УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1966, том 21, вып. 3, 235-237

П.П. ЗАБРЕЙКО, М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

К ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим уравнение

$$x = A(\lambda, x), \tag{1}$$

где λ и x являются элементами банаховых пространств Λ и $\mathbb{E}$, $A(\lambda, x)$ — оператор, действующий из $\Lambda \dotplus \mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$. Пусть $x_0 = A(\lambda_0, x_0)$. Будем интересоваться условиями существования неявной функции $x = x(\lambda)$, удовлетворяющей условию $x(\lambda_0) = x_0$. Ниже всегда предполагается, что *оператор $A(\lambda, x)$ при $\lambda = \lambda_0$ дифференцируем по Фреше в точке x_0 и оператор $I - A'_x(\lambda_0, x_0)$ непрерывно обратим.* Однако приводимые ниже утверждения относятся к тем случаям, когда классическая теорема о неявной функции (см. [1-4]) неприменима.

1. Теорема 1. *Пусть $A(\lambda, x)$ $(||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \le a,\ ||x - x_0||_\mathbb{E} \le b)$ вполне непрерывен по совокупности переменных как оператор из $\Lambda \dotplus \mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$. Тогда существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda < \delta$ множество $X(\lambda)$ решений уравнения* (1) *в шаре $||x - x_0||_\mathbb{E} < \varepsilon$ не пусто и*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \sup_{x \in X(\lambda)} \inf_{x_1 \in X(\lambda_1)} ||x - x_1||_\mathbb{E} = 0 \quad (||\lambda - \lambda_0||_\Lambda,\ ||\lambda_1 - \lambda_0||_\Lambda < \delta). \tag{2}$$

Эта теорема тривиальна, если $A(\lambda, x)$ равномерно непрерывен по λ относительно x из некоторого шара $||x - x_0||_\mathbb{E} \le \rho$ (здесь достаточно применить принцип Шаудера). В общем случае нужно применить теорию вполне непрерывных векторных полей [5-6].

Заметим, что теорема 1 теряет силу, если предположение о полной непрерывности оператора $A(\lambda, x)$ по совокупности переменных заменить условием полной непрерывности оператора $A(\lambda, x)$ при каждом фиксированном λ.

2. В приложениях оператор $A(\lambda, x)$ часто обладает "улучшающими" свойствами — он действует из пространства $\mathbb{E}$ в более узкое пространство $\mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}$. Для уравнений с "улучшающими" операторами однозначность неявной функции удается показать при меньших ограничениях, чем обычное предположение (см. [1-4]) о непрерывной дифференцируемости оператора $A(\lambda, x)$ по x в некоторой окрестности точки (λ_0, x_0).

Предположим, что $\mathbb{E}_1$ плотно в $\mathbb{E}$ и $||x||_\mathbb{E} \le k_1\, ||x||_{\mathbb{E}_1}$.

Теорема 2. *Пусть $A(\lambda, x)$ $(||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \le a,\ ||x - x_0||_\mathbb{E} \le b)$ непрерывен по совокупности переменных как оператор из $\Lambda \dotplus \mathbb{E}$ в $\mathbb{E}_1$. Пусть при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \le a,\ ||x - x_0||_\mathbb{E} \le b$ существует производная Гато $A'_x(\lambda, x)$, причем $A'_x(\lambda, x)$ непрерывен в точке (λ_0, x_0) как оператор, действующий из пространства $\Lambda \dotplus \mathbb{E}_1$ в пространство линейных операторов, действующих в $\mathbb{E}$. Тогда существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \le \delta$ уравнение* (1) *в шаре $||x - x_0||_\mathbb{E} \le \varepsilon$ имеет не более одного решения.*

Подчеркнем, что в условиях теоремы 2 оператор $A(\lambda, x)$ дифференцируем по x лишь на части плотного в $\mathbb{E}$ множества $\mathbb{E}_1$.

3. В этом пункте будем считать, что $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}_2$, $||x||_{\mathbb{E}_2} \leq k_2 ||x||_{\mathbb{E}}$, и единичный шар $||x||_{\mathbb{E}} \leq 1$ пространства $\mathbb{E}$ является замкнутым в пространстве $\mathbb{E}_2$ множеством.

