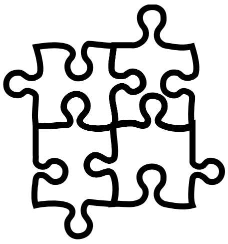
2005年3月号（总第六期）

数学建模

同济大学数学建模协会



卷首语

又是一个新的学期，我们建模协会又要扬帆启程了。对于新学期的建模竞赛，各位有没有蓄势待发呢？

在这期期刊刊首，向大家介绍了全国建模竞赛，在“知识苑”中，为大家叙述了小约翰—纳什的不凡经历，接着介绍了 21 世纪七大数学难题。在“建模入门”栏目里，我们将继续上次的课程，教大家“随机取样法”和“线性规划”，而在“趣味数学”中，有大家曾熟悉的灌水问题的推广。这期“实例长廊”又为大家介绍了一个实用的抵押贷款买房决策模型例子和一个用计算机求解华容道游戏，希望大家喜欢。

最后祝大家新学期有大进步。我们数学建模协会在大家的支持下与大家共同成长。

目录

2005 年 3 月号（总第六期）

封面题字-----------------------周家伦

指导老师-----------------------李少华 李静茹

本期编辑-----------------------余　瑜 齐亚超

本期选稿-----------------------柳妍超

资料收集-----------------------顾敏雁 陈妍虹

全国大学生数学建模竞赛简介

全国大学生数学建模竞赛每年 9 月下旬举行，竞赛面向全国大专院校的学生，不分专业。

1. 数学建模竞赛的特点：

题目是由工程技术、管理科学中的实际问题简化加工而成，“通过对实际问题的抽象、简化，确定变量和参数，并应用某些‘规律’建立起变量、参数间的确定的数学问题（也可称为一个数学模型），求解该数学问题，解释验证所得到的解，从而确定能否用于解决问题多次循环、不断深化的过程。”简而言之，就是建立数学模型来解决各种实际问题的过程。这项竞赛对数学知识要求不深，一般没有事先设定的标准答案，但留有充分余地供参赛者发挥其聪明才智和创造精神。

1985 年，美国率先举办了大学生数学建模竞赛。1992 年中国工业与应用数学学会开始组织全国大学生数学建模竞赛；1994 年起，这项竞赛由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同组织。全国统一竞赛题目，采取通讯竞赛方式，以相对集中的形式进行。大学生以队为单位参赛，每队 3 人，可以不分专业组队（但研究生不得参加）。在三天(72 小时)时间内分工合作，根据题目要求，完成一篇包括模型的假设、建立和求解、计算机方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文（即答卷）。

参加这次竞赛的同学说：“一谈起数学建模活动，我们想讲的是，只要你真正参加过数学建模活动，你便会受益无穷。这种活动带来的绝不仅仅是一两次的竞赛，最重要的是给人素质以一系列的极大提高和丰富。在参加培训和竞赛的切身体会中，我们的确感受到了它独特的魅力，它给予我们的东西实在太多太多……。其实，数学建模活动需要我们用博大的胸襟、严谨的态度、积极主动的身心去参与，它带来的益处除了我们前面感受颇深的几点外，还有计算机水平的提高、自信心增强、品质的塑造等。总而言之，‘一次参赛，终身受益’”。

2. 为什么这样的单项竞赛能够产生如此的吸引力呢？

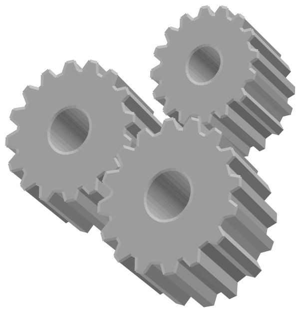
开展这项竞赛并开设相关的课程，对大学生全面素质的提高又有什么样的帮助？数学建模：不仅仅是一项竞赛。正如北京理工大学叶其孝教授所说，这种竞赛对参加者来说，是一种综合的训练，在相当程度上模拟了大学生毕业以后的工作环境。参赛者不要求预先掌握深入的专门知识，只需要学过普通高校的数学课程；更主要的是要靠参赛者自己动脑子，自己

查找文献资料，同队成员讨论研究，齐心协力完成答卷。因此，它对学生的能力培养是多方面的

叶教授将之归纳为：应用数学进行分析、推理、证明和计算的能力；“双向翻译”（即用数学语言表达实际问题，用普通人能理解的语言表达数学的结果）的能力；应用计算机及相应数学软件的能力；应变能力（即独立查找文献，消化和应用的能力）；组织、协调、管理特别是及时妥协的能力；交流表达的能力；写作的能力；创造性、想象力、联想力和洞察力。它还可以培养学生坚强的意志，培养自律、“慎独”的优秀品质，培养正确的数学观。

3、数学建模竞赛是什么样的一种竞赛？

不同于一般的数学竞赛，数学建模竞赛强调参赛者运用所学的数学只是去解决实际问题，重在培养分析问题和解决问题的能力以及团队合作精神。



4、参赛选手是如何进行比赛的？

首先要求每个参赛队三人中一定得有计算机运用知识的同学，因为要做一些计算和打印论文。当地一天拿到试题后，每个对分队进行讨论，确定作哪一道试题。无论作哪一道，首先都得查找相关资料。 确定用何种模型的时候，队员还要讨论，相互补充，有时还要互相妥协。模型建立起来之后还要计算，而且计算量很大，要编程或寻找使用相关软件。

本次知识苑为大家介绍小约翰-纳什

小约翰-纳什

小约翰-纳什是所有诺贝尔经济学奖得主中最不幸的，又是不幸中最万幸的人。

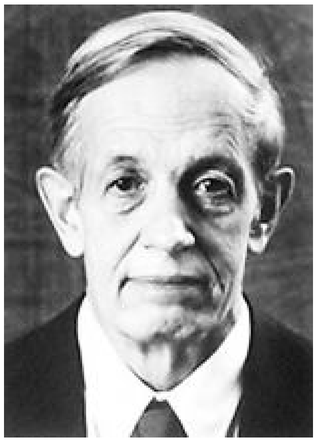
他在普林斯顿读博士时刚刚 20 岁出头，他的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他两篇相关文章确立了他博弈论大师的地位。到上世纪 50 年代末，他已是闻名世界的大牌科学家了。

然而，正当他的事业如日中天的时候，天妒英才，他得了严重的精神分裂症。多亏前妻艾莉西亚的爱心呵护和普林斯顿大学诸多朋友和同事无私的帮助才没有使他流落街头，并最终把他推上诺贝尔经济学奖宝座。

1950 年和 1951 年纳什的两篇关于非合作博弈论的重要论文，彻底改变了人们对竞争和市场的看法。他证明了非合作博弈及其均衡解，并证明了均衡解的存在性，即著名的纳什均衡。从而揭示了博弈均衡与经济均衡的内在联系。纳什的研究奠定了现代非合作博弈论的基石，后来的博弈论研究基本上都沿着这条主线展开的。然而，纳什天才的发现却遭到冯·诺依曼的断然否定，在此之前他还受到爱因斯坦的冷遇。但是骨子里挑战权威、藐视权威的本性，使纳什坚持了自己的观点，终成一代大师。要不是 30 多年的严重精神病折磨，恐怕他早已站在诺贝尔奖的领奖台上了，而且也绝不会与其他人分享这一殊荣。

纳什是一个非常天才的数学家，他的主要贡献是 1950 至 1951 年在普林斯顿读博士学位时做出的。然而，他的天才发现———非合作博弈的均衡，即“纳什均衡”并不是一帆风顺的。 1948 年纳什到普林斯顿大学读数学系的博士。那一年他还不到 20 岁。当时普林斯顿可谓人杰地灵，大师如云。爱因斯坦、冯·诺依曼、列夫谢茨(数学系主任)、阿尔伯特·塔克、阿伦佐·切奇、哈罗德·库恩、诺尔曼·斯蒂恩罗德、埃尔夫·福克斯……等全都在这里。博弈论主要是由冯·诺依曼(1903—1957)创所立的。他是一位出生于匈牙利的天才的数学家。他不仅创立了经济博弈论，而且发明了计算机。早在 20 世纪初，塞梅鲁(Zermelo)、鲍罗(Borel)和冯·诺伊曼已经开始研究博弈的准确的数学表达，直到 1939 年，冯·诺依曼遇到经济学家奥斯卡·摩根斯特恩(Oskar Morgenstern)，并与其合作才使博弈论进入经济学的广阔领域。

