dire en divisant par x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2}dx + auux^{-m-2}dx = -du$, ou enfin ($G$) $cx^\beta dx + auux^\delta dx = -du$ en supposant

$$\beta = 2m+n+2$$

& . . . . $\delta = -m-2$.

CXIX.

Il est évident que dans l'équation $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, on sépareroit tout de suite les indéterminées, si l'on avoit $m = n$; donc dans les formules (D) & (G), on parviendra à cette séparation toutes les fois qu'on aura

$$m+2n+2 = -n-2$$

& . . . . $2m+n+2 = -m-2$

équations d'où l'on tire deux valeurs de m, ſavoir

$$m = -3n - 4$$

& . . . . $m = \frac{-n-4}{3}$,

leſquelles étant ſuppoſées, les indéterminées ſe ſéparent.

Puiſque dans la propoſée on ſépare les indéterminées, lorſque $m = \frac{-n-4}{3}$, on les ſéparera dans les formules (G), (D), lorſque $K = \frac{-k-4}{3}$, & $B = \frac{-\delta-4}{3}$, équations deſquelles on tire deux autres valeurs de m, ſavoir

$$m = \frac{-5n-8}{3}$$

$$m = \frac{-3n-8}{5}.$$

On trouvera, en continuant ainſi, une infinité d'autres valeurs de m, comme . . . . $m = \frac{-7n-12}{5}$

$$m = \frac{-5n-12}{7}$$

$$m = \frac{-9n-16}{7}$$

$$m = \frac{-7n-16}{9} \text{ \&c.}$$

c'eſt-à-dire en général . . . . $m = \frac{(2h \pm 1) \times -n - 4h}{2h \mp 1}$, h repréſente un nombre quelconque entier, poſitif en commençant par l'unité.

CXX.

REMARQUE 1. Il faut ajouter qu'on ſéparera les indéterminées dans la formule précédente, toutes les fois qu'on la pourra rendre homogene par la ſeconde méthode du Chap. VI.

CXXI.

REMARQUE 2. Si dans l'équation $ax^m dx +$

$byyx^n dx = dy$, on ſuppoſe $n = 0$, elle devient $ax^m dx + byy dx = dy$, & la formule trouvée dans le Problême pour la valeur de m, ſera $m = \frac{(2h \pm 1)\times -n-4h}{2h \mp 1}$ devient $m = \frac{-4h}{2h \mp 1}$; dans ce cas voici la méthode qu'il faut ſuivre pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h \mp 1}} dx + byy dx = dy$. Prenons cette autre équation (A) $-ads + bttds = dt$, qui donne (α) $-ds = \frac{dt}{a-btt}$, différentielle dont l'intégrale eſt (par les méthodes des fractions rationelles) en ajoutant une conſtante C, $C - s = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times (l\,\overline{\sqrt{a} + t\sqrt{b}} - l\,\overline{\sqrt{a} - t\sqrt{b}})$, & en prenant k pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a (B) $k^{\overline{C-s}\cdot 2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}+t\sqrt{b}}{\sqrt{a}-t\sqrt{b}}$. L'équation (B) eſt donc identique avec l'équation (α), je fais dans l'une & dans l'autre $s = -x^{-1}$

& . . . . $t = \frac{1}{b}x + xxy$,

les équations qui réſulteront de ces ſubſtitutions ſeront encore identiques; on a $ds = \frac{dx}{xx}$ $dt = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{b}$ $tt = \frac{xx + 2bx^3y + bby^2x^4}{bb}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation (α), on a $\frac{-dx}{xx} = \frac{dx + 2byxdx + bxxdy}{ab - xx - 2bx^3y - b^2y^2x^4}$, ou $-abdx + xxdx + 2bx^3ydx + b^2y^2x^4dx = xxdx + 2bx^3ydx + bx^4dy$, ou en effaçant ce qui ſe détruit $-adx + by^2x^4dx = x^4dy$, & enfin en diviſant par x^4, $-ax^{-4}dx + byydx = dy$ premiere équation réduite.

Méthode pour trouver l'équation algébrique qui répond à l'équation propoſée dans la ſuppoſition de $n = 0$.

Maintenant l'équation exponentielle (B) devient après des réductions fort ſimples (D) $k^{(Cx+1)\cdot 2\frac{\sqrt{ab}}{x}} = \frac{x + bxxy + \sqrt{a}b}{-x - bxxy + \sqrt{a}b}$. Mais C eſt une quantité arbitraire.

1°. Je la ſuppoſe une quantité infinie poſitive, le premier membre de l'équation exponentielle ſera infini : il faudra donc néceſſairement que l'autre le ſoit auſſi. Or c'eſt ce qui arrive, lorſque ſon dénominateur eſt $= 0$, on aura donc $-x - bxxy + \sqrt{ab} = 0$, ce qui donne $y = \frac{-x+\sqrt{ab}}{bxx}$, ou $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$, équation compriſe dans l'intégrale de $-ax^{-4}dx + byydx = dy$.

2°. Si on ſuppoſe C une quantité infinie négative, le premier membre de l'équation (D) ſera $= 0$, donc le numérateur du ſecond membre ſera auſſi $= 0$; c'eſt-à-dire qu'on aura $x + bxxy + \sqrt{ab} = 0$: ce qui donne $y = -\frac{1}{bx} - \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$; & combinant l'une & l'autre valeur de y, on a $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$ pour l'intégrale cherchée de l'équation $-ax^{\frac{-4h}{2h-1}}dx + byydx = dy$ dans laquelle on ſuppoſe $h = 1$.

On voit par là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'intégrale de cette même équation, en donnant ſucceſſivement à h différentes valeurs.

CHAPITRE

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CXXII.

Toutes les équations à quatre termes peuvent ſe réduire à l'une de ces deux formes,

Ces équations ſont toutes compriſes dans deux formules.

$$x^m\,dx + by^p\,x^n\,dx + cy^s\,dx + a\,dy = 0$$

ou $$x^m\,dx + by^p\,dx + cy^s\,x^r\,dy + a\,dy = 0.$$

Premiere maniere de chercher les cas d'intégration de ces formules.

1°. Si l'on cherche, comme on a fait pour les équations à trois termes, les cas où ces ſortes d'équations peuvent être intégrées, on trouvera dans le premier cas $p = \frac{m-n}{m+1}$

& . . . . $s = \frac{m}{m+1}$.

En examinant ceux dans leſquels elles peuvent devenir homogenes.

Car ſoit $x^m\,dx + by^p\,x^n\,dx + cy^s\,dx + a\,dy = 0$, & faiſons $x = u^{\frac{1}{m+1}}$, en mettant dans la transformée pour p & s leurs valeurs, on aura l'équation ſuivante $\frac{du}{m+1} + \frac{by^{\frac{m-n}{m+1}}\,u^{\frac{n-m}{m+1}}\,du}{m+1} + \frac{cy^{\frac{m}{m+1}}\,u^{\frac{-m}{m+1}}\,du}{m+1} + a\,dy = 0$, laquelle eſt homogene. Donc, &c.

2. Dans le ſecond cas nous avons déja vu (Chap. VI. Art. LXXXVI.) que l'équation à quatre termes $ax^m y^n\,dx + by^p x^q\,dx + cx^r y^s\,dy + fx^e y^u\,dy = 0$, qui eſt plus générale que la précédente, devenoit homogene, 1°. ſi l'on avoit $(s-p+1)\,.\,(q-m) = (q-r+1)\,.\,(n-p)$;

2°. $(u-p+1).(q-m)=(q-e+1).(n-p)$.

Comparant cette équation avec la propoſée, on a $n=0$

$q=0$

$e=0$

$u=0$

ce qui nous avertit qu'on doit avoir $\frac{s+1}{m+1-r}=\frac{p}{m}$, & $p=\frac{m}{m+1}$, c'eſt-à-dire $p=\frac{m}{m+1}$ & $s=\frac{-r}{m+1}$. Enſuite on fera $x=u^{\frac{1}{m+1}}$, ce qui donne, en ſubſtituant ces différentes valeurs, la transformée $\frac{du}{m+1}+\frac{by^{\frac{m}{m+1}}u^{\frac{-m}{m+1}}du}{m+1}+cu^{\frac{r}{m+1}}y^{\frac{-r}{m+1}}dy+ady=0$, homogene comme dans le cas précédent.

CXXIII.

Nouvelle méthode pour chercher les cas d'intégration des équations à quatre termes.

Mais il y a d'autres méthodes pour découvrir encore de nouveaux cas d'intégration dans les formules précédentes : nous allons les examiner, 1°. pour la formule $x^m dx+by^p x^n dx+cy^s dx+ady=0$.

Appliquée à la premiere formule.

Il eſt viſible que ſi dans cette équation on fait $y=gu^q x^h$, elle ſe changera en une équation de cinq termes, dont on pourra ſuppoſer que deux ſe détruiſent dans certains cas particuliers, ce qui réduira la transformée à trois termes. L'équation de cinq termes eſt $x^m dx+bg^p u^{pq} x^{n+ph} dx+cg^s u^{qs} x^{hs} dx+agqu^{q-1}x^h du+aghx^{h-1}u^q dx=0$, équation dans laquelle on voit d'abord que ſi on ſuppoſe 1°. $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx+$

$cg^s u^{qs} x^{hs} dx = 0$, on aura . . . . $s = p$

$n = 0$

$b = -c$

& la propoſée ſera par conſéquent $x^m dx + ady = 0$, qui n'a que deux termes. Donc on ne peut faire cette premiere ſuppoſition.

2°. On ne peut ſuppoſer non plus $cg^s u^{qs} x^{hs} dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, comme il eſt aiſé de le voir; car alors on auroit $s = 1$ & $h = h - 1$; ce qui eſt abſurde.

3°. La ſeule ſuppoſition qu'on puiſſe faire ſans que la propoſée ſe réduiſe à n'avoir que deux termes, eſt celle de $bg^p u^{qp} x^{n+ph} dx + aghx^{h-1} u^q dx = 0$, qui nous donne . . . . $p = 1$

$n = -1$

$h = -\frac{b}{a}$

Donc en faiſant $y = gu^q x^{-\frac{b}{a}}$, ou ſimplement $y = ux^{-\frac{b}{a}}$, l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx + ady = 0$ ſe réduit à celle-ci de trois termes $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + agx^{-\frac{b}{a}} du = 0$. Or il eſt évident 1°. que cette équation eſt intégrable ou au moins conſtructible, ſi $m = -\frac{bs}{a}$: car alors on a $\frac{dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{cu^s dx}{x^{\frac{bs}{a}}} + \frac{adu}{x^{\frac{b}{a}}} = 0$, & multipliant toute l'équation par $x^{\frac{bs}{a}}$, on a $dx + cu^s dx + ax^{\frac{-b+bs}{a}} du = 0$; ou enfin $\frac{dx}{x^{\frac{-b+bs}{a}}} =$

Equation transformée.

Cas dans leſquels elle eſt intégrable ou conſtructible.

$\frac{-adu}{1+cu^s}$; équation dans laquelle les indéterminées sont séparées. Donc l'équation $x^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx - \frac{bs}{m} dy = 0$ est intégrable.

2°. Si on réduit l'équation $x^m dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}} dx + ax^{-\frac{b}{a}} du = 0$ à la forme $x^m dx + ady + by^p dx = 0$, en la mettant sous celle-ci $x^{m+\frac{b}{a}} dx + cu^s x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}} dx + adu = 0$, & qu'on fasse $x^{-\frac{bs}{a}+\frac{b}{a}+1} = z$; ce qui donne $x = z^{\frac{a}{-bs+b+a}}$ &c. on aura après les substitutions ordinaires $z^{\frac{am+bs}{-bs+b+a}} dz + qdu + ku^s dz = 0$: d'où l'on conclura que si $s = \frac{m}{m+1}$, on peut intégrer, puisqu'alors l'équation est $z^m dz + qdu + ku^{\frac{m}{m+1}} dz = 0$, qui devient homogene en faisant $z = y^{\frac{1}{m+1}}$. En effet, cette transformation nous donne $Ay^{\frac{m}{m+1}} dy + qy^{\frac{m}{m+1}} du + Bu^{\frac{m}{m+1}} dy = 0$.

Si $s = 1$, alors l'équation devient $qdu + kudz + z^{\frac{am+b}{a}} dz = 0$, dans laquelle les indéterminées se séparent par la méthode du Chapitre VII.

De même si $s = 2$, l'intégration sera possible toutes les fois que $\frac{am+2b}{a-b} = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, n exprimant un nombre entier positif, puisqu'alors c'est le cas de l'équation de Ricati.

CXXIV.

Application de cette même méthode à la seconde formule.

En appliquant cette méthode à la seconde formule des équations à quatre termes $x^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy + a dy = 0$ mise sous cette autre forme plus commode & aussi générale $dx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy + a dy = 0$, on trouve outre les cas dont l'intégration se présente d'elle-même, ou qui se rapportent à ceux dans lesquels $p = \frac{m}{m+1}$ & $s = \frac{-r}{m+1}$, on trouve, dis-je, qu'en supposant . . . . $c = -b$

$s = p - 1$

$n = r + 1$

l'équation $dx + by^p x^r dx - by^{p-1} x^{r+1} dy + a dy = 0$ sera toujours intégrable en faisant $y = ux$. En effet la transformée devient alors $(1 + au) dx + ax du - bu^{p-1} x^{r+p+1} du = 0$, qui est intégrable par la méthode générale du Chapitre VII.

CXXV.

SCHOLIE. Après avoir examiné les cas dans lesquels on peut intégrer chacune des deux formules des équations à quatre termes, il ne sera pas inutile de chercher aussi les cas d'intégration de l'équation $x^m dx + a dy + byx^n dx$ $cyy dx = 0$, qui ne differe de celle de Ricati que par le terme $byx^n dx$. C'est ce que nous allons faire dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$.

CXXVI.

PROBLEME. TRouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$.

Transformation néceſſaire dans le cas préſent.

SOLUTION. Soit $y = px^r + fx^s z^t$; on voit bien que p, r, s, t, f étant des indéterminées que nous prenons à volonté, nous ſerons les maîtres de leur donner dans la ſuite telle valeur que nous voudrons. Après les ſubſtitutions on aura la transformée ſuivante (*A*) $x^m dx + aprx^{r-1} dx + afsz^t x^{s-1} dx + aftx^s z^{t-1} dz + bpx^{r+n} dx + bfx^{s+n} z^t dx + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0$; pour abreger, on laiſſera dans la ſolution ſuivante p au lieu de ſa valeur $\frac{-1}{b+am+a}$.

Equation transformée.

CXXVII.

Premiere ſuppoſition pour cette équation.

Soit d'abord $afsz^t x^{s-1} dx + bfx^{s+n} z^t dx = 0$, on aura . . . . $n = -1$

$s = -\frac{b}{a}$.

Soit encore . . . . $m = r - 1$

& . . . . $bp + apr + 1 = 0$

$t = 1$

$f = 1$;

la transformée (A) fera $(1 + apr + bp) \cdot x^{r-1} dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + cppx^{2r} dx + 2pczx^{r-\frac{b}{a}} dx + cz^2 x^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$: & en réduifant cette équation fuivant les fuppofitions précédentes, elle devient (B) $cppx^{2r} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + 2cpx^{r-\frac{b}{a}} zdx + cx^{-\frac{2b}{a}} zzdx = 0$, d'où l'on tire ce premier Théorême.

THÉOREME I. Si l'équation $x^m dx + ady + byx^{-1} dx + cyydx = 0$ eft intégrable, l'équation $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}} dx + adz + 2cpx^{m+1} zdx + cx^{-\frac{b}{a}} z^2 dx = 0$ eft auffi intégrable. Nous fournit trois Théorêmes.

DÉMONSTRATION. A caufe de $r = m + 1$

f & $t = 1$

$s = -\frac{b}{a}$

la fuppofition de $y = px^r + fx^s z^t$ devient ici $y = px^{m+1} + x^{-\frac{b}{a}} z$; ce qui donne la transformée fuivante $(bp + amp + ap + 1) \cdot x^m dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1} dx + cppx^{2m+2} dx + 2cpzx^{m+1-\frac{b}{a}} dx + czzx^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$; mais à caufe de $r = m + 1$, la fuppofition précédente de $bp + apr + 1 = 0$, fe change en $bp + amp + ap + 1 = 0$; multipliant de plus toute l'équation par $x^{\frac{b}{a}}$, & effaçant ce qui se détruit, on a $cppx^{2m+2+\frac{b}{a}}dx + adz + 2cpzx^{m+1}dx + czzx^{-\frac{b}{a}}dx = 0$. Donc, &c. C'est ce qu'on trouveroit de même en mettant dans l'équation (B) pour r sa valeur $m+1$.

En supposant toujours . . . . . . $s = -\frac{b}{a}$
$n = -1$
$f = 1$
$t = 1$

Soit encore . . . . $r = -1$
$cp + b - a = 0$

la transformée générale (A) devient l'équation suivante $x^m dx + cppx^{-2}dx + bpx^{-2}dx - apx^{-2}dx - bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + bzx^{-\frac{b}{a}-1}dx + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}zzdx = 0$, qui devient à cause de l'hypothese de $cp + b - a = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2dx = 0$, d'où l'on tire ce second Théorême.

THÉOREME 2. Si l'équation $x^m dx + ady + bx^{-1}ydx + cyydx = 0$ est intégrable, l'équation $x^m dx + ax^{-\frac{b}{a}}dz + 2cpx^{-\frac{b}{a}-1}zdx + cx^{-\frac{2b}{a}}z^2dx = 0$ l'est aussi.

Enfin en laissant toujours la supposition de $s = -\frac{b}{a}$
$n = -1$
$f = 1$
$t = 1$

faisant

faiſant de plus . . . . $r = \frac{m}{2}$

$$p = \sqrt{-\frac{1}{c}},$$

on trouvera de la même façon que ci-deſſus le Théorême ſuivant.

THÉOREME 3. Si l'équation $x^m dx + ady + byx^{-1} dx + cyydx = 0$ eſt intégrable, l'équation $(apr + bp) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + ax^{-\frac{b}{a}} dz + 2cpzx^{\frac{m}{2}-\frac{b}{a}} dx + czzx^{-\frac{2b}{a}} dx = 0$, qui eſt ſa transformée en ſuppoſant $y = px^{\frac{m}{2}} + x^{-\frac{b}{a}} z$, l'eſt auſſi.

CXXVIII.

SCHOLIE I. Les trois Théorêmes précédents nous donnent trois équations dont l'intégration dépend de celle de $x^m dx + ady + byx^{-1} dx + cyydx = 0$; mais nous prouverons dans le Théorême 7 ſuivant que cette équation, lorſque $b = 2a$, eſt intégrable dans les mêmes cas que celle de Ricati. Donc les trois équations $cppx^{2m+4} dx + adz + 2cpzx^{m+1} dx + cx^{-2}z^2 dx = 0$, $x^m dx + ax^{-2} dz + 2cpzx^{-3} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, & $(apr + 2ap) . x^{\frac{m}{2}-1} dx + ax^{-2} dz + 2cpzx^{\frac{m}{2}-2} dx + cz^2 x^{-4} dx = 0$, ſont auſſi intégrables dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

CXXIX.

Seconde ſuppoſition qui donne auſſi trois Théoremes.

Soit maintenant $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, ce qui donne . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$

Soit auſſi . . . . $cp = a$,

ce qui donne . . . . $s = -2$

& ſoit encore . . . . $n = m + 1$;

$p = -\frac{1}{b}$

f & $t = 1$,

on trouvera le Théorême ſuivant.

THÉOREME 4. En général toutes les équations $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx - aby^2 dx = 0$ ſont intégrables.

DÉMONSTRATION. La ſubſtitution qu'il faut faire dans le cas préſent eſt celle-ci, $y = px^{-1} + x^{-2}z$; mettant les valeurs qu'elle fournit pour y & dy dans l'équation précédente, elle devient $x^m dx - apx^{-2} dx - 2cpzx^{-3} dx + ax^{-2} dz + bpx^m dx + bzx^{m+1} dx - abp^2 x^{-2} dx - 2abpzx^{-3} dx - abx^{-4} z^2 dx = 0$. Subſtituant dans cette équation pour p ſa valeur $-\frac{1}{b}$, ſuivant l'hypotheſe de $cp = a$, & effaçant ce qui ſe détruit, on aura pour transformée l'équation ſuivante, $adz + bzx^{m+1} dx - abz^2 x^{-2} dx = 0$, qui s'integre par la méthode générale du Chapitre VII.

Suppoſant encore . . . . $r = -1$

$cp = a$

$s = -2$

$n = m + 1$

f & $t = 1$,

on découvre la propofition fuivante.

THÉOREME 5. Si l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = o$ eft intégrable, la fuivante, $(bp+1) . x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} z dx + cx^{-4} z^2 dx = o$, qui eft fa transformée, en fuppofant $y = px^{-1} + x^{-2} z$, l'eft auffi. Or nous venons de voir (Théorême 4.) qu'on féparoit les indéterminées dans l'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = o$, lorfque $c = - ab$; donc on les féparera de même dans l'équation $(bp+1) . x^m dx + ax^{-2} dz + bx^{m-1} zdx + czzx^{-4} dx$; ce qui eft évident, puifque la fuppofition de $c = - ab$, donne $abp + a = o$, & par conféquent $bp + 1 = o$. Donc on aura $ax^{-2} dz + bx^{m-1} zdx + czzx^{-4} dx = o$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Suppofant toujours . . . . $r = - 1$

$s = - \frac{2cp}{a}$

f & $t = 1$

& faifant . . . . $m = - 2$

$cpp - ap + 1 = o$

on trouvera le Théorême fuivant.

THÉOREME 6. Si l'équation $x^{-2} dx + ady + byx^n dx + cyydx = o$ eft intégrable; l'équation $bpx^{n-1} dx + ax^{-\frac{2cp}{a}} dz + bx^{n - \frac{2cp}{a}} zdx + cx^{-\frac{4cp}{a}} zzdx = o$ l'eft auffi. On démontrera cette propofition à peu près de la même façon que les précédentes.

CXXX.

Troisieme supposition.

Soit enfin cette autre supposition, $bfx^{s+n}z^t dx + 2cpfx^{r+s}z^t dx = 0$, on en tire . . $r = n$

$p = -\frac{b}{2c}$.

Soit aussi . . . . $n = -1$

$s = 1$

$t = 1$

& . . . . $cpp + bp - ap = 0$,

ce qui donne . . . . $b = 2a$;

on trouvera la proposition suivante.

Fournit trois nouveaux Théorêmes.

THÉOREME 7. $x^m dx + ady + bax^{-1}ydx + cyydx = 0$ est intégrable dans les mêmes cas que l'équation de Ricati.

DEMONSTRATION. Mettant dans la transformée générale (A) pour r, pour n & pour s leurs valeurs, & suivant la condition de $cpp + bp - ap = 0$; elle devient $x^m dx + azdx + bzdx + axdz + 2cpzdx + cz^2x^2dx = 0$. Mais à cause de $p = -\frac{b}{2c}$, cette équation se change en la suivante $x^m dx + azdx + axdz + cz^2x^2dx = 0$; & enfin en faisant $xz = u$, on a $x^m dx + adu + cuudx = 0$ qui est l'équation même de Ricati.

En supposant toujours . . . . $r = n$

$p = \frac{-b}{2c}$,

& supposant de plus . . . . $n - 1 = m$

$apr + 1 = 0$,

on tire des suppositions précédentes . . $c = \frac{-b}{2p}$

& . . . . $p = -\frac{1}{ar} = \frac{-1}{am+a}$.
Donc $c = \frac{abm+ab}{-2}$. Ces conditions nous donnent le Théorême ſuivant.

THÉOREME 8. L'équation $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + \left\{\frac{abm+ab}{2}\right\} . yydx = 0$ s'integre dans les mêmes cas que ceux dans leſquels on peut intégrer l'équation de Ricati.

DÉMONST. Subſtituant dans la transformée générale (A) pour r, s, n leurs valeurs, & effaçant ce qui ſe détruit, elle ſe change dans l'équation ſuivante, $azdx + axdz - \frac{bb}{4c} x^{2m+2} dx + cz^2 x^2 dx = 0$; & en faiſant $xz = u$, $\frac{-bb}{4c} = B$, on aura $Bx^{2m+2} dx + adu + cu^2 dx = 0$, qui eſt l'équation de Ricati.

THÉOREME 9. Si on ne ſuppoſe pas $apr + 1 = 0$, on trouvera qu'en général ſi $x^m dx + ady + byx^{m+1} dx + cyydx = 0$ eſt intégrable, alors $(cpp + bp) . x^{2m+2} dx + (apr + 1) . x^m dx + adu + cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. C'eſt ce qui eſt évident par l'inſpection ſeule de la transformée générale (A), en y mettant ſeulement pour r, s, & n leurs valeurs, & en y faiſant $xz = u$.

CXXXI.

SCHOLIE 2. En ſuppoſant $x^m dx + ady = fdz$, ce qui donne . . . . $\frac{x^{m+1}}{m+1} + ay = fz$ *Autre transformation dont on peut encore ſe ſervir.*

& . . . . $y = \frac{fz - \frac{x^{m+1}}{m+1}}{a}$, l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$ devient (X) $fdz + \dfrac{bfzx^n dx - \dfrac{bx^{m+1+n}dx}{m+1}}{a} + \dfrac{cf^2z^2dx - \dfrac{2cfzx^{m+1}dx}{m+1} + \dfrac{cx^{2m+2}dx}{(m+1)^2}}{aa} = 0.$

Equation transformée.

CXXXII.

Premiere supposition pour cette équation.

Supposant 1°. dans la transformée (X) $-\dfrac{bx^{m+1+n}dx}{a.(m+1)} + \dfrac{cx^{2m+2}dx}{aa.(m+1)^2} = 0$, ou bien $cx^{2m+2}dx = (m+1).abx^{m+1+n}dx$, on en tire .... $c = (m+1).ab$

$m = 1$

$n = 2$;

ce qui donne le Théorême suivant.

Nous donne un Théorême.

THÉOREME 10. $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx + (m+1).aby^2dx = 0$ est intégrable. Car par les suppositions précédentes la transformée générale (X) devient $a^2fdz - (m+1).abzx^{m+1}dx + (m+1).fcz^2dx = 0$, équation dans laquelle les indéterminées se séparent par la méthode du Chapitre VII.

CXXXIII.

Seconde supposition qui donne aussi un Théorême.

2°. Supposant $\dfrac{bfzx^n dx}{a} - \dfrac{2cfzx^{m+1}dx}{aa.(m+1)} = 0$, on en tire $n = m+1$; $c = \left\{\dfrac{m+1}{2}\right\}.ab$, ce qui nous donne le Théorême suivant.

THÉOREME 11. $x^m dx + ady + byx^{m+1}dx +$

$\left\{\frac{m+1}{2}\right\}.aby^2dx=0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que $x^{2m+2}dx+adz+cz^2dx=0$, comme on l'a trouvé déja ci-deſſus dans le Théorême 8. C'eſt ce qui eſt évident en obſervant dans la transformée (X) les conditions que donne la ſuppoſition précédente.

CXXXIV.

SCHOLIE 3. Si l'on fait dans l'équation $x^m dx+ady+byx^n dx+cyydx=0$, ... $n=0$ Dernier cas d'intégration de la formule.

s & $t=1$,

la transformée générale (A) devient (F) $x^m dx+aprx^{r-1}dx+afzdx+afxdz+bpx^r dx+bfxzdx+cppx^{2r}dx+2cpfx^{r+1}zdx+cffx^2z^2dx=0$.

CXXXV.

Soit maintenant dans cette derniere équation $bfxzdx+2cpfx^{r+1}zdx=0$, on en tire . . $r=0$

$p=-\frac{b}{2c}$.

Soit auſſi . . . . $f=1$.

En effaçant ce qui eſt multiplié par zéro & ce qui ſe détruit dans l'équation (F), on a $x^m dx+azdx+axdz-\frac{bb}{4c}dx+cx^2z^2dx=0$; & enfin en faiſant $xz=u$, on a $x^m dx+adu-\frac{bb}{4c}dx+cu^2dx=0$; ce qui nous donne le Théorême ſuivant.

THE'OREME 12. Si $x^m dx+ady+bydx+cyydx=0$ eſt intégrable, (B) $x^m dx-\frac{bb}{4c}dx+adu+$

$cu^2 dx = 0$ l'eſt auſſi. Donc réciproquement la premiere pourra être intégrée dans tous les cas où l'on integrera cette derniere.

On trouve, par exemple, que ſi $m = 2$ & $\frac{b^4}{16caa} = -1$, cette derniere équation (B) eſt intégrable. Car ſoit dans cette équation, $u = \frac{z}{a} + \frac{bbx}{4ac}$, on aura la transformée ſuivante $x^2 dx - \frac{bb}{4c} dx + dz + \frac{bbdx}{4c} + \frac{czzdx}{aa} + \frac{bbzxdx}{2aa} + \frac{b^4 x^2 dx}{16aac} = 0$. Or cette équation dans l'hypotheſe de $\frac{b^4}{16caa} = -1$ ſe réduit à la ſuivante $2aadz + bbzxdx + 2cz^2 dx = 0$, dans laquelle on ſépare les indéterminées. Donc (B) eſt intégrable dans le cas préſent. D'où il faut conclure que $x^2 dx + ady + bydx - \frac{b^4 y^2 dx}{16aa} = 0$ l'eſt auſſi.

CXXXVI.

Recherche des cas d'intégrabilité de deux nouvelles équations à quatre termes.

REMARQUE. Outre l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cyydx = 0$, nous pouvons auſſi chercher les cas d'intégrabilité des deux équations

$$x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$$

& . . $x^m dx + ady + bx^n dy + cyydx = 0$,

qui ne different non plus de l'équation de Ricati que par un ſeul terme.

CXXXVII.

Examen de la premiere.

Soit donc 1°. $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$, l'équation à intégrer : faiſons $y = px^r + fx^s z^t$, nous aurons $dy = rpx^{r-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz + fsz^t x^{s-1} dx$, & pour transformée l'équation ſuivante, (D) $x^m dx + bx^n dx$

$bx^n dx + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0.$

Soit $afsx^{s-1} z^t dx + 2cfpx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$.

Soit . . . . $cp = a$

$t = 1$,

on trouvera . . . . $f = 1$.

THÉOREME 13. Si l'équation $x^m dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ est intégrable, la suivante $x^m dx + bx^n dx + ax^{-2} dz + cx^{-4} z^2 dx = 0$ l'est aussi ; puisque c'est sa transformée en faisant $y = \frac{ax^{-1}}{c} + x^{-2} z$.

THÉOREME 14. Soit encore . . $r = -1$

$s = -\frac{2cp}{a}$,

& de plus soit . . . . $m = -2$

& . . . . $-ap + cpp + 1 = 0$;

on pourra intégrer l'équation $x^{-2} dx + bx^n dx + ady + cyydx = 0$ dans le cas où l'on peut intégrer la suivante $bx^n dx + afx^s dz + cffx^{2s} z^2 dx = 0$; ce qui est évident, puisque c'est sa transformée en faisant $y = px^{-1} + x^{-1} z$, & effaçant ce qui se détruit par la supposition de $cpp - ap + 1 = 0$.

THÉOREME 15. Soit maintenant $x^m dx + aprx^{r-1} dx = 0$, on en tire . . . . $r = m + 1$

$apr = -1$.

Soit de plus . . . . $cpp + b = 0$

$n = 2m + 2$

$$f = 1$$
$$t = 1$$
$$s = 1.$$

La transformée générale (D) devient ici $x^m dx + bx^{2m+2} dx + (m+1) . apx^m dx + azdx + axdz + cppx^{2m+2} dx + 2cpx^{m+2} zdx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui se réduit par les suppositions précédentes à $azdx + axdz + 2cpx^{m+2} zdx + cz^2 x^2 dx = 0$; qui est intégrable par la méthode du Chapitre VII.; ce qui est évident en mettant l'équation sous cette forme $axdz + (a + 2cpx^{m+2}) zdx + cz^2 x^2 dx = 0$. D'où il suit que l'équation $x^m dx + bx^{2m+2} dx + ady - (m+1)^2 aaby^2 dx = 0$ est intégrable.

CXXXVIII.

Examen de la seconde équation.

2°. Examinons maintenant la formule $x^m dx + bx^n dy ady + cyydx = 0$: faisons $y = px^r + fx^s z^t$; on aura pour transformée l'équation suivante (Y) $x^m dx + bprx^{r+n-1} dx + bfsx^{n+s-1} z^t dx + bftx^{s+n} z^{t-1} dz + aprx^{r-1} dx + afsx^{s-1} z^t dx + aftz^{t-1} x^s dz + cppx^{2r} dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx + cffx^{2s} z^{2t} dx = 0$.

Supposons maintenant $afsx^{s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on aura . . . . $r = -1$

$$s = -\frac{2cp}{a}.$$

Soit . . . . $cp = a$

$$n = m+2$$
$$bp - 1 = 0,$$

on en conclura,

THE'OREME 16. que $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + aby^2 dx = 0$ eſt intégrable.

DEMONST. Car par les conditions précédentes la transformée générale (Y) devient ici $x^m dx - bpx^m dx - 2bzx^{m-1} dx + bx^m dz - apx^{-2} dx - 2ax^{-3} zdx + ax^{-2} dz + abppx^{-2} dx + 2abpx^{-3} zdx + abx^{-4} z^2 dx = 0$; laquelle, après les réductions que donne la ſuppoſition de $bp - 1 = 0$, devient étant multipliée par xx, $(a + bx^{m+2}) . dz - 2bzx^{m+1} dx + cz^2 x^2 dx = 0$, qui, comme on le voit, eſt dans le cas de notre méthode générale du Chapitre VII.

