

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Biblioteca Digital FCEN-UBA

Teoría de las zonas alcanzables en sistemas bidimensionales

Winitzky de Spinadel, Vera Martha
1958

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

Trabajo de tesis para optar al título de

Doctor en Matemáticas

TEORIA DE LAS ZONAS ALCANZABLES EN SISTEMAS BIDI-
MENSIONALES

Vera M. Winitzky de Spinadel
Mayo de 1958.-

TESIS: 970

7. - 970

TEORIA DE LAS ZONAS ALCANZABLES EN SISTEMAS BIDIMENSIONALES

Índice

Resumen.

Introducción general.

Capítulo 1. Puntos y zonas alcanzables.

Formulación del problema.

Teorema 1.1.

Condiciones restrictivas para la perturbación arbitraria.

Definición de punto y zona alcanzable. Definición 1.1, 1.2 y 1.3.

Propiedad transitiva: Corolario 1.1.

Teoremas 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5.

Nota.

Capítulo 2. Tipos de acotaciones de la perturbación arbitraria.

Acotación euclídeana.

Teorema 2.1.

Teorema 2.2.

Acotación por componentes.

Ejemplos: ejemplo 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12.

Ecuación de segundo orden a coeficientes constantes.

Capítulo 3. Restricción de los vectores perturbadores a una variedad unidimensional.

Condiciones restrictivas.

Clasificación de puntos.

Definición de curva fundamental, semi-fundamental, perturbatriz y semi-perturbatriz.

Teorema 3.1.

Definición de punto cuasi-alcanzable.

Criterios de alcanzabilidad y cuasi-alcanzabilidad.

Teorema 3.2.

Teorema 3.3.

Corolarios.

Capítulo 4. Curvas franqueables e infranqueables.

Definición de trampa.

Regiones R_a^- y R_i determinadas por un arco de curva.

Curvas de tangente continua.

Entorno asociado.

Lema 4.1 (Sansone y Conti).

Teorema 4.1.

Teorema 4.2.

Nota.

Corolarios 4.1. y 4.2.

Teorema 4.3.

Corolario 4.3.

Teorema 4.4.

Teorema 4.5 (Massera).

Teorema 4.6.

Teorema 4.7.

Teorema 4.8.

Teorema 4.9.

Capítulo 5. Condiciones analíticas.

Condición analítica.

Corolarios 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

Nota.

Aplicación a sistemas con perturbatrices rectilíneas.

Caso de una ecuación diferencial de segundo orden.

Sistemas con perturbatrices circulares y radiales.

Caso en que el sistema fundamental sea homogéneo.

Ejemplo.

Teorema 5.1.

Teorema 5.2.

Capítulo 6. Sistemas perturbados con perturbación orientada o acotada.

Enunciado de los distintos problemas.

Perturbación orientada.

Teorema 6.1.

Teorema fundamental 6.2.

Perturbación acotada.

Relación entre ambos casos.

Ejemplos de perturbación mono-paramétrica acotada: ejemplos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

Caso de Ψ_1, Ψ_2 variables funciones de x_1, x_2 .

Apéndice.

Referencias.

Resumen

En este trabajo se aplica la teoría de las zonas alcanzables formulada por Emilio O. Roxin en su tesis "Puntos y zonas alcanzables en sistemas perturbados en forma arbitraria" (Abril 1958), al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de la forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) + \omega_1(t) \quad x_1(0) = x_{10} \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) + \omega_2(t) \quad x_2(0) = x_{20}, \end{array} \right.$$

donde las funciones f_1 y f_2 se suponen fijas e invariables, mientras que las ω_1 y ω_2 son arbitrarias, con ciertas condiciones restrictivas que dependen del problema en particular de que se trate.

Al variar las funciones ω_1 y ω_2 , se puede considerar el campo vectorial definido por el sistema (1) como resultante de la superposición de un vector f fijo en cada punto x y un vector arbitrario $\omega(t)$. Dado el punto inicial (x_{10}, x_{20}) , a cada elección del vector $\omega(t)$, corresponderá una cierta trayectoria $x_1(t)$, $x_2(t)$, solución del sistema (1). El problema que se encara es el estudio de la totalidad de las curvas trayectorias obtenidas al variar el vector $\omega(t)$, esto es, analizar qué regiones del plano quedan cubiertas por las soluciones del sistema (1) al variar en forma arbitraria el vector $\omega(t)$, sujeto a ciertas restricciones.

Para analizar este problema, se utiliza la definición de punto alcanzable desde un punto (x_{10}, x_{20}) , que es aquel punto (x_{11}, x_{21}) para el que existen dos funciones ω_1, ω_2 ,

y un valor $t_1 > 0$ tal que el sistema (1) posee la solución $x_1(t)$, $x_2(t)$ que satisface a las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1(t_1) = x_{11} \\ x_2(t_1) = x_{21} \end{cases}$$

La zona alcanzable desde el punto (x_{10}, x_{20}) será el conjunto de puntos alcanzables desde dicho punto.

Las condiciones restrictivas que se imponen al vector $\omega(t)$ son del tipo

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{ó bien} \quad F(\omega_1, \omega_2) > 0,$$

o alguna combinación de ambas, donde F es una función dada, que puede eventualmente depender del punto x , pero no del parámetro t .

La primera condición restrictiva considerada para el vector $\omega(t)$ es la acotación euclidiana

$$|\omega(t)|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

En este caso, se demuestra, análogamente al caso n -dimensional, que dado un dominio D donde se cumple que $|f(x)| < k$, todas las curvas contenidas en D son posibles trayectorias del sistema (1). Para aquellos puntos de un dominio D' en los cuales $|f(x)| > k$, se da una condición analítica para que una curva perteneciente a D' sea trayectoria del sistema (1).

Otro tipo de restricción estudiada es la acotación por componentes, es decir

$$|\omega_1(t)| \leq k_1 \quad ; \quad |\omega_2(t)| \leq k_2.$$

Las posibles trayectorias del sistema (1) están ahora contenidas en un ángulo de vértice (x_{10}, x_{20}) y abertura distinta para cada punto del plano. Este tipo de acotación es utilizada en trabajos relativos a optimización de controles, por ejemplo, el conocido problema del control "bang-bang", estudiado por Bellman, Glicksberg y Gross ⁽¹⁾ en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y generalizado por E.O.Roxin en colaboración con la autora para sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables ⁽²⁾.

Por su aplicación a numerosos campos de la técnica, se estudia luego el caso de restringir los vectores perturbadores a una variedad unidimensional, en especial, el caso en que dicha variedad sea lineal, esto es, que el sistema sea de la forma

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Según la posición relativa de los vectores $F = (f_1, f_2)$ y $P = (\varphi_1, \varphi_2)$, se establece la siguiente clasificación de puntos del plano: a) punto regular si los vectores F y P no se anulan y forman entre sí un ángulo no nulo; b) punto de contacto si el vector F se anula o bien su dirección coincide con la de P ; c) punto irregular si el vector $P = 0$; d) punto crítico esencial si $F = P = 0$. Además, se llama curva fundamental a las soluciones del sistema no perturbado

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

y curva perturbatriz a las del sistema perturbador

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \Phi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = \Phi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Con estas definiciones, se demuestra que, dado el sistema (2), una zona alcanzable Z y un punto regular P de la frontera de Z , existe un entorno de P tal que en él la frontera de Z es la curva perturbatriz que pasa por P .

A fin de establecer algunos criterios de alcanzabilidad, se introduce la definición de punto cuasi-alcanzable, que es aquel punto P tal que en todo entorno del mismo existen puntos alcanzables desde P . Dado un punto P , se dan las condiciones necesarias para determinar qué otros puntos del plano son alcanzables o cuasi-alcanzables respecto al dado.

A continuación se investigan las propiedades de curvas y campos vectoriales con el objeto de formular algunos criterios que permitan delimitar zonas alcanzables. Se introduce la noción de "trampa", que es aquella región del plano cuya frontera tiene la propiedad que una solución que parte de un punto de dicha región, no puede salir de la misma. Con esta nomenclatura, el problema de delimitación de zonas alcanzables equivale al de hallar trampas.

Los criterios de delimitación de zonas alcanzables admiten una formulación analítica, que se aplica entonces a sistemas de ecuaciones diferenciales con perturbatrices rectilíneas, radiales y circulares. También se estudia el caso de la ecuación diferencial de segundo orden, reducible a un sistema de dos ecuaciones de primer orden, como asimismo el caso en que el sistema no perturbado sea homogéneo.

En un capítulo posterior, se investigan las propiedades de sistemas perturbados con perturbación orientada o acotada, es decir, sistemas del tipo (2), con

$$\alpha(t) \geq 0 \quad \text{ó bien} \quad |\alpha(t)| \leq k,$$

siendo $k = \text{const.}$ Se demuestra que existe una relación directa entre los casos de perturbatrices orientadas y acotadas, de modo que uno es reducible al otro y viceversa, y se dan algunos ejemplos en los cuales la delimitación de zonas alcanzables es particularmente interesante por su interpretación, así como por su aplicación a muchos problemas mecánicos y eléctricos.

La autora desea agradecer a Emilio O. Roxin su constante crítica, valiosos comentarios y lectura detallada del manuscrito, así como interesantes discusiones que permitieron dar forma a este trabajo. Asimismo, debe mencionar la eficaz ayuda del Dr. Alberto González Domínguez por haber encaminado este estudio en líneas generales. Finalmente, debe mencionar en forma especial la colaboración del Ing. José L. Massera, de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, Uruguay, quien no sólo siguió paso a paso el desarrollo de este estudio en un intercambio epistolar, sino también leyó en forma exhaustiva el manuscrito, en ocasión de su reciente visita a Buenos Aires, sugiriendo útiles variaciones que facilitaron la redacción definitiva.

Buenos Aires, mayo de 1958.

Introducción general

En el año 1676, Gottfried Wilhelm Leibnitz introdujo por primera vez el concepto de ecuación diferencial, iniciando así una nueva era en el campo de las matemáticas. Durante los siguientes 50 años, se desarrolló una escuela de matemáticos dedicados a obtener expresiones analíticas de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales (ambos Bernoulli, Euler, Riccati, Clairaut, etc.).

Recién en 1739, Euler comenzó un estudio sistemático de las ecuaciones lineales y en 1760, Lagrange formuló el teorema general de superposición para sistemas lineales, estableciendo con él una verdadera escisión entre las matemáticas lineales y las no lineales. Este concepto produjo un impacto tan fuerte en las investigaciones que los próximos 125 años fueron dedicados casi exclusivamente al desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, culminando con los conceptos de transformadas de Fourier y Laplace y el estudio de los sistemas de funciones ortogonales. A ello se debió que recién en 1881, H. Poincaré⁽³⁾, inspirado en los problemas de la mecánica celeste, publicara el primer trabajo fundamental sobre las propiedades de las curvas solución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Poco después, A. Liapounoff⁽⁴⁾, en una memoria clásica, expuso su teoría de la estabilidad del movimiento, poniendo las bases sobre las cuales se construyó posteriormente la escuela rusa de investigación en este dominio.

Contemporáneamente, I. Bendixson⁽⁵⁾ aplicó la teoría al campo real y G.D. Birkhoff⁽⁶⁾, con sus estudios clásicos sobre problemas de dinámica, introdujo el análisis funcional en la teoría de los sistemas dinámicos. Entre los trabajos

clásicos, es preciso también mencionar los de O. Perron ⁽⁷⁾, dedicados al estudio del comportamiento asintótico de las soluciones y análisis de los puntos singulares.

En el campo de la electrónica, el circuito oscilante es el ejemplo más importante de un dispositivo no lineal. Y como tal, su estudio ha sido objeto de numerosos e interesantes trabajos por su aplicación en distintas ramas de la técnica. La ecuación diferencial no lineal del circuito

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f(y) \frac{dy}{dt} + ay = 0,$$

fué estudiada por primera vez por E.V.Appleton y B. van der Pol ⁽⁸⁾. Más tarde, van der Pol ⁽⁹⁾ utilizó el método de las isoclinas para resolverla en el caso en que

$$f(y) = -\varepsilon(1 - y^2) \quad \text{con} \quad \varepsilon = 0,1; 1,0; 10,$$

y halló que, bajo ciertas condiciones, un circuito oscilante efectúa oscilaciones de relajación, que son el caso límite cuando el parámetro ε es grande ⁽¹⁰⁾. Por otra parte, también demostró que los fenómenos de relajación aparecen en muchas ramas de la ciencia, por ejemplo, fisiología, siendo los latidos del corazón una oscilación de relajación.

El problema de las oscilaciones en sistemas que poseen elementos no lineales, ha sido estudiado por A. Andronow ⁽¹¹⁾ y C.E.Chaikin ⁽¹²⁾, J.J.Stoker ⁽¹²⁾ y muchos otros. Varios métodos que permiten resolver ecuaciones no lineales de este tipo, fueron desarrollados por N. Kryloff y N. Bogoliuboff ⁽¹³⁾. También se aplicó (con limitaciones) el método de perturbaciones de Poincaré, desarrollado originalmente para problemas astronómicos.

La búsqueda de soluciones periódicas y ciclos límites de Poincaré, de tan gran interés en las aplicaciones, ha sido estudiada modernamente utilizando métodos de análisis funcional, por S. Lefschetz ⁽¹⁴⁾, M.L. Cartwright ⁽¹⁵⁾, N. Levinson ⁽¹⁶⁾, J.L. Massera ⁽¹⁷⁾, etc.

Las ecuaciones diferenciales totales del tipo

$$\dot{x} = f(x) + \omega(t),$$

donde $f(x)$ es una función fija y $\omega(t)$ una función arbitraria, con ciertas restricciones, son de gran importancia en las aplicaciones, debido a la existencia de numerosos problemas físicos cuyo comportamiento queda descrito por una ecuación como la precedente. Es por ello que existe gran interés en el estudio de las curvas soluciones de tal ecuación, cuando se varía la función $\omega(t)$, que representa en general, una acción variable exterior aplicada al sistema físico. En particular, es importante investigar cuáles son los posibles estados del sistema físico que pueden alcanzarse, partiendo de un estado inicial dado, eligiendo adecuadamente el término de control $\omega(t)$. Este es, justamente, el problema a que da respuesta la teoría de las zonas alcanzables, formulada por E.O. Roxin ⁽¹⁸⁾ en espacios n-dimensionales.

Este trabajo aplica dicha teoría al caso plano, en donde los razonamientos resultan más intuitivos por su correspondiente representación geométrica, y estudia las zonas alcanzables en numerosos casos de inmediata aplicación en ramas de la tecnología y la física.

CAPITULO 1

PUNTOS Y ZONAS ALCANZABLES

Formulación del problema.

Consideraremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \omega_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \omega_2(x_1, x_2, t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

donde interpretamos las x_i como coordenadas cartesianas (reales) en el plano euclideo, $\dot{x}_i = dx_i/dt$ y t es una variable real. Supondremos que el (1.1) es un sistema de Caratheodory por ejemplo, que $f_i(x_1, x_2)$, $\omega_i(x_1, x_2, t)$ son lipschitzianas respecto a x_1, x_2 , mientras que $\omega_i(x_1, x_2, t)$ es medible con respecto a t en el intervalo considerado. Con esto queda asegurado ⁽ⁱⁱⁱ⁾ que los sistemas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (1.2)$$

que llamaremos "sistema fundamental", y

(ii) Se dice que el sistema $\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t)$, con $i=1, 2, \dots, n$ es un "sistema de Caratheodory" en la región $a < t < b$, $\xi_i < x_i < \eta_i$, si: a) $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ es continua respecto a x_i para todo t de (a, b) y medible respecto a t para cada punto x_1, \dots, x_n ; b) existen $2n$ funciones $\mu_i(t), \nu_i(t)$ sumables en todo intervalo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tales que

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)| \leq \mu_i(t)$$

$$\alpha < t < \beta; \xi_i < x_i < \eta_i$$

$$|f_i(x_1', \dots, x_n', t) - f_i(x_1'', \dots, x_n'', t)| \leq \nu_i(t)$$

$$\sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + \dots + (x_n' - x_n'')^2}$$

$$\alpha < t < \beta; \xi_i < x_i'; x_i'' < \eta_i$$

(iii) Sansone y Conti, op. cit. (19), p. 20.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \omega_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = \omega_2(x_1, x_2, t), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

que llamaremos "sistema perturbador", poseen solución única en la región considerada, y ésta depende en forma continua de las condiciones iniciales y eventuales parámetros que figuren en las funciones.

Llamaremos "curvas fundamentales" a las soluciones del sistema (1.2), "curvas perturbatrices" a las del sistema (1.3); al sistema (1.1), "sistema completo" o "perturbado" y a sus soluciones no les pondremos nombre especial, citándolas generalmente como las "trayectorias del sistema completo", o simplemente las "trayectorias".

Aún cuando no sea esencial para el problema que veremos, supondremos en general (para facilidad de la exposición), que las soluciones $x_i(t)$ existen para todo valor de t (o sea $-\infty < t < +\infty$). Será en general muy importante distinguir la parte de trayectoria (curva fundamental, perturbatriz) recorrida desde un punto inicial en una dirección para valores positivos de t ($t > 0$) y que llamaremos "semi-trayectoria" (semi-fundamental, semi-perturbatriz) positiva, de la parte recorrida en sentido opuesto para $t < 0$, que designamos semi-trayectoria (semi-fundamental, semi-perturbatriz) negativa. Toda solución será siempre considerada como curva orientada, o sea provista del sentido en que es recorrida al variar t de manera creciente.

El presente trabajo versa sobre el siguiente problema:

Dadas las funciones $f_i(x_1, x_2)$ del sistema (1.1) y los valores iniciales $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, así como ciertas condiciones restrictivas impuestas a las funciones $\omega_i(x_1, x_2, t)$, con-

sideremos el conjunto de todas las posibles trayectorias solución de (1.1) al variar las $\omega_1(x_1, x_2, t)$ de manera arbitraria (cumpliendo siempre con las condiciones impuestas) y determinemos, especialmente, qué región del plano queda cubierta por tales trayectorias.

Al considerar la totalidad de las trayectorias solución de (1.1), cuando las $\omega_1(x_1, x_2, t)$ varían en forma arbitraria, se puede prescindir de la dependencia explícita de ω_1 de las coordenadas x_1, x_2 , ya que para cada solución en particular es $x_1 = x_1(t)$, quedando $\omega_1(x_1(t), x_2(t), t) = \omega_1^*(t)$ y la totalidad de las posibles funciones arbitrarias ω_1 es la misma que el conjunto de las ω_1^* . Escribiremos por ello, en lo que sigue, simplemente $\omega_1(t)$, salvo que por alguna razón especial convenga explicitar las coordenadas en la expresión de las ω_1 .

El hecho de imponer condiciones restrictivas a las funciones $\omega_1(t)$ es esencial para que el problema tenga interés, ya que en caso contrario cualquier curva del plano (de la región en que está definido el sistema (1.1)) es posible trayectoria. Más exactamente, vale el siguiente:

Teorema 1.1.

Sea el sistema (1.1), donde $f_1(x_1, x_2)$ son funciones dadas, y una curva ^(*) definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(t) \\ x_2 = \xi_2(t). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (1.4)$$

(*) En todo lo que sigue, cuando hablemos de una curva cualquiera, se sobreentenderá que se trata de un arco de curva de Jordan que cumpla las condiciones de continuidad y diferenciabilidad necesarias para poder ser solución de un sistema de ecuaciones diferenciales como el (1.1).

Entonces existen dos funciones $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, definidas en $0 \leq t \leq t_1$, tales que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \omega_1(t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \omega_2(t), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(0) = \xi_1(0) \\ x_2(0) = \xi_2(0), \end{cases}$$

tiene por solución la curva dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1(t) = \xi_1(t) \\ x_2(t) = \xi_2(t). \end{cases}$$

Demostración: Para demostrar este teorema, basta poner

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \dot{\xi}_1(t) - f_1(\xi_1(t); \xi_2(t)) \\ \omega_2(t) = \dot{\xi}_2(t) - f_2(\xi_1(t); \xi_2(t)), \end{cases}$$

y reemplazar en el sistema dado.

Por ello, toda curva resulta solución posible del sistema de ecuaciones diferenciales (1.1). Para que el problema tenga interés, será necesario por lo tanto, imponer restricciones adicionales a las funciones $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$.

Condiciones restrictivas para la perturbación arbitraria

El problema planteado en el párrafo anterior se puede interpretar geométricamente de manera más intuitiva. Representamos, como es usual en el estudio de los sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, a x_1 como coordenadas cartesianas del plano euclideo, t como tiempo

y \dot{x}_1 como componentes del vector velocidad, que forma un campo vectorial en toda la región del plano en que la ecuación (1.1) está definida. En nuestro caso, el vector $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ se compone de dos partes. La primera, fija para cada problema particular, es el vector $f = (f_1, f_2)$ que llamamos vector fundamental, y a éste se suma el vector perturbador arbitrario $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. El teorema 1.1 así interpretado, por ejemplo, dice que con una perturbación adecuada, el punto (x_1, x_2) del sistema de ecuaciones (1.1), puede describir cualquier trayectoria.

Veamos ahora cómo restringir los valores que pueden tomar $\omega_1(t), \omega_2(t)$. Sólo consideraremos condiciones definidas punto a punto ⁽ⁿ⁾. Es decir, fijado el punto (x_1, x_2) , el plano ω_1, ω_2 queda dividido en dos conjuntos de puntos, según que el par de valores $\omega_1(x_1, x_2, t), \omega_2(x_1, x_2, t)$ sea admitido o no como componentes del vector perturbador. Tal condición restrictiva estará representada analíticamente por relaciones del tipo

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = 0, \quad (1.5)$$

o bien

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) > 0, \quad (1.6)$$

o combinación de ambas.

La (o las) $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ puede eventualmente depender de x_1, x_2 , pero no de t .

(n) Esto equivale a descartar condiciones del tipo $\Phi(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2, t) = 0$, ó condiciones impuestas a $\omega_1(t)$ como funciones, por ejemplo, la de tener derivada acotada.

(n') Si dependiese de t no se cumpliría, por ejemplo, la propiedad transitiva que se verá más adelante (capítulo 1).

Algunos casos típicos son:

a) La acotación del vector perturbador

$$|\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 < k.$$

b) La restricción de los vectores ω a una variedad unidimensional

$$\lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = 0,$$

que equivale a fijar la dirección de ω .

c) La combinación de ambas restricciones.

d) La condición que ω sea interior a cierta región angular

$$\frac{\lambda \omega_1 + \mu \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} > k,$$

en especial, que ω pertenezca a cierto semiplano

$$\lambda \omega_1 + \mu \omega_2 > 0.$$

Demás está hacer notar que estas condiciones se han escrito en forma implícita, pero pueden darse igualmente en forma paramétrica, por ejemplo

$$\omega_1 = \mu \cdot \alpha(t)$$

$$\omega_2 = -\lambda \cdot \alpha(t),$$

la que con μ, λ fijos (funciones a lo sumo de x_1, x_2) y $\alpha(t)$ arbitrario, equivale a la b).

Definición de punto y zona alcanzable

Definición 1.1.

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1), donde f_1, f_2 son fijas y ω_1, ω_2 arbitrarias sujetas a ciertas con-

diciones del tipo (1.5) ó (1.6), el punto (x_{11}, x_{21}) se dice alcanzable desde el (x_{10}, x_{20}) , si existen dos funciones $\omega_1'(t)$, $\omega_2'(t)$ (que cumplen las condiciones generales dadas), y un valor $t_1 > 0$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \omega_1'(t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \omega_2'(t), \end{cases} \quad (1.7)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (1.8)$$

posee la solución

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = F_1(t, x_{10}, x_{20}, t_0) \\ x_2 = x_2(t) = F_2(t, x_{10}, x_{20}, t_0), \end{cases} \quad (\dot{t}_0 = 0)$$

que satisface a

$$\begin{cases} x_1(t_1) = x_{11} \\ x_2(t_1) = x_{21}. \end{cases}$$

Con otras palabras, el punto (x_{11}, x_{21}) será alcanzable cuando esté sobre la semi-trayectoria positiva del sistema (1.7) que cumple las condiciones (1.8).

Definición 1.2.

Bajo las mismas hipótesis de la definición anterior, llamamos zona alcanzable desde el punto (x_{10}, x_{20}) al conjunto de puntos alcanzables desde (x_{10}, x_{20}) .

Definición 1.3.

Bajo las mismas hipótesis de la definición (1.1), llamaremos zona alcanzable generalizada a todo conjunto \mathcal{A} de puntos que cumpla la siguiente condición:

Si el punto $(x_{10}, x_{20}) \in A$, y (x_{11}, x_{21}) es alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) , también $(x_{11}, x_{21}) \in A$.

Como veremos, toda zona alcanzable desde un punto (x_{10}, x_{20}) es también zona alcanzable generalizada, pero la inversa no es cierta. También diremos "zona alcanzable", sin especificar si lo es desde algún punto o en sentido generalizado, cuando del contexto resulte sin ambigüedad de cual tipo se trata.

Propiedad transitiva

Corolario 1.1.

Si el punto (x_{11}, x_{21}) es alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) y (x_{12}, x_{22}) alcanzable desde (x_{11}, x_{21}) , entonces (x_{12}, x_{22}) es alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) .

Demostración: En efecto, existen por hipótesis las funciones

$\omega_1'(t)$ y $\omega_1''(t)$ tales que los sistemas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + \omega_1'(t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \omega_2'(t), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + \omega_1''(t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \omega_2''(t), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{11} \\ x_2(0) = x_{21}, \end{cases}$$

tienen sendas soluciones que, para ciertos valores $t_1, t_2 > 0$, cumplen

$$\begin{cases} x_1(t_1) = x_{11} \\ x_2(t_1) = x_{21} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1(t_2) = x_{12} \\ x_2(t_2) = x_{22}, \end{cases}$$

respectivamente. Basta entonces definir una función

$$\omega_1^{ni}(t) = \begin{cases} \omega_1^i(t) & \text{para } t \leq t_1 \\ \omega_1^{ii}(t - t_1) & \text{para } t > t_1, \end{cases}$$

para que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + \omega_1^{ni}(t) & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \omega_2^{ni}(t) & x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

satisfaga a

$$\begin{cases} x_1(t_1 + t_2) = x_{12} \\ x_2(t_1 + t_2) = x_{22} \end{cases}$$

Veremos ahora algunos de las propiedades elementales de las zonas alcanzables.

Teorema 1.2.

El conjunto vacío \mathcal{V} y el plano total \mathcal{Q} son zonas alcanzables generalizadas.

Demostración: En efecto, la condición $(x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{V}$, $(x_{11}, x_{21}) \notin \mathcal{V}$, siendo (x_{11}, x_{21}) alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) no puede satisfacerse nunca. Por otra parte, si $(x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{Q}$ y el punto (x_{11}, x_{21}) es alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) , forzosamente debe ser $(x_{11}, x_{21}) \in \mathcal{Q}$.

Teorema 1.3.

La unión de un número cualquiera de zonas alcanzables en sentido generalizado también es zona alcanzable.

Demostración: Sea $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ el conjunto de zonas alcanzables y $\mathcal{A} = \bigcup_\alpha \mathcal{A}_\alpha$. Si $(x_{10}, x_{20}) \in \mathcal{A}$, debe necesariamente pertenecer a algún \mathcal{A}_α . Si (x_{11}, x_{21}) es alcanzable desde

(x_{10}, x_{20}) también pertenecerá a ese A_α , luego también pertenece a A .

Teorema 1.4.

La intersección de un número cualquiera de zonas alcanzables generalizadas, también es zona alcanzable.

Demostración: Sean A_α las zonas alcanzables y $A = \bigcap_\alpha A_\alpha$ la intersección de las mismas. Sea (x_{11}, x_{21}) alcanzable desde (x_{10}, x_{20}) . Si $(x_{10}, x_{20}) \in A$ deberá ser $(x_{10}, x_{20}) \in A_\alpha$ para todo α , luego también $(x_{11}, x_{21}) \in A_\alpha$ para todo α y por ello $(x_{11}, x_{21}) \in A$.

Teorema 1.5.

Dado un conjunto de puntos A_0 , existe una zona alcanzable generalizada mínima A_m que los contiene.

Demostración: Consideremos todas las zonas alcanzables generalizadas A_α que contienen al conjunto A_0 . El conjunto $\{A_\alpha\}$ no es vacío, pues contiene por lo menos al plano total \mathcal{E} . Evidentemente, la intersección de todos los conjuntos A_α es la zona alcanzable mínima que contiene al conjunto A_0 .

Nota

La intersección de todas las zonas alcanzables que contiene un punto P_0 dado, o sea la zona alcanzable mínima que contiene a P_0 , no necesariamente coincide con la zona alcanzable desde P_0 . Según la definición 1.1, esta última no necesita contener al punto P_0 .

Asimismo, la unión de todas las zonas alcanzables desde los puntos de un conjunto A_0 está contenida en la zona alcanzable mínima que contiene dichos puntos, pero no necesariamente coincide con ella.

CAPITULO 2

PERTURBACION ACOTADA

Acotación euclídeana

En el capítulo anterior hemos visto que, para que el problema de hallar la zona alcanzable desde un punto sea interesante, es preciso imponer al vector perturbador $\omega(t)$ ciertas restricciones, por ejemplo, del tipo (1.5), (1.6).

La restricción que parece más natural imponer al vector $\omega(t)$ en el sistema completo (1.1) es la acotación euclídeana

$$|\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2, \quad (2.1)$$

donde k es una constante dada. Según la ecuación (1.6), es evidente que la constante k podrá eventualmente depender del punto x pero no del parámetro t .

A continuación veremos que el comportamiento de las curvas trayectorias soluciones del sistema (1.1), al variar en forma arbitraria el vector $\omega(t)$, depende que se cumpla

$$|f(x)| = +\sqrt{f_1(x_1, x_2)^2 + f_2(x_1, x_2)^2} < k$$

o bien

$$|f(x)| > k.$$

Teorema 2.1.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) con la condición restrictiva (2.1) para las funciones $\omega_1(t), \omega_2(t)$.

Sea además un dominio D donde se cumple que

$$|f(x)| < k \quad (2.2)$$

Entonces, el vector $x(t)$ puede tener, dentro del dominio D y para valores adecuados de $\omega_1(t), \omega_2(t)$, cualquier dirección, o lo que es equivalente, toda curva totalmente contenida en D es solución del sistema (1.1).

Demostración: Sea un arco de curva de ecuación

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(\tau) \\ x_2 = \xi_2(\tau), \end{cases} \quad (2.3)$$

perteneciente a D. Queremos hallar una relación

$$\tau = \tau(t) \quad (2.4)$$

de modo de satisfacer al sistema (1.1) con una conveniente elección de las funciones $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ sujetas a la condición (2.1). Según el teorema 1.1, siempre podremos satisfacer el sistema (1.1), poniendo

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \frac{d\xi_1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f_1(\xi_1, \xi_2) \\ \omega_2(t) = \frac{d\xi_2}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f_2(\xi_1, \xi_2). \end{cases} \quad (2.5)$$

Falta ver que es posible elegir la función $\tau(t)$ que cumpla la ecuación (2.1) y sea tal que $d\tau/dt > 0$, para que la curva (2.3) sea recorrida conservando el sentido del movimiento. De (2.5) resulta (en notación vectorial)

$$|\omega(t)| = \left| \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f(\xi) \right| \leq \left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| \frac{d\tau}{dt} + |f(\xi)|.$$

Si ponemos

$$\frac{d\tau}{dt} \leq \frac{k - |f(\xi)|}{\left| \frac{d\xi}{d\tau} \right|}, \quad (2.6)$$

tendremos

$$\left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| \frac{d\tau}{dt} + |f(\xi)| \leq k.$$

Por ello

$$|\omega(t)| \leq k,$$

como debe ser por la condición impuesta al vector $\omega(t)$. Para que se satisfaga la desigualdad (2.6) con $d\tau/dt > 0$, es necesario que

$$k > |f(x)|,$$

lo que vale por hipótesis.

Teorema 2.2.

Sea el sistema (1.1) con la condición restrictiva (2.1) para las funciones $\omega_1(t), \omega_2(t)$. Sea el arco de curva (2.3) contenida en un dominio D cuyos puntos cumplen la condición

$$|f(x)| > k.$$

Entonces el sistema (1.1) admite como solución aquellas curvas contenidas en D que satisfacen la condición

$$|f(x)|^2 - \left[\frac{(\frac{df}{d\tau} \cdot f(x))}{|\frac{df}{d\tau}|} \right]^2 \leq k^2 \quad (") \quad (2.7)$$

Demostración: Evidentemente, las posibles direcciones del vector $\dot{x}(t)$ cubren un ángulo tal como el de la figura 1.

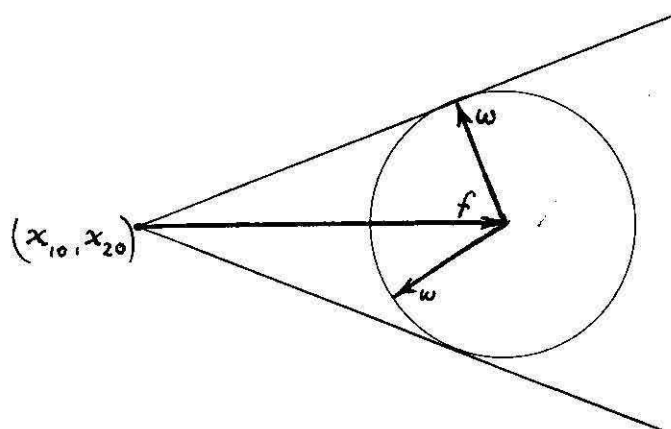


Fig. 1

(") Con la notación (a.b) indicamos el producto escalar $\sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Para que una curva como la dada por las ecuaciones (2.3) sea posible trayectoria solución del sistema (1.1), es necesario que sus tangentes sean interiores a las aristas del ángulo correspondiente a ese punto. Vamos a ver que la expresión analítica de esta condición es justamente la inecuación (2.7) ^(*).