1944 年他与奥斯卡·摩根斯特恩合著的巨作《博弈论与经济行为》出版，标志着现代系统博弈理论的的初步形成。尽管对具有博弈性质的问题的研究可以追溯到 19 世纪甚至更早。例如，1838 年古诺(Cournot)简单双寡头垄断博弈；1883 年伯特兰和 1925 年艾奇沃奇思研究了两个寡头的产量与价格垄断；2000 多年前中国著名军事家孙武的后代孙膑利用博弈论方法帮助田忌赛马取胜等等都属于早期博弈论的萌芽，其特点是零星的，片断的研究，带有很大的偶然性，很不系统。冯·诺依曼和摩根斯特恩的《博弈论与经济行为》一书中提出的标准型、扩展型和合作型博弈模型解的概念和分析方法，奠定了这门学科的理论基础。合作型博弈在 20 世纪 50 年代达到了巅峰期。然而，诺依曼的博弈论的局限性也日益暴露出来，由于它过于抽象，使应用范围受到很大限制，在很长时间里，人们对博弈论的研究知之甚少，只是少数数学家的专利，所以，影响力很有限。正是在这个时候，非合作博弈———“纳什均衡”应运而生了，它标志着博弈论的新时代的开始！



纳什不是一个按部就班的学生，他经常旷课。据他的同学们回忆，他们根本想不起来曾经什么时候和纳什一起完完整整地上过一门必修课，但纳什争辩说，至少上过斯蒂恩罗德的代数拓扑学。斯蒂恩罗德恰恰是这门学科的创立者，可是，没上几次课，纳什就认定这门课不符合他的口味。于是，又走人了。然而，纳什毕竟是一位英才天纵的非凡人物，他广泛涉猎数学王国的每一个分支，如拓扑学、代数几何学、逻辑学、博弈论等等，深深地为之着迷。纳什经常显示出他与众不同的自信和自负，充满咄咄逼人的学术野心。1950 年整个夏天纳什都忙于应付紧张的考试，他的博弈论研究工作被迫中断，他感到这是莫大的浪费。殊不知这种暂时的“放弃”，使原来模糊、杂乱和无绪的若干念头，在潜意识的持续思考下，逐步形成一条清晰的脉络，突然来了灵感！这一年的 10 月，他骤感才思潮涌，梦笔生花。其中一个最耀眼的亮点就是日后被称之为“纳什均衡”的非合作博弈均衡的概念。

纳什的主要学术贡献体现在 1950 年和 1951 年的两篇论文之中(包括一篇博士论文)。1950 年他才把自己的研究成果写成题为“非合作博弈”的长篇博士论文，1950 年 11 月刊登在美国全国科学院每月公报上，立即引起轰动。说起来这全靠师兄戴维·盖尔之功，就在遭到冯·诺依曼贬低几天之后，他遇到盖尔，告诉他自己已经将冯·诺依曼的“最小最大原理”(minimax solution)推到非合作博弈领域，找到了普遍化的方法和均衡点。盖尔听得很认真，他终于意识到纳什的思路比冯·诺伊曼的合作博弈的理论更能反映现实的情况，而对其严密优美的数学证明极为赞叹。盖尔建议他马上整理出来发表，以免被别人捷足先登。纳什这个初出茅庐的小子，根本不知道竞争的险恶，从未想过要这么做。结果还是盖尔充当了他的“经纪人”，代为起草致科学院的短信，系主任列夫谢茨则亲自将文稿递交给科学院。纳什写的文章不多，就那么几篇，但已经足够了，因为都是精品中的精品。这一点也是值得我们深思的。国内提一个教授，要求在“核心的刊物”上发表多少篇文章。按照这个标准可能纳什还不一定够资格。

1996年诺贝尔经济学奖得主莫尔里斯当牛津大学艾奇沃思经济学讲座教授时也没有发表过什么文章，特殊的人才，必须有特殊的选拔办法。

纳什在上大学时就开始从事纯数学的博弈论研究，1948年进入普林斯顿大学后更是如鱼得水。20岁出头已成为闻名世界的数学家。特别是在经济博弈论领域，他做出了划时代的贡献，是继冯·诺依曼之后最伟大的博弈论大师之一。他提出的著名的纳什均衡的概念在非合作博弈理论中起着核心的作用。后续的研究者对博弈论的贡献，都是建立在这一概念之上的。由于纳什均衡的提出和不断完善为博弈论广泛应用于经济学、管理学、社会学、政治学、军事科学等领域奠定了坚实的理论基础。

２１世纪七大数学难题

最近美国麻州的克雷（Ｃｌａｙ）数学研究所于２０００年５月２４日在巴黎法兰西学院宣布了一件被媒体炒得火热的大事：对七个“千僖年数学难题”的每一个悬赏一百万美元。以下是这七个难题的简单介绍。

“千僖难题”之一：Ｐ（多项式算法）问题对ＮＰ（非多项式算法）问题

在一个周六的晚上，你参加了一个盛大的晚会。由于感到局促不安，你想知道这一大厅中是否有你已经认识的人。你的主人向你提议说，你一定认识那位正在甜点盘附近角落的女士罗丝。不费一秒钟，你就能向那里扫视，并且发现你的主人是正确的。然而，如果没有这样的暗示，你就必须环顾整个大厅，一个个地审视每一个人，看是否有你认识的人。生成问题的一个解通常比验证一个给定的解时间花费要多得多。这是这种一般现象的一个例子。与此类似的是，如果某人告诉你，数１３，７１７，４２１可以写成两个较小的数的乘积，你可能不知道是否应该相信他，但是如果他告诉你它可以因子分解为３６０７乘上３８０３，那么你就可以用一个袖珍计算器容易验证这是对的。不管我们编写程序是否灵巧，判定一个答案是可以很快利用内部知识来验证，还是没有这样的提示而需要花费大量时间来求解，被看作逻辑和计算机科学中最突出的问题之一。它是斯蒂文·考克（ＳｔｅｐｈｅｎＣｏｏｋ）于１９７１年陈述的。

“千僖难题”之二： 霍奇(Hodge)猜想

二十世纪的数学家们发现了研究复杂对象的形状的强有力的办法。基本想法是问在怎样的程度上，我们可以把给定对象的形状通过把维数不断增加的简单几何营造块粘合在一起来形成。这种技巧是变得如此有用，使得它可以用许多不同的方式来推广；最终导至一些强有力的工具，使数学家在对他们研究中所遇到的形形色色的对象进行分类时取得巨大的进展。不幸的是，在这一推广中，程序的几何出发点变得模糊起来。在某种意义下，必须加上某些没有任何几何解释的部件。霍奇猜想断言，对于所谓射影代数簇这种特别完美的空间类型来说，称作霍奇闭链的部件实际上是称作代数闭链的几何部件的(有理线性)组合。