Soit enſuite $bfsx^{n+s-1} z^t dx + 2cpfx^{r+s} z^t dx = 0$, on en tire . . . . $r = n - 1$

$s = -\frac{2cp}{br}$.

Soit à préſent . . . . $cp + br = 0$

f & $t = 1$

$m = n - 2$

$apr + 1 = 0$, on aura $s = 2$.

Ces ſuppoſitions nous donnent le Théorême ſuivant.

THE'OREME 17. $x^m dx + bx^{m+2} dy + ady + (m+1)^2 . aby^2 dx = 0$ eſt intégrable. Car ſubſtituant dans la transformée générale (Y) pour r, n, s, f, t, leurs valeurs, faiſant les réductions qu'amenent les ſuppoſitions de $cp + bm + b = 0$, & de $apm + ap + 1 = 0$, on aura l'équation ſuivante $(ax^2 + bx^{m+4}) . dz + 2axzdx + (m+1)^2 . abz^2 x^4 dx = 0$. Donc, &c.

CXXXIX.

REMARQUE. Il eſt bon d'obſerver ici qu'une équation $x^m dx + by^n x^p dx + cx^s y^r dy + ady = 0$, ou $x^m dx + ady + by^n x^p dx + cy^r dx = 0$, ne peut être changée par transformation en une autre de la même forme, & dont les coefficiens ſoient tous trois donnés. Il ne peut y avoir que deux de ces coefficiens de donnés. La raiſon en eſt qu'en faiſant $x = fu$, $y = gz$, on formera trois équations différentes, quoiqu'on n'ait que deux inconnues f, g.

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manquent.

CXL.

Procédé de la méthode.

TOute équation différentielle à deux variables, à quelque degré que les dx & les dy y ſoient élevées, ſe conſtruit toujours lorſque l'une des deux indéterminées finies y manque. La méthode qu'il faut ſuivre dans ce cas, conſiſte à faire $dx = \frac{zdy}{a}$, ſi c'eſt x qui manque, ou $dy = \frac{zdx}{a}$ ſi c'eſt y qui manque. (z eſt une nouvelle indéterminée, & a une conſtante quelconque.) Car par

Quelle eſt la ſubſtitution qu'elle employe.

cette substitution, en mettant, par exemple, $\frac{zdy}{a}$ au lieu de dx dans la proposée, il est évident qu'on aura une transformée toute divisible par une puissance de dy qui se trouvera la même par-tout, & par conséquent que la transformée sera toute composée de quantités finies. On aura aussi la valeur de z en y & en constantes, & la raison d'y à z, sera exprimée par une équation ou par une courbe algébrique. Mettant donc dans l'équation $dx = \frac{zdy}{a}$ pour dy sa valeur trouvée par le procédé précédent, les indéterminées seront séparées.

Pour faire mieux sentir l'esprit de cette méthode, appliquons-la à quelques exemples. Application de la méthode à quelques exemples.

CXLI.

Premier exemple.

Soit l'équation $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$, dans laquelle il ne se trouve aucune dimension finie de x. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = \frac{zdy}{a}$; $dx^2 = \frac{zzdy^2}{aa}$; $dx^4 = \frac{z^4dy^4}{a^4}$. Mettant ces valeurs de dx, dx^2, dx^4 dans la proposée, j'ai la transformée suivante $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4dy^4}{a^3} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, c'est-à-dire, en divisant par dy^4 qui est commun à tous les termes $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$; de cette équation je tire aisément la valeur de $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; & celle de $dy = \frac{3z^2dz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$: donc $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^3dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$. J'integre cette équation. Son intégrale est $x - \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + alz + C = 0$.

On a donc la valeur des deux coordonnées x & y de la proposée par le moyen de deux courbes qui ont une indéterminée commune z.

Figure 5. Ayant donc pris les abscisses z sur l'axe AB, je décris la courbe DEC de l'équation $y = \frac{z^2}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, & la courbe NLM de l'équation $x - \frac{3z^4}{4a^3} - \frac{zz}{a} + alz + C = 0$. . . . . $BC = y$

$BM = x$

feront les coordonnées de la courbe différentielle proposée.

Pour la construire je mene KO parallele à BM, je prolonge MO en Q, ensorte qu'on ait toujours $OQ = BC$, & QPR sera la courbe cherchée.

CXLII.

Second exemple. Soit encore l'équation $y^3 dx^5 + aay\,dy\,dx^4 = a^3 dy^5$. Je fais $dx = \frac{z\,dy}{a}$, & après les mêmes substitutions que dans l'exemple précédent, il me vient ici $\frac{y^3 z^5 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 y\,dy^5}{a^4} = a^3 dy^5$, & en réduisant $y^3 z^5 + a^3 yz^4 = a^8$.

Figure 6. Pour avoir la courbe de l'équation différentielle proposée, sur l'axe DH, je construis la courbe EF de l'équation $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$; CD étant $= y$, & $CF = z$. Sur FC prolongée je prends CA égal à l'espace $DCFE$ divisé par a: on aura donc $CA = \int \frac{z\,dy}{a} = x$, & le point A appartient à la courbe cherchée.

CXLIII.

SCHOLIE. Cette méthode est, comme on le voit, aſſez étendue, d'autant plus qu'elle s'applique, comme nous le dirons dans la ſuite, aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier degré. M. d'Alembert en donne une encore plus générale dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, année 1748. Sa méthode a deux avantages. 1°. Elle ne ſuppoſe pas qu'une des deux indéterminées manque dans l'équation. 2°. Elle mene tout de ſuite à l'intégration. Nous allons l'expliquer dans le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer pluſieurs équations différentielles dans leſquelles dx & dy *ſont élevées à différentes puiſſances.*

CXLIV.

DEMANDE. Nous ſuppoſerons toujours dans ce Chapitre $z = \frac{dx}{dy}$, & il ne faut pas oublier que $\frac{dx}{dy}$ eſt une quantité finie, comme nous l'avons dit Article XXXIV.

CXLV.

AVERTISSEMENT. La ſuppoſition qu'on fait ici de $\frac{dx}{dy} = z$, donne $dz = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$; par conſéquent, comme dans les deux méthodes pour leſquelles la préſente ſuppoſition a lieu, dz ſe rencontre aſſez ſouvent, il sembleroit que ces méthodes appartiennent aux différentielles du second ordre. Cependant nous avons cru devoir les traiter ici, parce que dz y est sous une forme de différentielle du premier degré.

CXLVI.

Conditions qu'exige cette méthode.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale d'une équation différentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de dx & de dy, & dans laquelle x & y se trouvent, pourvu qu'ils ne soient ni multipliés ni divisés l'un par l'autre, ni élevés à aucune puissance plus grande que l'unité.

Formule des équations auxquelles on la peut appliquer.

SOLUTION. Ces sortes d'équations peuvent se représenter par la formule $x = y\varphi z + \Delta z$ (φz & Δz marquant des fonctions quelconques de z, c'est-à-dire de $\frac{dx}{dy}$).

Procédé de la méthode appliquée à cette formule.

Je commence par différentier cette formule, j'ai $dx = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou mettant pour dx sa valeur zdy, on a $zdy = dy\varphi z + yd(\varphi z) + d(\Delta z)$; ou $dy(\varphi z - z) + yd(\varphi z) + d(\Delta z) = 0$. Donc $dy + \frac{yd(\varphi z) + d(\Delta z)}{\varphi z - z} = 0$, équation qui est dans le cas de la méthode de M. Bernoulli que nous avons expliquée dans le Chapitre VII., & de laquelle on tire aisément la valeur de y en z; car en prenant c pour le nombre dont le logarithme est l'unité, on a $yc^{\int\frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} + \int\frac{d(\Delta z)}{\varphi z - z} \times c^{\int\frac{d(\varphi z)}{\varphi z - z}} = A$. ($A$ est une constante quelconque ajoutée pour rendre l'intégrale complete.) Par conséquent on trouvera aussi la valeur de x, puisque $dx = zdy$, & $x = \int zdy$.

CXLVII.

CXLVII.

COROLLAIRE. Si $x = y\varphi z$, c'eſt le cas des équations homogenes que nous avons appris à intégrer dans le Chapitre V. Il eſt cependant pris ici dans un autre ſens que celui des équations homogenes de M. Bernoulli. Car ici on a $\frac{x}{y} = \varphi z = \varphi \frac{dx}{dy}$, au lieu que dans le cas de M. Bernoulli on a $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. Quoique ces deux cas rentrent l'un dans l'autre, cependant il ſeroit quelquefois fort difficile de ramener le premier au ſecond; c'eſt-à-dire, de tirer de $\frac{x}{y} = \varphi \frac{dx}{dy}$, l'équation $\frac{dx}{dy} = \varphi \frac{x}{y}$. C'eſt pourquoi il étoit fort utile d'avoir une méthode particuliere pour chacun de ces deux cas. Celle que nous expliquons ici apprend en général à intégrer toute équation $x = y\varphi z$, φz étant une fonction quelconque de z, même avec des ſignes $\int$.

Le cas des équations homogenes ſe réſout par cette méthode.

CXLVIII.

Néanmoins cette méthode ſuppoſe qu'on ait la valeur de $\frac{x}{y}$ en z; mais on peut par un autre moyen réſoudre encore plus généralement le cas préſent. Soit, comme dans tout ce Chapitre, $z = \frac{dx}{dy}$, & $x = yk$, (z & k étant deux nouvelles changeantes) la propoſée devient une équation algébrique quelconque entre z & k. Je conſtruis la courbe qui eſt le lieu de cette équation, & j'ai pour chaque z la correſpondante k, & *vice verſâ*. Or de ce que $x = yk$, & $dx = zdy$, il s'enſuit qu'on aura $zdy = ydk + kdy$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dk}{z-k}$; donc nous parviendrons à

Autre maniere plus générale de réſoudre le cas des équations homogenes.

trouver la valeur de y en construisant & en quarrant la courbe dont les abscisses sont k, & dont les ordonnées sont $\frac{1}{z-k}$.

CXLIX.

Aussi bien que l'équation du Chap. Chap. VI. Art. XC.

COROLLAIRE 2. L'équation $gxdx + hydx + fdx = axdy + bydy + cdy$, pour laquelle nous avons donné une méthode particuliere, est aussi un cas particulier du Problême précédent. En effet, cette équation est la même que la suivante $dx = \left\{\frac{ax+by+c}{gx+hy+f}\right\} dy$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$. Donc on a $z = \frac{ax+by+c}{gx+hy+f}$: ou $zgx + zhy + zf = ax + by + c$; donc $zgx - ax = - zhy - fz + by + c$; donc $x = y\left\{-\frac{zh+b}{zg-a}\right\} + \frac{c-fz}{zg-a}$; donc enfin $x = y\varphi z + \Delta z$ qui est la formule du Problême. Donc la proposée s'integrera par la même méthode que cette formule.

C L.

Application à une seconde formule.

PROBLEME 2. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ dans laquelle $z = \frac{dx}{dy}$; m, n, r, q, s, t marquent des nombres quelconques.

SOLUTION. Je fais $x^q y^s z^t = u$,

donc . . . . $x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{t}{q}}$

$$x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}};$$

mais nous avons $x^m y^n z^r = \varphi u$, donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{x^m}$;

donc $y^n z^r = \frac{\varphi u}{u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}} = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$.

Donc $y^n = (\varphi u) . u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$, ou $y^{\frac{nq-ms}{q}} = (\varphi u) u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{tm-rq}{q}}$. Donc enfin $y = (\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} \times u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$. Donc $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}$, (& en mettant pour $y^{-\frac{s}{q}}$ sa valeur,) $= (\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} \times u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$. Mais (Problême 1.) $dx = zdy$. Donc si on substitue les valeurs de dx & de dy dans cette derniere équation, on trouvera les conditions d'intégrabilité de la maniere suivante.

Cas d'intégration de cette formule.

CLI.

Maniere de les trouver.

Supposant $(\varphi u)^{\frac{q}{nq-ms}} . u^{-\frac{m}{nq-ms}} = V'$, & $(\varphi u)^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} = V$ pour abréger le calcul. Nous aurons

$x = V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, &

$y = V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$.

Donc à cause de l'équation $dx = z dy$, on a

$d\left\{V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}\right\} = z d\left\{V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}\right\}$, c'est-à-dire,

$z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV' + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation qui est intégrable dans tous les cas suivants.

CLII.

Premier cas d'intégration.

1°. Si $tm - rq = o$. Car alors on a $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z dV'$, équation qui est dans le cas de la Méthode du Chapitre VII.

De l'équation $tm - rq = o$ on tire $\frac{t}{r} = \frac{q}{m}$, donc la proposée devient $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{\frac{tm}{r}} z^{\frac{rq}{m}}$, & supposant $\frac{t}{r} = p$, on a $x^m z^r y^n = \varphi y^s x^{pm} z^{pr}$. Je fais $x^m z^r = k$, donc j'ai $ky^n = \varphi y^s k^p$, donc $k = \Delta y$; donc $x^m z^r = \Delta y$, équation facile à intégrer. La méthode que nous expliquons a l'avantage de fournir le moyen d'intégrer ces sortes d'équations différentielles sans chercher la valeur de $x^m z^r$ en y, ce qu'il seroit souvent impossible de trouver.

CLIII.

Second cas d'intégration de la même formule.

2. L'équation est intégrable dans le cas où $rs - nt = o$. Car alors on a $V^{-1} dV = z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}+1} V'^{-1} dV' + \left\{\frac{tm-rq}{nq-ms}\right\} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, équation encore constructible par la même méthode de M. Bernoulli, Chapitre VII.

L'équation $rs - nt = o$ change la proposée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^t$, en la suivante $x^m y^n z^r = \varphi (x^q y^{\frac{nt}{r}} z^{\frac{rs}{n}})$, d'où l'on tirera $y^n z^r = Tx$, en suivant la même opération que ci-dessus.

CLIV.

3°. Si $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, alors l'équation sera beaucoup plus simple que les précédentes. Car dans ce cas $\frac{tm-qr}{nq-ms} = \frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms} - 1 = \frac{rs-nt}{nq-ms} - 1$; Troisieme cas d'intégration.

donc notre derniere équation devient $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V^{-1} dV + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V''^{-1} dV'' + \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V'' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$, c'est-à-dire,

$$\frac{V^{-1}dV - V''^{-1}dV''}{\left\{\frac{rs-nt}{nq-ms} - 1\right\} V'' - \left\{\frac{rs-nt}{nq-ms}\right\} V} = \frac{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz}{z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}},$$

équation qui est toute séparée.

Si dans le cas présent on fait $t = 0$, $r = 1$, au lieu de l'équation de condition $nq - ms + tm - rq = rs - nt$, on aura la suivante $nq - ms = q + s$. Dans ce cas la proposée $x^m y^n z^r = \varphi x^q y^s z^t$ devient $x^m y^n z = \varphi x^q y^s$. Donc en mettant pour z sa valeur $\frac{dx}{dy}$, on a $x^m y^n \frac{dx}{dy} = \varphi x^q y^s$, ou $dx = x^{-m} y^{-n} dy \varphi(x^q y^s)$; Donc en supposant . . . . $-m = p$,

$-n = t$

toute équation de cette forme $dx = x^p y^t dy \varphi(x^q y^s)$ sera intégrable si $-tq + ps = q + s$; ainsi l'équation $dx = \frac{ax}{y} dy \varphi(y^s x^q)$ est intégrable. Car on a en comparant terme à terme $p = 1$, $t = -1$: donc on a $-tq + ps = q + s$. De même dans l'équation $dx = dy \varphi(xy^s)$, $p = 0$, $t = 0$, $q = 1$; donc, &c.

C L V.

Celui des équations homogenes y est compris.

Le cas des équations homogenes de M. Bernoulli est renfermé dans l'équation génerale $-tq+ps=q+s$. Car ce cas peut se représenter, comme nous l'avons déja dit (Art. CXLVII.) par $\frac{dx}{dy}=\varphi\frac{x}{y}$, ou $dx=dy\varphi xy^{-1}$. Or comparant cette équation avec la formule de l'article précédent, on a . . . . . . $p=0;\ t=0$

$q=1;\ s=-1.$

Donc $ps-tq=0$, & $q+s=0$; donc $-tq+ps=q+s$.

C L V I.

Par le même moyen on peut déterminer les conditions d'intégrabilité de l'équation $dx=a'x^m y^n dy+px^e y^h dy+fx^g y^l dy+$ &c. Pour y parvenir, je fais $x^b y^a=u$ (a & b sont deux indéterminées.) J'ai donc $x=u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}}$; $dx=\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}du-\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}dy$; donc j'ai la transformée suivante $\frac{1}{b}y^{-\frac{a}{b}}u^{\frac{1}{b}-1}du=\frac{a}{b}u^{\frac{1}{b}}y^{-\frac{a}{b}-1}dy+a'u^{\frac{m}{b}}y^{-\frac{am}{b}+n}dy+pu^{\frac{e}{b}}y^{-\frac{ae}{b}+h}dy+fu^{\frac{g}{b}}y^{-\frac{ag}{b}+l}dy+$ &c. équation qu'on voit aisément être intégrable, toutes les fois que $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n=-\frac{ae}{b}+h=-\frac{ag}{b}+l$. Or de l'équation $-\frac{a}{b}-1=-\frac{am}{b}+n$, je tire $-\frac{a}{b}+\frac{ma}{b}=n+1$, donc $+\frac{a}{b}=\frac{n+1}{m-1}$; de même de l'équation $+\frac{a}{b}-1$

$= -\frac{ea}{b} + h$ on tire $-\frac{a}{b} + \frac{ea}{b} = h + 1$. Donc $\frac{a}{b} = \frac{h+1}{e-1}$ &c. Donc la propoſée eſt intégrable, toutes les fois que $\frac{n+1}{m-1} = \frac{k+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

CLVII.

4°. Enfin ſi $nq - ms = 0$, on a $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{sm}{q}} z^{-\frac{tm}{q}}$. Donc la propoſée $x^m y^n z^r = \varphi u$, devient $u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{nq-ms}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$ ou $u^{\frac{m}{q}} z^{\frac{rq-tm}{q}} = \varphi u$, & l'équation propoſée s'integre toutes les fois que $n = -m$, & $q = -s$, ce qui rentre dans le cas des équations homogenes.

Quatrieme & dernier cas d'intégration de la même formule.

CLVIII.

REMARQUE. On ne retrouvera que les mêmes équations de condition, ſoit qu'on tire de l'équation différentielle propoſée les valeurs de y & de z, ou de x & de z.

CLIX.

PROBLEME 3. Trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + \Delta(y^p z^n)$.

Recherche des cas d'intégration d'une troiſieme formule.

1°. Je ſuppoſe $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$; or $z = \frac{dx}{dy}$, donc $\frac{dx}{dy} = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$: donc $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. On a auſſi $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, donc $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}}$, donc on a la transformée $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k-\frac{pr}{n}} \varphi u + \Delta u$.

Nommant $u^{\frac{r}{n}} \varphi u$, V, j'ai $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V y^{k-\frac{pr}{n}} + \Delta u)$, par où il m'eſt facile de voir que l'équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli expliqué (Ch. VII.) ſi $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$.

2°. Si on fait encore $y^p z^n = u$, & qu'on en tire $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} u^{\frac{1}{p}} dz$: on aura $dx = z dy = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. D'ailleurs $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r}$, donc $x = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}+r} \varphi u + \Delta u$.

Je nomme $u^{\frac{k}{p}} \varphi u$, V': j'ai donc dx, ou $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}+r} dV' - \left\{\frac{nk}{p} - r\right\} V' z^{-\frac{nk}{p}+r-1} dz + d(\Delta u)$. Or ſi $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r$, on aura $-\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p} + r - 1$; donc l'équation précédente devient $\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}+1} u^{\frac{1}{p}-1} du - z^{-\frac{n}{p}+1} V'^{-1} dV' - d\Delta u = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}} dz - \left\{\frac{n}{p} - 1\right\} V' z^{-\frac{n}{p}} dz$, ou bien $z^{-\frac{n}{p}} dz \times \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} + \left\{1 - \frac{n}{p}\right\} V' + z^{-\frac{n}{p}+1} du \times \left\{V'^{-1} \frac{dV'}{du} - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}\right\} - d\Delta u = 0$. Or on voit bien que cette équation ſe rapporte au cas général de M. Bernoulli, de même que l'équation de l'article précédent.

CLX.

CLX.

COROLLAIRE. Si la proposée étoit $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + y^{k'} z^{r'} \Delta(y^p z^n) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^p z^n) +$ &c. je ferois comme ci-dessus $y^p z^n = u$, donc $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$, donc $dx = z\,dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Donc $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}+k} \varphi u + u^{\frac{r'}{n}} y^{-\frac{pr'}{n}+k'} \Delta u + u^{\frac{r''}{n}} y^{-\frac{pr''}{n}+k''} \Gamma u +$ &c.) Donc la proposée sera intégrable, lorsqu'on aura $-\frac{p}{n} + 1 = -\frac{pr}{n} + k = -\frac{pr'}{n} + k' = -\frac{pr''}{n} + k''$, ou en faisant le même calcul que dans l'Article CLIX. lorsqu'on aura $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorsque k' & r', ou k'' & r'' &c. sont égaux à zéro.

CLXI.

REMARQUE. Toutes les méthodes que nous avons expliquées dans ce Chapitre pour les équations différentielles à deux variables du premier ordre, s'étendent aussi à celles d'un genre plus élevé. C'est ce que nous ferons voir dans la suite.

CLXII.

SCHOLIE GÉNÉRALE. La méthode dont nous avons donné un essai (Art. CXLVIII.) peut s'étendre à toutes les équations dans lesquelles faisant $y^p z^q = k$, on a une équation entre x & k. En effet on commencera par construire l'équation entre x & k, puis on observera que $y^{\frac{p}{q}} z =$

$k^{\frac{1}{q}}$, ou en mettant pour z sa valeur $\frac{dx}{dy}$, que $y^{\frac{p}{q}}dx = k^{\frac{1}{q}}dy$, ou bien $k^{-\frac{1}{q}}dx = y^{-\frac{p}{q}}dy$. Or il est évident que pour chaque x on a une valeur de k; donc on aura aussi pour chaque x une valeur de y correspondante.

CHAPITRE XIV.

Autre Méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CLXIII.

Procédé de cette Méthode.

LA Méthode que nous allons expliquer ici consiste à préparer l'équation $dx = zdy$, ou $dx - zdy = 0$ de telle façon qu'on la puisse diviser en deux parties, dont l'une soit intégrable, & dont l'autre soit ou puisse devenir une différentielle exacte multipliée par une quantité quelconque. Ensuite on multipliera la premiere partie par une fonction de son intégrale, & on supposera que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la différentielle dans la seconde partie soit égal à une fonction de l'intégrale de la différentielle contenue dans cette seconde partie. On aura par ce moyen une équation de condition qui rend la proposée intégrable.

CLXIV.

Je mets l'équation $dx - zdy = 0$ sous la forme suivante $dx - zdy - ydz + ydz = 0$: je multiplie cette derniere équation par une fonction X de x, & j'y ajoute $zydX - zydX$, ce qui ne la change pas ; j'aurai $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX + yXdz + zydX = 0$, ou bien $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX = -yXdz - zydX$. Or le premier membre de cette équation est intégrable ; son intégrale est $\int Xdx - yzX$. Le second membre est la différentielle de $-zX$, multipliée par y. En suivant donc le procédé qu'indique notre méthode, je multiplie le premier membre $Xdx - Xzdy - Xydz - yzdX$ par une fonction de son intégrale, & je suppose que le produit de cette fonction, par la quantité y qui multiplie la différentielle dans le second membre, est égal à une fonction de zX. De cette hypothese je tire le Théorême suivant.

Application de cette Méthode.

CLXV.

THÉOREME. L'équation proposée est intégrable si $y\varphi(\int Xdx - Xyz) = \Gamma zX$.

Car en pratiquant les opérations indiquées ci-dessus, la proposée devient $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \times y\varphi(\int Xdx - Xyz)$ qui se change par la supposition précédente en $\{Xdx - d(Xyz)\} \times \varphi(\int Xdx - Xyz) = -d(Xz) \cdot \Gamma(Xz)$; équation qu'on voit bien être intégrable.

CLXVI.

On peut encore exprimer ce Théorême de la façon ſuivante : l'équation $Xdx - d(Xyz) = -yd(Xz)$ eſt intégrable, ſi $\int Xdx - Xyz$ eſt égale à une fonction de $y\Delta(Xz)$.

Car de ce que $\int Xdx - Xyz = \varphi y \Delta(Xz)$, il s'enſuit que $y\Delta(Xz) = \Gamma(\int Xdx - Xyz)$: donc $\frac{1}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{1}{y\Delta(Xz)}$: donc en multipliant les deux membres de notre équation par ces deux quantités égales, on aura $\frac{Xdx - d(Xyz)}{\Gamma(\int Xdx - Xyz)} = \frac{-d(Xz)}{\Delta(Xz)}$, équation intégrable.

CLXVII.

Premier exemple.

COROLLAIRE. Donc l'équation $\int Xdx = pyXz + qyX^n z^n + a$ eſt intégrable, p, q & a ſont des conſtantes. En effet il eſt évident que cette équation peut ſe mettre ſous la forme ſuivante $\int Xdx - yzX = pyzX - yzX + qyX^n z^n + a$, ou $\int Xdx - yzX = y.(pXz - Xz + qX^n z^n) + a = y\Delta(Xz) + a$.

Maintenant on voit que pour intégrer cette équation, il ne s'agit que de conſtruire une courbe dont les coordonnées ſoient x & y. Soit . . . . . $Xz = r$

$$\int Xdx - yr = k$$

$$k = u + a,$$

on aura . . . . $k - a = y\Delta r$,

& par conſéquent. . . . . . . $y\Delta r = u$.

La ſuppoſition de $k = u + a$ nous donne $dk = du$. Mais ſuivant le Théorême précédent on a dans ce cas-ci $Xdx - d(Xyz) + yd(Xz) = 0$: donc on aura $dk + ydr = 0$, & $du + ydr = 0$: donc enfin en mettant pour y ſa valeur $\frac{u}{\Delta r}$, il nous vient $\frac{du}{u} + \frac{dr}{\Delta r} = 0$, équation facile à conſtruire & qui nous donne la valeur de y en u ou en r. y étant ainſi trouvée, cherchons x. Les ſuppoſitions précédentes nous donnent $\int Xdx - yr = u + a$. Soit $u + yr + a = t$, on aura $\int Xdx = t$. Je conſtruis une courbe BM, dans laquelle $PM = X$ Figure 7.

$AP = x$,

l'aire de cette courbe ou $ABMP$ ſera $= \int Xdx = t$. Je prends AB pour l'unité, & je ſuppoſe $PQ = \frac{PMBA}{AB} = \int \frac{Xdx}{1} = t$, QR ſera l'x cherchée.

CLXVIII.

Soit propoſée l'équation $x + Z + a = \frac{yyzdz}{2dZ} + \frac{zdZ}{2dz}$, a eſt une conſtante, & Z une fonction de z, c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{dy}$. Second exemple.

Je commence par donner à cette équation la forme ſuivante $x - yz + Z + a = \frac{zdz}{2dZ} \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)^2$ qu'on voit clairement être la même équation que la propoſée. Donc en prenant la racine quarrée des deux membres, on aura $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}$. Mais par l'hypotheſe $z = \frac{dx}{dy}$, donc $dx - zdy = 0$, & par conſéquent $dx - zdy - ydz + dZ + ydz -$

$dZ = o$; donc $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} = \frac{-ydz + dZ}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{2dz}}}$ $= \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$; donc enfin $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}}$ $= \frac{-dz}{\sqrt{\left\{\frac{zdz}{2dZ}\right\}}}$. J'ai donc en intégrant $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \frac{1}{2}\int \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$. Si on combine cette équation avec la proposée, on en tirera la valeur de x ou de y en z, ce qui donne le Théorême suivant.

CLXIX.

THÉOREME. Toutes les équations dans lesquelles $x - yz + Z + a = \varphi \left\{(y - \frac{dZ}{dz}) \Gamma z\right\}$, sont intégrables.

DÉMONSTRATION. Puisque $x - yz + Z + a = \varphi \left\{(y - \frac{dZ}{dz}) . \Gamma z\right\}$, on aura $\varphi'(x - yz + Z + a) = \left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\} \times \Gamma z$; & divisant par $\varphi'(x - yz + Z + a)$ l'équation $dx - zdy - ydz + dZ = -(ydz - dZ)$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-dz.\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}}{\left\{y - \frac{dZ}{dz}\right\}.\Gamma z} = dz \Delta z$; équation dont on voit aisément que chaque membre est intégrable.

CLXX.

REMARQUE. On peut au lieu de $dx - zdy = o$, mettre $dy - \frac{dx}{z} = o$: alors il faudra substituer y à x,

x à y, $\frac{1}{z}$ à z dans les équations de condition, ce qui en donnera de nouvelles.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI.

CEtte Méthode eſt utile lorſqu'on a une, deux, trois, quatre, &c. équations à intégrer enſemble, ou lorſqu'on peut regarder une équation différentielle donnée, comme étant formée de pluſieurs autres équations. En général on integre par ſon moyen un nombre quelconque p d'équations différentielles, qui contiennent un nombre $p+1$ de variables t, x, y, z, u, &c. dont la premiere ait ſa différence dt conſtante, & dont les autres x, y, z, u, &c. & leurs différences ne ſont ni mêlées entre elles ni avec x, & y, &c. ni élevées à aucune puiſſance autre que l'unité, mais ſont ſeulement multipliées par des puiſſances convenables de dt. L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, ſi dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque composé comme on voudroit de t, de dt & de conſtantes.

Cas dans leſquels on peut ſe ſervir de cette Méthode.

Voici le procédé que nous fait ſuivre cette méthode.

*

CLXXII.

En quoi elle conſiſte.

On multiplie par un coefficient indéterminé la ſeconde des deux équations propoſées, lorſqu'il n'y en a que deux; ſi on en a trois, on multiplie auſſi la troiſieme par une indéterminée différente de celle qui multiplie la ſeconde, & ainſi de ſuite. Après cette premiere opération, on ajoute ces équations les unes aux autres, on détermine les valeurs des coefficients indéterminés, & par leur moyen auſſi celles de t, x, y, &c.

Avant d'appliquer cette méthode à des exemples, nous établirons une propoſition qui nous eſt néceſſaire pour la ſuite.

CLXXIII.

Lemme préparatoire.

LEMME. Si l'on a une fonction $\varphi(z+\xi)$, telle que la variable z croiſſe ou décroiſſe d'une quantité très-petite ξ, je dis qu'on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi\Delta z + \frac{\xi^2\Gamma z}{2} + \frac{\xi^3\Psi z}{2.3.} +$ &c. On ſuppoſe ici que $d(\varphi z) = dz\Delta z$, que $d(\Delta z) = dz\Gamma z$, que $d(\Gamma z) = dz\Psi z$; & ainſi de ſuite.

DÉMONST. Soit $\varphi(z+\xi) = \varphi z + u$: je différentie cette équation en traitant z comme conſtante, ξ & u comme variables; j'aurai $d\xi\Delta(z+\xi) = du$: donc $u = \int d\xi\Delta(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\Delta(z+\xi)$. Soit maintenant $\Delta(z+\xi) = \Delta z + y$, j'aurai en regardant z comme conſtante & ξ & y comme variables $y = \int d\xi\Gamma(z+\xi)$: donc $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\Delta z + \int d\xi\int d\xi\Gamma(z+\xi)$. Soit encore $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + t$,

j'aurai

j'aurai en ſuppoſant toujours z conſtante, ξ & t variables, $t = \int d\xi\psi(z+\xi)$; donc en ſubſtituant pour t cette valeur, on a $\Gamma(z+\xi) = \Gamma z + \int d\xi\psi(z+\xi)$, & par conſéquent $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \int d\xi\Delta z + \int d\xi\int d\xi\Gamma z + \int d\xi\int d\xi\int d\xi\psi z +$ &c. on trouveroit une ſuite de termes à l'infini. Donc (Art. CCXVIII. 1[ere] Partie) $\varphi(z+\xi) = \varphi z + \xi\Delta z + \frac{\xi^2\Gamma z}{2} + \frac{\xi^3\psi z}{2.3} +$ &c.

CLXXIV.

COROLLAIRE. On trouvera par la même méthode que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha^2 x^2 c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 c^{fx}}{2.3} +$ &c. Car ſoit $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + t$, & ſoit x conſtante, α & t variables, on aura $c^{fx+\alpha x} x d\alpha = dt$, donc $t = \int c^{fx+\alpha x} x d\alpha$ & $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int c^{fx+\alpha x} x d\alpha$. Donc on aura une ſuite telle que $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \int dx\alpha c^{fx} + \int x d\alpha c^{fx} \int x d\alpha c^{fx} + \int x d\alpha c^{fx} \int x d\alpha c^{fx} \int x d\alpha c^{fx} +$ &c. Donc en intégrant on a $c^{fx+\alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx} + \frac{\alpha^2 x x c^{fx}}{2} + \frac{\alpha^3 x^3 c^{fx}}{2.3.} +$ &c.

Paſſons maintenant à l'application de notre méthode à des exemples.

CLXXV.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale des deux équations

Application de la méthode aux cas où l'on a deux équations.