Dada la curva (2.3), la parametrización (2.4) deberá ser de la forma (2.5) y se trata de hallar las curvas C para las cuales es posible elegir $\tau(t)$ con $d\tau/dt > 0$, tal que

$$|\omega(t)| = \left| \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f(x) \right| \leq k. \quad (2.8)$$

Para ello, buscamos el valor de $d\tau/dt$ que haga mínima la expresión

$$|\omega(t)|^2 = \left(\frac{d\xi_1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f_1 \right)^2 + \left(\frac{d\xi_2}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f_2 \right)^2. \quad (2.9)$$

Dicho valor es

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\frac{d\xi_1}{d\tau} f_1 + \frac{d\xi_2}{d\tau} f_2}{\left(\frac{d\xi_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\xi_2}{d\tau}\right)^2}. \quad (2.10)$$

Desarrollando (2.9) resulta

$$|\omega(t)|^2 = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \left[\left(\frac{d\xi_1}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{d\xi_2}{d\tau} \right)^2 \right] + f_1^2 + f_2^2 - 2 \frac{d\tau}{dt} \left(\frac{d\xi_1}{d\tau} f_1 + \frac{d\xi_2}{d\tau} f_2 \right),$$

y reemplazando el valor de $d\tau/dt$ dado por (2.10)

$$\min |\omega(t)|^2 = |f(x)|^2 - \frac{\left(\frac{d\xi}{d\tau} \cdot f(x) \right)^2}{\left| \frac{d\xi}{d\tau} \right|^2}. \quad (2.11)$$

(*) La demostración de este teorema, así como del precedente, sigue las líneas de los teoremas análogos válidos en espacios n-dimensionales, que figuran en el Capítulo II de (18).

Para que se cumpla la condición (2.1), el segundo miembro de (2.11) debe ser

$$|f(x)| - \frac{(df/d\tau \cdot f(x))^2}{|df/d\tau|^2} \leq k^2,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Acotación por componentes

Vamos ahora a considerar el caso importante en que las componentes $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ del vector perturbador estén acotadas independientemente unas de otras, es decir, que las condiciones restrictivas (1.5) sean de la forma

$$|\omega_1(t)| \leq k_1$$

$$|\omega_2(t)| \leq k_2.$$

Entonces, la circunferencia $|\omega|^2 = k^2$ se transforma en un rectángulo, y si el punto (x_{10}, x_{20}) es exterior al mismo, las direcciones posibles del vector $\dot{x}(t) = f(x) + \omega(t)$ están contenidas en un ángulo de vértice x_0 y abertura distinta para cada punto del plano (figura 2).

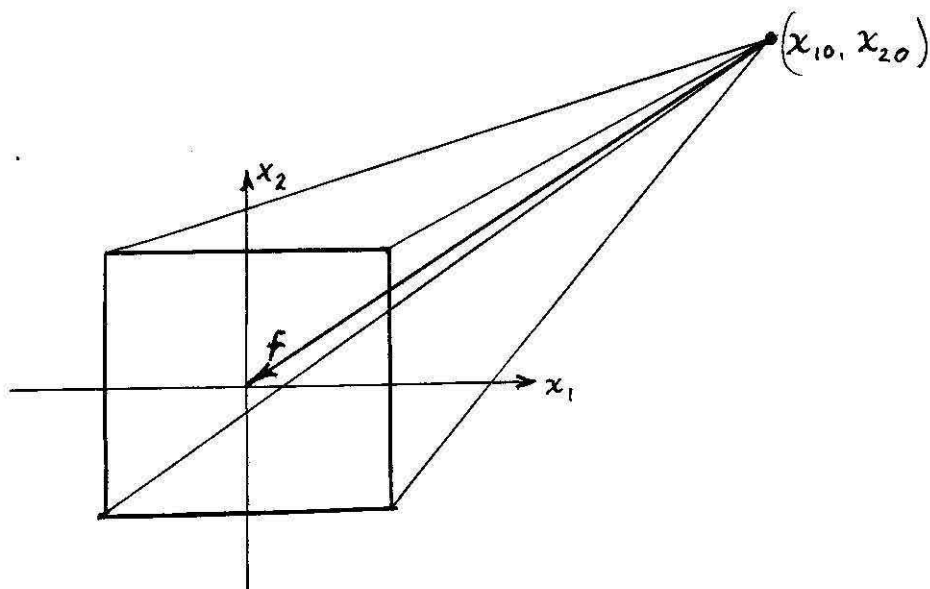


Fig. 2

Evidentemente, si el punto x_0 es interior al rectángulo, las posibles direcciones del vector x cubren todos los 360° . En cambio, si x_0 es exterior al rectángulo, los \dot{x} posibles están contenidos en el ángulo delimitado por dicho rectángulo.

Acotaciones de este tipo han dado origen a interesantes trabajos relativos a optimización de controles. Por ejemplo, dado el sistema (1.1) y el (1.2) para el cual (x_{10}, x_{20}) es un punto crítico, es decir

$$\begin{cases} f_1(x_{10}, x_{20}) = 0 \\ f_2(x_{10}, x_{20}) = 0, \end{cases}$$

(lo que equivale a un posible estado de reposo del sistema físico no perturbado), se demuestra que, en determinadas condiciones, el vector perturbador (control) óptimo, o sea el que lleva el sistema físico al estado de reposo en tiempo mínimo) ⁽¹⁾⁽²⁾ satisface a las condiciones

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm k_1 \\ \omega_2 = \pm k_2. \end{cases}$$

La teoría de las zonas alcanzables complementa este tipo de resultados ya que permite delimitar la región desde la cual es posible alcanzar dicho punto de reposo. En efecto, para determinar desde qué puntos (x_1, x_2) es alcanzable el $(x_{10}, x_{20}) = 0$, basta considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = - [f_1(x_1, x_2) + \omega_1(t)] \\ \dot{x}_2 = - [f_2(x_1, x_2) + \omega_2(t)], \end{cases} \quad (2.12)$$

y hallar la zona alcanzable desde el punto (x_{10}, x_{20}) . Es evidente que considerar el sistema (2.12) en lugar del (1.1) e-

quivale a haber invertido el sentido del parámetro t , lo que invierte el orden de alcanzabilidad de los puntos.

Ejemplos

Ejemplo 2.1

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = ax_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a > 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

El centro es un nodo estrellado repulsivo. Dentro de la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = k^2/a^2$, todas las curvas son posibles trayectorias (teorema 2.1). En un punto P fuera de dicha circunferencia, las posibles direcciones del vector \dot{x} son las que caen en un ángulo de semi-abertura α tal que $\text{sen } \alpha = k/a |x|$, como se ve en la figura 3, de donde también resulta que $OQ = |x| \text{ sen } \alpha = k/a$. Por lo tanto, la zona alcanzable desde el punto P es todo el ángulo marcado, desde P hasta el infinito. Si P cae sobre la circunferencia límite, el ángulo se convierte en un semiplano. Desde un punto interior a la circunferencia límite, es alcanzable todo el plano.

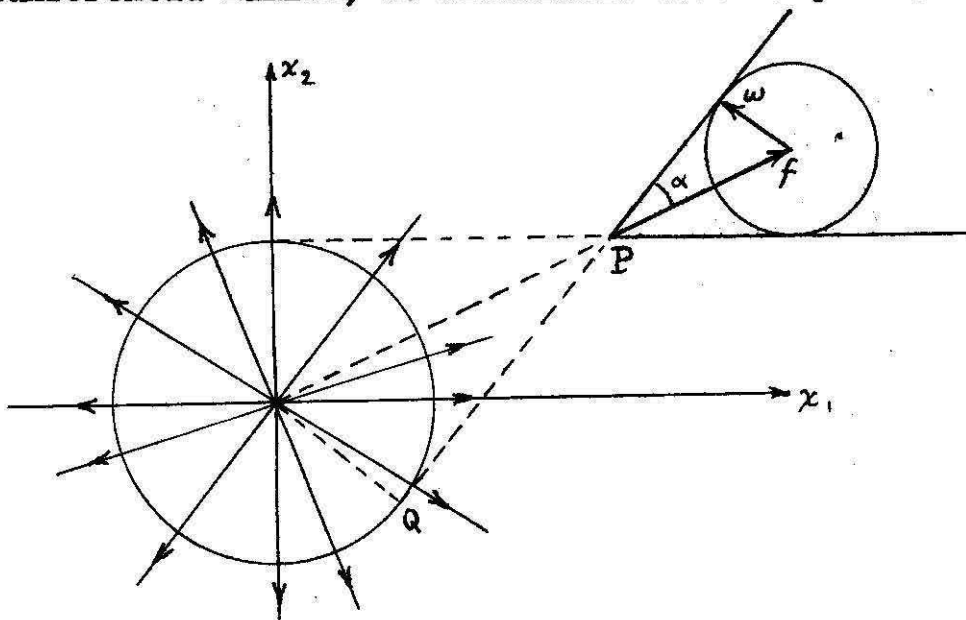


Fig. 3.

Ejemplo 2.2

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = ax_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a < 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

El origen es un nodo estrellado atractivo. Con las mismas consideraciones del ejemplo anterior, resulta que desde un punto interior a la circunferencia límite, es alcanzable todo el interior de ella. Desde un punto exterior, es alcanzable una zona como la indicada en la figura 4.

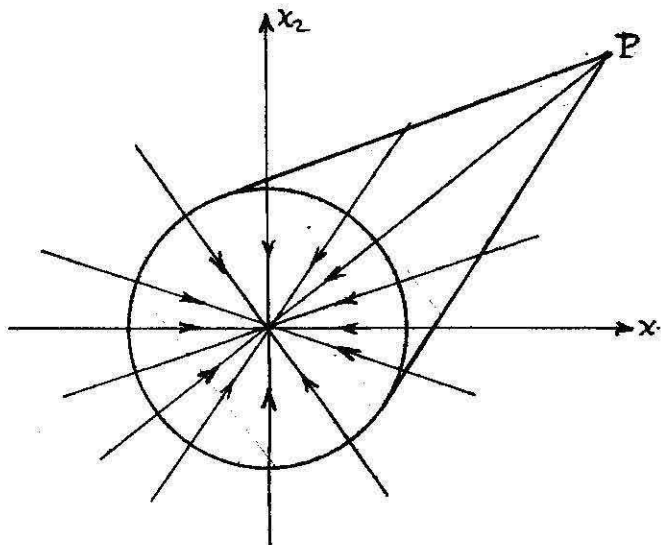


Fig. 4

Ejemplo 2.3

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1, a_2 > 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

El origen es un nodo repulsivo. Dentro de la elipse de ecuación

$$\frac{x_1^2}{a_2^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} = \frac{k^2}{a_1^2 a_2^2},$$

todas las curvas son trayectorias. Desde puntos interiores a esa elipse, es alcanzable todo el plano. Zonas alcanzables desde puntos fuera de la elipse, se ven en la figura 5.

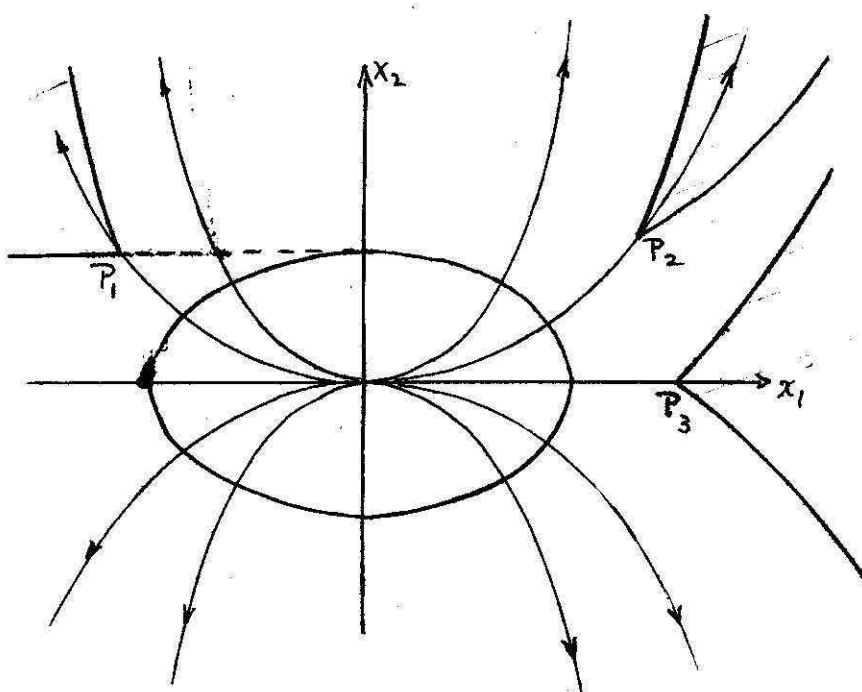


Fig. 5

Ejemplo 2.4

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1, a_2 < 0; \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

El origen es un nodo atractivo. La elipse límite es

$$\frac{x_1^2}{a_2^2} + \frac{x_2^2}{a_1^2} = \frac{k^2}{a_1^2 a_2^2}.$$

Desde un punto de ella, todo su interior es alcanzable. Desde un punto exterior, lo es una región como la indicada en la figura 6.

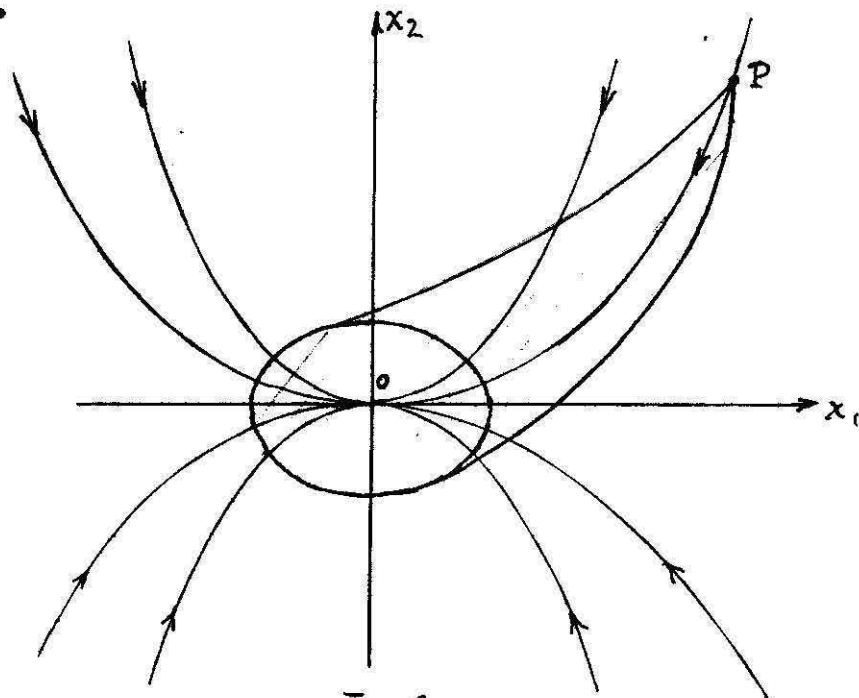


Fig. 6.

Ejemplo 2.5

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = a_1 \bar{x}_1 + \omega_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1 > 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

La franja $|\bar{x}_1| < \left| \frac{k}{a_1} \right|$ reemplaza ahora a la elipse del ejemplo 2.3 (figura 7).

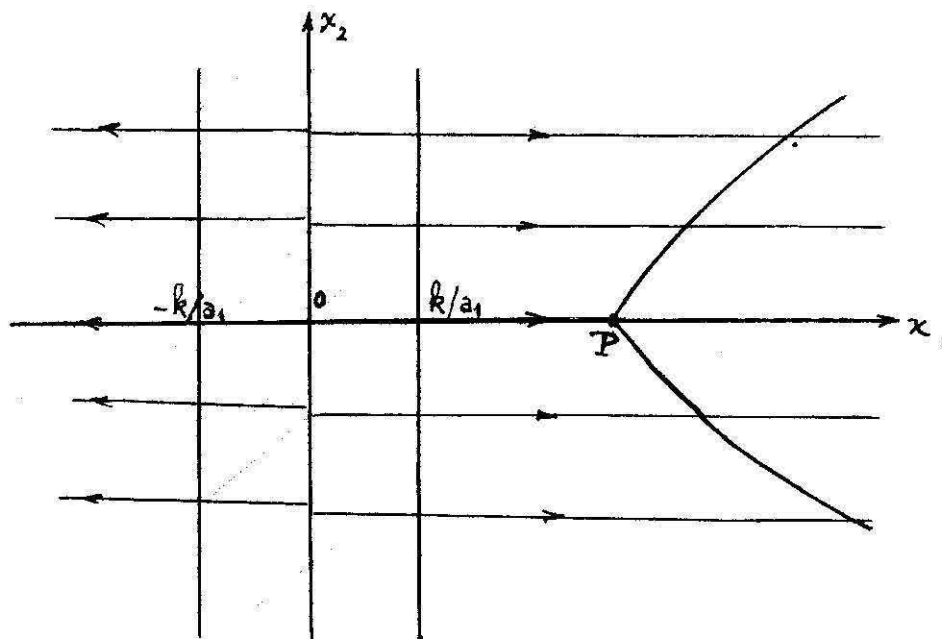


Fig. 7.

Ejemplo 2.6

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1 < 0.$$

Es análogo al ejemplo 2.4, como se puede ver en la figura 8.

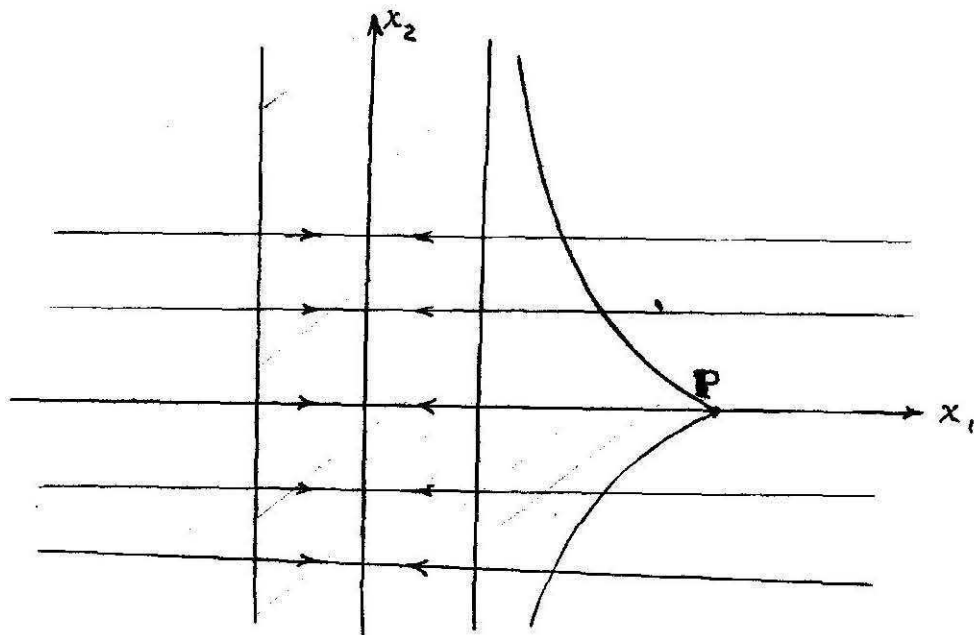


Fig. 8.

Ejemplo 2.7

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \omega_2 \end{cases} \quad a_1 > 0 > a_2, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2.$$

El origen es un punto de ensilladura. En la elipse de ecuación

$$\frac{x_1^2}{(k/a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(k/a_2)^2} = 1,$$

toda curva es posible trayectoria. Del interior de dicha elipse, es alcanzable toda la franja $|x_2| < |k/a_2|$. Otros tipos de zonas alcanzables típicas están indicadas en la figura 9.

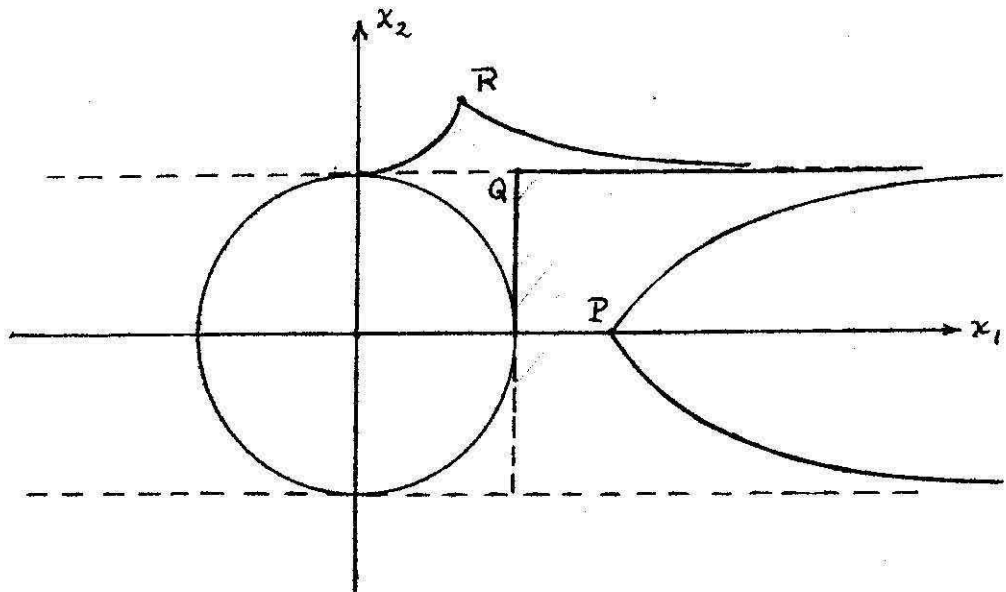


Fig. 9.

Ejemplo 2.8

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = -ax_1 + \omega_2 \end{cases} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2$$

El origen es un centro. Dentro del círculo de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = k^2/a^2$, todas las trayectorias son posibles, fuera de él no; sin embargo, es alcanzable todo el plano desde cualquier punto (figura 10).

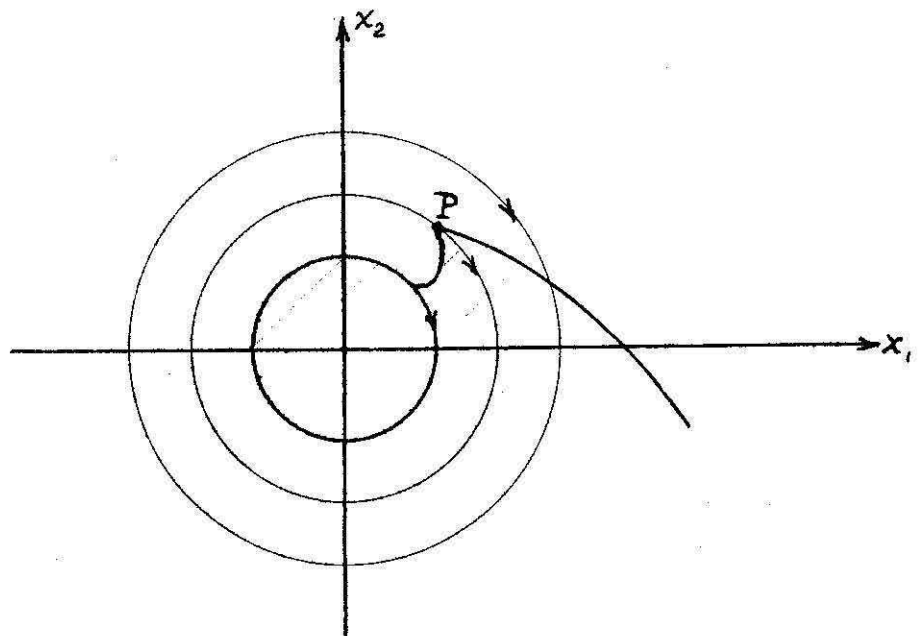


Fig. 10.

Ejemplo 2.9

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = -b x_1 + a x_2 + \omega_2 \end{cases} \quad a < 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2$$

El origen es un foco atractivo (las soluciones son, en coordenadas polares, $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}\omega}$). Dentro de la circunferencia de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = k^2/a^2 + b^2$, todas las trayectorias son posibles, pero la zona alcanzable desde el centro es el círculo cuya ecuación es $x_1^2 + x_2^2 = k^2/a^2$ (figura 11).

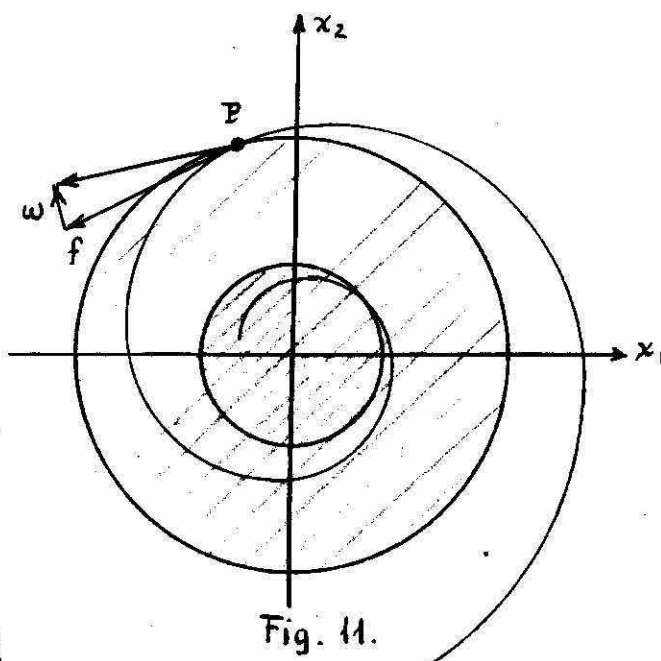


Fig. 11.

Ejemplo 2.10

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = -b x_1 + a x_2 + \omega_2 \end{cases} \quad a > 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq k^2$$

El origen es un foco repulsivo. Desde el interior del círculo de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = k^2/a^2$, todo el plano es alcanzable, desde el exterior, no. La zona exterior $x_1^2 + x_2^2 > k^2/a^2$ es la alcanzable desde todo punto de dicha circunferencia (ver figura 12).

Ejemplo 2.11

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = a_1 \bar{x}_1 + \omega_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = a_2 \bar{x}_1 + a_1 \bar{x}_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1 < 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 < k^2.$$

El origen es un nodo a una tangente, atractivo. En el interior de la elipse de ecuación

$$(a_1^2 + a_2^2)\bar{x}_1^2 + a_2^2 \bar{x}_2^2 + 2a_1 a_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 = k^2,$$

todas las curvas son posibles trayectorias. Una zona alcanzable típica, desde un punto P_0 exterior, se puede ver en la figura 13.

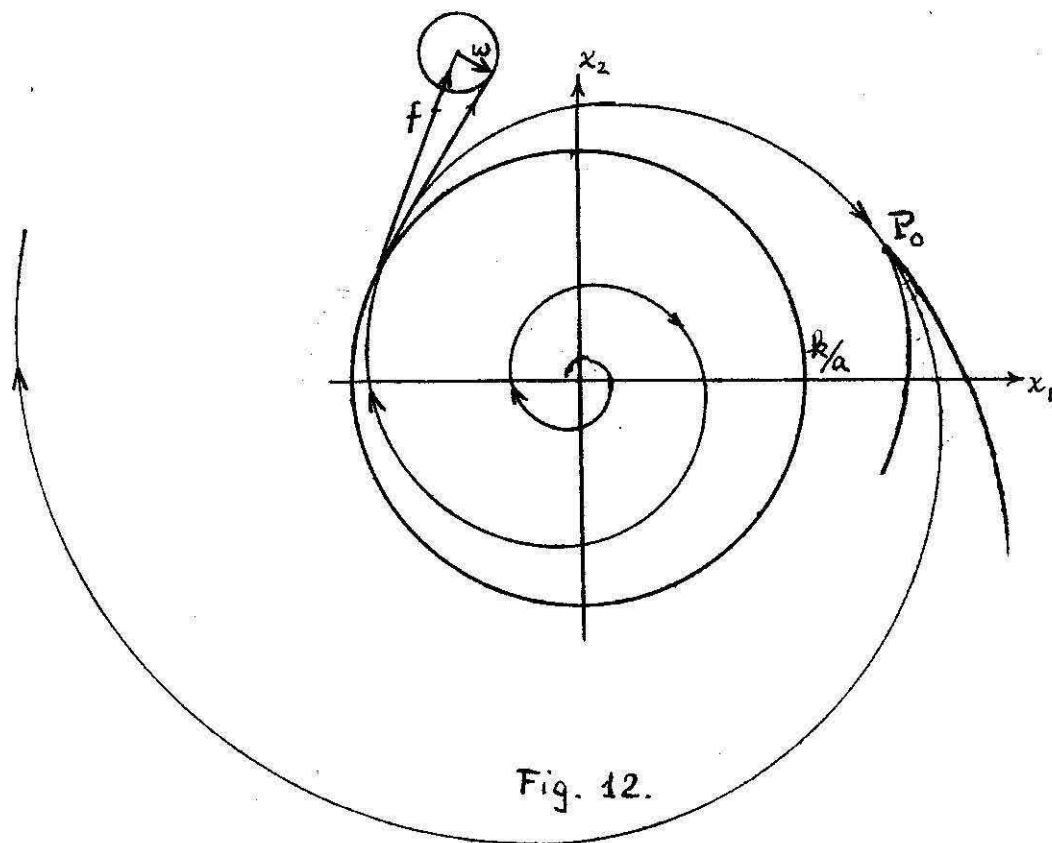


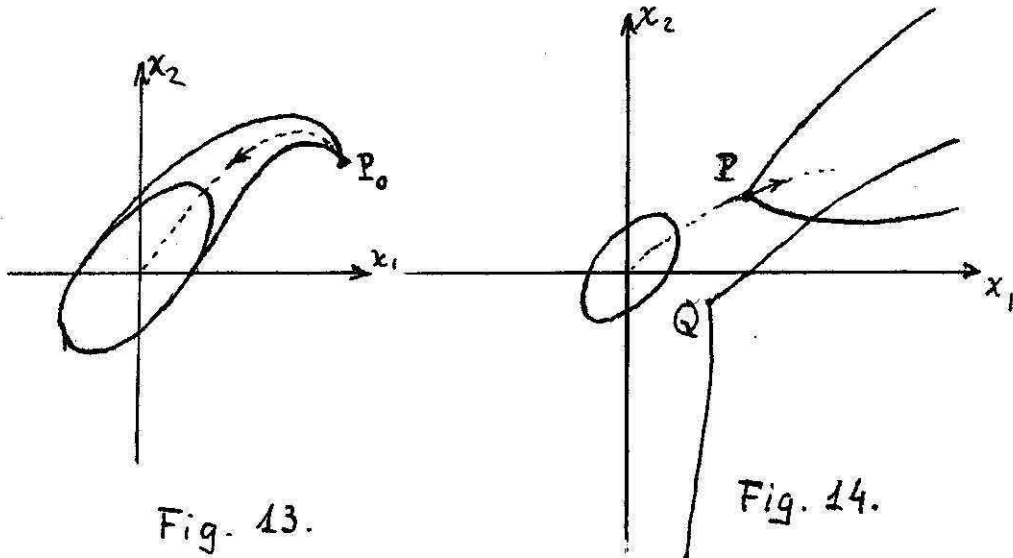
Fig. 12.

Ejemplo 2.12

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = a_1 \bar{x}_1 + \omega_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = a_2 \bar{x}_1 + a_1 \bar{x}_2 + \omega_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1 > 0.$$

El origen es un nodo repulsivo, a una tangente. Este ejemplo es enteramente análogo al anterior, como puede verse fácilmente en la figura 14.



Ecuación de segundo orden a coeficientes constantes

Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + a \dot{x} + b x = 0 \quad (2.13)$$

donde a y b son constantes. Esta ecuación equivale al sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 \end{cases}$$

Agregándole los términos de control ω , resulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \omega_1 \\ \dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + \omega_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Interesa ver qué representan estos términos en la ecuación de segundo orden (2.13), para lo cual despejamos

$$x_2 = \dot{x}_1 - \omega_1,$$

y sustituimos en la segunda de las ecuaciones (2.14)

$$\ddot{x}_1 - \dot{\omega}_1 = -bx_1 - ax_1 + a\omega_1 + \omega_2,$$

o sea

$$\ddot{x}_1 + ax_1 + bx_1 = a\omega_1 + \dot{\omega}_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (2.15)$$

Se ve que cualquier perturbación arbitraria ω_3 de la ecuación diferencial de segundo orden (2.13) es representable como una del sistema equivalente (2.14) (poniendo por ejemplo, $\omega_3 = \omega_2$, $\omega_1 = 0$) e inversamente, cualquier perturbación ω_1 , ω_2 del sistema repercute en x_1 como una cierta perturbación ω_3 de la ecuación de segundo orden a que x_1 satisface. De esto se deduce la importante conclusión:

Dada la ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes (2.13) con determinadas condiciones iniciales, toda abscisa x es alcanzable mediante el agregado de un término ω_3 de perturbación adecuado. En efecto, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.14) admite alguna perturbación ω_1, ω_2 tal que sea alcanzable cualquier punto (x_1, x_2) , (teorema 1.1). Luego, en (2.15) existe un ω_3 tal que la abscisa $x = x_1$ antes mencionada, sea alcanzada por la solución de la ecuación.

En cambio, es fácil ver que no se mantienen las relaciones de acotación entre las perturbaciones $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ del sistema de ecuaciones y ω_3 de la ecuación de segundo orden.

CAPITULO 3

RESTRICCIÓN DE LOS VECTORES PERTURBADORES

A UNA VARIEDAD UNIDIMENSIONAL

Condiciones restrictivas

En aplicaciones a muchos campos de la técnica y la física, aparecen sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos entonces a estudiar sistemas del tipo (3.1), en los que supondremos que f_1, f_2, φ_1 y φ_2 son funciones dadas fijas y $\alpha(t)$ es una función arbitraria, con la condición que todas estas funciones satisfacen los requisitos exigidos en el Capítulo 1. Este caso queda, pues, incluido en el caso general considerado hasta ahora

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) + \omega_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) + \omega_2(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (3.2)$$

De acuerdo a nuestra terminología, el sistema fundamental es

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.3)$$

mientras que el sistema perturbador toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega_1(t) = \alpha(t) \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = \omega_2(t) = \alpha(t) \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.4)$$

con $\alpha(t)$ arbitraria (medible).