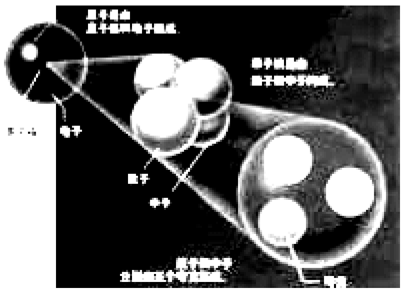
“千僖难题”之三： 庞加莱(Poincare)猜想

如果我们伸缩围绕一个苹果表面的橡皮带，那么我们可以既不扯断它，也不让它离开表面，使它慢慢移动收缩为一个点。另一方面，如果我们想象同样的橡皮带以适当的方向被伸缩在一个轮胎面上，那么不扯断橡皮带或者轮胎面，是没有办法把它收缩到一点的。我们说，苹果表面是“单连通的”，而轮胎面不是。大约在一百年以前，庞加莱已经知道，二维球面本质上可由单连通性来刻画，他提出三维球面(四维空间中与原点有单位距离的点的全体)的对应问题。这个问题立即变得无比困难，从那时起，数学家们就在为此奋斗。

“千僖难题”之四： 黎曼(Riemann)假设

有些数具有不能表示为两个更小的数的乘积的特殊性质，例如，2,3,5,7,等等。这样的数称为素数；它们在纯数学及其应用中都起着重要作用。在所有自然数中，这种素数的分布并不遵循任何有规则的模式；然而，德国数学家黎曼(1826~1866)观察到，素数的频率紧密相关于一个精心构造的所谓黎曼蔡塔函数z(s$的性态。著名的黎曼假设断言，方程z(s)=0的所有有意义的解都在一条直线上。这点已经对于开始的1,500,000,000个解验证过。证明它对于每一个有意义的解都成立将为围绕素数分布的许多奥秘带来光明。

“千僖难题”之五： 杨－米尔斯(Yang-Mills)存在性和质量缺口



量子物理的定律是以经典力学的牛顿定律对宏观世界的方式对基本粒子世界成立的。大约半个世纪以前，杨振宁和米尔斯发现，量子物理揭示了在基本粒子物理与几何对象的数学之间的令人注目的关系。基于杨－米尔斯方程的预言已经在如下的全世界范围内的实验室中所履行的高能实验中得到证实：布罗克哈文、斯坦福、欧洲粒子物理研究所和筑波。尽管如此，他们的既描述重粒子、又在数学上严格的方程没有已知的解。特别是，被大多数物理学家所确认、并且在他们的对于“夸克”的不可见性的解释中应用的“质量缺口”假设，从来没有得到一个数学上令人满意的证实。在这一问题上的进展需要在物理上和数学上两方面引进根本上的新观念。

“千僖难题”之六： 纳维叶－斯托克斯(Navier-Stokes)方程的存在性与光滑性

起伏的波浪跟随着我们的正在湖中蜿蜒穿梭的小船，湍急的气流跟随着我们的现代喷气式飞机的飞行。数学家和物理学家深信，无论是微风还是湍流，都可以通过理解纳维叶－斯托克斯方程的解，来对它们进行解释和预言。虽然这些方程是19世纪写下的，我们对它们的理解仍然极少。挑战在于对数学理论作出实质性的进展，使我们能解开隐藏在纳维叶－斯托克斯方程中的奥秘。

“千僖难题”之七： 贝赫(Birch)和斯维讷通－戴尔(Swinnerton-Dyer)猜想

数学家总是被诸如x^2+y^2=z^2那样的代数方程的所有整数解的刻画问题着迷。欧几里德曾经对这一方程给出完全的解答，但是对于更为复杂的方程，这就变得极为困难。事实上，正如马蒂雅谢维奇(Yu.V.Matiyasevich)指出，希尔伯特第十问题是不可解的，即，不存在一般的方法来确定这样的方法是否有一个整数解。当解是一个阿贝尔簇的点时，贝赫和斯维讷通－戴尔猜想认为，有理点的群的大小与一个有关的蔡塔函数z(s)在点s=1附近的性态。特别是，这个有趣的猜想认为，如果z(1)等于0,那么存在无限多个有理点(解)，相反，如果z(1)不等于0,那么只存在有限多个这样的点。

本期将承接上期为你介绍蒙特卡洛法（随机取样法）和非线性规划

第四节 蒙特卡洛法（随机取样法）

前面介绍的常用的整数规划求解方法，主要是针对线性整数规划而言，而对于非线性整数规划目前尚未有一种成熟而有效的求解方法，因为非线性规划本身的通用有效解法尚未找到，更何况是非线性整数规划。

然而，尽管整数规划由于限制变量为整数而增加了难度；然而又由于整数解是有限个，于是为枚举法提供了方便。当然，当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定的计算量的情况下，完全可以得出一个满意解。

例7　已知非线性整数规划为：

$$Max z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le x_i \le 99 \quad i = 1, \cdots, 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200 \end{cases}$$

对该题，目前尚无有效方法求出准确解。如果用显枚举法试探，共需计算 $100^5 = 10^{10}$ 个点，其计算量非常之大。然而应用蒙特卡洛去随机计算 10^6 个点，便可找到满意解，那么这种方法的可信度究竟怎样呢？

下面就分析随机取样采集 10^6 个点计算时，应用概率理论来估计一下可信度。

不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01，0.00001，则当计算10^6个点后，有任一个点能落在高值区的概率分别为

$$1-0.99^{1000000} \approx 0.99\cdots99(100\text{多位}),$$

$$1-0.99999^{1000000} \simeq 0.999954602\text{。}$$

解　（ i ）首先编写 M 文件 mente.m 定义目标函数 f 和约束向量函数 g，程序如下：

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)...
   -x(4)-2*x(5);
g(1)=sum(x)-400;
g(2)=x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800;
g(3)=2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200;
g(4)=x(3)+x(4)+5*x(5)-200;
```

（ ii ）编写如下程序求问题的解：

```
rand('state',sum(clock));
p0=0;
tic
for i=1:10^5
   x=99*rand(5,1);
x1=floor(x);x2=ceil(x);
[f,g]=mengte(x1);
```

```
if sum(g<=0)==4
   if p0<=f
      x0=x1;p0=f;
   end
end
[f,g]=mengte(x2);
if sum(g<=0)==4
   if p0<=f
      x0=x2;p0=f;
   end
end
end
x0,p0
toc
```

§5　整数规划的计算机解法

整数规划问题的求解可以使用 Lingo 等专用软件。对于一般的整数规划规划问题，无法直接利用 Matlab 的函数，必须利用 Matlab 编程实现分枝定界解法和割平面解法。但对于指派问题等特殊的 $0-1$ 整数规划问题或约束矩阵 A 是幺模矩阵时，有时可以直接利用 Matlab 的函数 linprog。

例 8　求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

解：编写 Matlab 程序如下：