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = 0$$
$$dy + (Kx + Ly)\,dt = 0.$$

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit, je multiplie la ſeconde de ces deux équations par un coefficient indéterminé v, elle devient

$$v\,dy + (Kx + Ly)\,v\,dt = 0;$$

j'ajoute cette équation à la premiere, ce qui me donne l'équation suivante

(A) $dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0;$

à présent je fais en sorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ soit un multiple de $x + vy$. J'aurai donc

$$Cx + Kvx + Dy + Lvy = Rx + Rvy,$$

(R est un coefficient constant quelconque.) Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $C + Kv = R$, & $D + Lv = Rv$, ou $\frac{D + Lv}{v} = R$. Donc $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$: donc $Cv + Kvv = D + Lv$, ou bien $Kvv + Cv - Lv = D$, ou $vv + \frac{Cv}{K} - \frac{Lv}{K} = \frac{D}{K}$: donc $vv + \frac{Cv - Lv}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK} = \frac{D}{K} + \frac{CC}{4KK} - \frac{CL}{2KK} + \frac{LL}{4KK}$: donc en prenant la racine quarrée $v = \frac{-C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(4DK + CC - 2CL + LL)}}{2K}$: donc enfin (B) $v = \frac{-C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}}{2K}$.

Je suppose à présent . . . . . . $x + vy = u$

j'ai . . . . $dx + v\,dy = du$.

D'ailleurs l'équation $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$ donne $D + Lv = (C + Kv).v$. Donc $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)x + (C + Kv)vy = (C + Kv).(x + vy) = (C + Kv)u$. Donc l'équation (A)

$dx + v\,dy + \{(C + Kv)x + (D + Lv)y\}\,dt = 0$

devient, en faisant les substitutions précédentes,

$$du + (C+Kv)\,u\,dt = 0$$

ou . . . . $\frac{du}{u} = (C+Kv) \times - dt$

équation dont l'intégrale est, comme on le sait,

$$lu = (C+Kv) \times - t,$$

ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme est l'unité, & g pour la constante, $lu = lge^{-(C+Kv)t}$

ou bien . . . . $u = ge^{-(C+Kv)t}$

Soient maintenant p, p' les deux valeurs de v trouvées par l'équation (B), au lieu de l'équation $x + vy = u$, on aura ces deux-ci . . . . . . $(C)\ x + py = u$

$$(D)\ x + p'y = u';$$

& de même au lieu de l'équation $u = ge^{-(C+Kv)t}$

on aura les deux suivantes . . . . $u = ge^{-(C+Kp)t}$

$$u' = g'e^{-(C+Kp')t}.$$

Des deux équations (C) & (D), je tire aisément les valeurs de x & de y. Car retranchant l'équation $x + p'y = u'$ de l'équation $x + py = u$, j'ai $py - p'y = u - u'$: Donc . . . . $y = \frac{u - u'}{p - p'}$.

Pour avoir maintenant la valeur de x, je multiplie par p' l'équation . . . . $x + py = u$,

& par p l'équation . . . . $x + p'y = u'$,

ce qui me donne . . . $p'x + p'py = p'u$

& . . . . $px + pp'y = pu'$;

je retranche la seconde de la premiere, j'ai

$$p'x + p'py - px - pp'y = p'u - pu',$$

donc . . . . $p'x - px = p'u - pu'$.

Donc . . . . $x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$.

On mettra dans ces valeurs de x & de y pour u & pour u' leurs valeurs $ge^{-(C+Kp)t}$ & $g'e^{-(C+Kp')t}$; on déterminera les conſtantes g & g' en ſuppoſant $t=0$ ou une grandeur connue, & on aura l'intégrale cherchée.

CLXXVI.

Obſervations néceſſaires ſur la ſolution précédente.

REMARQUE 1. Si les valeurs de v ſont imaginaires, l'intégration ſe fera toujours de même. Car nous avons démontré dans l'Introduction que les exponentielles imaginaires ſe réduiſent toujours à $A+B'\sqrt{-1}$, $A-B'\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. Si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en diſparoîtroient.

CLXXVII.

REMARQUE 2. Si v n'avoit pas deux valeurs, le Problême n'auroit pas plus de difficulté, au contraire il ſe réſoudroit beaucoup plus aiſément. Car v ne peut avoir moins de deux valeurs qu'en ſuppoſant $K=0$, ou $D=0$; l'inconnue v n'étant plus qu'à la premiere puiſſance dans le premier cas, & dans le ſecond l'équation entiere pouvant ſe diviſer exactement par v eſt du premier degré. Or dans ces deux cas une des deux équations eſt intégrable, & l'autre ſe réduit à la formule de M. Bernoulli, traitée dans le Chapitre VII.

Suppoſons $D=0$, la premiere équation devient

$$dx+Cx\,dt=0.$$

Donc . . . . $\frac{dx}{x}=-C\,dt$;

donc . . . . $lx = -Ct$,
ou en prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & m pour la conſtante, on a $x = me^{-Ct}$.

La ſeconde équation eſt $dy + Lydt + Kxdt = 0$: mettant dans cette équation pour x ſa valeur en t tirée de l'équation précédente, on voit clairement qu'elle eſt de la forme ſuivante $dy + Aydt + Tdt = 0$, équation dans laquelle A eſt une conſtante & T une fonction de t & de conſtantes. Donc elle s'intégre par la méthode de M. Bernoulli.

Ce ſera la même choſe, ſi on ſuppoſe $K = 0$, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

CLXXVIII.

REMARQUE. Si les deux valeurs de v ſont égales, on prendra arbitrairement une de ces deux valeurs, & après avoir réſolu l'équation $du = -dt(C + Kv)u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u. Par exemple, je prends ici p pour la valeur de v. J'ai conſéquemment $u = ge^{-(C+Kp)t}$. Mettant cette valeur de u dans l'équation $x + vy = u$, elle devient $x = ge^{-(C+Kp)t} - py$. Je mets enſuite cette valeur de x dans l'équation $dy + (Kx + Ly)dt = 0$, j'ai $dy + Kge^{-(C+Kp)t}dt - Kpydt + Lydt = 0$, ou $dy + (L - Kp)ydt + Kge^{-(C+Kp)t}dt = 0$ équation qui s'integre aiſément, comme on le voit, par le moyen de la formule $dz + bzdt + Tdt = 0$. Cette équation intégrée nous donnera la valeur de y en t. On aura donc les valeurs de x & de y en t.

CLXXIX.

Cas dans lequel on peut résoudre autrement le Problême.

REMARQUE 4. Nous venons de voir dans la Remarque précédente que le Problême se résout très-facilement, lorsque v n'a pas deux valeurs inégales : dans ce même cas on pourroit encore trouver les valeurs de x & de y par des méthodes différentes de celles que nous venons d'employer pour cela.

Soit 1°. $D = 0$ dans l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2 + 4DK}}{2K}$ devient 1°. $v = \frac{-C+L+L-C}{2K}$, ou $\frac{L-C}{K}$; 2°. $v = \frac{0}{2K}$. Donc en supposant dans les formules précédentes $p' = 0$, on aura les valeurs de x & de y.

2°. Si $K = 0$, au lieu de le supposer absolument nul, je le regarde comme infiniment petit, ce qui revient au même. Je reprends l'équation $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \frac{\sqrt{(L-C)^2 + 4DK}}{2K}$, je la mets sous la forme suivante $v = \frac{L-C}{2K} \pm \sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$. Ensuite pour avoir les deux valeurs de v, je prends la racine quarrée de $\sqrt{\frac{LL-2CL+CC}{4K^2} + \frac{D}{K}}$, & je trouve que cette racine est $\frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L} +$ un terme que je puis négliger parce qu'il est infiniment petit par rapport aux autres. On a donc $v = \frac{-C+L}{2K} \pm \left\{\frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L}\right\}$. Prenant l'équation en $+$ j'ai $v = \frac{L-C}{2K} + \frac{C-L}{2K} + \frac{D}{C-L}$, c'est-à-dire,

$v = \frac{D}{C-L}$. La prenant en moins je trouve $v = \frac{L-C}{2K} - \frac{C-L}{2K} - \frac{D}{C-L}$. Or les deux premiers termes de cette valeur étant infinis, je puis négliger le troisieme. J'aurai donc pour seconde valeur de v, $v = \frac{L-C}{K}$.

On aura donc $u = ge^{-Ct}$; $u' = g'e^{-Lt}$; $y = K \left\{\frac{u-u'}{C-L}\right\}$; $x = u - \frac{pu'}{p'} = u + \frac{DKu'}{(C-L)^2}$.

3°. Si les valeurs de p & de p' sont égales, je supposerai $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$ (α est une quantité infiniment petite.) J'ai donc $u = ge^{-(C+K\alpha+Ka)t}$. Or α étant une quantité infiniment petite peut être regardée comme une différentielle. Mais nous avons vu (Art. CLXXIV.) que si on avoit C^{x+dx}, on pouvoit lui donner la forme suivante $C^x + C^x dx$. Donc on aura par la même raison $u = ge^{-(C+Ka)t} - Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On trouvera de même $u' = g'e^{-(C+Ka)t} + Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On aura aussi $y = \frac{u-u'}{2\alpha}$; $x = \frac{au - \alpha u - au' - \alpha u'}{2\alpha}$. Donc en mettant pour u & u' leurs valeurs, & supposant $g = g'$, on a $y = -Kgte^{-(C+Ka)t}$, & $x = -Kgte^{-(C+Ka)t}$.

CLXXX.

COROLLAIRE. Le Problême s'étendra très-facilement à deux équations qui contiendront deux indéterminées x & y multipliées par des constantes & par une fonction quelconque de t, avec leurs différences aussi multipliées par des constantes & par une fonction de t, & de plus un terme τdt, θdt qui ne renferme que des constantes avec t. Car ces cas se rameneront d'eux-mêmes à la formule $dz + bzdt + Tdt = 0$.

CLXXXI.

Application de la méthode au cas où l'on a trois équations.

PROBLEME 2. Intégrer les équations

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)\,dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)\,dt = 0.$$

SOLUTION. Suivant ce que nous avons dit (Art. CLXXII.) je multiplie la seconde de ces équations par un coefficient indéterminé v, & la troisieme par un autre coefficient indéterminé μ. Les trois équations précédentes deviennent alors,

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = 0$$
$$v\,dy + (evx + fvy + gvz)\,dt = 0$$
$$\mu\,dz + (h\mu x + m\mu y + n\mu z)\,dt = 0.$$

Je les ajoute ensemble, ce qui me donne (A) $dx + vdy + \mu dz + \left\{(a + ev + h\mu)\,x + (b + fv + m\mu)\,y + (c + gv + n\mu)\,z\right\} dt = 0$. Je fais enforte à présent que la quantité qui multiplie dt dans cette équation soit un facteur de $x + vy + \mu z$. J'aurai donc en supposant R un coefficient constant, j'aurai $ax + evx + h\mu x + by + fvy + m\mu y + cz + gvz + n\mu z = Rx + Rvy + R\mu z$. Donc en comparant terme à terme les deux membres de cette équation, j'ai $a + ev + h\mu = R$, $b + fv + m\mu = Rv$, $c + gv + n\mu = R\mu$. Donc $a + ev + h\mu = \frac{b + fv + m\mu}{v} = \frac{c + gv + \mu n}{\mu}$. Donc $(a + ev + h\mu)\,v =$

$h\mu)v = b + fv + m\mu$ & $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$. Donc l'équation (A) devient (F) $dx + vdy + \mu dz + dt \times (x + vy + \mu z) \times (a + ev + h\mu) = 0$. Soit à préſent $x + vy + \mu z = u$, donc $dx + vdy + \mu dz = du$, donc l'équation (F) ſe change en la ſuivante $du + (a + ev + h\mu)udt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + ev + h\mu)dt$, ou $lu = -(a + ev + h\mu)t$: Donc en prenant E pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité & g pour la conſtante, on a $lu = lgE^{-(a+ev+h\mu)t}$; ou enfin $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$.

A préſent l'équation $av + evv + h\mu v = b + fv + m\mu$ donne la valeur de μ en v; mettant cette valeur de μ dans l'équation $(a + ev + h\mu)\mu = c + gv + n\mu$, on aura, après avoir effacé ce qui ſe détruit & fait les réductions ordinaires, une équation du troiſieme degré qui donnera trois valeurs de v.

Soient p, p', p'' les trois valeurs de v, & m, m', m'' les trois valeurs correſpondantes de μ. J'aurai au lieu de l'équation $u = gE^{-(a+ev+h\mu)t}$, ces trois autres équations,

$$u = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$u' = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$u'' = g''E^{-(a+ep''+hm'')t};$$

& au lieu de l'équation $x + vy + \mu z = u$, les trois ſuivantes,

$$x + py + mz = gE^{-(a+ep+hm)t}$$
$$x + p'y + m'z = g'E^{-(a+ep'+hm')t}$$
$$x + p''y + m''z = g''E^{-(a+ep''+hm'')t}.$$

De ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z,

& on déterminera les conſtantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorſque $t = 0$ ou une conſtante donnée.

CLXXXII.

REMARQUE. On peut toujours ſuppoſer que les trois valeurs de v ſont inégales. Pour cela il ſuffit d'augmenter un des coefficients a, b, c, &c. d'une quantité α infiniment petite; alors on aura des valeurs de v toutes différentes entre elles, & dans leſquelles entrera la quantité α. Ces valeurs étant ſubſtituées à la place de p, p', p'', on trouvera celles de x, y, z, dans leſquelles n'entre plus α. Pour avoir ces valeurs de v, on ſe ſervira du parallelograme de M. Newton. Au reſte, il eſt indifférent que quelques-unes de ces valeurs ſoient imaginaires, pourvu qu'elles ſoient inégales entre elles.

CLXXXIII.

Ce qu'il faut faire ſi on avoit quatre équations.

COROLLAIRE. Si on a quatre équations, on multipliera auſſi la quatrieme par une nouvelle indéterminée π: Après avoir trouvé l'équation en v, & celle qui donne la valeur de μ en v, on mettra dans cette derniere π au lieu de μ, & au lieu de h, m, n, les coefficients qui leur répondent dans la quatrieme équation, & réciproquement h, m, n au lieu de ces coefficients. Après quoi on réſoudroit le Problême par la Méthode ſemblable à celle de l'Article CLXXXI.

Si on avoit cinq, six, &c. équations, on voit à présent comment il faudroit s'y prendre pour les résoudre.

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

CLXXXIV.

PROBLEME I. ETant données deux quantités différentielles telles que . . . . . . $\alpha dt + v ds$ Premier exemple.

$$v dt + \alpha ds$$

qui sont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de $t+s$; trouver α & v, & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées.

SOLUTION. 1°. J'ajoute ensemble les deux différentielles proposées, ce qui me donnera $(\alpha+v)\, dt + (\alpha+v)\, ds$, qui est encore une différentielle exacte de quelque fonction de $t+s$; on a donc $(\alpha+v).(dt+ds)$. D'où il suit que $\alpha+v$ est égale à une fonction de $t+s$.

2°. Je retranche l'une de l'autre nos deux différentielles, j'ai $(\alpha-v)\,dt-(\alpha-v)\,ds$, ou $(\alpha-v).(dt-ds)$: d'où je conclus que $\alpha-v$ est égale à une fonction de $t-s$.

J'aurai donc $\alpha+v+\alpha-v = \varphi(t+s)+\Delta(t-s)$. Donc $\alpha = \frac{\varphi(t+s)+\Delta(t-s)}{2}$.

J'aurai encore $\alpha+v-\alpha+v = \varphi(t+s)-\Delta(t-s)$;

donc $v = \frac{\varphi(t+s) - \Delta(t-s)}{2}$.

CLXXXV.

Second exemple.

PROBLEME 2. Etant données les deux différentielles exactes . . . . $v dt + \epsilon ds$

$v ds + \epsilon n dt$,

déterminer v & ϵ, & par conséquent l'intégrale.

SOLUTION. Je mets la seconde de nos deux différentielles sous la forme suivante

$$\epsilon\sqrt{n} \times dt\sqrt{n} + v ds.$$

Je multiplie la premiere par $\sqrt{n}$, ce qui ne l'empêche pas d'être une différentielle exacte, elle devient

$$v dt\sqrt{n} + \epsilon ds\sqrt{n}.$$

Maintenant 1°. j'ajoute ensemble ces deux différentielles, j'ai . . . $(dt\sqrt{n} + ds) . (\epsilon\sqrt{n} + v)$

2°. Je les retranche l'une de l'autre, j'aurai

$$(dt\sqrt{n} - ds) . (\epsilon\sqrt{n} - v).$$

De là je conclus que $\epsilon\sqrt{n} + v$ est une fonction de $t\sqrt{n} + s$, & $\epsilon\sqrt{n} - v$ une fonction de $t\sqrt{n} - s$. Donc $\epsilon\sqrt{n} + v + \epsilon\sqrt{n} - v = \varphi(t\sqrt{n} + s) + \Delta(t\sqrt{n} - s)$. Donc $\epsilon = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2\sqrt{n}}$; donc $\epsilon n = \frac{[\varphi(t\sqrt{n}+s) + \Delta(t\sqrt{n}-s)]\sqrt{n}}{2}$.

De même on aura $\epsilon\sqrt{n} + v - \epsilon\sqrt{n} + v = \varphi(t\sqrt{n} + s) - \Delta(t\sqrt{n} - s)$. Donc $v = \frac{\varphi(t\sqrt{n}+s) - \Delta(t\sqrt{n}-s)}{2}$.

CLXXXVI.

Troisieme exemple plus compliqué que les deux précédens.

PROBLEME 3. Soient données deux quantités

$$\alpha ds + \varepsilon dt$$

$\rho \alpha dt + v \varepsilon ds + dt \Delta(t,s) + ds \Gamma(t,s)$ dans lesquelles ρ & v désignent des constantes données, $\Delta(t,s)$, $\Gamma(t,s)$ des fonctions quelconques données de t & de s. De plus ces deux quantités sont l'une & l'autre des différentielles exactes de quelque fonction de t & de s; déterminer α & ε.

SOLUTION. Je divise par la constante ρ tous les termes de la seconde différentielle, le Problême se réduira à opérer sur les deux quantités

$$\alpha ds + \varepsilon dt$$

& . . . . . $\alpha ds + \frac{v \varepsilon ds}{\rho} + \frac{dt \Delta(t,s)}{\rho} + \frac{ds \Gamma(t,s)}{\rho}$,

de maniere qu'elles soient l'une & l'autre une differentielle complete.

Soit $\frac{v}{\rho} = n$, je divise la seconde différentielle par $\sqrt{n}$, & j'écris . . $\varepsilon\sqrt{n} \cdot \frac{dt}{\sqrt{n}} + \alpha ds$

$$\frac{\alpha dt}{\sqrt{n}} + \varepsilon\sqrt{n} \cdot ds + \frac{dt \Delta(t,s)}{\rho\sqrt{n}} + \frac{ds \Gamma(t,s)}{\rho\sqrt{n}}.$$

Or chacune de ces deux différentielles devant être complete, il faut que leur somme & leurs différences soient aussi chacune une differentielle complete.

On aura donc 1°. en les ajoutant ensemble $(\varepsilon\sqrt{n} + \alpha)$, $\left\{\frac{dt}{\sqrt{n}} + ds\right\} + \frac{dt \Delta(t,s)}{\rho\sqrt{n}} + \frac{ds \Gamma(t,s)}{\rho\sqrt{n}}$.

Soit . . . . $\varepsilon\sqrt{n} + \alpha = m$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} + s = u,$$

en substituant ces valeurs & nommant $\psi(u,s)$ & $\Pi(u,s)$

les fonctions de u & de s qui viennent de la substitution de $(u-s)\sqrt{n}$ au lieu de t dans $\Delta(t,s)$ & $\Gamma(t,s)$, on aura la transformée suivante

$$m du + du\psi(u,s) + ds\Pi(u,s)$$

qui doit être une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{dm}{ds} + \frac{d\psi(u,s)}{ds} = \frac{d\Pi(u,s)}{du}$, s variant seul dans le premier membre & u seul dans le second. Donc $dm = -d\psi(u,s) + \frac{ds\,d\Pi(u,s)}{du}$. Donc en prenant s pour variable & u pour constant, on a $m = -\psi(u,s) + \varphi u + \int ds \frac{d\Pi(u,s)}{du}$.

2°. Retranchons maintenant la seconde de nos deux différentielles de la premiere, nous aurons $(\epsilon\sqrt{n}-\alpha)$. $\left\{\frac{dt}{\sqrt{n}} - ds\right\} - \frac{dt\Delta t,s}{\rho\sqrt{n}} - \frac{ds\Gamma t,s}{\rho\sqrt{n}}$ qui doit encore être une différentielle complete.

Soit . . . . $\epsilon\sqrt{n} - \alpha = \mu$

$$\frac{t}{\sqrt{n}} - s = y,$$

on aura $\mu dy + dy\,\Xi(y,s) + ds\,F(y,s)$, transformée qui est une différentielle exacte. Donc on aura par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi(y,s)}{ds} = \frac{dF(y,s)}{dy}$; & en supposant s variable & y constant $\mu = -\Xi(y,s) + \Sigma y + \int ds\,\frac{dF(y,s)}{dy}$.

Or $\mu = \epsilon\sqrt{n} - \alpha$, donc $\epsilon\sqrt{n} = \alpha + \mu$. De même $m = \alpha + \epsilon\sqrt{n}$; donc $\epsilon\sqrt{n} = m - \alpha$. Donc $\alpha + \mu = m - \alpha$. Donc $\alpha = \frac{m-\mu}{2}$. Maintenant $\alpha = \epsilon\sqrt{n} - \mu$. Donc $\epsilon = \frac{m+\mu}{2\sqrt{n}}$. On aura par conséquent les valeurs de α & ϵ, puisqu'on a celles de m & de μ.

CLXXXVII.

REMARQUE. Il n'y auroit aucune difficulté pour l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ seroit imaginaire. Car si α & ϵ doivent être réelles, nous avons appris dans l'Introduction à en faire évanouir les imaginaires.

CLXXXVIII.

PROBLEME 4. Soient encore les deux différentielles plus générales que les précédentes Quatrieme exemple qui renferme les trois autres.

$$\alpha ds + \epsilon du$$

&

$$\rho\alpha du + p\epsilon du + \gamma\epsilon ds + m\alpha ds + dt\Delta(u,s) + ds\Gamma(u,s)$$

qui doivent être l'une & l'autre une différentielle exacte, trouver α & ϵ.

SOLUTION. Soit . . . . $ku + rs = gy$

& . . . . $fu + \delta s = ht$,

k, r, g, f, δ, h sont des constantes indéterminées; on aura . . . . $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$

& . . . . $u = \frac{hrt - \delta gy}{fr - \delta k}$;

ou en changeant les signes $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$.

On aura par conséquent $ds = \frac{fgdy - hkdt}{fr - \delta k}$; $du = \frac{\delta gdy - hrdt}{\delta k - fr}$.

Soit . . . . $\frac{fg}{fr - \delta k} = \lambda$

$$\frac{-hk}{fr - \delta k} = \varphi$$

$$\frac{\delta g}{\delta k - fr} = \mu$$

$$\frac{-hr}{\delta k - fr} = \upsilon$$

on aura . . . . $ds = \lambda dy + \varphi dt$,
& . . . . $du = \mu dy + v dt$.

Je substitue ces valeurs dans les deux différentielles proposées. La premiere devient

$$\alpha\lambda dy + \epsilon\mu dy + \alpha\varphi dt + \epsilon v dt;$$

& la seconde multipliée par un coefficient indéterminé n sera $\{(\rho\alpha + p\epsilon)\mu + (\gamma\epsilon + m\alpha)\lambda\} n dy + n dy \Delta(y, t) + \{(\rho\alpha + p\epsilon) v + (\gamma\epsilon + m\alpha)\varphi\} n dt + n dt \psi y, t$.

1°. J'ajoute ensemble ces deux différentielles, j'aurai $(\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n) dy + n dy \Delta y, t + (\alpha\varphi + \epsilon v + \rho\alpha v n + p\epsilon v n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n) dt + n dt \psi y, t$. Il est donc visible qu'on pourra trouver les valeurs de α & ϵ, si dans cette équation $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; & (en prenant une autre valeur de n) $\alpha\varphi + \epsilon v + \rho\alpha v n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n + p\epsilon v n = 0$.

Mais pour que l'équation $\alpha.(\lambda + \rho\mu n + m\lambda n) + \epsilon.(\mu + p\mu n + \gamma\lambda n) = 0$ ait lieu, quelles que soient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\lambda + \rho\mu n + m\lambda n = 0$, & qu'aussi $\mu + \mu p n + \gamma\lambda n = 0$. Ces deux équations nous donnent $(1 + mn)\lambda = -\rho\mu n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1 + mn}$; & $(1 + pn)\mu = -\gamma\lambda n$; d'où l'on tire $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Nous tirerons de cette équation une valeur de n telle que $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$.

De même pour que $\alpha(\varphi + \rho v n + m\varphi n) + \epsilon(v + p v n + \gamma\varphi n) = 0$, quelles que soient les valeurs de α & de ϵ, il faut que $\varphi + \rho v n + m\varphi n = 0$, & $v + p v n + \gamma\varphi n = 0$. De ces

ces équations on tire $(1+mn)\varphi = -\rho v n$; ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{-\rho n}{1+mn}$; & encore $(1+pn)v = -\gamma\varphi n$, ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; & par conséquent pour trouver n on aura la même équation qu'auparavant.

Je la résous cette équation $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; j'aurai $n^2 - \frac{(m+p)n}{\gamma\rho - mp} = \frac{1}{\gamma\rho - mp}$. Donc $n - \frac{(m+p)}{2.(\gamma\rho - mp)} = \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma\rho - mp} + \frac{(m+p^2)}{4.(\gamma\rho - mp)^2}}$. Donc enfin $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)} \pm \frac{\sqrt{[4\gamma\rho + (m-p)^2]}}{2(\gamma\rho - mp)}$; & ce sont-là les deux valeurs de n.

Je multiplie la seconde différentielle transformée, 1°. par une des deux valeurs de n, ensuite par l'autre; j'aurai les deux équations suivantes : la premiere $(\rho\alpha\mu + p\beta\mu + \gamma\beta\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\,\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\beta v + \gamma\beta\varphi + m\alpha\varphi) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt\,\psi y, t$.

La seconde sera $(\rho\alpha\mu + p\beta\mu + \gamma\beta\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\,\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\beta v + \gamma\beta\varphi + m\alpha\varphi) . \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho + (m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt\,\psi y, t$.

A ces deux différentielles j'ajoute la premiere différentielle transformée $(\alpha\lambda + \beta\mu)dy + (\alpha\varphi + \beta v)dt$, à laquelle je donne la forme suivante $\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu} + \beta\right)\mu dy + \left(\frac{\alpha\varphi}{v} + \beta\right) v dt$, j'aurai 1°. $\left\{\rho\alpha + p\beta + \frac{\lambda}{\mu}(\gamma\beta + \alpha m)\right)$

$\times \left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\,\mu dy+\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dy\,\Delta y, t+\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+\frac{\phi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\phi}{v}+\epsilon\Big\}\,v dt+\left(\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dt\,\psi y, t.$

2°. On aura $\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+\frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\lambda}{\mu}+\epsilon\Big\}\,\mu dy+\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dy\,\Delta y, t+\Big\{\Big(\rho\alpha+p\epsilon+\frac{\phi}{v}(\gamma\epsilon+\alpha m)\Big)\times\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)+\frac{\alpha\phi}{v}+\epsilon\Big\}\,v dt+\left(\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho-mp)}\right)dt\,\psi y, t.$

Dans ces deux différentielles je mets au lieu de $\frac{\lambda}{\mu}$ sa valeur $\frac{-\rho n}{1+mn}$, & au lieu de $\frac{\phi}{v}$ sa valeur $\frac{-\rho n}{1+mn}$, en observant d'y prendre deux valeurs différentes de n ; & alors j'aurai deux différentielles intégrables par la méthode du Problême 3.

CLXXXIX.

Examen de quelques cas particuliers.

SCHOLIE I. Il ne peut y avoir de difficulté que dans deux cas. L'un seroit celui dans lequel l'équation $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$ ou bien $(\gamma\rho - mp)\,n^2 - (m+p)\,n - 1 = 0$ ne monteroit pas au second degré. Le second seroit celui dans lequel cette même équation ne pourroit se résoudre. Le premier de ces deux cas arrivera, si $\gamma\rho = mp$: car alors $(\gamma\rho - mp)\,n^2 = 0$, & l'équation n'est plus que du premier degré, & par conséquent n n'a qu'une seule valeur, Le second cas arrivera si $\gamma\rho = mp$, & si de plus $m = -p$; car alors on auroit $-1 = 0$, ce qui est impossible. Examinons ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Si $\gamma\rho = mp$, je fais $p = \rho K$, j'aurai $\gamma\rho = mK\rho$; donc $\gamma = Km$. Les deux différentielles seront donc la premiere

$$\alpha ds + \epsilon du,$$

& la seconde

$$\rho\alpha du + \rho K\epsilon du + K\epsilon m ds + m\alpha ds$$
$$+ dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s,$$

ou bien,

$$(\rho du + m ds).(\alpha + K\epsilon) + du\Delta u, s + ds\Gamma u, s.$$

Soit maintenant . . . . $\rho u + ms = t$, on aura $\rho du + m ds = dt$, & soit $\alpha + K\epsilon = \mu$, la différentielle précédente deviendra celle-ci $\mu dt + ds\Psi u, s + dt\Xi u, s$ & sera une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi u, s}{ds} = \frac{d\Psi u, s}{dt}$. Donc $d\mu = -d\Xi u, s + \frac{ds\, d\Psi u, s}{dt}$. Donc enfin $\mu = -\Xi u, s + \varphi t + \int \frac{ds\, d\Psi u, s}{dt}$.

Pour déterminer α je fais les mêmes transformations sur la différentielle $\alpha ds + \epsilon du$. Ces transformations nous donnent $du = \frac{dt - m ds}{\rho}$, $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$. Donc la premiere différentielle transformée sera $\alpha ds + \left(\frac{\mu - \alpha}{K}\right).\left(\frac{dt - m ds}{\rho}\right)$; ou bien $\left(ds + \frac{m ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho}\right)\alpha + \frac{\mu dt}{K\rho} - \frac{m\mu ds}{K\rho}$. Soit $\left(1 + \frac{m}{K\rho}\right)s - \frac{t}{K\rho} = y$, on aura $ds + \frac{m ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho} = dy$; & aussi $\frac{\mu dt}{K\rho} = \mu ds + \frac{\mu m ds}{K\rho} - \mu dy$. Donc la différentielle précédente ſe change en celle-ci $(\alpha - \mu)\,dy + \mu\,ds$. Donc comme elle eſt une différentielle complete, on aura $\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\mu}{ds} = \frac{d\mu}{dy}$. Donc enfin $\alpha = \mu + \int \frac{ds\,d\mu}{dy}$. Donc auſſi on aura la valeur de ϵ, puiſque $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$.

2°. Si l'on a $p = -m$ & $\rho\gamma = mp$, on fera uſage de la méthode que nous venons d'expoſer pour le cas où l'on a ſeulement $\rho\gamma = mp$. Ainſi ce ſecond cas ne préſente aucune nouvelle difficulté.

CXC.

SCHOLIE 2. On pourroit encore être embarraſſé dans le cas où n auroit ſes deux racines égales. Examinons ce qu'il faut faire dans ce cas, lequel aura lieu ſi $-4\gamma\rho = (m-p)^2$, comme on le voit ſans peine. Dans ce cas on ſuppoſera ſeulement $\alpha\lambda + \epsilon\mu + \rho\alpha\mu n + p\epsilon\mu n + \gamma\epsilon\lambda n + m\alpha\lambda n = 0$; ce qui nous donne, en faiſant le même raiſonnement que dans l'Article CLXXXVIII. $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-\rho n}{1 + mn}$, & $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$. Donc on aura de même $\frac{-\rho n}{1 + mn} = \frac{1 + pn}{-\gamma n}$; donc à cauſe de l'hypotheſe préſente $n = \frac{-m + p}{2(\gamma\rho - mp)}$. Je ſubſtitue cette valeur de n dans le coefficient de dt; c'eſt-à-dire, dans $\alpha\varphi + \epsilon v + \rho\alpha v n + p\epsilon v n + \gamma\epsilon\varphi n + m\alpha\varphi n$; & la ſeconde transformée ſera en prenant pour φ & pour v tout ce qu'on voudra, $n\,dy\,\Delta y, t + \left\{\alpha\left(\varphi + (\rho v + m\varphi).\left(\frac{-m + p}{2(\gamma\rho - mp)}\right)\right) + \epsilon\left(v + (pv + \gamma\varphi).\left(\frac{m + p}{2.(\gamma\rho - mp)}\right)\right)\right\} dt + n\,dt \downarrow y, t$; & en ſuppoſant $\varphi + (\rho v + m\varphi) \times \left(\frac{m + p}{2.(\gamma\rho - mp)}\right) = M$, & $v + (pv + \gamma\varphi) \times \frac{m + p}{2.(\gamma\rho - mp)}$

$= N$, on aura la différentielle suivante,

$$(M\alpha + N\varepsilon)\,dt + n\,dy\,\Delta y,t + n\,dt\,\psi y,t,$$

dans laquelle M & N repréſentent des conſtantes données.