Nos interesa considerar separadamente las curvas integrales solución de los sistemas (3.3) y (3.4). En este último sistema, nos podemos independizar de la función arbitraria $\alpha(t)$ considerando simplemente el

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.5)$$

A los sistemas (3.3) y (3.5) los llamaremos sistema fundamental y perturbador, respectivamente, y de manera análoga vector fundamental y perturbador a los vectores por ellos definidos, o sea $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ y $\mathcal{P} = (\varphi_1, \varphi_2)$. Evidentemente, esto involucra una cierta discrepancia con la nomenclatura general del Capítulo 1, pero este desacuerdo no puede conducir a error, ya que la diferencia entre los sistemas (3.4) y (3.5) reside en la supresión del factor común $\alpha(t)$ y como es fácil ver, las trayectorias de ambos sistemas son las mismas (siempre que $\alpha(t)$ no se anule ni cambie de signo). Al vector definido por el sistema (3.1), es decir, al vector $\mathcal{F} + \mathcal{P}\alpha(t)$, lo llamaremos vector (o campo) resultante o perturbado.

Clasificación de puntos

Según la posición relativa de los vectores \mathcal{F} y \mathcal{P} distinguiremos las siguientes clases de puntos:

- a) punto regular, es aquel para el cual los vectores \mathcal{F} y \mathcal{P} no se anulan y forman entre sí un ángulo distinto de cero;
- b) punto de contacto, en el que el vector \mathcal{F} se anula o bien tiene dirección coincidente con la de \mathcal{P} ;
- c) punto irregular, en el que el vector \mathcal{P} se anula;
- d) punto crítico esencial, en el que se cumple que $\mathcal{F} = \mathcal{P} = 0$.

Curva fundamental y semi-fundamental

Dado el sistema completo (3.1), llamaremos curva fundamental a toda trayectoria solución del sistema no perturbado (3.3).

Análogamente, llamaremos curva semi-fundamental posterior (anterior) a un punto $P_0 = (x_{10}, x_{20})$, a aquella

parte de la curva que satisface al sistema (3.3) con la condición

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

recorrida en el sentido de valores crecientes positivos (negativos) del parámetro t .

Curva perturbatriz y semi-perturbatriz

Dado el sistema completo (3.1), llamaremos curva perturbatriz a toda trayectoria solución del sistema perturbador (3.5).

Del mismo modo que para las fundamentales, llamaremos curva semi-perturbatriz posterior (anterior) a un punto $P_0 = (x_{10}, x_{20})$ a aquella parte de la curva, recorrida para sentido creciente positivo (negativo) del parámetro t , tal que satisface al sistema perturbador (3.5) con la condición

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \bar{x}_{10} \\ x_2(0) &= x_{20}. \end{aligned}$$

Por último, convendremos en llamar a las curvas soluciones del sistema completo (3.1), simplemente curvas trayectorias.

Teorema 3.1

Dado el sistema completo (3.1), una zona alcanzable generalizada \tilde{Z} y un punto regular $P_0 = (\bar{x}_{10}, x_{20})$ de la frontera de \tilde{Z} , existe un entorno U de P_0 tal que en él la frontera de la zona alcanzable generalizada, es la curva perturbatriz que pasa por P_0 .

Demostración: Por ser P_0 regular, de acuerdo a la definición, en él los vectores \mathcal{F} y \mathcal{P} forman entre sí un ángulo no nu-

lo. Por continuidad, existirá un entorno U de P_0 tal que todos sus puntos sean regulares y tal que en él, la dirección de los vectores F y P varíe menos que un cierto ε arbitrariamente prefijado. Esto significa que en U quedarán determinadas dos familias de curvas, las curvas fundamentales de ecuación

$$u_2 = u_2(x_1, x_2) = \text{const.},$$

y las curvas perturbatrices de ecuación

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) = \text{const.},$$

tales que forman una red topológicamente equivalente a un reticulado euclideo. Hagamos ahora la transformación de coordenadas de jacobiano no nulo:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = u_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \bar{u}_2 = u_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{cases}$$

que lleva el sistema (x_1, x_2) al (\bar{u}_1, \bar{u}_2) .

Como las ecuaciones de las curvas fundamentales y perturbatrices, en el primitivo sistema de coordenadas, son, respectivamente

$$\begin{cases} x_i = F_i(x_{10}, x_{20}, t, t_0) \\ x_i = \Phi_i(x_{10}, x_{20}, t, t_0) \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

en el nuevo sistema de coordenadas serán

$$F \begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) \neq 0 \\ \dot{u}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

puesto que es $u_2 = \text{const.}$ a lo largo de una curva fundamental,

y

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \varphi_1(x_1, x_2) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \varphi_2(x_1, x_2) = 0 \\ \dot{u}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \varphi_1(x_1, x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \varphi_2(x_1, x_2) \neq 0, \end{cases}$$

ya que análogamente es $u_1 = \text{const.}$ a lo largo de una perturbatriz. Entonces, el sistema completo tendría la forma

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = g_1(u_1, u_2) > 0 \\ \dot{u}_2 = \alpha(t) g_2(u_1, u_2), \end{cases} \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{cases} g_1(u_1, u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} f_2 \\ g_2(u_1, u_2) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \varphi_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \varphi_2, \end{cases}$$

y $\alpha(t)$ es una función arbitraria. Hemos tomado $g_1 > 0$, puesto que siendo regulares todos los puntos, la función g_1 debe tener signo constante.

Evidentemente, en el sistema (3.6), todo punto $P_1 = (u_{11}, u_{21})$ (figura 15) con $u_{11} > u_{10}$ es alcanzable desde $P_0(x_{10}, x_{20})$. Si, en cambio, P_0 pertenece a la frontera de la zona alcanzable generalizada Z , como es el caso por hipótesis, un punto tal como el $P_2(u_{12}, u_{22})$ con $u_{12} > u_{10}$ no

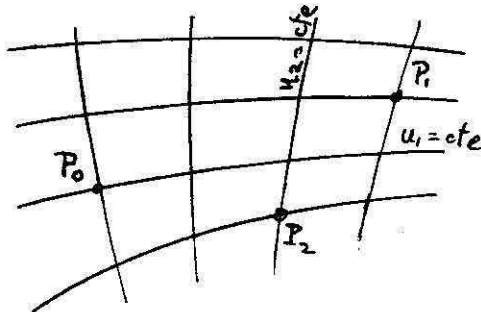


Fig. 15.

puede ser alcanzable, pues si lo fuera, también lo sería todo P_3 con $u_{10} > u_{13} > u_{12}$ y P_0 no sería entonces de la frontera de Z . En consecuencia, llegamos a la conclusión que la posible frontera de la zona alcanzable generalizada Z por un punto P_0 es justamente la curva perturbatriz que pasa por P_0 , que es lo que queríamos demostrar.

Definición de punto cuasi-alcanzable

Dado el sistema de ecuaciones (3.1), diremos que el punto P_1 es cuasi-alcanzable desde P_0 , si en todo entorno de P_1 existen puntos alcanzables desde P_0 . Respecto de la zona alcanzable generalizada Z , diremos que P_1 es cuasi-alcanzable desde Z , si en todo entorno de P_1 existen puntos de Z .

Criterios de alcanzabilidad y cuasi-alcanzabilidad

Veremos a continuación algunos criterios que nos permitirán, dado un punto, determinar qué otros puntos del plano son alcanzables o cuasi-alcanzables respecto al dado.

Teorema 3.2

Dado un punto P_0 , todo punto P_1 de la curva perturbatriz que pasa por P_0 , es cuasi-alcanzable desde P_0 .

Demostración: Sea

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{\Phi}_1(x_{10}, x_{20}, t-t_0) \\ \bar{x}_2 = \bar{\Phi}_2(x_{10}, x_{20}, t-t_0), \end{cases} \quad (3.7)$$

la solución del sistema perturbador (3.5). Por hipótesis, si (x_{10}, x_{20}) son las coordenadas del punto P_0 y (x_{11}, x_{21}) las de P_1 , se verifica que

$$\begin{cases} \bar{x}_{11} = \bar{\Phi}_1(x_{10}, x_{20}, t_1) \\ \bar{x}_{21} = \bar{\Phi}_2(x_{10}, x_{20}, t_1), \end{cases}$$

para cierto valor t_1 del parámetro t . Supongamos que $t_1 > 0$. Según las condiciones impuestas a las soluciones del sistema perturbador en el Capítulo 1, las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ dependen en forma continua de $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$. Escribamos ahora el sistema (3.1) referido al nuevo parámetro

$$\tau = \alpha t, \quad (3.8)$$

donde α es una constante positiva. Con este cambio de variables, el sistema de ecuaciones (3.1) queda

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \varphi_1(x_1, x_2) + \frac{1}{\alpha} f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \varphi_2(x_1, x_2) + \frac{1}{\alpha} f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.9)$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones (3.9) son, evidentemente

$$\begin{cases} x_1 = \Psi_1\left(\frac{1}{\alpha}, x_{10}, x_{20}, \tau - \tau_0\right) \\ x_2 = \Psi_2\left(\frac{1}{\alpha}, x_{10}, x_{20}, \tau - \tau_0\right), \end{cases}$$

que, por las mismas razones invocadas para las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, dadas por (3.7), son funciones continuas de $1/\alpha$. Por lo tanto, como para el valor $1/\alpha = 0$, las ecuaciones

$$\begin{cases} x_{11} = \Psi_1(0, x_{10}, x_{20}, T) = \Phi_1(x_{10}, x_{20}, T) \\ x_{21} = \Psi_2(0, x_{10}, x_{20}, T) = \Phi_2(x_{10}, x_{20}, T), \end{cases} \quad (3.10)$$

nos dan las coordenadas del punto P_1 , dado cualquier entorno U de P_1 , existirá un valor $\alpha_0 > 0$ tal que para todo α con $|\alpha| > \alpha_0$, correspondientemente $|1/\alpha| < 1/\alpha_0$, las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{x}_{12} = \Psi_1 \left(\frac{1}{\alpha}, x_{10}, x_{20}, T \right) \\ x_{22} = \Psi_2 \left(\frac{1}{\alpha}, x_{10}, x_{20}, T \right), \end{cases} \quad (3.11)$$

definan un punto P_2 perteneciente al entorno U . Como para ese valor de α (que suponemos positivo), la transformación (3.8) es reversible, el punto P_2 estará sobre la trayectoria del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.12)$$

que pasa por el punto $P_0 = (x_{10}, x_{20})$. Como la transformación (3.8) conserva, para $\alpha > 0$, el sentido en que son recorridas las trayectorias, resulta que P_2 es posterior a P_0 . Como consecuencia de ello, tendremos que, siendo U un entorno cualquiera, habrá puntos P_2 alcanzables desde P_0 tan cercanos a P_1 como se quiera, con lo que queda demostrado el teorema.

Nota

Si, en cambio, fuera $T < 0$, habrá que tomar para la demostración $\alpha < 0$, $|\alpha| > \alpha_0$. Entonces, en las ecuaciones (3.10) y (3.11) sería $\tau - \tau_0 = T < 0$, con lo que, al pasar al sistema (3.12) según la transformación (3.8), obtendremos las ecuaciones

$$\begin{cases} x_{12} = \bar{\Phi}_1 \left(x_{10}, x_{20}, \frac{T}{\alpha} \right) \\ x_{22} = \bar{\Phi}_2 \left(x_{10}, x_{20}, \frac{T}{\alpha} \right), \end{cases}$$

como coordenadas del punto P_2 . Pero como $T < 0$ y $\alpha < 0$, resulta P_2 posterior a P_0 .

Teorema 3.3

Si Q_0 es cuasi-alcanzable (desde un punto P_0 o respecto a una zona alcanzable generalizada), cualquier punto Q_1 que pertenezca a la perturbatriz que pasa por Q_0 , es también cuasi-alcanzable.

Demostración: La demostración de este teorema se basa en la dependencia continua de la solución (3.7) del sistema perturbador respecto a las condiciones iniciales x_{10}, x_{20} . En efecto, dado un entorno arbitrario V de Q_1 , demostraremos que en él hay un punto alcanzable Q_2 . Para ello, consideremos que existe un entorno U del punto Q_0 tal que toda curva perturbatriz solución del sistema (3.5) que pasa por U , pasa también por V . Como Q_0 es cuasi-alcanzable por hipótesis, existirá en U un punto P_0 alcanzable. Evidentemente, la curva perturbatriz que pasa por P_0 atraviesa el entorno V y llamemos Q_3 a un punto de dicha perturbatriz en V . Por ser P_0 alcanzable, Q_3 será cuasi-alcanzable y entonces existirá un entorno W de Q_3 interior a V tal que en él hay un punto Q_2 alcanzable, con lo que hemos demostrado el teorema.

Corolario

Si P_0 es un punto alcanzable (desde otro punto cualquiera o respecto a una zona alcanzable generalizada), que no está sobre la frontera de la zona alcanzable, cualquier otro punto P_1 sobre la perturbatriz que pasa por P_0 , es alcanzable.

Demostración: Demostraremos esto, suponiendo que sobre la perturbatriz correspondiente, el punto P_1 es posterior a P_0 . Al igual que en el teorema 3.2, se ve que esta hipótesis no es restrictiva. Razonando del mismo modo que para la demostración de dicho teorema, escribimos el sistema (3.1) en la forma (3.9). Dado un entorno U del punto P_0 , tal que todos

sus puntos sean alcanzables, podremos hallar un α en (3.8) y (3.9) de modo que sea positivo y tan grande como para que la curva trayectoria solución del sistema (3.9) que pasa por P_1 también pase por un punto P_2 del entorno U . Como toda trayectoria solución del sistema de ecuaciones (3.9), lo es también del (3.1), y además, siendo $\alpha > 0$, el punto P_1 es posterior a P_2 , resulta P_1 alcanzable desde P_2 (que era alcanzable).

Corolario 3.2

Si P_0 no es cuasi-alcanzable (desde otro punto o respecto a una zona alcanzable generalizada, tampoco lo es cualquier punto P_1 de la perturbatriz que pasa por P_0 .

Demostración: La demostración es inmediata por el absurdo, aplicando el teorema 3.3. En efecto, supongamos que P_1 fuera cuasi-alcanzable. En ese caso, todo otro punto perteneciente a la perturbatriz que pasa por P_1 , sería cuasi-alcanzable, en contra de la hipótesis.

CAPITULO 4

CURVAS FRANQUEABLES E INFRANQUEABLES

En el capítulo anterior hemos dado algunas propiedades generales referentes a las curvas fundamentales y perturbatrices, llegando a establecer criterios que en ciertos casos permiten determinar posibles fronteras de zonas alcanzables. En este capítulo estudiaremos más en detalle las relaciones entre un campo vectorial y una curva, estableciendo más condiciones para delimitar zonas alcanzables.

Definición de "trampa"

En numerosos trabajos (Levinson y Smith⁽²¹⁾, Langenhop y Farnell⁽²²⁾, Friedrichs⁽²³⁾, Rauch⁽²⁴⁾ y otros), que estudian ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = k e(t),$$

aparece la idea de determinar regiones del espacio cuya frontera tenga la propiedad que una solución cualquiera de un sistema de ecuaciones diferenciales totales, que parte de un punto de dicha región, no puede salir de la misma. Dicho de otro modo, la frontera de tal región actúa como "trampa"^(") para las curvas integrales del sistema dado.

Entre los criterios que vamos a ver a continuación sobre delimitación de fronteras de zonas alcanzables, se incluyen algunos que establecen condiciones específicas para hallar una trampa. Es por eso que damos la siguiente definición:

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales totales

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t), \end{array} \right.$$

(") Sansone y Conti, op. cit. (19), p. 444.

y un dominio Δ con la propiedad que si $x_1(t), x_2(t)$ es una solución del sistema dado que para $t = t_0$ parte de un punto (x_{10}, x_{20}) de la frontera de Δ , la solución $x_1(t), x_2(t)$ queda en Δ para todo t, x_{10}, x_{20} , llamaremos "trampa" a la frontera de Δ .

En el caso en que el dominio Δ sea tal que su clausura ^(") $\bar{\Delta}$ es homeomorfa a una esfera, se puede aplicar a la trampa el teorema de Brouwer ⁽²⁵⁾ del punto fijo que dice:

^(")
Toda transformación continua de un elemento del espacio euclideo de n dimensiones en sí mismo o en una de sus partes, admite al menos un punto fijo (unido).

Entonces existe en la trampa, por lo menos un punto fijo, o lo que es equivalente, una solución del sistema de ecuaciones diferenciales considerado.

Si f_1 y f_2 son funciones periódicas de período $\omega > 0$, es decir,

$$f_i(t + \omega, x_1, x_2) = f_i(t, x_1, x_2) \quad i = 1, 2,$$

dicha solución es periódica con el mismo período

$$x_i(t_0) = x_i(t_0 + \omega) \quad i = 1, 2.$$

(") Dado un conjunto $A \subset B$ y un punto $x \in B$, diremos que el punto x pertenece a la clausura o a la adherencia de A , si toda esfera $E(x, r)$, $r > 0$ contiene por lo menos un punto de A . La clausura de A es el conjunto formado por todos los puntos x de adherencia de A y lo indicamos \bar{A} .

(") Se llama elemento del espacio euclideo n -dimensional E_n a todo conjunto de puntos de E_n homeomorfo a una esfera S de E_n (con su contorno incluido), esto es, todo conjunto de E_n que puede ponerse en correspondencia biunívoca y continua con el conjunto de puntos de S .

Regiones R_i y R_j determinadas por un arco de curva

Un arco de curva simple de Jordan es la imagen homeomorfa de un segmento

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(\tau) \\ x_2 = \xi_2(\tau), \end{cases} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (4.1)$$

siendo las $\xi_i(\tau)$ continuas y la correspondencia entre los puntos del arco y los valores de τ , biunívoca. Consideraremos también arcos abiertos finitos, que se obtienen eliminando los extremos de un arco como el (4.1). La formulación

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(\tau) \\ x_2 = \xi_2(\tau), \end{cases} \quad 0 < \tau < 1 \quad (4.2)$$

incluye también el caso de que el arco se extienda hasta el infinito, pero transformando topológicamente el plano en la esfera de Gauss (por agregado del punto impropio); este caso no necesita ser tratado especialmente en lo que sigue.

Un arco de curva de Jordan $\gamma = \widehat{AB}$, definido por (4.1), tiene, entre otras, las siguientes propiedades cuya demostración puede verse en los libros de topología ⁽²⁰⁾ :

- 1) es posible encontrar otro arco de Jordan γ_1 de extremos A,B, tal que el conjunto $\gamma + \gamma_1$ forme una curva cerrada de Jordan, o sea, la imagen homeomorfa de la circunferencia;
- 2) tal curva cerrada de Jordan $\gamma + \gamma_1$ divide al plano en dos regiones conexas R_1, R_2 , una acotada y la otra no, siendo la curva $\gamma + \gamma_1$ la frontera común a ambas;
- 3) todo punto P interior del arco γ posee algún entorno ξ tal que dados ^{dos} puntos P_1, P_2 de γ , que pertenezcan a

dicho entorno, pueden unirse por dos arcos simples de Jordan que:

- a) están totalmente contenidos en el entorno ε ,
- b) tienen común con γ únicamente los puntos P_1 y P_2 ,
- c) uno de ambos arcos es interior a la región R_1 y el otro a la R_2 definidas en el punto anterior.

En general, consideraremos los arcos de curva (4.1), (4.2) como orientados, vale decir, recorridos en el sentido de valores crecientes de τ . En ese caso, las dos regiones R_1, R_2 obtenidas completando con otro arco γ_1 una curva cerrada (como arriba se ha explicado), pueden individualizarse como regiones que quedan a derecha e izquierda, respectivamente, del arco γ . De acuerdo con esto, usaremos la notación R_d, R_i para dichas regiones.

Curvas de tangente continua. Construcción elemental de las regiones R_d, R_i

En muchos casos, las curvas a considerar no serán tan generales como las definidas precedentemente. En cada punto existirá un vector tangente de componentes $\xi_1'(\tau)$, $\xi_2'(\tau)$, siendo éstas funciones continuas que no se anulan simultáneamente. De esta manera, la tangente a la curva variará con continuidad.

Como veremos, de las regiones R_i, R_d interesa a aquella parte que está en la inmediata vecindad del arco γ (de ahí que el arco γ_1^- , imprescindible para definir ambas regiones, pueda adoptarse arbitrariamente). Con la siguiente construcción elemental podemos obtener otras dos regiones R_i', R_d' que para nuestras consideraciones serán de igual utilidad.

Tomemos en cada punto P del arco abierto (4.2) un entorno circular $C(P,r)$ de centro P y radio r suficientemente pequeño como para que γ corte a la circunferencia de $C(P,r)$ en dos puntos únicamente, lo que siempre será posible por la continuidad del vector tangente a γ en P , que es punto interior de γ . El arco γ divide a $C(P,r)$ en dos regiones. La unión de los entornos

$$R' = \bigcup_{P \in \gamma} C\left(P, \frac{r}{2}\right), \quad (4.3)$$

es una franja que contiene al arco γ , que la divide en las regiones R'_i, R'_d , cuya frontera común es él. Por la forma en que han sido construídas R'_i y R'_d , es imposible que algún punto del plano pertenezca a ambas. Si bien estas regiones R'_i, R'_d no son idénticas con las R_i, R_d arriba definidas, serán equivalentes para nuestras demostraciones subsiguientes.

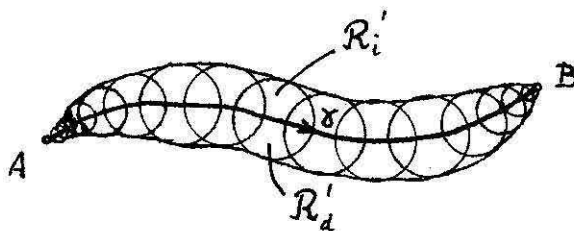


Fig. 16.

Definición de arco franqueable

Sea un arco de curva de Jordan $\gamma = \widehat{AB}$ dado por (4.2) y un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (4.4)$$

definido en una región del plano que contiene al arco γ . Supongamos que dicho sistema satisface las condiciones generales enunciadas al comienzo del Capítulo 1, y cuya solución está dada por

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_{10}, x_{20}, t-t_0) \\ x_2 = F_2(x_{10}, x_{20}, t-t_0). \end{cases}$$

Tracemos otro arco γ' de extremos A, B que defina junto con γ las regiones $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_d$, como hemos visto anteriormente.

Diremos que el arco γ es franqueable de izquierda a derecha por las soluciones del sistema de ecuaciones (4.3) si existe un par de puntos $P_1(x_{11}, x_{21})$ y $P_2(x_{12}, x_{22})$ tales que:

i) $P_1 \in \mathcal{R}_1; P_2 \in \mathcal{R}_d;$

ii) $F_1(x_{11}, x_{21}, t_2-t_1) = x_{12}$

$F_2(x_{11}, x_{21}, t_2-t_1) = x_{22}$, para ciertos valores t_1, t_2 con $t_2 > t_1;$

iii) el arco P_1P_2 de la trayectoria solución de (4.4) no corta al arco γ' (incluidos los extremos), cortando por lo tanto al arco γ (excluidos los extremos).

Se ve que la definición es independiente del arco γ' elegido para definir las regiones $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_d$. Para demostrar esto, supongamos que se verificaran todas estas condiciones utilizando el arco auxiliar γ' y tomemos ahora otro γ'' . Sobre la trayectoria (orientada) P_1P_2 definimos dos clases de puntos:

a) puntos $P(\tau)$ tales que existe algún $P'(\tau')$ anterior ($\tau' < \tau$) que pertenezca a \mathcal{R}_d . Este conjunto no es vacío, pues por lo menos P_2 pertenece a él. Por otra parte, por

lo menos el P_1 no pertenece a él. El extremo inferior de los valores de τ que corresponden a los puntos de este conjunto determina un punto Q_2 que pertenece necesariamente a la frontera de R_d (o sea a $\gamma + \gamma'$ que es un conjunto cerrado en sentido topológico), y como no puede ser de γ' , pertenece a γ .

b) La clase de los puntos $P(\tau)$ anteriores a Q_2 , tales que existe algún punto $P'(\tau')$ posterior perteneciente a R_i . P_1 pertenece a esta clase, y todo punto de la clase a) no pertenece a ella. Análogamente al caso anterior, el primer punto Q_1 que sigue a todos los de la clase b) pertenece a γ .

Q_1 puede coincidir con Q_2 o no hacerlo, en este último caso, todo punto intermedio también pertenece a γ .

Consideremos ahora el arco γ'' que une los extremos de γ . Siendo el arco Q_1Q_2 de γ un conjunto cerrado, lo mismo que el arco γ'' , ambos distan entre sí una magnitud $\varepsilon > 0$. Tomamos entonces sobre la trayectoria P_1P_2 un punto P_1' de R_i dentro del entorno de radio ε del punto Q_1 , y otro P_2' de R_d dentro del entorno de radio ε del punto Q_2 . La trayectoria $P_1'P_2'$ cumple las condiciones exigidas, pues pasa de R_i a R_d sin cortar a γ'' .

Por lo tanto, el arco γ también es franqueable de izquierda a derecha con respecto al arco γ'' .

Si un arco abierto de curva de Jordan no es franqueable de izquierda a derecha, lo llamaremos infranqueable de izquierda a derecha.

Teniendo en cuenta la definición anterior, queda claro el significado de las siguientes expresiones: el arco P_1P_2 es franqueable en ambos sentidos; el arco P_1P_2 es fran-

queable en un solo sentido; el arco P_1P_2 es infranqueable en ambos sentidos.

Entorno asociado

Daremos a continuación el concepto de entorno asociado introducido por Sansone^("). Comenzaremos por definir el punto regular del sistema de ecuaciones (4.4) como aquel punto que no es crítico, o lo que es lo mismo, aquel punto (x_1, x_2) para el cual es $f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2) > 0$.

Por la continuidad de las funciones $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, el conjunto de los puntos regulares del sistema (4.4) es abierto, siendo posible por ello determinar en cada punto regular P un $\rho > 0$ tal que todo punto Q del círculo $C(P, \rho)$ de centro P y radio ρ sea regular. Utilizando nuevamente la hipótesis de continuidad de f_1 y f_2 , es posible determinar ρ de modo que los vectores \mathcal{F} correspondientes a dos puntos cualesquiera Q_1 y Q_2 de $C(P, \rho)$ formen un ángulo $\leq \pi/4$. En tal caso, diremos que $C(P, \rho)$ es un círculo asociado al punto regular P .

Evidentemente, si $0 < \rho' < \rho$, también $C(P, \rho')$ será un círculo asociado al punto P .

En un círculo asociado, llamaremos diámetro normal al diámetro normal al vector $\mathcal{F}(P) = (f_1(P), f_2(P))$ en P .^(") Dicho diámetro es un arco sin contacto^("), según la defi-

(") Sansone y Conti, op. cit. (19), p. 176.

(") Un arco de curva C se dice sin contacto respecto al sistema (4.4) si sobre C no existen puntos críticos y si la trayectoria del sistema (4.4) que pasa por un punto cualquiera de C no es tangente a C (Poincaré, op. cit. (3)).

nición de Poincaré, y todas las curvas trayectorias soluciones del sistema de ecuaciones (4.4) que pasan por puntos del mismo deben atravesarlo en el mismo sentido que el vector $F(P)$. Entonces podemos distinguir en $C(P, \rho)$ un semi-círculo "negativo" (positivo) respecto al diámetro normal; aquel que contiene las trayectorias del sistema (4.4) que llegan (salen de) a los puntos del diámetro.

Como ya hemos observado, para cada punto regular P existen infinitos círculos asociados. Sea ρ_P el extremo superior de los ρ para los cuales es $C(P, \rho)$ círculo asociado a P . Evidentemente caben dos posibilidades:

- i) $\rho_P = +\infty$ para un P dado y todos los puntos son regulares, siendo $\rho_P = +\infty$ para todos;
- ii) ρ_P es finito para todos los puntos regulares.

Sea $x_1(t)$, $x_2(t)$ una trayectoria regular del sistema de ecuaciones (4.4) y sea AB un arco de la misma (incluyendo los extremos). Para cada punto P del arco AB tomaremos ρ_P del modo especificado y supondremos que ρ_P es finito (el caso $\rho_P = +\infty$ carece de interés). Se ve fácilmente que ρ_P es función continua del punto P variable en AB . En efecto, si en un punto $P_0 \in AB$, la ρ_P no fuese continua, existirían números $\varepsilon > 0$ y puntos $P \in AB$ próximos tanto como se quiera a P_0 , para los cuales sería $\rho_P - \rho_{P_0} > \varepsilon$ (o bien $\rho_{P_0} - \rho_P > \varepsilon$). Tomemos uno de tales puntos P de modo que sea la distancia $d(P, P_0)$ entre P y P_0 , $d(P, P_0) < \varepsilon$. En ese caso, $d(P, P_0) < \rho_P - \rho_{P_0}$ (o bien $d(P, P_0) < \rho_{P_0} - \rho_P$) cuando el círculo $C(P_0, \rho_{P_0})$, $C(P, \rho_P)$ es interior al círculo $C(P, \rho_P)$ ($C(P_0, \rho_{P_0})$), y esto está en contradicción con la definición del número ρ_{P_0} (del número ρ_P).

Siendo AB un conjunto cerrado, ρ_P tiene en AB un mínimo absoluto que indicaremos con ρ_0 ; puesto que $\rho_P > 0$

cualquiera sea el punto P , será $\rho_0 > 0$.

Con estas consideraciones, llamaremos ahora entorno (ρ) asociado al arco AB de la trayectoria regular del sistema de ecuaciones (4.4), al conjunto de puntos Q del plano para los cuales es

$$d(Q, AB) \leq \rho \quad \text{para } 0 < \rho < \rho_0.$$

Lema 4.1 (Sansone y Conti)

Si Q es un punto de un círculo $C(P, \rho)$ asociado a un cierto P regular, podría suceder que la curva $x_1(t), x_2(t)$, trayectoria del sistema (4.4) que pasa por Q no cortara al diámetro normal de $C(P, \rho)$. Veremos entonces el siguiente lema debido a Sansone y Conti (loc. cit.):

Sea $C(P, \rho)$ un círculo asociado al punto regular P . Si el punto Q pertenece al círculo $C(P, \rho')$ con $0 \leq \rho' \leq \rho/\sqrt{2}$ entonces la trayectoria del sistema (4.4) que pasa por Q contiene un arco yacente totalmente en $C(P, \rho)$ que corta al diámetro normal de $C(P, \rho)$.

Demostración: Por el punto Q trazamos la paralela al vector $\vec{F}(P)$ y consideramos los dos ángulos rectos de vértice Q bisectrices de tal recta. Como la curva $x_1(t), x_2(t)$ trayectoria del sistema (4.4) que pasa por Q permanece dentro de $C(P, \rho)$, también yace dentro de dichos ángulos rectos (ver figura 17).

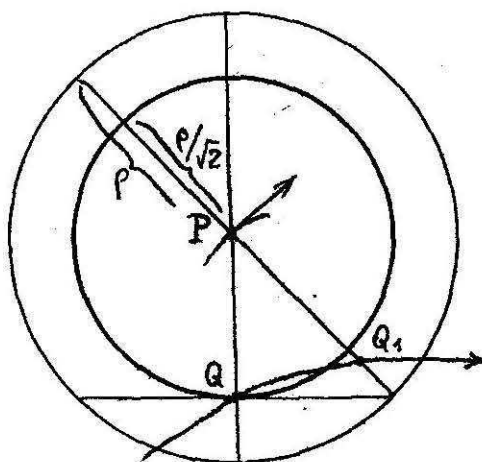


Fig. 17.

Por otra parte, como $Q \in C(P, \sqrt{2})$, la arista de uno de los ángulos rectos considerados corta al diámetro normal de $C(P, \sqrt{2})$. Por ello, la solución que pasa por Q cortará a tal diámetro en un punto Q_1 (que, si no coincide con Q , pertenece a la semi-trayectoria positiva que pasa por Q si Q está en el semi-círculo "negativo"; pertenece a la semi-trayectoria negativa que pasa por Q si Q está en el semi-círculo "positivo").

Teorema 4.1

Sea un arco $\gamma = \overline{AB}$ definido por (4.2), γ' un arco que con γ determina R_i, R_d ; $P_0(x_{10}, x_{20})$ un punto de R_i y $P_1(x_{11}, x_{21})$ un punto de γ . Sea además

$$\begin{cases} F_1(x_{10}, x_{20}, t-t_0) = x_{11} \\ F_2(x_{10}, x_{20}, t_1-t_0) = x_{21} \end{cases} \quad \text{con } t_1-t_0 > 0,$$

donde las F_i son la solución de las ecuaciones (4.4). Entonces el arco γ es franqueable de izquierda a derecha.

Demostración: Para demostrar este teorema, comenzaremos por determinar un entorno asociado a la trayectoria P_0P_1 solución del sistema (4.4) que no corte a γ' (esto es posible, pues tanto γ' como P_0P_1 son conjuntos cerrados, disyuntos, luego están a distancia finita). Según el lema 4.1, podemos ahora determinar un entorno circular $C(P_0, r_0)$ de P_0 , cuyo radio r_0 lo elegimos igual al radio del entorno asociado a la trayectoria. Determinamos luego un entorno del punto P_1 tal que toda trayectoria que pasa por $C(P_1, r_1)$ también pase por $C(P_0, r_0)$ (figura 18). Como el entorno $C(P_1, r_1)$ tiene común con R_d una cierta región, basta tomar un punto P_1' de ella para obtener una trayectoria que ha pasado antes por algún

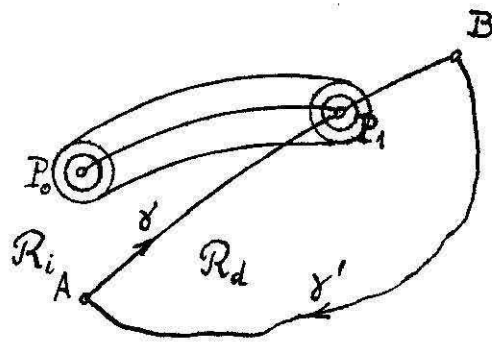


Fig. 18.

punto P_0' de $C(P_0, r_0)$, y que por lo tanto pasa de R_i a R_d sin cortar a γ' . Con esto, queda demostrado que el arco γ es franqueable de izquierda a derecha.