```
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5
  8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:);
a=zeros(10,25);
for i=1:5
  a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
  a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1);
[x,y]=linprog(c,[],[],a,b,zeros(25,1),ones(25,1))
```

求得最优指派方案为 $x_{15}=x_{23}=x_{32}=x_{44}=x_{51}=1$，最优值为 21。

第三章　非线性规划

第一节　非线性规划

1.1　非线性规划的实例与定义

如果目标函数或约束条件中包含非线性函数，就称这种规划问题为非线性规划问题。一般说来，解非线性规划要比解线性规划问题困难得多。而且，也不象线性规划有单纯形法这一通用方法，非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法，各个方法都有自己特定的适用范围。

下面通过实例归纳出非线性规划数学模型的一般形式，介绍有关非线性规划的基本概念。

例 1　（投资决策问题）某企业有 n 个项目可供选择投资，并且至少要对其中一个项目

投资。已知该企业拥有总资金A元，投资于第$i(i=1,\Lambda,n)$个项目需花资金a_i元，并预计可收益b_i元。试选择最佳投资方案。

解　设投资决策变量为

$$\begin{cases}1, & \text{决定投资第}i\text{个项目}\\ 0, & \text{决定不投资第}i\text{个项目}\end{cases} i=1,\Lambda,n,,$$

则投资总额为$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$，投资总收益为$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$。因为该公司至少要对一个项目投资，并且总的投资金额不能超过总资金A，故有限制条件

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$$

另外，由于$x_i(i=1,\Lambda,n)$只取值 0 或 1，所以还有

$$x_i(1-x_i)=0, i=1,\Lambda,n$$

最佳投资方案应是投资额最小而总收益最大的方案，所以这个最佳投资决策问题归结为总资金以及决策变量（取 0 或 1）的限制条件下，极大化总收益和总投资之比。因此，其数学模型为：

$$\max Q=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}$$

s. t.　$0 < \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$

$$x_i(1-x_i)=0, i=1,\Lambda,n$$

上面例题是在一组等式或不等式的约束下，求一个函数的最大值（或最小值）问题，其中目标函数或约束条件中至少有一个非线性函数，这类问题称之为非线性规划问题，简记为（NP）。可概括为一般形式

$$\min f(x)$$

$$s.t.\quad h_j(x)\le 0,\ j=1,\Lambda,q \qquad \text{(NP)}$$

$$g_i(x)=0, i=1,\Lambda,p$$

其中 $x=\left[x_1\Lambda x_n\right]^T$ 称为模型（NP）的决策变量，f 称为目标函数，$g_i(i=1,\Lambda,p)$ 和 $h_i(i=1,\Lambda,q)$ 称为约束函数。另外，$g_i(x)=0\quad(i=1,\Lambda,p)$ 称为等式约束，$h_j(x)\le 0\quad(j=1,\Lambda,q)$ 称为不等式约束。

对于一个实际问题，在把它归结成非线性规划问题时，一般要注意如下几点：

（ i ）确定供选方案：首先要收集同问题有关的资料和数据，在全面熟悉问题的基础上，确认什么是问题的可供选择的方案，并用一组变量来表示它们。

（ ii ）提出追求目标：经过资料分析，根据实际需要和可能，提出要追求极小化或极大化的目标。并且，运用各种科学和技术原理，把它表示成数学关系式。

（ iii ）给出价值标准：在提出要追求的目标之后，要确立所考虑目标的“好”或“坏”的价值标准，并用某种数量形式来描述它。

（ iv ）寻求限制条件：由于所追求的目标一般都要在一定的条件下取得极小化或极大化效果，因此还需要寻找出问题的所有限制条件，这些条件通常用变量之间的一些不等式或等式来表示。

1.2　线性规划与非线性规划的区别

如果线性规划的最优解存在，其最优解只能在其可行域的边界上达到（特别是可行域的

顶点上达到)；而非线性规划的最优解（如果最优解存在）则可能在其可行域的任意一点达到。

1.3　非线性规划的 Matlab 解法

Matlab 中非线性规划的数学模型写成以下形式

$$\min f(x)\begin{cases} Ax \le B \\ Aeq\cdot x = Beq \\ C(x) \le 0 \\ Ceq(x) = 0 \end{cases},$$

其中 $f(x)$ 是标量函数，A, B, Aeq, Beq 是相应维数的矩阵和向量，$C(x), Ceq(x)$ 是非线性向量函数。

Matlab 中的命令是

X=FMINCON(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON,OPTIONS)

它的返回值是向量 x，其中 FUN 是用 M 文件定义的函数 $f(x)$；X0 是 x 的初始值；A, B, Aeq, Beq 定义了线性约束 $A*X \le B, Aeq*X = Beq$，如果没有等式约束，则 $A=[\ ], B=[\ ], Aeq=[\ ], Beq=[\ ]$；LB 和 UB 是变量 x 的下界和上界，如果上界和下界没有约束，则 LB=[]，UB=[]，如果 无下界，则 LB=-inf，如果 x 无上界，则 UB=inf；NONLCON 是用 M 文件定义的非线性向量函数 $C(x), Ceq(x)$；OPTIONS 定义了优化参数，可以使用 Matlab 缺省的参数设置。

例 2　求下列非线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 8 \\ x_1^2 - x_2 \ge 0 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

（ i ）编写 M 文件 fun1.m

```
function f=fun1(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+8;
```

和 M 文件 fun2.m

```
function [g,h]=fun2(x);
g=-x(1)^2+x(2);
h=-x(1)-x(2)^2+2; %等式约束
```

（ ii ）在 Matlab 的命令窗口依次输入