Cette différentielle étant par l'hypotheſe une différentielle complete, on aura $\frac{Md\alpha + Nd\varepsilon}{dy} + \frac{d\,(n\psi y,t)}{dy} = \frac{d\,(n\Delta y,t)}{dt}$. Donc $Md\alpha + Nd\varepsilon = -d\,(n\psi y,t) + \frac{dy\,d\,(n\Delta y,t)}{dt}$. On aura donc la valeur de $M\alpha + N\varepsilon$ en y & en t, ou ce qui revient au même en s & en u, puiſque, comme on l'a vu (Art. CLXXXVIII.) $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$, & $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$. Nous pourrons donc ſuppoſer

$$\alpha = \Xi u,s + K\varepsilon,$$

K étant une conſtante connue. Subſtituant pour α cette valeur dans la différentielle $\alpha ds + \varepsilon du$ qui par la ſuppoſition eſt une différentielle exacte, on aura $\varepsilon\,(Kds + du) + ds\,\Xi u,s$. Donc en ſuppoſant $Ks + u = r$, on aura la transformée ſuivante $\varepsilon dr + ds\,\Xi s,r$ qui doit encore être une différentielle complete : on trouvera donc facilement la valeur de ε en s & r, ou ce qui eſt la même choſe en s & en u.

CXCI.

SCHOLIE 3. Il y a encore un cas dans lequel la premiere méthode ne peut réuſſir ; c'eſt lorſque $\rho = 0$. Mais alors l'intégration n'en ſera que plus facile. En effet, je donne à la ſeconde différentielle propoſée $\rho\alpha du + \varepsilon p\,du + \gamma\varepsilon ds + m\alpha ds + dt\,\Delta u,s + ds\,\Gamma u,s$ la forme ſuivante $m\alpha ds + m\varepsilon du + p\varepsilon du - m\varepsilon du + \gamma\varepsilon ds + dt\,\Delta u,s +$

$ds\Gamma u, s$. Or par l'hypothese $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle exacte; donc la partie reſtante $(p\epsilon - m\epsilon)\, du + \gamma\epsilon\, ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ doit encore être complete. Je ſuppoſe $(p-m)\, u + \gamma s = t$, j'aurai la transformée ſuivante . . . . . $\epsilon dt + d\psi s, t + ds\Delta t, s$, qui ſera une différentielle complete. Donc en ſuivant les méthodes précédentes on déterminera facilement ϵ & par conſéquent α.

Si γ étoit $= 0$, alors on auroit pour ſeconde différentielle $\rho\alpha du + p\epsilon du + m\alpha ds + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ à laquelle on donneroit la forme ſuivante $p\alpha ds + p\epsilon du + (m\alpha - p\alpha)\, ds + \rho\alpha du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$. Or par l'hypothese $\alpha ds + \epsilon du$ eſt une différentielle complete; donc la partie reſtante $(m\alpha - p\alpha)\, ds + \rho\alpha du + dt\Delta u, s + ds\Gamma u, s$ en eſt auſſi une. Suppoſant $(m-p)\, s + \rho u = t$, on déterminera α & enſuite ϵ par la même voie par laquelle on a trouvé ϵ & enſuite α dans l'article précédent.

Nous allons maintenant expoſer les méthodes qui ſont connues pour l'intégration des différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des Différentielles à plusieurs variables du second ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CXCII.

LES différences secondes, troisiemes, quatriemes, &c. s'expriment de deux façons différentes, 1°. de la façon suivante ddx, $dddx$, $ddddx$, &c. en mettant l'un après l'autre un nombre de d égal au degré de la différence; ou bien 2°. en mettant au d un exposant qui contienne un nombre d'unités égal au degré de la différence, comme d^2x, d^3x, d^4x & en général d^nx. Notions préliminaires.

Nous réduirons ici les différentielles du second ordre à celles du premier, dont l'intégration nous a occupés jusqu'à présent; nous réduirons de même les différentielles du troisieme ordre à celles du second, & ainsi de suite.

CXCIII.

Avant d'expliquer les regles qu'il faut suivre dans l'intégration des équations à plusieurs variables qui contiennent des secondes, ou des troisiemes, ou des quatriemes différences, il est bon de se rappeller leur formation.

La différence de ydx, en regardant y & dx comme variables, est $dydx+yddx$. Celle de $dydx+yddx$ est $dyddx+dxddy+yd^3x+d^2xdy$, & ainsi des troisiemes, quatriemes, &c. différences.

De là il est facile de tirer cette proposition. L'intégrale de $dydx+yd^2x$ est ydx. Celle de $dyd^2x+dxd^2y+yd^3x+d^2xdy$ est $dydx+yddx$.

La différence de $\frac{dx}{dy}$ est $\frac{dyddx-dxddy}{dy^2}$; & celle de $\frac{ydx}{xdy}$ est $\frac{xydyddx+xdxdy^2-xydxd^2y-ydydx^2}{x^2dy^2}$. Donc l'intégrale de $\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dy^2}$ est $\frac{dx}{dy}$; & ainsi des autres.

CXCIV.

REMARQUE I. Lorsqu'on passe des premieres différences aux différences secondes, troisiemes, quatriemes, &c. on regarde quelquefois comme constante une différentielle du premier, du second, du troisieme ordre. Ainsi, par exemple, en différentiant $x^m dxdy$, je puis regarder dx comme constante, & alors la différentielle de la proposée sera $mx^{m-1}dx^2dy+x^m dxddy$. De là il suit évidemment que quand dans cette même hypothese il s'agira d'intégrer $mx^{m-1}dx^2dy+x^m dxddy$, il faudra traiter dx comme une constante ordinaire.

CXCV.

REMARQUE 2. On doit de plus se souvenir que de même que dans la réduction des différentielles du premier ordre

ordre aux grandeurs finies, on ajoute une ſonſtante pour completer l'intégrale, il en faut auſſi ajouter une dans la réduction des ſecondes différences aux premieres, des troiſiemes aux ſecondes, &c. Il ſuit même de la Remarque précédente que la conſtante qu'il faudra ajouter à l'intégrale, ſera une différentielle du premier ordre, lorſque la différentielle propoſée ſera du ſecond; que cette conſtante ſera une différentielle du ſecond ordre, lorſque la propoſée ſera du troiſieme; & ainſi de ſuite. Après ces notions préliminaires entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du ſecond ordre, dans le cas où l'on ſait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitee comme conſtante dans le paſſage des premieres différences aux ſecondes.

CXCVI.

SOit l'équation $\frac{by^m dydu}{c^m} = 2ayddx + adxdy$, dans laquelle $du =$ (Art. XCI. Prem. Partie.) $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt l'élément de la rectification de la courbe, & eſt ſuppoſée conſtante. J'obſerve que le ſecond membre de cette équation ſeroit intégrable, s'il étoit diviſé par $2\sqrt{y}$, ce que je puis trouver par le Théorême fondamental de la Premier exemple.

premiere Section, en mettant z & dz au lieu de dx & de ddx; j'observe aussi que le premier membre du étant constante, sera toujours intégrable, quelque fonction de y qui le divise ou le multiplie. Je divise donc toute l'équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^m dy du}{2c^m \sqrt{y}} = ay^{\frac{1}{2}} ddx + \frac{adxdy}{2\sqrt{y}}$, dont l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{(m+\frac{1}{2}) \cdot 2c^m} = ady^{\frac{1}{2}} dx + gdu$. gdu est la constante que j'ajoute pour rendre l'intégrale complete.

CXCVII.

Second exemple.

Soit l'équation $Y = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, dans laquelle ydx qui exprime l'élément de l'aire de la courbe, est supposée constante, Y représente une fonction quelconque de y. Pour intégrer cette équation, je la multiplie par $2dy$, ce qui me donne $2Ydy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{y^2 dx^2}$. Or l'intégrale de cette équation ydx étant constante, est $\int 2Ydy = -\frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} \pm nyydx^2$.

CXCVIII.

Troisieme exemple.

Si la proposée étoit $Y = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, & que dx fût constante, Y représentant une fonction quelconque de y. Puisque $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $du^2 = dx^2 + dy^2$; & différentiant $duddu = dyddy$. Substituant cette valeur de ddy dans l'équation, & la multipliant par $2y$; on a $2Ydy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4 dx^2}$, équation dont l'intégrale est $\int 2Ydy = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm ndx^2$.

CXCIX.

On pourroit encore intégrer cette équation d'une autre maniere. Je mets pour du sa valeur $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ce qui me donne $Y = \frac{dx^2+dy^2-yddy}{\quad}$, & multipliant par $2ydy$, on a $2Ydy = \frac{2ydydx^2+2ydy^3-2y^2dyddy}{y^4dx^2}$. Or ...onte, on voit facilement que l'intégrale de cette équation est $\int 2Ydy = -\frac{dx^2-dy^2}{yydx^2} + ndx^2$; qui est absolument la même que la précédente, puisque ... $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

C C.

Quatrieme exemple.

Qu'on nous demande maintenant l'intégrale de cette équation $Y = \frac{dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu}{ydxdydt^2}$, dans laquelle du est l'élément de l'arc de la courbe, t est une fonction de x & de y; aucune différentielle n'ayant été prise pour constante. Je multiplie toute l'équation par $\frac{2}{y^3dx^3}$, ce qui me donne $\frac{2Yydxdydt^2}{y^3dx^3} = \frac{2dxdydu^2+2ydu^2ddx-2ydxduddu}{y^3dx^3}$: réduisant & multipliant le second membre de cette équation haut & bas par ydx, on aura $\frac{2Ydydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydydx^2du^2 + 2y^2du^2dxd^2x - 2y^2dx^2dud^2u}{y^4dx^4}$, dont l'intégrale est $\int\frac{2Ydydt^2}{y^2dx^2} = \frac{-du^2}{y^2dx^2} \pm C$.

C C I.

Il arrive souvent que dans une équation telle différentielle est constante qui rend l'intégration très-difficile. Il ſeroit alors fort utile de transformer l'équation en une autre dans laquelle cette différentielle fût variable. C'eſt ce que nous apprend la méthode ſuivante ; par ſon moyen on change l'équation propoſée en une autre qui n'a aucune différentielle conſtante. C'eſt ce que M. Bernoulli appelle completer une équation différentielle. Au reſte, la méthode que nous donnons ici eſt plus ſimple & plus claire que celle qu'emploie ce grand Géometre.

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CCII.

Expoſition de cette méthode appliquée à des différentielles du ſecond ordre.

PROBLEME. ÉTant donnée une équation telle que $A\,ddy + B\,dx^2 + C\,dy^2 + E\,dx\,dy = 0$ dans laquelle dx eſt conſtant, la transformer en une autre dans laquelle dx ſoit variable.

Figure 8.

SOLUTION. Soit AC ou $BK = dx$, $KF = dy$: dx étant conſtant, on aura CD ou $FG = dx$, $GI = dy$, $IH = ddy$. IH ſera donc le ddy, dans le cas où dx ne varie point ; c'eſt par conſéquent le ddy de l'équation propoſée. Faiſons maintenant varier dx, & ſoit DE ou $GL = ddx$, on voit clairement que $LM = dy + ddy$; Il s'agit donc de trouver la valeur du premier ddy, c'eſt-à-dire, de IH en ddx & ddy, ce qui fera disparoître ce premier ddy, & mettra dans l'équation le [illegible] Or les triangles semblables FLM, FGH nous donnent l'analogie suivante $LM : GH :: FL : FG$, c'est-à-dire $dy + d'd'y : dy + ddy :: dx + ddx : dx$. Donc $dy\,d$ [illegible] le terme $ddy\,ddx$ qui est nul par rapport aux autres : j'aurai $ddy = \frac{dx\,d'd'y - dy\,ddx}{dx}$. C'est la valeur qu'il faut substituer dans l'équation proposée à la place de ddy. Après cette substitution on aura une équation complete, c'est-à-dire, qui ne contiendra plus de différentielle constante.

CCIII.

Autre maniere de résoudre ce Problême.

On peut encore résoudre ce Problême d'une autre maniere. Reprenons la proposée $Addy + Bdx^2 + Cdy^2 + Edxdy = 0$, je la mets sous la forme suivante $\frac{Addy}{dx} + Bdx + \frac{Cdy^2}{dx} + Edy = 0$, ou bien $Ad(\frac{dy}{dx}) + \ldots$ &c. $= 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{dy}{dx}$ est une quantité finie. Mais $d.(\frac{dy}{dx}) = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$. C'est la valeur qu'il faudra substituer à $\frac{ddy}{dx}$ dans l'équation précédente. Donc la valeur qu'il faut substituer à ddy sera $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx}$, la même que nous avons déja trouvée.

CCIV.

Application de la méthode aux différentielles du [illegible]

Soit maintenant une équ[illegible] du troisieme ordre $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 + Edy^3 + Fdydx^2$ [illegible] $+ Ddyddy$ [illegible] veut completer. Je divise cette équation par dx^2, & j'ai $\frac{Ad^3y}{dx^2} + \ldots$ &c. $= 0$, ou $Ad.(\frac{ddy}{dx^2}) + \ldots$ &c. $= 0$, réduite au cas des équations du second ordre. Pour trouver maintenant la valeur qu'il faudra substituer au lieu de d^3y, je mets l'équation sous cette forme $\frac{Add(\frac{dy}{dx})}{dx}$ $+ \ldots$ &c. $= 0$. Soit $p = \frac{dy}{dx}$, $dp = d.(\frac{dy}{dx})$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d.(\frac{dy}{dx})}{dx}$, on aura $d.(\frac{dp}{dx}) = \frac{dd.(\frac{dy}{dx})}{dx}$. Mais $ddp = $ (Art. CCIII.) $ddp - \frac{dpddx}{dx} = dd.(\frac{dy}{dx}) - \frac{ddx}{dx}$. $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^3}$. Donc $\frac{ddp}{dx}$, ou $\frac{dd(\frac{dy}{dx})}{dx}$, ou $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^4}$.

Donc enfin la valeur à substituer dans l'équation pour d^3y sera $\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dydxd^3x}{dx^2}$.

CCV.

On trouveroit de même pour les équations du quatrieme, du cinquieme, &c. ordre, les valeurs qu'il y faudroit substituer à la place de d^4y, d^5y, &c. pour rendre ces équations completes.

CCVI.

SCHOLIE. Mais, demandera-t-on, quel avantage retirerons-nous de completer ici l'équation proposée? n'est-ce pas au contraire en rendre l'intégration plus difficile? Cet avantage est très-réel : après avoir rendu l'équation complete, nous serons les maîtres de traiter comme constante la différentielle qui facilitera le plus la réduction aux premieres différences. Quelques exemples vont nous en convaincre.

En quoi consiste l'utilité de cette méthode.

CCVII.

Soit proposée d'intégrer l'équation $dx^2 dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$ dans laquelle dx est constant, & où l'on voudroit que dy le fût. Je rends d'abord l'équation complete, & pour cela au lieu de ddy je mets sa valeur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$; cette substitution me donne $dx^2 dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, équation dans laquelle aucune différentielle n'est constante. Je suppose à présent que dy est constante; j'aurai donc $ddy = 0$; donc la proposée devient $dx^2 - dy^2 + addx + xddx = 0$, dont l'intégrale est $xdx + adx - ydy = Cdy$.

Son application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

CCVIII.

Qu'on propose maintenant l'équation suivante, $\frac{xdy^2 + xyddy + ydydx}{ydy} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$, dans laquelle on a traité comme constante ydx, & qu'on veut transformer en une autre dans laquelle ydx soit variable & xdy

Second exemple plus compliqué que le premier.

conſtante; puiſque ydx eſt conſtante, on aura $ddy = d(\frac{dy}{ydx}) \times ydx$: c'eſt-à-dire $ddy = \frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$. Je ſubſtitue pour ddy cette valeur dans l'équation propoſée, elle devient $\frac{xdy}{y} + dx + \frac{xydxddy}{ydydx} - \frac{xdxdy^2 - xydyddx}{ydydx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$; équation dans laquelle aucune différentielle n'eſt conſtante. Je prends maintenant pour conſtante xdy; cette ſuppoſition me donne $xddy + dydx = 0$, ou bien $\frac{dxdy}{x} = -ddy$. Je ſubſtitue dans la transformée pour ddy cette valeur, & je trouve $\frac{xdy}{y} + dx - dx \frac{xdy}{y} - \frac{xddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aa + xx}$. Donc en réduiſant on a $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$. J'integre, & j'ai $-ldx + lxdy$, ou $l\frac{xdy}{dx} = l(\frac{aa + xx}{x})$. Donc $\frac{xdy}{dx} = \frac{aa + xx}{x}$, ou bien $xxdy = aadx + xxdx$; ou enfin $dy = \frac{aadx}{xx} + dx$. Donc $y + \frac{aa}{x} - x + C = 0$.

CCIX.

Troiſieme exemple. Soit enfin propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dy^2 + dx^2}{x}$, dans laquelle ydx eſt conſtante. Pour completer cette équation, je mets au lieu de ddy ſa valeur trouvée plus haut $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, & j'aurai la transformée ſuivante $\frac{-dxddy + dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$ qui eſt complete. Suppoſons à préſent que dy eſt conſtant, nous aurons $ddy = 0$, donc l'équation à intégrer eſt $xddx = dx^2 + dy^2$.

CCX.

Maintenant que nous ſommes les maîtres de ſuppoſer toujours

toujours que dans l'équation aucune différentielle n'eſt conſtante, il eſt à propos d'examiner ſi on ne pourroit pas au moins dans certains cas déterminer quelle eſt la différentielle qui priſe pour conſtante, rendra l'équation plus facile à intégrer.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer, dans quelques cas, la différentielle qui ſuppoſée conſtante facilitera le plus l'intégration.

CCXI.

ON ne peut pas donner de regle générale pour reconnoître dans tous les cas quelle eſt la fluxion qu'on doit regarder comme conſtante, afin que l'intégration en devienne plus facile; on peut cependant ſe guider quelquefois par l'obſervation ſuivante. Je cherche ſi dans la propoſée il y a deux, trois, &c. termes qui multipliés ou diviſés par un facteur commun puiſſent s'intégrer. J'en prends l'intégrale, & c'eſt celle que je ſuppoſe conſtante.

CCXII.

Son application à quelques exemples.

Premier exemple.

Soit, par exemple, propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $X = \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$, dans laquelle X repréſente une fonction quelconque de x. J'obſerve que dans cette équation les deux termes $dx^2 dy + xdxddy$ divisés par dx, donnent $dxdy + xddy$, dont l'intégrale est xdy. Je vois encore que $dx^2 dy - xdyddx$ divisés par $-xxdy$, donnent $\frac{-dx^2 + xddx}{xx}$; différentielle dont l'intégrale est $\frac{dx}{x}$. Je puis donc également supposer pour constantes xdy & $\frac{dx}{x}$. Ces deux suppositions détruiront également deux termes.

Soit 1°. supposée xdy égale à une constante c, on aura $xddy + dydx = 0$, & multipliant par dx, $xdxddy + dydx^2 = 0$; ce qui réduit la proposée à l'équation suivante $X = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$. Mais $xddy + dxdy = 0$ donne $dy = \frac{-xddy}{dx}$: donc en substituant pour dy cette valeur, on aura $X = \frac{-xdy^2 ddy}{2x^3 dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3 dy^3}$, c'est-à-dire, $X = \frac{-xdy^2 ddy - xdydxddx}{2x^3 dxdy^3}$, ou $X = \frac{-dy^2 ddy - dydxddx}{2x^2 dxdy^3}$. Mais $xdy = c$: donc $dy = \frac{c}{x}$. Donc $X = \frac{-dyddy - dxddx}{2c^2 dx}$, ou $Xdx = \frac{-dyddy - dxddx}{2cc}$, & en intégrant on a $\int Xdx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n$. Donc enfin $\int Xdx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4x^2 dy^2} \pm n$.

CCXIII.

REMARQUE. Quand on est arrivé à l'équation $X = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$, on peut abreger le calcul en multipliant l'équation par dx; ce qui donne $Xdx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dxddx}{2x^2 dy^2}$, dont l'intégrale est ($xdy$ étant constante) $\int Xdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} \pm n$, qui est la même que la précédente.

CCXIV.

2°. Prenons à préſent pour conſtante $\frac{dx}{x}$; cette ſuppoſition nous donnera $\frac{xddx - dx^2}{xx} = 0$, & en multipliant par $-xxdy$, on a $-xdyddx + dx^2dy = 0$, équation qui fait évanouir le ſecond & le troiſieme terme de la propoſée. Elle devient donc $X = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3dy^3}$; je la multiplie par dx, ce qui me donne $Xdx = \frac{dxdy^3 + xdx^2ddy}{2x^3dy^3}$. L'intégrale de cette équation eſt, à cauſe de $\frac{dx}{x}$ ou $\frac{dx^2}{x^2}$ qui eſt conſtante, $\int Xdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2} \pm C$; ainſi que nous l'avons trouvé ci-deſſus.

CCXV.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $xy \times (dxddy - dyddx) = ydydx^2 - yydYdy^2 - xdxdy^2$, dans laquelle Y repréſente une fonction quelconque de y.

Je remarque que dans cette équation il y a trois termes ſavoir $yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$ qui diviſés par $yydy$ forment une différentielle complete, $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$, dont l'intégrale eſt $\frac{xdx}{y}$. Je prends donc pour conſtante $\frac{xdx}{y}$; ce qui me donne en différentiant $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = 0$. Donc la propoſée ſe réduit à $xydxddy + yydYdy^2 = 0$, c'eſt-à-dire, $dY = -\frac{xdxddy}{ydy^2}$, équation dont l'intégrale eſt $Y = \frac{xdx}{ydy} \pm C$; ce qui eſt évident, $\frac{xdx}{y}$ étant conſtante.

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré dans lesquelles l'une des indéterminées finies ne se trouve à aucun terme.

CCXVI.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Art. CXL.) que l'on pouvoit toujours intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré, lorsque l'une de leurs indéterminées finies ne s'y trouve pas ; la méthode exposée dans cet article s'étend encore aux équations différentielles de tous les ordres. Par exemple, lorsque dans une équation différentielle du second ordre l'une ou l'autre des deux indéterminées ne s'y trouve pas, & qu'il n'y entre que ses différences premieres ou secondes combinées comme on le veut, & élevées à des puissances quelconques, il sera toujours possible de parvenir à la séparation. Le procédé qu'il faut suivre pour cela consiste à faire la premiere différence qui est variable, égale à la fluxion prise pour constante, multipliée par une nouvelle indéterminée.

CCXVII.

Son application à plusieurs équations du second ordre.

Premier exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$ dans laquelle $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est supposé constant, & l'indéterminée finie u ne se trouve pas. Suivant ce que nous venons de dire, je fais $dx = zdu$,
ce qui me donne . . . . $ddx = dzdu$.
J'ai donc la transformée suivante $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydzdu + azdudy}{dudy}$, & en réduisant $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, ou $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydz + azdy$. Je divise cette équation par $2\sqrt{y}$, elle devient $\frac{by^{m-\frac{1}{2}}dy}{2c^m} = adz\sqrt{y} + \frac{azdy}{2\sqrt{y}}$, équation dont l'intégrale est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2}).2c^m} = az\sqrt{y} \pm C$. Mais $z = \frac{dx}{du}$; donc l'intégrale cherchée est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{2mc^m + c^m} = adx\sqrt{y} \pm Cdu$.

CCXVIII.

Second exemple.

Soit maintenant l'équation à intégrer $Yyydydx^2 + duddu = 0$, dans laquelle Y représente une fonction de y, du est l'élément de la courbe, égal par conséquent à $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ydx est la fluxion prise pour constante, & dans laquelle l'indéterminée u ne se trouve pas.

Je fais . . . . $du = zydx$
$ddu = ydzdx$,
& après la substitution l'équation est $Yy^2dydx^2 =$

$-y^2 z dz dx^2$, & en réduisant $Y dy = -z dz$. L'intégrale de cette équation est $\int Y dy = -\frac{zz}{2} + C$. Mais $z^2 = \frac{du^2}{yy dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{yy dx^2}$. Donc l'intégrale cherchée sera $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy - 1 - 2yy\int Y dy)}}$.

CCXIX.

Autre maniere d'intégrer les équations précédentes.

REMARQUE. On peut encore réduire aux premieres différences les équations qui sont dans le cas des précédentes, en se servant de la substitution que nous avons employée (Art. CXL.) pour les différentielles du premier degré. Cette substitution consiste à égaler la premiere différence de l'indéterminée qui manque, à une nouvelle indéterminée multipliée par la premiere différence de l'autre inconnue.

CCXX.

Appliquée à l'exemple précédent.

Je reprends l'équation précédente $Yy^2 dy dx^2 + du ddu = 0$; je suppose $dx = z du$, ce qui me donne $ddx = dz du + z ddu$, d'où l'on tire $ddu = \frac{ddx - dz du}{z}$. Après avoir substitué les valeurs dans l'équation, elle devient $Yy^2 z^2 dy du^2 = \frac{dz du^2 - du ddx}{z}$. Mais par la supposition $y dx$ est constant; donc $y ddx + dy dx = 0$, donc $ddx = -\frac{dy dx}{y}$, ou en mettant pour dx sa valeur, $ddx = -\frac{z du dy}{y}$. Substituant dans la transformée cette valeur de ddx, on a $Yy^2 z^2 dy du^2 = \frac{dz du^2}{z} + \frac{z dy du^2}{zy}$, & en réduisant $Yz^2 y^2 dy = \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}$. Soit maintenant $yz = t$, on a $lyz = lt$, $\frac{ydz + zdy}{yz} = \frac{dt}{t}$, & $\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$. Donc $Yt^2 dy = \frac{dt}{t}$, & $Ydy = \frac{dt}{t^3}$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{1}{2tt} + C$. Maintenant $tt = z^2y^2$ $= \frac{yydx^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2 + dy^2}$, à cause de $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Donc en remettant ces valeurs dans l'intégrale trouvée, on aura $2\int Ydy = \frac{-dx^2 - dy^2}{yydx^2} \pm 2C$, & enfin $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2Cyy - 2y^2\int Ydy - 1)}}$, équation que nous avions déja trouvée par l'autre méthode.

CCXXI.

Soit encore proposé d'intégrer l'équation $Yy^3dydx^2 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$, dans laquelle je puis supposer constante la fluxion que je voudrai, Y est une fonction quelconque de y & de constantes. Troisieme exemple.

Prenons d'abord dx constante, cette supposition donne $ddx = 0$, & fait disparoître le terme ydu^2ddx. L'équation est donc $Yy^3dydx^2 = dydu^2 - yduddu$. Pour la réduire je fais . . . . . $du = zdx$,
$ddu = dzdx$,
d'où je tire la transformée suivante $Yy^3dydx^2 = z^2dydx^2 - yzdzdx^2$, & en divisant par dx^2, $Yy^3dy = z^2dy - yzdz$, ou $Yy^3dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}) \times z^2y$. Pour intégrer cette équation je suppose $\frac{y}{z} = \frac{1}{t}$; je prends la différence du logarithme de cette équation, j'ai $\frac{\frac{zdy - ydz}{zz}}{\frac{y}{z}} = -\frac{\frac{dt}{tt}}{\frac{1}{t}}$,

& en réduisant $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{dt}{t}$. Nous avons d'ailleurs $yt = z$. Donc en substituant ces valeurs dans l'équation $Yy^3dy = (\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}).z^2y$, elle devient $Yy^3dy = -\frac{dt}{t} \times y^3t^2$, ou bien $Ydy = -tdt$, équation dont l'intégrale est $\int Ydy = -\frac{tt}{2} \pm C$: mais $\frac{tt}{2} = \frac{zz}{2yy}$. Donc on a $\int Ydy = -\frac{zz}{2yy} \pm C$; & en mettant pour z sa valeur $\frac{du}{dx}$, on a $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yydx^2} \pm C$.

Si on prend du constant, alors $ddu = 0$, & l'équation $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$ devient $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx$. Soit maintenant $dx = zdu$, $ddx = dzdu$, l'équation en y substituant ces valeurs devient $Yy^3dy.z^3du^3 = zdydu^3 + ydzdu^3$, ou bien $Ydy = \frac{zdy + ydz}{y^3z^3}$. Donc en intégrant on a $\int Ydy = \frac{-1}{2y^2z^2} \pm C$, & en remettant pour z sa valeur $\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée est $\int Ydy = \frac{-du^2}{2y^2dx^2} \pm C$, la même que nous venons de trouver.

CCXXII.

Application de la méthode à des équations d'un ordre plus élevé que le second.

SCHOLIE 2. Cette méthode s'appliquera aux différentielles d'un ordre plus élevé que le second, pourvu que dans celles du troisieme ordre, par exemple, l'une & l'autre des deux variables finies x & y manquent, que dans celles du quatrieme, outre l'une des deux variables finies x, y, il manque encore l'une ou l'autre des premieres différences dx, dy avec leurs fonctions. On réduira par la même méthode les équations différentielles du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y, &

& leurs deux premieres différences dx, dy, manquent ; celles du sixieme, pourvu qu'outre cela il manque encore l'une ou l'autre des secondes différences ddx, ou ddy, & ainsi de suite.

CCXXIII.

Soit l'équation $dxd^3y + dx^2d^2y = dx^4 + dy^4$, susceptible, comme on le voit, de la méthode présente, puisque les deux indéterminées finies x & y ne s'y trouvent pas ; dx est constant dans cette équation. Je fais

1°. A une équation du troisieme ordre.

$$\frac{pdx}{a} = dy$$

& par conséquent . . . . . . $\frac{dpdx}{a} = ddy$

$$\frac{ddpdx}{a} = d^3y.$$

Après avoir substitüé ces valeurs dans la proposée, elle devient $\frac{dx^2ddp}{a} + \frac{dx^3dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4dx^4}{a^4}$; donc $\frac{ddp + dxdp}{a} = dx^2 + \frac{p^4dx^2}{a^4}$, équation réduite au second ordre.

Supposant toujours dx constant, je fais $\frac{qdx}{b} = dp$, ce qui me donne . . . . . . $\frac{dqdx}{b} = ddp$: j'ai après la substitution, $\frac{dqdx}{qb} + \frac{dpdx}{a} = dx^2 + \frac{p^4dx^2}{a^4}$, ou $\frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4dx}{a^4}$: mais $dx = \frac{bdp}{q}$; donc on a $\frac{bdp + dq}{ab} = \frac{bdp}{q} + \frac{bp^4dp}{a^4q}$, équation réduite aux premieres différences.

CCXXIV.

Soit maintenant l'équation différentielle du quatrieme ordre $d^4y + dxd^3y - dx^2d^2y = 0$, dans laquelle dx

2°. A une équation du quatrieme.

eſt conſtant, & les deux indéterminées finies x, y, avec la premiere différence dy ne ſe trouvent pas. Je ſuppoſe donc . . . . $\frac{pdx}{a} = dy$,

& par conſéquent . . . . $\frac{dpdx}{a} = ddy$

$$\frac{d^2pdx}{a} = d^3y$$

$$\frac{d^3pdx}{a} = d^4y;$$

donc en ſubſtituant pour ddy, d^3y, d^4y ces valeurs, j'aurai la transformée ſuivante $d^3p + dxd^2p - dx^2dp = 0$, équation qui eſt dans le cas de celle de l'exemple précédent ; donc en opérant comme nous venons de faire, on la ramenera aux premieres différences.

CCXXV.

Cas particuliers qui ſe ramenent aux précédents par le choix de la conſtante.

SCHOLIE 3. Parmi les équations qui ne ſont pas ſuſceptibles de la méthode précédente, parce que les deux indéterminées finies s'y trouvent, il y en a quelques-unes qu'on y peut ramener en prenant pour conſtante une différentielle telle que tous les termes affectés de l'une des deux indéterminées finies diſparoiſſent, & qu'il ne reſte que ceux qui contiennent l'autre.

Dans ce cas eſt l'équation ſuivante $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$, dans laquelle nous pouvons ſuppoſer conſtant ou dx, ou dy. Si nous faiſons la premiere ſuppoſition, nous aurons $ddx = 0$, & par conſéquent le terme $ydxddx$ s'évanouit ; ſi c'eſt dy que nous traitons comme conſtant, $ddy = 0$ fait diſparoître le terme $2xdyddy$; donc dans l'une & l'autre ſuppoſition il ne reſte que l'une des deux indéterminées finies.

Soit donc dx conſtant, on aura $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Je fais . . . . $dy = \frac{pdx}{a}$

$$ddy = \frac{dpdx}{a};$$

donc en ſubſtituant j'aurai $dx^3 - \frac{p^2dx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, c'eſt-à-dire $aadx - ppdx = 2xpdp$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$. Donc en intégrant on a $lx = -l(aa-pp) + lm$, & $x = \frac{m}{aa-pp}$. Je remets pour p ſa valeur $\frac{ady}{dx}$, j'ai $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$, & par conſéquent $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, ou enfin $aady^2 = aadx^2 - \frac{mdx^2}{x}$.

CCXXVI.

D'autres cas ſe rameneront à notre méthode par de ſimples ſubſtitutions. Soit, par exemple, $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, je fais $ydy = dz$, d'où je tire, *Autres cas particuliers qui s'y ramenent par de ſimples ſubſtitutions.*

$$yddy + dy^2 = ddz$$
$$yydy^2 = dz^2.$$

Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura pour transformée l'équation $x^m ddx = ddz + dz^2$, dans laquelle l'une des deux indéterminées finies z ne ſe trouve pas.

CCXXVII.

Il y a encore un autre cas plus général que les précédents; c'eſt celui dans lequel on n'a que des ddy, des

dy & des dx : car alors en faiſant $dy = zdx$, dx étant conſtant, l'équation, comme il eſt évident, ſe ramenera toujours aux premieres différences. Maintenant nous allons expoſer une méthode générale pour ramener à notre dernier cas un très-grand nombre d'équations différentielles.

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans leſquelles l'une des deux ne ſe trouve pas.

CCXXVIII.

Fondement de cette méthode.