Teorema 4.2

Sea el arco $\gamma = \widehat{AB}$ definido por (4.2) y un campo vectorial (4.4) que cumple las condiciones de las definiciones arriba establecidas. Sea P un punto de γ y llamemos $\gamma_1 = AP$, $\gamma_2 = PB$ a los arcos de curva abiertos (sin extremos) que P determina sobre γ . Si alguno de los arcos γ_1 ó γ_2 es franqueable de izquierda a derecha, también lo será el arco total γ . Inversamente: si γ es franqueable de izquierda a derecha, también lo es uno de los γ_1, γ_2 .

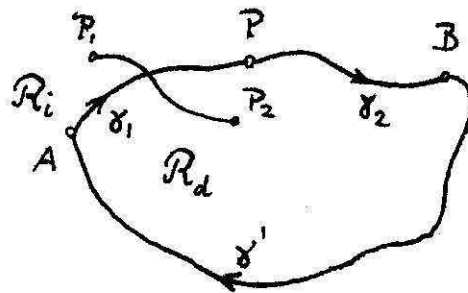


Fig. 19.

Demostración: La primera parte de la tesis es inmediata, pues si suponemos, por ejemplo, que γ_1 es franqueable de izquierda a derecha, tomaremos para definir R_i y R_d el arco γ_2 más un arco γ' de extremos B,A que junto con γ forme una curva de Jordan. Existe, por hipótesis, una trayectoria del sistema (4.4) que va de $P_1 \in R_i$ a $P_2 \in R_d$ sin cortar a $\gamma_2 + \gamma'$. Entonces, para probar la primera parte de la tesis, basta utilizar el arco γ' para definir los R_i y R_d respecto de γ y la misma trayectoria P_1P_2 cumple las condiciones exigidas para poder afirmar que γ es franqueable de izquierda a derecha.

Para demostrar la segunda parte de la tesis, consideremos otra vez los arcos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'$ que determinan las regiones R_i, R_d . Por hipótesis, existe ahora una trayectoria del sistema (4.4) que va de $P_1 \in R_i$ a $P_2 \in R_d$ sin pasar por el arco γ' (incluidos sus extremos). Tal trayectoria corta por lo tanto al arco γ . Si tiene algún punto común con γ_1 o con γ_2 , la tesis es inmediata. En caso que esto no suceda, deberá pasar por P. Pero entonces basta tomar un entorno asociado al arco P_1P_2 que no corte a γ' y dos entornos $C(P_1, r_1), C(P_2, r_2)$ de P_1 y P_2 , tales que dado cualquier punto P_1' de $C(P_1, r_1)$, la trayectoria por P_1' pasa por $C(P_2, r_2)$ sin salir del entorno asociado. Como tal trayectoria por lo

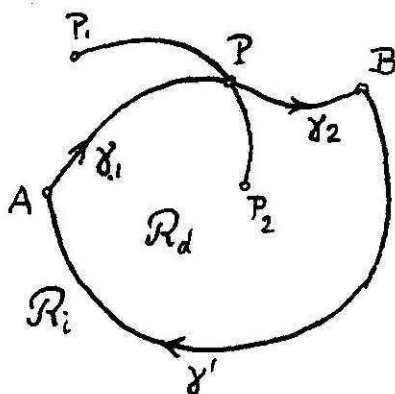


Fig. 20.

tanto no corta a γ' , cortará a γ en un punto que no puede ser el P, pues por la unicidad de las soluciones de (4.4), tal curva debería coincidir totalmente con la P_1P_2 y esto siempre puede evitarse al elegir el punto P_1' . Hemos, pues, encontrado una trayectoria que pasa de \mathcal{R}_1^+ a \mathcal{R}_d pasando por algún punto Q de γ_1 o γ_2 . Para completar la demostración, supongamos que $Q \in \gamma_1$; habrá que ver si la trayectoria en cuestión no corta a γ_2 (que ahora hace también de arco complementario). Pero ello ni es necesario, pues imaginando por ejemplo, que Q sea el primer punto de la trayectoria de P_1' en que ésta corta a γ (y por lo tanto a γ_1 , como suponemos), el teorema 4.1 ya nos basta para afirmar que el arco γ_1 es franqueable de izquierda a derecha.

Nota

Obsérvese que en el enunciado del teorema 4.2 no se hacen hipótesis especiales sobre el campo vectorial (4.4). Así, por ejemplo, el punto P (u otro cualquiera) puede ser crítico. Es interesante, en tal sentido, el ejemplo del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2. \end{cases}$$

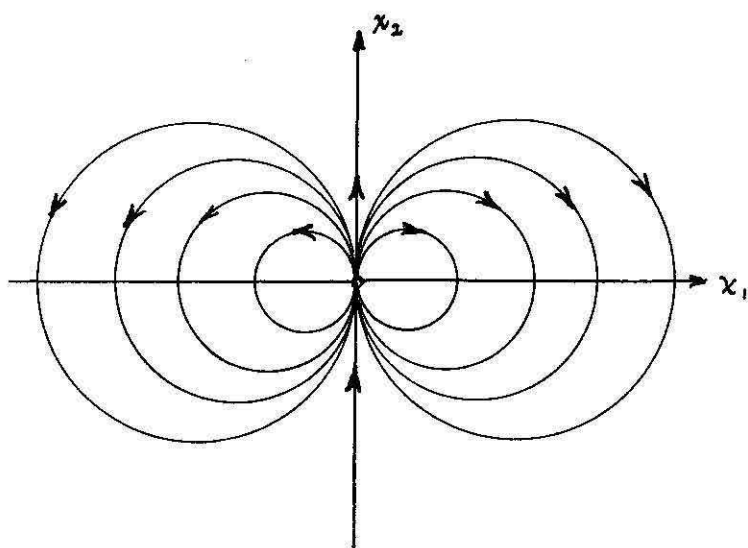


Fig. 21.

Las trayectorias son círculos de ecuación $x_1^2 + x_2^2 + cx_1 = 0$ ($c = \text{const.}$), excluido el origen, que es un punto crítico (figura 21). También son trayectorias los semi-ejes $x_1 = 0, x_2 > 0$ y $x_1 = 0, x_2 < 0$. Las semirrectas $x_2 = 0, x_1 > 0$ y $x_2 = 0, x_1 < 0$ son franqueables de arriba hacia abajo, pero no en sentido contrario, y lo mismo sucede con la recta completa $x_2 = 0$.

Corolario 4.1

Sea una curva (cerrada) de Jordan orientada γ , compuesta por los arcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ que, recorridos todos en sentido concordante, son infranqueables de izquierda a derecha por las trayectorias del campo vectorial (4.4). Entonces, el plano queda dividido por la curva γ en dos regiones, R_i y R_d , tales que no existe trayectoria de (4.4) que vaya desde un punto de R_i a uno de R_d .

Corolario 4.2

Sea una curva abierta orientada γ cuyos extremos están en el infinito, tal que todo trozo finito de ella sea un arco de Jordan, y supongamos que γ esté compuesta por los arcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ que, recorridos en sentido concordante, son infranqueables de izquierda a derecha por el campo vectorial (4.4). Entonces γ divide al plano en dos regiones R_i, R_d y no existe ninguna trayectoria del campo (4.4) que vaya de un punto de R_i a uno de R_d .

Es evidente que este corolario coincide con el anterior, si se considera en lugar del plano, la esfera de Gauss.

En lo que sigue, consideraremos arcos γ de curvas de Jordan suficientemente regulares como para que exista vector tangente y éste varíe con continuidad en casi todos los puntos. Hablaremos entonces del ángulo que forma el vector tangente a (4.2), dado por $\xi_1'(\tau)$ con otros vectores, por

ejemplo, el vector definido por el campo vectorial (4.4). Admitiendo discontinuidades del vector tangente, vale decir, puntos angulosos, las condiciones necesarias o suficientes en que intervengan los vectores tangentes a lo largo del arco δ , deberán cumplirse a la vez con los dos vectores tangente del punto anguloso.

Teorema 4.3

Sea el arco AB dado por las ecuaciones (4.2) y el campo vectorial (4.4). Si existe un punto P de AB tal que en él el ángulo β que va del vector tangente al arco AB , al vector de campo, es positivo y $< \pi$, entonces el arco AB es franqueable de derecha a izquierda (figura 22).

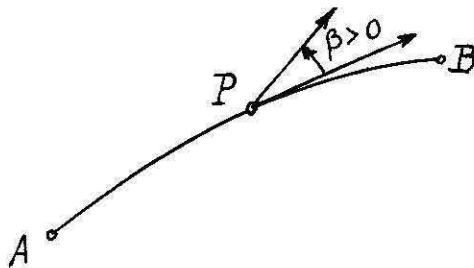


Fig. 22.

Demostración: En un cierto entorno del punto P , la dirección del vector de campo varía en menos que $\beta/2$. Entonces, es evidente que la curva trayectoria que pasa por el punto P atraviesa el arco AB de derecha a izquierda, con lo que queda demostrado el teorema.

Corolario 4.3

Si el arco AB es infranqueable de derecha a izquierda, entonces es $0 \geq \beta \geq -\pi$ a lo largo de AB .

Demostración: La demostración es inmediata por el absurdo, aplicando el teorema 4.3.

Teorema 4.4

Si el arco AB es franqueable de derecha a izquierda por las trayectorias del campo vectorial (4.4), entonces existe algún punto de AB tal que en él es $0 < \beta < \pi$.

Demostración: Para la demostración, consideremos que existe la trayectoria PQ que corta al arco AB en un cierto número de puntos. Sea R el primer punto común a PQ y AB , moviéndose desde P a Q (figura 23). Si en ese punto R fuese $0 < \beta < \pi$,

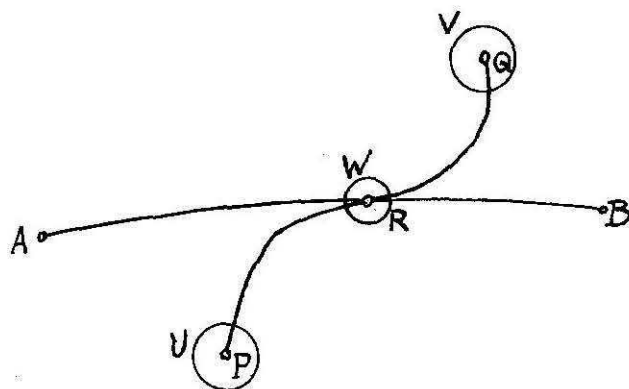


Fig. 23.

ya se verificaría la tesis. Evidentemente, no puede ser $0 > \beta > -\pi$ en R , puesto que los puntos anteriores al R sobre PQ están a la derecha de R . Queda pues, por considerar el caso $\beta = 0$ ó bien $\beta = \pm\pi$. Supongamos que sea $\beta = 0$. Dado un número $\varepsilon > 0$ y los entornos U y V de los puntos P y Q respectivamente, podemos determinar un entorno W de R tal que toda trayectoria que pasa por W también pasa por U y V , sin apartarse del arco PQ en más de ε . El conjunto de puntos comunes a PQ y AB es cerrado, por continuidad, y como R está sobre la frontera de dicho conjunto (pues los puntos de PQ anteriores a R no pertenecen a AB), existe en el entorno W un arco parcial γ de la curva AB que no pertenece a PQ . Las trayectorias que pasan por los puntos de ese

arco γ de AB, provienen del entorno U y van hacia el V, atravesando la curva AB de derecha a izquierda. Es imposible que todas esas trayectorias transpongan la curva AB con un ángulo $\beta = 0$ ($\delta \beta = \pi$), pues si así fuera, el arco γ mismo sería una trayectoria solución del sistema de ecuaciones (4.4). Dicha trayectoria se prolongaría después de R, en la parte de la trayectoria PQ, lo que resulta inadmisibles por la unicidad de las soluciones del sistema (4.4). Tampoco puede ser $\beta < 0$ en tales puntos, pues entonces el triángulo mixtilíneo CRD (figura 24) formado por la parte del entorno W que queda entre las curvas AR y PQ sería tal que a lo largo de DR el vector (4.4) resultaría tangente a DR, a lo largo de CD el vector (4.4) entraría al triángulo (por continuidad respecto al vector en D). Luego el vector (4.4) no puede ser solamente entrante en CR, como debiera ser si fuera $-\pi < \beta < 0$. Queda entonces demostrado que, por lo menos en algunos puntos, es $0 < \beta < \pi$.

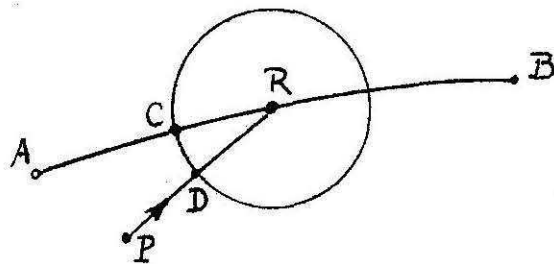


Fig. 24.

Corolario 4.4

Si a lo largo del arco AB, es β tal que $0 \leq \beta \leq \pi$, entonces AB es infranqueable de izquierda a derecha (corolario recíproco del 4.2).

Demostración: La demostración es inmediata por el absurdo.

Vamos a ver ahora, aplicado a nuestro problema un teorema debido a J.L.Massera ⁽²⁶⁾ y formulado originalmente en espacios de Hilbert reales de n dimensiones.

Teorema 4.5 (Massera)

Sea un recinto abierto R cuya frontera C es una superficie localmente lisa en el siguiente sentido: dado un punto cualquiera de C existe un sistema local de coordenadas tal que los puntos de R próximos a x_0 pueden representarse mediante una función $u = \varphi(z)$, donde u es la componente de x a lo largo de un cierto sub-espacio unidimensional y z la proyección de x sobre el sub-espacio ortogonal; se supone que los puntos de R corresponden localmente al recinto $u < \varphi(z)$. Sea $f(x)$ el campo vectorial definido por el sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{4.5}$$

donde x y f son vectores n-dimensionales. Sea $p(z,u)$ la proyección de f en el espacio z y $q(z,u)$ la componente (escalar)

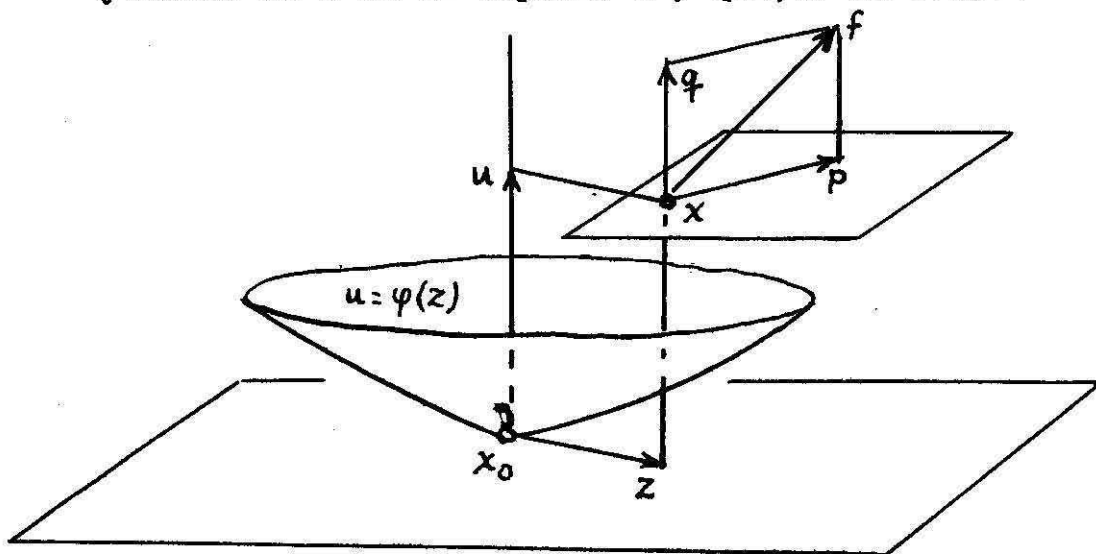


Fig. 25

a lo largo del eje u , (figura 25). Si en cualquier punto de C se cumple la desigualdad

$$q - D_t \varphi(z;p) \leq 0, \quad (")$$

(es decir, si f forma un ángulo agudo o recto con la normal interior a C) toda solución del sistema (4.5) que parte de un punto de R , permanece en el futuro en la clausura de R .

O dicho de otro modo, la curva C es una "trampa" para el sistema de ecuaciones diferenciales (4.5).

Demostración: Sea $x(t)$ una solución del sistema (4.5) y sea $x_0 = x(t_0)$ un punto de la curva C . Tomemos x_0 como el origen del sistema de coordenadas locales. Para demostrar el teorema, bastará ver que existe un intervalo $t_0 < t < t_1$ tal que en ese intervalo, $x(t)$ pertenece a la clausura de R .

En efecto, siendo $z(t)$ y $u(t)$ las componentes de $x(t)$, sea

$$v(t) = u(t) - \varphi[z(t)],$$

la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v} = q[z, v + \varphi(z)] - D_t \varphi[z; p(z, v + \varphi(z))].$$

Debido a las hipótesis hechas sobre f y φ , Q satisface una condición de Lipschitz respecto a v , de modo que

$$Q(v, t) \leq Q(0, t) + K |v| \leq K |v|,$$

ya que supusimos $Q(0, t) \leq 0$. Entonces, si $t \geq t_0$, $v(t)$ es menor o a lo sumo igual que la solución de la ecuación $\dot{w} = K |w|$ con la condición inicial $w(t_0) = 0$. Pero como esta solución es precisamente $w(t) = 0$, tenemos

(") Esta expresión indica la diferencial de φ respecto al incremento $\delta z = p$.

$$v(t) \leq 0$$

$$u(t) \leq \varphi[z(t)],$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Teorema 4.6

Sea AB el arco de curva dado por las ecuaciones (4.2) y dos campos vectoriales

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_1(x_1, x_2, t) \\ \eta_2 = \eta_2(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, t) \\ \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, t), \end{cases} \quad (4.7)$$

definidos en una región del plano que cumpla las condiciones enunciadas al comienzo de este capítulo. Sea el campo vectorial combinación de (4.6) y (4.7)

$$\begin{aligned} & \lambda \eta_1 + \mu \xi_1 \\ & \lambda \eta_2 + \mu \xi_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\lambda, \mu \geq 0$. Entonces, si el arco AB es infranqueable de izquierda a derecha por las trayectorias de los campos vectoriales (4.6) y (4.7), también lo es por las de cualquier combinación lineal (4.8) con $\lambda, \mu \geq 0$.

Demostración: Vamos a ver que el teorema es cierto para el caso general en que λ y μ son funciones de t y de las coordenadas x_1, x_2 . En ese caso, no es aplicable el teorema 4.5 antes enunciado, pues se refiere a campos estacionarios (sistemas autónomos). Pero como el teorema de Massera es válido en espacios n -dimensionales, podemos hacer el artificio de considerar el parámetro t como una dimensión más y estu-

diar el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) \\ \dot{t} = 1. \end{array} \right.$$

Entonces la curva C se transforma en un cilindro (figura 26) y la condición que debe cumplirse para que dicha superficie sea una "trampa", es que el vector f de componentes $(f_1, f_2, 1)$ no salga de ella.

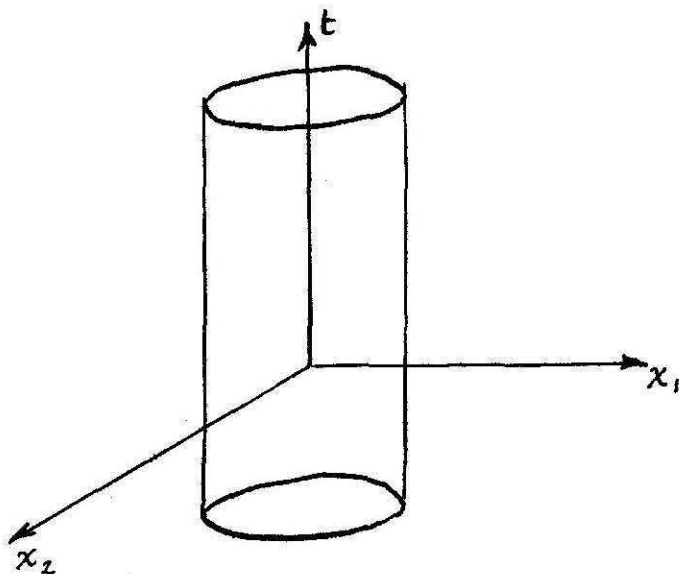


Fig. 26.

La demostración es ahora inmediata, pues como por hipótesis, el arco AB es una "trampa" para los campos vectoriales (4.6) y (4.7), ello significa que el vector f forma con la normal interior al arco AB un ángulo $0 \leq \beta_1 \leq \pi/2$ para el sistema (4.6); $0 \leq \beta_2 \leq \pi/2$ para el (4.7). Para la combinación (4.8) de ambos, β estará comprendido entre β_1 y β_2 , con lo que queda demostrada la tesis.

Teorema 4.7

Si el arco AB es infranqueable de izquierda a derecha por las trayectorias del campo vectorial (4.8), combinación

de los (4.6) y (4.7), con λ, μ arbitrarios positivos (distintos de cero), también lo es por las de cada uno de estos últimos.

Demostración: Haciendo tender el parámetro $\lambda \rightarrow 0$, el sistema (4.8) tiende al (4.7) y lo mismo sucede con las soluciones de ambos sistemas. De la demostración del teorema de Massera resulta que toda trayectoria que penetra en la región \mathcal{R} , atraviesa ~~en~~ la frontera de \mathcal{R} cumpliendo la desigualdad

$$q - D_t \varphi[z;p] \leq 0,$$

o sea, en lenguaje más geométrico, forma con la normal (interior) al plano tangente a dicha frontera un ángulo $|\beta| \leq \pi/2$. Como en nuestro caso es $\beta = \beta(\lambda)$, se verificará que el ángulo β_0 de la trayectoria del sistema (4.7) con la normal interior

$$|\beta_0| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} |\beta(\lambda)| \leq \pi/2,$$

en todos los puntos de la frontera, y ello permite afirmar, de acuerdo al teorema de Massera, que esa superficie es una trampa para el sistema (4.7).

Teorema 4.8

Si el arco $\widehat{AB} = \gamma$ es franqueable de izquierda a derecha por las trayectorias del campo vectorial (4.6), también lo es por las del campo (4.8), para valores positivos de los coeficientes λ y μ ^(").

(") Nótese que, de exigir únicamente que λ y μ sean no negativos, el teorema sería trivial, pues por hipótesis existe un par de valores ($\lambda = 1; \mu = 0$) que cumple la condición exigida.

Demostración: Tracemos un arco de Jordan auxiliar γ' que defina con γ las regiones R_i y R_d . Por hipótesis, existe una trayectoria del sistema (4.6) que pasa de un punto $P \in R_i$ a un $Q \in R_d$. Si en el sistema (4.8) hacemos $\lambda = 1$; $\mu \rightarrow 0$, la dependencia continua de las soluciones con respecto al segundo miembro de la ecuación diferencial, nos dice que existe un valor de $\mu > 0$ suficientemente pequeño como para que la trayectoria que sale de $P \in R_i$ pase por un punto Q_1 que dista de Q en menos que un cierto $\varepsilon > 0$, o sea tal que $Q_1 \in R_d$. Con lo que queda demostrado que existen algunos valores positivos de los parámetros λ y μ para los cuales el arco AB es franqueable de izquierda a derecha por las trayectorias del campo (4.8).

Veamos ahora la aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo (3.1). Para tales sistemas, el teorema que sigue da el criterio fundamental para hallar zonas alcanzables.

Teorema 4.9

Sea γ una curva orientada de Jordan (cerrada) o bien una curva cuyos extremos estén en el infinito, pero tal que todo arco acotado sea de Jordan. Si γ está compuesta por arcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, cada uno de los cuales satisface:

a) al sistema de ecuaciones (3.5), o sea, es un arco de perturbatriz;

o bien

b) a la condición que sobre él sea $\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2) = 0$ (línea crítica del campo vectorial (3.5));

y si además todos los arcos γ_i^- , recorridos en sentido con-

cordante, son infranqueables por las trayectorias del sistema fundamental (3.3) de izquierda a derecha, entonces la curva γ determina en el plano dos regiones \mathcal{R}_i y \mathcal{R}_d , de las cuales \mathcal{R}_i es una zona alcanzable en sentido generalizado para el sistema perturbado (3.1).

Demostración: La curva γ es infranqueable de izquierda a derecha por el campo vectorial del sistema perturbador (3.5), cuyas trayectorias son tangentes a γ . Como, por hipótesis, es infranqueable por las trayectorias del campo fundamental (3.3), resulta que los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 + \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = f_2 + \alpha \varphi_2 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 - \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = f_2 - \alpha \varphi_2, \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$, definen trayectorias para las cuales la curva γ es también infranqueable de izquierda a derecha. Con esto, queda demostrado que la curva γ separa el plano en dos regiones, $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_d$, de las cuales \mathcal{R}_i es una zona alcanzable en sentido generalizado para el sistema completo (3.1), con α de signo constante.

Faltaría aún considerar aquellos sistemas en los que $\alpha(t)$ cambia de signo. Pero como en la aplicación del teorema de Massera, lo que interesa es que sobre γ el vector \dot{x} esté dirigido hacia el interior de \mathcal{R}_i y esto sucede para $-\infty < \alpha \leq 0$ y para $0 \leq \alpha < +\infty$, dicha aplica-

ción es válida para cualquier α . Entonces, el presente teorema vale también para funciones $\alpha(t)$ de signo variable.

CAPITULO 5

CONDICIONES ANALITICAS

Condición analítica

En el capítulo anterior, hemos visto algunos criterios para delimitar zonas alcanzables. En este capítulo, daremos la expresión analítica de los mismos. Para ello, comenzaremos por formular analíticamente la condición $0 \leq \beta \leq \pi$ impuesta al ángulo β definido en el teorema 4.3.

Sean (4.4) las ecuaciones de un sistema fundamental y (4.2) las ecuaciones de una curva perturbatriz que satisface al sistema perturbador

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5.1)$$

El ángulo β formado por los vectores de ambos campos vectoriales (medido desde el vector perturbador (5.1) al fundamental (4.4)), que puede observarse en la figura 27, está dado por la expresión

$$\text{sen } \beta = \frac{\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1}{|\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} \sqrt{f_1^2 + f_2^2}|},$$

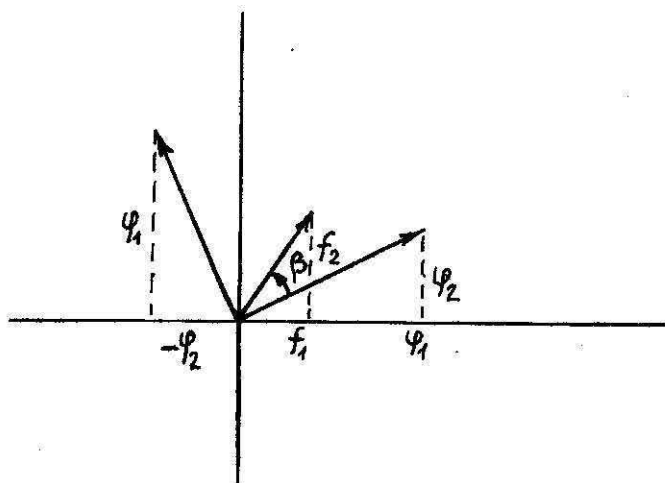


Fig. 27.

Es evidente que la condición $0 \leq \beta \leq \pi$ se escribe ahora

$$F \equiv \varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 \geq 0, \quad (5.2)$$

donde se supone excluido el caso $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Aplicando la condición (5.2) a los teoremas y corolarios subsiguientes al teorema 4.3, resultan inmediatamente los siguientes:

Corolario 5.1 (del teorema 4.3)

Sea el arco de curva AB dado por las ecuaciones (4.2), que satisface al sistema de ecuaciones diferenciales (5.1) y sea el campo vectorial (4.4). Si existe sobre AB un punto para el cual

$$\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 > 0, \quad (5.3)$$

entonces el arco AB es franqueable de derecha a izquierda por las trayectorias del sistema 4.4.

Corolario 5.2

Si con las condiciones del corolario anterior, el arco de curva AB es infranqueable de derecha a izquierda por las trayectorias del sistema (4.4), resulta

$$\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 \leq 0, \quad (5.4)$$

a lo largo de todo el arco AB.

Corolario 5.3 (del teorema 4.4)

Si con las condiciones del corolario 5.1, el arco de curva AB es franqueable de derecha a izquierda por las trayectorias del sistema (4.4), entonces existe algún punto del arco AB en el que se cumple la condición (5.3).

Corolario 5.4

Si con las condiciones precedentes, se cumple la condición

(5.4) a lo largo del arco de curva AB, el arco AB es infranqueable de derecha a izquierda.

Nota

Estos teoremas presuponen la ausencia de puntos críticos del sistema (5.1), como corresponde a la hipótesis que AB sea un arco abierto de perturbatriz.

Corolario 5.5 (del teorema 4.9)

Sea γ una curva orientada de Jordan (cerrada) o bien una curva cuyos extremos estén en el infinito, pero tal que todo arco acotado sea de Jordan. Si γ está formada por arcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, cada uno de los cuales satisface al sistema de ecuaciones (3.5) (es un arco de perturbatriz), o bien, cumple la condición que sobre él sea $\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2) = 0$ (es una línea crítica del campo (5.1)), y si además:

a) sobre cada γ_i no crítico, la forma $\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1$ tiene signo constante o se anula, siendo el signo de dicha forma tal que recorriendo la curva en un cierto sentido resulta ser

$$\text{sen } \beta \geq 0;$$

b) en los γ_i^- que sean líneas críticas (o sea $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) el vector (f_1, f_2) es tal que también allí es

$$\text{sen } \beta \geq 0,$$

entonces la curva γ es frontera de una zona alcanzable generalizada, siendo tal zona la que queda a la izquierda de γ .

Nota

Si sobre la curva γ , existe un punto crítico aislado P, la continuidad del campo vectorial fundamental (4.4) y la

del perturbador (5.1), a ambos lados del punto crítico (que podría incluso ser un punto anguloso de la curva γ), aseguran la continuidad del ángulo β en el sentido que si el vector (f_1, f_2) pasa por P cortando a γ , también lo hará en puntos infinitamente próximos al P, por lo menos a un lado de P sobre la curva γ .

Aplicación a sistemas con perturbatrices rectilíneas

Supongamos que el sistema (5.1) sea de la forma simple

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1 \\ \dot{x}_2 = \mu_2, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde μ_1 y μ_2 son constantes. En ese caso, el sistema completo (perturbado) será

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \mu_1 \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \mu_2 \alpha(t), \end{cases} \quad (5.6)$$

donde $\alpha(t)$ es, como de costumbre, la perturbación arbitraria. Evidentemente, las curvas perturbatrices, soluciones del sistema (5.5), son las rectas de ecuación

$$\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2 + k = 0 \quad k = \text{const.} \quad (5.7)$$

Dichas rectas dividen al plano en dos regiones. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que una tal recta sea frontera de una zona alcanzable generalizada, es que se satisfaga la condición (5.2), o bien la opuesta (5.4).

En el Apéndice se puede ver este caso analizado con todo detalle para los distintos tipos de puntos críticos del sistema fundamental, incluyendo perturbatrices acotadas (Ca-

pítulo 6).

Caso de una ecuación diferencial de segundo orden

Sea la ecuación

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \alpha(t), \quad (5.8)$$

donde $f(x, \dot{x})$ es una función dada y $\alpha(t)$ es arbitraria.

El sistema equivalente a la ecuación (5.8) es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + \alpha(t). \end{cases} \quad (5.9)$$

Las perturbatrices de este sistema son las rectas de ecuación

$$x_1 = \text{const.},$$

y la forma F definida por la ecuación (5.2) es

$$F \equiv \psi_1 f_2 - \psi_2 f_1 = -x_2.$$

Como a lo largo de la recta perturbatriz $x_1 = \text{const.}$, la forma $F = -x_2$ toma ambos signos, dicha recta no puede ser frontera de zona alcanzable generalizada alguna, siendo por consiguiente alcanzable todo el plano.

Consideremos ahora una ecuación del tipo

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + \dot{x} \alpha(t). \quad (5.9)$$

En este caso, el sistema equivalente es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + x_2 \alpha(t), \end{cases} \quad (5.10)$$

y las perturbatrices son rectas de ecuación $x_1 = \text{const.}$ La forma F resulta

$$F \equiv \varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1 = -x_2^2,$$

y no cambia de signo a lo largo de la recta $x_1 = \text{const.}$ Podría pensarse que aquí son posibles fronteras las rectas de ecuación $x_1 = \text{const.}$ Pero esto es falso. En efecto, la recta $x_1 = \text{const.}$ es en realidad la combinación de dos perturbatrices, que son las semirrectas correspondientes a $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$, recorridas en sentido contrario (de $x_2 = 0$ a $x_2 = \pm \infty$), más el punto $x_2 = 0$, que es punto crítico del sistema perturbador. Por lo tanto, hay que considerar que el vector perturbador \mathcal{P} cambia de sentido a lo largo de la recta $x_1 = \text{const.}$ Concordantemente, la forma F debiera cambiar de signo para que el ángulo β sea constantemente dirigido hacia el mismo lado, cosa que, como se ve fácilmente, no sucede.