```
options=optimset;
[x,y]=fmincon('fun1',rand(2,1),[],[],[],[],zeros(2,1),[], ...
'fun2', options)
```

就可以求得当 $x_1=1, x_2=1$ 时，最小值 $y=10$ 。

1.4　求解非线性规划的基本迭代格式

记（NP）的可行域为 K 。

若 $x' \in K$ ，并且 $f(x') \le f(x), \forall x \in K$

则称 x' 是（NP）的整体最优解， $f(x')$ 是(NP)的整体最优值。如果有

$$f(x') < f(x), \forall x \in K, x \ne x'$$

则称 x' 是（NP）的严格整体最优解， $f(x')$ 是(NP)的严格整体最优值。

若 $x' \in K$，并且存在 x' 的邻域 $N_\delta(x')$，使

$$f(x') \le f(x), \forall x \in N_\delta(x') \cap K,$$

则称 x' 是（NP）的局部最优解，$f(x')$ 是(NP)的局部最优值。如果有

$$f(x') < f(x), \forall x \in N_\delta(x') \cap K$$

则称 x' 是（NP）的严格局部最优解，$f(x')$ 是(NP)的严格局部最优值。

由于线性规划的目标函数为线性函数，可行域为凸集，因而求出的最优解就是整个可行域上的全局最优解。非线性规划却不然，有时求出的某个解虽是一部分可行域上的极值点，但并不一定是整个可行域上的全局最优解。

对于非线性规划模型(NP)，可以采用迭代方法求它的最优解。迭代方法的基本思想是：从一个选定的初始点 $x^\circ \in R^n$ 出发，按照某一特定的迭代规则产生一个点列 $\left\{x^k\right\}$，使得当 $\left\{x^k\right\}$ 是有穷点列时，其最后一个点是(NP)的最优解；当 $\left\{x^k\right\}$ 是无穷点列时，它有极限点，并且其极限点是(NP)的最优解。

设 $x^k \in R^n$ 是某迭代方法的第 k 轮迭代点，$x^{k+1} \in R^n$ 是第 $k+1$ 轮迭代点，记

$$x^{k+1} = x^k + t_k p^k \tag{1}$$

这里 $t_k \in R^1, p^k \in R^n, \left\|p^k\right\| = 1$，显然 p^k 是由点 x^k 与点 x^{k+1} 确定的方向。式（1）就是求解非线性规划模型(NP)的基本迭代格式。

通常，我们把基本迭代格式（1）中的 p^k 称为第 k 轮搜索方向，t_k 为沿 p^k 方向的步长，使用迭代方法求解(NP)的关键在于，如何构造每一轮的搜索方向和确定适当的步长。

设 $\bar{x} \in R^n, p \ne 0$，若存在 $\delta > 0$，使

$$f(\overline{x}+tp)< f(\overline{x}),\forall t\in(0,\delta),$$

称向量 p 是 f 在点 $\overline{x}$ 处的下降方向。

设 $\overline{x}\in R^n, p\neq 0$，若存在 $t>0$，使 $\overline{x}+tp\in K$，

称向量 p 是点 $\overline{x}$ 处关于 K 的可行方向。

一个向量 p，若既是函数 f 在点 $\overline{x}$ 处的下降方向，又是该点关于区域 K 的可行方向，则称之为函数 f 在点 $\overline{x}$ 处关于 K 的可行下降方向。

现在，我们给出用基本迭代格式（1）求解(NP)的一般步骤如下：

0° 选取初始点 x^0，令 $k:=0$。

1° 构造搜索方向，依照一定规则，构造 f 在点 x^k 处关于 K 的可行下降方向作为搜索方向 p^k。

2° 寻求搜索步长。以 x^k 为起点沿搜索方向 p^k 寻求适当的步长 t_k，使目标函数值有某种意义的下降。

3° 求出下一个迭代点。按迭代格式（1）求出 $x^{k+1}=x^k+t_k p^k$。

若 x^{k+1} 已满足某种终止条件，停止迭代。

4° 以 x^{k+1} 代替 x^k，回到 1° 步。

1.5 凸函数、凸规划

设 $f(x)$ 为定义在 n 维欧氏空间 $E^{(n)}$ 中某个凸集 R 上的函数，若对任何实数

$\alpha(0<\alpha<1)$ 以及 R 中的任意两点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$，恒有

$$f(\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)})\le \alpha f(x^{(1)})+(1-\alpha)f(x^{(2)})$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的凸函数。

若对每一个 $\alpha(0<\alpha<1)$ 和 $x^{(1)}\ne x^{(2)}\in R$ 恒有

$$f(\alpha x^{(1)}+(1-\alpha)x^{(2)})<\alpha f(x^{(1)})+(1-\alpha)f(x^{(2)})$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的严格凸函数。

考虑非线性规划

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in R} f(x) \\ R=\left\{x \mid g_j(x)\le 0,\ j=1,2,\Lambda,l\right\} \end{cases}$$

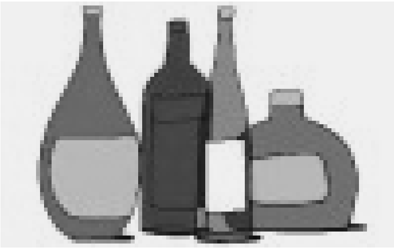
假定其中 $f(x)$ 为凸函数，$g_j(x)(j=1,2,\Lambda,l)$ 为凸函数，这样的非线性规划称为凸规划。

可以证明，凸规划的可行域为凸集，其局部最优解即为全局最优解，而且其最优解的集合形成一个凸集。当凸规划的目标函数 $f(x)$ 为严格凸函数时，其最优解必定唯一（假定最优解存在）。由此可见，凸规划是一类比较简单而又具有重要理论意义的非线性规划。

在下一期中，将为大家讲述下一节：第二节　无约束问题

经典智力题推广——灌水问题

倒水问题的经典形式是这样的：



"假设有一个池塘，里面有无穷多的水。现有 2 个空水壶，容积分别为 5 升和 6 升。问题是如何只用这 2 个水壶从池塘里取得 3 升的水。"

当然题外是有一些合理的限制的，比如从池塘里灌水的时候，不管壶里是不是已经有水了，壶一定要灌满，不能和另一个壶里的水位比照一下"毛估估"（我们可以假设壶是不透明的，而且形状也不同）；同样的，如果要把水从壶里倒进池塘里，一定要都倒光；如果要把水从一个壶里倒进另一个壶里，也要都倒光，除非在倒的过程中另一个壶已经满了；倒水的时候水没有损失（蒸发溢出什么的）等等等等。

事实上，要解决上面这题，你只要用两个壶中的其中一个从池塘里灌水，不断地倒到另一个壶里，当第二个壶满了的时候，把其中的水倒回池塘里，反复几次，就得到答案了。以 5 升壶(A)灌 6 升壶(B)为例：

A	B	
0	0	
5	0	A→B
0	5	
5	5	A→B
4	6	
4	0	A→B
0	4	
5	4	A→B

3 6

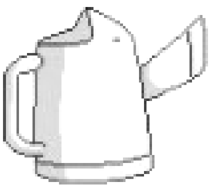
一般地我们有"灌水定理"：

"如果有 n 个壶容积分别为 A1，A2，......，An（Ai 均为大于 0 的整数）设 w 为另一大于 0 的整数。则用此 n 个壶可倒出 w 升水的充要条件为：

1) w 小于等于 A1+A2+......+An；

2) w 可被(A1,A2,......,An)（这 n 个数的最大公约数）整除。"

这两个条件都显然是必要条件，如果 1)不被满足的话，你连放这么多水的地方都没有。