LA méthode que nous allons expliquer eſt fondée ſur le principe du calcul des exponentielles. Si l'on a une quantité telle que c^x, dans laquelle c déſigne un nombre dont le logarithme eſt l'unité, ſa différentielle ſera, comme nous l'avons vu dans l'Introduction, $c^x dx$, ſa ſeconde différence $c^x ddx + c^x dx^2$, ſa différence troiſiéme $c^x d^3 x + 3c^x dx ddx + c^x dx^3$, & ainſi de ſuite. Or dans ces différentielles l'indéterminée finie x ne ſe trouve que dans l'expoſant. Cette conſidération fit penſer à M. Euler qui eſt l'inventeur de cette méthode, que ſi dans les équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier, on ſubſtituoit aux indéterminées des exponentielles telles que les précédentes, les variables finies ne se trouveroient plus qu'aux exposants. La difficulté seroit alors réduite à faire évanouir les exponentielles introduites à la place des variables. Car par ce moyen l'équation sera délivrée de l'une de ses indéterminées, dont il ne restera que les différences.

CCXXIX.

La méthode réussira pour toutes les équations différentielles du second ordre qui sont dans un des trois cas suivants.

Trois cas généraux auxquels s'applique cette méthode.

1°. Pour celles qui n'ont que deux termes & qui sont comprises dans la formule suivante,

$$a x^m dx^p - y^n dy^{p-2} ddy = 0.$$

2°. Pour toutes les équations dans lesquelles les indéterminées & leurs différences ont le même nombre de dimensions dans chaque terme. La formule suivante peut les représenter :

$$a x^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + b x^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy.$$

3. Pour les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a le même nombre de dimensions dans chaque terme. Mais il faut distinguer deux cas; le premier, quand la premiere différentielle de l'indéterminée qui a par-tout le même nombre de dimensions est constante; & ce cas peut se représenter par la formule,

$$P x^m dy^{m+2} + Q x^{m-h} dx^h dy^{m+2-h} = dx^m ddy,$$

dans laquelle x a dans tous les termes le nombre m de dimensions, dx est constante, P & Q sont des fonctions quelconques de y. Le ſecond cas arrive lorſque c'eſt la premiere différentielle de l'autre variable, qui eſt conſtante, & ce dernier eſt compris dans la formule,

$$P x^m dy^{m+1} + Q x^{m-h} dx^h dy^{m-h+1} = dx^{m-1} ddx,$$

dans laquelle dy eſt conſtant, P & Q ſont des fonctions de y, x a, comme on le voit, dans chaque terme le nombre m de dimenſions.

Nous allons examiner ſéparément les quatre formules précédentes.

CCXXX.

Examen du premier cas de la méthode.

PROBLEME I. Intégrer les équations telles que $a x^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . $x = c^{hu}$

& . . . . $y = c^u t$,

h eſt une quantité arbitraire qu'on déterminera dans la ſuite de l'opération, u & t ſont deux nouvelles variables.

La ſuppoſition de $x = c^{hu}$ & de $y = c^u t$, nous donne

$$\begin{aligned} dx &= hc^{hu} du \\ ddx &= hc^{hu} \times (ddu + hdu^2) \\ dy &= c^u dt + c^u t du \\ ddy &= c^u \times (ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu). \end{aligned}$$

Mais par l'hypotheſe dx eſt conſtant; on aura donc $ddx = 0$, donc auſſi $hc^{hu} \times (ddu + hdu^2) = 0$, c'eſt-à-dire, $ddu = -hdu^2$ & en ſubſtituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy, on a

$$ddy = c^u \times (ddt + 2dtdu + (1-h) t du^2).$$

Substituons dans la proposée pour x, y, &c. leurs valeurs, elle devient $ac^{hmu} h^p c^{hpu} du^p = c^{nu} t^n \times (c^u dt + c^u tdu)^{p-2} \times c^u (ddt + 2dtdu + (1-h) tdu^2)$, c'est-à-dire, $ac^{(m+p)hu} h^p du^p = c^{(n+p-1)u} t^n \times (dt + tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (1-) tdu^2)$.

Maintenant il s'agit de déterminer h, de maniere que les exponentielles s'évanouissent. Or pour cela on voit bien qu'il faut que $n+p-1 = hm+hp$, ce qui donne $h = \frac{n+p-1}{m+p}$; donc l'équation précédente devient (B) $a\left\{\frac{(n+p-1)^p du^p}{(m+p)^p}\right\} = t^n . (dt + tdu)^{p-2} \times (ddt + 2dtdu + (\frac{m-n+1}{m+p}) tdu^2)$, laquelle ne contient plus qu'une des variables finies, savoir t, & se trouve par conséquent réduite au cas du Chapitre précédent.

Puisqu'on trouve $h = \frac{n+p-1}{m+p}$, il est facile de voir que les substitutions à faire sont $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})u}$ & $y = c^u t$, dans lesquelles on observera que $n+p-1$ est la somme des dimensions de y, & $m+p$, celle des dimensions de x. Cette remarque doit servir à déterminer sur le champ dans les cas particuliers la valeur qu'on doit donner à h.

CCXXXI.

Appliquons maintenant à la formule réduite la méthode de l'Art. CCXVI. Soit $du = zdt$, on aura $ddu = dzdt + zddt$; mais la supposition de dx constant, nous a donné plus haut $ddu = -hdu^2$: on aura donc en mettant pour h, & pour du leurs valeurs, $ddu =$

$(\frac{1-n-p}{m+p})\,zzdt^2$: donc $(\frac{1-n-p}{m+p})\,zzdt^2 = zddt + dzdt$, d'où l'on tire $ddt = (\frac{1-n-p}{m+p})\,zdt^2 - \frac{dtdz}{z}$. Je substitue dans l'équation (B) les valeurs de du & de ddt, j'ai $a(\frac{n+p-1}{m+1})^p az^p dt^p = t^n \cdot (dt + ztdt)^{p-2} \times \left\{(\frac{1-n-p}{m+p})\,zdt^2 - \frac{dtdz}{z} + 2zdt^2 + (\frac{m-n+1}{m+p})\,zztdt^2\right\}$, ou bien en divisant par dt^{p-1}, & multipliant par z, on aura (D) $(\frac{n+p-1}{m+p})^p z^{p+1} dt = t^n \times \left\{(1+tz)^{p-2} \times (\frac{1+2m-n+p}{m+p})\,zzdt + (\frac{m-n+1}{m+p})\,tz^3 dt - dz\right\}$, équation réduite aux premieres différences.

La supposition de $du = zdt$ & la valeur $\frac{n+p-1}{m+p}$ trouvée pour h, nous apprennent que pour réduire sur le champ l'équation proposée, il falloit faire $x = c^{(\frac{n+p-1}{m+p})\int zdt}$

& . . . . $y = c^{\int zdt}\,t$,

ou, ce qui revient au même, $x = c^{(n+p-1)\int zdt}$

& . . . . $y = c^{(m+p)\int zdt}\,t$.

CCXXXII.

COROLL. De ce que nous supposons $x = c^{(n+p-1)\int zdt}$, il s'ensuit que $c^{\int zdt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$; donc $\int(zdt)\,lc = \frac{1}{n+p-1}\,lx$; donc à cause de $lc = 1$, $zdt = \frac{dx}{(n+p-1)\,x}$. mais la supposition de $y = c^{(m+p)\int zdt}\,t$, nous donne $ly = (m+p)\int(zdt)\,lc + lt$; donc en mettant pour $\int zdt$ sa valeur en x, on a $ly = (\frac{m+p}{n+p-1})\,lx + lt$; donc $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}}\,t$, & $t = y\,x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$; donc $dt =$

$x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) \times y x^{-\left(\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}\right)} dx$. Donc en mettant pour dt cette valeur dans l'équation $z dt = = \frac{dx}{(n+p-1)x}$, on aura $z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) y z x^{-\left(\frac{m+n-2p-1}{n+p-1}\right)} dx = \frac{dx}{(n+p-1)x}$; donc enfin $z =$

$$\frac{dx}{(n+p-1)\, x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p)\, y x^{-\left(\frac{m-3p}{n+p-1}\right)} dx}.$$

Donc il eſt évident que ſi nous avons la valeur de z en t, ou celle de t en z, on pourra trouver le rapport de x à y.

Appliquons la méthode précédente à quelques exemples particuliers.

CCXXXIII.

Soit l'équation $x dx dy = y ddy$ dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec la formule, j'ai

Application de la formule à deux exemples particuliers.

$$a = 1$$
$$m = 1$$
$$p = 1$$
$$n = 1.$$

Mettant donc ces valeurs dans l'équation différentielle du premier degré (D) trouvée plus haut, on a $\frac{zz\,dt}{2} = t\,(1 + tz)^{-1} \times (\frac{1}{2} z^2 dt + \frac{1}{2} t z^3 dt - dz)$; ou en réduiſant $z^2 dt + t z^3 dt = 3 t z^2 dt + z^3 t^2 dt - 2 t dz$.

CCXXXIV.

Soit encore propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $\frac{a dx}{x} = \frac{ddy}{y dy}$, dans laquelle dx eſt conſtant. Comparant cette équation avec notre formule, on trouve

$$p = 1$$
$$n = -1$$
$$m = -1;$$

on auroit donc dans le cas préſent $p + m = 0$, donc tous les termes de l'équation réduite ſeroient infinis, & par conſéquent la méthode ne peut ſervir dans ce cas.

Mais alors l'intégration eſt facile. Car on a $xddy = aydydx$; mais dx conſtant donne $ddx = 0$: donc l'intégrale du premier membre eſt $xdy - ydx$, & celle du ſecond eſt $\frac{ayydx}{2}$. Donc on aura $\frac{xdy - ydx}{yy} = \frac{adx}{2} + Cdx$.

CCXXXV.

Seconde partie de la méthode.

PROBLEME 2. Intégrer les équations qui ſe rapportent à la formule générale $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant.

SOLUTION. Soit . . . . . . $x = c^u$

$$y = c^u t$$

j'aurai . . . . $dx = c^u du$,

& comme dx eſt conſtant, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$; c'eſt-à-dire, $ddu = -du^2$, on a auſſi

$$dy = c^u dt + c^u t du$$

$$ddy = c^u . (ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu),$$

& à cauſe que nous avons $ddu = -du^2$,

$$ddy = c^u . (ddt + 2dudt).$$

Subſtituant ces valeurs dans la formule, elle devient $ddt + 2dudt = at^{-m-1} du^p \times (dt + tdu)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q . (dt + tdu)^{2-q}$, équation dans laquelle ne ſe trouve pas l'indéterminée finie u.

Je suppose donc $du = zdt$, ce qui me donne $ddu = dzdt + zddt$. Mais $ddu = -du^2 = -zzdt^2$; donc $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$. Donc on aura l'équation suivante $at^{-m-1}z^p dt^p . (dt + ztdt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q dt^q . (dt + ztdt)^{2-q} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2$, ou bien ($A$) $at^{-m-1}z^p dt . (1 + zt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q dt . (1 + zt)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + zdt$, équation différentielle du premier ordre : d'où je conclus que je pouvois réduire tout de suite la proposée en faisant . . . . $x = c^{\int zdt}$

$y = c^{\int zdt} t$.

Ces deux suppositions nous donnent $dx = c^{\int zdt} zdt$ & $dy = c^{\int zdt} dt + c^{\int zdt} ztdt$; donc $ddx = c^{\int zdt} \times (zddt + dzdt + zzdt^2)$: mais dx étant constant, $ddx = 0$, donc $zddt + dzdt + zzdt^2 = 0$, & $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$, & par conséquent on aura $ddy = c^{\int zdt} \times (zdt^2 - \frac{dzdt}{z})$.

Appliquons cette formule à quelques exemples.

CCXXXVI.

Soit l'équation $xdxdy - ydx^2 = yyddy$. Pour la comparer avec la formule, je l'écris ainsi $xy^{-2} dxdy - y^{-1} dx^2 = ddy$. J'ai donc . . . . $a = 1$ Application à un exemple.

$m = 1$

$p = 1$

$n = 0$

$b = -1$

$q = 2$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (A) elle devient $t^{-2}zdt \times (1+zt) - t^{-1}zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, ou $\frac{zdt + zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = -\frac{dz + zzdt}{z}$; ou $zzdt + z^3tdt - z^3tdt = -ttdz + zzttdt$. Donc en réduisant on a $zzdt - zzttdt = -ttdz$. Donc $dt - \frac{dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$; & en intégrant $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + C$; c'est-à-dire $ttz + z = -t + Ctz$. Mais par les substitutions $z = \frac{du}{dt}$; donc l'équation $Ctz - t = ttz + z$ devient ici $Ctdu - tdt = ttdu + du$, ou (E) $du = \frac{tdt}{Ct - tt - 1}$. D'un autre côté la supposition de $c^u = x$ donne $ulc = lx$, & à cause que $lc = 1$, $du = \frac{dx}{x}$; on aura aussi $y = c^u t = xt$, donc $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$. Substituons dans ($E$) pour du, dt, t leurs valeurs, on aura $ydy + xdx = Cydx$, équation au cercle dans le cas où $C = 0$.

CCXXXVII.

SCHOLIE. La formule que nous venons de traiter dans le Problême précédent n'a que trois termes : on pourroit y en ajouter tant d'autres qu'on voudroit, pourvu toutesfois qu'ils eussent les conditions énoncées Art. CCXXIX. Pour ne laisser aucun doute sur cet article, nous allons appliquer la méthode à un exemple qui a plus de trois termes.

Autre exemple dans lequel l'équation a plus de trois termes.

Soit proposée l'équation suivante $y^2dx^3 + x^2dy^3 - yxdxdy^2 - yxdydx^2 + yx^2dxddy - xy^2dxddy = 0$, dans laquelle dx est constant. Je suppose, ainsi que je l'ai fait plus haut, ... $x = c^u$

$y = c^u t,$

j'aurai . . . . $dx = c^u du$

$dy = c^u.(dt + tdu);$

& à cause que $ddx = 0$, $ddy = c^u \times (ddt + 2dudt)$. Je substitue pour x, y, dx, dy, ddy leurs valeurs dans l'équation, je trouve la transformée suivante après les réductions ordinaires (F) $dt^3 + 2tdudt^2 - ttdtdu^2 + tdtdu^2 + tduddt - ttduddt = 0$, dans laquelle on voit bien que l'indéterminée finie u ne se trouve pas.

Je fais donc . . . . $du = zdt,$ j'en tire $ddu = dzdt + zddt$, ou parce que $ddx = 0$ donne $ddu = -du^2$, $-du^2 = dzdt + zddt$, donc $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Donc enfin après avoir substitué ces valeurs dans (F), on aura la réduite $dt + 2tzdt - tdz + ttdz = 0$, ou bien $(tt - t)dz + 2ztdt + dt = 0$, équation réduite au cas général du Chapitre VII.

Si on applique à cette équation les regles que nous avons données dans ce Chapitre, on trouvera pour son intégrale $(t - 1)^2 z + t - lt = C$.

Cherchons maintenant au moyen de cette intégrale le rapport de x à y. La supposition de $du = zdt$ donne $z = \frac{du}{dt}$; donc l'intégrale trouvée devient $(t - 1)^2 du + tdt - dtlt = Cdt$, ou $du = \frac{Cdt - tdt + dtlt}{(t-1)^2}$, équation dont l'intégrale est en ajoutant la constante A, (G) $u = \frac{t - C - tlt + At - A}{t - 1}$. Mais la supposition de $x = c^u$ donne $u = lx$, & comme on suppose aussi $y = c^u t$, on

aura $y = tx$, & $t = \frac{y}{x}$. Donc l'intégrale (G) devient $lx = \frac{y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay}{y - x}$. Donc $ylx - xlx = y - Cx - yly + ylx - Ax + Ay$. Donc enfin en réduisant & supposant . . $-C - A = m$
& . . . . $A + 1 = n$,
on a . . . . $mx + ny = yly - xlx$.

CCXXXVIII.

Troisieme partie de la méthode.

Comprend deux cas.

La troisieme partie de la méthode comprend, ainsi que nous l'avons dit plus haut, toutes les équations dans lesquelles l'une des deux variables avec ses différences a dans chaque terme le même nombre de dimensions. Nous avons dit aussi qu'il falloit distinguer deux cas; le premier, quand on a pour constante la premiere différence de l'indéterminée qui a le même nombre de dimensions à tous les termes; le second lorsque c'est la premiere différence de l'autre indéterminée qui est constante. Nous traiterons ces deux cas séparément.

CCXXXIX.

Premier cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$.

PROBLEME 3. Intégrer les équations représentées par la formule $Px\ dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, dans laquelle la somme des exposants de x & de dx est m dans tous les termes, dx est constant & P, Q sont des fonctions quelconques de y.

SOLUTION. Je suppose . . . . $x = c^u$,
ce qui me donne . . . . $dx = c^u du$

& . . . . $ddu = -du^2$;
je substitue ces valeurs dans la formule, & je la divise par c^{mu}, qui se trouve à tous les termes, j'ai la transformée (I) $Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, laquelle ne contient point u.

Je fais donc $du = zdy$, $ddu = dzdy + zddy$: mais $ddu = -du^2$ & $du^2 = zzdy^2$; donc $zddy + dzdy = -zzdy^2$, & par conséquent $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$. Donc en substituant ces valeurs l'équation (I) devient $Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz$, & divisant par dy^{m+1}, (L) $Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$, équation réduite aux premieres différences. Il est évident qu'on auroit réduit tout de suite la proposée, si on eût fait $x = c^{\int zdy}$. Cette supposition nous eût donné $dx = c^{\int zdy} zdy$, $ddx = c^{\int zdy}$. $(dzdy + zddy + z^2 dy^2)$: or $ddx = 0$, donc on auroit eu $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$, comme on l'a trouvé plus haut.

Appliquons cette formule à un cas particulier qui ait plus de trois termes. Application de la formule à un exemple.

CCXL.

Qu'on ait à intégrer l'équation $2adx^2dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, dans laquelle dx est constant. Soit . . . . $x = c^{\int zdy}$

$$dx = c^{\int zdy} zdy$$

$$ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}.$$

Substituons pour x, dx, ddy, ces valeurs dans l'équation, elle devient $2ac^{2\int zdy}z^2dy^3 - ac^{2\int zdy}z^2dy^3 - ac^{2\int zdy}dzdy^2 = 2c^{2\int zdy}zdy^3 - 2c^{2\int zdy}zdy^3 - \frac{2c^{2\int zdy}dzdy^2}{z}$, & en divisant par $c^{2\int zdy}dy^2$ qui se trouve à tous les termes, on a après la réduction $az^2dy - adz = -\frac{2dz}{z}$, ou bien $ady = \frac{azdz-2dz}{z^3}$. L'intégrale de cette équation est $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. Maintenant la supposition $x = c^{\int zdy}$ nous donne $lx = \int zdy$, & $\frac{dx}{x} = zdy$: donc $z = \frac{dx}{xdy}$. Remettant dans l'intégrale pour z cette valeur, nous aurons l'équation réduite

$$aydx^2 = xxdy^2 - axdxdy + Cdx^2.$$

Je passe au second cas.

CCXLI.

Second cas représenté par la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$.

PROBLEME 4. Intégrer les équations contenues dans la formule $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1}ddx$, dans laquelle dy est constant, P & Q sont des fonctions de y.

SOLUTION. Je fais comme ci-dessus $x = c^u$

$$dx = c^u du$$

$$ddx = c^u.(ddu + du^2).$$

Suivant ces substitutions dans la formule, nous aurons (M) $Pdy^{m+1} + Qdu^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1}ddu$ laquelle ne contient plus u. Nous avons divisé par c^{mu} qui multiplioit tous les termes.

Je suppose donc . . . . $du = zdy$

dy

dy étant conſtant, on a . . . . . $ddu = dzdy$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (M), elle devient $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, & en diviſant par dy^m, $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, équation différentielle du premier ordre à laquelle on parviendroit ſur le champ en faiſant $x = c^{\int z dy}$.

Je paſſe à un exemple.

CCXLII.

Soit propoſé de réduire aux premieres différences l'équation $2dxdy = addx - yddx$, dans laquelle dy eſt conſtant. Je fais $x = c^{\int z dy}$ Application de cette formule à un exemple.

$$dx = zdyc^{\int z dy}$$

$$ddx = c^{\int z dy} \times (z^2 dy^2 + zd^2y + dzdy).$$

Mais comme dy eſt conſtant, $ddy = 0$, donc $ddx = c^{\int z dy} \times (zdy^2 + dzdy)$. Faiſant ces ſubſtitutions dans la propoſée, nous aurons $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$; & diviſant par dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, équation réduite aux premieres différences.

CCXLIII.

REMARQUE. Cette équation nous a ſervi pour faire voir l'application de notre méthode; mais on peut la réduire tout de ſuite : car on a $2dxdy + yddx = addx$, dont l'intégrale dy étant conſtant, $ydx + xdy = adx + Cdy$.

CHAPITRE VI.

Application de la méthode du Chapitre XV. aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CCXLIV.

Conditions que cette méthode exige.

NOus avons vu (Chap. XV.) comment, au moyen des coefficiens indéterminés, on intégroit un nombre n d'équations différentielles du premier ordre qui renferment un nombre n d'indéterminées x, y, z, u, &c. multipliées par des constantes & par une même fonction de t, avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}$, &c. aussi multipliées par des constantes & par une fonction de t qui soit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque θ, θ', &c. de la variable t. Cette même méthode s'étend aux différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

Si l'on a un nombre n d'équations différentielles contenant un nombre n de changeantes x, y, z, &c. multipliées par des constantes & par une fonction quelconque θ de t avec leurs différences $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, aussi multipliées par des constantes & par θ; & les différences secondes $\frac{ddx}{dt^2}, \frac{ddy}{dt^2}$, &c. multipliées de même par des constantes & par θ, & ainsi de suite jusqu'aux différences

$\frac{d^r x}{dt^r}$, $\frac{d^r y}{dt^r}$, $\frac{d^r z}{dt^r}$ d'un degré quelconque r; que de plus chacune de ces équations contienne, si l'on veut, une fonction quelconque θ', θ'' de t; voici la méthode qu'il faudra suivre pour parvenir à l'intégration.

CCXLV.

Procédé de la méthode.

On fera . . . . $d^{r-1}x = u\,dt^{r-1}$

$$d^{r-2}x = u'\,dt^{r-2}$$
$$d^{r-1}y = u''\,dt^{r-1}$$
$$d^{r-2}y = u''\,dt^{r-2}, \text{\&c.}$$

Par ces substitutions on changera les équations données en d'autres équations qui seront au nombre de $n + (n-1)r$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, &c. u, u', u'', u''', &c. avec leurs premieres différences seulement dx, dy, dz, du, du', du'', du'''. Ces équations alors s'intégreront en les multipliant toutes excepté la premiere, par des coefficients indéterminés différents, & pratiquant ensuite les autres opérations que prescrit la méthode du Chapitre XV. Nous allons appliquer ces principes à quelques exemples.

CCXLVI.

Son application à des exemples.

Premier exemple.

Soit $n = 2$, $r = 4$, ensorte qu'on ait à intégrer les deux équations suivantes $d^4y + b\,d^3y\,dt + c\,d^2y\,dt^2 + e\,dy\,dt^3 + f\,dx\,dt^3 + g\,d^2x\,dt^2 + h\,d^3x\,dt + i\,d^4x + \theta\,dt^4 = 0$, & $d^4y + \varepsilon\,d^3y\,dt + \kappa\,d^2y\,dt^2 + \iota\,dy\,dt^3 +$

$\varphi dxdt^3 + \gamma d^2xdt^2 + \lambda d^3xdt + \mu d^4x + \tau dt^4 = 0.$

Je suppose alors . . . . $d^3y = zdt^3$

$$d^2y = pdt^2$$
$$dy = qdt$$
$$d^3x = udt^3$$
$$d^2x = rdt^2$$
$$dx = sdt,$$

z, p, q, r, s, u étant de nouvelles indéterminées. Faisant dans les deux équations proposées les transformations précédentes, on a $dt^3dz + bzdt^4 + cpdt^4 + eqdt^4 + fsdt^4 + grdt^4 + hudt^3 + idt^3du + \theta dt^4 = 0$, & $dt^3dz + \epsilon zdt^4 + \kappa pdt^4 + \iota qdt^4 + \varphi sdt^4 + \gamma rdt^4 + \lambda udt^4 + \mu dt^3du + \tau dt^4 = 0$. Mais au lieu de $d^3y = zdt^3$ on peut mettre $dp = zdt$; au lieu de $d^2y = pdt^2$, $dq = pdt$; au lieu de $d^3x = udt^3$, $dr = udt$; au lieu de $d^2x = rdt^2$, $ds = rdt$. Donc on aura les huit équations suivantes :

$$dz + idu + (bz + cp + eq + fs + gr + hu + \theta)\,dt = 0$$
$$dz + \mu du + (\epsilon z + \kappa p + \iota q + \varphi s + \gamma r + \lambda u + \tau)\,dt = 0$$
$$dx - sdt = 0$$
$$dy - qdt = 0$$
$$ds - rdt = 0$$
$$dq - pdt = 0$$
$$dr - udt = 0$$
$$dp - zdt = 0.$$

Les équations sont réduites à l'état qu'exige la méthode du Chapitre XV. il est maintenant facile de la leur appliquer.

CCXLVII.

Soit encore l'équation $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{bddy}{dt^2} + \frac{cdy}{dt} + Ky + T$ Second exemple.
$= 0$, T étant une fonction de t. Je mets l'équation sous cette forme $d^3y + bd^2ydt + cdydt^2 + Kydt^3 + Tdt^3 = 0$, & j'ai $n = 1$, $r = 3$. Je fais donc $ddy = xdt^2$

$$dy = zdt;$$

différentiant cette derniere équation, & supposant dt constant, on aura $ddy = dzdt$; donc $dzdt = xdt^2$ ou $dz = xdt$. Donc nous aurons les deux équations suivantes . . . . $dz - xdt = 0$

$$dy - zdt = 0.$$

Mettant dans la proposée pour d^3y, ddy, dy leurs valeurs tirées des équations précédentes, & supposant toujours dt constant, nous aurons $dt^2dx + bxdt^3 + czdt^3$ $Kydt^3 + Tdt^3 = 0$ & $dx + bxdt + czdt + Kydt + Tdt = 0$, équation réduite au cas de l'Art. CLXXV. Voilà donc les trois équations sur lesquelles nous devons opérer.

Selon ce qui est dit (Chap. XV.) je multiplie la seconde de ces équations par un coefficient indéterminé μ, & la troisieme par un autre coefficient indéterminé v. J'aurai donc $dx + (bx + cz + Ky + T)dt = 0$

$$vdy - vzdt = 0$$

$$\mu dz - \mu xdt = 0.$$

J'ajoute ensemble ces trois équations de la façon suivante
$(A)\ dx + vdy + \mu dz + \big((b - \mu)x + (c - v)z +$

$Ky+T)dt=0$. Soit maintenant $bx-\mu x+cz-vz+Ky=Rx+Rvy+R\mu z$, j'aurai en comparant terme à terme . . . . $b-\mu=R$

$$c-v=R\mu$$
$$K=Rv.$$

Donc $b-\mu=\frac{c-v}{\mu}=\frac{K}{v}$. Donc $(b-\mu)\mu=c-v$ & $(b-\mu)v=K$. Donc l'équation (A) devient $dx+vdy+\mu dz+(x+vy+\mu z).(b-\mu)dt+Tdt=0$. Soit $x+vy+\mu z=u$, on aura $du+(b-\mu)udt+Tdt=0$, équation intégrable par la méthode du Chapitre VII.

Nous avons maintenant $\mu\mu-b\mu=v-c$, ou $\mu=\frac{b}{2}\pm\sqrt{(v-c+\frac{bb}{4})}$ & $\frac{b}{2}+\sqrt{(v-c+\frac{bb}{4})}=\frac{K}{v}$; donc $v-c+\frac{bb}{4}=\frac{KK}{vv}-\frac{bK}{v}+\frac{bb}{4}$. Donc $v^3-cvv+Kbv=KK$. Soient n, n', n'' les trois valeurs de v, on aura en supposant que m, m', m'' sont les trois valeurs correspondantes de μ, on aura, dis-je,

$$du+(b-m)udt+Tdt=0$$
$$du+(b-m')udt+Tdt=0$$
$$du+(b-m'')udt+Tdt=0,$$

& encore . . . . $x+ny+mz=u$

$$x+n'y+m'z=u'$$
$$x+n''y+m''z=u''.$$

Des trois premieres équations on tirera la valeur de u en t, & les trois secondes nous donneront celles de x, y, z. Donc enfin on aura la valeur de y en t.

CCXLVIII.

REMARQUE. Cette méthode peut s'abréger en certains cas, par exemple, si on a $d^4y + Aydx^4 + Xdx^4 = 0$, au lieu d'employer quatre équations du premier degré, on peut se contenter de deux du second $ddy = udt^2$

$$ddu = Aydt^2,$$

lesquelles se réduisent à une équation du second degré, & celle-ci à deux du premier.

CHAPITRE VII.

Exposition d'une méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en y supposant* $X = 0$.

CCXLIX.

Dans le Tome VII. des *Miscellanea Berolinensia*, M. Euler donne une méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots$ &c. $+ X = 0$, en y supposant toutesfois $X = 0$. Voici le procédé de cette méthode. Procédé de cette méthode.

Il fait . . . . $y = Ac^{fx}$

$$dy = Ac^{fx}fdx$$

$$ddy = Ac^{fx}ffdx^2$$

$$d^ny = Ac^{fx}f^ndx^n.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{hd^{n-3}y}{dx^{n-3}} +$ &c. $+ y = 0$ nous donnent la transformée suivante $\frac{Aac^{fx}f^n dx^n}{dx^n} + \frac{Abc^{fx}f^{n-1}dx^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{Agc^{fx}f^{n-2}dx^{n-2}}{dx^{n-1}} + \frac{Ahc^{fx}f^{n-3}dx^{n-3}}{dx^{n-3}} +$ &c. . . . $+ Ac^{fx} = 0$, & en effaçant ce qui se détruit, on a $af^n + bf^{n-1} + gf^{n-2} + hf^{n-3} +$ &c. . . . $+ 1 = 0$. Il ne s'agit donc que de résoudre cette derniere équation; & cette solution nous donnera autant de valeurs particulieres de y, que l'équation aura de racines. On ajoutera ensemble toutes ces valeurs de y, & on aura l'intégrale complete de la proposée. C'est ce que nous allons développer en ramenant à des cas particuliers l'équation générale.

C C L.

Examen des différents cas qui peuvent arriver.

Supposons $n = 2$, l'équation à intégrer sera $\frac{addy}{dx^2} + \frac{bdy}{dx} + y = 0$; & en mettant pour y sa valeur Ac^{fx}, & en réduisant on a $Ac^{fx}.(1 + bf + aff) = 0$. Que les valeurs de cette équation soient f & f', j'aurai $y = Ac^{fx}$ & $y = Bc^{f'x}$. Or chacune de ces valeurs de y substituée dans l'équation la rend égale à zéro; je dis de plus que la somme de ces deux valeurs donne de même un résultat égal à zéro. Car on aura $Ac^{fx}.(1 + bf + aff) = 0$ & $Bc^{f'x}.(1 + bf' + af'f') = 0$ dans lesquelles tout se détruira par des signes contraires. Donc la somme de de ces deux valeurs fubftituée dans l'équation fera auffi évanouir tous les termes. Donc il faudra fuppofer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx}$, & cette fuppofition renferme tous les cas, A étant $= 0$, $B = 0$, & A & B ayant une valeur.

Si $n = 3$, on trouvera par la même méthode, qu'il faut fuppofer $y = Ac^{fx} + Bc^{fx} + Dc^{fx}$, A, B, D étant des coefficiens tout-à-fait arbitraires, & ainfi de fuite.

CCLI.

Lorfque f a fes valeurs égales, l'équation alors fera repréfentée par $ffy - \frac{2fdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Soit $y = c^{fx}u$, on aura $dy = c^{fx}du + fuc^{fx}dx$, & en fuppofant dx conftant, $ddy = c^{fx}ddu + 2fc^{fx}dxdu + ffuc^{fx}dx^2$. Donc en fubftituant ces valeurs on aura la transformée fuivante $ffc^{fx}u - \frac{2fc^{fx}du}{dx} - \frac{2ffc^{fx}udx}{dx} + \frac{c^{fx}ddu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{fc^{fx}dxdu}{dx^2} + \frac{ffc^{fx}udx^2}{dx^2} = 0$. Donc en effaçant ce qui fe détruit, on a $ddu = 0$. Donc $du = \epsilon dx$, $u = \epsilon x + \alpha$. Donc lorfque $1 + bf + aff = 0$ eft un quarré, il faut fuppofer $y = (\alpha + \epsilon x)c^{fx}$.

CCLII.

Lorfque dans une équation différentielle du troifieme ordre, f aura fes trois valeurs égales, on trouvera par la même méthode qu'on doit alors fuppofer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)c^{fx}$. Car dans ce cas on aura l'équation fuivante à intégrer $f^3y - \frac{3f^2dy}{dx} + \frac{3fddy}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Soit, comme ci-dessus, $y = uc^{fx}$, $d^3y = c^{fx}d^3u + 3fc^{fx}dxddu + 3ffc^{fx}dx^2du + f^3uc^{fx}dx^3$. Après avoir substitué pour y, dy, d^2y, d^3y leurs valeurs, on trouve $d^3u = 0$; donc $ddu = Adx^2$; $du = Axdx + Bdx$ & $u = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$. Donc enfin $y = uc^{fx} = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)c^{fx}$.

CCLIII.

Donc en général si f avoit un nombre k de racines égales, il faudroit supposer $y = (\alpha + \epsilon x + \gamma xx + \delta x^3 + \ldots\ldots + \lambda x^{k-1})c^{fx}$. Ce qui est évident par ce qui précede.