Sistemas con perturbatrices circulares y radiales

Sea el sistema perturbador de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5.11)$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones (reales) definidas en todo el plano euclideo, x_1, x_2 simultáneamente nulas sólo en el punto $x_1 = 0, x_2 = 0$. En este caso, el sistema completo es

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \alpha(t) \bar{\varphi}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \alpha(t) \bar{\varphi}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{cases} \quad (5.12)$$

Pasando a coordenadas polares $x_1 = \rho \cos \theta; x_2 = \rho \sin \theta$, el sistema (5.11) se transforma en

$$\begin{cases} \rho \dot{\rho} = Z(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ \rho^2 \dot{\theta} = N(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \end{cases} \quad (5.13)$$

donde

$$\begin{cases} Z(x,y) = x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 \\ N(x,y) = x_1 \varphi_2 - x_2 \varphi_1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Evidentemente

$$Z^2(x_1^-, x_2^-) + N^2(x_1^-, x_2^-) = (x_1^{-2} + x_2^{-2}) (\varphi_1^{-2} + \varphi_2^{-2}),$$

y como hemos supuesto que el origen 0 es un punto crítico aislado para el sistema (5.11), resulta

$$Z^2(x_1^-, x_2^-) + N^2(x_1^-, x_2^-) > 0.$$

Consideremos, para el sistema (5.13), las dos siguientes posibilidades:

a) $Z(x_1^-, x_2^-) \equiv 0$ ($N(x_1^-, x_2^-) = 0$ sólo para $(x_1^-, x_2^-) = (0, 0)$).

De acuerdo a la definición (5.14), esto significa

$$x_1^- \varphi_1^- + x_2^- \varphi_2^- = 0,$$

de donde se deduce

$$\frac{\varphi_2^-}{\varphi_1^-} = -\frac{x_1^-}{x_2^-} = \frac{\dot{x}_2^-}{\dot{x}_1^-},$$

con lo que las curvas perturbatrices, solución del sistema de ecuaciones (5.11), resultan circunferencias de centro 0 de ecuación

$$x_1^{-2} + x_2^{-2} = \text{const.}$$

Como en el caso de perturbatrices rectilíneas, la condición necesaria y suficiente para que una circunferencia C sea frontera de una zona alcanzable generalizada, es que se cumpla la condición (5.2), ó bien la (5.4).

b) $N(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv 0$ ($Z(x_1, x_2) = 0$ sólo en el punto $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$).

Según la ecuación (5.14), esta condición equivale a

$$\bar{x}_1 \varphi_2 - \bar{x}_2 \varphi_1 = 0,$$

o sea,

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}.$$

Entonces, las curvas perturbatrices, solución del sistema (5.11) son rectas que pasan por el origen.

Caso en que el sistema fundamental sea homogéneo

Un caso especialmente interesante es aquel en que el sistema fundamental

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{cases} \quad (5.15)$$

es homogéneo de grado m , vale decir, cuando las funciones f_1 y f_2 son funciones homogéneas de igual grado m entero, $m \geq 1$, o sea

$$\begin{cases} f_1(\lambda \bar{x}_1, \lambda \bar{x}_2) = \lambda^m f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ f_2(\lambda \bar{x}_1, \lambda \bar{x}_2) = \lambda^m f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{cases}$$

El origen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ es un punto crítico para el sistema (5.15) ^("), exceptuando el caso trivial en que f_1 y f_2 sean constantes. Supondremos además que f_1 y f_2 no se anulan simultáneamente (a distancia finita), salvo en 0, esto es,

$$[f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]^2 + [f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)]^2 > 0,$$

(") Sansone y Conti, op. cit. (19), p. 61.

con lo que el origen resulta un punto crítico aislado.

Ejemplo:

Sea el sistema perturbador

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1 \\ \dot{x}_2 = \mu_2 \end{cases} \quad (\mu_1, \mu_2 = \text{const.})$$

Como el sistema fundamental (5.15) es homogéneo, poniendo

$$x_2 = \mu x_1,$$

obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^m f_1(1, \mu) \\ \dot{x}_2 = x_1^m f_2(1, \mu), \end{cases} \quad (5.16)$$

de modo que el sistema completo queda

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^m f_1(1, \mu) + \alpha(t) \mu_1 \\ \dot{x}_2 = x_1^m f_2(1, \mu) + \alpha(t) \mu_2. \end{cases} \quad (5.17)$$

Por lo visto precedentemente, las únicas fronteras posibles de zonas alcanzables generalizadas son las rectas de ecuación (5.7), Comencemos por estudiar aquella que pasa por el origen, es decir, aquella para la cual $k = 0$. En ese caso,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu.$$

La forma F definida por (5.2) resulta entonces

$$F(x_1, \mu x_1) \equiv \Psi_1 f_2 - \Psi_2 f_1 = \mu_1 x_1^m f_2(1, \mu) - \mu_2 x_1^m f_1(1, \mu),$$

o sea

$$F(x_1, \mu x_1) = x_1^m \left[\mu_1 f_2(1, \mu_2/\mu_1) - \mu_2 f_1(1, \mu_2/\mu_1) \right]. \quad (5.18)$$

Esta última expresión aún se puede escribir de dos maneras distintas, usando la propiedad de homogeneidad de las funciones f_1 y f_2 :

$$F = \frac{x_1^m}{\mu_1^m} \left[\mu_1 f_2(\mu_1, \mu_2) - \mu_2 f_1(\mu_1, \mu_2) \right] \quad (5.19)$$
$$F = \frac{x_2^m}{\mu_2^m} \left[\mu_1 f_2(\mu_1, \mu_2) - \mu_2 f_1(\mu_1, \mu_2) \right],$$

de modo de incluir simétricamente los casos en que una de ambas constantes μ_1, μ_2 se anule. En lo que sigue, excluirémos la posibilidad que μ_1 ó bien μ_2 sean ambos iguales a cero, y seguiremos usando la expresión (5.18), ya que las modificaciones que introduciría el caso $\mu_2 = 0$, son obvias.

De los teoremas y corolarios precedentes resulta así en forma inmediata el

Teorema 5.1

Dado el sistema perturbado (5.6) con f_1, f_2 funciones homogéneas de grado m , la recta de ecuación

$$x_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} x_1 \quad (5.20)$$

limita una zona alcanzable generalizada, si m es par.

Demostración: En efecto, como el corchete de la expresión (5.18) es una constante, la condición necesaria y suficiente para que la forma F no cambie de signo, es que el grado m sea par.

Veamos ahora el caso de una recta (5.7) que no pasa por el origen. Para estudiar si tal recta puede ser frontera de una zona alcanzable generalizada, hacemos una rotación de ejes del tipo

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \xi + \mu_1 \alpha \\ \bar{x}_2 = \eta - \alpha (1 - \mu_2), \end{cases}$$

que nos lleva el sistema (5.6) a la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{g}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{g}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \alpha(t). \end{cases} \quad (5.21)$$

El sistema perturbador resulta entonces

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = 0 \\ \dot{\bar{x}}_2 = 1, \end{cases} \quad (5.22)$$

cuya solución son las rectas de ecuación

$$\bar{x}_1 = \text{const.}$$

La condición que debe cumplir una de tales rectas para ser frontera de una zona alcanzable generalizada es, como siempre, que la forma

$$F = \varphi_1 g_2 - \varphi_2 g_1 = -g_1(x_1, x_2),$$

no cambie de signo sobre ella. Llamando μ a la relación x_2/x_1 , esta expresión se transforma en

$$F = -x_1^{-m} g_1(1, \mu),$$

donde ahora, sobre la recta perturbatriz, es $\bar{x}_1 = \text{const.}$ So-

bre tal recta, μ varía de $-\infty$ a ∞ , resultando en definitiva el

Teorema 5.2

El sistema de ecuaciones (5.21) admite las rectas verticales como frontera de zona alcanzable generalizada, si la función $g_1(1, \mu)$ no cambia de signo para $-\infty < \mu < +\infty$.

CAPITULO 6

SISTEMAS PERTURBADOS CON PERTURBACION ORIENTADA

O ACOTADA

Enunciado de los distintos problemas

Los problemas que vamos a considerar en este capítulo son los siguientes:

Problema A: Dado el sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \varphi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \alpha(t) \\ \dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \alpha(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

que cumple todas las condiciones enunciadas en el Capítulo 1, pero donde ahora $\alpha(t)$ es una función arbitraria sujeta a la condición

$$\alpha(t) \geq 0, \quad (6.2)$$

hallar las zonas alcanzables generalizadas.

Problema B: Dado el sistema perturbado (6.1) con la condición que

$$|\alpha(t)| \leq k = \text{const.}, \quad (6.3)$$

hallar las zonas alcanzables generalizadas.

Perturbación orientada

El problema A corresponde al caso de perturbatrices orientadas, es decir, que pueden ser recorridas en un solo sentido, lo cual restringe notablemente las zonas alcanzables. Como es fácil ver, los sistemas fundamental

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{cases} \quad (6.4)$$

y perturbador

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \varphi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = \varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{cases} \quad (6.5)$$

tienen ahora papeles similares, ya que la única diferencia entre ambos estriba en que, mientras (6.4) es un caso particular de (6.1) para $\alpha = 0$, el sistema (6.5) es un caso límite de (6.1) para $\alpha \rightarrow \infty$.

Valen, para este caso, como es fácil comprobar, todas las propiedades generales de las zonas alcanzables, a saber:

La unión e intersección (lógica) de un número arbitrario de zonas alcanzables en sentido generalizado, es otra zona alcanzable en sentido generalizado.

La propiedad transitiva: si Q es alcanzable desde P y R alcanzable desde Q, entonces R es alcanzable desde P.

El teorema 3.2 queda aquí en la siguiente forma: Dado un punto P, todo otro punto Q perteneciente a la semi-perturbatriz posterior a P es cuasi-alcanzable desde P.

En cambio, resulta evidente la conclusión: Dado un punto P, todo otro punto Q de la semi-fundamental posterior a P es alcanzable desde P.

Además, resultan aplicables los teoremas generales de curvas franqueables e infranqueables (Capítulos 4 y 5).

Teorema 6.1

Sea R una región simplemente conexa en la cual las curvas fundamentales y las perturbatrices se cortan bajo ángulo de signo constante. Entonces, la curva γ formada por un punto P, la semi-fundamental posterior a P y la semi-perturbatriz posterior a P, en esa región R, es franqueable en un solo sentido por el sistema perturbado.

Demostración: En efecto, existirá un homeomorfismo de R en una región R' tal que las perturbatrices y fundamentales

se transforman en las rectas $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$ de un sistema de coordenadas rectilíneas (ver figura 28).

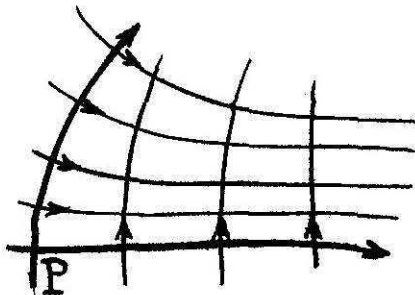


Fig. 28.

Teorema fundamental 6.2

Sea una curva C orientada que divide al plano en dos regiones, curva que tiene un vector tangente que varía con continuidad en todo punto salvo un número finito de ellos. Dado el sistema perturbado (6.1) sujeto a la condición (6.2), llamaremos β al ángulo que va del vector tangente a C hasta el vector fundamental correspondiente a (6.1), y γ al ángulo que va del vector tangente a C hasta el vector perturbador. Para que la curva C sea infranqueable de izquierda a derecha, o lo que es lo mismo, para que la semi-franja \mathcal{R}_1 sea una zona alcanzable generalizada, es condición necesaria y suficiente que en todo punto no anguloso de C se cumpla:

- a) $0 \leq \beta \leq \pi$; $0 \leq \gamma \leq \pi$ en todo punto regular,
- b) $0 \leq \gamma \leq \pi$ en todo punto en que sea $f_1 = f_2 = 0$,
- c) $0 \leq \beta \leq \pi$ en todo punto en que sea $\psi_1 = \psi_2 = 0$.

Demostración: La demostración se basa en los teoremas 4.3 y subsiguientes, aplicados una vez al campo vectorial (f_1, f_2) y otra al (ψ_1, ψ_2) . Teniendo luego en cuenta el teorema 4.6, resulta evidente que las condiciones a), b) y c) son suficientes.

Nota

En aquellos puntos en que $f_1 = f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, la curva C es infranqueable de hecho, pues dichos puntos son trayectorias degeneradas a un punto. En los puntos angulosos de la curva C, basta considerar el comportamiento en puntos infinitamente próximos.

Perturbación acotada

Vamos a estudiar el problema B, que corresponde al caso de perturbación acotada, es decir, el sistema de ecuaciones (6.1) con la condición

$$|\alpha(t)| \leq k.$$

Formemos ahora el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) - k\varphi_1(x_1, x_2) + \alpha_1(t) [f_1(x_1, x_2) + k\varphi_1(x_1, x_2)] \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) - k\varphi_2(x_1, x_2) + \alpha_1(t) [f_2(x_1, x_2) + k\varphi_2(x_1, x_2)], \end{cases} \quad (6.6)$$

con la condición $\alpha_1(t) \geq 0$, que llamaremos sistema asociado al (6.1). El sistema (6.6) tiene las mismas posibles trayectorias que el (6.1) con la condición (6.3). En efecto, los casos límites son

$$\alpha(t) = -k \quad \text{corresponde} \quad \alpha_1(t) = 0$$

$$\alpha(t) = +k \quad \text{corresponde} \quad \alpha_1(t) \rightarrow \infty.$$

Vemos además que la trayectoria del sistema (6.1) para $\alpha = k$ resulta en (6.6) como caso límite únicamente, esto es, que si partimos de un punto P, la semi-perturbatriz posterior a P, que es cuasi-alcanzable para el sistema (6.6), es alcanzable para (6.1).

Si, en cambio, en lugar de imponer la condición (6.3), exigimos que

$$|\alpha(t)| < k, \quad (6.7)$$

el sistema (6.6) también resulta equivalente al (6.1), en el sentido de tener las mismas trayectorias. La diferencia estriba en que la curva fundamental de (6.6) resulta como caso límite de (6.1) para $\alpha(t) \rightarrow -k$, ya que no es admisible por (6.7) que $\alpha = -k$. Por lo tanto, en este caso, la semi-fundamental del sistema (6.6) posterior a un punto P, será cuasi-alcanzable en el sistema (6.1) con la condición (6.7).

Es evidente que los teoremas demostrados para el caso de perturbatrices orientadas pueden traducirse a este caso. En el Apéndice, están analizados con todo detalle numerosos ejemplos de sistemas con perturbatrices acotadas.

Relación entre ambos casos

Para analizar la relación existente entre el caso de perturbación orientada (problema A) y acotada (problema B), vamos a demostrar que si C es un arco de curva de Jordan franqueable (infranqueable) de derecha a izquierda por el campo vectorial (6.1) con la condición (6.7), también lo es por el campo (6.6) y viceversa. En efecto, vemos en la figura 29 que las posibles direcciones de los vectores pertenecientes al campo (6.1) cubren el mismo ángulo que las posibles direcciones de los del campo (6.6). Como hemos supuesto que el arco C es franqueable (infranqueable), en virtud del teorema 4.4, existirá un punto de C en el que el ángulo β formado por un vector del campo (6.1) con el arco C sea

$0 < \beta < \pi$ (no existirá ningún punto de C en que se cumpla tal condición). Lo mismo sucederá con los vectores del campo (6.6) y viceversa.

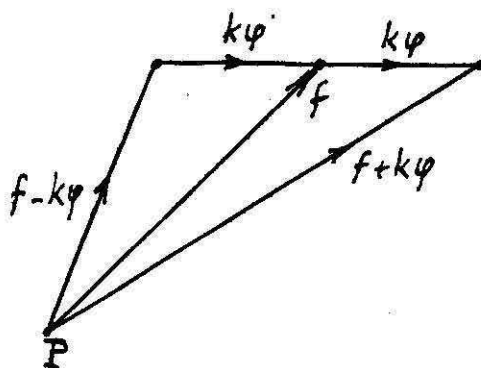


Fig. 29.

Con esto, queda reducido el problema de perturbaciones acotadas al de perturbaciones orientadas.

Ejemplos de perturbación mono-paramétrica acotada

Vamos a ver sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \alpha(t) \varphi_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

donde $|\alpha(t)| \leq k > 0$. Por simplicidad, estudiaremos el caso en que φ_1 y φ_2 son constantes.

Ejemplo 1: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a x_2. \end{cases} \quad \text{con } a > 0.$$

Evidentemente, $x_2 = x_{20} e^{at}$. Las curvas límites serán solución de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 - k \\ \dot{x}_1 = a x_1 + k, \end{cases} \quad t \geq 0$$

o sea, en forma paramétrica

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k}{a} + \left(x_{10} - \frac{k}{a}\right) e^{at} \\ x_2 = x_{20} e^{at} \end{cases} \quad t \geq 0$$

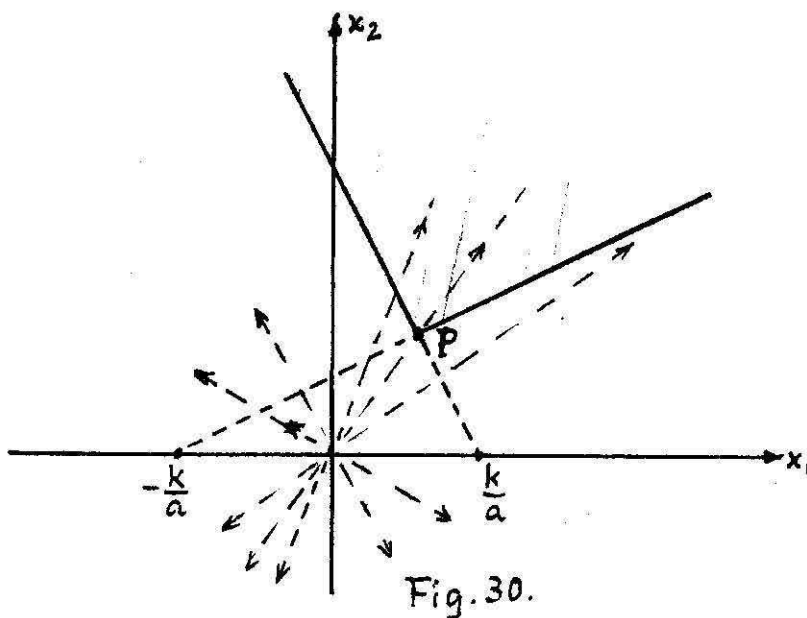
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{k}{a} + \left(x_{10} + \frac{k}{a}\right) e^{at} \\ x_2 = x_{20} e^{at} \end{cases}, \quad t \geq 0$$

que, en forma explícita, es

$$x_1 = \left(x_{10} - \frac{k}{a}\right) \frac{x_2}{x_{20}} + \frac{k}{a},$$

y

$$x_1 = \left(x_{10} + \frac{k}{a}\right) \frac{x_2}{x_{20}} - \frac{k}{a}.$$



Ejemplo 2: Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \varphi_1 \cdot \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a x_2 + \varphi_2 \cdot \alpha(t), \end{cases} \quad a > 0$$

con ψ_1, ψ_2 constantes, se lleva a la forma del ejemplo 1 por una simple rotación de ejes (figuras 31 y 32).

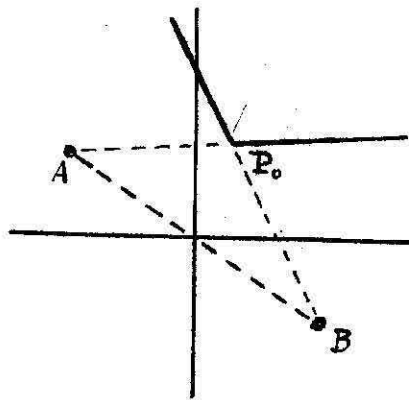


Fig. 31.

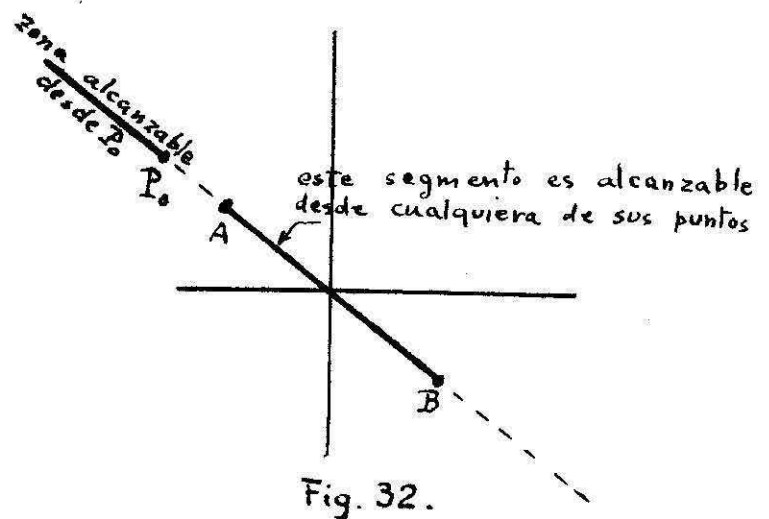


Fig. 32.

Ejemplo 3: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a x_2. \end{cases} \quad \text{con } a < 0.$$

El desarrollo del ejemplo 1 vale también en este caso, cambiando t por $-t$. De esta manera, $x_1 \rightarrow \pm k/a$, $x_2 \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

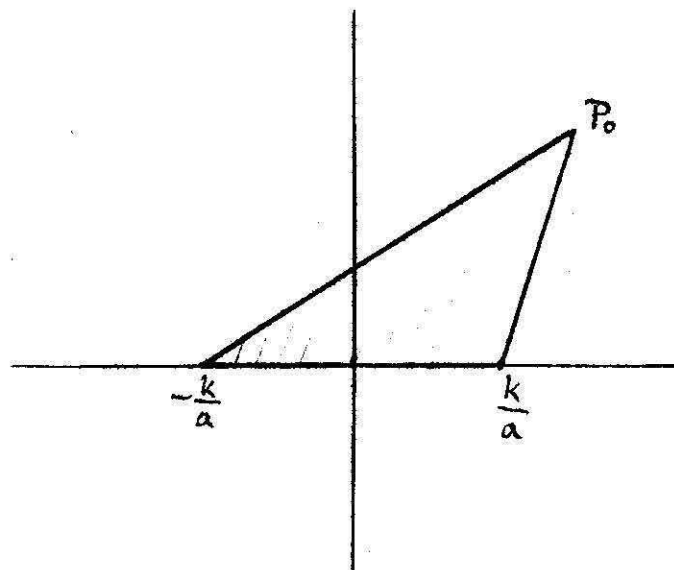


Fig. 33.

Ejemplo 4: El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \varphi_1 \cdot \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a x_2 + \varphi_2 \cdot \alpha(t), \end{cases} \quad a < 0, \varphi_1, \varphi_2 \text{ const.}$$

se lleva al caso anterior, por rotación de ejes (figura 34).

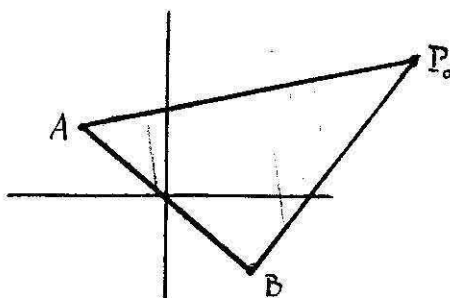


Fig. 34.

Ejemplo 5: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \varphi_1 \cdot \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \varphi_2 \cdot \alpha(t), \end{cases} \quad \begin{aligned} &\varphi_1, \varphi_2 \text{ const.} \\ &|\alpha(t)| < k, \\ &a_1 > a_2 > 0. \end{aligned}$$

Las soluciones extremas se obtienen con $\alpha = \pm k$, y poniendo $k \cdot \varphi_1 = k_1$, $k \cdot \varphi_2 = k_2$, resulta

$$\begin{cases} x_1 + \frac{k_1}{a_1} = \left(x_{10} + \frac{k_1}{a_1} \right) e^{a_1 t} \\ x_2 + \frac{k_2}{a_2} = \left(x_{20} + \frac{k_2}{a_2} \right) e^{a_2 t}, \end{cases} \quad t \geq 0$$

o sea

$$\frac{x_1 + \frac{k_1}{a_1}}{x_{10} + \frac{k_1}{a_1}} = \left(\frac{x_2 + \frac{k_2}{a_2}}{x_{20} + \frac{k_2}{a_2}} \right)^{a_1/a_2},$$

y

$$x_1 - \frac{k_1}{a_1} = \left(x_{10} - \frac{k_1}{a_1}\right) e^{a_1 t}$$

$$x_2 - \frac{k_2}{a_2} = \left(x_{20} - \frac{k_2}{a_2}\right) e^{a_2 t},$$

o sea

$$\frac{x_1 - \frac{k_1}{a_1}}{x_{10} - \frac{k_1}{a_1}} = \left(\frac{x_2 - \frac{k_2}{a_2}}{x_{20} - \frac{k_2}{a_2}} \right)^{a_1/a_2}.$$

Se ve directamente de la ecuación diferencial que para

$$\frac{a_1 x_1}{a_2 x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

o sea

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_2 k_1}{a_1 k_2}$$

hay paralelismo de todos los posibles vectores (\dot{x}_1, \dot{x}_2) (recta isoclina). De ahí se deducen los siguientes tipos de zonas alcanzables:

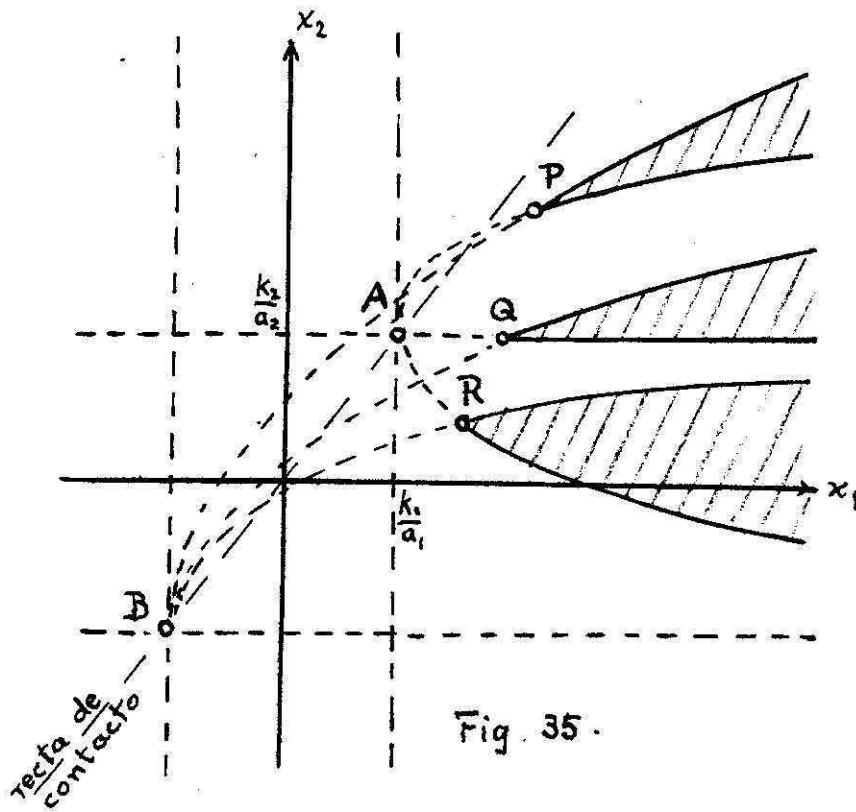
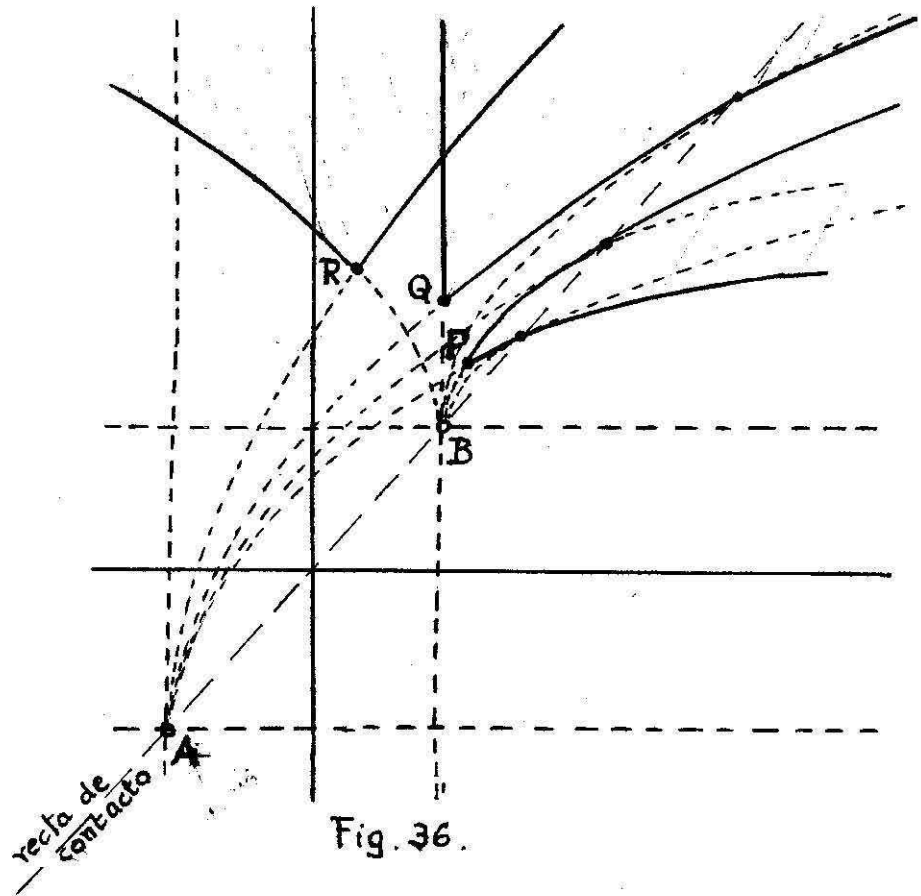


Fig. 35.



En la figura 37 se ve que desde el punto P, es alcanzable todo el plano.

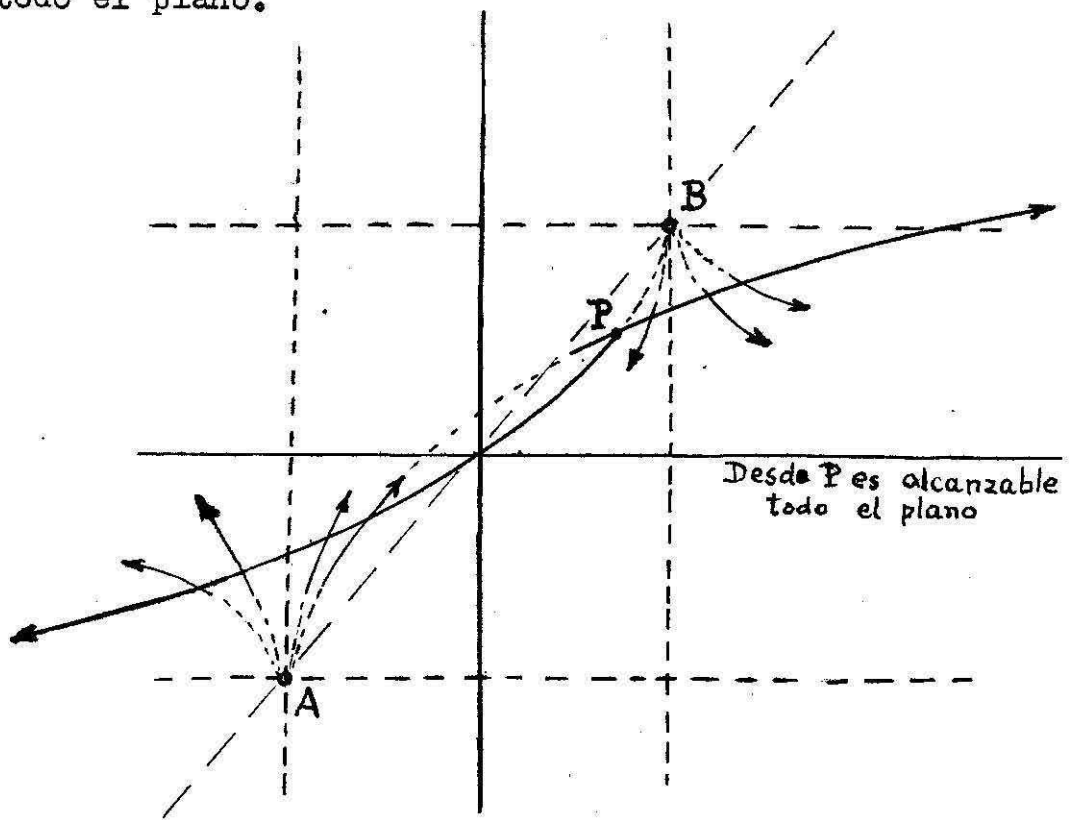


Fig. 37.

En la figura 38 vemos que desde un punto Q del segmento AB , resulta alcanzable todo el plano.