2)的道理和上面两个壶的情况完全一样，因为在任何步骤中，任何壶中永远只有(A1,A2,......,An)的倍数的水。

现在我们来看一下充分性。在中学里我们学过，如果两个整数 a 和 b 互素的话，那么存在两个整数 u 和 v，使得 ua+vb=1。证明的方法很简单：在对 a 和 b 做欧几里德辗转相除时，所有中间的结果，包括最后得到的结果显然都有 ua+vb 的形式(比如第一步，假设 a 小于 b，记 a 除 b 的结果为 s，余数为 t，即 b=sa+t，则 t=(-s)a+b，即 u=-s，v=1）。而两个数互素意味着欧几里德辗转相除法的最后一步的结果是 1，所以 1 也可以记作 ua+vb 的形式。稍微推广一点，如果(a,b)=c，那么存在 u 和 v 使得 ua+vb=c（两边都除以 c 就回到原来的命题）。

再推广一点，如果 A1，A2，......，An 是 n 个整数，(A1,A2,......,An)=s，那么存在整数 U1，U2，......，Un，使得

U1A1 + U2A2 + ... + UnAn = s.　　　(*)

在代数学上称此结果为"整数环是主理想环"。这也不难证，只要看到

(A1,A2,A3,A4,......,An) = ((((A1,A2),A3),A4),......,An).

也就是说，可以反复应用上一段中的公式：比如三个数 a，b，c，它们的最大公约数是 d。假设(a,b)=e，那么(e,c)=((a,b),c)=d。现在有 u1，u2 使得 u1a+u2b=e，又有 v1，v2 使得 v1e+v2c=d，那么

$$(v1u1)a+(v1u2)b+(v2)c=d.$$

好，让我们回头看"灌水定理"。w 是(A1,A2,......,An)的倍数，根据上节的公式(*)，两边乘以这个倍数，我们就有整数 V1，V2，......，Vn 使得 V1A1 + V2A2 + ... + VnAn = w.注意到 Vi 是有正有负的。

这就说明，只要分别把 A1，A2，......，An 壶，灌上 V1，V2，......，Vn 次（如果 Vi 是负的话，"灌上 Vi 次"要理解成"倒空-Vi 次"），就可以得到 w 升水了。具体操作上，先求出各 Vi，然后先往 Vi 是正数的壶里灌水，灌 1 次就把 Vi 减 1。再把这些水到进 Vi 是负数的壶里，等某个壶灌满了，就把它倒空，然后给这个负的 Vi 加 1，壶之间倒来倒去不变更各 Vi 的值。要注意的是要从池塘里灌水，一定要用空壶灌，要倒进池塘里的水，一定要是整壶的。这样一直到所有 Vi 都是 0 为止。

会不会发生卡住了，既不能灌水又不能倒掉的情况？不会的。如果有 Vi 仍旧是负数，而 Ai 壶却没满：那么如果有其它 Vi 是正的壶里有水的话，就都倒给它；如果有其它 Vi 是正的壶里没水，那么就拿那个壶打水来灌（别忘了给打水的壶的 Vi 减 1）；如果根本没有任何 Vi 是正的壶了——这是不可能的，这意味着 w 是负的。有 Vi 仍旧是正数，而 Ai 壶却没满的情况和这类似，你会发现你要用到定理中的条件 1)。

这样"灌水定理"彻底得证。当然，实际解题当中如果壶的数目和容积都比较大的话，手工来找(*)中的各 Ui 比较困难，不过可以写个程序，连倒水的步骤都算出来。最后要指出的一点是，(*)中的 Ui 不是唯一的，所以倒水的方式也不是唯一的。

抵押贷款买房决策模型

摘要:　　工薪阶层的人士可通过低押贷款的方式使买房这个天方夜谭式的梦想变成现实。在市场经济的信息时代,面对不同的经营决策方案,正确的决策意味着经济资源的最优配置。

关键词:贷款额　利率　贷款期限　还款额　复利　输入输出模型　离散变量　连续化

1.　问题的分析及简化:

问题1: 张先生自备款70000￥,其余进行贷款抵押,有如四种方案可供选择:

方案1.1: 贷款期限: 5年　单位时间(月)还款额: 1200￥

单位时间(月)利率: 0.01　贷款额: ?

方案1.2: 贷款期限: 0　一次性还款:130000

方案1.3: 贷款期限: 25年　(月)还款额: ? (< = > 900$)

单位时间(月)利率: 0.01　贷款额: 60000￥

方案1.4: 贷款期限:22年　(半月)还款额:316$(附:预付三个月)

单位时间(月)利率: ?　贷款额: 60000￥

问题2: 将欠款额A(t)关于时间t的输入输出模型连续化,即时间离散变量连续化。

问题3: 单位时间利率R 与月利率r=0.01如何转化?

2.模型假设:

银行及借贷公司在贷款期限内利率不变;

不考虑物价变化及货币贬值等经济波动的影响;

利率转化函数合理性及实用性已经实践检验;

银行利息按复利计算且单位时间可任意缩短至时间变量连续性变化;

3.模型建立及求解:

3.1:确定变量: 银行贷款额:A0　银行欠款额: A (t)

(单位时间)银行利率:R　(单位时间)付款额: a

3.2:问题3的分析:为了简化模型结构,特作如下约定(定义):

定义3.2.1: 单位时间利率关于时间成线性(反比)关系;

定义3.2.1: 单位时间还款额关于时间成线性(反比)关系;

3.3: 问题2的分析:经推导验证,贷款的输入输出模型可用定理3.3.1的公式:

TH 3.3.1: A(t)=A0(1+R)^t-a[(1+R)^t-1]/R;*（用数学归纳法证明）

证明：分析银行贷款规则可知：变量之间应满足递推关系式如下：

A(t)=A(t-1)(1+R)-a ………………(1)

显然 A(0)=A0, A(1)=A0(1+R)-a 成立；

假设当t=k A(k)=A0(1+R)^k-a[(1+R)^k-1]/R 成立；

则当t=k+1,即第(k+1)个单位时间后银行欠款额，由递推关系式(1)：

A(k+1)=A(k)(1+R)-a

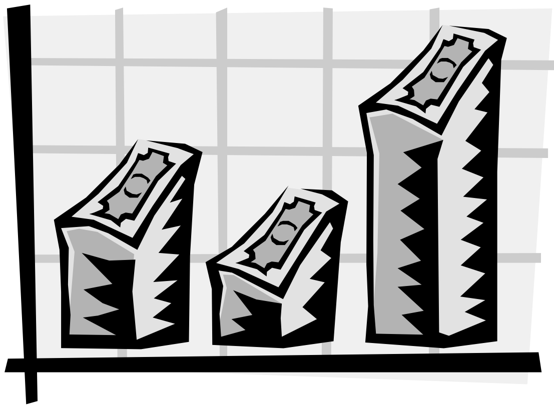
={A0(1+R)-a[(1+R)^k-1]/R}(1+R)-a

=A0(1+R)^(k+1)-a[(1+R)^(k+1)-(1+R)]-a

=A0(1+R)^(k+1)-a[(1+R)^(k+1)-1]/R

A(k+1)符合假设所给形式，即证。

3.4 问题1的分析：贷款方案的决策：



方案1.1：由定理3.3.1, A0(1+R)^t =A(t)+a[(1+R)^t-1]/R

A(12*5)=A(60)=0; =>

A0=a[1-(1+R)^(-t)]/R;

将R=r=0.01,a=1200;

A0=120000(1-(1+0.01)^(-60)=53946.04609￥

即如果一次付款应付A=70000+A0=123946.04609$

方案1.2：t=0,A=130000￥. 显然 130000>123946.04609,方案1.1优于方案1.2,面对这两种选择,张先生应考虑方案1.1。

方案 1.3：t=25*12=300 月利率 r=0.01 A0=60000$

则 A(300)=A0(1+r)^300-a[(1+r)^300-1]/r=0

即： a=[A0(1+r)^300*r]/[(1+r)^300-1]=631.9344854$<900J$

故张先生可以考虑贷款买房。

方案 1.4：t=22*12*2=528 A(0)=60000-316*38*2 （预付三个月）

A(1)=a(0)(1+R) A(2)=A(1)*(1+R)

………………… A(6)=A(1)(1+R)^6

A(7)=A(6)(1+R)-a ………………………

A(n)=A(6)(1+R)^(n-6)-a[(1+R)^(n-6)-1]/R

=>Solve[A(528)=A(6)(1+R)^522-a[(1+R)^522-1]/R=0,R]

比较方案1.3和方案1.4:

1) 方案1.3贷款期25年明显长于方案1.4贷款期22年

2) 张先生实际所付金额:方案1.3:A=70000+631.9344854*300=2595803456

方案1.4:A=70000+316*2*22*12=236848.0000

显然方案1.3比方案1.4实付款多,贷款期长,故张先生应考虑去借贷公司贷款.

3.5 问题2的求解:

3.5.1 银行欠款离散模型:

欠款额关于离散变量(时间)的贷款模型,可根据假设及3.2的分析,将一个月分为m个相等的时间区域则每个时间区域中还款x=a/m ,每个区间的利率为R=r/m,贷款期限为t个月，假设存在t*，使A（t*）=0;

由Th3.3.1. A(t)=0;

A(mt)=A0(1+r/m)^（mt）-(a/m)[(1+r/m)^（mt）-1]/(r/m)

=A0(1+r/m)^(mt)-(a/r)[(1+r/m)^(mt)-1]

则A(mt*)=0 =>mt*=log[(1+r/m),a/(a-A0r)]. ………………(2)

3.5.2 银行欠款连续模型:

在银行欠款离散模型中,再让m -> +∞, 即得连续银行欠全款模型:

lim(A(mt)=A0lim[(1+r/m)^(mt)]-a{lim[(1+r/m)^(mt)]-1}/r

=A0e^(1/t)-a[e^(1/t)-1]/r

A(mt*)=0 => t*=[ln[a/(a-A0r)]^(-1)

3.5.3 t* 的存在性讨论:

若存在t* ,则需满足: 1) t*>0

2) a/(a-Ar)>0

显然 t*=ln[a/(a-A0r)]^(-1) >0 满足条件1)

a/(a-A0r)>0 即 a-A0r>0. a>A0r时 满足条件2)

结论: 当a/m-rA0/m>0, 即x>RA0时,存在 t*,使A(t*)=0

3.5.4 银行离散模型的应4 银行离散模型的应用:

----

1)　　单位时间(十天):　m=3, 代入（2）式，mt*=896.4368217

2)　　单位时间(一天):　m=30.代入（2）式, mt*=8950.960916

提前天数:

△1(t)={300-[896.4368217/3]}*30=35（天）

△2(t)={300-[8950.96016/3]}*30=49(天)

4　结果分析:

4.1　银行离散模型根的存在性证明:

T4.1.1 :　A(t)关于时间t的函数A(t)=A0(1+R)^t-a[(1+R)^t-1]/R

存在 t* ，使A(t*)=0

证明:　显然初等函数A(t)关于时间变量t连续,

故　A(t)在[0,∞]　上连续

由　A(0)>0 已知，　需证时间 t0 存在,　使A(t0)<0;

由根的存在性定理可知t*存在,St A(t*)=0　　(m 为有限常数)

A(mt*)=(A0-a/r)[(1+r/m)^(mt*)]+a/r<0;

若x-a/r>0,　　(1+r/m)^(mt*)>a/(A0r-a);

若x-a/r<0,　　(1+r/m)^(mt*)<a/(A0r-a);

若x-a/r=0,　　x=Aor,　无解.

4.2　银行连续,模型的存在性3.5.3已讨论.

5　模型的评价:

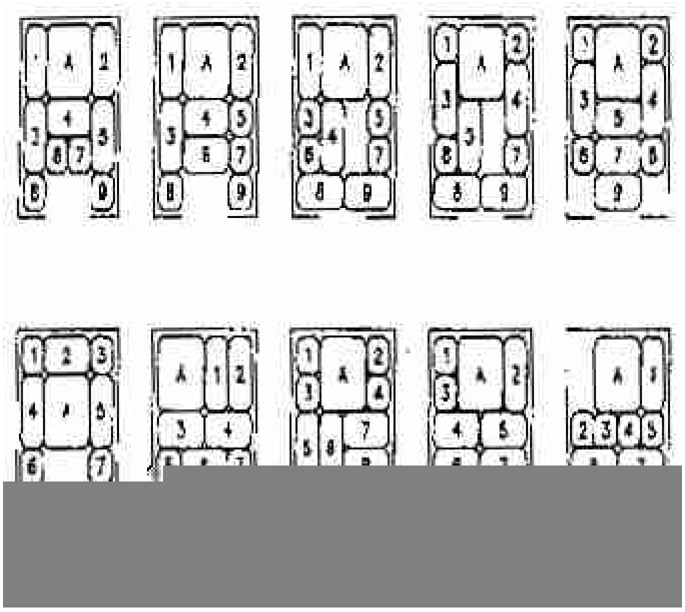
6　模型的检验:

在模型结构的简化中,使利率及还款额与时间成线性变化的理想状态与银行利率受物价水平和经济指数等多方面影响的现实之间存在误差,但作为决策分析,其误差在允许范围之内;在提高经济资源的最优化配置上可供参考.

闯过华容道

华容道游戏很难用数字方法求解。作者所编计算机程序 HRDE 可以对任何布局解出答案。用它发现了文献上有不少答案实际上并非最少步法。

关于华容道游戏



"华容道"是世界著名的智力游戏。在国外和魔方、独粒钻石并列，被誉为"智力游戏界三大不可思议"并被编入学校的教科书。日本藤村幸三朗曾在《数理科学》杂志上发表华容道基本布局的最少步法为 85 步。后来清水达雄找出更少的步法为 83 步。美国著名数学家马丁·加德纳又进一步把它减少为 81 步。此后，至今还未曾见到打破这一记录的报道。1985～1986 年在中国曾有《中国少年报》五种刊物先后举办过三次华容道游戏的有奖比赛，共列出"横刀立马"等八种布局（见图 1），征求最少步法的答案。在竞赛前有人曾预言可能会创造出新的世界记录。虽然在 1985 年 9 月 18 日的《北京晚报》上有报道说在比赛中已有人打破了马丁·加德纳的 81 步记录。但并未见到进一步的详细报道，可能实际上并不是同一种布局。

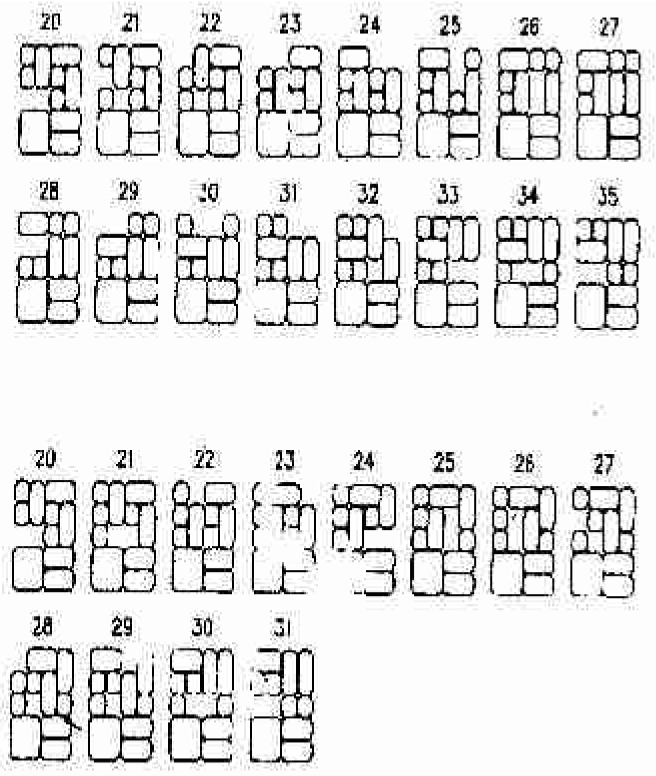


图 2 文献中 C30 布局走法与 HRDE 软件走法的比较

因为在此之前也曾经出现过类似的情况。中央电视台在 1985 年第 6 期的《电视周报》上就曾登载过有人声称打破了马丁·加德纳的 81 步记录，但后来被确认是不同的布局。

华容道游戏的布局可见图 1 中的例子。棋盘有 20 个方格，上面有大小不等的 10 个棋子，共占去 18 个方格。只有两个空的方格作为活动的余地。所有棋子只能利用这两个空格在棋盘的平面上平移而不得跳越其他的棋子，当然也不得越出边框。游戏的目标是要把最大的一个棋子（即 A，占 4 格）移到最下部的中央出口处。为了用最少的步数达到目的，显然必须最合理地运筹所有的棋子。由于形状不同的棋子互相阻塞，使得本游戏具有相当大的难度。国际上公认这类问题很难用数学方法来解决。附图中的"横刀立马"就是马丁·加德纳等人所研究的基本布局。后来，又衍生出许许多多新的布局。图 1 中只是极少数几个例子。

计算机解题的效果：

笔者编制的软件 HRDE 的贡献是成功地实现了一种系统搜索（Systematic searching）算法，它能在较短时间内，对用户摆放的任何一种布局判断是否有解。如果有解，则解出它的最少步法。然后，它会在屏幕上用动画方式移动棋子以显示它的运算方法。也可以用一连串的图形来静止地显示每一步的走法，便于用户仔细地观察研究。一般情况下，在已经很普及的 IBM486 计算机上解一道题仅需要一两分钟，在较慢的 286 计算机上则大约需要十几分钟。根据它的算法的原理可以肯定，它推导出的结果是绝对可信的。也就是说，它所解出的走法一定是该布局的最少步法。

作为一种检验，用本软件对文献上发表过的若干布局进行了验证，得到了一些有趣的结果。

首先，软件 HRDE 确认了马丁·加德纳的 81 步记录是最少步法。想要打破这一记录是不可能的。但是它也发现了文献上发表的另外一些布局的答案实际上并非最少步法。

例如，1986 年牛津大学出版的《SLIDING PIECE PUZZLES》一书中列出了在国外曾经出售过的 12 种华容道游戏（书中编号为 C15，C23 - 26，C27a～d，C30，C41，C42a）并给出了最少步法的答案。经过 HRDE 的验算，其中 11 个答案的确是最少步法，但编号为 C30 名 Top Secret 的一种布局（见图 1）书中给的 67 步走法并不是最少步数。最少步法应是 63 步。比较这两种走法可以看出差别是在第 20 至 35 步（见图 2）。书中走 15 步而 HRDE 只用 11 步就达到了相同的结果（有一点差别，但不影响后面的走法）。

又如，1987 年出版的《独立钻石和华容道》一书中除横刀立马以外，还列出 26 种不同的华容道布局，其中 19 种有答案经过 HPDE 的验算，9 种布局的答案确是最少步数。但另外 10 个答案不是最少步数。部分检验结果列在表 1。

书中布局名称	原答案的布数	HRDE 软件的答案	走法总数	运算时间（秒）
横刀立马	81	81	542	24
横竖皆将	92	81	587	51
守口如瓶之一	88	81	572	53
守口如瓶之二	100	99	625	56
层层设防之二	122	120	537	40
三军联防	74	65	436	22
堵塞要道	43	40	493	18
水泄不通	80	79	283	11
四路皆兵	67	66	283	12
五虎拦路	40	39	248	2
兵将连环	76	75	283	12
插翅难飞	62	62	765	80
层层设防之一	102	102	472	27

这些布局的新的走法请见本文末。

表 1 包含了上述竞赛的题目。《动手做》的竞赛题是：横刀、守口之一、层层之二、四路进兵。《文化娱乐》的题目是：横刀、守口之二、层层之二、水泄不通。《中国少年报》、《父母必读》和《少年科学画报》的题目是：横刀、插翅难飞、层层之一。