Предположим, что оператор $A(\lambda, x)$ $(||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \leq a,\ ||x - x_0||_{\mathbb{E}} \leq b)$ непрерывен по x при каждом фиксированном λ и равномерно непрерывен по λ относительно x. Предположим далее, что оператор $[I - A'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}$ ограничен не только в пространстве $\mathbb{E}$, но и в пространстве $\mathbb{E}_2$.

Теорема 3. *Пусть $A(\lambda, x)$ при каждом λ вполне непрерывен как оператор из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}_2$. Тогда существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \leq \delta$ множество $X(\lambda)$ решений уравнения* (1) *в шаре $||x - x_0||_{\mathbb{E}} < \varepsilon$ не пусто и*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{x \in X(\lambda)} ||x - x_0||_{\mathbb{E}} = 0. \tag{3}$$

В условиях теоремы 3 выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \sup_{x \in X(\lambda)} \inf_{x_1 \in X(\lambda_1)} ||x - x_1||_{\mathbb{E}} = 0 \quad (||\lambda - \lambda_0||_\Lambda, ||\lambda_1 - \lambda_0||_\Lambda < \delta), \tag{4}$$

если дополнительно предположить, что $A(\lambda, x)$ непрерывен как оператор из $\Lambda \dot{+} \mathbb{E}_2$ в $\mathbb{F}$; здесь $\mathbb{F}$ — некоторое банахово пространство.

Теорема 4. *Пусть $A(\lambda, x)$ при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \leq a$, $||x - x_0||_{\mathbb{E}} \leq b$ дифференцируем по x (по Гато) как оператор в $\mathbb{E}_2$, причем $A'_x(\lambda, x)$ непрерывен в точке (λ_0, x_0) как оператор. действующий из пространства $\Lambda \dot{+} \mathbb{E}$ в пространство линейных операторов, действующих в $\mathbb{E}_2$. Тогда существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что при $||\lambda - \lambda_0||_\Lambda \leq \delta$ уравнение* (1) *в шаре $||x - x_0||_{\mathbb{E}} < \varepsilon$ имеет единственное решение $x = x(\lambda)$, непрерывно (по норме $\mathbb{E}_2$) зависящее от λ.*

4. Свойства неявных функций, определяемых уравнением (1) при выполнении условий теорем 1-4, устанавливаются обычным способом. Например, при выполнении условий теорем 1 и 4 неявная функция непрерывно дифференцируема (по норме $\mathbb{E}$), если $A'_\lambda(\lambda, x)$ и $A'_x(\lambda, x)$ непрерывны как операторы, действующие из пространства $\Lambda \dot{+} \mathbb{E}_1$ в соответствующие пространства линейных операторов.

5. Приведенные в настоящем сообщении теоремы возникли в связи с исследованием нелинейных интегральных уравнений вида

$$x(t) = \int_\Omega K(t, s, x(s); \lambda)\, ds. \tag{5}$$

Если оператор $A(\lambda, x)$, определенный правой частью этого уравнения, действует в пространстве L_p, то он, как правило, оказывается дифференцируемым лишь на некотором плотном в L_p множестве (даже если функция $K(t, s, u; \lambda)$ аналитическая по u!). Поэтому классическая теорема [1-4] для исследования уравнения (5), как правило, непосредственно неприменима. Приведенные же выше теоремы позволяют формулировать различные новые утверждения о продолжении решений уравнения (5).

Поступило в Правление Общества 22 декабря 1965 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] **Hildebrandt T.H., Graves L.M.**: *Implicit functions and their differentials in general analysis.* – Trans. Amer. Math. Soc., **29** (1927).

[2] **Люстерник Л.А., Соболев В.И.**: *Элементы функционального анализа.* – Гостехиздат, Москва, 1951.

[3] **Канторович Л.В., Акилов Г.П.**: *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – Гостехиздат, Москва, 1957.

[4] **Данфорд Дж., Шварц Дж.**: *Линейные операторы. Общая теория.* – ИЛ, Москва, 1962.

[5] **Лере Ж., Шаудер Ю.**: *Топология и функциональные уравнения.* – Успехи математических наук, **1** (1946), №3-4.

[6] **Красносельский М.А.**: *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – Гостехиздат, Москва, 1956.