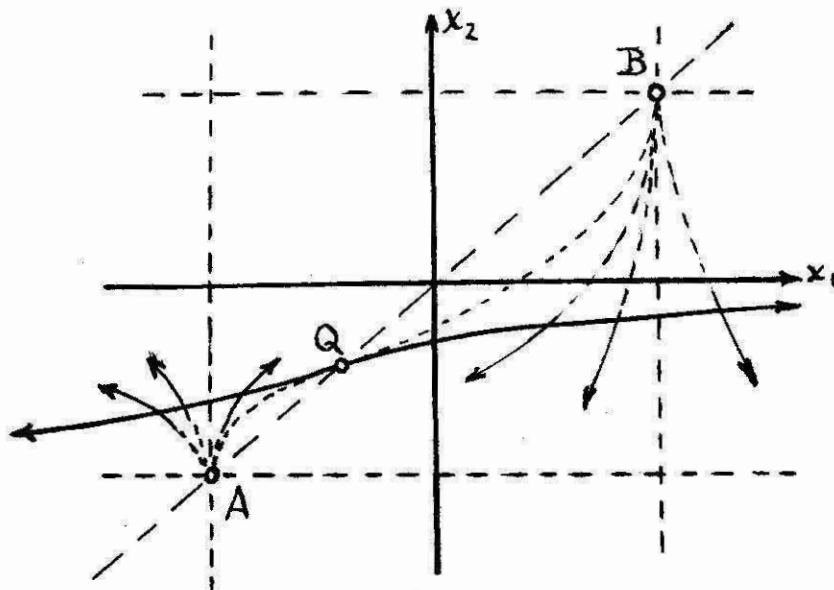


Fig. 38.

En la figura 39, es evidente que el caso límite es la parábola que desde A , pasa por P y B .

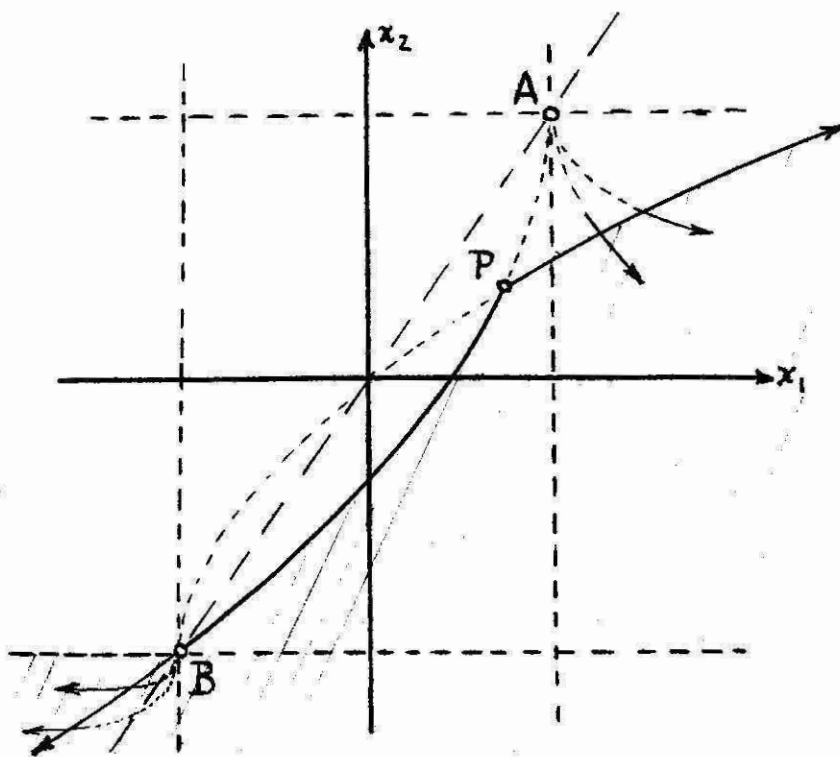


Fig. 39.

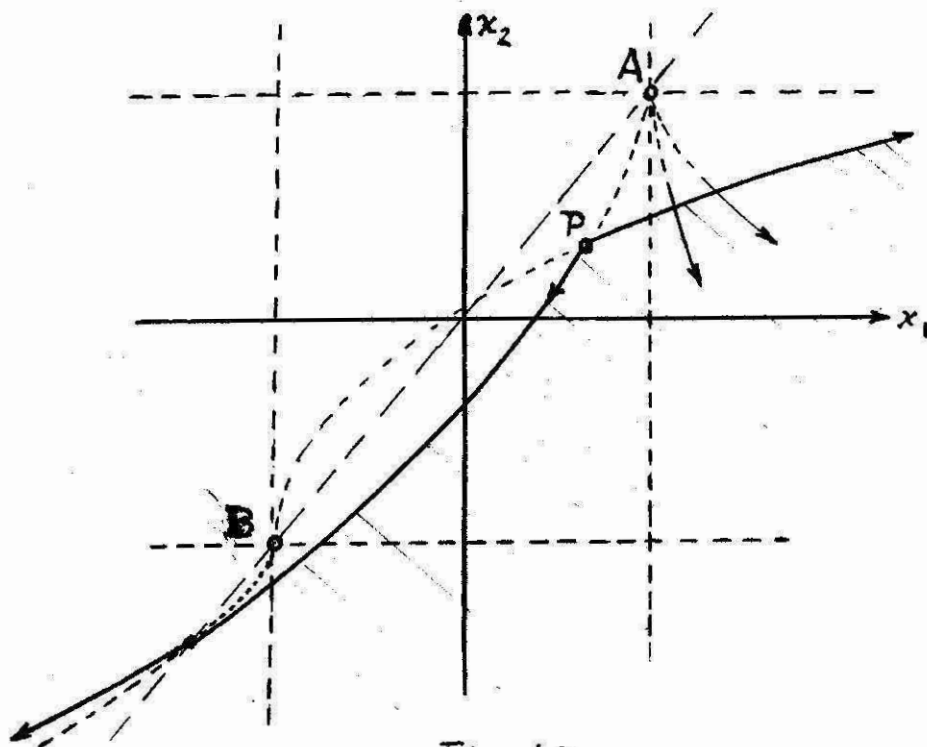


Fig. 40.

Ejemplo 6: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \psi_1 \cdot \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \psi_2 \cdot \alpha(t), \end{cases}$$

donde ψ_1, ψ_2 son constantes, $|\alpha| \leq k$, $a_1 < a_2 < 0$, $k_1, k_2 > 0$ y $\psi_1 k = k_1, \psi_2 k = k_2$. En las figuras 41, 42, 43, 44, 45, 46 y 47 se ven distintas zonas alcanzables.

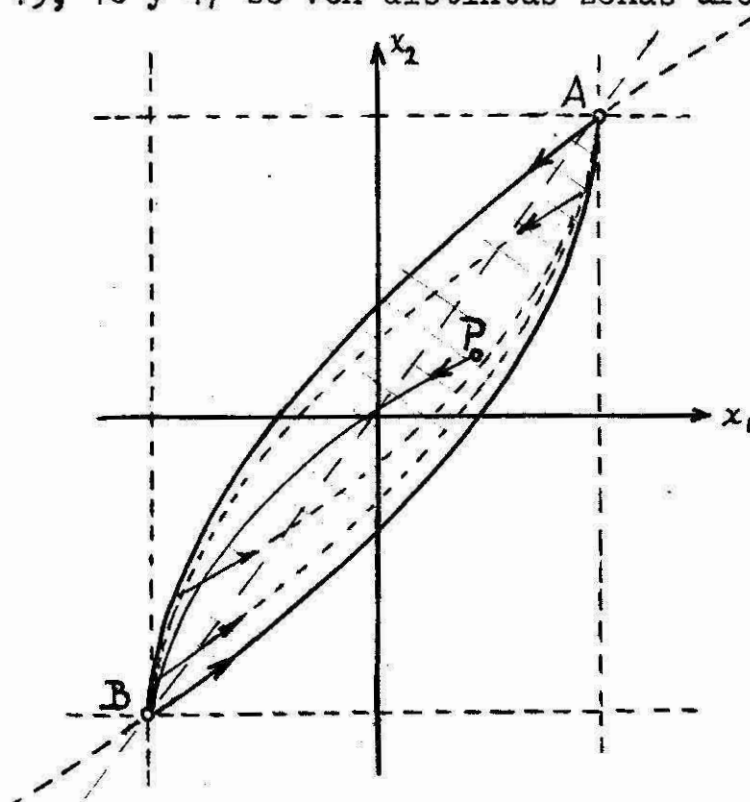


Fig. 41.

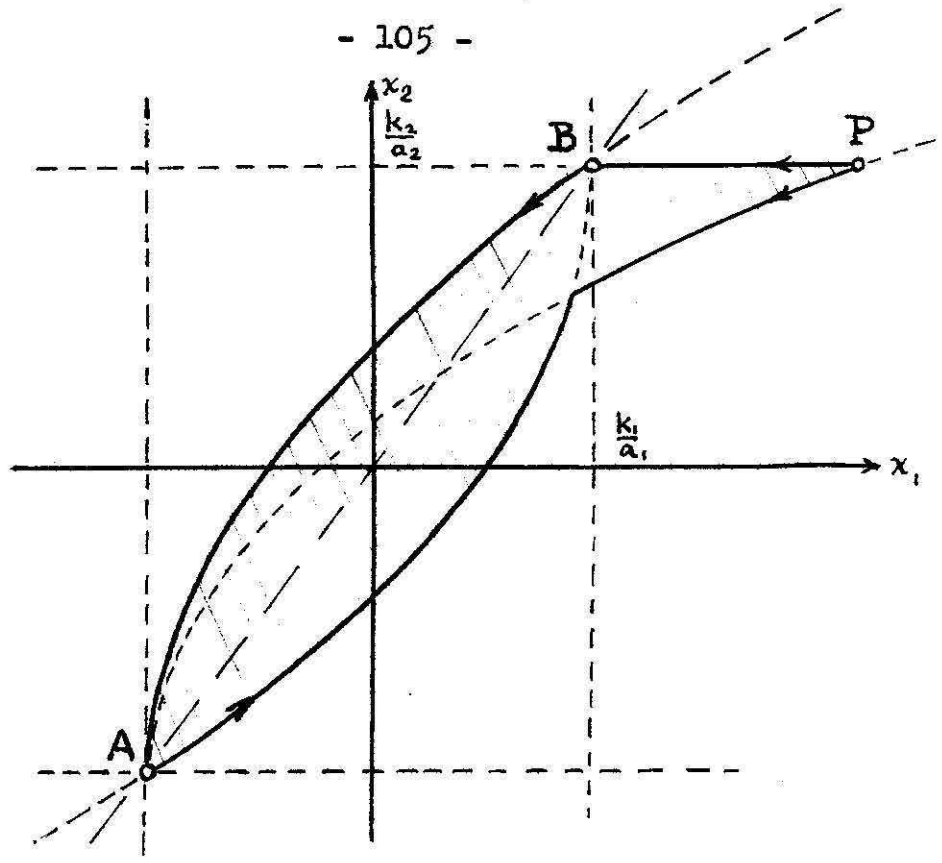


Fig. 42.

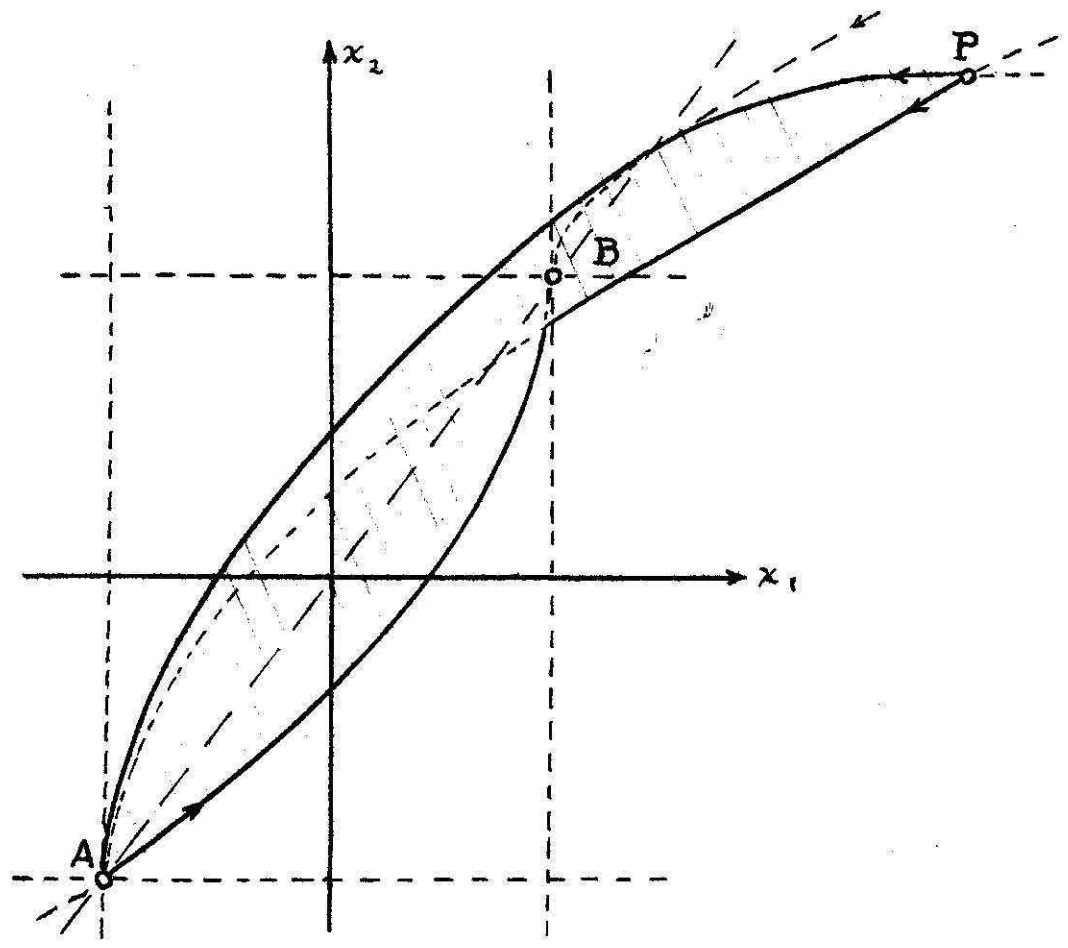


Fig. 43.

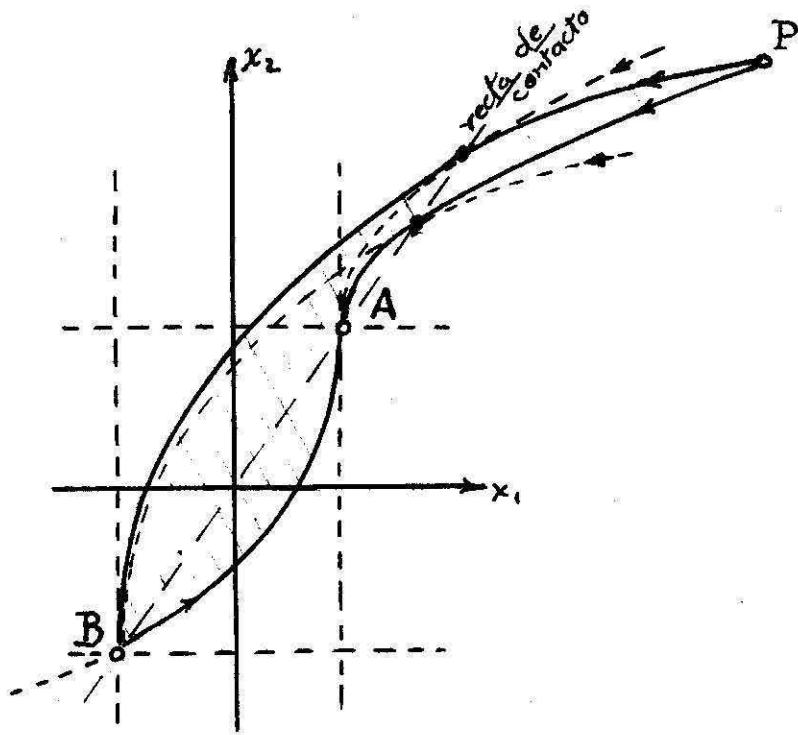


Fig. 44.

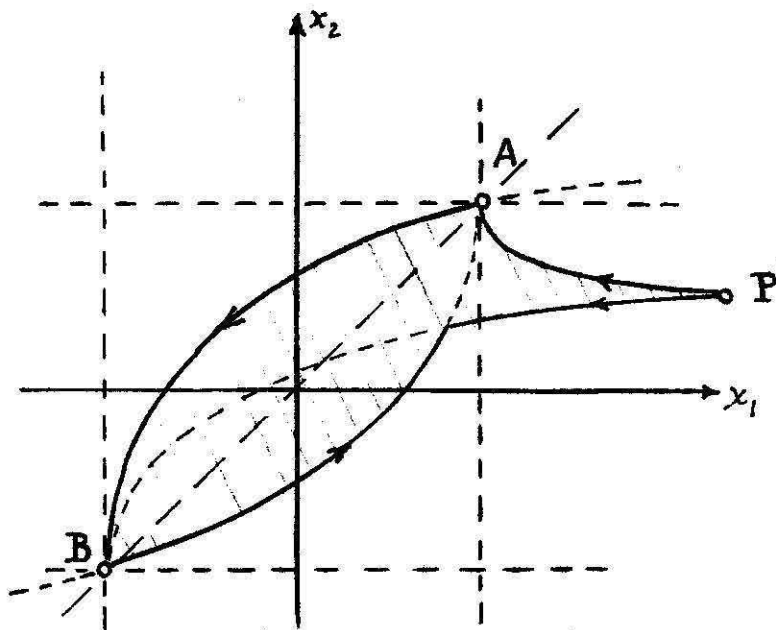


Fig. 45.

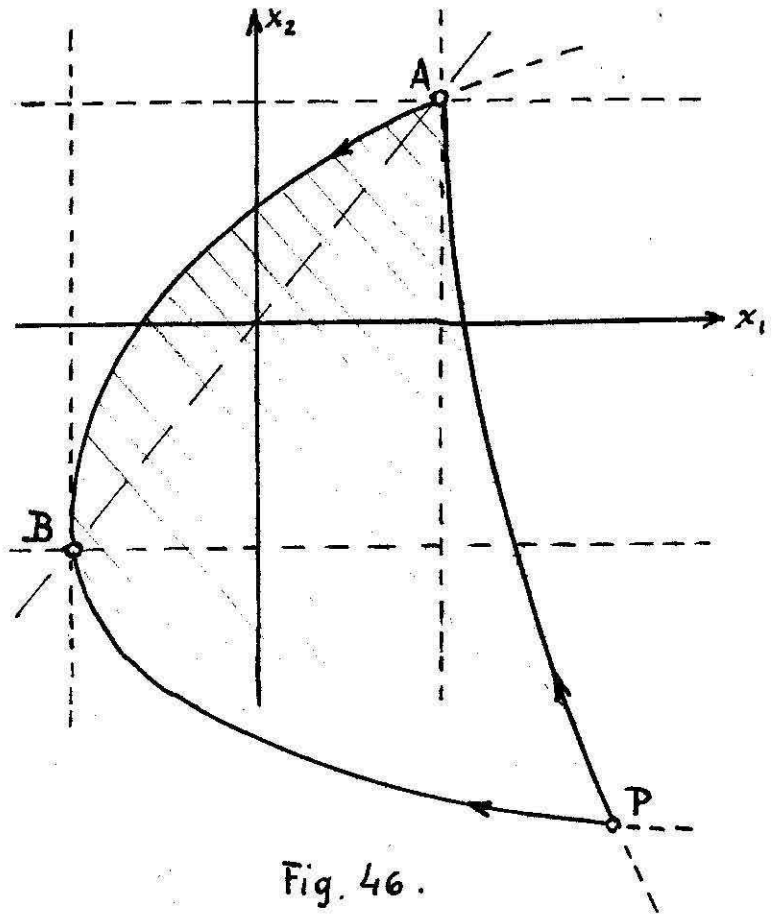


Fig. 46.

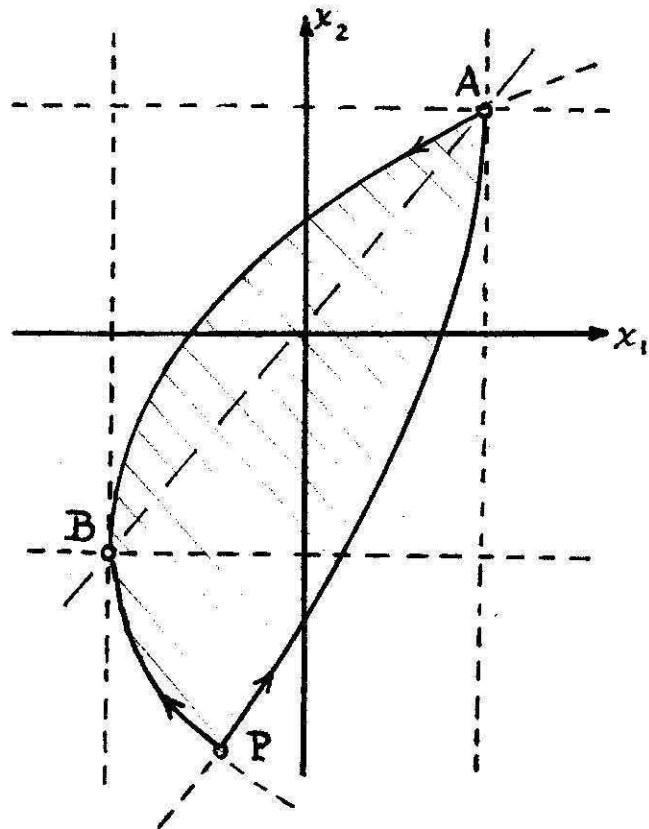


Fig. 47.

Ejemplo 7: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \varphi_1 \alpha(t) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + \varphi_2 \alpha(t), \end{cases}$$

donde $|\alpha| \leq k$, $k_1 = \varphi_1 k$, $k_2 = \varphi_2 k$, k_1 y k_2 son > 0 y $a_1 < 0 < a_2$. En las figura 48, 49, 50, 51 y 52, pueden verse algunos casos de zonas alcanzables.

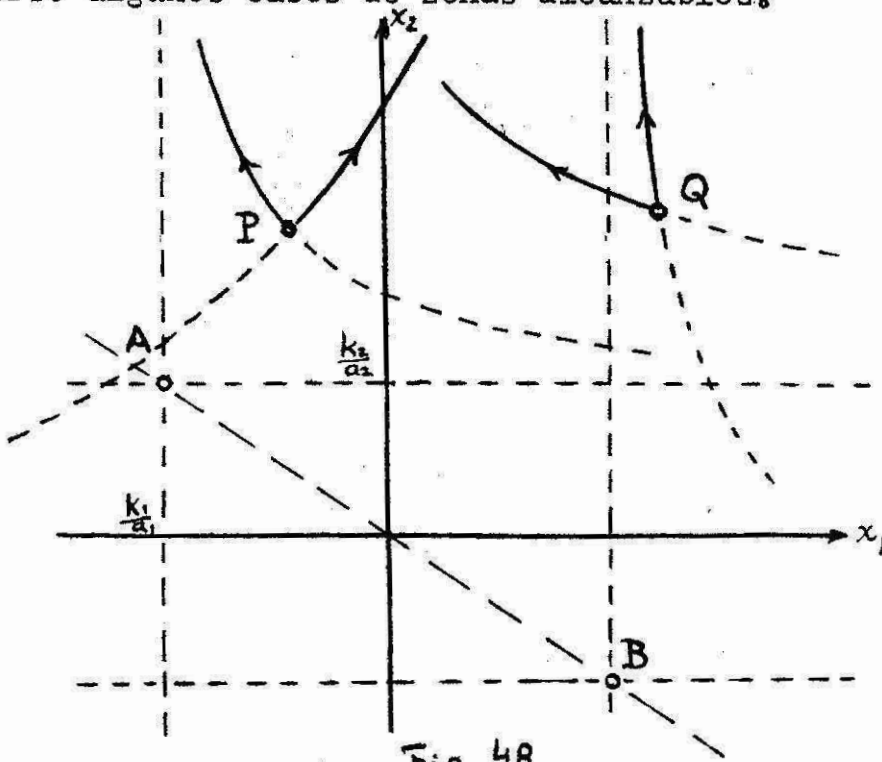


Fig. 48.

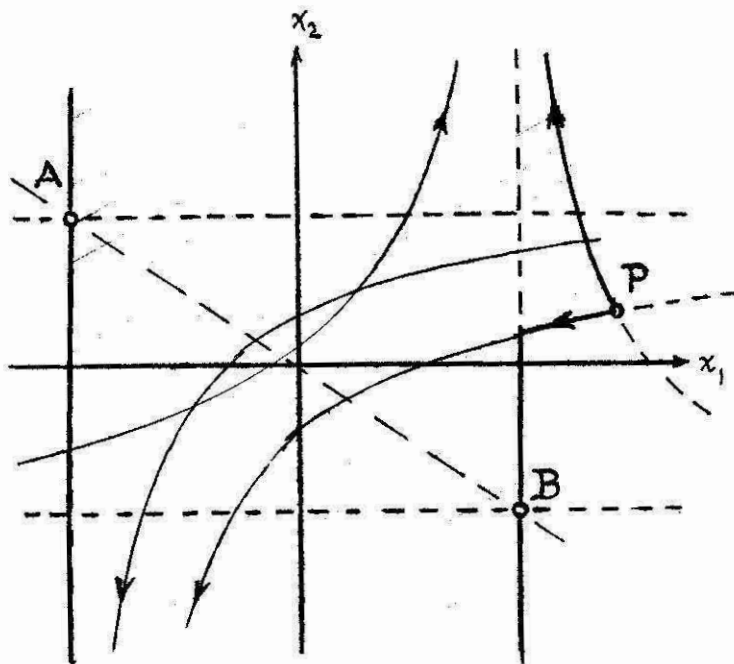


Fig. 49.

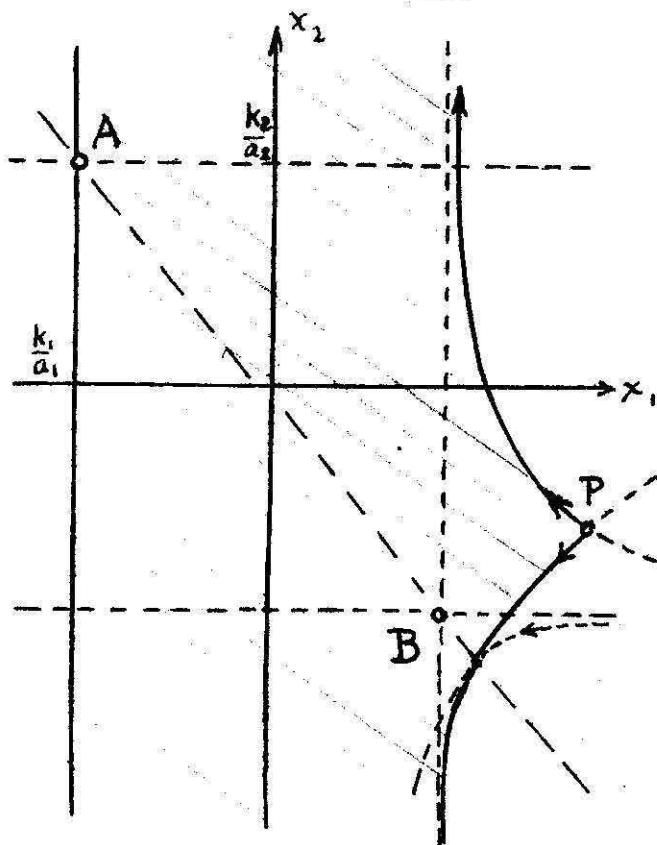


Fig. 50.

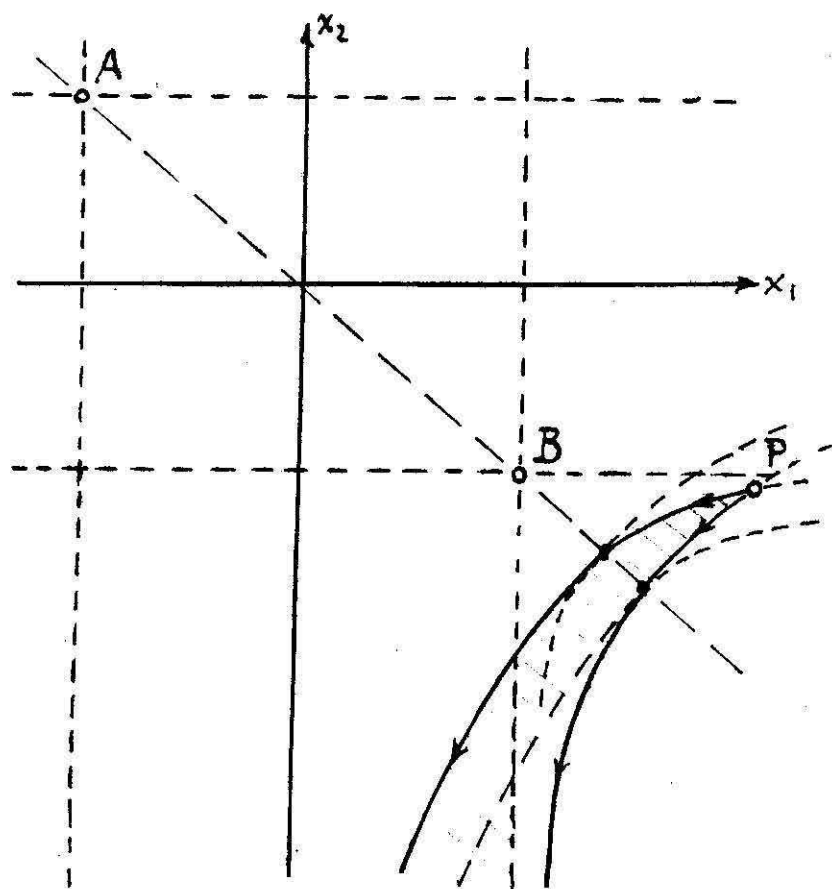


Fig. 51.

Como puede verse en la figura 52, si el punto P es interior al rectángulo fundamental, es alcanzable toda la franja.

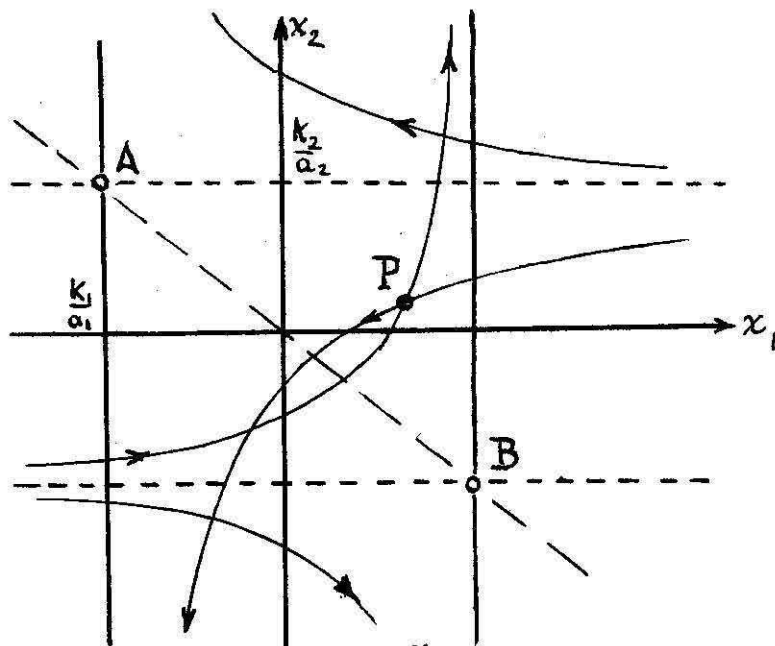


Fig. 52

Nota

Por rotación de ejes (transformación afín), el sistema considerado puede llevarse a la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = a_1 \bar{x}_2 + \varphi_1 \alpha \\ \dot{\bar{x}}_2 = a_2 \bar{x}_1 + \varphi_2 \alpha, \end{cases}$$

donde $|\alpha| \leq k$; $k, \varphi_1 = k_1$ positivos; $a_1 \cdot a_2 > 0$. Las soluciones del sistema fundamental pueden verse en la figura 53.

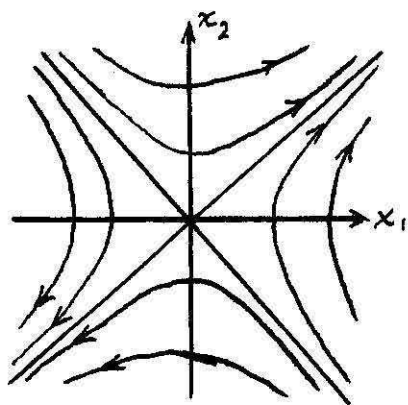


Fig. 53.

Si $a_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$, el sistema de ecuaciones diferenciales queda

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + \alpha, \quad |\alpha| \leq k_2; a_2 > 0, \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo, la ecuación equivalente de segundo orden

$$\ddot{x}_1 = a_2 x_1 + \alpha.$$

Es fácil ver que en este caso, se obtienen las mismas zonas alcanzables que antes, pero con todo el sistema girado.

Ejemplo 8: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = b x_1 + a x_2 + \alpha \varphi_2 \end{cases} \quad \text{con } a < 0.$$

En las figuras 54, 55 y 56, pueden verse distintos tipos de zonas alcanzables correspondientes a este caso.

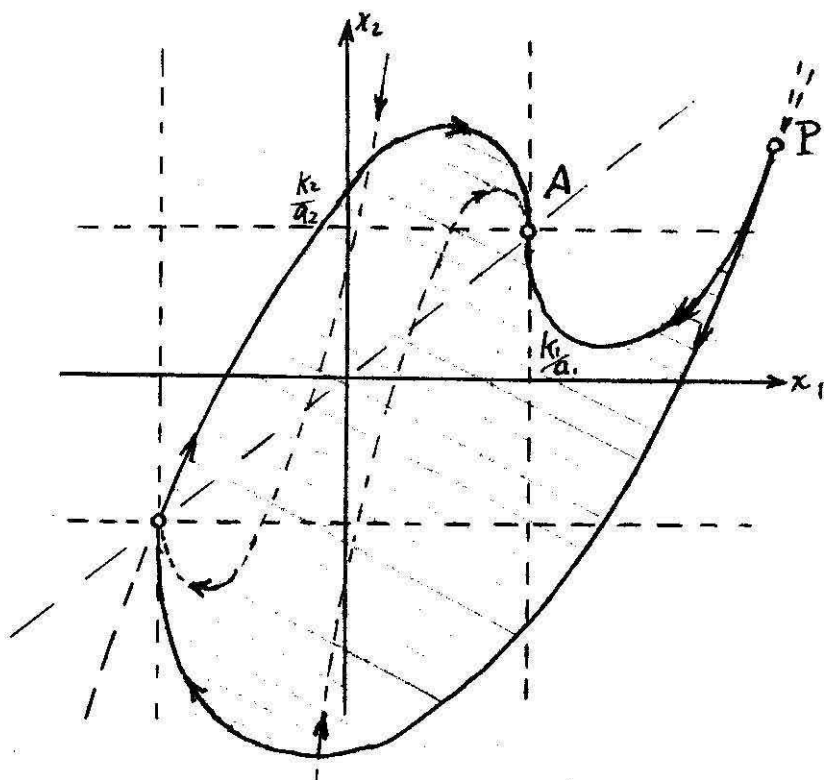


Fig. 54.