一个布局可能的走法越多，计算机解它所用的时间也越多。因此表中列出的运算时间反映了解答该布局的难度。可以看到，横刀立马并不是最难的，五虎拦路则相对较易。国外对每种布局的难易也有所评估，但笔者以为计算机的反映也许更有根据些。

此书中还有七种布局没有答案。现将 HRDE 得到的最少步数列于表 2。

书中布局名称	HRDE 软件的答案	运算时间（秒）
齐头并进	60	22
兵分三路	72	18
将涌曹营	62	23
横马当关	83	47
前当后堵	42	21
兵挡将阻	87	41
兵临城下	56	20

HRDE 程序的算法原理

HRDE 采用的算法原理很简单，也很直观。简言之，就是利用计算机快速处理大量数据的能力。让它把每个布局的所有可能的走法毫无遗漏地罗列出来，然后从中找出步数最少的走法。因此，只要保证不遗漏掉任何走法，运算的结果就是可靠的。具体到每一步，可能存在的走法并不多，保证这一点并不难。

编写此程序的要点是：（一）选择最佳的编码方法，既要用最少字节表达每个布局以节省内存，又要利于解析该布局的各种可能的走法，还要能够在数以万计的布局中迅速进行搜寻和对比。本程序表达每个布局只用 4 个字节；（二）解析每一步的走法时，保证不遗漏掉任何可能存在的走法；（三）必须设法避免一切重复的和镜像相同的走法，否则数据量之大会难以应付；（四）为了最后追溯出某种走法的全过程，采用了树状链式数据结构，每一布局都有指针指向上一步布局的地址。

笔者首次编成此程序是在 1985 年。当时是在 CROMEM - COZ2D 微机上用汇编语言实现的。由于 64K 内存不够用，运行中还必须把数据放到软盘上。解一道题要长达 2～ 5 小时之久。1994 年才把此程序移植到 IBM486 微型机上，增加了彩色动画显示。解题时间大大缩短到三分钟左右，达到了可实用的速度。

HRDE 在解题时，每推进一步就把这一步可能有的走法的数目显示在屏幕上。实际运行的情况是，第一步一般只有 2～8 种走法。但每种走法之后又有若干种走法，因此从第二步起走法的数目不断增加。大约 30 步之后会达到极大值。此后略有减少。多数布局还会出现第二次极大值。个别布局（例如水泄不通）还出现第三次极大值。最大的极大值就是这一布局可能有的走法的数目。一般在 200 至 800 之间（10 棋子），或 1400 左右（11 棋子〕，或 1800 之间（12 棋子）。这数目包括所有走得通和走不通的走法，但不包括一切重复的和镜像相同的走法。当然，这是计算机不加选择地罗列所有走法的结果。如果由人来选择，其中有些走法肯定不必考虑的。

如果某个布局的走法的数目达到极大值之后迅速降为零，软件就报告这一布局是走不通的。

可见，HRDE 是研究华容道游戏的一种有力工具。用它来研究各种布局的走法也许能发现一些规律。在研究数学方法时，它至少能起到验证的作用。

HRDE 也是游戏程序

本软件也是一个高雅的智力游戏。有助于增进逻辑思维能力。人们可以随意设计一种新布局。然后用按键移动棋子。每一步都将被计算机记录下来（省去了记录和涂改的麻烦），每步的图形会依次排列在屏幕上（每屏显示 24 步，然后滚动），可以一览无遗。此外还提供了以下功能：

1）随时可以退回去任意步数再重走；

2）如果重复了以前已经走过的图形，或镜像与之相同的图形，软件会提示用户，用不着自己去逐个查找；

3）随时可以把用户的走法存入磁盘，便于以后继续研究；

4）随时可用动画方式显示走法；

5）可以和计算机的答案比较，看是否是最少步数；

6）无论哪一步都可以要求计算机帮助，计算机会指出当前情况下的最佳走法。

显然， HRDE 也可以方便地用于华容道游戏的竞赛。当然，竞赛中必须禁止使用计算机解题的功能。

软件运行中有菜单及命令提示，不必事先学习就能使用。HRDE 全部用汇编语言编写，因此占内存少、运行速度快。即便如此，由于处理的数据量较大，计算机至少要提供 256k 内存供本软件使用。

限制应用此软件的条件是：最大棋子只允许一个：最小棋子允许有 4～8 个（棋子总数相应为 10～12 个），其余棋子任选；棋盘上只许有两个空格。不满足这些条件软件将拒绝运行。

另一个限制是，游戏的目标必须是把棋子 A 移动到出口处。国外文献上有一些游戏的目标是要把某些棋子移动到指定的新位置。HRDE 目前还不能解决这类题目。但经过少量修改应该是可以实现的。

答案

国内外文献中已发表的某些华容道布局的答案实际上并不是最少步数。以下是运行 HRDE 软件得到的最少步法。我们沿用 L．E．Hordern 的记录方法，即在多数情况下只要指明走哪一个棋子就够了，只有少数情况下才需要指明如何走。这时用以下符号来表示。L 向左；R 向右；U 向上；D 向下；！只走一格；＃必须拐弯（指最小棋子）。没有这些符号时，表示直走，到头为止（一格或两格）。棋子编号见图 1。

（1） 横竖皆将（原文 92 步，现 81 步）

6457 # 9683579L2A7517LA2459L458#319L458#319L45# 2A9#4136852A9743586D3A917431226R5# 8# A917431A9172685A934265#A

（2）守口如瓶之一（原文 88 步，现 81 步）

57L2A13641A27# 98416 #4165 #7956 #147 # 95#2A7 #94186D52A739156714D1A71391428R5 #6#A713914A832865A719285#A

（3）守口如瓶之二（原文 10O 步，现 99 步）

7#986 #31A247R2A136 #897#4A56 #897#8936# 516U51A4 812U81179352#87 # 4A2#8539174A26837195D3921683549 R1# 7# A216835A2164A71A238491#A

（4）层层设防之二（原文 122 步，现 120 步）

9L8#42A135248967253 1L,A4527698276#78# 7936#58 #4A6 # 538924A6158# A611583472U972A61# 4A6326# 79A1#328 531A971#A432#A16# 8A1431# 439786DA621439768A978 # A

（5）Top secret（原文 67 步，现 63 步）

7532146 7LA1#467113598A14253# 47R6241A893D51427U6 UA13983D1DA7D6D2549831A981#A

（6）三军联防（原文 73 步，现 65 步）

67437# 3421A758469# 64839L21A5# 389U4621A57 39# A124689A12469# A375124698A468#A

（7）堵塞要道（原文 43 步，现 40 步）

59674#2A3 #7569842DA317569842DA13D7569842A982#A

（8）水泄不通（原文 80 步，现 79 步）

97689U765489U549A13# 8A1291# 45A3# 21# 4567A541# 2

3 #54219D3854A761# 938#54A196719DA45283U6791A671

#A

（9）四路进兵（原文 67 步，11 66 步）

A43 #2A43 #152 #76A3 #12 #7698A6720#13 #67125D3467A

892# 534# 67A259825DA76143U9852A982# A

通知

2004-2005 学年第二学期数学建模协会将会开展一系列活动：

- 三次数学建模讲座及会刊发放
- **4** 月份，**04** 年全国竞赛同济颁奖会暨 **2005** 年竞赛动员会，同时开始校内竞赛及全国竞赛报名
- **5** 月份，校内竞赛
- **6** 月份，校内竞赛成绩发布，确定全国竞赛参赛队伍
- **9** 月份，全国竞赛

具体时间我们将及时通知您，敬请及时关注您留给我们的邮箱，同时欢迎登陆我们的网站邮箱，与我们联系！

网站地址：**http://math.tongji.edu.cn**（暂拟订 **4** 月份开放）

电子邮件：**mathst@mail.tongji.edu.cn**

数学建模协会

2005-3-10