CCLIV.

Maintenant si f a des valeurs imaginaires, ces imaginaires, comme on le sait, iront toujours en nombre pair. Ainsi supposons que dans l'équation $1 + bf + aff = 0$, on ait $\frac{b}{2\sqrt{a}} < 1$, alors on aura (Art. LXXXI. Introd.) $f = m + n\sqrt{-1}$ & $f' = m - n\sqrt{-1}$. Donc il faudra supposer $y = Ac^{mx+nx\sqrt{-1}} + Bc^{mx-nx\sqrt{-1}} = (Ac^{nx\sqrt{-1}} + Bc^{-nx\sqrt{-1}})c^{mx}$. Si l'on suppose A & B réelles & égales & $= P$, cette quantité deviendra réelle; & dans ce cas on aura (Art. XLVI. Introd.) $y = c^{mx} \times 2P.\cos. nx$. Elle sera encore réelle si on suppose A & B imaginaires & de différents signes. Soit, par exemple, $A = Q\sqrt{-1}$, $B = -Q\sqrt{-1}$, on aura $y = c^{mx}.(Q\sqrt{-1}.c^{nx\sqrt{-1}} - Q\sqrt{-1}.c^{-nx\sqrt{-1}}) =$ (Art. XLV. Introd.) $c^{mx}.2\sqrt{-1}.Q\sqrt{-1}.\sin. nx = c^{mx} \times -2Q.\sin. nx$. Nous venons de trouver plus haut $y = c^{mx}$.

$2P$. coſ. nx. Donc en général $y = c^{mx}$. ſin. $(nx + R)$. Donc l'intégrale cherchée eſt $y = Hc^{mx}$. ſin. $(nx + R)$. Car prenons un angle R dont le ſinus ſoit au co-ſinus, comme $2P$ eſt à $-2Q$, on aura ſin. R : coſ. R :: $2P$: $-2Q$. Donc ſin. $R = \frac{2P}{H}$ & coſ. $R = -\frac{2Q}{H}$. Donc $2P = H$. ſin. R & $-2Q = H$. coſ. R. Mettant ces valeurs dans $2P$. coſ. $nx - 2Q$. ſin. nx, on aura H. ſin. R . coſ. $nx + H$. coſ. R . ſin. $nx = H \times$ (ſin. R coſ. nx + coſ. R . ſin. nx) = (Art. XLIX. N°. 2. Introduct.) H. ſin. $(nx + R)$.

Appliquons maintenant cette méthode à quelques exemples.

CCLV.

Soit propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $Ay + \frac{Bdy}{dx}$ Application de la méthode à une équation différentielle du ſecond ordre.
$+ \frac{Kddy}{dx^2} = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. Je ſuppoſe $y = Ec^{fx}$; j'aurai la transformée ſuivante $AEc^{fx} + \frac{BEc^{fx}fdx}{dx} + \frac{KEc^{fx}ffdx^2}{dx^2} = 0$; & en réduiſant $A + Bf + Kff = 0$. Cette équation a deux racines, toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires.

1°. Les racines ſont réelles, quand BB eſt $> 4AK$. Dans ce cas les deux racines ſont $f = \frac{-B \pm \sqrt{(BB - 4AK)}}{2K}$. Donc l'intégrale cherchée eſt (Art. CCXLIX.) $y = \alpha c^{-\frac{Bx + x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}} + \varepsilon c^{-\frac{Bx - x\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}}$.

Il y a encore un cas particulier à diſtinguer ici, c'eſt celui dans lequel on auroit $BB = 4AK$. Car alors $A + 2f\sqrt{4AK} + Kff = 0$ feroit un quarré, celui de $\sqrt{A}$

$+f\sqrt{K}$. Donc les racines feroient égales. Donc (Art. CCLI.) on auroit $y=(\alpha+\varepsilon x)c^{-x\sqrt{\frac{A}{K}}}$. Car la fuppofition de $BB=4AK$ donne $B=2\sqrt{AK}$ & $f=-\frac{B}{2K}$. Donc $y=(\alpha+\varepsilon x)c^{-x\sqrt{\frac{A}{K}}}$ fera l'intégrale de l'équation $Ay+\frac{2dy\sqrt{AK}}{dx}+\frac{Kddy}{dx^2}=0$.

2°. Soit maintenant $BB<4AK$, dans ce cas les racines feront imaginaires. On aura donc $m=-\frac{B}{2K}$, $\pm n\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{(BB-4AK)}}{2K}$ & $n=\frac{\sqrt{(4AK-BB)}}{2K}$. Donc en comparant cette valeur avec la formule $y=Hc^{mx}\,\text{fin.}\,(nx+R)$, on aura l'intégrale fuivante $y=Hc^{-\frac{Bx}{2K}}.\,\text{fin.}\,(x\frac{\sqrt{(4AK-BB)}}{2K}+R)$.

CCLVI.

Son application à une équation du troisieme ordre.

Soit encore à intégrer l'équation fuivante $y-\frac{3a^2ddy}{dx^2}+\frac{2a^3d^3y}{dx^3}=0$; je fuppoferai $y=Ac^{fx}$, ce qui me donne la transformée fuivante $1-3aaff+2a^3f^3=0$. Les facteurs de cette équation font $(1+2af)$ & $(1-af)^2$. Le premier nous donne $f=-\frac{1}{2a}$, d'où l'on tire $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}$. Le fecond a fes deux valeurs égales, on aura $f=\frac{1}{a}$, & par conféquent $y=(\alpha+\varepsilon x)c^{\frac{x}{a}}$. Donc l'intégrale complete fera $y=Ac^{\frac{-x}{2a}}+(\alpha+\varepsilon x)c^{\frac{x}{a}}$.

CCLVII.

A une équation d'un ordre n quelconque.

Enfin foit propofé d'intégrer l'équation fuivante $\frac{d^ny}{dx^n}$

$= 0$; la supposition de $y = Ac^{fx}$ donne ici $f^n = 0$. Donc f a toutes ses racines égales. Donc suivant ce que nous avons dit plus haut, il faudra faire $y = (a + bx + cxx + \ldots \&c.) c^{fx}$. Mais $f = 0$ donne $c^{fx} = c^0 = 1$. Donc la supposition se réduit à $y = a + bx + cxx + ex^3 + \ldots + px^{n-1}$.

Et en effet c'est ce qu'on trouvera de même, en prenant successivement autant d'intégrales que n contient d'unités. Soit $n = 4$, la proposée sera $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, dx étant constant, on aura pour intégrale $\frac{d^3 y}{dx^4}$, que l'on supposera égale à une constante de cette forme $\frac{a}{dx}$; ce qui fournit l'équation suivante $d^3 y = adx^3$; & ensuite $ddy = axdx^2 + bdx^2$; $dy = \frac{ax^2 dx}{2} + bxdx + cdx$. Donc enfin $y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f$.

CHAPITRE VIII.

Comparaison de la Méthode exposée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI.

CCLVIII.

TElle est la méthode donnée par M. Euler pour la solution des équations renfermées dans la formule $\frac{ad^n y}{dx^n} + \frac{bd^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \&c. = 0$. Cette méthode

Démonstration de la Méthode précédente.

peut paroître plus simple que celle qui résulte de la solution générale exposée dans le Chapitre VI. Mais la Méthode de M. d'Alembert rapprochée de celle de M. Euler en démontre la généralité. En effet on ne voit pas clairement que l'intégration ne réussira qu'en faisant $y = Ac^{fx}$; au lieu que la solution énoncée ci-dessus qui donne la valeur de y, nous montre avec évidence que y doit en effet être exprimée par un certain nombre de termes $Ac^{fy} + Bc^{gx} + Dc^{hx} +$ &c.

Car dans les cas, par exemple, où l'équation est du troisieme degré, telle que $d^3y + bddydx + cdydx^2 + Kydx^3 = 0$, en faisant, $ddy = pdx^2$

$$dy = zdx,$$

& pratiquant les opérations exposées (Art. CCXLV.) on aura les trois équations suivantes,

$$dp + bpdx + czdx + Kydx = 0$$
$$dz - pdx = 0$$
$$dy - zdx = 0;$$

& ensuite .... $dp + (bp + cz + Ky)dx = 0$

$$vdy - vzdx = 0$$
$$\mu dz - \mu pdx = 0.$$

Donc $dp + vdy + \mu dz + \{(b - \mu)p + (c - v)z + Ky\} dx = 0$. Donc en supposant $(b - \mu)p + (c - v)z + Ky = Rp + Rvy + R\mu z$, & $p + vy + \mu z = u$, on aura $\frac{du}{u} = (\mu - b)dx$. Donc en faisant pour les valeurs de v & de μ les mêmes calculs que dans l'article CLXXV. on trouvera ...... $p + ny + mz = u$

$$p + n'y + m'z = u'$$
$$p + n''y + m''z = u'',$$

& de plus . . . . $du + \rho u dx = 0$
$$du' + \rho' u' dx = 0$$
$$du'' + \rho'' u'' dx = 0.$$

Par le moyen des trois premieres équations, on aura d'abord $p = \frac{m''u' - m'u'' + n''m'y - n'm''y}{m'' - m'}$, $z = \frac{u'' - u' - n''y + n'y}{m'' - m'}$, & par conséquent on aura $y = \frac{(m'' - m')u - m''u' + m'u''}{nm'' - nm' - n'm - n''m + n''m' - n'm''}$. Donc $y = Pu + P'u' + P''u''$. Mais des trois secondes équations on tire . . . . $lu = -\rho x + b$
$$lu' = -\rho' x + b'$$
$$lu'' = -\rho'' x + b'',$$

& par conséquent . . . . $u = c^{-\rho x + b}$
$$u' = c^{-\rho' x + b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x + b''},$$

ou bien encore . . . . . . $u = c^{-\rho x} \times c^{b}$
$$u' = c^{-\rho' x} \times c^{b'}$$
$$u'' = c^{-\rho'' x} \times c^{b''}.$$

Donc enfin . . . . $y = Ac^{fx} + Bc^{gx} + Dc^{hx}.$

CCLIX.

En suivant la méthode de M. d'Alembert, si on trouve les valeurs de f égales, alors on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Ainsi on fera $y = Ac^{fx + \alpha x} + Bc^{fx + \rho x}$, α & ρ étant des quantités infiniment petites. Donc on aura $y = Ac^{fx} + A\alpha x c^{fx} + Bc^{fx} + B\rho x c^{fx}$; d'où l'on tire $y =$

Fxamen des cas différens d'après la méthode du Chapitre VI.

$(A+B)c^{fx} + (A\alpha + B\rho)xc^{fx}$. Donc enfin $y = (l + mx)c^{fx}$; ſuppoſition que nous fait faire de même la méthode de M. Euler. Nous aurions pu pouſſer l'expreſſion de $c^{fx+\alpha x}$ & de $c^{fx+\rho x}$ au-delà de deux termes; mais nous nous ſommes contentés de deux, parce qu'il n'y a dans l'équation $y = Ac^{fx+\alpha x} + Bc^{fx+\rho x}$ que deux coefficiens A & B & deux quantités infiniment petites α & ρ abſolument arbitraires.

CCLX.

Si f a trois valeurs égales, alors on ſuppoſera $y = Ac^{fx+\alpha x} + Bc^{fx+\rho x} + Dc^{fx+\sigma x}$. Comme il y a dans ce cas trois coefficiens & trois quantités infiniment petites indéterminées, on pouſſera juſqu'à trois termes la valeur approchée de $c^{fx+\alpha x}$ & des autres. On aura donc $y = Ac^{fx} + A\alpha xc^{fx} + \frac{A\alpha\alpha xxc^{fx}}{2} + Bc^{fx} + B\rho xc^{fx} + \frac{B\rho\rho xxc^{fx}}{2} + Dc^{fx} + D\sigma xc^{fx} + \frac{D\sigma\sigma xxc^{fx}}{2}$. Donc $y = (A + B + D)c^{fx} + (A\alpha + B\rho + D\sigma)xc^{fx} + \left\{\frac{A\alpha\alpha + B\rho\rho + D\sigma\sigma}{2}\right\}x^2c^{fx}$. Donc enfin $y = (l + mx\ nxx)c^{fx}$.

CCLXI.

Quand une des valeurs de f eſt $= 0$, c'eſt alors une marque qu'il y a dans l'expoſition de y un terme tout conſtant. Soit, par exemple, à intégrer l'équation $d^3y + ad^2ydx + bdydx^2 = 0$, ſi je fais $y = Ac^{fx}$, après la ſubſtitution

ſubſtitution j'aurai la transformée ſuivante $Ac^{fx}f^3dx^3 + Aac^{fx}f^2dx^3 + Abc^{fx}fdx^3 = 0$; donc $f^3 + aff + bf = 0$; donc nous aurons $f = 0$ & $ff + af + b = 0$. Cette ſeconde équation nous donne $y = Bc^{gx} + Dc^{hx}$. La premiere donne $y = Ec^0 = E\,1 = E$. Donc la valeur complete de y eſt $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

Et en effet, ſoit . . . . $dy = zdx$

$z = Ac^{fx}$,

on aura . . . . $ddy = dzdx$

$d^3y = ddzdx$,

& par conſéquent la transformée ſuivante $ddzdx + adzdx^2 + bzdx^3 = 0$, qui donne $ff + af + b = 0$. Donc (Art. CCL.) $z = Ac^{gx} + Fc^{hx}$. Or $dy = zdx$, donne $y = \int zdx + E = \int(Ac^{gx}dx + Fc^{hx}dx) + E$. Donc $y = Bc^{gx} + Dc^{hx} + E$.

CCLXII.

Si f a pluſieurs valeurs égales à zéro, alors on remarquera que ces valeurs ſont de plus égales entre elles. Donc ſuivant ce que nous avons dit (Art. CLIX.) on augmentera ces valeurs de quantités infiniment petites $c^{\alpha x}$, c^{bx}, c^{Bx} différentes l'une de l'autre, & on pouſſera l'expreſſion de ces quantités juſqu'à un nombre de termes égal à celui des racines $= 0$.

CCLXIII.

Soit propoſé d'intégrer l'équation $d^5y + ad^4ydx +$

Application à un exemple du cinquieme ordre.

$b\,d^3y\,dx^2 = 0$, dans laquelle dx est toujours constant. La transformée, en supposant $y = Ac^{fx}$, sera $Ac^{fx}f^5dx^5 + Aac^{fx}f^4dx^5 + Abc^{fx}f^3dx^5 = 0$; & en réduisant on a $f^5 + af^4 + bf^3 = 0$. Or de cette équation on tire 1°. $f^3 = 0$, qui nous apprend que f a trois valeurs égales & $= 0$; 2°. $ff + af + b = 0$. Donc en pratiquant ce qui est dit plus haut, on aura pour l'équation $ff + af + b = 0$, $y = Ac^{-\frac{ax}{2} + x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}} + Bc^{-\frac{ax}{2} - x\sqrt{(\frac{aa}{4} - b)}}$; ou bien $y = Ac^{mx} + Bc^{nx}$. Pour l'équation $f^3 = 0$, on aura $y = Dc^{fx + \alpha x} + Ec^{fx + \epsilon x} + Fc^{fx + \rho x} = Dc^{fx} + D\alpha xc^{fx} + \frac{D\alpha\alpha xxc^{fx}}{2} + Ec^{fx} + E\epsilon xc^{fx} + \frac{E\epsilon\epsilon xxc^{fx}}{2} + Fc^{fx} + F\rho xc^{fx} + \frac{F\rho\rho xxc^{fx}}{2} = (D + E + F)c^{fx} + (D\alpha + E\epsilon + F\rho)xc^{fx} + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\rho\rho)\frac{xxc^{fx}}{2}$. Mais $f = 0$, donne $c^{fx} = c^0 = 1$, donc on a $y = D + E + F + (D\alpha + E\epsilon + F\rho)x + (D\alpha\alpha + E\epsilon\epsilon + F\rho\rho)\frac{xx}{2} = l + px + qxx$. Donc la valeur complete de y sera $Ac^{mx} + Bc^{nx} + l + px + qxx$.

CCLXIV.

C'est ce dont on peut se convaincre de la façon suivante. Je reprends l'équation proposée $d^5y + ad^4y\,dx + b\,d^3y\,dx^2 = 0$. Faisons y . . . . $dy = z\,dx$

$$dz = q\,dx$$
$$dq = r\,dx$$
$$r = A'c^{fx}.$$

Nous aurons . . . . $ddy = dzdx = qdx^2$

$$d^3y = dqdx^2 = rdx^3$$

$$d^4y = ddrdx^3$$

$$d^5y = ddrdx^3.$$

Donc la transformée sera $d^2rdx^3 + adrdx^4 + brdx^5 = 0$, ou $ddr + adrdx + brdx^2 = 0$; équation de laquelle on tire (Art. CCLVIII.) $r = A'c^{mx} + B'c^{nx}$. Mais $dq = rdx$ donne $q = \int rdx + E = \int (A'c^{mx}dx + B'c^{nx}dx) + E = \frac{A'c^{mx}}{m} + \frac{B'c^{nx}}{n} + E$. Donc $q = A''c^{mx} + B''c^{nx} + E$. De même $dz = qdx$ donne $z = \int qdx + C = \int (A''c^{mx}dx + B''c^{nx}dx + Edx) + C$. Donc $z = A'''c^{mx} + B'''c^{nx} + Ex + C$. Enfin $dy = zdx$ donne $y = \int zdx + L = \int (A'''c^{mx}dx + B'''c^{nx}dx + Exdx + Cdx) + L$. Donc $y = Ac^{mx} + Bc^{nx} + l + px + qxx$.

CCLXV.

Application de la méthode du Chap. VII. Sect. II. à une formule plus générale que celle qu'on y a traitée.

SCHOLIE I. Si l'on vouloit maintenant appliquer la méthode de M. Euler à l'équation $d^ny + ad^{n-1}ydx + \ldots + Xdx^n = 0$, dans laquelle se trouve, comme on le voit, le terme Xdx^n, alors on remarquera que dans le cas où l'équation différentielle est, par exemple, du troisieme ordre, le Problême se réduit aux équations suivantes . . . . . $du + \rho udx + Xdx = 0$

$$du' + \rho'u'dx + Xdx = 0$$

$$du'' + \rho''u''dx + Xdx = 0,$$

& . . . . $x + ny + mz = u$

$$x + n'y + m'z = u'$$
$$x + n''y + m''z = u''.$$

Multipliant par $c^{\rho x}$ l'équation $du + \rho u dx + X dx = 0$, elle devient $duc^{\rho x} + \rho u dx c^{\rho x} + X dx c^{\rho x} = 0$; dont l'intégrale eſt $uc^{\rho x} + \int Xc^{\rho x} dx + P = 0$. Donc $u + c^{-\rho x}\int Xc^{\rho x} dx + Pc^{-\rho x} = 0$. On aura de la même maniere $u' + c^{-\rho' x}\int Xc^{\rho' x} dx + P'c^{-\rho' x} = 0$, $u'' + c^{-\rho'' x}\int Xc^{\rho'' x} dx + P''c^{-\rho'' x} = 0$. Subſtituant ces valeurs de u, u', u'' dans les trois ſecondes équations, on en tirera la valeur de y en x, laquelle ſera de la forme ſuivante $y = Ac^{fx} + Bc^{gx} + Dc^{hx} + \&c. + Ec^{fx}\int c^{-fx} X dx + Fc^{gx}\int Xc^{-gx} dx + Gc^{hx}\int Xc^{-hx} dx + \&c.$

CCLXVI.

Application de la formule à une équation différentielle du ſecond ordre.

Ainſi ſuppoſons qu'on ait à intégrer l'équation différentielle du ſecond ordre $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, on fera $y = Ac^{fx} Bc^{gx} + Ec^{fx}\int Xc^{-fx} dx + Fc^{gx}\int Xc^{-gx} dx$. Maintenant pour déterminer f, g, A, B, E, F, je ſubſtitue dans l'équation à la place de y, dy, ddy, leurs valeurs : cette opération me donne la transformée ſuivante,

$$\begin{array}{llll}
Ac^{fx}f^2dx^2 & + Bc^{gx}g^2dx^2 & + EdXdx & + EfXdx^2 + \\
+ Aac^{fx}fdx^2 & + aBc^{gx}gdx^2 & + FdXdx & + FgXdx^2 \\
+ Abc^{fx}dx^2 & + bBc^{gx}dx^2 & & + aEXdx^2 \\
 & & & + aFXdx^2 \\
 & & & + \quad Xdx^2
\end{array}$$
$$\begin{array}{ll}
+ Ef^2dx^2c^{fx}\int c^{-fx}Xdx & + Fg^2dx^2c^{gx}\int c^{-gx}Xdx \\
+ aEfdx^2c^{fx}\int c^{-fx}Xdx & + aFgdx^2c^{gx}\int c^{-gx}Xdx \\
+ bEdx^2c^{fx}\int c^{-fx}Xdx & + bFdx^2c^{gx}\int c^{-gx}Xdx = 0.
\end{array}$$

Or de cette équation on tire les six équations suivantes, en égalant à zéro les coefficiens de tous les termes analogues,

$$Aff + Aaf + Ab = 0$$
$$Bgg + Bag + Bb = 0$$
$$Eff + Eaf + Eb = 0$$
$$Fgg + Fag + Fb = 0$$
$$Ef + Fg + Ea + Fa + 1 = 0$$
$$E + F = 0$$

Donc on aura les valeurs de A, B, E, F, f, g. Donc on aura la valeur complete de y. Au reste on remarquera que A & B pourront être tout ce qu'on voudra.

S'il y a des racines égales, par exemple, si $f = g$, alors au lieu des termes $Ec^{fx} \int c^{-fx} X dx + Fc^{gx} \int c^{-gx} X dx$, on aura $pc^{fx} \int c^{-fx} X dx + qxc^{fx} \int c^{-fx} X dx - qc^{fx} \int xc^{-fx} X dx$.

Car dans ce cas il faut faire (Art. CCLIX.) $y = Ac^{fx + \alpha x} + Bc^{fx + \rho x} +$ &c. $+ Ec^{fx + \alpha x} \int c^{-fx - \alpha x} X dx + Fc^{fx + \rho x} \int c^{-fx - \rho x} X dx +$ &c. α & ρ étant des quantités infiniment petites différentes l'une de l'autre. Or $c^{fx + \alpha x} = c^{fx} + \alpha x c^{fx}$, $c^{fx + \rho x} = c^{fx} + \rho x c^{fx}$: donc en supposant $A + B = l$, $A\alpha + B\rho = m$, on aura $y = (l + mx) c^{fx} + Ec^{fx} \int c^{-fx} X dx - Ec^{fx} \int \alpha x c^{-fx} X dx + E\alpha x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - E\alpha x c^{fx} \int \alpha x c^{-fx} X dx + Fc^{fx} \int c^{-fx} X dx - Fc^{fx} \int \rho x c^{-fx} X dx + F\rho x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - F\rho x c^{fx} \int \rho x c^{-fx} X dx =$ (en supposant $E + F = p$, & $E\alpha + F\rho = q$) $(l + mx) c^{fx} + (p + qx) c^{fx} \int c^{-fx} X dx - (E + E\alpha x) . c^{fx} \int \alpha x c^{-fx} X dx - (F +$

$F\rho x) c^{fx} \int \rho x c^{-fx} X dx = (l + mx) c^{fx} + (p + qx)$ $c^{fx} \int c^{-fx} X dx - (E\alpha + E\alpha\alpha x) c^{fx} \int x c^{-fx} X dx -$ $(F\rho + F\rho\rho x) . c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$. Mais comme α & ρ font des quantités infiniment petites, les termes où se trouvent leurs quarrés font nuls par rapport aux autres : donc on aura $y = (l + mx) c^{fx} + p c^{fx} \int c^{-fx} X dx +$ $q x c^{fx} \int c^{-fx} X dx - q c^{fx} \int x c^{-fx} X dx$.

Si plusieurs racines étoient égales à zéro, par exemple, si on avoit $f = 0$, $g = 0$, alors cette supposition nous donneroit $c^{fx} = 1$; donc on auroit $y = l + mx +$ &c. $+ p \int X dx + q x \int X dx - q \int x X dx +$ &c.

Il est aisé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit suivre, s'il y avoit dans l'équation proposée plus de deux racines égales, ou égales à zéro.

CCLXVII.

Autres équations traitées par la méthode du Chap. VII. Sect. II.

SCHOLIE 2. En suivant les mêmes principes, on appliquera facilement la méthode de M. Euler aux équations différentielles du premier degré que nous avons résolues dans le Chapitre XV. par la méthode des coefficiens indéterminés : nous trouverons la forme que doivent avoir les valeurs indéterminées x, y, z &c. Nous allons le faire voir par un exemple.

CCLXVIII.

Soient proposées les deux équations

$$dx + a dy + (cx + ey) T dt + \theta dt = 0$$

$$dy + b\,dx + (fx + gy)\,T\,dt + F\,dt = 0,$$

dans lesquelles θ, T & F sont des fonctions quelconques de t. Je multiplie la seconde de ces deux équations par un coefficient indéterminé μ, & j'aurai

$$dx + a\,dy + (cx + ey)\,T\,dt + \theta\,dt = 0$$
$$\mu\,dy + b\mu\,dy + (fx + gy)\,\mu T\,dt + \mu F\,dt = 0:$$

je les ajoute ensemble, j'ai $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \left\{(c + \mu f)\,x + (e + g\mu)\,y\right\}T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$. Soit $(c + f\mu)\,x + (e + g\mu)\,y = (1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry$, on aura en comparant terme à terme

$$c + f\mu = R + b\mu R$$
$$e + g\mu = aR + \mu R,$$

donc l'équation devient $(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy + \left\{(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry\right\}T\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$.

Soit . . . . $(1 + b\mu)\,x + (a + \mu)\,y = u$,

on aura . . . $(1 + b\mu)\,Rx + (a + \mu)\,Ry = Ru$

$$(1 + b\mu)\,dx + (a + \mu)\,dy = du:$$

donc en substituant ces valeurs dans la derniere équation, j'aurai $du + RuT\,dt + (\theta + \mu F)\,dt = 0$, équation intégrable par la méthode de M. Bernoulli, exposée dans le Chapitre VII. Section I.

Rappellons-nous le procédé que cette méthode nous donne pour trouver la valeur de u en t, nous multiplierons l'équation par t', en supposant que t' soit une fonction de t, telle que les deux premiers termes deviennent une différentielle exacte. On aura donc $t'du + Rut'T\,dt + (\theta + \mu F)\,t'\,dt = 0$. Mais par l'hypothese précédente on a $dt' = Rt'Tdt$; donc $\frac{dt'}{t'} = RTdt$; donc $lt' = \int RTdt$; donc $t' = c^{R\int Tdt}$. Donc $c^{R\int Tdt}du + uc^{R\int Tdt}RTdt + (\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = 0$, équation dont l'intégrale eſt $uc^{R\int Tdt} + \int(\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt = Q$. Donc enfin $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + \mu F)$ $c^{R\int Tdt}dt$.

Maintenant on a . . . $\frac{c + f\mu}{1 + b\mu} = R$,

& . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = R$:

donc . . . . $\frac{e + g\mu}{a + \mu} = \frac{c + f\mu}{1 + b\mu}$: donc $e + g\mu + be\mu + bg\mu\mu = ac + af\mu + c\mu + f\mu\mu$, équation qui nous apprend que μ a deux valeurs. Soient m & m' ces deux valeurs de μ, au lieu de l'équation $u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + \mu F)c^{R\int Tdt}dt$, on aura les deux ſuivantes,

$$u = Qc^{-R\int Tdt} - c^{-R\int Tdt}\int(\theta + mF)c^{R\int Tdt}dt,$$
$$u' = Q'c^{-R'\int Tdt} - c^{-R'\int Tdt}\int(\theta + m'F)c^{R'\int Tdt}dt;$$

& au lieu de l'équation $(1 + b\mu)x + (a + \mu)y = u$; en ſuppoſant . . . . $1 + bm = i$, $a + m = n$

$1 + bm' = l$, $a + m' = h$,

on aura . . . . $ix + ny = u$

$lx + hy = u'$.

De ces deux équations on tire après un calcul fort ſimple . . . . $y = \frac{iu' - lu}{ih - ln}$,

$x = \frac{hu - nu'}{ih - ln}$.

Donc en ſubſtituant pour u, & u' leurs valeurs, on aura $x = Ac^{-R\int Tdt} + Bc^{-R'\int Tdt} + Ec^{-R\int Tdt}\int(\theta + mF)$ $c^{R\int Tdt}$

$c^{R\int T dt} dt + F c^{-R'\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{R'\int T dt} dt$. Donc en ſuppoſant . . . . $-R = f$
$-R' = g$
on a $x = A c^{f\int T dt} + B c^{g\int T dt} + E c^{f\int T dt} \int (\theta + mF) c^{-f\int T dt} dt + F c^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$. On trouvera de même $y = A' c^{f\int T dt} + B' c^{g\int T dt} + E' c^{f\int T dt} \int (\theta + mF) c^{-f\int T dt} dt + F c^{g\int T dt} \int (\theta + m'F) c^{-g\int T dt} dt$.

CCLXVIII.

Si l'on avoit à intégrer les trois équations ſuivantes,

$$dx + (ax + by + cz)\, dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)\, dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)\, dt = 0$$

on trouveroit en ſuivant les mêmes procédés

$$x = A c^{ft} + B c^{gt} + D c^{ht}$$
$$y = A' c^{ft} + B' c^{gt} + D' c^{ht}$$
$$z = A'' c^{ft} + B'' c^{gt} + D'' c^{ht}:$$

CCLXIX.

COROLLAIRE GENERAL. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre, que la forme qu'il faut donner aux indéterminées x, y, z, &c. dépend de deux choſes, 1°. De la forme de la valeur des u dans l'équation finale. 2°. Du nombre d'équations du premier degré auxquelles le Problême ſe réduira; ou ce qui revient au même, des valeurs de u, u', u'', &c. qui toutes ſont, comme on l'a vu, repréſentées par des équations ſemblables & de différents coefficients.

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du second ordre, représentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2 ddv+(c+fx^n) xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *est constant.*

CCLXX.

DAns les Chapitres IX, X & XI de la premiere Section, nous avons développé comment on trouvoit les cas d'intégrabilité de l'équation de Ricati & de quelques autres du premier ordre à trois ou quatre termes, qu'on ne peut intégrer généralement par les méthodes connues des Géometres jusqu'à présent. C'est un travail avantageux aux progrès de l'analyse, que de chercher ainsi des intégrales particulieres, lorsque l'art ne nous en donne point de générales. M. Euler l'a pratiqué pour les équations du second ordre représentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, dans laquelle dx est supposé constant.

Quel est l'auteur de cette méthode.

Mais avant d'exposer la méthode dont il se sert, nous allons placer ici la solution d'un Problême dont nous aurons lieu de faire l'application dans ce Chapitre.

Solution d'un Problême nécessaire pour la suite.

CCLXXI.

PROBLEME. Etant donnée l'intégrale particuliere d'une différentielle d'un ordre plus élevé que le premier, trouver par son moyen l'intégrale générale & complete de cette équation.

SOLUTION. Soit l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$, dans laquelle P, Q & R sont des fonctions de x, qu'on a intégrée pour un cas particulier en faisant $v = X$, c'est-à-dire, une fonction de x. Pour trouver l'intégrale complete, je fais $v = Xz$,

ce qui me donne . . $dv = Xdz + zdX$

$$ddv = zddX + 2dXdz + Xddz.$$

Je substitue ces valeurs dans la proposée ; cette substitution donne la transformée suivante,

$$\begin{aligned} &PzddX + 2PdXdz + PXddz = 0 \\ &+ QzdXdx + QXdxdz \\ &+ RzXdx^2 \end{aligned}$$

mais X est la valeur qu'il faut substituer à v dans l'équation $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = 0$; on aura donc $PzddX + QzdXdx + RzXdx^2 = 0$; donc en effaçant ces termes dans la transformée, il nous reste $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = 0$, ou bien $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = 0$. Or P & Q étant des fonctions de x, l'intégrale de cette équation est $2lX + \int\frac{Qdx}{P} + l\frac{dz}{dx} = A$; & en supposant $\int\frac{Qdx}{P} = s$, c le nombre dont le logarithme est l'unité, on aura $2lX + slc + l\frac{dz}{dx} = A$; ou bien $X^2c^s dz$

Dd ij

$= A\,dx$, ou $X^2\,dz = A\,c^{-s}\,dx$. Donc $z = A\int \frac{c^{-s}\,dx}{X^2}$; donc Xz ou $v = AX\int \frac{c^{-\int\frac{Q\,dx}{P}}\,dx}{X^2}$; équation qui eſt l'intégrale complette de $P\,ddv + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = 0$, en ſuppoſant que $v = X$ nous en donne une intégrale particuliere. Je paſſe maintenant à la méthode de M. Euler.

CCLXXII.

En quoi conſiſte la méthode.

Cette méthode conſiſte à transformer l'équation (M) en une ſerie telle que dans pluſieurs cas elle ſoit finie, & que nous ayons par conſéquent pour ces cas l'intégrale de la propoſée. Nous ramenerons enſuite cette équation du ſecond degré à une du premier, à laquelle nous donnerons différentes formes pour en déduire un grand nombre d'équations différentielles du premier ordre qui ſeront intégrables dans les mêmes cas que la formule (M).

On y peut faire uſage de deux ſeries différentes.

La formule (M) $(a + bx^n).\,x^2\,ddv + (c + fx^n).\,x\,dx\,dv + (g + hx^n).\,v\,dx^2 = 0$ peut ſe transformer en ſerie de deux façons différentes.

1°. En ſuppoſant $v = Ax^m + Bx^{m+n}\,Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} +$ &c.