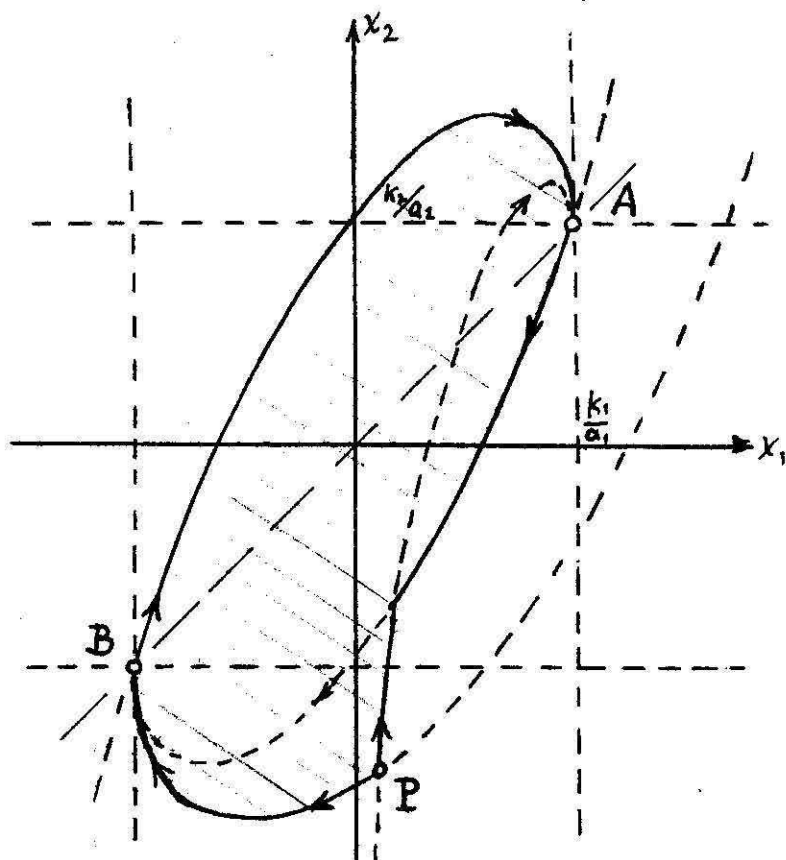


Fig. 55.

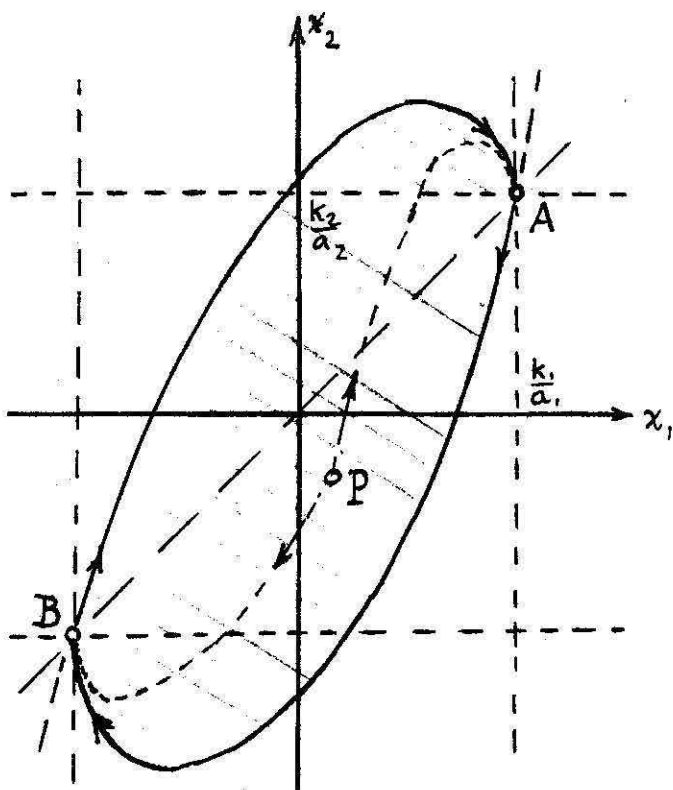


Fig. 56.

Ejemplo 9: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = b x_1 + a x_2 + \alpha \varphi_2, \end{cases}$$

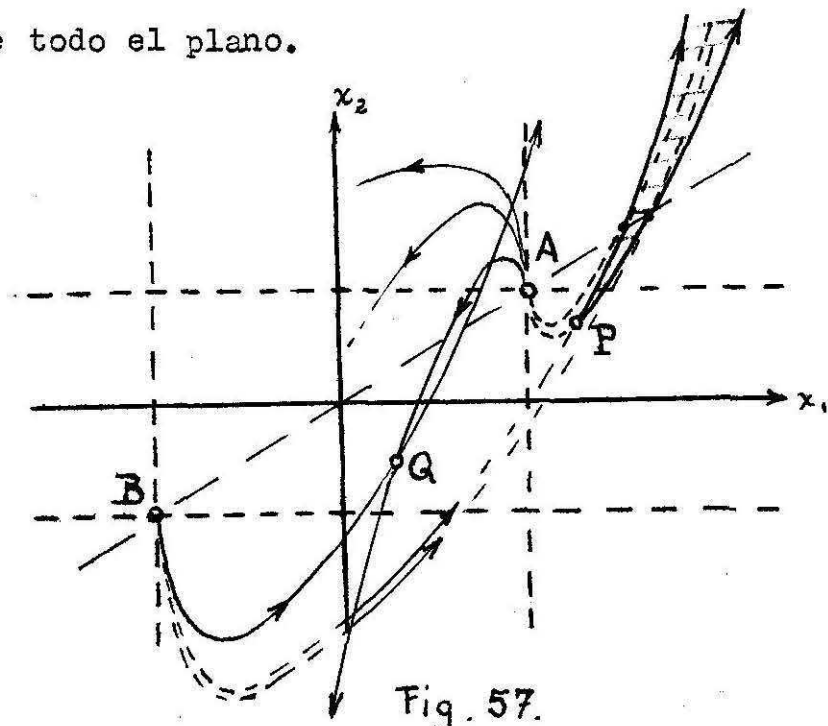
con $a > 0$; $|\alpha| < k$; $|k \varphi_1| = k_1$; $|k \varphi_2| = k_2$. Evidentemente, el origen es un nodo a una tangente. Los casos extremos son:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + k_1 = a \left(x_1 + \frac{k_1}{a} \right) = a (x_1 + k_1') \\ \dot{x}_2 = b x_1 + a x_2 + k_2 = b \left(x_1 + \frac{k_1}{a} \right) + a \left(x_2 - \frac{b k_1}{a^2} + \frac{k_2}{a} \right) = b (x_1 + k_1') + a (x_2 + k_2'), \end{cases}$$

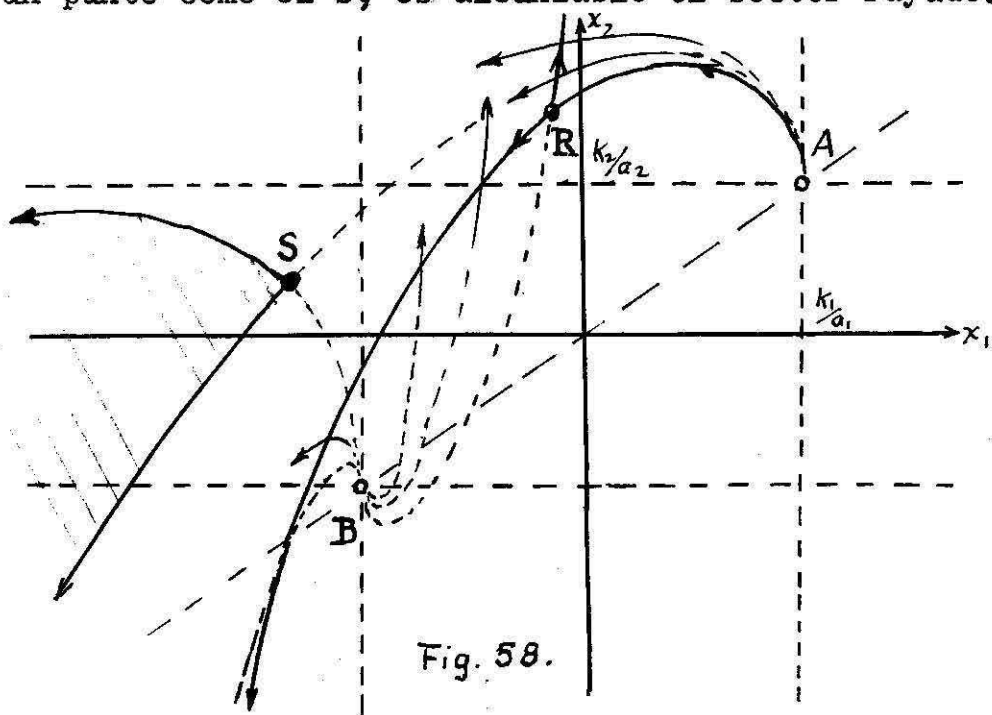
y

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = a \bar{x}_1 - k_1 = a (\bar{x}_1 - k_1') \\ \dot{\bar{x}}_2 = b \bar{x}_1 + a \bar{x}_2 - k_2 = b (\bar{x}_1 - k_1') + a (\bar{x}_2 - k_2'). \end{cases}$$

Los puntos críticos posibles están sobre el segmento AB (ver figura 57), donde $A = (k_1', k_2')$; $B(-k_1', -k_2')$. La recta AB es la de contacto (donde los vectores (x_1, x_2) son paralelos, independientemente de α). De dicha figura se deduce que, desde el punto P, es alcanzable el sector rayado; desde Q es alcanzable todo el plano.



En la figura 58 puede verse que desde un punto tal como el R, es alcanzable la zona que queda a la izquierda del mismo y desde un punto como el S, es alcanzable el sector rayado.



Ejemplo 10: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 + \alpha \cdot \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + \alpha \cdot \varphi_2, \end{cases}$$

con $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $|\alpha| \leq k$. En este caso, el origen es un centro. Los casos extremos son (con $|\alpha \varphi_1| = k_1$; $|\alpha \varphi_2| = k_2$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 \pm k_1 = a_1 \left(x_2 \pm \frac{k_1}{a_1} \right) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 \pm k_2 = a_2 \left(x_1 \pm \frac{k_2}{a_2} \right). \end{cases}$$

Como puede verse en la figura 59, resulta alcanzable todo el plano.

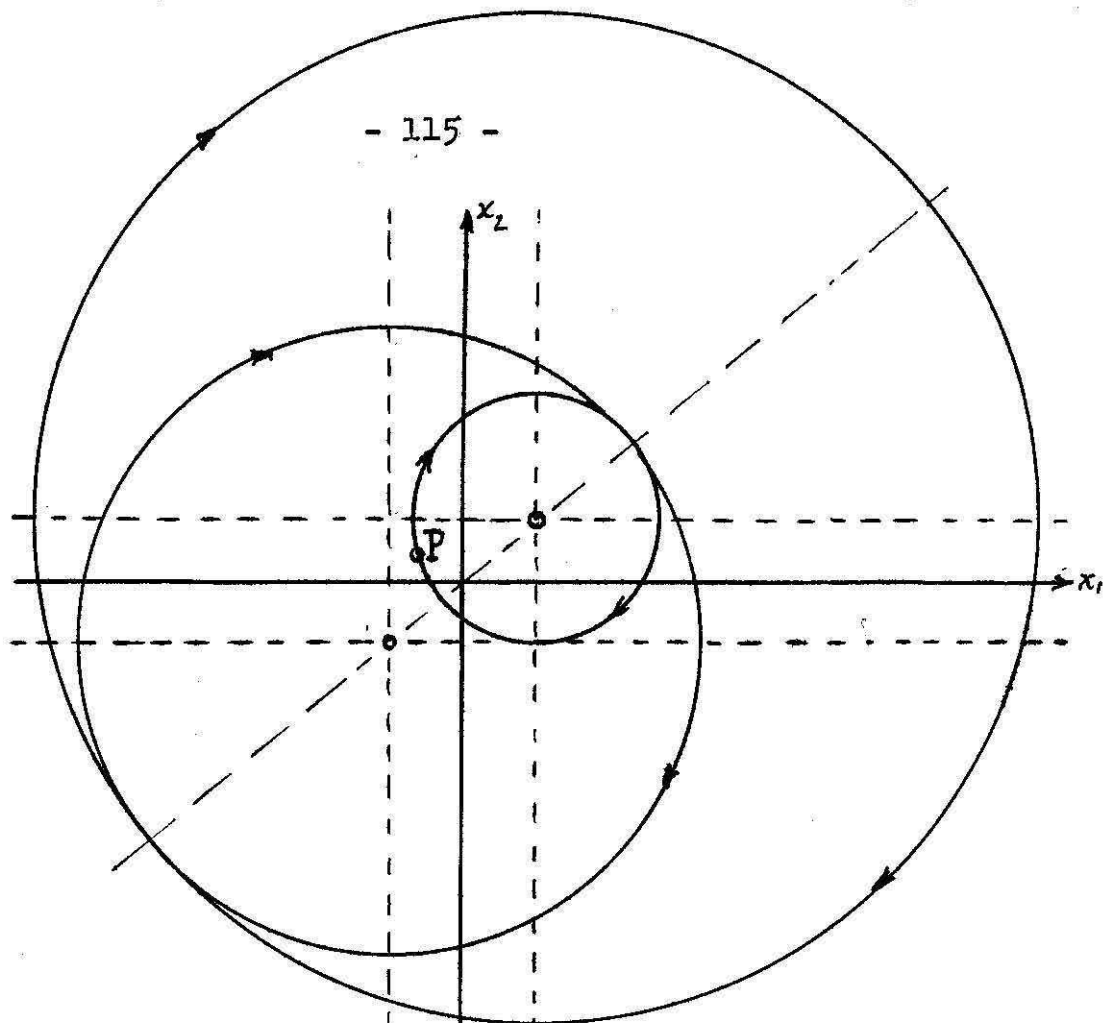


Fig. 59.

Ejemplo 11: Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 + a_1 x_2 + \alpha \varphi_2. \end{cases}$$

El origen es un foco repulsivo. Los casos extremos son

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 (x_1 \pm k_1') + a_2 (x_2 \pm k_2') \\ \dot{x}_2 = -a_2 (x_1 \pm k_1') + a_1 (x_2 \pm k_2'), \end{cases}$$

con $a_1 k_1' + a_2 k_2' = k_1$; $-a_2 k_1' + a_1 k_2' = k_2$. La recta de contacto tiene por ecuación

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{-a_2 x_1 + a_1 x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

Llamando μ al cociente x_2/x_1 resulta

$$(a_1 + a_2 \mu) k_2 = (-a_2 + a_1 \mu) k_1,$$

de donde

$$\mu = \frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{a_1 k_1 - a_2 k_2}.$$

Como puede verse en la figura 60, la zona alcanzable es la exterior a la curva indicada.

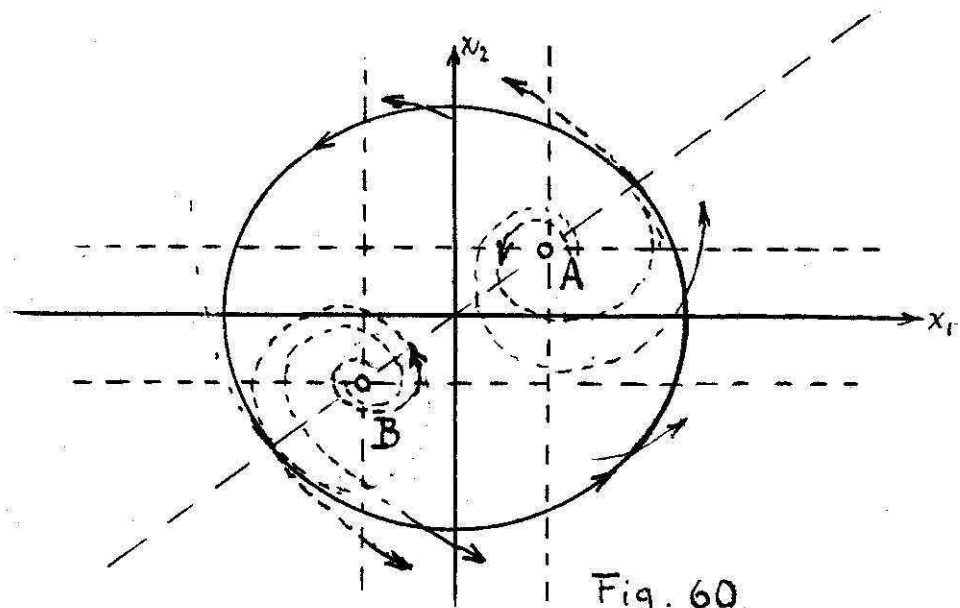


Fig. 60.

Ejemplo 12: Si consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \alpha \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 + a_1 x_2 + \alpha \varphi_2, \end{cases}$$

con $a_1 < 0$, vemos que el origen es un foco atractivo. Este caso es análogo al anterior, pero ahora resulta alcanzable el interior del óvalo de la figura 60.

Casos de φ_1, φ_2 variables funciones de x_1, x_2

Estos casos se tratan con el mismo método utilizado en los ejemplos precedentes, analizando los sistemas extremos obtenidos con las distintas combinaciones $\alpha = \pm k$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 + k \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = f_2 + k \varphi_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 - k \varphi_1 \\ \dot{x}_2 = f_2 - k \varphi_2. \end{cases}$$

En particular, será de interés hacer el estudio de aquellos puntos que sean críticos para ambos sistemas, o sea, aquellos para los cuales $f_1 = f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + \alpha b_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + \alpha b_2 x_2. \end{cases}$$

Supongamos que sea $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Los casos extremos son aquí:

$$\text{I} \begin{cases} \dot{x}_1 = (-a_1 + kb_1) x_1 \\ \dot{x}_2 = (-a_2 + kb_2) x_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{II} \begin{cases} \dot{x}_1 = (-a_1 - kb_1) x_1 \\ \dot{x}_2 = (-a_2 - kb_2) x_2. \end{cases}$$

Si $kb_1 < a_1$; $kb_2 < a_2$, se tienen zonas alcanzables como las de las figuras 61 y 62.

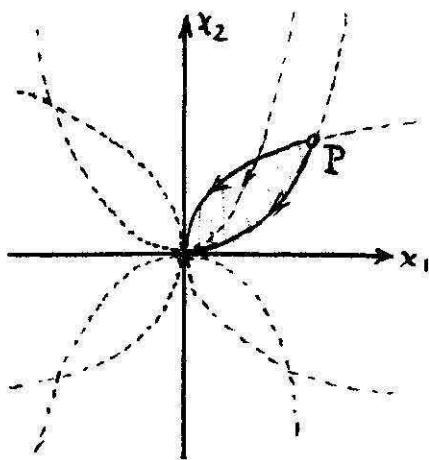


Fig. 61.

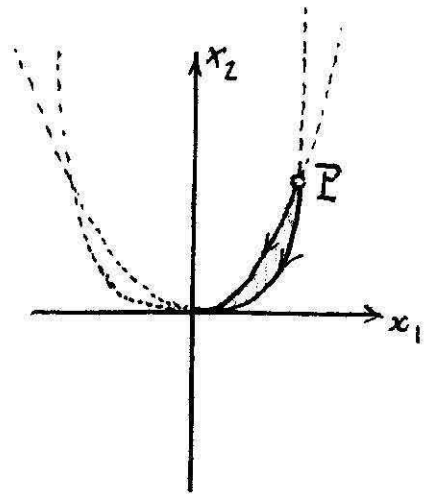
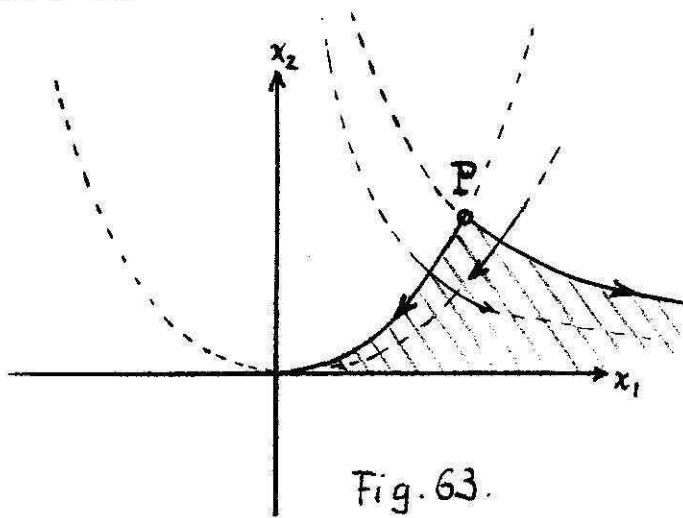
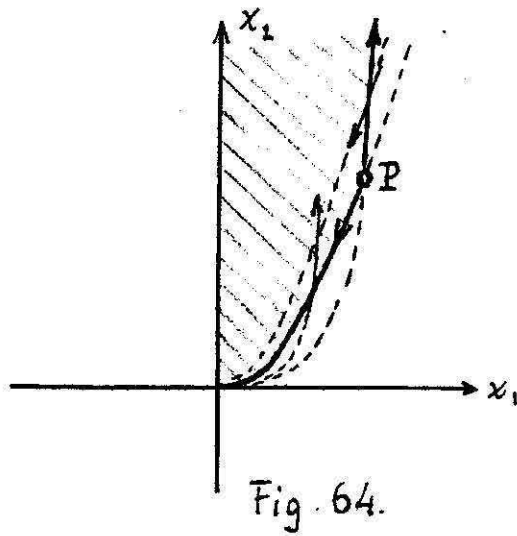


Fig. 62.

En cambio, si es $kb_1 > a_1$; $kb_2 < a_2$, en el sistema II resulta $\dot{x}_1/x_1 > 0$; $\dot{x}_2/x_2 < 0$ y la zona alcanzable es como la de la figura 63.



Si $kb_1 > a_1$; $kb_2 > a_2$, en el sistema II es \dot{x}_1/x_1 y $\dot{x}_2/x_2 > 0$. La zona alcanzable puede verse en la figura 64.



APENDICE

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 = c x_1 + d x_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} \bar{x}_1(0) = \bar{x}_{10} \\ \bar{x}_2(0) = \bar{x}_{20} \end{matrix}$$

donde a, b, c y d son constantes reales ⁽ⁿ⁾. En forma matricial, el sistema (1) se escribe

$$(2) \quad \dot{x} = A x, \quad x(0) = x_0,$$

donde A es una matriz constante y x un vector del plano euclideo. Para llevar el sistema (2) a la forma canónica, esto es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = S_2 x_2, \end{cases}$$

(n) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \end{cases}$$

donde P y Q son polinomios, podemos desarrollarlos en potencias de x_1, x_2 , con lo que nos queda

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 + p(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = c x_1 + d x_2 + q(x_1, x_2), \end{cases}$$

siendo p y q polinomios de grado superior al primero. Para estudiar el comportamiento de las trayectorias del sistema dado, en el entorno de un punto crítico, basta hacer la aproximación lineal y quedarse con los términos de primer orden, con lo que se obtiene un sistema tal como el (1).

donde S_1 y S_2 son las raíces de la ecuación característica

$$\det |A - S E| = 0, \quad E: \text{matriz unidad.}$$

hacemos la transformación vectorial

$$y = P x,$$

donde P es una matriz constante no-singular (con determinante no nulo). Entonces, la ecuación vectorial (2) se transforma en

$$P \dot{x} = P A P^{-1} P x,$$

o, lo que es equivalente,

$$(3) \quad \dot{y} = B y,$$

donde $B = P A P^{-1}$.

Sea ahora el sistema perturbado

$$(4) \quad \dot{y} = B y + \omega(y, t),$$

donde suponemos que el sistema fundamental correspondiente (3) está en forma canónica y $\omega(y, t)$ es un vector de dirección prefijada, pero valor arbitrario, es decir,

$$\begin{cases} \omega_1(y_1, y_2, t) = \alpha(t) \varphi_1 \\ \omega_2(y_1, y_2, t) = \alpha(t) \varphi_2, \end{cases}$$

siendo φ_1 y φ_2 constantes. El origen es el único punto crítico del sistema fundamental (3) y vamos a estudiar las zonas alcanzables desde el origen para sistemas de la forma siguiente

$$\dot{y} = B y + \omega(y, t),$$

donde

$$(5) \quad \omega(t) = \begin{cases} K \text{ constante} & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{para } t > T. \end{cases}$$

El vector $\omega(t)$ pertenece a un sub-espacio de la forma

$$(6) \quad \varphi_1 \omega_1 + \varphi_2 \omega_2 = 0,$$

es decir, las curvas perturbatrices son rectas. Aplicando la condición (5), la ecuación (7) se transforma en

$$(7) \quad \varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2 = 0,$$

donde k_1 y k_2 son las componentes del vector K .

Debe tenerse presente que estas zonas alcanzables, que vamos a estudiar por su importancia en las aplicaciones, no coinciden enteramente con las definidas en los capítulos precedentes, dado que el sistema considerado aquí es sólo un caso muy particular.

I) Las raíces características S_1 y S_2 son reales y distintas entre sí.

En ese caso, podemos elegir la matriz P de modo tal que el sistema (4) resulte de la forma

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = S_1 y_1 + \omega_1(y_1, y_2, t) \\ \dot{y}_2 = S_2 y_2 + \omega_2(y_1, y_2, t), \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0$. Como es fácil comprobar, la solución del sistema (8) con las condiciones (5) y (7) es

$$(9) \quad y_i = \begin{cases} \frac{k_i}{S_i} (e^{S_i t} - 1) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ \frac{k_i}{S_i} (e^{S_i t} - e^{S_i(t-T)}) & \text{para } t > T, i=1,2. \end{cases}$$

a) $\underline{s_2 > s_1 > 0}$

Para $0 \leq t \leq T$, la ecuación de las trayectorias se halla despejando t de las ecuaciones

$$y_1 = \frac{k_1}{s_1} (e^{s_1 t} - 1) \qquad y_2 = \frac{k_2}{s_2} (e^{s_2 t} - 1),$$

con lo que resulta

$$(10) \quad \left(\frac{s_2 y_2}{k_2} + 1 \right) = \left(\frac{s_1 y_1}{k_1} + 1 \right)^{s_2/s_1},$$

que es la ecuación de una familia de curvas de tipo parabólico que pasan por el origen, con pendiente

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Fijada ~~el hiperplano~~ ^{la recta} $k_2/k_1 = - \varphi_1/\varphi_2$ para distintos valores del vector K , obtenemos trayectorias como las de la figura 65.

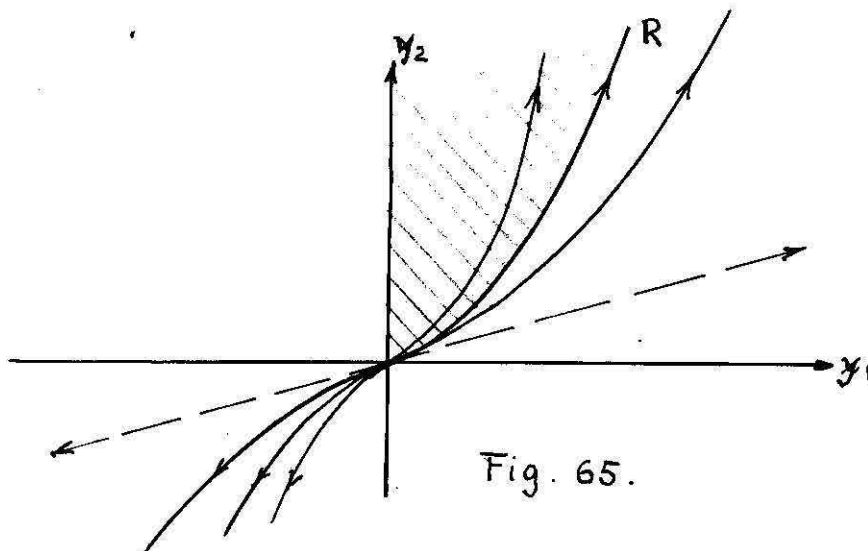


Fig. 65.

Supongamos que el sentido en que son recorridas dichas trayectorias sea el de la figura. Si ahora acotamos el vector ω mediante la condición

$$(11) \quad |\omega(t)| = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} \leq R,$$

obtenemos una trayectoria límite que delimita la zona que incluye las soluciones del sistema (4) con las condiciones (5), (6), (7) y (11).

Para $t > T$, la ecuación de las trayectorias resulta

$$(12) \quad \frac{y_2}{k_2} = \left(\frac{y_1}{k_1} \right)^{S_2/S_1},$$

donde $k_i' = k_i/S_i (e^{S_i T} - 1)$, que corresponde a una familia de curvas de tipo parabólico, con vértice en el origen y tangente horizontal. El origen es un nodo a dos tangentes para el sistema fundamental ^("). Si representamos ahora la familia de curvas trayectorias, es fácil ver que la zona alcanzable desde el origen es la rayada en la figura 66, si se impone la condición (11).

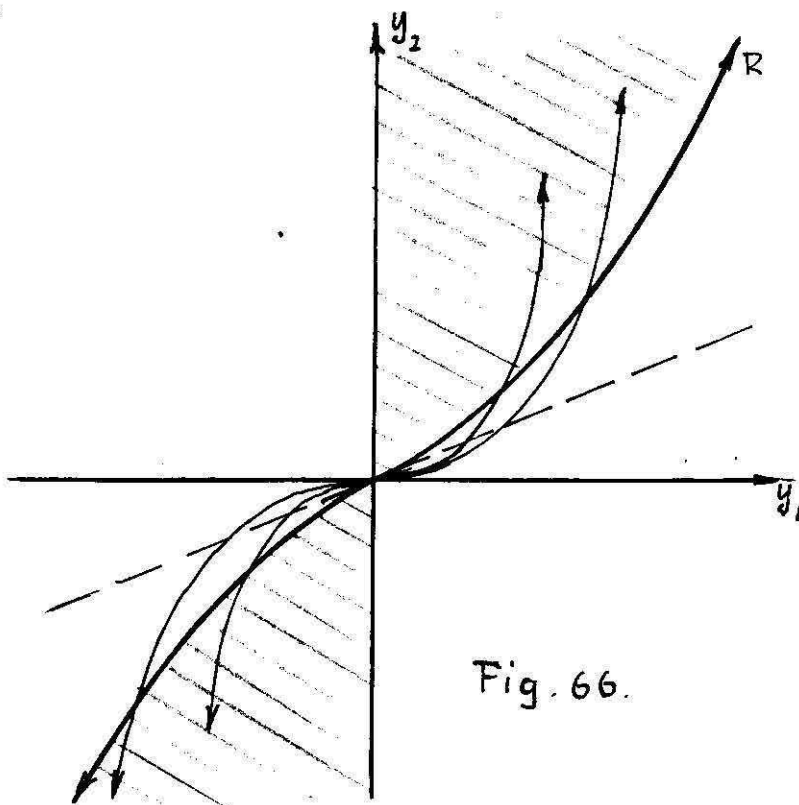


Fig. 66.

b) $S_2 < S_1 < 0$

En este caso, la ecuación de las trayectorias para $0 \leq t \leq T$ es nuevamente la (10). La diferencia con el caso anterior consiste en que la solución dada por (9) tiende asintóticamente al valor

(") Sansone - Conti, op.cit.(19), p.46.

$$y_i = \frac{k_i}{s_i} ,$$

es decir, tomando una condición de acotación tal como la (11), la solución resulta acotada (figura 67).

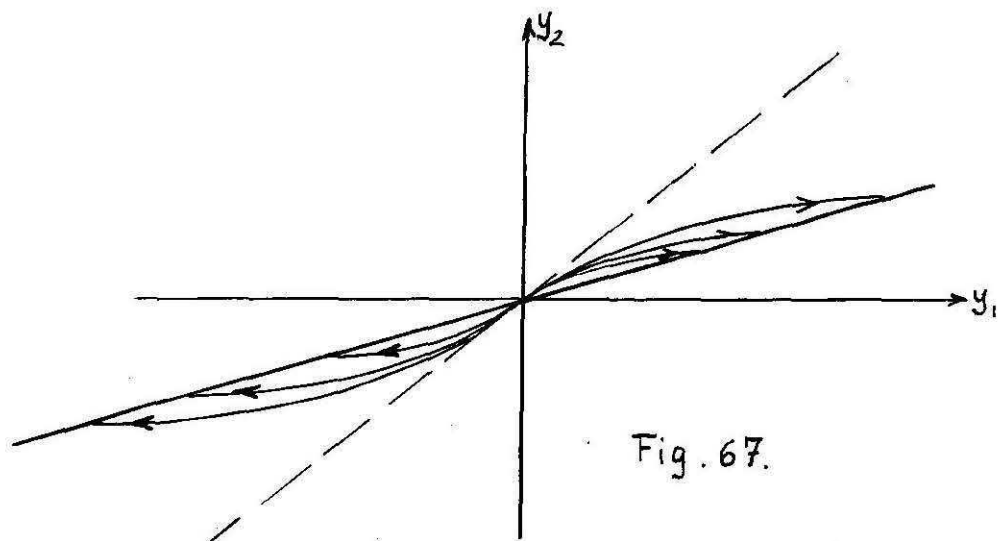


Fig. 67.

Para $t > T$, la ecuación de las trayectorias es la (12), con la diferencia que las curvas son recorridas, para valores crecientes de t , en sentido inverso al del caso a). En la figura 68, se ve fácilmente que la zona alcanzable delimitada por dos trayectorias límites cuando se impone la condición (11), es la rayada.

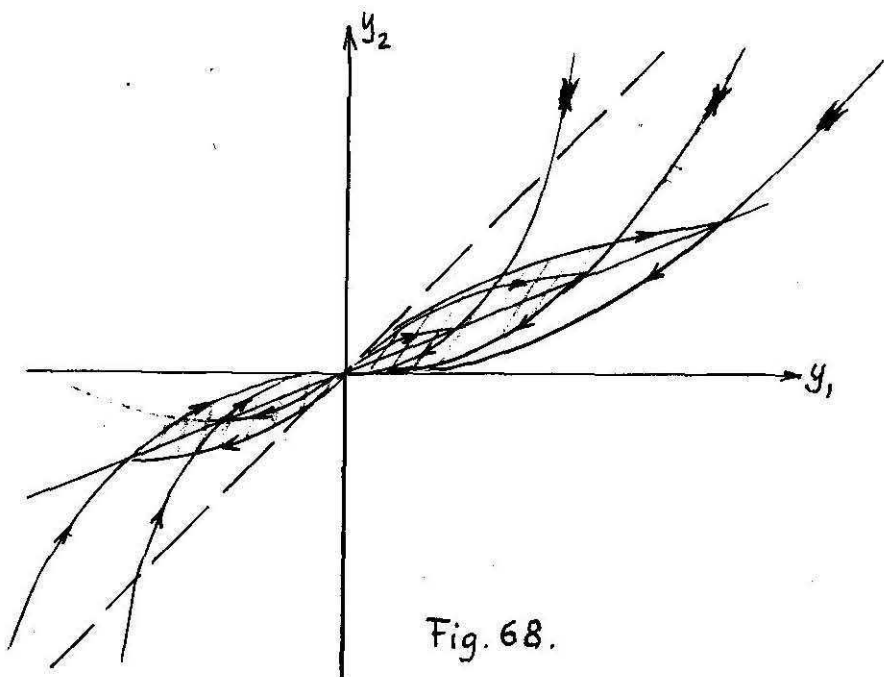


Fig. 68.

El origen es nuevamente un nodo a dos tangentes para el sistema fundamental (3). Si no se acota el vector $\omega(t)$, la zona alcanzable sería el interior del ángulo cuyas aristas son la semi-recta OP y el eje y_1 y su simétrico.

c) $S_2 > 0 > S_1$

La ecuación de las trayectorias para $0 \leq t \leq T$ es la (10), pero en este caso, representa una familia de curvas de tipo hiperbólico, puesto que $S_1/S_2 < 0$ (figura 69). Análogamente, las trayectorias para $t > T$ resultan hipérbolas con vértice en el origen, cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

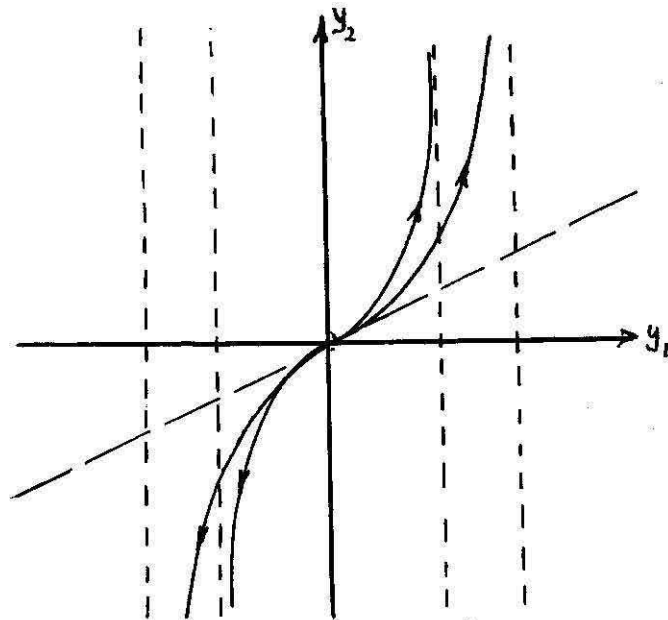


Fig. 69.

Como es fácil ver, la zona alcanzable desde el origen es la rayada en la figura 70, si se impone la condición (11). En caso contrario, sería el interior del ángulo limitado por la semi-recta OP y el eje y_2 y su simétrico. El origen es un punto de ensilladura para el sistema fundamental.

d) $S_2 > 0; S_1 = 0$

En este caso, el sistema (4) se reduce a la forma

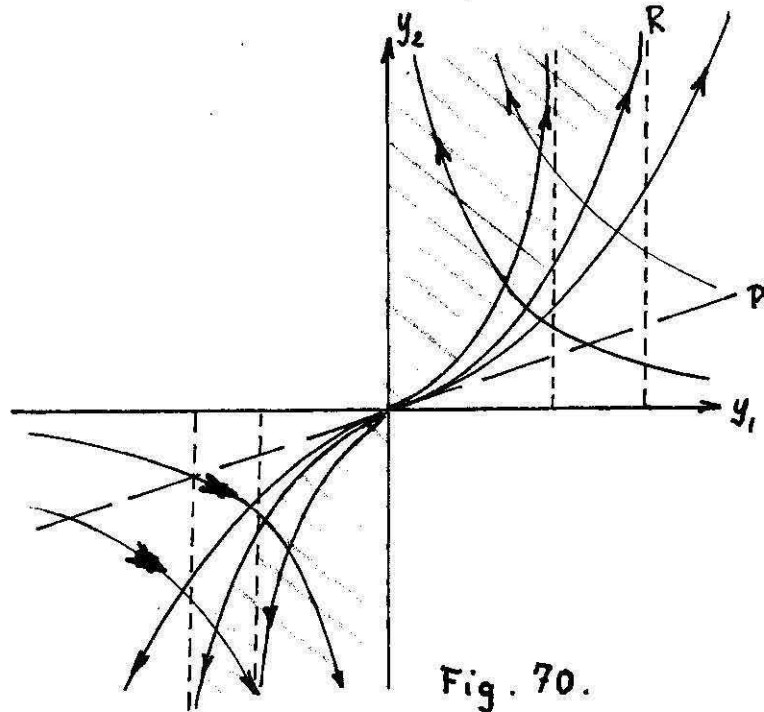


Fig. 70.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \omega_1(t) \\ \dot{y}_2 = s_2 y_2 + \omega_2(t), \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} y_1 = k_1 t \\ y_2 = \frac{k_2}{s_2} (e^{s_2 t} - 1) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T) \quad \begin{cases} y_1 = k_1 T \\ y_2 = \frac{k_2}{s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_2(t-T)}) \end{cases} \quad (t > T)$$

Para $0 \leq t \leq T$, la ecuación de las trayectorias es

$$y_2 = \frac{k_2}{s_2} \left(e^{s_2 y_1 / k_1} - 1 \right),$$

que representa una familia de curvas de tipo exponencial, con pendiente inicial

$$\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Para $t > T$, las fundamentales son rectas paralelas al eje y_2 . Si se acota el vector ω mediante la (11), la zona alcanzable es la rayada en la figura 71. En caso contrario, sería el ángulo comprendido entre la recta OP y el eje y_2 .

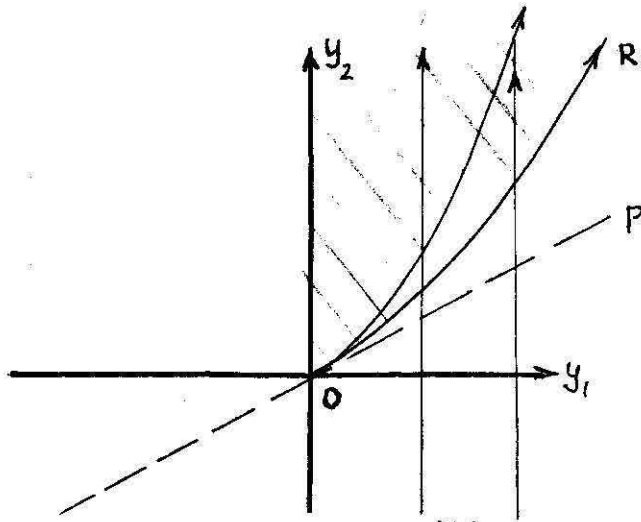


Fig. 71.

e) $s_2 < 0; s_1 = 0$

La ecuación de las trayectorias es la misma que para el caso d) para $0 \leq t \leq T$. La diferencia estriba en que la solución tiende asintóticamente al valor $y_2 = k_2/s_2$. Para $t > T$, las fundamentales son rectas recorridas en sentido inverso al caso anterior. En la figura 72 vemos la zona alcanzable si se acota el vector ω . Sin acotar, sería el interior del ángulo POy_1 .

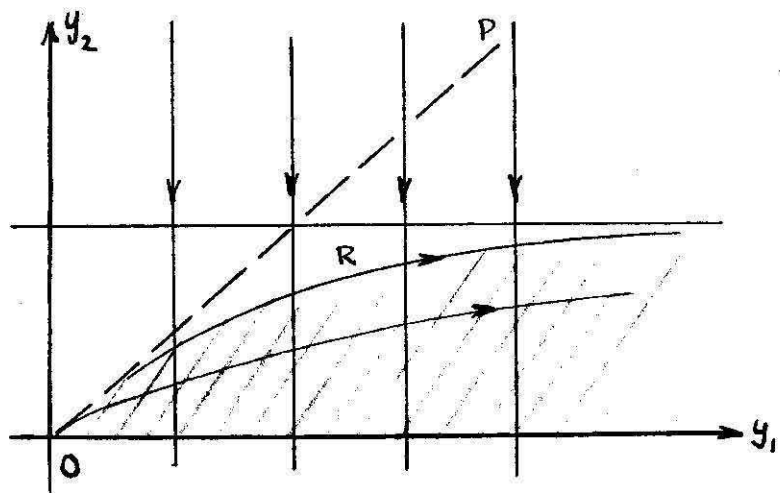


Fig. 72.

II) Las raíces características son reales e iguales.

f) $s_1 = s_2 \neq 0$.

En este caso, el sistema (4) queda reducido a la forma

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = S x_1 + \omega_1(t) \\ \dot{x}_2 = S x_2 + c x_1 + \omega_2(t), \end{cases}$$

donde el vector ω está definido como en I), por las ecuaciones (5), (6) y (7).

Si en (13) es además $c = 0$, el sistema queda

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S x_1 + \omega_1(t) \\ \dot{x}_2 = S x_2 + \omega_2(t), \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k_i}{S} (e^{St} - 1) & 0 \leq t \leq T \\ x_1 = \frac{k_i}{S} (e^{St} - e^{S(T-t)}) & t > T \end{cases}$$

Para todo valor de t , la ecuación de las trayectorias resulta

$$x_2 = \frac{k_2}{k_1} x_1,$$

ecuación de una familia de rectas que pasan por el origen. El origen es un nodo estrellado. La zona alcanzable se reduce a rectas radiales, sin acotar el vector ω y la recta R , imponiendo la condición (11) (figura 73).

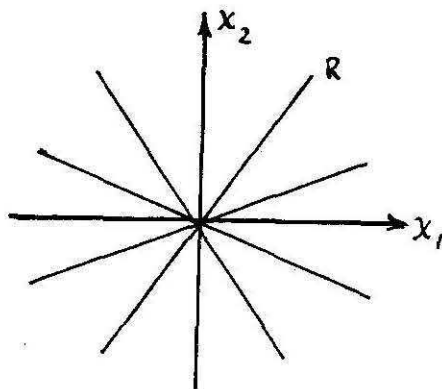


Fig. 73.

Si fuera $c \neq 0$, la solución del sistema (13) se halla reemplazando

$$x_1 = \frac{k_1}{s} (e^{st} - 1),$$

en la expresión de \dot{x}_2 e integrando, con lo que se obtiene:

$$x_2 = e^{st} \left[D + \frac{ck_1}{s} \left(t + \frac{e^{-st}}{s} \right) - k_2 \frac{e^{-st}}{s} \right].$$

La constante D la determinamos considerando que $x_2(0) = 0$, y así resultan las soluciones del sistema (13) para $0 \leq t \leq T$:

$$(14) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{k_1}{s} (e^{st} - 1) \\ x_2 = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{ck_1}{s} - k_2 \right) (1 - e^{st}) + ck_1 t e^{st} \right]. \end{cases}$$

La ecuación de las trayectorias para $0 \leq t \leq T$ es

$$x_2 = \left(-\frac{c}{s} + \frac{k_2}{k_1} \right) x_1 + \frac{k_1 c}{s^2} \left(1 + \frac{s x_1}{k_1} \right) \ln \left| \left(1 + \frac{x_1 s}{k_1} \right) \right|.$$

Haciendo el cambio de variables

$$\xi = 1 + \frac{s x_1}{k_1},$$

la ecuación queda

$$x_2 = \frac{1}{s} \left(\frac{k_1 c}{s} - k_2 \right) + \xi \left[\frac{1}{s} \left(k_2 - \frac{ck_1}{s} \right) + \frac{k_1 c}{s^2} \ln |\xi| \right],$$

que representa una familia de curvas de tipo logarítmico con sus centros alineados y tangente común a todas (figura 74).

Las coordenadas de los centros son

$$\alpha = \frac{k_1}{s} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{s} \left(\frac{k_1 c}{s} - k_2 \right).$$

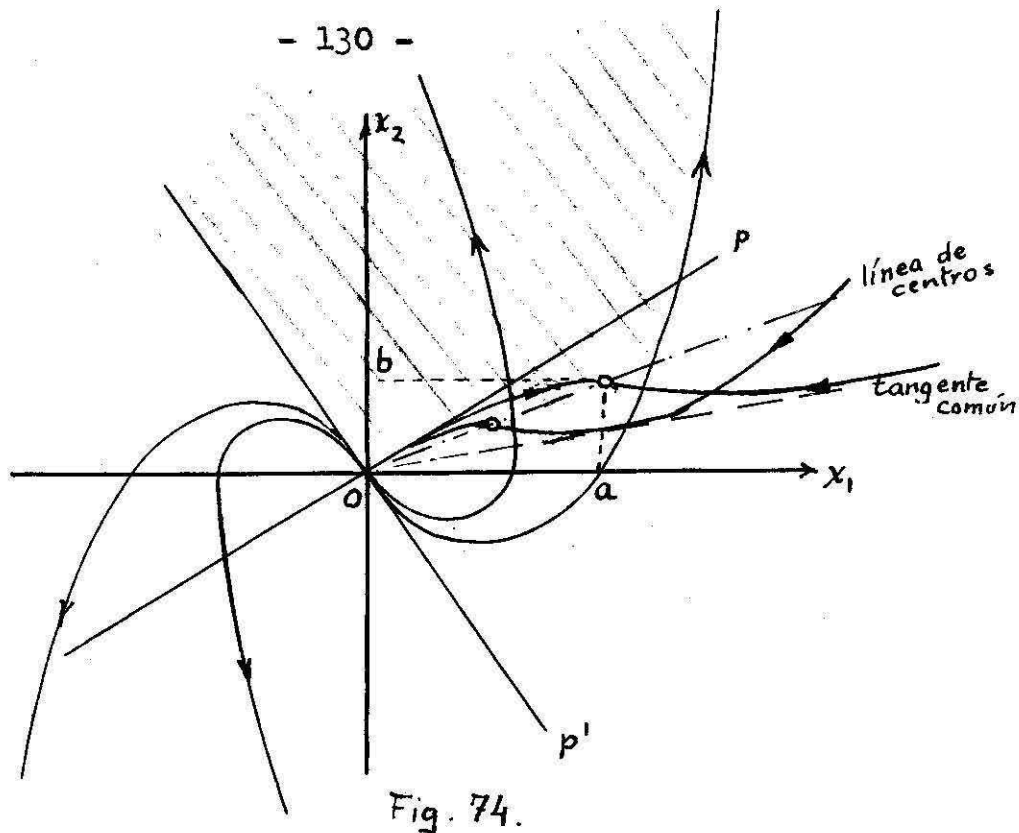


Fig. 74.

Para $t > T$, la solución del sistema fundamental es

$$(15) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{k_1}{s} (e^{st} - e^{s(t-T)}) \\ x_2 = D e^{st} + e^{st} \frac{ck_1}{s} (1 - e^{-sT}) (T-t), \end{cases}$$

donde la constante D se determina teniendo en cuenta que para $t = T$ es

$$x_2 = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{ck_1}{s} - k_2 \right) (1 - e^{sT}) + ck_1 T e^{sT} \right].$$

Despejando t de (15), obtenemos como ecuación de las curvas fundamentales

$$x_2 = x_1 \left[\left(\frac{Ds}{k_1(1 - e^{-sT})} + cT \right) - \frac{1}{s} \ln \left| \frac{s x_1}{k_1(1 - e^{-sT})} \right| \right],$$

que representa una familia de curvas de tipo logarítmico. En la figura 74 vemos la zona alcanzable rayada, si se impone la acotación (11). En caso contrario, la zona alcanzable sería el interior del ángulo POP' y su simétrico.

El origen es un nodo a una tangente para el sistema fundamental.

g) $S_1 = S_2 = 0$.

En este caso trivial, como la ecuación (4) se reduce al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1(t) \\ \dot{x}_2 = \omega_2(t), \end{cases}$$

es evidente que las trayectorias, para todo valor de t , son rectas que pasan por el origen. El análisis es análogo al del caso f) para $c = 0$.

III) Las raíces de la ecuación característica son complejas.

h) S_1, S_2 complejas conjugadas.

En este caso, la ecuación (4) se transforma en

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = (\alpha + \beta i) y_1 + \omega_1(t) \\ \dot{y}_2 = (\alpha - \beta i) y_2 + \omega_2(t). \end{cases}$$

Para hallar la ecuación de las trayectorias para $0 \leq t \leq T$, hacemos el cambio de variables

$$(17) \quad \xi_1 = y_1 + \frac{k_1}{\alpha + \beta i} \quad ;$$

donde k_1, k_2 son complejos conjugados. Las ecuaciones (16) en el nuevo sistema son

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (\alpha + \beta i) \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = (\alpha - \beta i) \xi_2. \end{cases}$$

Si hacemos ahora la sustitución $\xi_1 = u + iv$; $\xi_2 = u - iv$ (")

(") Es inmediato comprobar que esta transformación es real, lineal, homogénea, con determinante no nulo.

obtenemos

$$\begin{cases} \dot{u} + i \dot{v} = (\alpha + \beta i) (u + i v) \\ \dot{u} - i \dot{v} = (\alpha - \beta i) (u - i v), \end{cases}$$

que también se pueden escribir

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta v \\ \dot{v} = \alpha v + \beta u. \end{cases}$$

En el plano (u,v) , la ecuación de las trayectorias es

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha v + \beta u}{\alpha u - \beta v}.$$

Para estudiar mejor esta ecuación diferencial, pasamos a coordenadas polares $u = r \cos \theta$; $v = r \sin \theta$

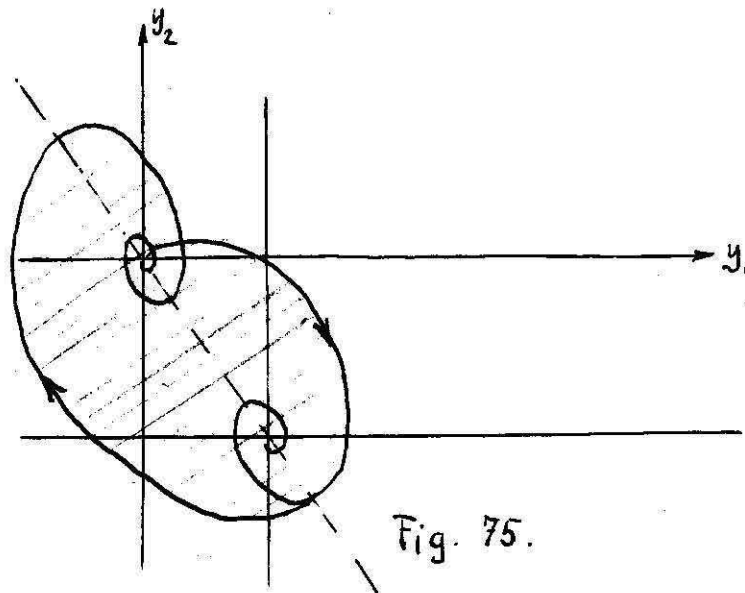
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\beta} r,$$

e integrando

$$r = D e^{\frac{\alpha}{\beta} \theta},$$

familia de espirales logarítmicas asintóticas en el origen. El sentido en que son recorridas, se determina según el signo de $\alpha = \text{Re}(S_1) = \text{Re}(S_2)$. En efecto, como $\dot{r} = \alpha r$, si $\alpha < 0$, el punto representativo tiende al origen y si $\alpha > 0$, se aleja del mismo. Al pasar del plano (u,v) al (ξ_1, ξ_2) las espirales se deforman únicamente. En el plano (y_1, y_2) , el origen estará desplazado, según el cambio de variables (17). Para $t > T$, las fundamentales resultan análogamente espirales logarítmicas asintóticas en el origen, que resulta un foco.

En la figura 75, vemos rayada la zona alcanzable, si se impone la acotación (11). En caso contrario, es alcanzable todo el plano.



i) S_1 S_2 imaginarias puras.

Este resulta un caso particular de h) para $\alpha = 0$. Para $0 \leq t \leq T$ la ecuación de las trayectorias es

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}$$

que integrada da $v^2/2 + u^2/2 = C$, familia de circunferencias. Las fundamentales también resultan circunferencias con centro en el origen, que es un centro. La zona alcanzable es la rayada en la figura 76, si se impone la acotación de ω y todo el plano, en caso contrario.

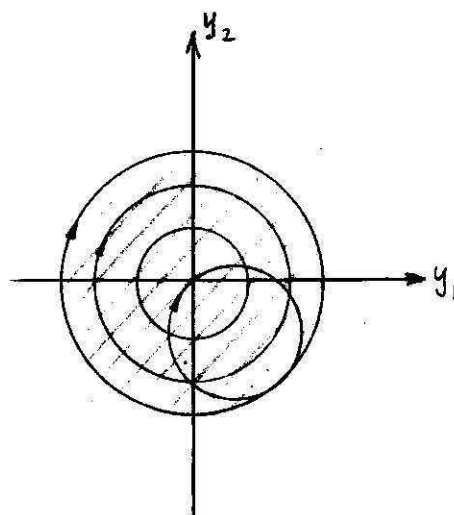


Fig. 76.

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$(18) \quad \ddot{x}_1 + 3 \dot{x}_1 + 2 x_1 = 0$$

que describe el movimiento de una partícula sujeta a restitución elástica y amortiguamiento.

El sistema equivalente a la ecuación (18) es

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1, \end{cases}$$

y sus raíces características son $S_1 = -1$; $S_2 = -2$.

Sea ahora una transformación lineal

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \eta = \gamma x_1 + \delta x_2, \end{cases}$$

tal que en las nuevas coordenadas, el sistema (19) quede en forma canónica

$$\begin{cases} \dot{\xi} = S_1 \xi \\ \dot{\eta} = S_2 \eta, \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi \\ \dot{\eta} = -2\eta. \end{cases}$$

Tomemos los coeficientes $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = 1$, de modo que el determinante de (20) sea no nulo. Entonces

$$\begin{cases} \xi = 2 x_1 + x_2 \\ \eta = x_1 + x_2. \end{cases}$$

El sistema perturbado que vamos a estudiar es

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 2x_1 + \omega(t), \end{cases}$$

donde $\omega(t)$ cumple las condiciones (5), (6) y (7). En el espacio transformado, el sistema (21) se escribe

$$(22) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = -x_2 - 2x_1 \\ \dot{\eta} = -2x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

de donde deducimos $k_1 = k_2 = k$. La solución del sistema (22) es

$$\xi = \begin{cases} -k(e^{-t} - 1) & 0 \leq t \leq T \\ -k(e^{-t} - e^{-(t-T)}) & t > T \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} -\frac{k}{2}(e^{-2t} - 1) & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{k}{2}(e^{-2t} - e^{-2(t-T)}) & t > T \end{cases}$$

La ecuación de las trayectorias para $0 \leq t \leq T$ es

$$\left(-\frac{2\eta}{k} + 1\right) = \left(-\frac{\xi}{k} + 1\right)^2,$$

ecuación de una familia de curvas de tipo parabólico que pasan por el origen.

Para $t > T$, la ecuación de las trayectorias

$$\frac{2\eta}{-k(e^{-2T} - 1)} = \left[\frac{\xi}{-k(e^{-T} - 1)} \right]^2,$$

también representa una familia de curvas de tipo parabólico con vértice en el origen y tangente horizontal. El origen es un nodo a dos tangentes para el sistema fundamental. En la figura 77 aparece rayada la zona alcanzable en el caso de

estar ω sujeto a una acotación tal como la (11). Sin acotar el vector ω , la zona alcanzable es el interior del ángulo $PO\xi$ y su simétrico.

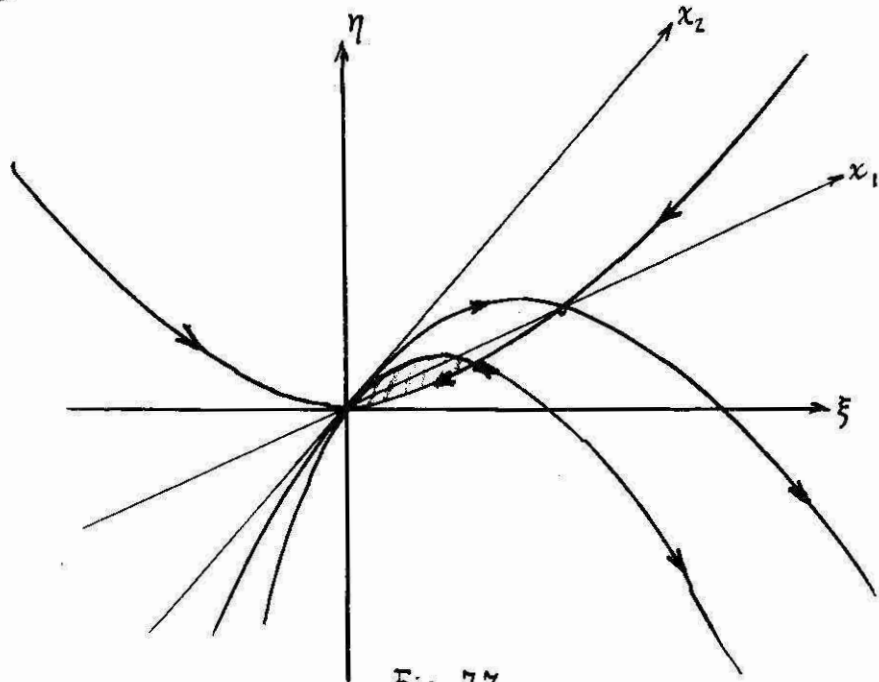


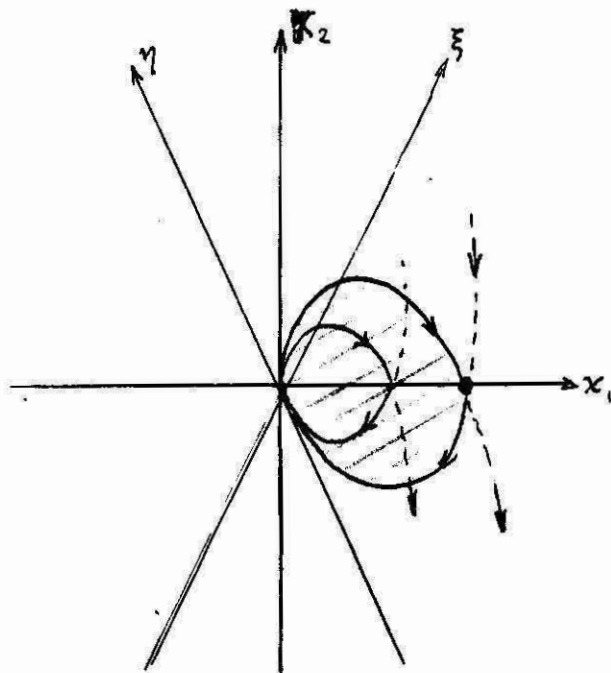
Fig. 77.

Para hallar la posición de los ejes x_1, x_2 respecto a los (ξ, η) veremos qué rectas corresponden a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Como

$$x_1 = \xi - \eta,$$

$x_1 = 0$ equivale a $\xi = \eta$ (recta pendiente 45°).

Análogamente, $\xi - 2\eta = -x_2$, de donde $x_2 = 0$ equivale a $\eta = \xi/2$, o sea recta de pendiente 0,5. La zona alcanzable, imponiendo la condición (11), es la zona rayada en la figura (78). Sin acotar el vector ω , es el interior del ángulo $x_2O\xi$ y su simétrico.



REFERENCIAS

- (1) R.BELLMAN, I.GLICKSBERG y O.GROSS, On the Bang-bang Control Problem, Quart. Appl. Math., 14, 1, 1956.
- (2) E.O.ROXIN y V.W. de SPINADEL, Sobre un problema de control para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, Revista de la Unión Matemática Argentina (en prensa).
- (3) H.POINCARÉ, Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle, Jour. de Math. pures et appl., 3,7,375-422, 1881; *ibid.* 3,8,251-296, 1882; *ibid.* 4,1,167-224,1885; *ibid.* 8,2,151-217,1886 (reproducidas en el Tomo I de sus "Oeuvres").
- (4) A.LIAPOUNOFF, Problème général de la stabilité du mouvement, Ann.Fac.Sci., Univ. Toulouse, 2,9,203-474,1907.
- (5) I.BENDIXSON, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math.,24,1-88,1901.
- (6) G.D.BIRKHOFF, Dynamical Systems, New York, 1927.
- (7) O.PERRON, Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, Math. Zeitsch.,15,121-146,1922; *ibid.* 16, 273-295,1923.
- (8) E.V.APPLETON y B. van der POL, Form of free triode oscillations, Phil. Mag., 42,201,1921.
- (9) B. van der POL, Oscillation hysteresis in a Triode Generator, Phil. Mag.,43,700,1922.
- (10) B. van der POL, Forced Oscillations in Circuit with Non-linear Resistance, Phil. Mag.,3,65,1927.
- (11) A.A.ANDRONOW y C.E.CHAIKIN, Theory of Oscillations, Princeton Univ. Press, 1949 (traducido del ruso por S. Lefschetz).

- (12) J.J.STOKER, Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, New York, 1950.
- (13) N.KRYLOFF y N.BOGOLIUBOFF, Introduction to Nonlinear Mechanics, Princeton, 1943 (traducido del ruso por S. Lefschetz).
- (14) S.LEFSCHETZ, Lectures on Differential Equations, Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies Nº 14, 1946.
- (15) M.L.CARTWRIGHT, Forced Oscillations in Nonlinear Systems, Contr. to the Theory of Nonlinear Oscillations, Annals of Math. Studies Nº 20, p. 149, 1950.
- (16) N.LEVINSON, Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the Second Order, Ann. of Math., 2, 45, 1944.
- (17) J.L.MASSERA, The Existence of Periodic Solutions of Systems of Differential Equations, Duke Math. Jour., 17, 457-475, 1950.
- (18) E.O.ROXIN, Puntos y zonas alcanzables en sistemas autónomos perturbados en forma arbitraria, Trabajo de Tesis, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires, Mayo 1958.
- (19) G.SANSONE y R.CONTI, Equazioni Differenziali non Lineari, Roma, 1956.
- (20) B.v.KEREKJARTO, Vorlesungen Uber Topologie, Springer 1923, pp. 59 y subsiguientes.
- (21) N.LEVINSON y O.K.SMITH, A General Equation for Relaxation Oscillations, Duke Math. Jour., 9, 382-403, 1942.
- (22) C.E.LANGENHOP y A.B.FARNELL, The Existence of Forced Periodic Solutions of Second Order Differential Equations near certain Equilibrium Points of the unforced Equation, Contr. to the Theory of Nonl. Oscillations, Annals of Math. Studies, Nº 20, p.291, 1950.
- (23) K.O.FRIEDRICHS, On Nonlinear Vibrations of Third Order, Studies in Nonlinear Vibration Theory, Inst. for Mathematics and Mechanics, New York Univ., 1946.

- (24) L.L.RAUCH, A third Order Autonomous System, Contr. to the Theory of Nonl. Oscillations, Annals of Math. Studies Nº 20, p. 39, 1950.
- (25) L.E.J.BROUWER, Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, 7, 97-115, 1912.
- (26) J.L.MASSERA, Contributions to Stability Theory, Annals of Math., 64, Nº 1, 1956.
- (27) E.A.CODDINGTON y N.LEVINSON, Theory of Ordinary Differential Equations, New York, 1955.


Vera W de Spies del

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales

Expte. n° 374/957-A.-

Buenos Aires, 3 de junio de 1958.


Presentada en la fecha.


DR. F.D. JUAN CARLOS S. RODRÍGUEZ
PROSECRETARIO


Buenos Aires, 3 de junio de 1958.

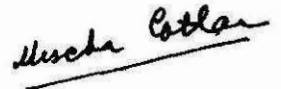
Por disposición del señor Decano pase a la Comisión Examinadora Grupo II, para que se sirva tener a bien considerar la tesis presentada por la ex-alumna de la carrera del Doctorado en Ciencias Físicomatemáticas, D.Vera Martha Winitzky.
mi.-

TESIS: 970


DR. LORENZO E. ARÍSTARAIN

Buenos Aires, Septiembre 1.º de 1958.-
En la fecha la Comisión Examinadora respectiva procedió a considerar la presente tesis, resolviendo aceptarla.-


Gregorio Klimberg


Suscha Celler