2°. En ſuppoſant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Examinons ſéparément les deux ſeries que nous donnent ces deux transformées, & les conditions ſuivant leſquelles ces ſeries ſeront terminées.

CCLXXIII.

1°. En faisant dans $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)$ xdxdv $+(g+hx^n)vdx^2=0$, $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+$ &c. on aura $dv=mAx^{m-1}dx+(m+n)Bx^{m+n-1}dx+(m+2n)Cx^{m+2n-1}dx+(m+3n).Dx^{m+3n-1}dx+(m+4n).Ex^{m+4n-1}dx+$ &c.; & comme dx est constant, on aura $ddv=m.(m-1)Ax^{m-2}dx^2+(m+n).(m+n-1)Bx^{m+n-2}dx^2+(m+2n).(m+2n-1).Cx^{m+2n-2}dx^2+(m+3n).(m+3n-1).Dx^{m+3n-2}dx^2+(m+4n).(m+4n-1).Ex^{m+4n-2}dx^2+$ &c. Substituant dans l'équation $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n).xdxdv+(g+hx^n)xdx^2=0$, pour v, dv, ddv, ces valeurs, on aura la transformée suivante (N) $\{cm+g+am.(m-1)\}Ax^m dx^2+\{(cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a)B+(fm+h+bm.(m-1))A\}x^{m+n}dx^2+\{(fm+fn+h+(m+n).(m+n-1)b)B+(cm+2cn+g+(m+2n).(m+2n-1)a)C\}x^{m+2n}dx^2+\{(fm+2fn+h+(m+2n).(m+2n-1)b)C+(cm+3cn+g+(m+3n).(m+3n-1)a)D\}x^{m+3n}dx^2+\{(fm+3fn+h+(m+3n).(m+3n-1)b)D+(cm+4cn+g+(m+4n).(m+4n-1)a)E\}x^{m+4n}dx^2+\{(fm+4fn+h+(m+4n).(m+4n-1)b)E\}x^{m+5n}dx^2+$ &c. $=0$.

Premiere Serie.

J'égale maintenant à zéro les termes homogenes, j'aurai la valeur déterminée des coefficiens A, B, C, D, E, & de l'expofant m. D'abord on a $g + cm + am.(m-1) = 0$; & afin de ne pas tomber dans des quantités affectées de fignes radicaux, je regarde m comme un nombre connu, & je m'en fers pour déterminer g. J'aurai donc $g = -cm - am.(m-1)$.

Le fecond terme nous donne $\{cm + cn + g + (m+n).(m+n-1)a)\}B + (fm + h + bm.(m-1))A = 0$. Je fubftitue dans cette équation au lieu de g fa valeur, j'aurai $\{cm + cn - cm - am.(m-1) + (m+n).(m+n-1)a)\}B + \{fm + h + bm.(m-1)\}A = 0$, & en effaçant ce qui fe détruit, on a

$$B = \frac{-A.[h+fm+bm.(m-1)]}{cn+an.(2m+n-1)}.$$

Faifant les mêmes opérations fur les termes fuivants, on trouve $C = \frac{-B.[h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1)]}{2cn+2an.(2m+2n-1)}$

$$D = \frac{-C.[h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+2n-1)]}{3cn+3an.(2m+3n-1)}$$

$$E = \frac{-D.[h+f(m+3n)+b(m+3n).(m+3n-1)]}{4cn+4an.(2m+4n-1)}$$

&c.

On voit par là que A fera une quantité conftante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients fuivants. Il eft encore évident que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, fi un feul d'entre eux eft égal à zéro, tous les fuivants s'évanouiront, en forte que dans ces cas la valeur de v fera finie, & par conféquent l'équation (M) intégrable.

Suppofons, par exemple, que $h + fm + bm.(m-1)$

$= 0$, alors $B = 0$, donne $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & par conséquent $v = Ax^m$ & la transformée sera $\{m.(m-1).(a+bx^n)+m.(c+fx^n)+(g+hx^n)\}$ $Ax^m dx^2 = 0$, dont on connoît l'intégrale.

Si $h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1) = 0$, alors on aura $C = 0$, & par conséquent $D = 0$, $E = 0$; on aura donc $v = Ax^m + Bx^{m+n}$.

Si $h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+n-1) = 0$, alors $D = 0$ donne aussi $E = 0$, & $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n}$. Donc en général en supposant i un nombre entier positif ou zéro, l'équation proposée (M) sera intégrable toutes les fois qu'on aura $h+f(m+in)+b(m+in).(m+in-1) = 0$, ou $h = -f(m+in) - b(m+in).(m+in-1)$.

Equations de condition suivant lesquelles la premiere Serie sera terminée & la formule (M) intégrable.

CCLXXIV.

Il y a cependant des cas dans lesquels cette méthode ne nous donneroit point l'intégrale que nous demandons; ce sont ceux dans lesquels le dénominateur de nos coefficients s'évanouiroit; par exemple, si on avoit $c = -a.(2m+in+n-1)$.

CCLXXV.

Seconde Serie.

2°. Je suppose maintenant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Je fais les mêmes calculs que nous venons de faire plus haut : ils me donnent les valeurs de v, dv, ddv; je substitue ces valeurs dans l'équation (M), j'aurai la transformée suivante (P)

$$\left\{h + fk + bk.(k-1)\right\} A x^{k+n} dx^2 + \left\{(g + ck + ak.(k-1)) A + (h + f(k-n) + b(k-n).(k-n-1)) B\right\} x^k dx^2$$

$$+ \left\{(g + (k-n)c + (k-n).(k-n-1)a) B + (h + (k-2n)f + (k-2n).(k-2n-1)b) C\right\} x^{k-n} dx^2$$

$$+ \left\{(g + (k-2n)c + (k-2n).(k-2n-1)a) C + (h + (k-3n)f + (k-3n).(k-3n-1)b) D\right\} x^{k-2n} dx^2$$

$$+ \left\{(g + (k-3n)c + (k-3n).(k-3n-1)a) D + (h + (k-4n)f + (k-4n).(k-4n-1)b) E\right\} x^{k-3n} dx^2$$

$$+ \left\{g + (k-4n)c + (k-4n).(k-4n-1)a)\right\} E x^{k-4n} dx^2 + \&c.$$

Maintenant je fais sur cette transformée les mêmes opérations que j'ai faites sur la transformée (N); j'égale à zéro les termes homogenes : j'aurai par ce moyen les valeurs des coefficients A, B, C, D, E, & aussi celle de l'exposant k. Je trouve d'abord

$$h + fk + bk(k-1) = 0$$

& en supposant k connu & déterminé, on a

$$h = -fk - bk.(k-1).$$

Substituant dans les différentes équations des termes homogenes pour h cette valeur, je trouve

$$B = \frac{A.(g + ck + ak.(k-1))}{fn + bn.(2k-n-1)}$$

$$C = \frac{B.(g + c(k-n) + a(k-n).(k-n-1))}{2fn + 2bn.(2k-2n-1)}$$

$$D = \frac{C.(g + c(k-2n) + a(k-2n).(k-2n-1))}{3fn + 3bn.(2k-3n-1)}$$

$$E = \frac{D.(g + c(k-3n) + a(k-3n).(k-3n-1))}{4fn + 4bn(2k-4n-1)}$$

&c.

A sera ici comme dans la serie (N) une quantité constante arbitraire, de laquelle dépendra la détermination de tous les autres coefficients; & en général si on suppose dans cette serie (P)

$$g = -c(k-in) - a(k-in).(k-in-1),$$

i étant un nombre entier positif ou zéro, la serie s'arrêtera, & l'on aura l'intégrale de l'équation (M).

Par exemple, si $i=0$, on a B, C, D, E égaux à zéro, & par conséquent $v = Ax^k$: si $i=1$, on aura $v = Ax^k + Bx^{k-n}$, & $C=0$, $D=0$, $E=0$; & ainsi de suite.

Cas dans lesquels cette seconde Serie sera terminée & la formule (M) intégrable.

CCLXXVI.

Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il s'ensuit que l'équation $(a+bx^n)x^2ddv + (c+fx^n)xdxdv + (g+hx^n)vdx^2 = 0$, dans laquelle

$$g = -cm - am.(m-1)$$

& . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$

sera intégrable toutes les fois qu'on aura $f(-m-in) = h + b(m+in).(m+in-1)$, ou $c.(-k+in) = g + a(k-in).(k-in-1)$; ou bien en mettant pour h & g leurs valeurs, on trouvera l'équation intégrable, lorsque $f = \frac{[(m+in).(m+in-1) - k.(k-1)]b}{k-m-in} =$ (en faisant la division) $[1-k-m-in]b$; ou lorsque $c = \frac{[(k-in).(k-in-1) - m.(m-1)]a}{m-k+in} = (1-k-m+in)a$.

On a donc deux façons différentes de trouver une infinité de cas dans lesquels la proposée est intégrable; &

dans chacun de ces cas on trouvera algébriquement la valeur de v en x, en cherchant celle des coefficients B, C, D, E dont le nombre alors est limité.

CCLXXVII.

SCHOLIE. Il faut bien remarquer que les intégrales trouvées par la méthode précédente ne sont que des cas particuliers des intégrales completes, que nous a donnés la supposition de quelque constante $= 0$, ou $= \infty$. Mais en suivant la méthode indiquée dans le Problême qui est à la tête de ce Chapitre, on trouvera les intégrales completes de tous ces cas différents.

CCLXXVIII.

Réduction de la formule (M) en une équation différentielle du premier ordre.

Nous allons maintenant examiner les équations différentielles du premier degré qui résultent de notre formule (M), équations qu'on intégrera dans les mêmes cas dans lesquels on integre cette formule.

Soit suivant la méthode exposée dans le Chapitre VI. Sect. II. $v = c^{\int z\,dx}$, & par conséquent $z = \frac{dv}{v\,dx}$; on voit bien que connoissant la valeur de v, on aura sur le champ celle de z en x. L'hypothese précédente nous donne $dv = c^{\int z\,dx} z\,dx$; & comme dx est supposé constant, on a $ddv = c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2 dx^2)$. Substituant ces valeurs dans (M), on a pour transformée $(a+bx^n).x^2 c^{\int z\,dx}.(dx\,dz + z^2 dx^2) + (c+fx^n).c^{\int z\,dx} zx\,dx^2 + (g+hx^n).c^{\int z\,dx} dx^2 = 0$; laquelle devient après les réductions ordinaires (V) $(a+bx^n).x^2dz+(c+fx^n)zxdx+(a+bx^n).z^2x^2dx+(g+hx^n)dx=0$, équation différentielle du premier degré.

Cas dans lesquels la réduite (V) est intégrable.

Donc (Art. CCLXXIII.) en y supposant

$$g=-cm-am.(m-1),$$

& . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

elle sera intégrable, toutes les fois qu'on aura ou bien $f=\left\{\frac{(m+in).(m+in-1)-k.(k-1)}{k-m-in}\right\}b=(1-k-m-in)b$; ou bien $c=\left\{\frac{(k-in).(k-in-1)-m.(m-1)}{m-k+in}\right\}a=(1-k-m+in)a$; & de plus après avoir trouvé pour ces cas la valeur de v, on aura celle de z au moyen de l'équation $z=\frac{dv}{vdx}$.

CCLXXIX.

Transformations de l'équation (V) en d'autres de trois termes.

SCHOLIE. Mais afin que l'on voie mieux les équations particulieres renfermées dans cette équation générale (V), transformons-la dans une autre qui n'ait que trois termes de la forme suivante $Pdz+Qz^2dx+Rdx=0$, P, Q & R étant des fonctions de x. Or nous pouvons faire cette transformation de plusieurs manieres différentes que nous allons examiner ici séparément.

CCLXXX.

Premiere transformation.

PREMIERE TRANSFORMATION. Soit dans l'équation (V) $z=Ty$, T étant une fonction inconnue de x, on aura

$dz = ydT + Tdy$; & la transformée sera $(a+bx^n).yx^2dT + (a+bx^n).x^2Tdy + (c+fx^n).Tyxdx + (a+bx^n)\,y^2T^2x^2dx + (g+hx^n)\,dx = 0$. Soit maintenant $(c+fx^n).Tyxdx + (a+bx^n).yx^2dT = 0$, ou en effaçant yx qui est commun aux deux termes $(c+fx^n).Tdx + (a+bx^n).xdT = 0$, on a $\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x} + \frac{dT}{T} = 0$, équation de laquelle il faut tirer la valeur de T.

Pour cela je donne au premier membre la forme suivante $\frac{acx^{-1}dx + afx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$; j'y ajoute & j'en retranche en même temps $\frac{bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, j'aurai $\frac{acx^{-1}dx + bcx^{n-1}dx + afx^{n-1}dx - bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, ou bien $\frac{cdx}{ax} + \frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a.(a+bx^n)}$. L'équation entiere sera donc $\frac{Cdx}{ax} + \frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a.(a+bx^n)} + \frac{dT}{T} = 0$. Son intégrale est, comme on le sait, $\frac{c}{a}lx + \frac{(af-bc)}{abn}.l(a+bx^n) + lT = 0$, en supposant la constante $= 0$; donc $lT = \frac{(bc-af)}{abn}\,l(a+bx^n) - \frac{c}{a}lx$; d'où l'on tire en repassant des logarithmes aux nombres $T = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$.

Par conséquent la supposition qu'on doit faire pour $z = Ty$, est celle-ci $z = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}\,y}{x^{\frac{c}{a}}}$. Cette ſuppoſition nous donne $dz = \frac{(bc-af)}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}-1} yx^{n-\frac{c}{a}-1} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} x^{-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{-\frac{c}{a}-1} dx$. Donc en ſubſtituant pour z & dz ces valeurs dans l'équation (V), on aura celle-ci $\frac{(bc-af)}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{n+1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}} dy - \frac{c}{a} \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (c+fx^n) \cdot (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} yx^{1-\frac{c}{a}} dx + (a+bx^n)^{\frac{2bc-2af}{abn}+1} y^2 x^{2-\frac{2c}{a}} dx + (g+hx^n) dx = 0$. Pour réduire cette équation, je la diviſe par la quantité $(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1} x^{2-\frac{c}{a}}$ qui multiplie dy, j'ai $dy - \frac{cydx}{ax} - \frac{(af-bc)yx^{n-1}dx}{a \cdot (a+bx^n)} + \frac{(c+fx^n)ydx}{(a+bx^n) \cdot x} + (a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+hx\ \ )x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$.

Maintenant comme $\frac{cydx}{ax} + \frac{(af-bc)yx^{n-1}dx}{a \cdot (a+bx^n)}$ & $\frac{(c+fx^n)ydx}{(a+bx^n) \cdot x}$ ſont deux expreſſions différentes de la même grandeur, & que dans l'équation précédente elles ſont de ſignes contraires, elles s'y détruiſent. Conſéquemment il ne nous reſte plus que (A) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$; Equation transformée (A) qui n'a plus que trois termes.

équation intégrable, si $g = -cm - am.(m-1)$
& . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$.
toutes les fois qu'on aura ou bien $f = (1-k-m-in)b$,
ou bien . . . . $c = (1-k-m+in)a$,
i représentant un nombre entier quelconque.

Examinons séparément les cas particuliers de cette équation.

CCLXXXI.

Equations particulieres de trois termes qu'on peut tirer de cette équation.

Supposons 1° que $bc = af$, l'équation (A) devient

$$(B)\quad dy + y^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g + hx^n)\, x^{\frac{c}{a}-2}\, dx}{a + bx^n} = 0.$$

Soit $x^{\frac{a-c}{c}} = t$, on aura $x = t^{\frac{a}{a-c}}$; $dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt$; $x^{-\frac{c}{a}} = t^{\frac{-c}{a-c}}$; $x^{\frac{c}{a}-2} = t^{\frac{c-2a}{a-c}}$. Faisant ces substitutions dans l'équation précédente, on a celle-ci $dy + \frac{a}{a-c} y^2 t^{\frac{a-c}{a-c}-1} dt + \frac{a.(g + ht^{\frac{an}{a-c}})\, t^{\frac{c-2a+a}{a-c}-1}\, dt}{(a-c).(a + bt^{\frac{an}{a-c}})} = 0$; c'est-à-dire qu'en réduisant on aura (Y) $dy + \frac{ay^2 dt}{a-c} +$

Premiere équation particuliere.

$$\frac{a.(g + ht^{\frac{an}{a-c}})\, dt}{(a-c).(a + bt^{\frac{an}{a-c}})\, tt} = 0.$$

Donc (Corollaire, Article CCLXXVI.) cette équation (Y) sera intégrable, si

Dans quels cas elle est intégrable.

$g = -cm - am\,(m-1)$
& . . . . $h = -fk - bk\,(k-1)$;

toutes les fois que . . . $f = (1 - k - m - in)\,b$,
ou que . . . . $c = (1 - k - m + in)\,a$.
Donc à cause de l'hypothese présente de $bc = af$, qui donne $f = \frac{bc}{a}$, l'équation (Y) sera intégrable, si

$$g = -cm - am\,.\,(m-1)$$

& . . . . $h = -\frac{b}{a}\,\{ck + ak\,.\,(k-1)$,
toutes les fois qu'on aura $c = (1 - k - m - in)$,
ou . . . . $c = (1 - k - m + in)$;
c'est-à-dire, toutes les fois qu'on aura $\frac{c + ak + (m-1)\,a}{an} = \pm i =$ par conséquent un nombre entier positif ou négatif.

CCLXXXII.

Si de plus $c = 0$, l'équation (Y) devient $dy + y^2 dt + \frac{(g + ht^n)\,dt}{(a + bt^n)\,tt} = 0$, & en mettant pour g & h leurs valeurs trouvées plus haut, on a (Z) $dy + y^2\,dt = \frac{(am\,.\,(m-1) + bk\,.\,(k-1)\,t^n)\,dt}{(a + bt^n)\,tt}$; équation intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{k + m - 1}{n} = \pm i$. Donc si on suppose alternativement k, ou $m = 0$, dans le premier cas l'équation $dy + y^2\,dt = \frac{am\,.\,(m-1)\,dt}{(a + bt^n)\,tt}$ sera intégrable, toutes les fois que $\frac{m-1}{n}$ sera égal à un nombre entier positif ou négatif; & si on suppose $m = 0$, l'équation $dy + y^2\,dt = \frac{bk\,.\,(k-1)\,t^n\,dt}{(a + bt^n)\,tt}$ sera intégrable, lorsque $\frac{k-1}{n}$ sera égal à un nombre entier positif ou négatif.

Seconde équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIII.

Mais si l'on a $c=a$, alors l'équation (B) devient $dy + \frac{y^2 dx}{x} = -\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x}$; & en mettant pour g & pour h leurs valeurs, on a (X) $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(amm+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x}$; équation intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m}{n}$ égal à un nombre entier positif ou négatif. Donc en supposant dans cette derniere équation $k=0$, on aura la suivante $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{ammdx}{(a+bx^n)x}$; intégrable si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif; & en y supposant $m=0$, on aura cette autre équation $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{bkkx^n dx}{a+bx^n}$; intégrable toutes les fois que $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier positif ou négatif.

Troisieme équation particuliere.

Dans quels cas intégrable.

CCLXXXIV.

Reprenons maintenant l'équation (A) $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$, & supposons que dans cette équation $c=-a(n-1)$ on aura . . . . $x^{\frac{c}{a}} = x^{-n+1}$

$$x^{\frac{c}{a}-2} = x^{-n-1}$$

$$\frac{bc-af}{abn} = \frac{b-f}{bn} - 1$$

$$\frac{bc-af}{abn} + 1 = \frac{b-f}{bn}.$$

Donc

Donc l'équation (A) devient (D) $dy +$

$$\frac{(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} y^2 x^{n-1} dx}{a+bx^n} + \frac{(g+hx^n)\,dx}{x^{n+1}\cdot(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}}} = 0.$$

Soit dans cette équation (D) $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t$,

on aura . . . $a+bx^n = t^{\frac{bn}{b-f}}$

$$x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$$

$$x = \frac{\left(t^{\frac{bn}{b-f}} - a\right)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

$$dx = \frac{\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1}\, dt}{b-f}.$$

Donc en faisant ces substitutions dans l'équation (D), on aura la transformée suivante,

$$dy + \frac{y^2\cdot\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1}\cdot t\,dt}{(b-f)\, t^{\frac{bn}{b-f}}\cdot\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$+ \frac{\left\{g+h\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)\right\}\cdot\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot t^{\frac{bn}{b-f}-1}\, dt}{(b-f)\cdot\left(\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}+1} t}$$

$= 0$; c'est-à-dire, qu'en réduisant on a (E) $dy + \frac{y^2 dt}{b-f}$

Quatrieme équation particuliere.

$$+\frac{b\,.\,(bg-ah+ht^{\frac{bn}{b-f}})\,t^{\frac{bn}{b-f}-2}\,dt}{(b-f)\,.\,(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^2}=0.$$

Dans quels cas elle est intégrable.

Si donc on suppose dans cette équation $g=-cm-am(m-1)$; c'est-à-dire à cause de $c=-a(n-1)$, $g=am\,.\,(n-1)-am\,.\,(m-1)=am\,.\,(n-m)$; & $h=-fk-bk\,.\,(k-1)$, elle sera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{k+m-n}{n}$ égale à i, c'est-à-dire à un nombre entier positif; ou bien encore lorsqu'on aura $\frac{f+b\,(m+k-1)}{bn}$ égal à un nombre entier négatif.

Si l'on a de plus dans l'équation $dy+\frac{y^2dt}{b-f}+\left\{b\,.\,abm(n-m)+afk+abk(k-1)-fk-bk\,.\,(k-1)\,t^{\frac{bn}{b-f}}\right\}\times\frac{t^{\frac{bn}{b-f}-2}\,dt}{(b-f)\,.\,(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^2}=0$, si l'on a, dis-je, $f=b-bn$,

alors on aura . . . . . . $b-f=bn$

$$\frac{bn}{b-f}=1,$$

& l'équation précédente devient celle-ci $dy+\frac{y^2dt}{bn}+\frac{b\,[am\,.\,(n-m)-ak\,.\,(n-k)+k\,.\,(n-k)\,t]\,dt}{nt\,.\,(t-a)^2}=0$, laquelle sera intégrable dans le cas où $\frac{k+m}{n}$ sera égal à $\pm i$, c'est-à-dire à un nombre entier positif ou négatif. De là il suit qu'en supposant $k=n$, l'équation $dy+\frac{y^2dt}{bn}+\frac{abm\,.\,(n-m)\,dt}{nt\,.\,(t-a)^2}=0$ sera intégrable, si $\frac{m}{n}$ est égal à un nombre entier quelconque. Si $m=n$, l'équation $dy+\frac{y^2dt}{bn}-\frac{[abk\,.\,(n-k)+bk\,.\,(n-k)\,t^2]\,dt}{nt\,.\,(t-a)^2}=0$ sera intégrable, lorsque $\frac{k}{n}$ sera un nombre entier quelconque.

CCLXXXV.

Seconde transformation pour l'équation (V).

SECONDE TRANSFORMATION. Soit reprise l'équation (V) $(a+bx^n)x^2dz+(c+fx^n)xzdx+(a+bx^n)z^2x^2dx$ $+(g+hx^n)dx=0$, dans laquelle on suppose

$$g=-cm-am.(m-1)$$

& . . . . . $h=-fk-bk.(k-1)$,

& qui est alors intégrable, toutes les fois que

$$f=(1-k-m-in)b,$$

ou que . . . . $c=(1-k-m+in)a$,

nous la transformerons encore en une équation de trois termes en faisant $z=Ty+S$, T & S représentent des fonctions de x. Cette supposition nous donne

$$dz=Tdy+ydT+dS$$

$$z^2=T^2y^2+2TSy+SS,$$

& pour transformée l'équation suivante (F) $(a+bx^n)$ $Tx^2dy+(a+bx^n)x^2ydT+(a+bx^n)x^2dS+$ $(c+fx^n)Tyxdx+(c+fx^n)Sxdx+(a+bx^n)$ $T^2y^2x^2dx+2(a+bx^n)TSyx^2dx+(a+bx^n)S^2x^2dx$ $+(g+hx^n)dx=0$. Maintenant afin de faire évanouir le terme affecté de y, supposons $(a+bx^n)xdT+2.$ $(a+bx^n)TSxdx+(c+fx^n).Tdx=0$, on aura $\frac{dT}{T}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}=0$. Soit $T=x^p$, de telle forte qu'après avoir divisé par $(a+bx^n)Tx^2$, le coefficient de ydx soit une puissance simple de x ; on aura $\frac{pdx}{x}+2Sdx+\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)dx}=0$, & par conséquent

Ff ij

$\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{(a+bx^n)x} = 0$: donc $S = -\frac{p}{2x}$ $\frac{-c-fx^n}{2x.(a+bx^n)} = \frac{-ap-c-(f+bp)x^n}{2x.(a+bx^n)}$: donc $dS =$

$$-\frac{(fnx^{n-1}+bnpx^{n-1})dx \,.\, 2x(a+bx^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$$-\frac{(2adx+2b(n+1)x^n dx).-(c+ap+(f+bp)x^n)}{4x^2.(a+bx^n)^2}$$

$=$ (en réduisant)

$$\frac{a(c+ap)dx-a(n-1).(f+bp)x^n dx+b(f+bp)x^{2n}dx+b(n+1).(c+ap)x^n dx}{2x^2.(a+bx^n)^2}:$$

substituant dans l'équation (F) pour T, T^2, S, S^2, dS leurs valeurs, effaçant le terme que nous y avons supposé égal à zéro & réduisant, on aura $(a+bx^n)x^{p+2}dy$ $+(a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$

$$\frac{2acdx+2a^2pdx-2afnx^n dx+2afx^n dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abpx^n dx+2bfx^{2n}dx+2b^2px^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2bcnx^n dx+2bcx^n dx+2abpx^n dx-ccdx}{4.(a+bx^n)}$$

$$\frac{-2cfx^n dx-ffx^{2n}dx+a^2p^2dx}{4.(a+bx^n)} +$$

$$\frac{2abp^2x^n dx+b^2p^2x^{2n}dx}{4.(a+bx^n)} + gdx + hx^n dx = 0;$$

& en divisant par $a+bx^n$ les termes dont ce binome est un diviseur exact, on aura la transformée suivante $(a+bx^n).x^{p+2}dy + (a+bx^n)y^2x^{2p+2}dx +$ $\frac{p.(p+2).(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^n dx}{2}$

$\frac{-ccdx + 2n(bc-af)x^n dx - 2cfx^n dx - ffx^{2n} dx}{4.(a+bx^n)} = 0$; & enfin en divisant par $(a+bx^n)x^{p+2}$, on a l'équation

Equation transformée (H).

(H) $dy + y^2 x^p dx + \frac{p.(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(c+2g)dx + (f+2h)x^n dx}{2x^{p+2}.(a+bx^n)}$ $\frac{-(c+fx^n)^2 dx + 2n(bc-af)x^n dx}{4.(a+bx^n)^2 x^{p+2}} = 0$. Or cette équation sera intégrable, dans les cas où g étant $= -cm - am(m-1)$ & $h = -fk - bk.(k-1)$, on aura $f = (1-k-m-in)b$, ou $c = (1-k-m+in)a$; c'est-à-dire, toutes les fois que l'une des deux quantités $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$, ou $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ sera égale à un nombre entier positif.

Dans quels cas elle est intégrable.

CCLXXXVI.

Equations particulieres qu'on peut tirer de la transformée (H).

Maintenant faisons 1°. $bc = af$, ou $f = \frac{bc}{a}$, l'équation (H) devient celle-ci $dy + y^2 x^p dx + \frac{p.(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(ac+2ag)dx + (bc+2ah)x^n dx}{2ax^{p+2}.(a+bx^n)} - \frac{(cc + \frac{2bccx^n}{a} + \frac{b^2c^2x^{2n}}{aa})dx}{4x^{p+2}.(a+bx^n)^2}$ $= 0$; c'est-à-dire, en réduisant $dy + y^2 x^p dx + \frac{p.(p+2)dx}{4x^{p+2}}$ $+ \frac{(g+hx^n)dx}{x^{p+2}.(a+bx^n)} + \frac{cdx}{2ax^{p+2}} - \frac{ccdx}{4aax^{p+2}} = 0$; ou bien en mettant au même dénominateur les deux derniers termes & retranchant en même temps $\frac{aadx}{4aax^{p+2}}$, on aura (L) $dy + y^2x^p dx + \frac{(p+1)^2 dx}{4x^{p+2}} - \frac{(a-c)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}$ $= 0$. En supposant dans cette équation $g = -cm -$

Premiere équation particuliere.

Quels sont ses cas d'intégrabilité.

$am(m-1)$ & $h = -\frac{b}{a} \times ck + ak(k-1)$, elle sera intégrable toutes les fois que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ sera un nombre entier positif ou négatif. Faisons de plus dans cette équation $c = a$, on aura en mettant pour g & h leurs valeurs, $dy + y^2 x^p dx + \frac{(p+1)^2 dx}{4x^{p+2}} - \frac{(amm + bkkx^n) dx}{(a+bx^n) x^{p+2}} = 0$, qui sera intégrable si $\frac{k+m}{n}$ est égal à un nombre entier quelconque.

CCLXXXVII.

2°. Soit dans l'équation (H) $b = 0$, elle se change en celle-ci $dy + y^2 x^p dx + \frac{p.(p+2) dx}{4x^{p+2}} + \frac{(2ac+4ag) dx}{4a^2 x^{p+2}}$

$$+ \frac{(af+2ah) x^n dx}{2a^2 x^{p+2}} - \frac{(cc + 2cfx^n + ffx^{2n} + 2afnx^n) dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0;$$

& en retranchant & ajoutant comme plus haut $\frac{dx}{4x^{p+2}}$,

Seconde équation particuliere.

on a (O) $dy + y^2 x^p dx + \frac{(p+1)^2 a^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} - \frac{(a-c)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{4ag\, dx}{4a^2 x^{p+2}} + \frac{(af + 2ah - afn - cf) x^n dx}{2aax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n} dx}{4aax^{p+2}} = 0$,

Dans quels cas elle se peut intégrer.

équation intégrable, si . . $g = -cm - am(m-1)$

& . . . . $h = -fk$,

toutes les fois qu'on aura $f = (1-k-m-in)b$, ou $c = (1-k-m+in)a$, c'est-à-dire toutes les fois que $f = 0$, ou que $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ est un nombre entier positif. Dans le cas où $f = 0$, l'équation (O) en y supposant $(p+1)^2 a^2 - (a-c)^2 + 4ag = AA$ devient $dy + A^2 x^{-p-2} dx + y^2 x^p dx = 0$, qui est l'équation de Ricati. Donc (Sect. I. Chap. IX. Art. CXIX.) elle s'intégrera toutes les fois qu'on aura $-p-2=\frac{(2h\pm 1)\times -p-4h}{2k\mp 1}$, h repréſentant un nombre entier poſitif f en commençant par l'unité, c'eſt-à-dire, lorſque p ſera $=1$; ce qui eſt évident, puiſqu'alors l'équation devient $x^3dy+y^2x^4dx+adx=0$, laquelle eſt dans le cas de la formule de M. Bernoulli traitée dans le Chapitre VII. Sect. I.

CCLXXXVIII.

Soit dans l'équation (O) $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, & $af-naf-2afk-cf=a\epsilon f$, on aura $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a(p+1)^2}{4a}$, & $c=a-na-2ak-a\epsilon$. Donc mettant cette valeur de c dans g, on a $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\epsilon)^2}{4}-\frac{a(p+1)^2}{4}$. Après avoir fait ces ſubſtitutions, on a (Q) $dy+y^2x^pdx+\frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}+\frac{\epsilon fx^ndx}{2ax^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4a^2x^{p+2}}=0$. Dans cette équation on doit avoir $g=-cm-am.(m-1)$: mais $c=a-na-2ak-a\epsilon$, & $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\epsilon)^2}{4}-a(p+1)^2$; donc on aura $g=am.(n+2k+\epsilon)-amm$. Donc $4m\times(n+2k+\epsilon)=\alpha+(n+2k+\epsilon)^2-(p+1)^2+4mm$. Donc $(n+2k+\epsilon)^2-4m.(n+2k+\epsilon)+4mm=(p+1)^2-\alpha$. Donc enfin $n+2k+\epsilon=nm\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}$; & l'équation ſera intégrable, toutes les fois qu'on aura $\frac{m-n-k-\epsilon}{n}$, ou $\frac{-n-\epsilon\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}}{2n}$ égal à un nombre entier poſitif.

Troiſieme équation particuliere.

Dans quels cas elle ſe peut intégrer.

CCLXXXIX.

Soit dans l'équation (Q) $\alpha=0$ & $\epsilon=0$, elle devient

Quatrieme équation particuliere.

Ses cas d'intégrabilité.

$dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa}$, intégrable toutes les fois qu'on aura $\frac{-n \pm (p+1)}{2n}$ égal à un nombre entier positif. C'est ce qui est évident par ce que nous avons déja vu tant de fois dans ce Chapitre, & ce qu'on retrouveroit encore par l'Article CXIX. du Chapitre IX. Sect. I. puisque cette équation est celle de Ricati, qui est par conséquent intégrable dans tous les cas où $m = \frac{(2h \pm 1) - n - 4h}{2h \mp 1}$, h représentant un nombre entier positif. Mettant ici pour m sa valeur $2n - p - 2$, & pour n sa valeur p, on retrouvera pour l'intégrabilité la même condition que ci-dessus.

CCXC.

Cinquieme équation particuliere (φ).

Ses cas d'intégrabilité.

Soit dans (Q) α seulement $= 0$, on aura (φ) $dy + y^2 x^p dx + \frac{\epsilon f x^n dx}{2ax^{p+2}} - \frac{ffx^{2n}dx}{4a^2 x^{p+2}} = 0$; équation intégrable, toutes les fois que $\frac{-n-\epsilon \pm (p+1)}{2n} = i$, c'est-à-dire un nombre entier positif. On aura donc $-n - \epsilon \pm (p+1) = 2in$, & par conséquent $\epsilon = \pm (p+1) - n.(2i+1)$: de-là il suit que l'équation $dy + y^2 x^p dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{fn(2i+1) \mp f(p+1)x^{n-p-2}dx}{2a}$ est toujours intégrable. Si dans cette équation on suppose 1°. $p = 0, n = 2$; 2°. $p = 0, n = 1$; 3°. $p = -1, n = 1$, on aura les équations suivantes qui seront intégrables

Autres équations particulieres intégrables qui viennent de l'équation (φ).

$dy + y^2 dx = \frac{ffx^2 dx}{4aa} + \frac{f(4i+2 \mp 1)dx}{2a}$, $dy + y^2 dx = \frac{ffdx}{4aa} + \frac{f(2i+1 \pm 1)dx}{2ax}$, $dy + \frac{ydx}{x} + \frac{ffxdx}{4aa} + \frac{f(2i+1)dx}{2a}$.

CCXCI.

CCXCI.

Soit dans l'équation (Q) ϵ seulement $=0$, on aura l'équation suivante (ξ) $dy+y^2x^p\,dx=\frac{ffx^{2n-p-2}\,dx}{4aa}-\frac{\alpha\,dx}{4x^{p+2}}$, laquelle sera intégrable toutes les fois qu'on aura $-\frac{n\pm\sqrt{(p+1)^2-\alpha}}{2n}=i$, c'est-à-dire un nombre entier positif. On aura donc $2in+n=\pm\sqrt{[(p+1)^2-\alpha]}$; & en élevant au quarré $n^2(2i+1)^2=(p+1)^2-\alpha$. Donc $\alpha=(p+1)^2-n^2.(2i+1)^2$. Donc l'équation $dy+y^2x^p\,dx=\frac{ffx^{2n-p-2}\,dx}{4aa}+\frac{[n^2(2i+1)^2-(p+1)^2]\,dx}{4x^{p+2}}$ est toujours intégrable. Donc en supposant $p=0$, $\frac{ff}{4aa}=A$, on aura l'équation $dy+y^2\,dx=Ax^{2n-2}\,dx+\frac{[n^2.(2i+1)^2-1]\,dx}{4xx}$ qui est toujours intégrable. Donc en supposant successivement $p=0$, $n=1$; $p=0$, $n=2$; $p=0$, $n=3$, &c. on aura les équations suivantes

Sixieme équation particuliere (ξ).

Ses cas d'intégrabilité.

$$dy+y^2\,dx=A\,dx+\frac{i(i+1)\,dx}{xx}$$
$$dy+y^2\,dx=Ax^2\,dx+\frac{4i.(i+1)\,dx}{xx}$$
$$dy+y^2\,dx=Ax^4\,dx+\frac{9i.(i+1)\,dx}{xx},$$

Autres équations intégrables qui viennent de l'équation (ξ).

& une infinité d'autres qui seront intégrables.

CCXCII.

Je reprends l'équation (Q) $dy+y^2x^p\,dx=\frac{(ffx^{2n}-2a\epsilon fx^n-\alpha a^2)\,dx}{4aax^{p+2}}$, & je suppose $\alpha=-\epsilon^2$, on aura $dy+y^2x^p\,dx=(ffx^{2n}-2a\epsilon fx^n+a^2\epsilon^2)\frac{dx}{4aax^{p+2}}$

Septieme équation particuliere.

Dans quels cas elle est intégrable.

$= \frac{(fx^n - a\epsilon)^2 dx}{4aax^{p+2}}$; & cette équation sera intégrable, toutes les fois que $-n-\epsilon-\sqrt{(p+1)^2+\epsilon^2} = 2in$. Donc alors on aura $2in+n+\epsilon = \pm\sqrt{(p+1)^2+\epsilon^2}$; & en quarrant les deux membres, on a $4i^2n^2+4in^2+4\epsilon in+n^2+2\epsilon n+\epsilon\epsilon = (p+1)^2+\epsilon\epsilon$; donc en réduisant $\epsilon = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n.(2i+1)}$. Donc l'équation $dy+y^2x^p dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-(p+1)^2}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x^{p+2}}$ est toujours intégrable. Donc en donnant successivement à p & à n différentes valeurs, on aura différentes équations intégrables. Soit, par exemple, $p=0$, on aura l'équation intégrable $dy+y^2dx = \left(\frac{n^2.(2i+1)^2-1}{4n.(2i+1)} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \times \frac{dx}{xx}$. Si $p=-1$, on aura pour lors $dy+\frac{y^2dx}{x} = \left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{fx^n}{2a}\right)^2 \frac{dx}{x}$ qui est intégrable.

CCXCIII.

Soit dans l'équation (Q) $x^{p+1} = t$,

on aura . . . . $x = t^{\frac{1}{p+1}}$

$$x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$$

$$x^{p+2} = t^{\frac{p+2}{p+1}}$$

$$dx = \frac{1}{p+1} t^{\frac{-p}{p+1}} dt$$

$$\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$$

$$x^p dx = \frac{dt}{p+1}.$$

Donc la transformée sera $dy + \frac{y^2 dt}{p+1} = \left\{ \frac{n^2 (2i+1)^2 - (p+1)^2}{2n \cdot (2i+1)} - \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a} \right\} \times \frac{dt}{(p+1) tt}$; ou $(p+1)\ dy + y^2 dt = \left\{ \frac{n^2 \cdot (2i+1)^2 - (p+1)^2}{2n \cdot (2i+1)} + \frac{f t^{\frac{n}{p+1}}}{2a} \right\} \times \frac{dt}{tt}$; équation qui eſt intégrable.

Huitieme équation particuliere intégrable.

CCXCIV.

Application de la méthode précédente à une formule différentielle du ſecond ordre plus compliquée que la formule (M).

En ſuivant cette méthode on trouveroit encore les cas d'intégrabilité d'un grand nombre d'équations différentielles qui ne ſont pas intégrables abſolument ; la difficulté ne conſiſteroit que dans la longueur du calcul. Par exemple, ſi l'on veut chercher les cas d'intégrabilité de l'équation $(a + bx^n + cx^{2n})\, x^2 ddv + (f + gx^n + hx^{2n})\, xdxdv + (p + qx^n + rx^{2n}) . vdx^2 = 0$, on les trouveroit en faiſant $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. ou bien $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} +$ &c. On détermineroit les coefficients A, B, C, D, &c. de la même maniere que nous avons déterminé ceux des Articles CCLXXIII. & CCLXXV. ; mais on doit remarquer ici qu'il faut que deux de ces coefficients ſoient égaux à zéro, pour que les autres s'évanouiſſent. C'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre en mettant dans la propoſée pour v, dv, ddv leurs valeurs tirées de l'une des deux ſeries précédentes. Par exemple, ſi l'on ſe ſert de la ſerie premiere, on trouvera qu'afin que $v = Ax^m$ il faut que $p + fm + am(m-1) = 0$, & qu'en même temps $q + gm +$

$bm.(m-1)=0$ & $r+hm+cm(m-1)=0$. Pour que $v=Ax^{m}+Bx^{m+n}$ il sera nécessaire qu'on ait

$$1^{\circ}.\ B=A.\left\{q+gm+bm(m-1)\right\}$$

$$2^{\circ}.\ 0=p+fm+am(m-1)$$

$$3^{\circ}.\ 0=r+h(m+n)+c(m+n).(m+n-1)$$

$4^{\circ}.$ $n^{2}.\left\{h+c(2m+n-1)\right\}.\left\{f+a(2m+n-1)\right\}+\left\{q+gm+bm.(m-1)\right\}.\left\{q+g.(m+n)+b.(m+n).(m+n-1)\right\}=0$, & ainsi de suite.

CHAPITRE X.

Examen de plusieurs équations différentielles du second ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

CCXCV.

Application à une équation différentielle du second ordre.

THEOREME. L'Equation différentielle du second ordre $ddu+\xi dudx+uXdx^{2}+\zeta dx^{2}=0$ est intégrable dans les mêmes cas dans lesquels on peut intégrer la suivante $ddu+\xi dudx+uXdx^{2}=0$, qui, comme on le voit, a un terme de moins. ξ, X & ζ dans la premiere équation, ξ & X dans la seconde sont des fonctions de x.

DEMONSTRATION. Je suppose $du+tQdx=0$; t & Q étant deux indéterminées; substituant pour du & ddu

leurs valeurs dans la propofée, la divifant enfuite par Qdx & changeant les fignes, on aura $dt + \frac{tdQdx}{Qdx} + t\xi dx - \frac{uXdx}{Q} - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. A cette équation j'ajoute l'équation $du + tQdx = 0$, j'aurai (A) $du + dt + (tQ + \frac{tdQ}{Qdx} + \xi t - \frac{uX}{Q}) \times dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. Or cette équation feroit intégrable, fi elle fe pouvoit ramener à la forme fuivante $du + dt + (u+t).Pdx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$, P & Q étant des fonctions connues de x. Car en faifant $u+t = r$, $du + dt = dr$, on auroit $dr + rPdx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$; équation réduite à la formule du Chapitre VII. & qui nous donne $r = Gc^{-\int Pdx} + c^{-\int Pdx}\int \frac{\zeta}{Q} c^{\int Pdx} dx$. Donc (B) $u = Gc^{-\int Pdx} + c^{-\int Pdx}\int \frac{\zeta}{Q} c^{\int Pdx} dx - t$; $du = -Gc^{-\int Pdx} Pdx - c^{-\int Pdx} Pdx \int \frac{\zeta}{Q} c^{\int Pdx} dx + \frac{\zeta}{Q} dx - dt$. Subftituant cette valeur dans $du + tQdx = 0$, on aura une équation réductible encore au cas du Chapitre VII. & qui nous donnera la valeur de t en x. Donc en mettant dans (B) pour t cette valeur, on aura celle de u en x. Donc, dans l'hypothefe précédente, l'équation $ddu + \xi dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$ fera intégrée.

Or pour que l'équation (A) fe puiffe ramener à la fuivante $dt + du + (u+t).Pdx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$, il faut que $tQ + \frac{tdQ}{Qdx} + \xi t - \frac{uX}{Q} = (u+t).P$; ce qui arrivera, fi $-\frac{X}{Q} = \xi + Q + \frac{dQ}{Qdx}$. Car alors on aura $du + dt + \left\{(\xi + Q + \frac{dQ}{Qdx}) \times t + (\xi + Q + \frac{dQ}{Qdx})u\right\} \times dx - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$; & en fuppofant $\xi + Q + \frac{dQ}{Qdx} = P$, on aura $du + dt + (u+t).P - \frac{\zeta dx}{Q} = 0$. Mais de l'équation $\zeta + Q + \frac{dQ}{Qdx} = -\frac{X}{Q}$ on tire $Xdx + \zeta Qdx + QQdx + dQ = 0$; donc toutes les fois que cette derniere équation fera intégrable, $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$ le fera auffi.

CCXCVI.

Prenons maintenant l'équation $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 = 0$, & cherchons l'équation de condition d'après laquelle elle feroit intégrable. Je fuppofe fuivant la méthode de M. Euler, expofée dans le Chapitre V. de cette feconde Section, $u = c^{\int ydx}$, dx étant toujours conftant, on aura $du = c^{\int ydx} ydx$; $ddu = c^{\int ydx} dydx + c^{\int ydx} y^2dx^2$. Donc après les fubftitutions & réductions on aura la transformée fuivante $Xdx + y\zeta dx + yydx + dy = 0$. Donc fi cette équation eft intégrable, l'équation $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 = 0$ le fera auffi; réciproquement fi cette derniere équation eft intégrable, la premiere le fera, c'eft-à-dire, qu'on aura la valeur de y en x. Car puifqu'on a par l'hypothefe la valeur de u en x & que $y = \frac{du}{udx}$, on aura donc la valeur de y dans l'équation $Xdx + \zeta ydx + yydx + dy = 0$. Or cette équation eft, comme on le voit, la même abfolument que la réduite $Xdx + Q\zeta dx + QQdx + dQ = 0$. Donc l'équation $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$ eft intégrable dans les mêmes cas que la fuivante $ddu + \zeta dudx + uXdx^2 = 0$ laquelle a un terme de moins. *C. Q. F. D.*

Cherchons maintenant quelques cas particuliers d'intégration des équations précédentes.

CCXCVII.

THEOREME. Si dans l'équation $ddu + \xi dudx + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$, ξ contient un terme de cette forme $\frac{A}{x}$, il sera toujours possible de faire évanouir ce terme, excepté dans le cas où $A = 1$.

Recherche de quelques cas d'intégration de la formule qui sert d'exemple.

En effet, divisant l'équation par dx, elle devient $\frac{ddu}{dx} + \frac{Adu}{x} + uXdx + \zeta dx = 0$, que l'on peut (Art. CCIII.) mettre sous la forme suivante $d\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{Adu}{x} + \&c. = 0$. Or dans cette équation il n'y a plus aucune différentielle constante, puisque $\frac{du}{dx}$ est une quantité finie ; je suppose dx variable, & j'aurai $\frac{ddu}{dx} - \frac{duddx}{dx^2} + \frac{Adu}{x} + uXdx + \zeta dx = 0$; ou $ddu - \frac{duddx}{dx} + \frac{Adudx}{x} + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$.

Soit maintenant $x = fz^k$ & dz constant, la transformée sera $ddu - \frac{(k-1).dzdu}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$, ou $ddu - \frac{kdzdu}{z} + \frac{dzdu}{z} + \frac{Akdzdu}{z} + \&c. = 0$. Supposons $k = \frac{-1}{A-1}$, on aura $ddu + \frac{dzdu}{(A-1).z} + \frac{dzdu}{z} - \frac{Adzdu}{(A-1).z} + \&c. = 0$; ou enfin $ddu + \frac{dzdu}{(A-1).z} + \frac{Adzdu}{(A-1).z} - \frac{dzdu}{(A-1).z} - \frac{Adzdu}{(A-1).z} + \&c. = 0$. Donc il est évident que toutes les fois que A ne sera pas $= 1$. la substitution de $x = fz^{\frac{1}{A-1}}$ fera évanouir le second terme de l'équation qui deviendra pour lors $ddu + Bu\varphi(z)dz^2$

$+ C\Gamma(z)\, dz^2 = 0$, $\varphi(z)$ & $\Gamma(z)$ étant des fonctions différentes de z.

Donc en général si on a $ddu + \frac{Adudx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, cette différentielle se réduit à l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$.

Soit $du + tQdz = 0$; en mettant pour ddu sa valeur, divisant l'équation par Qdz & changeant les signes, on aura la transformée suivante $dt + \frac{tdQdz}{Qdz} - \frac{uRz^p dz}{Q} - \zeta' dz = 0$. A cette équation j'ajoute celle-ci $du + tQdz = 0$; ce qui me donne $du + dt + \left(tQ + \frac{tdQ}{Qdz} - \frac{uRz^p}{Q}\right) \times dz - \zeta' dz = 0$, équation intégrable dans le cas où $tQ + \frac{tdQ}{Qdz} - \frac{uRz^p}{Q} = (u+t) \times P$. Cette proposition se démontreroit de la même façon dont nous l'avons démontrée Article CCXCV.

Or pour que $tQ + \frac{tdQ}{Qdz} - \frac{uRz^p}{Q} = (u+t) \times P$, il faut que $-\frac{Rz^p}{Q} = Q + \frac{dQ}{Qdz}$. Donc l'équation $ddu + uRz^p dz^2 + \zeta' dz^2 = 0$ s'integrera dans les mêmes cas que l'équation $Rz^p dz + QQdz + dQ = 0$, qui est l'équation de Ricati. Nous avons donné les cas d'intégration de cette formule aux Articles CXVIII. & suivants de cette seconde Partie.

CCXCVIII.

THEOREME 2. Si $A = 1$, l'équation sera $ddu + \frac{dudx}{x} + uBx^m dx^2 + \zeta dx^2 = 0$; en faisant toujours $du + tQdx = 0$ & suivant les mêmes procédés que dans les Articles précédents,

précédents, l'intégration se réduira à celle de $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$. Soit dans cette équation $Q = rx^{-1}$, la transformée sera $Bx^m dx + \frac{r^2 dx}{xx} + \frac{dr}{x} = 0$; intégrable dans le cas où $m = -2$, puisqu'elle devient alors $Bdx + xdr + rrdx = 0$. On trouvera les autres cas d'intégration de l'équation $Bx^m dx + Qx^{-1} dx + QQdx + dQ = 0$, en se servant des méthodes employées dans le Chapitre XI. de la premiere Section de cette seconde Partie.

CCXCIX.

THEOREME 3. Reprenons l'équation de condition de l'Art. CCXCVI. $Xdx + \xi Qdx + QQdx + dQ = 0$; & faisons dans cette équation $X = Ax^m$ & $\xi = Bx^n$, elle devient $Ax^m dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$, la même que celle dont nous avons trouvé les cas d'intégrabilité dans le Chapitre XI. de la premiere Section. Soit donc comme dans l'Article CXXVI. $Q = Bx^r + fx^s z^t$, p, r, f, s, t étant des indéterminées prises à volonté, on aura la transformée suivante $Ax^m dx + Bpx^{n+r} dx + Bfz^t x^{n+s} dx + ppx^{2r} dx + 2fpz^t x^{s+r} dx + ffz^{2t} x^{2s} dx + prx^{r-1} dx + fsz^t x^{s-1} dx + ftx^s z^{t-1} dz = 0$; intégrable dans tous les cas où elle se peut réduire à une équation de cette forme $X' z^{t-1} dz + z^t X'' dx + z^{2t} X''' dx = 0$, X', X'', X''' étant des fonctions ou des puissances de x, puisqu'alors c'est le cas de M. Bernoulli, traité dans les Articles XCV. & suivants. La transformée sera encore intégrable, toutes les fois qu'elle tombera dans les cas intégrables de l'équation de Ricati.

CCC.

REMARQUE. En faisant $X = Ax^m + x^{-1}$, l'équation de condition sera $Ax^m dx + x^{-1} dx + BQx^n dx + QQdx + dQ = 0$; dont la transformée ne sera pas, comme il est aisé de le voir, plus compliquée que celle du Théorême précédent. On en trouvera par la même méthode les cas d'intégrabilité.

CCCI.

THEOREME 4. Soit dans l'équation de condition $\xi = 0$ & $X = Ax^m + Bx^r$, elle devient $Ax^m dx + Bx^n dx + QQdx + dQ = 0$, dont on trouvera encore les cas d'intégrabilité en faisant $Q = px^r + fx^s z^t$.

CCCII.

Autre formule à laquelle s'applique notre méthode.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Dans le Chapitre IX. de cette présente Section, nous avons vu comment on pouvoit dans certains cas intégrer l'équation différentielle $(a + bx^n) \times x^2 ddv + (c + fx^n) . xdxdv. + (g + hx^n) \times vxdx^2 = 0$. Il s'ensuit du Théorême premier de ce Chapitre, qu'on pourra dans les mêmes cas intégrer cette équation augmentée d'un terme ζdx, ζ étant une fonction quelconque de x.

CCCIII.

SCHOLIE. Reprenons l'équation $ddu + \xi du dx + u X dx^2 + \zeta dx^2 = 0$, & au lieu de ſuppoſer $du + tQdx = 0$, ſuppoſons $du - EtQdx = 0$, E étant un coefficient indéterminé ; nous aurons la transformée ſuivante $EQdtdx + EtdQdx + EtQ\xi dx^2 + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$. Multipliant cette ſeconde équation par un coefficient indéterminé ν, & la diviſant par $EQdx$, on aura $\nu dt + \frac{\nu t dQ dx}{Q dx} + \nu t \xi dx + \frac{\nu u X dx}{EQ} + \frac{\nu \zeta dx}{EQ} = 0$. J'ajoute à cette équation la ſuivante $du - EtQdx = 0$, & je les diviſe par ν, j'aurai $\frac{du}{\nu} + dt + \left\{ \frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \xi t + \frac{\nu u X}{E \nu Q} \right\} . dx + \frac{\zeta dx}{EQ} = 0$; équation intégrable (Art. CCXCV.), ſi $\frac{t dQ}{Q dx} - \frac{EtQ}{\nu} + \xi t + \frac{\nu u X}{E \nu Q} = \left(\frac{u}{\nu} + t\right) \times P'$. Or il faut pour cela que $\frac{\nu X}{EQ} = \frac{dQ}{Q dx} - \frac{EQ}{\nu} + \xi$; ce qui donne pour nouvelle équation de condition (D) $X dx - \frac{EQ\xi dx}{\nu} + \frac{EQ dx}{\nu^2} - \frac{E dQ}{\nu} = 0$. Mais il eſt viſible que cette nouvelle ſuppoſition ne rend pas la ſolution fondamentale plus générale, puiſque la nouvelle équation de condition (D) & la premiere $Xdx + Q\xi dx + QQdx + dQ = 0$ reviennent à la même, en mettant dans l'équation (D) Q pour $-\frac{EQ}{\nu}$.

CCCIV.

COROLLAIRE. En général toute équation $X'dx + \xi' u dx + X'' u^2 dx + du = 0$ deviendra $Xdx + \xi y dx +$

$yydx + dy = 0$ en faisant $X''u = y$; puisque cette supposition nous donne $u = \frac{y}{X''}$, $du = \frac{dy}{X''} - \frac{ydX''}{X''^2}$ & pour transformée $Xdx + \zeta ydx + y^2 dx + dy = 0$, X étant $= X'X''$ & $\zeta = \frac{\zeta'}{X} - \frac{dX''}{X''^2 dx}$.

On peut même changer cette équation en celle-ci $\frac{X'dx}{r} + X''y^2 rdx + dy = 0$, qui dans certains cas pourroit être plus commode. Il faut pour cet effet supposer $u = yr$ & $\frac{dr}{r} + \zeta dx = 0$. Car alors la transformée sera $X'dx + yr\zeta dx + y^2 r^2 X'' dx + rdy + ydr = 0$. Divisons par yr, elle devient $\frac{X'dx}{yr} + \zeta dx + X''yrdx + \frac{dy}{y} + \frac{dr}{r} = 0$; & à cause de $\frac{dr}{r} + \zeta dx = 0$, $\frac{Xdx}{yr} + X''yrdx + \frac{dy}{y} = 0$; ou enfin $\frac{X'dx}{r} + X''y^2 rdx + dy = 0$.

CCCV.

COROLLAIRE 2. Puisque l'équation $ddu + \frac{dudx}{x} + uXdx^2 + \zeta dx^2 = 0$ se réduit (Théorême 2.) à $Xdx + Qx^{-1}dx + QQdx + dQ = 0$, il s'ensuit qu'en faisant $Q = \frac{y}{x}$, elle se réduira à $xXdx + \frac{y^2 dx}{x} + dy = 0$. En effet la transformée sera $Xdx + yx^{-2}dx + y^2 x^{-2} dx + x^{-1} dy - yx^{-2} dx = 0$; c'est-à-dire $Xdx + y^2 x^{-2} dx + x^{-1} dy = 0$; & en multipliant par x, $xXdx + \frac{yydx}{x} + dy = 0$.

CCCVI.

On peut appliquer la méthode expliquée dans ce Chapitre à des équations d'un ordre plus élevé que le second.

Application de la méthode à une équation différentielle du troisieme ordre.

Soit, par exemple, l'équation du troisieme ordre $d^3u + \xi ddudx + Xdudx^2 + u\zeta dx^3 + \chi dx^3 = 0$; ξ, X, ζ, χ étant des fonctions de x. En faisant $ddu + Qdtdx + tNdx^2 = 0$, Q, t, N étant trois indéterminées, on trouvera que la proposée est réductible à une équation du second degré de cette forme $ddz + R'dzdx - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$; si $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$ & $\zeta + NQ - \frac{dN}{dx} - \xi N = 0$. Car suivant la supposition précédente la transformée sera, après les substitutions ordinaires, $-Qdxddt - dQdtdx - \xi Qdtdx^2 - Ndtdx^2 + Xdudx^2 - tdNdx^2 - \xi tNdx^3 + u\zeta dx^3 + \chi dx^3 = 0$. Divisant cette équation par $-Qdx$ & y ajoutant l'équation $ddu + Qdtdx + tNdx^2 = 0$, on aura $ddu + ddt + \left(\frac{dQ}{Qdx} - Q + \xi + \frac{N}{Q}\right) \times dtdx - \left(\frac{X}{Q}\right) \times dudx + \left(\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ\right) \times \frac{tdx^2}{Q} - (\zeta)\frac{udx^2}{Q} - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$. Donc si $(F)\ \frac{dQ}{Qdx} - Q + \xi + \frac{N}{Q} = -\frac{X}{Q}$, & que $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$, on aura en supposant l'un & l'autre membre de l'équation $(F) = R'$, $ddu + ddt + (du + dt) \times R'dx - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$; & enfin en faisant $du + dt = dz$, on trouve $ddz + R'dxdz - \frac{\chi dx^2}{Q} = 0$.

Or en substituant dans l'équation $\frac{dN}{dx} + \xi N - NQ - \zeta = 0$ pour N sa valeur tirée de l'équation (F) qui devient $N = X + QQ - \frac{dQ}{dx} - \xi Q$, on trouvera une équation différentielle du second degré dont Q sera l'inconnue qu'il faudra déterminer en x. Donc l'intégration de l'équation $d^3u + \zeta ddudx + Xdudx^2 + u\zeta dx^3 + xdx^3 = 0$, ſe réduit à celle d'une équation différentielle du ſecond ordre.

FIN.

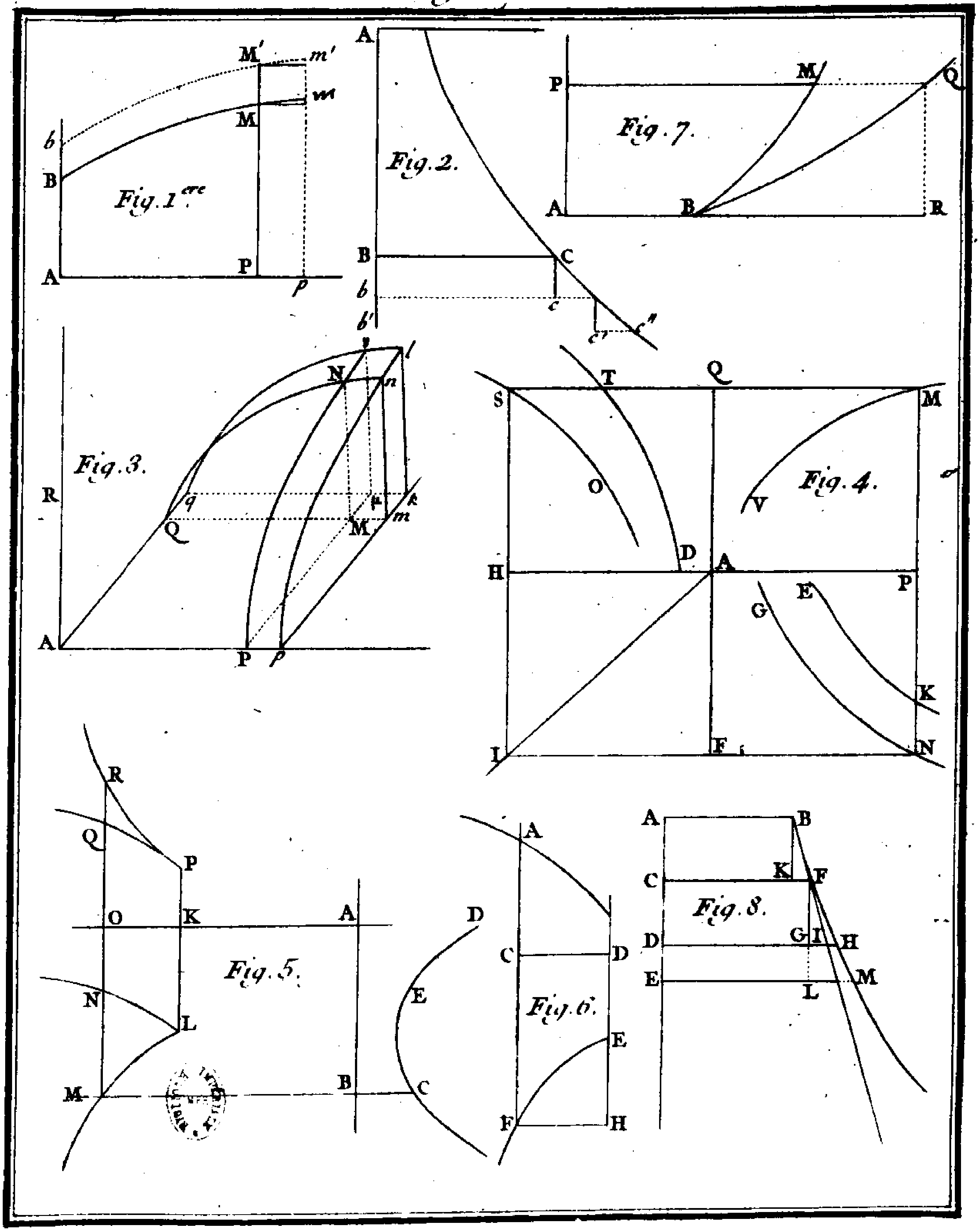
Fig. 1ere
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

TABLE

DES MATIERES

Contenues dans cette Seconde Partie.

SECTION PREMIERE.

De l'Intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent deux ou plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités & des équations différentielles qui s'intégrent sans qu'il soit nécessaire d'en séparer auparavant les indéterminées & sans aucune autre préparation.

§. I. *Sur l'intégration des quantités différentielles.*

§. II. *Sur l'intégration des équations différentielles.*

CHAPITRE II.

Méthode pour reconnoître quand une différentielle composée de pluſieurs variables eſt la différentielle exacte de quelque quantité, & pour l'intégrer dans ce cas.

§. I. *Expoſition de la Méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

Maniere d'intégrer les quantités $A\,dx + B\,dy$ *& les équations* $A\,dx + B\,dy = o$, *lorſqu'elles ſont des différentielles exactes.*

§. II. *Application du Théorême fondamental aux équations différentielles qui renferment plus de deux variables.*

XXXI.

CHAPITRE III.

De la conſtruction des équations différentielles dans leſquelles les indéterminées ſont ſéparées.

CHAPITRE IV.

De la ſéparation des indéterminées dans les équations différentielles par les regles ordinaires de l'Algebre, ou par de ſimples transformations.

CHAPITRE V.

De la séparation des indéterminées dans les équations homogenes.

CHAPITRE VI.

Méthode pour rendre homogenes des équations qui ne le sont pas.

CHAPITRE VII.

Sur la construction de l'équation $AXy^n dy + By^{n+1} X' dx + Cy^q X'' dx = 0$.

CHAPITRE VIII.

Des Différentielles qui peuvent se ramener par des transformations à la formule du Chapitre précédent.

CHAPITRE IX.

Examen général de tous les cas particuliers d'intégration des équations à trois termes.

CHAPITRE X.

Recherche générale de l'intégration des équations à quatre termes.

CHAPITRE XI.

Examen des cas d'intégration de l'équation $x^m dx + ady + byx^n dx + cy^2 dx = o$.

CHAPITRE XII.

Méthode pour conſtruire les équations différentielles à deux variables, dans leſquelles l'une des deux indéterminées manque.

CHAPITRE XIII.

Méthode pour intégrer pluſieurs équations différentielles dans leſquelles dx & dy *ſont élevées à différentes puiſſances.*

CHAPITRE XIV.

Autre méthode pour découvrir quelques équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CHAPITRE XVI.

Méthode pour déterminer une intégrale par certaines conditions données de la différentielle.

SECTION SECONDE.

De l'Intégration des différentielles à plusieurs variables du second ordre, ou d'un ordre plus élevé.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration de certaines différentielles du second ordre, dans le cas où l'on sait que telle ou telle différentielle du premier ordre a été traitée comme constante dans le passage des premieres différences aux secondes.

CHAPITRE II.

Méthode pour rendre completes les équations différentielles de tous les degrés.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer dans quelques cas, la différentielle qui, supposée constante, facilitera le plus l'intégration.

CHAPITRE IV.

Dans lequel on applique aux équations différentielles de tous les ordres la méthode de l'article qui apprend à intégrer ou construire les équations différentielles du premier degré dans lesquelles l'une des indéterminées finies ne se trouve à aucun terme.

CHAPITRE V.

Méthode pour transformer un grand nombre d'équations différentielles qui renferment leurs deux indéterminées finies, en d'autres dans lesquelles l'une des deux ne se trouve pas.

CHAPITRE VI.

Application de la Méthode du Chapitre XV. de la premiere Section aux équations différentielles d'un ordre plus élevé que le premier.

CHAPITRE VII.

Exposition d'une Méthode pour construire ces mêmes équations $\frac{a\,d^n y}{dx^n} + \frac{b\,d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{g\,d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$, *&c.* $+ X = 0$, *en y supposant* $X = 0$.

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Comparaison de la Méthode exposée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI. Sect. II.

CHAPITRE IX.

Méthode pour trouver les cas d'intégrabilité de quelques équations du second ordre, représentées par la formule (M) $(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$, *dans laquelle* dx *est constant.*

CHAPITRE X.

Examen de plusieurs équations différentielles du second ordre, intégrables dans les mêmes cas que d'autres équations du même ordre qui ont un terme de moins.

Fin de la Table des Matieres.